



UNIVERSITE SIDI MOHAMMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MEHRAZ FES
Laboratoire d'Electronique, Signaux-Systèmes et
d'Informatique



THÈSE

Pour l'obtention du
DOCTORAT NATIONAL

UFR : Automatique et analyse des systèmes
SPECIALITE : Signaux-Systèmes et Informatique

Par

Mohammed Chakib SOSSE ALAOUI

Sous le Thème

Commande et Observateur par Modes glissants d'un système de pompage et d'un bras manipulateur

Soutenue le 08 / 07 /2009 devant le Jury composé par :

Président :

A. HMAMMED PES-Faculté des Sciences-Fès

Rapporteurs :

M. KABBAJ PES-Faculté des Sciences-Fès

F. ERRAHIMI PES-Faculté des Sciences et Techniques- Fès

Examineurs :

I. BOUMHIDI PES-Faculté des Sciences-Fès

R. ELBACHTIRI PES-Ecole Supérieur de Technologie- Fès

K. BOUZOUBAA PES-Faculté des Sciences-Fès

Directeur de Thèse :
Directeur-ENSA-Fès

M. MRABTI PES-Faculté des Sciences-Fès,

Remerciement

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein du laboratoire d'Electronique, Signaux Systèmes et d'Informatique de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz de Fès.

Je remercie vivement Monsieur *A. HMAMMED*, Professeur à la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz de Fès, de me faire l'honneur de présider le jury de thèse.

J'adresse également mes plus sincères remerciements à Monsieur *M. KABBAJ*, Professeur à la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz de Fès, et Madame *F. ERRAHIMI*, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques Fès- Saïs d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail. Je suis très reconnaissant pour le temps qu'ils ont consacré à l'étude du rapport de thèse, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mon travail et pour l'accueil qu'ils m'ont fait afin d'en discuter.

Je tiens à remercier également le Professeur *R. ELBACHTIRI*, Professeur à l' Ecole Supérieur de Technologie de Fès, de me faire l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Mes sincères remerciements s'adressent à Messieurs *I .BOUMHIDI et K. BOZOUBAA*, Professeurs à la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz de Fès, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mes travaux en me faisant l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Je ne saurais exprimer ma reconnaissance à Monsieur *M. MRABTI*, Professeur à la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz de Fès, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de diriger mes travaux. Qu'il trouve dans ce mémoire l'expression de ma sincère gratitude pour son soutien, ses conseils, ses remarques intéressantes et ses encouragements.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent à Monsieur *J BOUMHIDI*, Professeur à la Faculté poly disciplinaire de Taza, pour avoir suivi le déroulement de mon travail et m'avoir aidée à affiner et préciser ma démarche.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du Laboratoire *LESSI*, qui ont contribué, par l'amitié et le soutien, à la réalisation de ce travail.

Table des matières.

Table des matières.....	i
Notations.....	vi
Abréviations.....	vi
Introduction générale.....	1

Chapitre 1

Généralités sur Commande et Observateur par Modes glissants, Approche H^∞ et LMIs

1.1 Introduction.....	3
1.2 Approche du mode de glissement.....	3
1.2.1 Définitions.....	4
1.2.2 Phénomène de réticence.....	6
1.2.3 Détermination de la dynamique de glissement.....	7
1.2.3.1 Méthode de Filippov pour la détermination de la dynamique de glissement.....	8
1.2.3.2 Méthode de commande équivalente.....	9
a) Synthèse de la loi de commande.....	10
b) Robustesse des modes glissants vis à vis des perturbations.....	11
1.2.3.3 Méthode de régularisation.....	12
1.2.4 Degré relatif et choix de la surface de glissement.....	13
1.2.5 Description mathématique des modes glissants réels.....	13
1.2.6 Existence du mode de glissement.....	14
1.2.6.1 Conditions d'existence du mode de glissement.....	15
1.2.6.2 Exemple illustratif du domaine de glissement.....	17
1.2.7 Solution pour la suppression du phénomène de réticence.....	18
1.2.7.1 Solution de couche limite.....	18

1..2.7.2 Solution basée sur un observateur.....	19
1.3 Modes glissants d'ordre supérieur.....	20
1.3.1 Commande par modes glissants d'ordre deux.	20
1.3.2 Modes glissants idéaux et réels.....	21
1.4 Commande robuste H^∞	22
1.4.1 Synthèse par la méthode espace d'état.....	22
1.4.2 Problème H^∞ standard.....	23
1.4.3 Solution par équations Algébriques de Riccati et correcteur central.....	23
1.5 Analyse convexe et inégalités matricielles linéaires	24
1.5.1 Analyse convexe.....	25
1.5.2 Problèmes classiques LMIs.....	25
1.5.3 Problème à base de contrainte LMIs.....	26
1.5.3.1 Problème à base de contrainte LMIs.....	26
1.5.3.2 Propriétés du formalisme LMI.	27
1.6 Observateur classique par modes glissants.....	29
1.7 Conclusion.....	30

Chapitre 2

Application à la commande d'un Système de Pompage

2.1 Introduction.....	32
2.2 Modélisation du système de pompage.....	32
2.2.1 Principe du convertisseur buck.....	32
2.2.1.1 Principe de fonctionnement.....	33
2.2.1.2 Le rapport cyclique.....	33
2.2.2 Moteur et pompe.....	34
2.3 Modélisation du système de pompage dans l'espace d'état.....	35
2.4 Approche des modes glissants.....	37
2.4.1. Choix de la surface de glissement.....	38
2.4.2. Commande par mode glissant proposé.	38

2.4.3 Résultats de simulations.	41
2.5 Commande H^∞	42
2.5.1 Structure de commande H^∞	42
2.5.2 Modèle linéaire du système.	43
2.5.3 Définition des modèles d'ordres réduits pour la commande.....	43
2.5.4 Résultats de simulation.....	46
2.5.4.1 Sans perturbations.....	46
2.6 Comparaison de la robustesse de la commande par mode glissant et la commande H^∞	46
2.7 Conclusion.....	47

Chapitre 3

Commandes par modes glissants d'un robot à deux Articulations

3.1 Introduction.....	49
3.2 Modélisation du robot à deux articulations.....	49
3.3 Commande par modes glissants standard.....	51
3.3.1 Détermination de la surface de glissement.....	51
3.3.2 Conception de la loi de commande.	51
3.4 Commande et Surface de glissement basé sur l'approche LMIs.....	52
3.4.1 Formulation du problème en LMIs.....	53
3.4.2 Choix de la surface de glissement par LMIs.....	53
3.4.3 Synthèse de la loi de commande par modes glissants basé sur LMIs.....	54
3.5. Résultats de simulation.	55
3.5.1 Approche par mode glissant standard.	55
3.5.2 Approche par mode glissant basé sur LMIs.....	57
3.6 Conclusion.....	63

Chapitre 4

Observateurs par modes glissants

4.1 Introduction.....	64
4.2 Observabilité et observateurs	65
4.3 Observabilité des systèmes linéaires.....	66
4.4 Observateur non linéaire.....	67
4.4.1 Observateur classique par mode glissant.....	67
4.4.2 Principe de séparation.....	68
4.5 Description et modélisation du robot à une articulation.....	69
4.6 Forme d’observation triangulaire.....	73
4.6.1 Application de l’Observateur pour un robot à deux articulations.....	77
4.6.2 Mise sous forme triangulaire du modèle dynamique et observateur associé.....	78
4.6.3 Observation par modes glissants sous forme triangulaire a injection de sortie.....	78
4.6.4 Observateurs par modes glissants sous forme triangulaire.....	79
4.6.5 Convergence de l’observateur.....	80
4.6.5.1 Application au Modèle du système de pompage.....	83
4.6.5.2 Résultats de simulations.....	85
4.6.5.3 Résultats de simulations pour le robot à deux articulations.....	86
4.7 Conclusion.....	89
Conclusion générale et perspective.....	91
Bibliographie.....	92
Annexe A.....	99

Modélisation du bras manipulateur

A.1 Modèle dynamique d’un robot manipulateur.

A.2 Modèle dynamique du système.

Annexe B. 107

Compléments sur la Synthèse de commande par H^∞

B.1 Synthèse théorique d'un correcteur par factorisation première à gauche normalisée.

B.2 Complément sur la commande H^∞ .

Annexe C. 115

Linéarisation

C.1 Fonction non linéaire d'une variable.

C.2 Fonction non linéaire de deux variables.

C.3 Fonction non linéaire de n variable.

NOTATIONS.

S	Surface de glissement.
s	Equation décrivant la surface de glissement.
r	Degré relatif du système.
\mathfrak{R}	Ensemble des nombres réels.
u	Commande du système.
u_{eq}	Commande équivalente du système.
u_r	Commande robuste du système.
p	Variable de la transformée de Laplace.
A^*	Matrice complexe conjuguée transposée de la matrice A .
A^c	Matrice de commande.
$G(p)$	Système nominal.
$K(p)$	Correcteur.
λ_i	$i^{\text{ème}}$ valeur propre.
σ_i	$i^{\text{ème}}$ valeur singulière.
$\bar{\sigma}$	Valeur singulière maximale.
$\varepsilon, (\varepsilon_{\max})$	Marge de stabilité (maximale).
$\gamma = \frac{1}{\varepsilon}, \gamma_{\min}$	Niveau de tolérance admissible.
$\ \cdot \ _{\infty}$	Norme infinie.
$\ \cdot \ _H$	Norme de Hankel.
G_{Δ}	Modèle incertain défini.
$R_e(p)$	Partie réelle de la variable complexe p .
L_{∞}	L'ensemble des fonctions de transferts ou matrices de transferts de la variable complexe p .
H^{∞}	Ensemble des fonctions de transferts ou matrices de fonctions de transfert, de la

	variable complexe p , appartenant à L_∞ et sans pôle à $R_e(p) > 0$.
RH^∞	Sous-ensemble de H^∞ des fonctions rationnelles à coefficients réels.
$T_{L[\diamond]}$	Transformation linéaire fractionnaire.
\tilde{M}, \tilde{N}	Élément de factorisation première à gauche.
M, N	Élément de factorisation première à droite.
DC	Courant continu (Directly Curent).

ABREVIATIONS.

LLFT	Transformation linéaire fractionnaire inférieur (Lower Linear Fractionnal Transformation).
ULFT	Transformation linéaire fractionnaire supérieur.(Upper Linear Fractional Transformation).
NLCF	Factorisation Première à Droite Normalisée (Normalised Left Coprime Factorisation).
BIBS	Entrée bornée et état borné (Borne Input Borne State).
MCC	Moteur à courant continu.
HMT	Hauteur manométrique totale.

INTRODUCTION GENERALE.

Les systèmes réels sont dans la plupart du temps non linéaires, mal définis, ont des paramètres variables et sont soumis à des perturbations externes. La modélisation de ces systèmes relève très souvent d'une approximation des phénomènes physiques mis en jeu. Or, c'est à partir de cette représentation approximative des systèmes que l'on souhaite construire une commande pour le système réel. Cette commande doit être alors robuste dans le sens où elle devra assurer une faible sensibilité aux incertitudes sur les paramètres, à leurs variations et aux perturbations externes. L'objectif de ce travail consiste à déterminer des commandes robustes, performantes et relativement simples à mettre en oeuvre.

Lorsque la partie commandée du processus est faiblement perturbée, les commandes classiques, par exemple à action proportionnelle intégrale dérivée, peuvent s'avérer suffisantes si les exigences en précision et en performance du système ne sont pas trop sévères. Dans le cas contraire, il faut concevoir des algorithmes de commande assurant une robustesse du comportement, du processus vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres et leurs variations. On peut citer dans ce contexte, la commande H^∞ [Lava97], [Macf92], la commande par placement de pôle robuste [Del93], [Lan93], la commande par modes glissants [Utki92], [Sira83], [Leva03]. Dans ce travail, nous avons choisi la technique des modes glissants connue par sa grande robustesse en stabilité et en performance.

La caractéristique principale d'une commande par modes glissants est sa structure variable avec commutation sous certaines conditions prédéfinies lors de la synthèse de part et d'autre d'une surface choisie a priori, appelée surface de glissement. Le système commandé est dit alors en régime glissant et sa dynamique devient moins sensible aux variations paramétriques, aux erreurs de modélisation et à certaines perturbations externes, La mise en oeuvre d'une telle commande est relativement simple et ne nécessite pas une représentation exacte du processus, ce qui est un avantage considérable. Cependant, l'utilisation de cette approche a longtemps été limitée par les vibrations résiduelles en hautes fréquences qui se manifestent sur les grandeurs asservies et les variables de commandes. Sur le plan expérimental, ce phénomène appelé réticence est un problème qui n'a été résolu qu'après les récents progrès de l'électronique de puissance, et plus particulièrement, des circuits de commutation, et les convertisseurs de puissances électriques, et des travaux de Slotine, Sira-Ramirez et autres

[Slot83], [Slot84], [Sira92]..., permettant ainsi l'application réelle dans plusieurs domaines dont, en premier lieu, celui de la robotique et de l'électrotechnique (où l'électronique de puissance). Les travaux relatés aux travers de ce travail, s'inscrivent dans le contexte de l'étude des commandes robustes d'un système de pompage composé d'un convertisseur de puissance électrique de type "buck converter", d'un moteur à courant continu (MCC) muni d'une pompe centrifuge et d'un système constitué d'un robot manipulateur à deux articulations.

Ce travail est organisé en quatre chapitres, dans le premier chapitre on présente les éléments théoriques nécessaires à la compréhension du mode de glissement, à la description des différentes méthodes qui permettent la détermination de la dynamique du système, l'approche H^∞ , la technique d'optimisation LMIs, et le choix d'un observateur triangulaire par mode de glissement.

Le deuxième chapitre est consacré au développement de commandes par modes glissants d'ordre un et leurs applications pour le système de pompage. La comparaison avec l'approche H^∞ montre une meilleure performance de ces commandes par modes glissants d'ordre un. Le phénomène de réticence a été considérablement réduit par l'utilisation des fonctions de lissage.

Au troisième chapitre; une extension de la commande précédente est présentée pour un robot manipulateur à deux articulations pour laquelle la conception de la surface de glissement est basée sur l'approche des inégalités linéaires matricielles (LMIs).

Dans le quatrième chapitre nous introduisons les observateurs non linéaires par modes glissants permettant d'estimer l'état complet du système que nous utiliserons pour les différentes lois de commande proposées, des simulations sont alors présentées pour illustrer d'une part la robustesse et d'autre part les performances de la commande et de l'observateur proposés.

Ainsi l'objectif de ce mémoire est la construire des schémas de commande et d'observation assurant à la fois, robustesse et performance, adaptés aux systèmes de pompages et robots manipulateur.

Chapitre 1

Généralités sur la Commande et Observateur par Modes glissants, Approche H^∞ et LMIs

1.1 Introduction.

Ce chapitre est destiné à introduire les éléments théoriques nécessaires à la compréhension du fonctionnement des commandes par modes de glissement, des commandes H^∞ et la mise en œuvre de la technique d'optimisation LMIs, or la mise en œuvre de lois de commandes basées sur le modèle non linéaire du système, nécessite la connaissance du vecteur d'état complet du système à chaque instant. Mais, dans la plupart des cas, les seules grandeurs accessibles du système sont les variables d'entrée et de sortie, il est nécessaire à partir de ces informations de reconstruire l'état du modèle choisi pour élaborer la commande. De ce fait, l'idée repose sur l'utilisation d'un observateur, notre choix s'est fixé sur un observateur triangulaire par mode de glissement.

Or, pour les systèmes linéaires, le problème de synthèse d'observateurs est résolu de manière théorique tandis que pour les systèmes non linéaires, la synthèse d'observateurs est encore un problème ouvert. Une des classes les plus connues des observateurs robustes est celle des observateurs par modes glissants, ce type d'observateur est basé sur la théorie des systèmes à structure variable. Ces derniers ont de bonnes propriétés de robustesse vis-à-vis des erreurs paramétriques et des perturbations bornées.

1.2 Approche des modes glissants.

Un modèle mathématique constitue souvent une description approchée de la réalité physique, et la loi de commande ne pourrait être construite que sur ce dernier. Ainsi la commande choisie devra être robuste dans le sens où elle devra garantir une faible sensibilité aux erreurs et aux incertitudes sur les paramètres, à leurs variations et aux perturbations. Notre choix s'est porté sur la commande par modes de glissement qui n'est autre qu'un cas particulier de la théorie des systèmes à structure variable et multifonctions. Basée essentiellement sur la résolution des équations différentielles à second membre discontinu,

initiiée par Filippov en 1960 [Fili60], sera utilisée dès la parution des livres d'Emelyanov [Emel67], d'Itkis [Itki76] et d'Utkin [Utki78]. La communauté automatique s'est rapidement rendu compte de l'intérêt de cette technique qui allie simplicité de synthèse et robustesse [Edwa96, Sira93, Slot84, Slot86, Yang99].

1.2.1 Définitions.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

et l'hypersurface : $s(x) = 0$.

f un champ de vecteur suffisamment différentiable.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \begin{cases} u^+ & \text{si } s(x) > 0 \\ u^- & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \\ u(x, t) &\in [-1, 1] \quad \text{si } s(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

$u \in \Omega \subset \mathfrak{R}$: est la commande du système.

Où x est l'état du système de dimension n évoluant dans une variété θ isomorphe à \mathfrak{R}^n , caractérisant le domaine physique de fonctionnement du système. Le système (1.1) avec la loi de commande (1.2) est intrinsèquement à structure variable [Utki78]. En revanche, le système rendu discontinu par le choix d'une commande discontinue, u est dit à discontinuité artificielle.

Le système variable (1.1) avec la loi de commande (1.2) peut se ramener à l'écriture suivante

$$\dot{x} = f(x, t, u) = \begin{cases} f^+(x, t) & \text{si } s(x, t) > 0 \\ f^-(x, t) & \text{si } s(x, t) < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Où $f^+(x, t)$ et $f^-(x, t)$ sont des champs de vecteurs complets dans \mathfrak{R}^n .

$s(x, t)$: est une surface dans \mathfrak{R}^n qui divise l'espace en deux parties disjointes $s(x, t) > 0$ et $s(x, t) < 0$ qu'on notera respectivement \mathcal{E}^+ et \mathcal{E}^- .

Remarque 1.1 : D'autres systèmes sont de conception naturellement discontinus, à titre d'exemples les circuits électroniques contenant des commutateurs [King82] et les systèmes mécaniques contenant un frottement sec [Utki78, Utki92]. Qu'ils soient à discontinuité

artificielle ou naturelle, les systèmes à structure variable de type (1.1) peuvent tous se ramener à la forme (1.3).

En dehors de la surface de discontinuité les vecteurs vitesse f^+ et f^- peuvent avoir différents comportements :

- les vecteurs vitesse f^+ et f^- traversent la surface d'un côté vers l'autre (Figure.1.1.a, Figure.1.1.b)
- les vecteurs f^+ et f^- sont pointés chacun vers la surface (Figure.1.1.c)

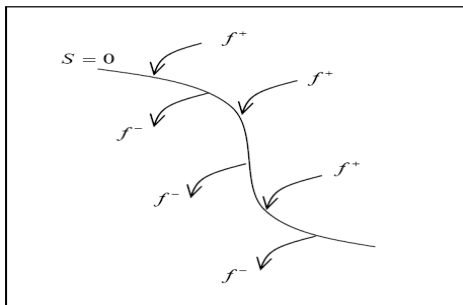


Figure.1.1.a

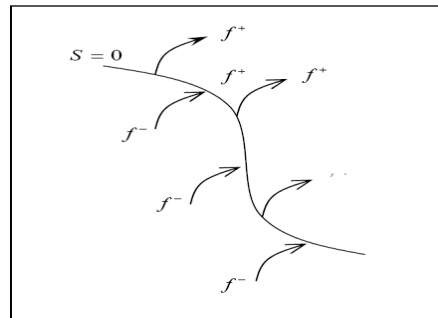


Figure.1.1.b

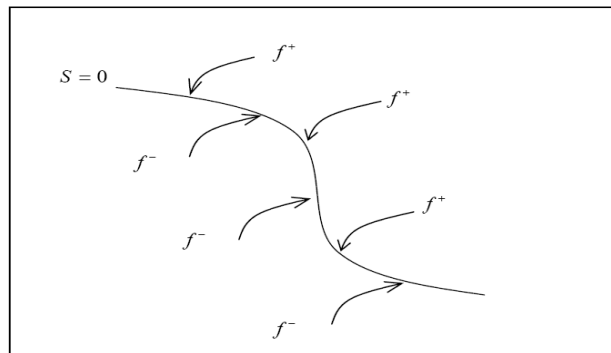


Figure.1.1.c

Figure.1.1 : Différents comportements en dehors de la surface de discontinuité.

Le cas qui nous intéresse est celui où les deux vecteurs vitesses f^+ et f^- sont pointés chacun vers la surface, on dit alors que la surface est attractive (figure 1.1.c).

Définition 1.1.

Une surface $s = 0$ est attractive pour un domaine de convergence donné si toute trajectoire évoluant dans le domaine d'attraction est dirigée vers cette surface.

Définition 1.2.

Une surface $s = 0$ est invariante si toute trajectoire débutant dans cette surface ou atteignant cette surface, ne peut en sortir et évolue donc sur cette surface.

Si l'état du système est de côté \mathcal{E}^+ de l'espace d'état (ou du côté \mathcal{E}^-), il rejoindra forcément la surface $s = 0$. S'il dépasse de l'autre côté \mathcal{E}^- (ou du côté \mathcal{E}^+), il se ramènera vers $s = 0$ (figure 1.2). Cette surface $s = 0$ est donc appelée surface glissante et le mouvement sur cette surface est un mode glissant dont l'équation détermine la dynamique désirée du système.

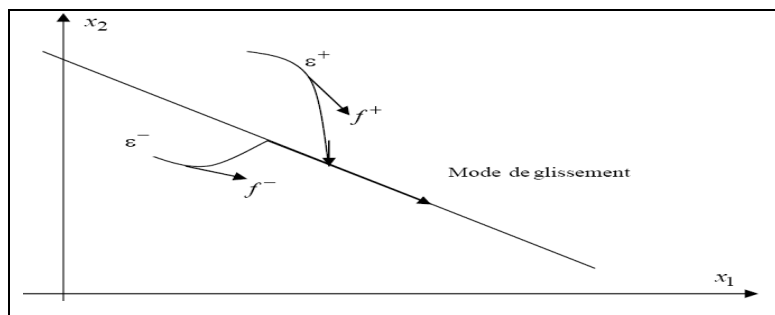


Fig.1.2 Mode de glissement idéal

Une surface de discontinuité $s = 0$, suivant que l'état du système est sur \mathcal{E}^+ ou sur \mathcal{E}^- , il atteint la surface respectivement avec les vitesses f^+ ou f^- .

L'équation du mouvement est alors donnée par les solutions des équations différentielles à second membre continu $f^+(x,t)$ et $f^-(x,t)$, à savoir:

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(x,t) & \text{si } x \in \mathcal{E}^+ \\ f^-(x,t) & \text{si } x \in \mathcal{E}^- \end{cases}$$

Où les solutions à ces deux équations différentielles ordinaires existent par hypothèses.

En général l'étude théorique de ce type de systèmes comportant des discontinuités n'est pas classique. En effet, les équations différentielles ne satisfont pas les conditions d'existence et d'unicité de solution à cause des termes discontinus non Lipchitziens, et en général non défini sur les surfaces de discontinuités.

1.2.2 Phénomène de réticence.

En pratique, le terme discontinu à droite de l'équation peut exciter des dynamiques hautes fréquences non modélisées qui entraînent l'apparition de ce qu'on appelle "réticence" ou

“broutement” connu en anglais sous le nom de “chattering”, et qui se caractérise par des fortes oscillations autour de la surface.

Du point de vue de la synthèse de commande, on procède généralement au choix de la surface de commutation $s(x) = 0$ en fixant le plus souvent la dynamique de glissement, puis on en déduit une commande discontinue $u(x,t)$ du type (1.2) qui rend cette surface attractive et assure ainsi l’apparition du mode de glissement.

Ce mode de glissement idéal est illustré par la figure (1.2). Un mode de glissement idéal correspond à une commande qui commute à une fréquence infinie or il n’existe aucun organe de commande pouvant réaliser cette opération.

Malgré les différents avantages de la commande par modes de glissement, son utilisation a été entravée par un inconvénient majeur lié au phénomène de réticence (broutement ou encore chattering) (figure (1.3)). Ce phénomène est une conséquence naturelle du comportement dynamique réel de l’ensemble actionneur système à commander.

La réticence peut provoquer une détérioration anticipée de l’organe de commande ou exciter des dynamiques hautes fréquences non considérées dans la modélisation du système. Ainsi, nous allons chercher par différentes méthodes à limiter ce phénomène. Une approche consiste à remplacer la fonction signe par une fonction plus lisse.

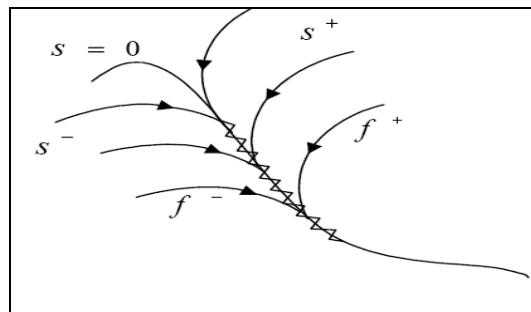


Fig.1.3 Mode de glissement avec réticence.

1.2.3 Détermination de la dynamique de glissement.

Pour décrire le mouvement de glissement sur la surface $s(x) = 0$, de nombreux travaux existent et s’inscrivent tous dans le cadre de la résolution des équations différentielles à second membre discontinu. On citera principalement les ouvrages d’Utkin [Utki92],[Utki 93], celui de Filippov [Fili60], et de Slotine et Li [Slot91] qui traitent de manière détaillée le mode

de glissement. Quand la surface de glissement est atteinte, la théorie des équations différentielles ordinaires n'est plus applicable car le système (1.3) ne vérifie plus les conditions classiques d'existence et d'unicité de solutions du théorème de Cauchy-Lipshitz. En effet, la solution de l'équation (1.3) existe et unique si la condition de Lipsitchz est satisfaite :

$$\forall t > 0, \exists L > 0 / \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D} \quad \|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad (1.4)$$

Cette condition n'est évidemment pas vérifiée au voisinage de la surface de commutation à cause de la discontinuité du champ f .

Il existe principalement trois méthodes pour la détermination du mode de glissement :

- La méthode de Filippov [Fili60].
- La méthode de la commande équivalente [Utki78, Utki92].
- La méthode de régularisation.

1.2.3.1 Méthode de Filippov pour la détermination de la dynamique de glissement.

Filippov [Fili60] s'est intéressé à la détermination du vecteur f_0 (le champ de vecteurs vitesses sur la surface de glissement) pour des systèmes dont la variable commandée n'apparaît pas d'une manière explicite dans l'expression du champ f . Selon lui, en tout point x^* de la surface de discontinuité le vecteur vitesse f_0 appartient au plus petit convexe fermé contenant toutes les valeurs de f et ceci quand x balaye tout le δ^- voisinage du point x^* considéré excluant le point lui-même. Ainsi, pour des systèmes avec une seule surface de discontinuité, la méthode de Filippov donne lieu au résultat suivant:

- Le convexe minimal de tous les vecteurs $f(x)$ du δ^- voisinage de la surface de commutation (Figure.1.3) est un segment de droite reliant les deux extrémités de f^- et f^+ . Où (f_*^- et f_*^+ sont les limites respectives des champs $f^-(x)$ et $f^+(x)$ quand x tend vers x^*).
- Puisque le vecteur f_0 prend la direction du plan tangent à la surface de commutation, l'extrémité de ce vecteur est le point d'intersection de ce plan avec le segment de droite reliant les deux extrémités de f^- et f^+ .

- L'expression du vecteur vitesse f_0 en mode de glissement est donnée par :

$$f_0 = \mu f^+ + (1 - \mu) f^- \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (1.5)$$

Le paramètre μ est déterminé à partir de la résolution de l'équation $\text{grad } s \cdot f_0 = 0$ (f_0 appartient au plan tangent à la surface de commutation vecteur). Il vient alors:

$$\mu = \frac{\text{grad } s \cdot f^-}{\text{grad } s \cdot (f^- - f^+)} \quad (1.6)$$

L'équation du mode de glissement selon Filippov est alors définie par :

$$\dot{x} = \frac{\text{grad } s \cdot f^-}{\text{grad } s \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad } s \cdot f^+}{\text{grad } s \cdot (f^- - f^+)} f^- \quad (1.7)$$

Lorsque le système est variant dans le temps ($s(x,t)$ ou $f(s,t)$), il faut poser le temps comme étant la $(n+1)^{\text{ème}}$ variable d'état. L'équation (1.7) sera étendue avec la composante de temps et la relation (1.7) devient:

$$\dot{x} = \frac{\text{grad } s \cdot f^-}{\text{grad } s \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad } s \cdot f^+}{\text{grad } s \cdot (f^- - f^+)} f^- - \frac{\partial s}{\partial t} \frac{1}{\text{grad } s \cdot (f^- - f^+)} (f^- - f^+) \quad (1.8)$$

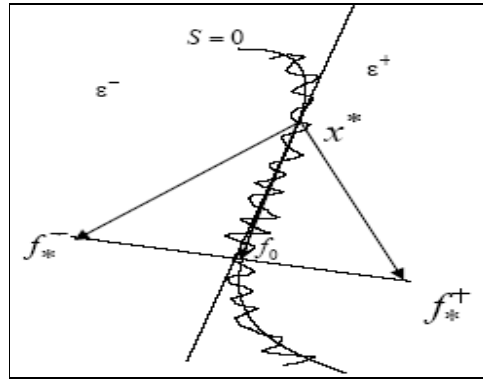


Fig.1.4 Construction de Filippov.

1.2.3.2 Méthode de la commande équivalente [Utki 92].

La méthode proposée par Utkin [Utki92], consiste à admettre qu'en mode de glissement, tout se passe comme si le système était piloté par une commande u_{eq} , dite commande équivalente qui permet de maintenir l'état du système sur la surface de discontinuité $s = 0$.

a) Synthèse de la loi de commande

Considérons le système linéaire en commande défini par :

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)u \quad (1.9)$$

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(x,t) & \text{si } s_i(t) > 0 \\ u_i^-(x,t) & \text{si } s_i(t) < 0 \end{cases} \quad u \in \mathfrak{R}^m$$

où $s_i(t)$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de la fonction de commutation vectorielle $s(t)$.

Supposons que le comportement en mode glissant existe sur la surface de glissement $s(x,t)$ et essayons de trouver la commande continue telle que, à partir de la position initiale du vecteur d'état sur la région $(s(x(t_0), t_0))$, la dérivée du vecteur $s(x,t)$ demeure nulle :

$$\dot{s}(x,t) = \frac{\partial s}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

Supposons que la solution de l'équation (1.9) respectant u existe et notée u_{eq} .

En remplaçant \dot{x} par sa valeur, on trouve :

$$\frac{\partial s}{\partial x} (f(x,t) + B(x,t)u) + \frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

En supposant que $\frac{\partial s}{\partial x} B(x,t)$ est inversible on a :

$$u_{eq} = -(GB)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + Gf(x,t) \right) \quad \text{avec } G = \frac{\partial s}{\partial x} .$$

La trajectoire d'état en mode de glissement est obtenue par la substitution de u_{eq} dans l'équation (1.9) on obtient :

$$\dot{x} = f(x,t) - B(x,t)(GB)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + Gf(x,t) \right) \quad (1.11)$$

De plus, pour ces systèmes affines en commande, Utkin a montré que par rapport à la commande initialement commutante $u(x,t)$ donnée par (1.2), la commande équivalente n'est rien d'autre que la composante basse fréquence de la commande commutante réellement appliquée au système physique [Utki78], [Utki92]. Globalement le système réagit comme s'il est commandé par la commande équivalente u_{eq} .

Dans le cas général, où le système n'est pas affine en u :

$$\dot{x} = f_{eq} = f(x,t,u_{eq})$$

Il n'est pas facile de résoudre analytiquement l'équation d'invariance suivante :

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial x} f(x, t, u_{eq}) + \frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

Il existe cependant, une méthode graphique pour trouver le vecteur f_{eq} (figure.1.5) pour les systèmes commandés entre $-u_{max}$ et $+u_{max}$. En variant u entre $-u_{max}$ et $+u_{max}$ jusqu'à ce que le vecteur recherché soit tangent à la surface de discontinuité, il suffira ensuite de reprendre la procédure pour différents points de la surface de discontinuité.

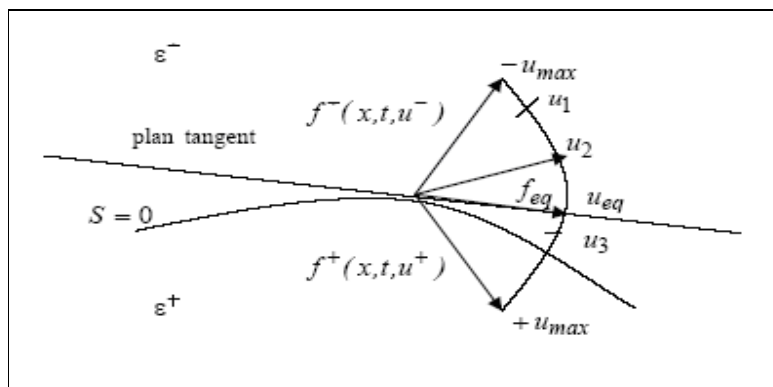


Fig.1.5 Construction par la méthode de la commande équivalente.

b) Robustesse des modes glissants vis à vis des perturbations.

Considérons le système perturbé suivant :

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x)u + \eta(x, t) \tag{1.12}$$

Où η représente l'effet des incertitudes paramétriques sur le modèle ou des perturbations externes.

Sur la surface de glissement la robustesse du régime glissant vis à vis des perturbations est donnée par le théorème suivant qui n'est autre que la généralisation de la condition classique d'invariance vis-à-vis des perturbations externes établie par Drazenovic [Draz69] dans le cas des systèmes linéaires.

Théorème 1.1 [Sira88] : Le régime glissant sur s , du système perturbé (1.12), est invariant vis à vis de η , si et seulement si le vecteur perturbation η est engendré par $B(x)$.

Cette condition est appelée condition de recouvrement connue sous le nom "matching condition".

Considérons la commande suivante, calculée en utilisant la méthode de commande équivalente pour le système perturbé (1.12) :

$$u_{eq} = -(GB)^{-1}(G\eta + (\frac{\partial s}{\partial t} + Gf(x,t)))$$

En substituant u_{eq} dans (1.12) on a :

$$\dot{x} = f(x,t) - B(x)[(GB)^{-1}(G\eta + (\frac{\partial s}{\partial t} + Gf(x,t)))] + \eta(t)$$

Avec

$$\eta(x,t) = B(x,t)\alpha(x,t) \quad \text{on a : } \dot{x} = f(x,t) - B(x)[(GB)^{-1}(\frac{\partial s}{\partial t} + Gf(x,t))] \quad (1.13)$$

La trajectoire $x(t)$ déterminée par la méthode de commande équivalente est donc invariante vis à vis de η .

1.2.3.3 Méthode de la régularisation.

Cette méthode introduit une zone d'implémentation $C(\delta)$ d'épaisseur 2δ autour de la surface de discontinuité (Fig.1.5), dans cette zone appelée couche limite, le vecteur vitesse $f(x)$ est remplacé par le vecteur \bar{f} , obtenu par une approximation du mouvement dans $C(\delta)$, et la dynamique pourra être décomposée en un mouvement lent sur la surface et un mouvement rapide normal dans $C(\delta)$ sera :

$$\dot{x} = \bar{f}(x, \delta) = f(x, \bar{u}, \delta) \quad (1.14)$$

Le mode de glissement n'aura pas lieu exactement sur la surface de discontinuité mais sur la couche limite $C(\delta)$ (fig.1.5). L'équation du mode de glissement idéal pourra être obtenue en faisant tendre δ vers zéro.

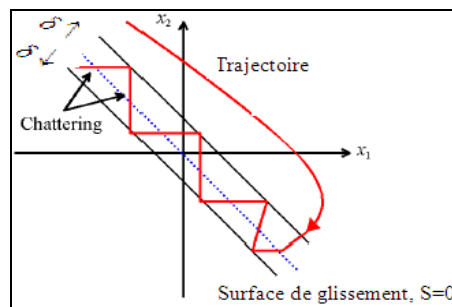


Figure1.5 : Régularisation sur une zone 2δ

1.2.4 Degré relatif et choix de la surface de glissement.

Le but de ce paragraphe est de montrer le lien entre le degré relatif du système et le choix de la surface de glissement pour la synthèse de la loi de commande.

L'erreur de poursuite est défini comme étant $e(t) = y(t) - y_r(t)$, où $y(t)$ est la sortie du système et $y_r(t)$ est le signal de référence.

On définit le degré relatif du système par rapport à la sortie $y(t)$ comme étant le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie $y(t)$ par rapport au temps, pour y avoir apparaître l'entrée de manière explicite [Isi95].

Théorème 1.2 [Itki76] : Un régime glissant d'ordre un existe sur la surface s si et seulement si le système (1.2) est de degré relatif un par rapport à $s(x, t)$.

La surface de glissement est choisie alors selon la remarque suivante :

Remarque 1.2 :

Soit $s(z_0, \dots, z_{l-1}) = z_{l-1} + \alpha_{l-2}z_{l-2} + \dots + \alpha_1z_1 + \alpha_0z_0$ où les coefficients α_i sont choisis tel que l'équation caractéristique : $z^{l-1} + \alpha_{l-2}z^{l-2} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0$ possède ses racines strictement dans le demi plan complexe gauche. Alors $s(e, \dot{e}, \dots, e^{l-1}) = 0$ est une équation linéaire ordinaire stable $e^{l-1} + \alpha_{l-2}e^{l-2} + \dots + \alpha_1\dot{e} + \alpha_0e$.

L'erreur de poursuite $e(t) = y(t) - y_r(t)$ tend alors asymptotiquement vers zéro en un temps fini si on peut trouver une loi de commande qui assure que $s(e, \dot{e}, \dots, e^{l-1}) = 0 \quad \forall t \geq t_f$ avec $t_f > t_0$. Où $y(t)$ est la sortie du système et $y_r(t)$ est le signal de référence.

1.2.5 Description mathématique des modes glissants réels.

Soit le système suivant :

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u \tag{1.15}$$

Où u est la nouvelle commande qui permet la régularisation du problème.

Pour distinguer les solutions de (1.11) et (1.15) on note x_e la solution dite idéale et obtenue par application de la commande équivalente (1.11). Soit le Δ -voisinage de zéro comme suit:

$$\|s\| \leq \Delta \quad (1.16)$$

et supposons que la distance $s(x)$ de tout point dans le voisinage de (1.12) à $s(x) = 0$ est estimée par l'inégalité :

$$r(x,t) < p\Delta \quad \text{où} \quad p > 0.$$

Théorème 1.3 : [Utki92].

Si les hypothèses (1)-(4) suivantes sont vérifiées :

(1) il existe $x(t)$ solution du système (1.15) sur l'intervalle de temps $[0, T]$ tel que l'inégalité (1.16) est vérifiée.

(2) pour la partie droite de l'équation différentielle (1.11) respectant x_e en utilisant la méthode de la commande équivalente (sous l'hypothèse $\det(GB) \neq 0$) :

$$\dot{x}_e = f(x_e, t) - B(x_e, t)[G(x_e)B(x_e, t)]^{-1}G(x_e)f(x_e, t) \quad (1.17)$$

La constante de Lipchitz L existe.

(3) Les dérivées partielles de la fonction

$$B(x,t)[G(x)B(x,t)]^{-1}$$

Respectant tous les arguments existents, et sont bornés dans tout domaine borné.

(4) pour la partie droite de l'équation des modes glissants réels (1.15) :

$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u$, il existe des nombres positifs M et N tels que :

$$\|f(x, t) + B(x, t)u\| \leq M + N\|x\|$$

Alors pour toute paire de solutions (1.11) et (1.17) sous les conditions initiales :

$\|x(0) - x_e(0)\| \leq p\Delta$, il existe un nombre positif H tel que :

$$\|x(t) - x_e(t)\| \leq H\Delta \quad \text{pour } t \in [0, T].$$

1.2.6 Existence du mode de glissement.

L'étude de l'existence du mode de glissement, comme l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre, est basée sur la deuxième méthode de Lyapunov. Afin de garantir l'attractivité de la surface $s(x,t)=0$, on considère une fonction de Lyapunov V définie positive dont la dérivé par rapport au temps le long des trajectoires du système en boucle fermée sera définie négative.

Dans certains cas, le glissement n'a lieu que sur une partie de la surface de commutation car l'attractivité de cette dernière n'est assurée que dans un domaine restreint D_g c'est le domaine de glissement. Celui-ci est défini comme suit :

Définition.1.3 [Utki77] : Un domaine D_g dans la variété $s(x,t)$ est un domaine de glissement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que tout mouvement commençant dans le Δ - voisinage de D_g ne peut quitter le ε^- voisinage de D_g qu'à travers le ε^- voisinage de la frontière extrême du domaine D_g .

1.2.6.1 Conditions d'existence du mode de glissement.

La condition d'existence du mode de glissement est l'attractivité de la surface de commutation $s(x) = 0$. Géométriquement, les vecteurs vitesses f^+ et f^- vont être dirigés vers la surface de commutation. Cependant, dans certains cas, le glissement n'a pas lieu sur n'importe quel point de la surface de commutation car l'attractivité de cette dernière n'est assurée que dans un domaine restreint D_g , que l'on appelle domaine de glissement. Le théorème suivant, fournit les conditions d'existence du mode de glissement selon Filippov.

Théorème 1.4 [Fili60] : considérons le système décrit par (1.1) satisfaisant la condition :

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\| \leq K \quad i, j = 1, \dots, n$$

K étant une constante. Cette condition étant vérifiée pour tout x dans le domaine $X = s^- \cup s^+$. Soit une fonction s deux fois différentiable, telle que chacune des fonctions f_N^+ et f_N^- est continue par rapport à x et t , pour x solution de $s(x) = 0$, et le vecteur $h = f_N^+ - f_N^-$ est continûment différentiable. Si en chaque point de la surface $s(x) = 0$, les inégalités $f_N^+ < 0$ et $f_N^- > 0$ sont vérifiées, il existe alors dans le domaine X , une solution unique $x(t)$ du système (1.1) qui dépend des conditions initiales de façon continue.

On peut remarquer que les inégalités $f_N^+ < 0$ et $f_N^- > 0$ signifient que s est attractive au moins dans un voisinage.

Un deuxième théorème, basé sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov, fournit les conditions d'existence du mode de glissement selon Utkin.

Théorème 1.5 [Utki78] : Pour que le domaine D_g de dimension $(n-1)$ soit un domaine de glissement pour le système (1.1) et (1.2), il suffit que dans un domaine $\Omega \in \vartheta$ contenant D_g , il existe une fonction de Lyapunov $V(s, x, t)$ continûment différentiable par rapport à tous ses arguments et satisfaisant les conditions suivantes:

a- $V(s, x, t)$ est définie positive par rapport à s , i.e. $V(s, x, t) > 0$ pour $s \neq 0$ avec (x, t) arbitraires et $V(0, x, t) = 0$.

b- sur la sphère $\|s\| = R, \quad \forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned} i - \inf V(s, x, t) &= h_R, & h_R &> 0 \\ ii - \sup_{\|s\|=R} V(s, x, t) &= H_R, & H_R &> 0 \end{aligned}$$

Avec h_R et H_R dépendant de R et $h_R \neq 0$ si $R \neq 0$.

c- La dérivée totale de $V(s, x, t)$ le long des trajectoires du système a un maximum négatif pour tout x de Ω excluant la surface de commutation pour laquelle la commande u n'est pas définie et la dérivée de $V(s, x, t)$ n'existe pas.

Théorème 1.6 [Utki92]: Pour obtenir un domaine de modes stables le long de l'intersection des surfaces de discontinuités ($s = 0$), il suffit que pour tout x et t , il existe une fonction $V(s, x, t)$ avec les conditions a, b et c du théorème 1.5 et la condition suivante doit être satisfaite:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} h_R \rightarrow \infty$$

Pour la suite nous choisissons la fonction de Lyapunov : $V = \frac{1}{2} s^2$

Alors pour que la surface $s = 0$ soit attractive sur tout le domaine de fonctionnement ϑ , il suffit que la dérivée par rapport au temps de V soit négative :

$$s\dot{s} < 0 \quad \forall x \in \theta \tag{1.18}$$

Pour une convergence en temps fini, la condition (1.18) qui ne garantit qu'une convergence asymptotique vers la surface de glissement est remplacée par une condition plus restrictive

dite de η -attractivité et donnée dans [Slot83] :

$$s\dot{s} < -\eta|s| \quad \forall x \in \theta \quad (1.19)$$

où η est une constante positive. Dans ce cas on peut assurer que la surface $s = 0$ va être rejointe avec un temps de convergence finie t_{con} tel que :

$$t_{con} < \frac{|s(t=0)|}{\eta}$$

Remarque 1.3

Il n'est pas suffisant que la dynamique de glissement soit asymptotiquement stable, il faut aussi que le domaine de glissement passe par le point d'équilibre désiré.

1.2.6.2 Exemple illustratif du domaine de glissement [Bouk97].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k\text{sign}(s) \end{aligned}$$

Avec l'équation décrivant la surface de glissement choisie comme étant, $s(x) = x_2 + cx_1$ où c est une constante positive et $x = [x_1 \ x_2]^T$.

Nous choisissons la fonction de Lyapunov : $V = \frac{1}{2}s^2$, alors pour que la surface $s = 0$ soit attractive il suffit que :

$$s\dot{s} < 0 \quad (1.20)$$

La condition d'attractivité (1.20) donne lieu au développement suivant : $\dot{s} = cx_2 - k\text{sign}(s)$

$$s > 0 \text{ et } \dot{s} < 0 \Rightarrow x_2 < \frac{k}{c}$$

$$s < 0 \text{ et } \dot{s} > 0 \Rightarrow x_2 > -\frac{k}{c}$$

en notant respectivement D_a^+ et D_a^- les domaines d'attractivités pour $s > 0$ et $s < 0$ on a :

$$D_a^+ = \left\{ x / s > 0 \text{ et } x_2 < \frac{k}{c} \right\} \qquad D_a^- = \left\{ x / s < 0 \text{ et } x_2 > -\frac{k}{c} \right\}$$

Et alors le domaine de glissement est donnée par : $D_g = \{x / x \in \bar{D}_a^+ \cap \bar{D}_a^-\}$ où \bar{D}_a^+ et \bar{D}_a^- sont les plus petits fermés respectifs de D_a^+ et D_a^- .

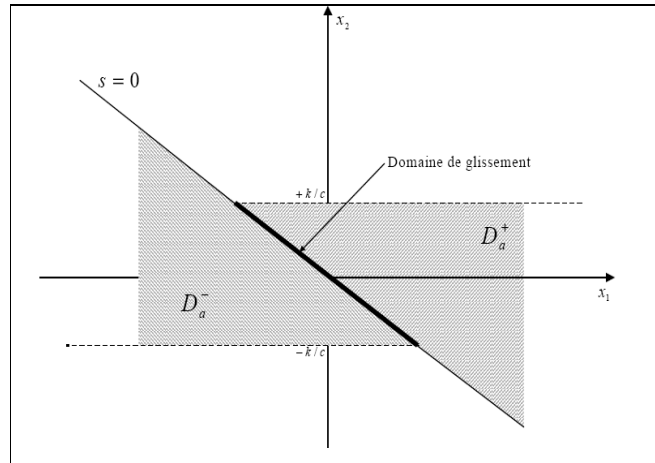


Fig.1.8 : Domaine de glissement.

1.2.7 Solutions pour la suppression du phénomène de réticence.

Le phénomène de réticence constitue un inconvénient majeur non négligeable, car même s'il est possible de le filtrer à la sortie du processus, il est susceptible d'exciter des modes de hautes fréquences qui n'ont pas été pris en compte lors de la modélisation du système. Ceci peut dégrader les performances et même conduire au problème d'instabilité [Utk92]. La réticence implique également d'importantes oscillations mécaniques au niveau des actionneurs, pouvant provoquer leur usure rapide, ainsi que des pertes énergétiques non négligeables au niveau des circuits de puissance électrique. Dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène, de nombreuses solutions ont été proposées [Slot84], [Bond85], [Drak90].

1.2.7.1 Solution de couche limite.

Cette solution connue aussi par le nom "boundary layer solution", a été proposée par Slotine et Sastry en 1983 [Slot83] et Slotine 1984 [Slot84] elle consiste à effectuer une approximation continue des discontinuités présentes dans la loi de commande au voisinage de la surface de glissement.

Supposons que la commande discontinue qui provoque le phénomène de réticence s'écrit sous la forme : $u(t) = -k \text{sign}(s(t))$ k : constante positive

La fonction $sign(s(t))$ est remplacée (continûment approximée), par une fonction plus lisse dans la couche limite de $s(t) = 0$. Parmi ces fonctions utilisées nous citerons la fonction de saturation:

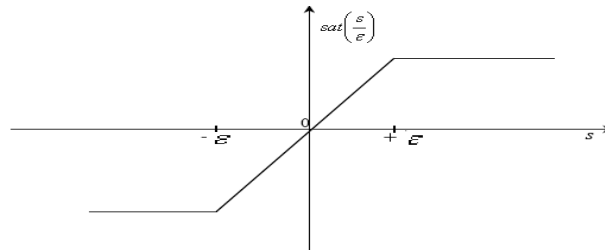


Fig.1.6 Fonction saturation.

$$sat(s) = \begin{cases} \frac{s}{\epsilon} & si \quad \left| \frac{s}{\epsilon} \right| \leq 1 \\ sign(s) & si \quad \left| \frac{s}{\epsilon} \right| > 1 \end{cases}$$

Le système ne converge plus vers la valeur désirée, mais vers un voisinage de cette dernière. Ainsi, la mise en place d'une commande continue dans une bande de la surface nécessite un compromis entre la robustesse et les performances. D'autres fonctions d'adoucissement existent telles que les fonctions $\frac{2}{\pi} \arctan(\frac{s}{\epsilon})$, $\frac{s}{|s| + \epsilon}$, $\tanh(\frac{s}{\epsilon})$*etc.*

1.2.7.2 Solution basée sur un observateur.

La solution de couche limite nécessite l'approximation continue du terme de discontinuité. Cependant, dans plusieurs applications les discontinuités de commande sont inhérentes au système.

D'autre part, ce terme de discontinuité de commande permet de réaliser une convergence asymptotique de l'équation décrivant la surface de glissement vers zéro, ce qui n'est pas garanti en effectuant cette approximation continue.

En conséquence, Lors de l'application d'une commande discontinue, le placement d'un observateur asymptotique par mode de glissement peut éliminer la réticence due à cette discontinuité de la loi de commande. L'idée proposée par [Bond85] consiste à générer les modes glissants idéaux dans une boucle auxiliaire d'observation (figure 1.7), telle que cette boucle d'observateur n'intègre aucune dynamique non modélisée. La boucle principale est poursuivie de la boucle d'observateur. Sous les dynamiques de cet observateur, aucun

problème de réticence n'apparaît et le système évolue comme si la commande équivalente continue est appliquée.

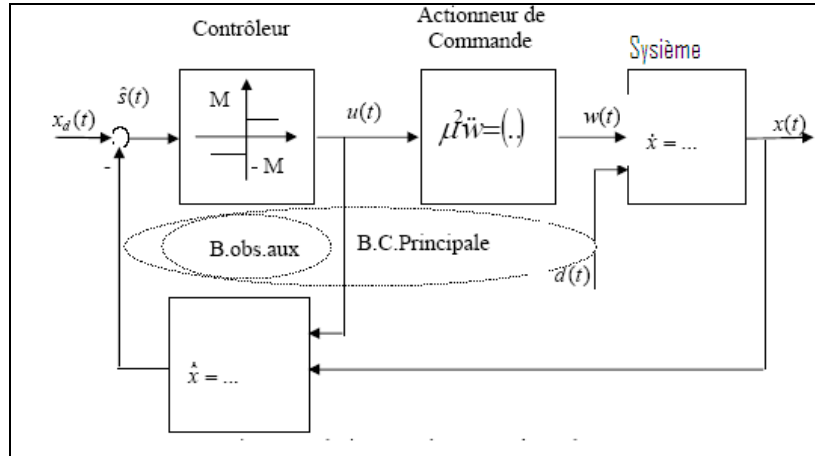


Fig.1.7 : Solution par placement d'un observateur.

1.3 Modes glissants d'ordre supérieur.

La technique des modes glissants d'ordre supérieur a été introduite par Levantovsky [Leva96, Leva97], Emelyanov et Korovin [Emel86, Emel93] Elle permet, en plus des bonnes propriétés de robustesse, et de simplicité de mise en oeuvre des modes glissants classiques, la réduction du phénomène de réticence, tout en conservant les performances du système. Pour cela, on va donner quelques définitions concernant les modes glissants d'ordre supérieur [Djem99, Frid96, Frid02, Leva99].

1.3.1 Commande par modes glissants d'ordre deux.

Considérons un système dont la dynamique est décrite par :

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{1.21}$$

Et la surface de commutation : $s = s(t, x)$ (1.22)

Pour lesquelles $x \in \mathfrak{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathfrak{R}$ est la commande, $s \in \mathfrak{R}$ et f sont deux fonctions continues (en x et t).

L'objectif de la commande est de contraindre la trajectoire du système à atteindre la surface de glissement s .

Par dérivation successive de la fonction s , on peut définir le degré relatif r [Isi95] du système (1.21) par rapport à la variable u , soit :

$$\frac{\partial s^i}{\partial u} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r-1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial s^r}{\partial u} \neq 0 .$$

Pour un degré relatif 1, l'approche par modes glissants classique, permet d'atteindre l'objectif de commande. Toutefois, la commande par modes glissants d'ordre deux peut être appliquée afin de réduire le phénomène de réticence [Leva98, Frid02].

Lorsque le degré relatif est supérieur à deux, l'approche par modes glissants d'ordre r est la technique la plus conforme.

1.3.2 Modes glissants idéaux et réels.

Le principe de la commande par modes glissants d'ordre supérieur, consiste à contraindre le système à évoluer sur une surface de glissement déterminée par $s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0$, r étant l'ordre de la commande, avec $s^{(i)}$ la $i^{\text{ème}}$ dérivée de la fonction s par rapport au temps. Outre la conservation des propriétés de robustesse, cette approche permet de réduire le phénomène de réticence et d'obtenir de meilleures performances. En d'autres termes, si nous avons une période d'échantillonnage δ , la précision sera de l'ordre de $O(\delta^2)$, alors qu'elle ne serait que de l'ordre de $O(\delta)$ pour le premier ordre. Dans la littérature nous trouvons deux types de modes glissants d'ordre r idéaux et réels [Emel86, Frid96, Frid02, Leva95].

Définition 1.4: La trajectoire $(t, x(t))$ ayant pour condition initiale $(0, x_0)$ est une trajectoire à modes glissants idéaux d'ordre r par rapport à la surfaces $s = 0$, s'il existe $t_1 > 0$ tel que :

$$\forall t \geq t_1, \text{ les égalités suivantes soient vérifiées : } s(t, x(t)) = \dot{s}(t, x(t)) = \dots = s^{(r-1)}(t, x(t)) = 0 .$$

La notion de modes glissants idéaux n'a pour but que d'exprimer une solution théorique, mathématiquement possible mais irréalisable pratiquement (à cause des imperfections et limitations physiques des organes de commutation). Elle permet d'atteindre de façon plus lisse la surface de contrainte. Ceci est généralement lié au phénomène d'intégration des discontinuités de la commande.

Définition 1.5 : Une commande par modes glissants réels sur $s = 0$ est dite d'ordre $r > 0$ par rapport à une fonction à valeur réelle $\gamma(\varepsilon)$, tels que $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$, si pour n'importe

quel ensemble compact appartenant au domaine de définition, il existe $t_1 > 0$ et une constante $C > 0$ telle que $\forall t > t_1$ l'inégalité suivante soit vérifiée : $|\sigma(t, x(t, \varepsilon))| \leq C |\gamma(\varepsilon)|^r$.

La notion de modes glissants réels permet d'exprimer la dépendance de l'algorithme à modes glissants par rapport aux imperfections physiques du système réel (retard d'un actionneur, échantillonnage de la mesure, gain non infini de la fonction signe en zéro, etc...). Cet aspect est très important pour les systèmes à structure variable quand il s'agit de passer à une application réelle.

1.4 Commande robuste H^∞ .

L'approche H^∞ du problème de stabilisation robuste est élaborée dans ce chapitre, à partir de la représentation d'état d'un système augmenté, cette approche consiste principalement à calculer à l'aide d'équations de Riccati, un correcteur sous la forme d'un retour d'état observé [Doyl89].

1.4.1 Synthèse par la méthode espace d'état.

Soit le système P décrit par le schéma bloc suivant :

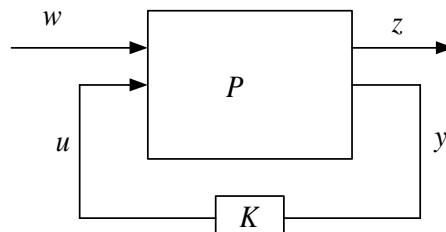


Figure 1.9: Problème sous forme standard

Le système P admet pour équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad (1.23)$$

$z(t)$: Vecteur des sorties commandées.

$w(t)$: Vecteur des entrées de critère.

$y(t)$: Vecteur des sorties mesurées.

$u(t)$: Vecteur des entrées de commande.

Dans le domaine de Laplace, les équations du système se réécrivent :

$$P(p) = \begin{pmatrix} P_{zw}(p) & P_{zu}(p) \\ P_{yw}(p) & P_{yu}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & D_{yu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_z \\ C_y \end{pmatrix} (pI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_w & B_u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z(p) \\ y(p) \end{pmatrix} = P(p) \begin{pmatrix} w(p) \\ u(p) \end{pmatrix} \text{ et } u(p) = K(p)y(p)$$

Soit :

$$z(p) = (P_{zw}(p) + P_{zu}(p)K(p)(I - P_{yu}(p)K(p))^{-1}P_{yw}(p))w(p)$$

1.4.2 Problème H^∞ standard.

1. Etant donné $\gamma > 0$, existe-il? une loi de commande telle que :
 - le système boucle $P + K$ soit asymptotiquement stable.
(Tous les pôles du système en boucle fermée sont à partie réelle strictement négative)
 - $\|P + K\|_\infty < \gamma$
2. Si oui, construire une loi de commande qui assure pour le système en boucle fermée les deux propriétés précédentes.

1.4.3 Solutions par équations de Riccati et correcteur central.

La loi de commande solution du problème H^∞ standard existe si et seulement si:

1. La matrice Hamiltonnienne : $H_\gamma = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T \\ -C_z^T C_z & -A^T \end{pmatrix}$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et il existe une matrice symétrique $X_\infty \geq 0$ telle que :

$$X_\infty A^T + A^T X_\infty + X_\infty (\gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T) + C_z^T C_z = 0 \quad (1.24)$$
2. la matrice Hamiltonnienne : $J_\gamma = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_z^T C_z - C_y^T C_y \\ -B_w B_w^T & -A \end{pmatrix}$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et il existe une matrice symétrique $Y_\infty \geq 0$ telle que :

$$Y_\infty A^T + A^T Y_\infty + Y_\infty (\gamma^{-2}C_z^T C_z - C_y^T C_y) + B_w B_w^T = 0 \quad (1.25)$$
3. $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ où $\rho(\cdot)$ correspond au module de la plus grande valeur propre (rayon spectral).

De plus, l'ensemble des correcteurs $K(p)$ répondant au problème est donné par :

$K(p) = \Gamma(K_a(p), \phi(p))$ où $\phi(p)$ est n'importe quelle fonction de transfert stable, de norme H^∞ inférieure à γ et

$$K_a(p) = \begin{pmatrix} \hat{A}_\infty & : & -Z_\infty I_\infty & Z_\infty B_u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_\infty & : & 0 & I_{m_u} \\ -C_y & : & I_{p_y} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Avec :

$$\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_w B_w^T X_\infty + B_u F_\infty + Z_\infty L_\infty C_y$$

$$F_\infty = -B_u^T X_\infty$$

$$L_\infty = -Y_\infty C_y^T$$

$$Z_\infty = (I_m - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty)^{-1}$$

Un correcteur particulier est le correcteur central, obtenu en prenant $\phi = 0$, ce qui donne :

$$K_o(p) = \begin{pmatrix} \hat{A}_\infty & : & -Z_\infty L_\infty \\ \dots & : & \dots \\ F_\infty & : & 0 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Les procédures exposées précédemment permettent, à partir de la représentation d'état du système augmenté et de la résolution des deux équations algébriques de Riccati, de définir un correcteur central stabilisant, de manière robuste, le système en boucle fermée.

Remarque 1.4 : on peut utiliser l'approche développée par Glover et Mac Farlane [Glov89] qui conduit avec simplicité, à la quantification directe de la marge maximale de stabilité, puis à l'expression de l'ensemble des solutions des problèmes de stabilisation robuste (ensemble défini à partir d'une paramétrisation de la solution centrale), voir annexe B.

1.5 Analyse convexe et inégalités matricielles linéaires.

La notion de convexité tient dans ce chapitre une place importante. En effet, les problèmes d'analyse et de synthèse dont il est question sont formulés, lorsque cela est possible, en termes d'optimisation convexe [Boyd94], [Chad02]. La convexité d'un problème d'optimisation a un double avantage :

- les temps de calcul pour trouver une solution sont raisonnables.
- il n'existe pas de minimum local de la fonction coût à optimiser, le résultat obtenu correspond à un minimum global unique.

1.5.1 Analyse convexe.

La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle, voici les définitions dans chacun des cas.

Définition 1.6 : ensemble convexe.

Soit un ensemble $\xi \subset \mathfrak{R}^n$, ξ est un ensemble convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset \mathfrak{R}, \forall (x_1, x_2) \in \xi^2, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \xi \quad (1.28)$$

Définition 1.7 : fonction convexe.

Soit une fonction $f : \xi \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ avec ξ un ensemble convexe, alors f est convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset \mathfrak{R}, \forall (x_1, x_2) \in \xi^2, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (1.29)$$

1.5.2 Problèmes classiques LMI.

Depuis quelques années, de nombreux travaux ayant pour principal objectif de réduire une grande variété de problèmes de synthèse et d'analyse à des problèmes d'optimisation convexe impliquant des LMIs ont vu le jour. Parallèlement, des méthodes efficaces de résolution des problèmes d'optimisation convexes ont été développées. Ces méthodes, appelées méthodes de point intérieur, développées initialement par Karmarkar [Karm84] pour la programmation linéaire, furent étendues ensuite par Nesterov et Nemirovskii [Nest94] au cas de la programmation convexe dans l'espace des matrices définies positives.

Définition 1.8 : Etant donnée une famille de matrices symétriques P_0 et $P_i, i \in \{1, \dots, n\}$ de $\mathfrak{R}^{p \times p}$ et un vecteur $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathfrak{R}^n$, une LMI stricte (resp. non stricte) en $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, s'écrit sous la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i > 0 \text{ (resp. } \geq 0 \text{)} . \quad (1.30)$$

Remarquons que l'ensemble E défini par $E = \{x \in \mathfrak{R}^n : F(x) > 0\}$ est convexe, ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe.

Les trois problèmes d'optimisation convexe les plus rencontrés sous forme de LMI sont :

- **Problème de réalisabilité** (Faisabilité) : Il s'agit de trouver un vecteur S tel que la contrainte convexe $F(x) > 0$ est satisfaite. Ce problème peut être résolu en cherchant le vecteur x minimisant le scalaire t tel que :

$$-F(x) < t.I \quad (1.31)$$

Si la valeur minimale de t est négative, le problème est réalisable.

- **Problème de valeurs propres** (EVP, Eigenvalue Problems) : il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique sous une contrainte de type LMI.

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \lambda \\ & \text{sous les contraintes } \begin{cases} \lambda I - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.32)$$

- **Problème de valeurs propres généralisées** (GEVP : Generalized Eigenvalue Problems): il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre généralisée d'une paire de matrices, par rapport à une contrainte LMI :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \lambda \\ & \text{sous les contraintes } \begin{cases} \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Ces problèmes d'optimisation convexe peuvent alors être résolus par différents types de méthodes [Hass99] et [Boyd94] :

- Méthode des plans sécants.
- Méthode de l'ellipsoïde
- Méthode du type simplexe.
- Méthode des points intérieurs.

1.5.3 Problèmes à base de contraintes LMIs.

Le but dans ce paragraphe est de donner des conditions de stabilité et de la stabilisation sous la forme d'un problème à résoudre composé de contraintes LMIs. La description des contraintes LMIs ainsi qu'une méthode permettant de résoudre les problèmes qui leurs sont associés sont présentées dans cette partie. Différents lemmes sont présentés en deuxième partie. Ils permettent de manipuler les inégalités matricielles afin de les rendre linéaires.

1.5.3.1 Utilisation du formalisme LMIs.

Les contraintes LMIs s'écrivent sous la forme :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i < 0 \quad \text{avec} \quad F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{n \times n} . \quad (1.34)$$

$F(x)$ est une fonction affine en les variables de décision $x_i, i \in \{1, \dots, m\}$, [Boyd94].

L'ensemble des solutions $S = \{x \in \mathfrak{R}^m, F(x) < 0\}$ est convexe. Un problème de Faisabilité LMI s'écrit :

$$\text{Trouver } x_i, i \in \{1, \dots, m\} \text{ tels que } F(x) < 0 . \quad (1.35)$$

L'inégalité (1.35) est équivalent à $\inf_x \lambda_{\max}(F(x)) < 0$. Cela revient donc à minimiser la fonction: $f : x \rightarrow \lambda_{\max}(F(x)) < 0$. Cette minimisation est possible car cette fonction est convexe [Sche04]. La résolution du problème peut se faire par des algorithmes performants comme l'algorithme du point intérieur [Boyd 94]. Dans les problèmes qui seront abordés, les variables utilisées sont des matrices. Le passage des variables scalaires à des matrices se fait directement.

Par exemple, les problèmes de type : $A + BPC + C^T P^T B^T < 0$ avec pour inconnue P peuvent être mis sous la forme : $F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i < 0$. Pour cela il suffit de décomposer la matrice P dans une base de matrices symétriques, ainsi la LMI permet de trouver La matrice optimale afin de synthétiser la loi de commande qui permet d'assurer la robustesse du système.

1.5.3.2 Propriétés du formalisme LMIs.

Des inégalités non linéaires convexes peuvent être transformés en LMI. On suppose que $P(s)$, $X(s)$ et $Q(s)$ dépendent de façon affine du paramètre s . En utilisant les compléments de Schur :

$$Q(s) - X^T(s)P^{-1}(s)X(s) > 0, \quad P(s) > 0 .$$

Lemme 1 (complément de Schur): Soient $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ une matrice définie positive, $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ une matrice de rang plein en ligne et $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ une matrice quelconque. Les deux inégalités suivantes sont équivalentes :

$$1. \quad Q(s) - X^T(s)P^{-1}(s)X(s) > 0, P(s) > 0.$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} Q(s) & (*) \\ X(s) & P(s) \end{pmatrix} > 0.$$

Dans certains cas particuliers de ces inégalités non linéaire convexes, certaines propriétés sont présentées sur les deux inégalités :

$$A^T P A - Q < 0, P > 0 \quad \text{et} \quad A^T P + P A + Q < 0.$$

Pour la première on a le lemme suivant.

Lemme 2 : Soient A, G, L, P et Q des matrices de taille appropriée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$1) \quad A^T P A - Q < 0, P > 0 \tag{1.36}$$

$$2) \quad \begin{pmatrix} -Q & A^T P \\ P A & -P \end{pmatrix} < 0 \tag{1.37}$$

$$3) \quad \exists G / \begin{pmatrix} -Q & A^T G \\ G^T A & -G - G^T + P \end{pmatrix} < 0, P > 0 \text{ [Oliv99]}. \tag{1.38}$$

$$4) \quad \exists G, L / \begin{pmatrix} -Q + A^T L^T + L A & -L + A^T G \\ -L^T + G^T A & -G - G^T + P \end{pmatrix} < 0, P > 0 \text{ [Peau00]}. \tag{1.39}$$

Preuve :

(1.37) \Leftrightarrow (1.38) : Complément de Schur.

(1.37) \Leftrightarrow (1.39) et (1.40) : Il suffit de choisir $G = P$ et $L = 0$.

(1.39) et (1.40) \Rightarrow (1.37) : Par congruence avec $\begin{bmatrix} I & A^T \end{bmatrix}$.

Pour la seconde inégalité, on a les résultats suivants :

Lemme 3 [Peau00] : Soient A, G, L, P et Q des matrices de taille appropriée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$1. A^T P + PA + Q < 0. \quad (1.40)$$

$$2. \exists G, L / \begin{pmatrix} A^T L^T + LA + Q & P - L + A^T G \\ P - L^T + G^T A & -G - G^T \end{pmatrix} < 0. \quad (1.41)$$

Preuve :

(1.41) \Rightarrow (1.40) : Par congruence avec $\begin{bmatrix} I & A^T \end{bmatrix}$.

(1.40) \Rightarrow (1.41) : Si (1.40) est vérifiée, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $A^T P + PA + Q + \frac{\varepsilon}{2} A^T A < 0$, en

utilisant le complément de Schur il vient $\begin{pmatrix} A^T P^T + PA + Q & \varepsilon A^T \\ \varepsilon A & -2\varepsilon I \end{pmatrix} < 0$. Le résultat s'obtient

en posant dans (1.41) $L = P$ et $G = \varepsilon I$.

1.6 Observateur classique par modes glissants.

Dans la plus part des problèmes de commande, l'état complet est utilisé dans la loi de commande. Cependant dans la majorité des cas l'état n'est pas complètement mesurable. Pour résoudre ce problème on utilise un observateur pour estimer l'état complet du système. La synthèse d'un observateur par modes glissants consiste à contraindre, à l'aide de fonctions discontinues, les dynamiques des erreurs d'estimation d'un système non linéaire d'ordre n ayant p sorties à converger sur une variété d'ordre $(n - p)$ dite surface de glissement. L'attractivité et l'invariance de la surface de glissement sont assurées par des conditions appelées conditions de glissement. Les dynamiques sur la surface de glissement sont calculées par la méthode de la commande équivalente [Drak95, Drak92]. Ainsi, pour les systèmes non linéaires, tels que les robots que nous étudierons, de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Une structure d'observateur par modes glissants s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u) + \Lambda \text{sign}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = \hat{h}(\hat{x}) \end{cases} \quad (1.42)$$

C'est une copie du modèle, à laquelle on ajoute un terme correcteur, qui assure la convergence de \hat{x} vers x . La surface de glissement dans ce cas est donnée par :

$$s(x) = y - \hat{y}$$

Le terme de correction utilisé est proportionnel à la fonction discontinue signe appliquée à l'erreur de sortie où $\text{sign}(x)$ est définie par :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

L'étude de stabilité et de convergence pour de tels observateurs, est basée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov [Canu90, Slot86].

1.7 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons effectué une courte synthèse des principaux résultats sur la commande par modes glissants d'ordre un et la commande H^∞ ainsi que des généralités sur l'analyse convexe et inégalités linéaires matricielles afin de construire une surface de glissement basée sur l'optimisation des LMIs.

L'intérêt majeur de ces approches se situe dans la simplicité de mise en oeuvre de la loi de commande. Une extension de ce travail sera faite pour un système de pompage constitué par un DC moteur de type 'buck' muni d'une pompe centrifuge, et d'un robot manipulateur à deux articulations .

L'inconvénient majeur des modes glissants est l'apparition du phénomène de réticence qui se manifeste dans les grandeurs asservies. Les fonctions d'adoucissement permettent sa réduction, cependant elles font apparaître un compromis entre la robustesse de la commande et les performances du système.

La procédure exposée précédemment, en commande H^∞ permet à partir de la représentation d'état du système standard, et de la résolution des deux équations de Riccati, de définir les représentations d'état d'un correcteur central et d'une classe de correcteurs stabilisants de manière robuste le système corrigé en boucle fermé, cette dernière fera l'objet

d'une comparaison avec les modes glissants. Nous utilisons aussi une surface de glissement basée sur la technique LMIs où les inégalités matricielles linéaires afin d'obtenir une surface de glissement optimale.

Néanmoins, ces lois de commandes nécessitent souvent l'emploi d'observateurs, afin d'estimer avec la plus grande robustesse possible l'état du système, notre choix s'est porté sur les observateurs par modes glissants, nous allons nous intéresser en dernier lieu à l'étude de stabilité en boucle fermée, de l'observateur triangulaire par modes glissants couplé à une commande par modes glissants pour le système de pompage et le robot manipulateur. Des résultats de simulation illustreront les performances de l'observateur et la commande proposée.

Ainsi l'objectif de ce mémoire est de construire des schémas de commande et d'observation assurant à la fois, robustesse et performance, adaptés aux systèmes de pompage et aux systèmes robotisés pour des mouvements rapides.

Chapitre 2

Application à la commande d'un Système de pompage

2.1 Introduction.

L'objectif de ce chapitre est le développement et la synthèse de commandes robustes par modes glissants d'ordre un et leurs applications à la commande d'un système de pompage, constitué par un convertisseur de puissance électrique de type " buck " et d'un moteur à courant continu (MCC) lié à une pompe centrifuge, notre but est de commander la vitesse de rotation du moteur par le biais du rapport cyclique du convertisseur électrique en mode de conduction continu à continu (DC à DC) , puis nous envisageons une comparaison avec la technique de la commande H^∞ avec linéarisation du système tout en procédant à un model d'ordre réduit.

Les résultats des simulations montrent des performances meilleurs des commandes par modes glissants du premier ordre par rapport à la commande H^∞ .

2.2 Modélisation du système de pompage.

Le système de pompage qui est l'objet de cette application est composé d'un convertisseur type " buck ", d'un moteur et d'une pompe centrifuge, où l'entrée et la sortie du système sont respectivement, la tension de commande et la vitesse angulaire.

2.2.1 Principe du convertisseur buck.

Un convertisseur Buck, ou hacheur série, est une alimentation à découpage qui convertit une tension continue en une autre tension continue de plus faible valeur, il est aussi appelé hacheur abaisseur de tension.

2.2.1.1 Principe de fonctionnement.

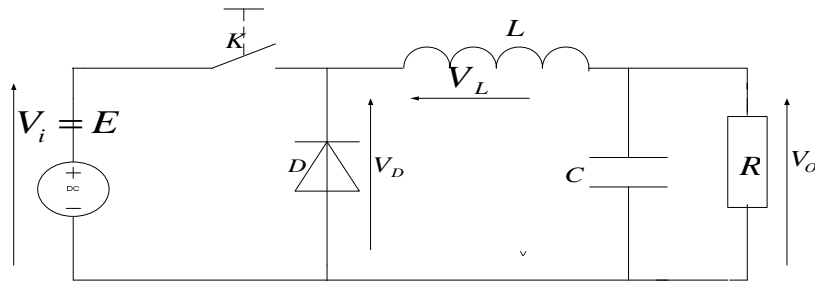


Fig.2. 1 : Schéma de base d'un convertisseur buck.

Suivant l'état de l'interrupteur K (fermé ou ouvert) on peut distinguer le sens du passage du courant dans le circuit.

Le fonctionnement d'un convertisseur Buck peut être divisé en deux configurations suivant l'état de l'interrupteur K (fermé ou ouvert), on peut alors distinguer le sens du passage du courant dans le circuit.

- Dans l'état passant, l'interrupteur K est fermé, la tension aux bornes de l'inductance vaut : $V_L = V_i - V_o$. Le courant traversant l'inductance augmente linéairement. La tension aux bornes de la diode étant négative, aucun courant ne la traverse.
- Dans l'état bloqué, l'interrupteur est ouvert. La diode devient passante afin d'assurer la continuité du courant dans l'inductance. La tension aux bornes de l'inductance vaut : $V_L = -V_o$. Le courant traversant l'inductance décroît.

2.2.1.2 Rapport cyclique.

Définition 2.1 : Le rapport cyclique est défini comme le temps t_1 pendant lequel l'interrupteur est fermé divisé par la période de fonctionnement du montage T , soit : $\alpha = \frac{t_1}{T}$

Le rapport cyclique α est aussi défini comme le rapport de la durée d'une pulsation par la période T du signal rectangulaire, aussi En électronique, le rapport cyclique désigne, pour un phénomène périodique, le rapport entre la durée du phénomène sur une période et la durée de cette même période. Ce rapport varie de 0 à 1, en pourcentage de 0 % à 100 %. On parle souvent de rapport cyclique lorsqu'on a un signal rectangulaire (forme du signal en créneau) :

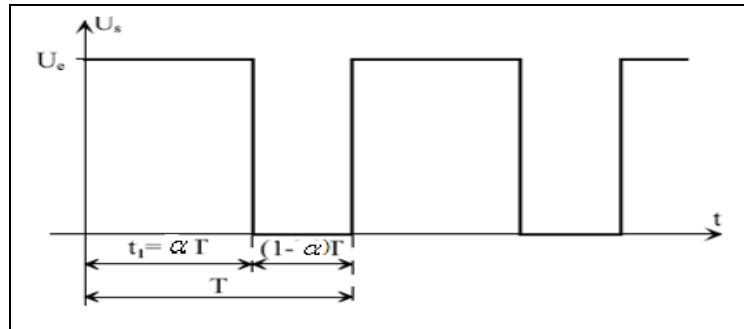


Fig 2.2 : Rapport cyclique dans un signal rectangulaire

- t_1 temps à l'état haut dans une période T , ainsi, $t_1 = \alpha T$ et si la tension vaut U à l'état haut et $0V$ à l'état bas, on a : $\bar{U} = \alpha U$ \bar{U} : Tension moyenne.

2.2.2 Moteur et pompe.

Le moteur sera alimenté par la tension de sortie du convertisseur. Nous considérons un moteur à courant continu (MCC) à flux magnétique constant et nous négligeons la réaction magnétique d'induit et le phénomène de commutation. L'équation électrique décrivant le modèle dynamique du moteur (MCC) à flux magnétique constant est décrite par l'expression suivante:

$$U_m = R.i_m + L.\frac{di_m}{dt} + E_c \quad (2.1)$$

E_c : Force contre électromotrice avec $E_c = K_e.\omega$.

L : L'inductance de l'enroulement de l'induit.

R : La résistance de l'induit.

ω : La vitesse de rotation du moteur en rad/s.

Le couple électrique du moteur est donné par : $C_m = K_m.i_m$ (2.2)

K_e (V/rad/s) constante du force contre électromotrice et K_m (N.m/A) constante du couple électrique.

Deux types de pompes sont couramment utilisés :

En général sont utilisées :

- les pompes volumétriques.
- les pompes centrifuges.

Les pompes centrifuges sont les pompes les plus utilisées dans le domaine industriel grâce à la large gamme d'utilisation qu'elles peuvent couvrir, de leur simplicité et de leur faible coût [Ghon06]. La pompe centrifuge transmet l'énergie cinétique du moteur au fluide. Elle est conçue pour une hauteur manométrique totale (HMT) relativement fixe [Arab04]. Le débit de cette pompe varie en fonction de la vitesse de rotation du moteur, son couple augmente très rapidement en fonction de cette vitesse, et la hauteur de refoulement dépend du carré de la vitesse du moteur. La pompe centrifuge oppose au moteur un couple résistant de la forme :

$$C_r = K_r \cdot \omega^2 \quad (2.3)$$

K_r : Coefficient de proportionnalité en $N.m/(rad/s)^2$

L'équation mécanique du système est donnée par : $C_m - C_r = J \frac{d\omega}{dt}$ et à partir des équations (2.2) et (2.3) on a :

$$K_m i_m - K_r \omega^2 = J \frac{d\omega}{dt} \quad (2.4)$$

J : Moment d'inertie du groupe moteur-pompe exprimé en $Kg.m^2$.

2.3 Modélisation du système de pompage dans l'espace d'état.

Le modèle de système considéré est celui montré dans la figure 2.3 constitué par la combinaison d'un convertisseur de puissance électrique de type "buck", d'un moteur électrique à courant continu [Lina04] et d'une pompe centrifuge, l'ensemble est alimenté par une batterie ou d'un générateur électrique délivrant une tension E.

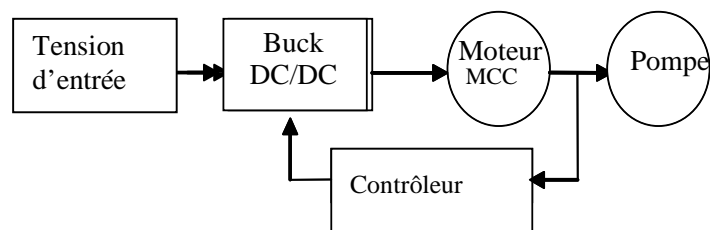


Fig 2.3 : Diagramme général de commande.

Le but est de commander la vitesse de rotation du moteur (MCC), en agissant sur le rapport cyclique du convertisseur buck.

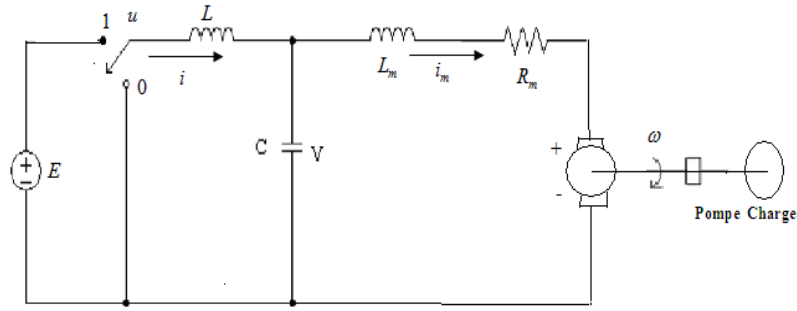


Fig. 2.4 : Modèle du système de pompage

Le convertisseur de puissance électrique de type de “buck” est inséré entre le générateur de la tension d'entrée et l'inducteur de moteur. Son rapport cyclique noté u peut prendre des valeurs dans l'intervalle $] 0,1[$. Les équations électriques du convertisseur sont:

$$L \frac{di}{dt} = -V + uE \quad \text{et} \quad C \frac{dV}{dt} = i - i_m \quad (2.5)$$

Nous considérons un moteur (MCC) avec un flux magnétique constant et nous négligeons la réaction magnétique et le phénomène de commutation.

Le modèle mathématique du système considéré est:

$$V = R_m i_m + L_m \frac{di_m}{dt} + K_e \cdot \omega \quad (2.6)$$

Le moment de couple du moteur est : $C_m = K_m i_m$

L'équation dynamique du système électrique moteur-pompe :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -B_m \omega + K_m i_m - K_r \omega^2 \quad (2.7)$$

Avec B_m : Coefficient du frottement exprimé en $(N.m / rd)$.

Les différentes équations décrivant le modèle mathématique du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{di}{dt} = V - uE \\ C \frac{dV}{dt} = i - i_m \\ L_m \frac{di_m}{dt} = V - R_m i_m - K_e \omega \\ J \frac{d\omega}{dt} = -B_m \omega + K_m i_m - K_r \omega \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Considérons que $x_1 = \omega$ comme sortie du système, nous avons :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f(x_1, x_2, x_3, x_4) + g u \end{cases} \quad (2.9)$$

La sortie du système : $y = x_1 = \omega$.

On note que la sortie désirée est: $y_d(t) = \omega_d$, l'erreur de poursuite $e(t) = y(t) - y_d(t) = \omega - \omega_d$

et :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -(a_4 x_4 + a_3 x_3 + a_2 x_2 + a_1 x_1 + a_{14} x_1 x_4 + a_{23} x_2 x_3 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{22} x_2^2 + a_{11} x_1^2)$$

$$g = b.E, \text{ avec :}$$

$$b = \frac{K_m}{LL_m CJ}, a_4 = \left(\frac{B_m}{J} + \frac{R_m}{L_m}\right), a_3 = \frac{1}{JL_m} (K_e K_m + R_m B_m) + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_m} + \frac{1}{L}\right),$$

$$a_2 = \frac{B_m}{CJ} \left(\frac{1}{L_m} + \frac{1}{L}\right) + \frac{R_m}{CLL_m}, a_1 = \frac{1}{JCLL_m} (K_e K_m + R_m B_m), a_{23} = \frac{6K_r}{J}, a_{14} = \frac{2K_r}{J},$$

$$a_{13} = \frac{2K_r R_m}{L_m J}, a_{12} = \frac{2K_r}{L_m J C}, a_{11} = \frac{R_m K_r}{JCLL_m}.$$

2.4 Approche des modes glissants.

Dans ce chapitre, un contrôleur par mode glissant est conçu pour le système de pompage précédent, ce dernier se compose d'un accouplement de moteur à courant continu (MCC) avec une pompe centrifuge, l'ensemble est commandé par le commutateur du convertisseur d'alimentation de type " buck".

Afin de forcer la vitesse de rotation du moteur à suivre une valeur optimale désirée, on propose le coefficient du rapport cyclique du convertisseur comme une loi robuste de commande en employant l'approche de la commande en mode glissant, nous envisageons aussi une comparaison avec la technique de la commande H^∞ , tout en utilisant un modèle d'ordre réduit.

2.4.1 Choix de la surface de glissement.

La surface de glissement est choisie selon l'erreur de poursuite et le degré relatif du système. Nous définissons le degré relatif du système pour être le nombre entier positif, pour lequel la dérivée est une fonction explicite de la loi de commande, tels que :

$$\frac{\partial y^{(r)}(t)}{\partial u} \neq 0 \text{ et } \frac{\partial y^{(i)}(t)}{\partial u} = 0 \text{ pour } i=0, \dots, r-1.$$

Soit la surface de glissement : $S = \{X(t) : s(e(t), \dot{e}(t), \dots, e^{(l-1)}(t)) = 0\}$ avec $e = y - y_d$

$$s(t) = s(e(t), \dot{e}(t), \dots, e^{(l-1)}(t)) = e^{(l-1)}(t) + \alpha_{l-2}e^{(l-2)}(t) + \dots + \alpha_1\dot{e}(t) + \alpha_0e(t).$$

Où l est le degré relatif du système. Les coefficients α_i sont sélectionnés sachant que le polynôme caractéristique associé possède ses racines dans le demi complexe gauche (Remarque 1.2).

Dans notre application le degré relatif $r = 4$, la fonction de glissement est :

$$\begin{aligned} s &= e^{(3)} + 2.2\ddot{e} + 1.55\dot{e} + 0.35e \\ \dot{s} &= f + gu + 2.2x_4 + 1.55x_3 + 0.35x_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\dot{s} = F + gu \quad \text{avec} \quad F = f + 2.2x_4 + 1.55x_3 + 0.35x_2$$

2.4.2 Commande par mode glissant proposée.

La commande proposée pour le système de pompage est composée de la commande équivalente u_{eq} augmentée du terme robuste u_r .

Proposition 2.1 [Alao07a]: pour le système de pompage représenté par (2.8) et (2.9), la commande par modes glissants qui assure que $e(t)$ tend asymptotiquement vers zéro en temps finie peut s'écrire comme suit:

$$u = u_{eq} + u_r$$

$$u(t) = u_{eq} - K \text{sign}(s) \quad \text{où } K \text{ est une constante positive, et } u_r = -K \text{sign}(s).$$

La commande équivalente :

$$u_{eq}(t) = -\frac{F}{g} \quad (2.11)$$

La fonction signe est définie comme suit :

$$\begin{cases} \text{sign}(s(t))=1 & \text{si} & s(t) > \varepsilon \\ \text{sign}(s(t))=0 & \text{si} & s(t) = 0 \\ \text{sign}(s(t))=-1 & \text{si} & s(t) < \varepsilon \end{cases}$$

Remarque 2.1

En général, la convergence asymptotique de l'équation décrivant la surface de glissement vers zéro n'est pas garantie dès que l'approximation continue est prise en considération.

$$u_{eq} = -\frac{F}{g} : \text{est la commande équivalente permettant à l'état de glisser sur la surface de}$$

glissement, la commande robuste : $u_r(t) = -K\text{sign}(s(t))$.

Démonstration:

Pour une équation de glissement perturbée $\sigma \neq 0$, on sélectionne la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(s) = \frac{(s)^2}{2}$$

$$\dot{V}(s) = s\dot{s}$$

Si $\dot{s} = -K\text{sign}(s)$ avec $K > 0$ alors $\dot{V}(s) = -Ks \text{sign}(s) < 0$, à partir de (2.10)

et (2.11) on déduit l'expression de $u(t)$ comme suit: $u(t) = -\frac{F}{g} - K\text{sign}(s)$.

$$u(t) = -\frac{F}{g} - K\text{sign}(s) \text{ où } K \text{ est une constante positive. } K = \frac{m}{g}, m > 0, \text{ et } g \neq 0.$$

Remarque 2.2.

La convergence asymptotique vers zéro est réalisée. Cependant comme le montre la figure 2.5, le phénomène de réticence est observé et entrave l'application de cette loi de commande, ce phénomène est dû au terme de discontinuité présent dans la loi de commande.

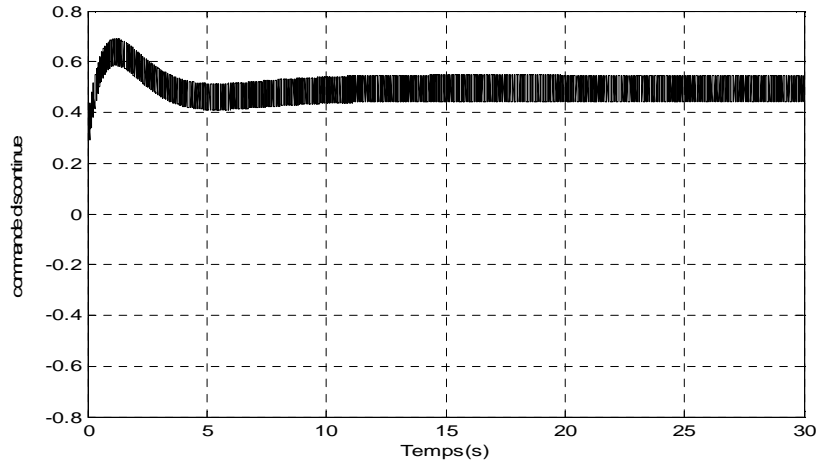


fig.2.5 Commande générale en présence du terme robuste discontinue

Dans cette partie on va considérer la solution de couche limite pour éliminer le problème de réticence en considérant la fonction de saturation [Boum04], [Boum05] qui remplacera la fonction signe. Le résultat devient selon le théorème suivant comme suit:

Théorème 2.1 [Ala07a] : La loi de commande qui est le rapport cyclique du convertisseur, permettant de forcer la vitesse de rotation du moteur $y(t)$ à suivre la vitesse de rotation désirée $y_{d(t)}$, ceci est donné par :

$$u = u_{eq} + u_r \quad \text{avec:} \quad u_{eq} = -\frac{F}{g} \quad \text{et} \quad u_r = -\frac{m}{g} \text{sat}(s) \quad \text{avec} \quad K = \frac{m}{g} \quad m > 0, \text{ et } g \neq 0$$

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} \text{sign}(s) & \text{si } |s| > \varepsilon \\ \frac{s}{\varepsilon} & \text{si } |s| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Démonstration:

Selon la démonstration de la proposition 2.1, Pour tout $\varepsilon > 0$, si $|s(t)| > \varepsilon$; $\text{sat}(s(t)) = \text{sign}(s(t))$, la fonction $\dot{V}(s)$ est définie négative. Cependant, dans le ε -voisinage de l'origine ($|s(t)| < \varepsilon$), $\text{sat}(s(t)) = \text{sign}(s(t))$, $\text{sat}(s(t)) = \frac{s(t)}{\varepsilon}$ est continue

$\dot{V}(s) = -\left(\frac{K}{\varepsilon}\right)(s)^2$ et les trajectoires restent à l'intérieur d'une zone d'épaisseur 2ε (avec ε petit) autour de la surface de glissement $s = 0$ appelée couche limite.

Remarque 2.3.

D'autres fonctions d'adoucissement existent et peuvent être utilisées comme suit :

$$\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{s}{\varepsilon}\right), \frac{s}{|s| + \varepsilon}, \tanh\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \dots \dots \dots etc.$$

2.4.3 Résultats de simulations.

Moteur de type : DC moteur direct drive brushed type: 828500, de diamètre 42mm, et de puissance : $P = 42W$, $V_n = 12V$, $i_n = 4.25 A$, $\omega_n = 324.47 rad/s$, $R_m = 0.841\Omega$, $E = 24V$,

$$J = 0.14 \cdot 10^{-4} (Kg m^2) , K_e = K_m = 0.0275 (V / rad / s) , K_m = 2.541 (N.m / A)$$

$$B_m = 4.499 \cdot 10^{-5} (N.m / rad) .$$

Convertisseur statique: $L = 75mH$, $C = 70mF$.

Fréquence de commutation: $f = 50 KHz$.

Pompe centrifuge : $P_u = 3.2 kW$, $\omega_n = 324.47 rad / s$, $K_r = (9.5113)10^{-7} N.m / (rad / s)^2$.

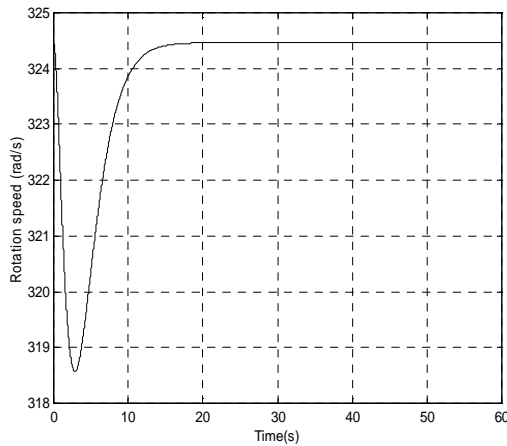


Fig.2.6 : Vitesse de rotation en (rad/s).

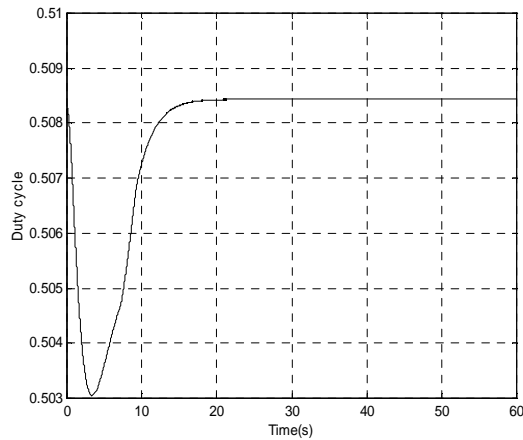


Fig2.7 : Loi de commande du rapport Cyclique.

La figure 2.6 montre une bonne poursuite de la vitesse de rotation ω vers la valeur désirée ω_d , quand à la figure 2.7, elle montre que la loi de commande du rapport cyclique, est: $0 < u < 1$.

Les deux figures illustrent des bonnes performances du système lorsque la commande proposée est appliquée.

2.5 Commande H^∞ .

La synthèse de commande H^∞ par la méthode espace d'état est basée sur le modèle réduit du système nominal et la résolution des équations algébriques de Riccati. La procédure de détermination du correcteur central est citée au chapitre 1.

2.5.1 Structure de commande H^∞ .

Le schéma de la figure (2.8) précise la structure retenue pour l'analyse et le traitement du problème de commande pour notre système :

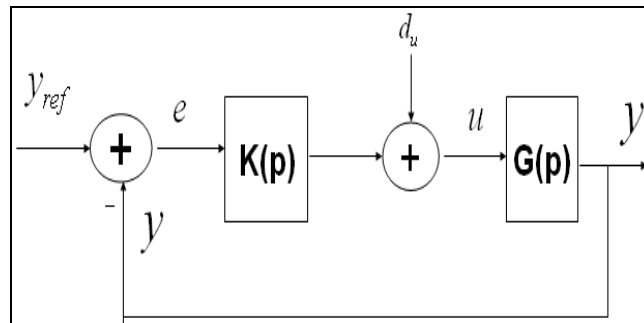


Fig.2.8 Structure de la commande.

Ce système bouclé comporte :

- un correcteur K à paramètre figé.
- Le modèle nominal linéaire G décrivant le comportement dynamique du processus.

Différents signaux internes au système, en l'occurrence :

- le signal de sortie y du système (vitesse angulaire).
- l'écart e entre la consigne et la mesure.
- la commande u .

Les entrées exogènes :

- La consigne y_{ref} .
- Le bruit d_u affectant le signal de commande.

$$y = G(p)u \quad \text{et} \quad u = K(p)e + d_u \quad \text{avec} \quad e = y_{ref} - y$$

La synthèse de commande H^∞ est basée sur le modèle réduit du système nominal (généralement d'ordre deux ou trois).

2.5.2 Modèle linéaire du système

L'analyse du système et son modèle linéaire sont obtenus par la linéarisation des équations du modèle non linéaire au voisinage du point de fonctionnement approprié ce qui donne le système en représentation d'état (voir Annexe C):

$$\begin{cases} \dot{x}_e = Ax_e + Bu \\ e = Cx_e + Du \end{cases} \quad (2.12)$$

Avec:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{C} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & \frac{-1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_m} & \frac{-R_m}{L_m} & \frac{-K_e}{L_m} \\ 0 & 0 & \frac{K_m}{J} & \frac{-(B_m + 2K_r\omega_d)}{J} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{E}{L} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, C = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \text{ et } D = 0.$$

Où $x \in R^4$ est l'état du système, $u \in R$ est la commande du signal, $y \in R$ est la sortie du signal, A, B, C et D sont des matrices réelles de dimensions appropriée

La fonction de transfert du système est de forme suivante:

$$G(p) = D + C(pI - A)^{-1}B = \frac{b_0}{p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p^1 + a_0} \quad (2.13)$$

Avec:

$$b_0 = (6.297).10^9, a_4 = 1, a_3 = 1181, a_2 = (8.516).10^4, a_1 = (7.07).10^5, a_0 = (1.23).10^7.$$

2.5.3 Définition des modèles d'ordres réduits pour la commande.

De nombreuses applications considèrent pour support de synthèse des correcteurs des modélisations dont l'ordre est peut élevé (en générale d'ordre 2 ou 3). Dans un tel contexte l'aspect des techniques de synthèse des commandes robustes, il convient d'opérer à partir de notre modélisation d'ordre 4, une déclinaison du modèle d'ordre 2 où 3.

Dans ce travail on va opérer une réduction de l'ordre du modèle par le biais, des caractéristiques fréquentielles

Le modèle linéaire du système est d'ordre 4. La synthèse du correcteur pour le système de pompage sera basée sur un modèle linéaire d'ordre réduit [Hard06].

Le modèle nominal du système en fonction de transfert est :

$$G(p) = \frac{b_0}{p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p^1 + a_0}$$

Les pôles et leurs amplitudes sont :

Pôles	Amplitudes
-3.38e+000 + 1.22e+001i	1.26e+001
-3.38e+000 - 1.22e+001i	1.26e+001
-6.98e+001	6.98e+001
-1.10e+003	1.10e+003

En négligeant les dynamiques indésirées du système et ceci par élimination des pôles qui ont une amplitude assez grande (-1.10e+003), on obtient un modèle d'ordre réduit qui est d'ordre 3 dont la fonction de transfert est la suivante :

$$G_r(p) = \frac{b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p^1 + a_0} \quad (2.14)$$

Où : $b_0 = 1$, $a_3 = 1$, $a_2 = 76.5600$, $a_1 = 632.1480$, $a_0 = (1.1189).10^4$.

Le tracé du diagramme de bode montre que l'amplitude du système réduit reste inférieure à celle du système nominale, quand au diagramme fréquentielle, il présente un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ entre les deux systèmes

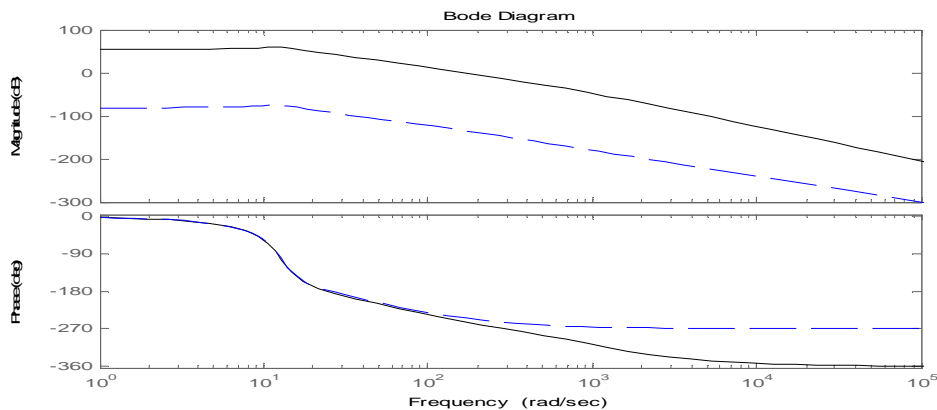


Fig.2.9: Diagramme de bode.

En négligeant les dynamiques indésirées on obtient notre système en représentation d'état nominale :

$$\begin{cases} \dot{x}_e = A_r x_e + B_r u \\ e = C_r x_e + D_r u \end{cases} \quad (2.15)$$

Le système en représentation d'état standard :

$$\begin{cases} \dot{x}_e = A_r x_e + B_r u + B_w w \\ z = C_z x_e + D_{zu} u + D_{zw} w \\ e = C_r x_e + D_r u + D_{yw} w \end{cases} \quad (2.16)$$

Avec :

$$A_r = \begin{bmatrix} -3.3800 & 12.2000 & 0 \\ -12.2000 & -3.3800 & 0.2863 \\ 0 & 0 & -69.8000 \end{bmatrix}; B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5000 \end{bmatrix}; C_r = [0.5726 \ 0 \ 0];$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; D_{yu} = [0 \ 0]; D_r = 0.$$

La synthèse de la commande H^∞ est basée sur la technique présentée dans le chapitre 1.

Avec un choix numérique de $\gamma = 1.18$.

Le correcteur central :

$$K_o = \begin{bmatrix} -3.3563 & 12.2061 & 0.0001 & 0.0113 \\ -12.2004 & -3.3800 & 4.5808 & 0.0027 \\ 0.0001 & 0.0013 & -69.7977 & 0.0001 \\ -0.0001 & -0.0005 & -0.0009 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce dernier en représentation d'état est :

$$\begin{cases} \dot{x}_K = A_K x_K + B_K e \\ u = C_K x_K \end{cases} \quad (2.17)$$

A_K , B_K and C_K sont des matrices réelles de dimensions appropriés, le correcteur central :

$$A_K = \begin{bmatrix} -3.3563 & 12.2061 & 0.0001 \\ -12.2004 & -3.3800 & 4.5808 \\ 0.0001 & 0.0013 & -69.7977 \end{bmatrix}; \quad B_K = \begin{bmatrix} 0.0113 \\ 0.0027 \\ 0.0001 \end{bmatrix};$$

$$C_K = [-0.0001 \ 0.0013 \ -0.0009]$$

2.5.4 Résultats de simulations.

2.5.4.1 Sans perturbation.

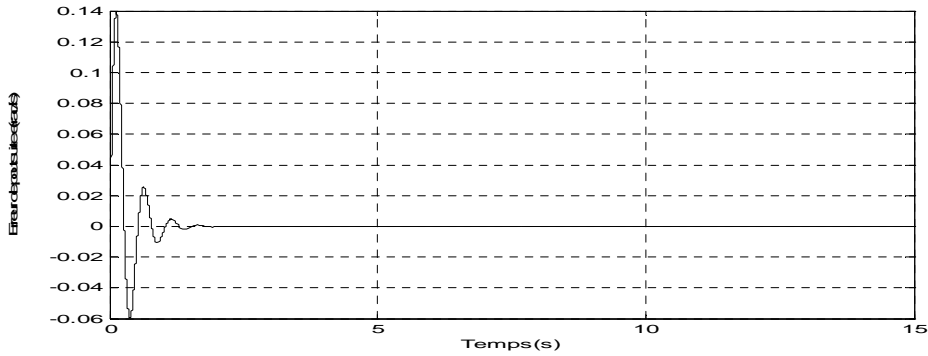


Fig.2.10 poursuite de sortie (vitesse de rotation en (rad/)).

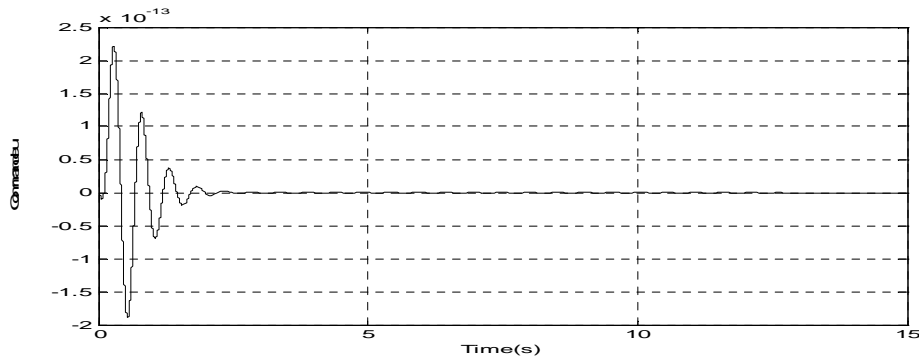


Fig2.11 Loi de Commande du rapport cyclique par commande H^∞ .

La figure (2.10) montre une bonne performance en poursuite lorsque la commande H^∞ illustrée par la figure (2.11) est appliquée.

2.6 Comparaison de la robustesse de la commande par mode glissant et la commande H^∞ .

Afin de faire une comparaison entre la technique de la commande par mode glissant et la technique par commande H^∞ , nous perturbons la commande du système par un bruit aléatoire de forme:

$$d_u(t) = (0.05)randn(1,t_f), \quad \text{tel que } t_f : \text{ temps final}$$

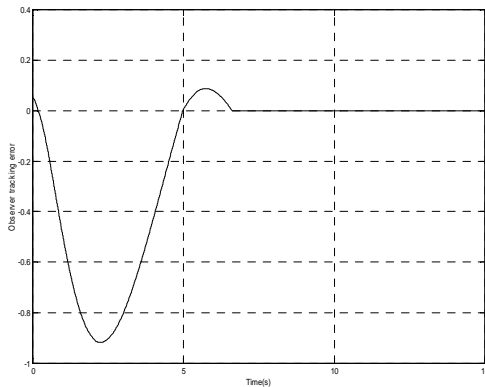


Fig.2.12 : Erreur de poursuite (rad/s)
par commande en mode glissant .

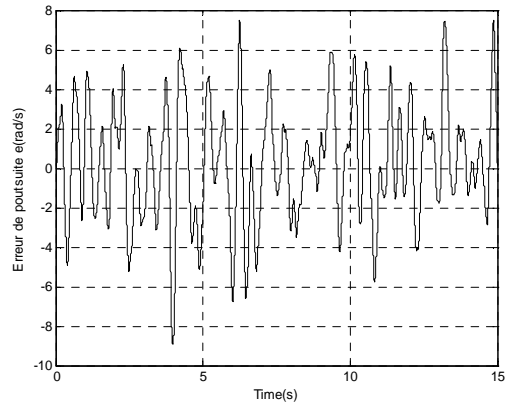


Fig.2.13 : Erreur de poursuite (rad/s)
par commande H^∞ .

La perturbation aléatoire a été affectée successivement sur le système de pompage par mode glissant, et par commande H^∞ . En mode glissant la perturbation $d_u(t)$ vérifiant la condition dite de recouvrement, permet au système d'être insensible à cette dernière (Théorème 1.1), or nous constatons ici que le problème majeur de la commande H^∞ est celui des oscillations atténuées ou "Dumping oscillations".

2.7 Conclusion.

Ce chapitre a été consacré au développement et à l'application des commandes par modes glissants d'ordre 1, pour le cas d'un système de pompage en présence d'une perturbation aléatoire. On a commencé par application de la commande équivalente, augmentée du terme de robustesse, et en présence d'une classe de perturbations vérifiant la condition dite de recouvrement. La comparaison avec la commande H^∞ montre les bonnes performances en poursuite et en temps de réponse pour la commande par mode glissant.

Pour l'approche H^∞ , la synthèse théorique d'un correcteur est fondée sur le concept de d'espace d'état standard et la résolution des deux équations algébriques de Riccati, cette dernière est basée uniquement sur le modèle nominal d'ordre réduit. Or lorsque ce modèle nominal est peu représentatif et occulte des modes résonnants de hautes fréquences, la loi de commande construite est incapable de compenser efficacement ces dynamiques négligées.

En effet, l'inconvénient des commandes par modes glissants est le phénomène de réticence, pour pallier ce problème nous avons remplacé la fonction signe par la fonction de

saturation, dans ce cas la commande devient lisse mais une chute des performances du système est observée.

Dans le cas où la réticence persiste, la technique des modes glissants d'ordre supérieur peut être utilisée.

Chapitre 3

Commandes par modes glissants d'un robot à deux articulations

3.1 Introduction.

Le modèle mathématique du système de robot est fortement non linéaire avec des variations de paramètres [Astr89], le choix de la structure de commande exige une robustesse vis-à-vis des perturbations et des variations des paramètres. La commande par mode glissant [Slot83, Slot87, Sira88, Utki92, Edou06] a été préférée pour soulever cet obstacle grâce à son caractère fortement robuste. Les résultats de simulation montrent les bonnes performances de la technique proposée

Le travail présenté dans ce chapitre est composé en deux parties :

La première partie comporte la commande par modes glissants standard composée de la commande équivalente augmentée du terme de robustesse, appliquée à un robot à deux articulations. La deuxième consiste à faire un choix optimal de la surface de glissement, sur laquelle demeurent et glissent tous les états du système. Ce choix est réalisé en utilisant la technique de LMIs [Boyd 96, Sche97, Tan00], puis nous synthétisons la loi de commande par modes glissants d'ordre 1 qui permet de forcer l'équation de glissement à converger vers zéro en un temps fini. Pour la validation de cette technique en simulation, nous avons choisi comme système, le bras d'un robot manipulateur à deux articulations.

3.2 Modélisation du robot à deux articulations.

Le système considéré dans ce chapitre est un robot manipulateur constitué par deux articulations et deux segments rigides comme le montre la figure suivante:

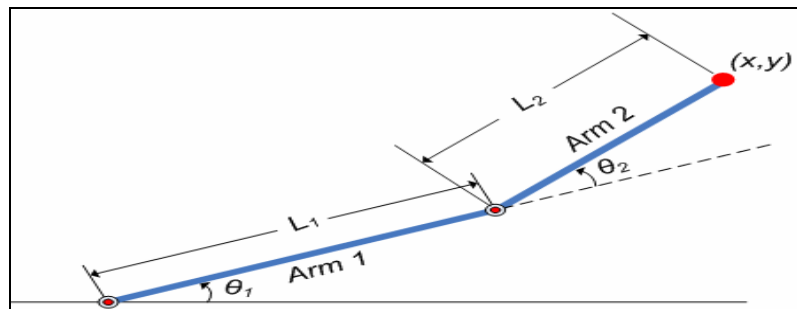


Fig. 3.1: Schéma du bras manipulateur à deux articulations.

En appliquant le formalisme de Lagrange (Annexe A), nous obtenons les deux équations suivantes représentant le modèle dynamique du bras manipulateur :

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \\ \dot{\tau} = Ji - B\tau - E\dot{q} \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $q, \dot{q}, et \ddot{q}$ (vecteurs de dimension 2) représentent respectivement le vecteur des coordonnées généralisées en position, vitesse et accélération.

En combinant les équations du (3.1), nous obtenons l'équation du robot avec ses actionneurs sous forme d'un seul étage :

$$\ddot{q} = -M^{-1}(q)\left\{\left[\dot{M}(q) + C(q, \dot{q}) + BM(q)\right]\dot{q} + \left[\dot{C}(q, \dot{q}) + BC(q, \dot{q}) + E\right]\dot{q} + \left[\dot{G}(q) + BG(q)\right]\right\} + M^{-1}(q)Ji \quad (3.2)$$

$M(q)$ la matrice d'inertie, $C(q, \dot{q})$ vecteur de dimension 2 représentant les forces de Coriolis, $G(q)$ le vecteur de gravité de dimension (2×1) et τ les couples appliqués sur chacune des articulations du bras manipulateur.

Le vecteur i de dimension (2×1) représente les courants dans les servovalves; J, B, E sont des matrices diagonales de dimension (2×2) appelées paramètres thermodynamiques. Elles dépendent de la température et des conditions initiales.

Pour notre étude nous avons considéré le modèle (3.1) sous forme d'équation d'état, en prenant comme variables d'état les positions : $x_1 = q_1, et x_4 = q_2$, ce qui conduit à la représentation suivante :

Le modèle du système en représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + g_{11}(x_1, x_4)u_1 + g_{12}(x_1, x_4)u_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + g_{21}(x_1, x_4)u_1 + g_{22}(x_1, x_4)u_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Avec:

$$q = [q_1 \ q_2]^T = [x_1 \ x_4]^T, \quad \dot{q} = [x_2 \ x_5]^T, \quad \ddot{q} = [x_3 \ x_6]^T, \quad x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T, \quad i = U = [u_1 \ u_2]^T,$$

$$M^{-1}(x_1, x_4)J = g(x_1, x_4) = \begin{bmatrix} g_{11}(x_1, x_4) & g_{12}(x_1, x_4) \\ g_{21}(x_1, x_4) & g_{22}(x_1, x_4) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Et

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x)]^T = -M^{-1} \left\{ \left[\dot{M} + C + BM \right] (x_3, x_6)^T + \left[\dot{C} + BC + E \right] (x_2, x_5)^T + \left[\dot{G} + BG \right] \right\}$$

L'erreur de poursuite $e = [e_1 \ e_4]^T$ avec $e_1 = x_1 - x_{1d}$, $e_4 = x_4 - x_{4d}$, et x_1 et x_4 sont les sorties commandées, ainsi que x_{1d} et x_{4d} sont les sorties désirées.

Nous définissons le degré relatif l du système comme le plus petit nombre entier positif j pour lequel la dérivé $X^{(j)}$ est une fonction explicite de la commande u , avec $X = [x_1 \ x_4]^T$ tel que :

$$\frac{\partial X^{(r)}(t)}{\partial U} \neq 0 \text{ et } \frac{\partial X^{(j)}(t)}{\partial U} = 0 \text{ pour } j = 0, 1, \dots, r-1. \quad (3.5)$$

3.3 Commande par modes glissants standard.

L'objectif principal consiste à utiliser l'approche des modes glissants pour chercher une loi de commande robuste vis-à-vis des différentes variations des paramètres, permettant de forcer les positions à suivre les trajectoires désirées. La synthèse de la commande est basée sur le choix de la surface de glissement dont le polynôme caractéristique possède ses racines dans le demi plan gauche du plan complexe, la deuxième étape consiste à chercher cette surface en se basant sur l'optimisation LMIs, la loi de commande trouvée utilise la méthode de Lyapunov.

3.3.1 Détermination de la surface de glissement.

Le degré relatif du système considéré est $l = 3$, l'équation de la surface de glissement $s(e, \dot{e}, \ddot{e})$ a été choisie comme suit :

$$s = \ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_0 e \quad (3.6)$$

Les coefficients α_1 et α_0 sont choisis selon la remarque 1.2.

3.3.2 Conception de la loi de commande.

En se basant sur la surface de glissement ci-dessus, l'objectif est d'utiliser la fonction de

Lyapunov pour trouver une loi de commande par modes glissant qui force l'équation de glissement vers zéro en un temps fini.

Théorème 3.1 [Path05] : Pour le modèle du système défini en (3.1), le contrôleur en mode glissant qui force les erreurs de poursuite asymptotiquement vers zéros dans un temps fini est donné comme suit:

$$u = u_{eq} + u_r$$

Avec $u_{eq} = -g^{-1}(x_1, x_2)\beta(x)$, et :

$$\beta(x) = f(x) + \alpha_1 \ddot{e} + \alpha_0 \dot{e} - [\dot{x}_{3d} \ \dot{x}_{6d}]^T \quad (3.7)$$

$u_r = -mg^{-1}s$: est le terme de commande robuste et m est une constante positive.

Preuve :

Considérons la fonction de Lyapunov :

$$V = \frac{1}{2} s^T s$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (\dot{s}^T s + s^T \dot{s})$$

$$\dot{s} = -ms, \quad m > 0 \quad \text{et} \quad \dot{V} = -ms^T s$$

$$\dot{s} = -ms \Leftrightarrow \beta(x) + g(x_1, x_4)u = -ms \Rightarrow u = -g^{-1}(x_1, x_4)\beta(x) - g^{-1}(x_1, x_4)ms \Leftrightarrow u = u_{eq} + u_r$$

3.4 Commande et Surface de glissement basée sur l'approche LMIs.

Les idées principales considérées dans cette partie, concernant la commande et le choix de la surface de glissement [Choi03],[Tan00] par la technique LMIs peuvent être présentées selon deux étapes :

La première étape consiste à faire le choix d'une surface de glissement pour un système donné, en se basant sur la technique de LMIs. Cette dernière est employée pour choisir la fonction de glissement d'une manière optimale, et qui laisse obtenir une action de commande nécessaire pour maintenir le glissement.

La deuxième étape consiste à trouver un contrôleur en mode glissant pour orienter la fonction de glissement à converger vers zéro en un temps fini. L'approche du mode glissant est préférée à cause de son caractère robuste à la dynamique non modelée et son insensibilité

aux perturbations externes. La synthèse du contrôleur est basée sur la surface de glissement choisie et utilise la fonction de Lyapunov.

3.4.1 Formulation du problème en LMIs.

Soit un système en représentation dans l'espace d'état [Alao07] avec un degré relatif $r \geq 2$.

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, U) \\ y = CX \end{cases} \quad (3.8)$$

Avec X : le vecteur d'état

U : l'entrée du système

Et y : la sortie du système

L'erreur de poursuite est : $e = y - y_d$ avec y_d : la trajectoire désirée

Considérons les dérivées successives de l'erreur de poursuite : $\dot{e}, e^{(2)}, \dots, e^{(r-1)}$, on pose en coordonnées locales :

$$Z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{r-1} \ z_r] = [e \ \dot{e} \ e^{(2)} \ \dots \ e^{(r-1)}]$$

Alors nous obtenons le modèle de système :

$$\dot{Z}_1 = AZ_1 + Bz_r \quad (3.9)$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, B = [0 \ \dots \ 1]^T \text{ et } Z_1 = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{r-2} \ z_{r-1}]^T$$

3.4.2 Choix de la surface de glissement par LMIs.

Notre objectif est de construire une surface de glissement optimale en employant la technique linéaire d'optimisation de l'inégalité matricielle linéaire (LMI).

L'objectif principal est de choisir les coefficients de la surface de glissement d'une manière optimale. Ce qui revient à stabiliser le système (3.9) vers l'origine en un temps fini.

Théorème 3.2 [Alao07c]: Pour le système (3.9), la surface de glissement peut être présentée sous la forme:

$$s = z_r - KZ_1$$

Avec : $K = LQ^{-1}$, L et Q sont les solutions de réalisation de l'inégalité matricielle linéaire :

$$QA^T + AQ + L^T B^T + BL < 0 \quad (3.10)$$

Q : matrice symétrique semi définie positive, $L < 0$.

Preuve :

En remplaçant $z_r = KZ_1$ dans (3.9). (3.11)

$$\dot{Z}_1 = (A + BK)Z_1 \quad (3.12)$$

Le système (3.12) est asymptotiquement stable si $\exists P > 0$ telle que :

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) < 0 \quad (3.13)$$

L'inégalité (3.13) est une inégalité non linéaire de Lyapunov et qui est équivalente en LMIs à $QA^T + AQ + L^T B^T + BL < 0$ telle que :

$$Q = Q^T = P^{-1}, L = KQ \quad \text{et} \quad L^T = QK^T$$

La surface définissant le glissement optimal :

$$s = e^{(r-1)} - K[e \quad \dot{e} \quad e^{(2)} \quad \dots \quad e^{(r-2)}]^T \quad (3.14)$$

Avec K : gain optimal apporté par la solution de réalisation du LMIs.

3.4.3 Synthèse de la loi de commande.

Nous considérons dans cette application, la poursuite de sorties d'un robot à deux articulations, nous employons la technique proposée dans le Théorème 3.2. Pour formuler d'une manière optimale la surface de glissement, et par la suite on cherche une loi de commande qui forcera la fonction de glissement à tendre vers zéro en un temps fini.

En considérant le modèle de système (3.9), le degré relatif du système est $r = 3$.

La surface de glissement est :

$$s = \ddot{e} - K[e \quad \dot{e}]^T \quad (3.15)$$

Avec : $e = [e_1 \ e_4]^T$, $e_1 = x_1 - x_{1d}$ et $e_4 = x_4 - x_{4d}$. x_1, x_4 sont les sorties commandés et x_{1d}, x_{4d} sont les sorties désirées.

Pour le modèle du système défini en (3.1), le contrôleur par mode glissant qui force les erreurs de poursuite à tendre asymptotiquement vers zéros en un temps fini peut être écrit comme suit:

$$U = U_{eq} + U_r$$

Où U_{eq} est la commande équivalente :

$$U_{eq} = -g^{-1} \left[f(x) - K \begin{pmatrix} x_2 - x_{2d} \\ x_5 - x_{5d} \\ x_3 - x_{3d} \\ x_6 - x_{6d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{x}_{3d} \\ \dot{x}_{6d} \end{pmatrix} \right] \quad (3.16)$$

Et $U_r = -m g^{-1} sat(s)$: est la commande robuste avec m : une constante choisie positive.

La trajectoire du système est alors confinée à l'intérieur d'une couche de frontière 2ϵ appelée "boundary layer" où couche de turbulence glissante.

3.5 Résultats de simulation.

3.5.1 Approche par mode glissant standard.

Pour un robot à deux articulations décrites par le modèle du système (3.1); les trajectoires désirées sont :

$$x_{1d} = \cos(2t) ; \quad x_{4d} = \sin(2t).$$

On considère les paramètres numériques du modèle:

$$g = 9.81 \text{ (ms}^{-2}\text{)}, \text{ les longueurs des deux segments : } (l_1 = 0.1 \text{ m}, l_2 = 0.15 \text{ m}).$$

Les masses des deux tiges : $(m_1 = 0.6 \text{ Kg}, m_2 = 0.4 \text{ Kg})$.

Les inerties sont : $(I_1 = 0.07 \text{ (Kgm}^2\text{)}, I_2 = 0.025 \text{ (Kgm}^2\text{)})$.

Les coefficients du polynôme caractéristique: $\alpha_1 = 1 ; \quad \alpha_0 = 0.25$.

Et les paramètres thermodynamiques sont:

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ et } J = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Les figures suivantes montrent les trajectoires réelles et désirées des positions x_1, x_4, x_{1d} et x_{4d} ainsi que la commande des courants u_1 et u_2 dans les servo-valves.

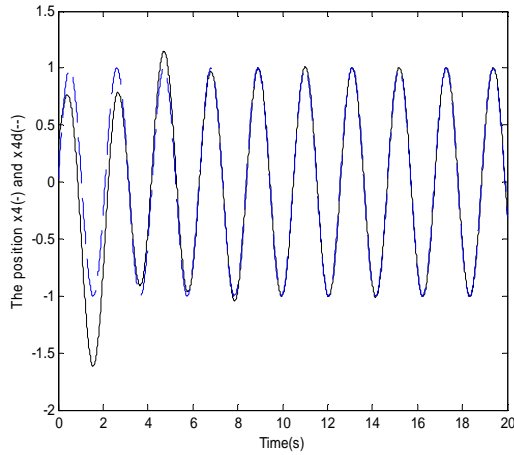


Fig. 3.2 : Trajectoires réelle $x_1(-)$ et désirée $x_{1d}(-)$

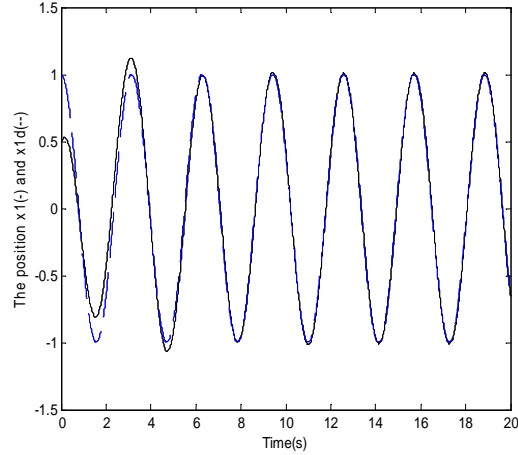


Fig. 3.3 : Trajectoires réelle $x_4(-)$ et désirée $x_{4d}(-)$

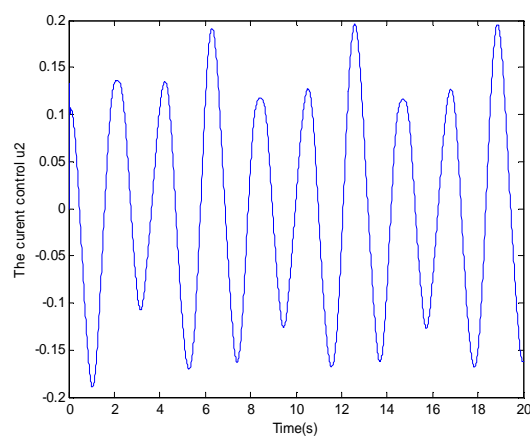
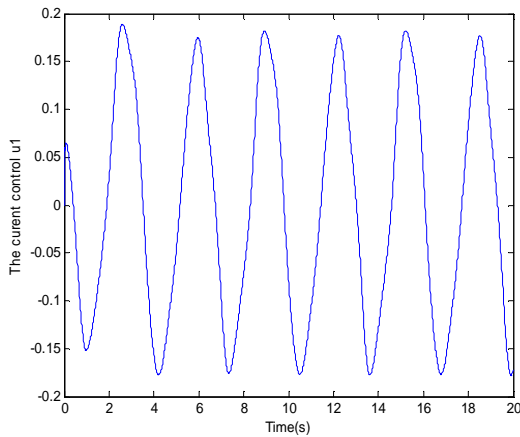


Fig.3.4 : Courants de commande des deux axes du bras manipulateur.

Les courbes des figures (3.2) et (3.3) montrent une bonne poursuite des trajectoires réelles, lorsque le contrôleur par mode glissant est appliqué.

Les figures (3.4) montrent les courants de commande appliqués aux actionneurs des deux axes du robot. Nous obtenons une commande lisse justifiant le choix de la commande proposée.

Remarque 3.1 : Seul le vecteur position est mesurable, pour pouvoir estimer l'état complet on va placer un observateur par mode glissant afin d'estimer tous les états inconnus du système, cette étude fera l'objet du chapitre 4.

3.5.2 Approche par mode glissant basé sur LMIs.

Pour un robot à deux articulations décrites par le modèle du système (3.1); les trajectoires désirées sont :

$$x_{1d} = \frac{\Pi}{2} \cos(t) \quad \text{et} \quad x_{4d} = \frac{\Pi}{2} \sin(t)$$

Et avec les mêmes paramètres numériques cités en (3.5).

L'approche LMIs en MATLAB donne les valeurs optimales suivantes :

$$Q = \begin{bmatrix} 60.4839 & 0 & -20.1613 & 0 \\ 0 & 60.4839 & 0 & -20.1613 \\ -20.1613 & 0 & 60.4839 & 0 \\ 0 & -20.1613 & 0 & 60.4839 \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} -60.5172 & 0 & -30.2586 & 0 \\ 0 & -60.5172 & 0 & -30.2586 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} -1.3125 & 0 & -0.9375 & 0 \\ 0 & -1.3125 & 0 & -0.9375 \end{bmatrix}$$

$m = 0.02$ est choisi tel que \dot{V} est négatif (théorème 3.1).

Pour des différentes positions initiales sans et avec incertitudes de paramètres, les figures (3.7), (3.12), (3.17), (3.22) montrent la trajectoire réelle (--) et la trajectoire désirée (- -) pour la position de l'extrémité du bras de robot .

Les figures (3.8), (3.13), (3.18), (3.23) et (3.9), (3.14), (3.19), (3.25) montrent respectivement la position angulaire de la première tige et de la deuxième tige. Les figures (3.10), (3.15), (3.20), (3.25) et (3.11), (3.16), (3.21), (3.26) montrent respectivement le couple appliqué à l'articulation 1 et le couple appliqué à l'articulation 2.

Pour montrer la robustesse de la loi de commande vis-à-vis des perturbations nous choisissons un bruit aléatoire affectant les masses des deux axes, les incertitudes sur les paramètres de charge sont considérées comme:

$$m_1 = 0.6 + (0.06)randn(t_0, t_f) \quad \text{et} \quad m_2 = 0.4 + (0.04)randn(t_0, t_f)$$

avec t_0 temps initial et t_f : temps final .

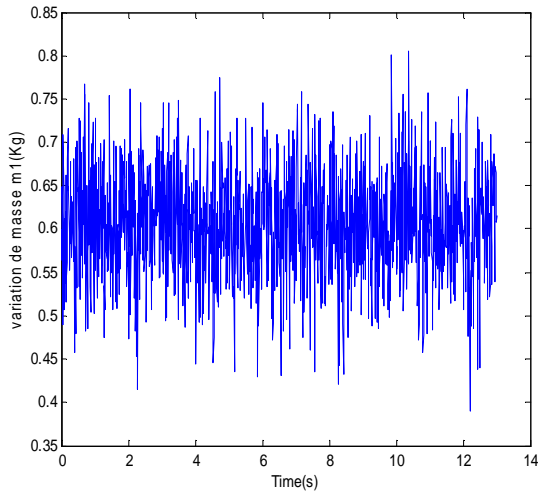


Fig. 3.5: Variation de la masse m_1

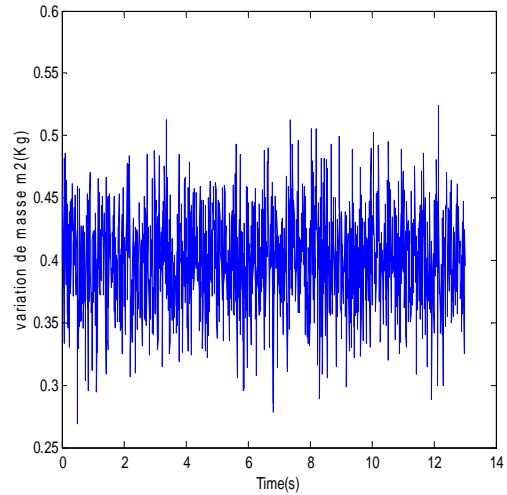


Fig. 3.6: Variation de la masse m_2

Nous présentons les résultats de simulation pour la position angulaire, le couple articulaire et la position du bout de robot [Edou06],[Marc02] pour différents cas de position, position initiale stable sans et avec incertitudes et position instable avec et sans incertitudes

Cas 1:

Position initiale stable $Y(0) = Y_d(0)$, $X(0) = X_d(0)$ sans incertitudes.

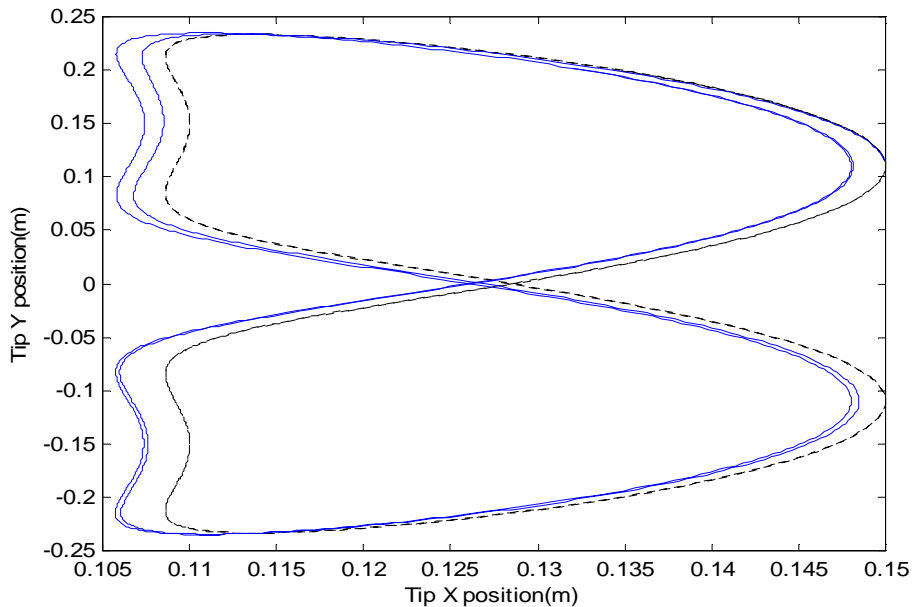


Fig.3.7: Trajectoire de l'extrémité du bras dans le plan horizontal (-) avec trajectoire désirée (...)

Commandes par modes glissants d'un robot à deux articulations.

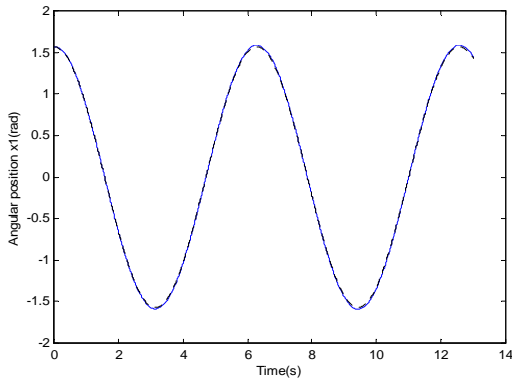


Fig. 3.8: Position angulaire mesurée (-), et référence(...)(rad) .

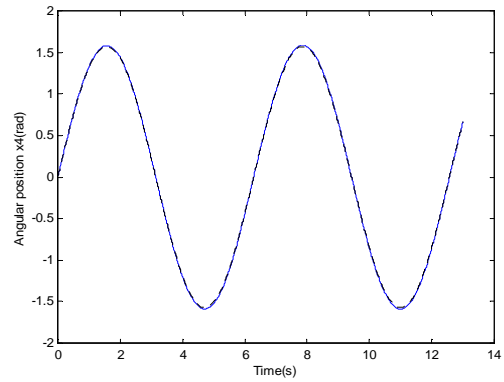


Fig.3.9: Position angulaire mesurée (-), et référence (...)(rad).

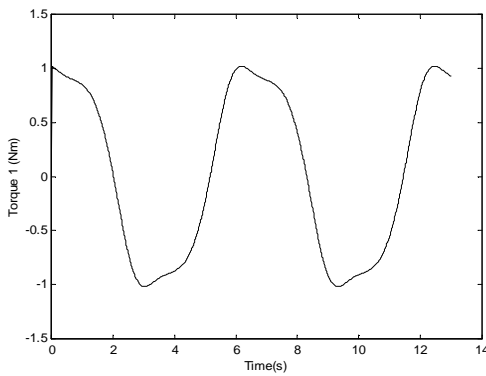


Fig.3.10 : Couple appliqué à l'articulation 1.

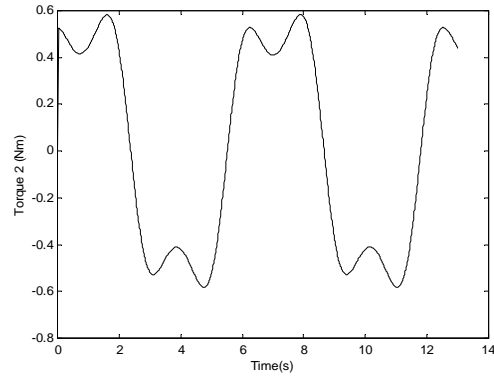


Fig.3.11 : Couple appliqué à l'articulation 2.

Cas 2:

Position initiale instable et sans incertitudes: $Y_d(0) - Y(0) = -0.1117$ et $X_d(0) - X(0) = 0.0911$.

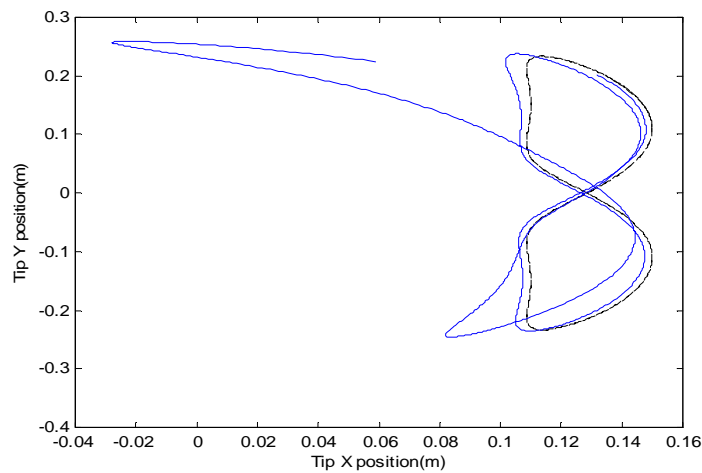


Fig.3.12 : Trajectoire de l'extrémité du bras dans le plan horizontal (-) avec trajectoire désirée (...).

Commandes par modes glissants d'un robot à deux articulations.

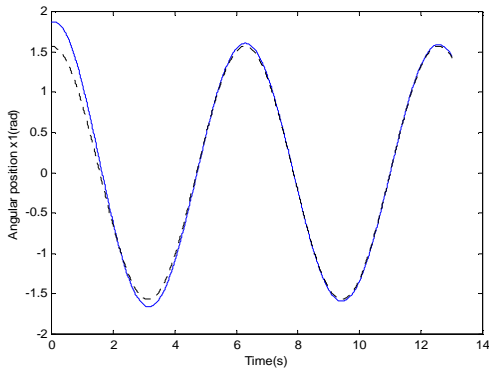


Fig.3.13 : Position angulaire mesurée (-) et référence(...)(rad).

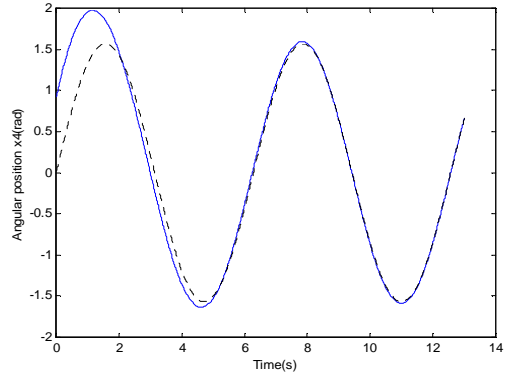


Fig.3.14 : Position angulaire mesurée (-) et référence(...)(rad).

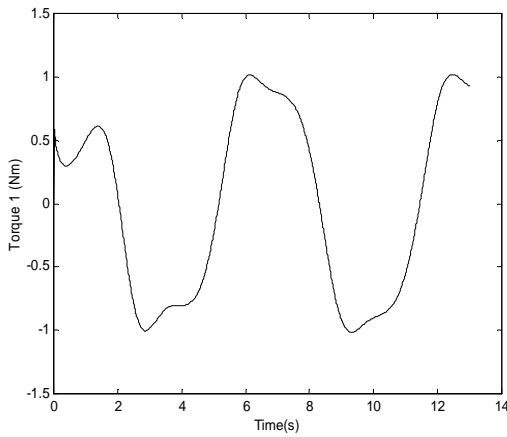


Fig.3.15 : Couple appliqué à l'articulation 1

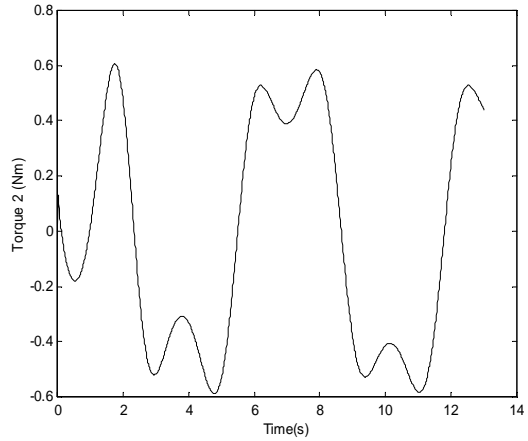


Fig.3.16 : Couple appliqué à l'articulation 2

Cas 3:

Position initiale stable avec incertitudes: $Y(0) = Y_d(0)$, $X(0) = X_d(0)$.

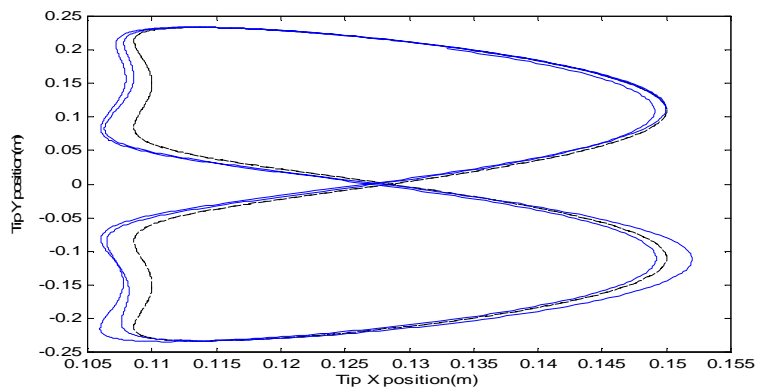


Fig.3.17 : Trajectoire de l'extrémité du bras dans le plan horizontal (-) avec trajectoire désirée (...)

Commandes par modes glissants d'un robot à deux articulations.

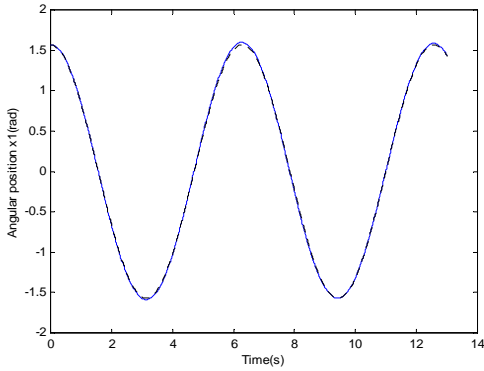


Fig. 3.18 : Position angulaire mesurée (-) et référence(...)(rad).

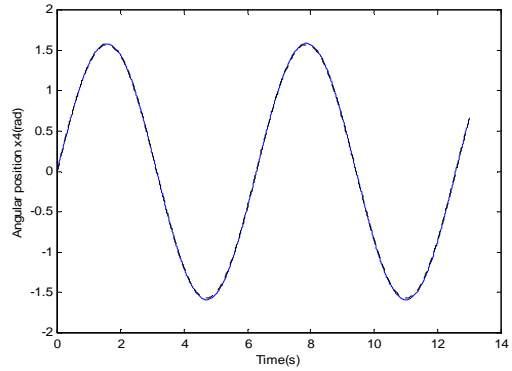


Fig. 3.19 : Position angulaire mesurée (-) et référence(...)(rad).

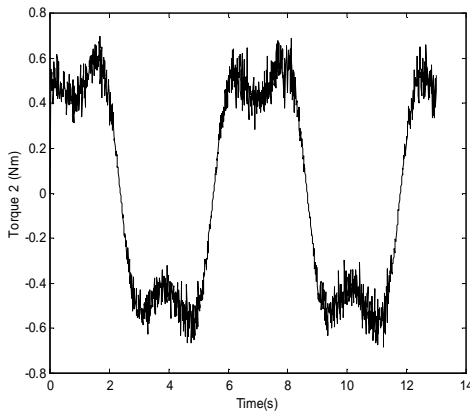


Fig.3.20 : Couple appliqué à l'articulation 1.

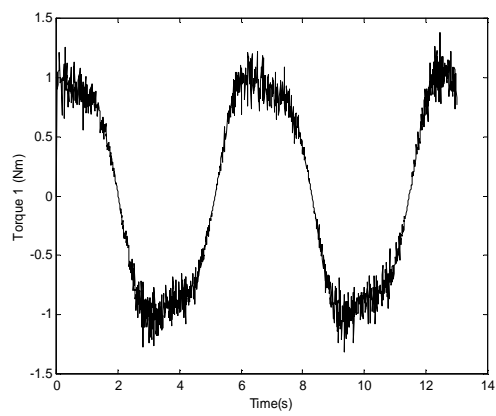


Fig.3.21 : Couple appliqué à l'articulation 2.

Cas 4:

Position initiale instable et avec incertitudes: $Y_d(0) - Y(0) = -0.1117$, et $X_d(0) - X(0) = 0.091$.

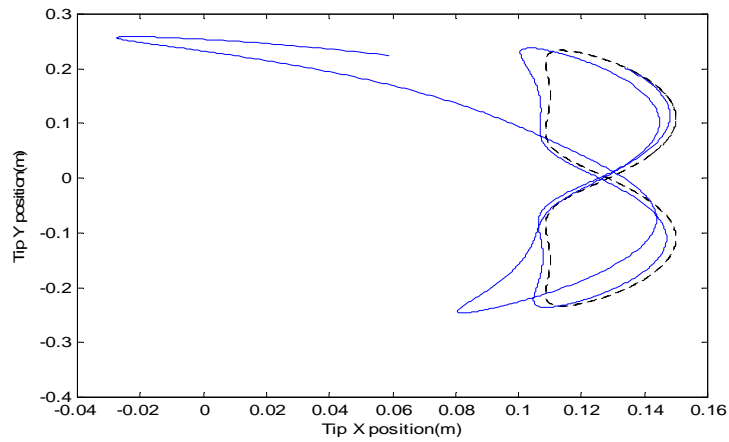


Fig.3.22 : Trajectoire de l'extrémité du bras dans le plan horizontal (-) avec trajectoire désirée (...).

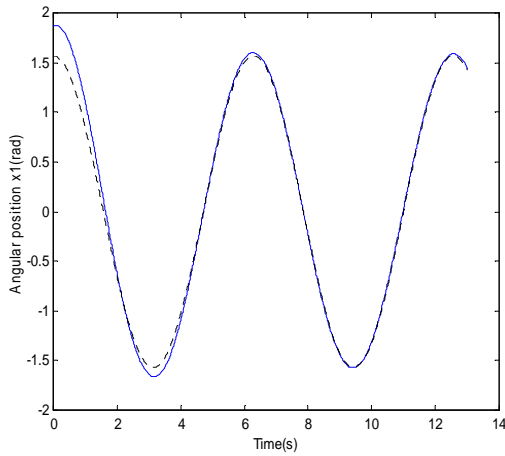


Fig. 3.23 Position angulaire mesurée (-) et référence(...)(rad) .

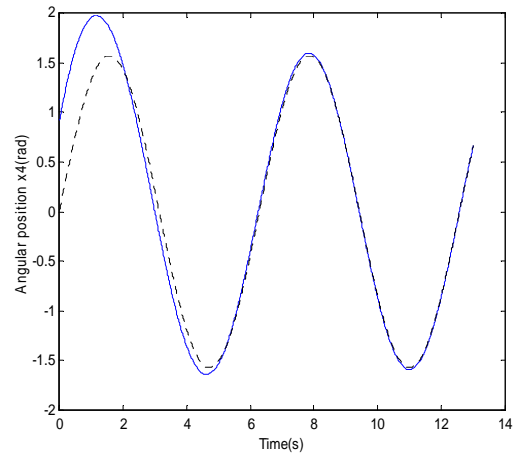


Fig. 3.24 Position angulaire mesurée (-) et référence(...)(rad).

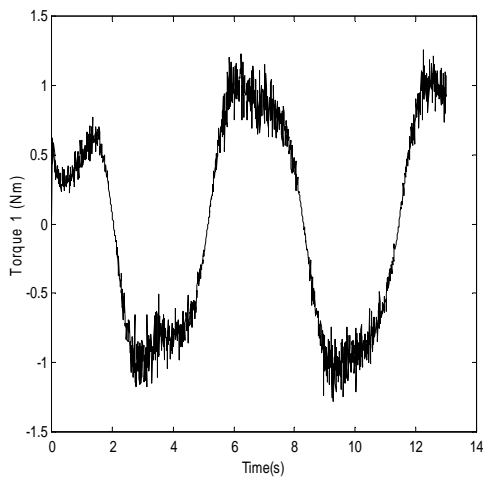


Fig.3.25 : Couple appliqué à l'articulation 1.

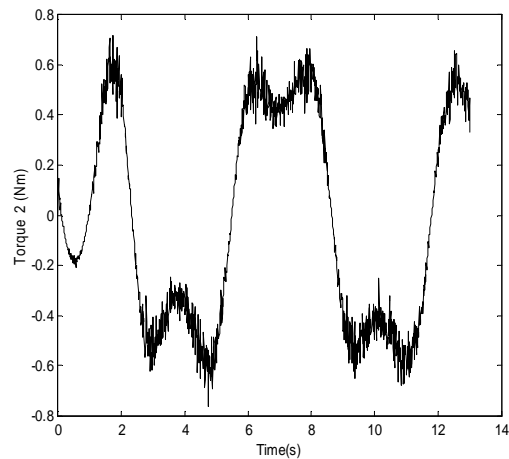


Fig.3.26 : Couple appliqué à l'articulation 2.

Les résultats obtenus montrent une bonne poursuite de la position angulaire des deux axes, ainsi qu'une robustesse du contrôleur appliqué par les modes glissants lorsque la surface de glissement est déterminée par LMIs, quand à la représentation en coordonnées cartésiennes de la trajectoire de l'extrémité du bras manipulateur dans le plan horizontal pour différents cas de position, position initiale stable sans et avec incertitudes et position instable avec et sans incertitudes, les résultats obtenus montrent l'efficacité du contrôleur proposé en mode glissant, dont la surface de glissement a été choisie en utilisant la technique de résolution de LMIs.

3.6 Conclusion.

Dans ce chapitre nous avons appliqué les modes glissants classiques sur le système de robot à deux articulations. Les premiers résultats de simulations montrent de meilleurs résultats concernant les erreurs de poursuite quand le contrôleur est appliqué par les modes glissants. Dans la deuxième partie de ce chapitre on a proposé une technique pour la conception de contrôleur robuste en utilisant le concept de surface de glissement basé sur le LMIs comme outil, nous avons considéré la commande de la trajectoire de l'extrémité du bras manipulateur dans le plan horizontal pour différents cas de position, position initiale stable avec et sans incertitudes et position instable avec et sans incertitudes. Les simulations montrent des résultats satisfaisants quand le contrôleur par mode glissant utilisant la surface de glissement proposée est appliqué.

Chapitre 4

Observateurs par modes glissants

4.1- Introduction.

La mise en œuvre de lois des commandes basées sur le modèle non linéaire du système, nécessite la connaissance du vecteur d'état complet du système à chaque instant. Mais, dans la plupart des cas, les seules grandeurs accessibles du système sont les variables d'entrées et de sorties, il est nécessaire qu'à partir de ces informations de reconstruire l'état du modèle choisi pour élaborer la commande. De ce fait, l'idée repose sur l'utilisation d'un observateur. Un observateur est un système dynamique que l'on peut appeler capteur informatique, puisqu'il est souvent implanté sur ordinateur afin de reconstituer ou d'estimer en temps réel l'état courant d'un système, à partir des mesures disponibles, des entrées du système et une connaissance à priori du modèle. Il nous permet alors de suivre l'évolution de l'état en tant qu'information sur le système.

La possibilité de reconstituer une information interne sur le système au moyen des grandeurs externes disponibles peut être utile à plusieurs niveaux :

- La commande du procédé, qui nécessite bien souvent la connaissance de son état interne.
- La surveillance du procédé, à travers les écarts entre le comportement de l'observateur et celui du procédé.
- L'identification du procédé, au moyen de l'estimation des grandeurs constantes qui paramétrisent le modèle.

Or, la stabilité en boucle fermée ne peut être garantie à priori si la loi de la commande et l'observateur sont synthétisés séparément [Bouk97], [Mana97], [Djem97], le principe de séparation est vérifié seulement pour les systèmes linéaires, dont le problème est résolu par les observateurs de Luenberger [Luen71].

Pour les systèmes non linéaires, la synthèse d'observateurs est encore un problème ouvert. Une des classes les plus connues des observateurs robustes est celle des observateurs par

modes glissants. Ce type d'observateur est basé sur la théorie des systèmes à structure variable.

4.2 Observabilité et observateurs.

L'observabilité d'un processus est un concept très important en automatique. En effet, pour reconstruire l'état et la sortie d'un système, il faut savoir, a priori, si les variables d'état sont observables ou non.

En général, pour des raisons de réalisation technique, de coût, etc..., la dimension du vecteur de sortie est inférieure à celle de l'état. Ceci entraîne qu'à l'instant donné t , l'état $x(t)$ ne peut pas être déduit algébriquement de la sortie $y(t)$ à cet instant. Par contre, sous des conditions d'observabilité qui seront explicitées plus loin, cet état peut être déduit de la connaissance des entrées et sorties sur un intervalle de temps passé: $u([0, t]), y([0, t])$.

Le but d'un observateur est de fournir avec une précision garantie une estimation de la valeur courante de l'état en fonction des entrées et sorties passées. Cette estimation devant être obtenue en temps réel, l'observateur revêt usuellement la forme d'un système dynamique.

Définition 4.1 [Foss 93] : on appelle observateur (ou reconstituteur d'état) d'un système dynamique (S) :

$$(S) : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (4.1)$$

Un système dynamique auxiliaire O dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie $\hat{x}(t)$ est l'état estimé :

$$O : \begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{f}(z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = \hat{h}(z(t), u(t), y(t)) \end{cases} \quad (4.2)$$

telle que l'erreur entre le vecteur d'état $x(t)$ et $\hat{x}(t)$ tend asymptotiquement vers zéro.

$$\|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

Le schéma d'un tel observateur est donné sur la figure (4.1).

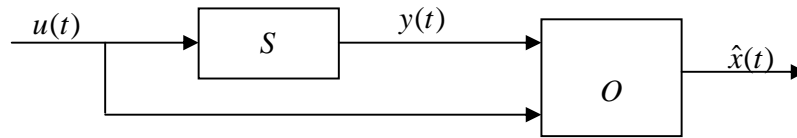


Fig. 4.1. Schéma de principe d'un observateur.

L'existence d'un tel observateur est liée à la notion d'observabilité de (S) .

L'observabilité caractérise la propriété de pouvoir récupérer (de façon statique ou dynamique) par une combinaison des mesures et de leurs dérivées toutes les grandeurs d'un système.

4.3. Observabilité des systèmes linéaires.

Considérons le système dynamique linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

$x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ et $y(t) \in R^p$. Les matrices A , B et C ont des dimensions appropriées.

La matrice d'observabilité du système (4.4) est définie [Foll85] par :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

L'observabilité du système (4.4) est garantie si le rang de la matrice d'observabilité O est égal à n [Kalm60]. O'Reilly [O'Rei83] a présenté un deuxième critère; le système (4.4) est complètement observable si :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = n \quad (4.6)$$

Pour tout s complexe. Si un système linéaire est complètement observable, il est globalement observable, c'est-à-dire que toutes les composantes du vecteur d'état du système sont observables, et donc peuvent être reconstruites par un observateur. Si le système est non linéaire, nous devons distinguer l'observabilité globale de l'observabilité locale.

4.4. Observateur non linéaire.

Considérons un système non linéaire d'un système dynamique (S) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (4.7)$$

Où les variables : $x \in X \subset R^n$, $u \in U \subset R^m$ et $y \in Y \subset R^p$ représentent respectivement l'état, l'entrée ou la commande et la sortie du système. f et h sont des champs de vecteurs supposés suffisamment continûment dérivables sur X .

La plupart des observateurs qui existent dans la littérature ont la structure suivante

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}, u) + \eta(y, \hat{x}) \\ y(t) = h(\hat{x}(t)) \end{cases} \quad (4.8)$$

C'est-à-dire une copie du modèle plus un terme correcteur $\eta(y, \hat{x})$ qui établit la convergence de \hat{x} vers x .

4.4.1 Observateur classique par mode glissant.

La mise en oeuvre des lois de commandes basées sur le modèle non linéaire du système, nécessite la connaissance du vecteur d'état complet du système à chaque instant. Cependant, dans la plupart des cas, seule une partie de l'état est accessible à l'aide de capteurs. Pour reconstituer l'état complet du système, l'idée repose sur l'utilisation d'un capteur logiciel, appelé observateur [Nico89], [Kris96]. Un observateur est un système dynamique qui à partir de l'entrée $u(t)$ du système (la commande), de la sortie $y(t)$ mesurée, ainsi que d'une connaissance a priori du modèle, fournira en sortie un état estimé $\hat{x}(t)$ qui devra tendre vers l'état réel $x(t)$ (figure (4.1)).

Une des classes les plus connues des observateurs robustes est celle des observateurs par modes glissants [Kris96, Sira94, Slot87, Utki95].

Pour le système (4.7), une structure d'observateur par modes glissants classique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u) + \Lambda \text{sign}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = \hat{h}(\hat{x}) \end{cases}$$

Dans ce cas, la surface de glissement est donnée par :

$$s(x) = y - \hat{y}$$

Le terme de correction utilisé est proportionnel à la fonction discontinue *signe* appliquée à l'erreur de sortie. L'étude de la stabilité et de la convergence pour de tels observateurs, est basée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov.

L'étude de la stabilité et de convergence utilise les concepts de résolutions de Filippov [Fili60], ainsi que les méthodes dites du vecteur équivalent développées par Utkin pour la commande, et par Drakunov [Utki92, Drak92, Drak95] pour les observateurs.

Notre choix de ce type d'observateurs se justifie par les bonnes propriétés qui peuvent être obtenues et parmi lesquelles nous citerons :

- Une convergence en temps fini vers la surface de glissement $s(x) = y - \hat{y} = 0$ si entre autre les conditions d'attractivité vers cette surface sont vérifiées.
- Une réduction de dimension du système d'observation à $n - p$ états avec n la dimension de l'état x , et p la dimension du vecteur de sortie.
- Comme la fonction *signe* est équivalente à un grand gain au voisinage de l'origine, nous obtenons une certaine robustesse vis-à-vis d'erreurs de modèle et de perturbations bornées.

L'exploitation de ces propriétés, et l'utilisation d'observateurs à modes glissant à structures particulières, nous permettent d'obtenir des dynamiques d'erreurs d'observation plus simple et plus facilement stabilisables pour des formes de système plus large que la forme injection de sortie [Kren83]. Ainsi, pour des systèmes qui se mettent sous forme d'observation triangulaire [Arim85, Bouk97], nous allons voir dans le paragraphe suivant comment nous obtenons la convergence de l'erreur d'observation vers zéro en temps fini.

4.4.2 Principe de séparation.

La dynamique de l'erreur d'observation $e = \hat{x} - x$ est aussi non linéaire dépendante de l'état de l'entrée du système.

$$e = f(x, u) - f(x - e) - \eta(y, \hat{x}) \tag{4.9}$$

Le principe de séparation n'est donc plus vérifié et la commande n'étant plus indépendante de l'observateur. Par ailleurs il faut tenir compte de la dynamique de (4.9) si on veut faire la synthèse d'une commande basée sur \hat{x} .

Il est à noter que ces contraintes ne se posent pas pour les systèmes linéaires et également pour les systèmes qui se mettent sous injection de sortie c'est-à-dire dans le cas où la non linéarité ne dépend que des grandeurs connues (les entrées et les mesures) [Bouk97].

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(y, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.10)$$

Un observateur avec compensation du terme non linéaire peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(y, u) + G(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (4.11)$$

et permet alors d'obtenir une dynamique d'erreur d'observation linéaire indépendante de l'entrée et de l'état :

$$\dot{e} = (A - GC)e \quad (4.12)$$

De manière générale pour des systèmes quelconques, il existe différentes classes d'observateurs, nous avons choisi d'étudier des observateurs par modes glissants pour les avantages qu'ils présentent en simplicité de mise en œuvre.

4.5 Description et modélisation du robot à une articulation.

Les robots manipulateurs sont généralement actionnés de manière à augmenter au maximum leur mobilité [West92]. Ces systèmes servent pour l'étude des problèmes de stabilisation statique dans des environnements inconnus. Les non linéarités du modèle et des actionneurs rendent les problèmes de commande et d'observation assez compliqués.

Le modèle dynamique du robot est celui du (3.1).

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \\ \dot{\tau} = Ji - B\tau - E\dot{q} \end{cases} \quad (4.13)$$

L'unique variable supposée mesurable est la position articulaire (une partie de l'état). Cette information va nous servir pour la reconstruction de la vitesse et de l'accélération.

Pour notre étude nous mettons le modèle (4.13) sous forme d'équations d'état. En prenant comme vecteur d'état : $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, $x_3 = \ddot{q}$, le modèle peut être réécrit sous forme de représentation d'état comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = f(x, i) \end{cases} \quad (4.14)$$

Où l'on définit la sortie mesurée par :

$$y = q = x_1$$

Et le vecteur d'état :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$$

Et

$$f(x, i) = -M^{-1}[(\dot{M} + C + BM)x_3 + (\dot{C} + BC + E)x_2 + \dot{G} + BG - Ji] \quad (4.15)$$

Dans le but d'estimer l'état complet du système (positions, vitesses et accélérations articulaires) on propose un observateur non linéaire basé sur les modes glissants, qui n'est autre qu'une combinaison de l'observateur par modes glissants classique présenté dans le chapitre 1 et l'observateur triangulaire [Baeb97, M'Sir97]. L'utilisation de cet observateur permet, après la convergence en temps fini de l'erreur d'observation en position et en vitesse de réduire le système à une seule composante. La structure de l'observateur proposé est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - \Lambda_1 \text{sign}_1(\tilde{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - \Lambda_2 \text{sign}_2(\hat{x}_2 - \bar{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \hat{f}(\hat{x}, i) - \Lambda_3 \text{sign}_2(\hat{x}_2 - \bar{x}_2) + v \end{cases} \quad (4.16)$$

Où l'état estimé est donné par :

$$\hat{x} = [\hat{x}_1^T \ \hat{x}_2^T \ \hat{x}_3^T]^T$$

$$\hat{x}_1^T = [\hat{q}_1 \ \hat{q}_2]$$

$$\hat{f}(\hat{x}, i) = -\hat{M}^{-1}[(\dot{\hat{M}} + \hat{C} + \hat{B}\hat{M})\hat{x}_3 + (\dot{\hat{C}} + \hat{B}\hat{C} + \hat{E})\hat{x}_2 + \hat{B}\hat{G} + \hat{G} - \hat{J}i] \quad (4.17)$$

La variable \bar{x}_2 est donnée par :

$$\bar{x}_2 = \hat{x}_2 - \Lambda_1 \text{sign}_{eq1}(\tilde{x}_1) \quad (4.18)$$

Où $\tilde{x} = \hat{x} - x$ représente l'erreur d'observation. La fonction $sign_2(\cdot)$ est mise à zéro tant que $\tilde{x}_1 \neq 0$, sinon $sign_2(\cdot)$ est égale à la fonction $sign(\cdot)$ classique. Le terme v pouvant être fonction de variables connues ou mesurables, est introduit pour augmenter la robustesse de l'observateur. Les matrices Λ_1 et Λ_2 sont choisies diagonales positives :

$\Lambda_1 = diag(\lambda_{11}, \lambda_{21})$, $\Lambda_2 = diag(\lambda_{12}, \lambda_{22})$ et la matrice non linéaire $\Lambda_3(\cdot)$ sera déterminée en utilisant la condition de convergence sur \tilde{x}_3 , étudiée en boucle fermée avec l'équation de l'erreur de suivi.

En soustrayant les équations du système (4.15) et les équations de l'observateur (4.17), nous obtenons les erreurs d'estimation :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \Lambda_1 sign_1(\tilde{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 - \Lambda_2 sign_2(\hat{x}_2 - \bar{x}_2) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \hat{f}(\hat{x}, i) - f(x, i) - \Lambda_3 sign_2(\hat{x}_2 - \bar{x}_2) + v \end{cases} \quad (4.19)$$

Dans le but de maintenir les dynamiques du système à l'intérieur de la région attractive, nous devons procéder comme précédemment, par étape. Nous déterminons une surface attractive et nous définissons le domaine de convergence correspondant, ensuite nous étudierons la dynamique du système sur cette surface glissante.

➤ **Etape 1 :**

Comme la fonction $sign(\hat{x}_2 - \bar{x}_2)$ est mise à zéro, dans la première étape, nous obtenons la dynamique de l'erreur d'observation suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \Lambda_1 sign_1(\tilde{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \hat{f}(\hat{x}, i) - f(x, i) + v \end{cases} \quad (4.20)$$

Prenons l'équation $\tilde{x}_1 = 0$ et vérifions qu'une partie au moins de cette surface est une surface glissante pour le système. Pour ceci nous choisissons comme fonction de Lyapunov :

$$V_1 = \frac{1}{2} \tilde{x}_1^T \tilde{x}_1 \quad (4.21)$$

Il est facile de montrer [Canu91] que \dot{V}_1 est négative sous les conditions suivantes :

$$|\tilde{x}_2^i| < \lambda_{11} \quad i \in \{1, 2\} \quad (4.22)$$

Ainsi, en choisissant $\lambda_{11} > |\tilde{x}_2^i|$, nous obtenons la convergence de l'erreur d'observation \tilde{x}_1 vers zéro après un temps fini t_1 , et donc $\dot{\tilde{x}}_1$. Sur la surface de glissement nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \tilde{x}_2 - \Lambda_1 \text{sign}_1(\tilde{x}_1) = 0, \text{ impliquant } \bar{x}_2 = x_2 \text{ car :} \\ \dot{\tilde{x}}_1 &= \dot{\tilde{x}}_2 - \Lambda_1 \text{sign}_1(\tilde{x}_1) = \bar{x}_2 - x_2 = 0\end{aligned}\quad (4.23)$$

Une fois x_2 obtenu nous passons à la dynamique de \tilde{x}_2 .

- **Etape 2** : le but de cette étape est d'atteindre $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$, sur la surface $\tilde{x}_1 = 0$; la dynamique de l'erreur d'observation devient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = 0 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 - \Lambda_2 \text{sign}_2(\tilde{x}_2) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \hat{f}(\hat{x}, i) - f(x, i) - \Lambda_3 \text{sign}_2(\tilde{x}_2) + v \end{cases}$$

Soit la nouvelle fonction de Lyapunov:

$$V_2 = \frac{1}{2} \tilde{x}_2^T \tilde{x}_2$$

La dérivé par rapport au temps de V_2 est donnée par :

$$\dot{V}_2 = \tilde{x}_2^T (\tilde{x}_3 - \Lambda_2 \text{sign}(\tilde{x}_2))$$

Par conséquent, si $\lambda_{i2} > |\tilde{x}_3^i|$ $i \in \{1, 2\}$, alors \tilde{x}_2 converge vers zéro après un temps fini $t_2 > t_1$.

Donc, après un temps fini $t = t_2$, nous avons $\tilde{x}_2 = 0$, et $\dot{\tilde{x}}_2 = 0$.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = 0 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_2 - \Lambda_2 \text{sign}_{eq2}(\tilde{x}_2) = 0 \end{cases}$$

D'où en moyenne :

$$\text{sign}_{eq2}(\tilde{x}_2) = \Lambda_2^{-1} \tilde{x}_2$$

Nous pouvons maintenant considérer la dynamique réduite de l'erreur d'observation sur la surface $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$ comme :

$$\dot{\tilde{x}}_3 = \hat{f}(x_1, x_2, \hat{x}_3, i) - f(x, i) - \Lambda_3 \Lambda_2^{-1} \tilde{x}_2 + v \quad (4.24)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_1, x_2, \hat{x}_3, i) - f(x, i) = & -(\overline{M^{-1}\dot{M}} + \overline{M^{-1}C} + \overline{B})\hat{x}_3 - M^{-1}(\dot{M} + C + BM)\tilde{x}_3 \\ & - \overline{M^{-1}J}i - \left(\overline{M^{-1}\dot{C}} + \overline{M^{-1}BC} + \overline{M^{-1}E}\right)x_2 - \left(\overline{M^{-1}BG} + \overline{M^{-1}\dot{G}}\right) \end{aligned}$$

Où pour toutes matrices A , B et C données nous avons :

$$\begin{cases} \overline{AB} = \hat{A}\hat{B} - AB \\ \overline{ABC} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - ABC \end{cases}$$

Dans ce paragraphe nous avons obtenu la dynamique du système réduit de l'erreur d'observation; la condition de convergence sur \tilde{x}_3 pourra être étudiée en boucle fermée avec l'équation de l'erreur de suivi [Cher01].

4.6 Forme d'observation triangulaire.

L'observateur triangulaire par modes glissants a été développé pour des systèmes qui peuvent se mettre sous la forme suivante appelée forme triangulaire d'observation [Bouk97]:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + g_1(x_1, u) \\ x_3 + g_2(x_1, x_2, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u) \\ f_n(x) + g_n(x, u) \end{pmatrix} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.25)$$

Où les g_i et f_n pour $i = 1, 2, \dots, n$ sont des fonctions analytiques, $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in R^n$ l'état du système, $u \in R^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in R$ la sortie que nous considérons pour des raisons de simplicité d'écriture.

La structure de l'observateur proposé est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} \\ \dot{\hat{x}}_n \\ \hat{y} = \hat{x}_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_2 + g_1(x_1, u) + \lambda_1 \text{sign}_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \hat{x}_3 + g_2(x_1, \bar{x}_2, u) + \lambda_2 \text{sign}_2(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{x}_n + g_{n-1}(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}, u) + \lambda_{n-1} \text{sign}_{n-1}(\bar{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \\ f_n(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + g_n(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, u) + \lambda_n \text{sign}_n(\bar{x}_n - \hat{x}_n) \end{array} \right\} \quad (4.26)$$

Où les variables \bar{x}_i sont données par :

$$\bar{x}_i = \hat{x}_i + \lambda_{i-1} \text{sign}_{\text{moy}, i-1}(\bar{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1})$$

Avec $\text{sign}_{\text{moy}, i-1}$ désignant la fonction sign_{i-1} filtrée par un filtre passe bas ; la fonction $\text{sign}_i(\cdot)$ est mise à zéro s'il existe $j \in \{1, i\}$ tel que $\bar{x}_j - \hat{x}_j \neq 0$ (par définition $\bar{x}_1 = x_1$), si non $\text{sign}_i(\cdot)$ est prise égale à la fonction $\text{sign}(\cdot)$ classique. Grâce à cela nous imposons que le terme correcteur ne soit "actif" que si la condition $\bar{x}_j - \hat{x}_j = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, i$ est vérifiée.

Pour ce type d'observateur, nous avons une convergence en temps fini (par étapes) de l'erreur d'observation. En outre, il permet la séparation de la synthèse de l'observateur et de la commande; il facilite l'étude de stabilité en boucle fermée. La convergence en temps fini de l'observateur est assurée par le théorème suivant :

Théorème 4.1 [Mana98] : Considérons le système (4.25) et l'observateur (4.26). Si le système est à entrées bornées et à états bornés (BIBS) pour une durée finie $[0, T]$, alors pour tout état initial $x(0)$, $\hat{x}(0)$ et toute entrée bornée u , il existe un choix de λ_i tel que l'état de l'observateur \hat{x} converge en un temps fini vers l'état x du système.

Elément de démonstration.

Considérons la dynamique de l'erreur d'observation $e = x - \hat{x}$ et procédons étape par étape.

Pour $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$, nous avons :

$$\dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 \text{sign}(e_1) \quad \text{avec} \quad e_2 = x_2 - \hat{x}_2$$

Si $\lambda_1 > |e_2|$ pour $t < t_1$ alors la surface de glissement $e_1 = 0$ est attractive et est atteinte après un temps fini t_1 ce qui fait que $\dot{e}_1 = 0$.

Il existe une fonction continue notée $sign_{eq}$ définie par $e_2 - \lambda_1 sign_{eq}(e_1) = 0$ impliquant $\bar{x}_2 = x_2$ sur la surface de glissement, puisque $sign_{eq} = sign_{moy}$, alors :

$$\dot{e}_1 = x_2 - (\hat{x}_2 - \lambda_2 sign_{eq}(x_1 - \bar{x}_1)) = x_2 - \bar{x}_2 = 0$$

Une fois x_2 connu, nous allons passer à la dynamique de e_2 . Nous avons après t_1 comme nous l'avons vu, $\bar{x}_2 = x_2$ ce qui implique que :

$$g_1(x_1, x_2) - g_2(x_1, \bar{x}_2) = 0.$$

Alors $\dot{e}_2 = e_3 - \lambda_2 sign(e_2)$, et suivant le même raisonnement si $\lambda_2 > |e_3|_{\max}$ pour $t < t_2$, nous aurons après un temps fini $t_2 > t_1$ la convergence vers la surface $e_1 = e_2 = 0$. La dynamique du reste de l'erreur d'observation sur la surface de glissement est donnée par $\dot{e}_2 = 0$ et on déduit donc $x_3 = \bar{x}_3$ car :

$$\dot{e}_2 = x_3 - \hat{x}_2 - \lambda_2 sign_{eq}(e_2) = x_3 - \bar{x}_3 = 0$$

En réitérant $(n-1)$ fois ce processus, nous avons après un temps t_{n-1} convergence de toute l'erreur d'observation vers la surface $e_1 = e_2 = \dots = e_{n-1} = 0$ et par conséquent \bar{x} tend vers x , en un temps fini t_{n-1} tout l'état est connu et l'erreur d'observation est nulle.

Nous allons maintenant nous intéresser à la stabilité de l'observateur en déroulant étape par étape le processus de convergence de l'observateur.

A partir de (4.25) et (4.26) et en considérant les conditions initiales $x_1(0) \neq \hat{x}_1(0)$ (si ce n'est pas le cas nous sommes sur la surface de $e_1 = 0$ à l'instant initial, nous passons directement à l'étape 2).

➤ **Étape 1** : Vu que les fonctions $sign_i$ sont prises égales à zéro pour $i > 1$. nous obtenons la dynamique suivante pour l'erreur d'observation $e = x - \hat{x}$.

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{e}_{n-1} \\ \dot{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 - \lambda_1 \text{sign}_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ e_3 + g_2(x_1, x_2, u) - g_2(x_1, \hat{x}_2, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u) - g_{n-1}(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}, u) \\ f_n(x) - f_n(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Etant donné que nous prenons une entrée u bornée, le système n'explose pas en temps fini (le système est supposé (BIBS) en temps fini par hypothèse); l'erreur d'observation est aussi bornée. Soit alors une fonction de Lyapunov :

$$V_1 = \frac{e_1^2}{2}$$

Nous avons alors $\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 = e_1(e_2 - \lambda_1 \text{sign}_1(e_1))$. En choisissant $\lambda_1 > |e_2|_{\max}$ pour $t < t_1$ l'erreur d'observation e_1 converge vers zéro en un temps fini t_1 .

➤ **Étape 2 :** comme dans l'étape 1, l'erreur e_2 reste bornée par hypothèse. Il faut, cependant, que $\lambda_1 > |e_2|_{\max}$ pour rester sur la surface $e_1 = 0$, mais cela est vérifié de part le fait que e_2 est strictement décroissante après t_1 .

Le but de cette étape est d'atteindre la surface $e_1 = e_2 = 0$. En utilisant les mêmes arguments que Drakunov dans [Drak95], sur la surface $e_1 = 0$, la dynamique de l'erreur d'observation devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{e}_{n-1} \\ \dot{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_3 + g_2(x_1, x_2, u) - g_2(x_1, \hat{x}_2, u) - \lambda_2 \text{sign}(e_2) = e_3 - \lambda_2 \text{sign}(e_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u) - g_{n-1}(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}, u) \\ f_n(x) - f_n(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Soit la nouvelle fonction de Lyapunov :

$$V_2 = \frac{e_1^2}{2} + \frac{e_2^2}{2}$$

Alors, si la condition $\lambda_1 > |e_2|_{\max}$ est satisfaite pour $t > t_1$, nous avons $e_2 = 0$, $e_2 - \lambda_1 \text{sign}_{eq}(e_1) = 0$, et :

$$\dot{V}_2 = e_2(e_3 - \lambda_2 \text{sign}_{eq}(e_1))$$

Par conséquent, si $\lambda_2 > |e_3|_{\max}$ alors e_2 converge vers zéro après un temps $t_2 > t_1$. De plus $\dot{V}_2 < 0$, et l'erreur d'observation est strictement décroissante durant la période $[t_1, t_2]$ ce qui implique que si la condition sur λ_1 est vérifiée avant t_1 elle est obligatoirement aussi après t_1 . Nous obtenons, en vertu du principe du vecteur équivalent, après t_2 $\bar{x}_3 = x_3$.

Ainsi étape par étape nous obtenons la convergence des composantes de l'erreur d'observation vers zéro et celle de \tilde{x} vers x , sous les conditions que durant $[t_i, t_{i+1}]$, $\lambda_i > |e_{i+1}|_{\max}$.

➤ **Étape n** : cette étape commence à l'instant t_{n-1} , à cet instant $e_k = 0$ pour tous $k < n$.

Alors, la dynamique de l'erreur d'observation devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{e}_{n-1} \\ \dot{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ f_n(x) - f_n(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) - \lambda_n \text{sign}(\bar{x}_n - \hat{x}_n) = -\lambda_n \text{sign}(\bar{x}_n - \hat{x}_n) \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Alors, e_n converge en un temps fini $t_n > t_{n-1}$ pour toute valeur de $\lambda_n > 0$ si, évidemment toutes les conditions sur les λ_k , $k < n$ sont elles aussi vérifiées. Ces conditions resteront satisfaites après t_{n-1} . Ainsi le théorème est vérifié.

4.6.1 Application de l'Observateur à un robot à deux articulations.

L'observateur que nous venons d'étudier s'applique parfaitement au modèle d'un bras manipulateur à deux articulations qui s'écrit sous forme triangulaire. Il a été retenu pour la mise de ces propriétés de robustesses discutées précédemment et à la propriété de séparation

(grâce à la convergence en temps fini) qui nous permet d'utiliser la commande par modes glissants développée précédemment.

Rappelons que le modèle du robot (4.13), qui peut être représenté par les équations suivantes :

$$\dot{\tau} = M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} + C(q, \dot{q})\ddot{q} + \dot{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \dot{G}(q) \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} Ji = M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} + C(q, \dot{q})\ddot{q} + \dot{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \dot{G}(q) \\ + B[M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)] - E\dot{q} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Et

$$\begin{aligned} \ddot{q} = -M^{-1}(q) \{ [\dot{M}(q) + C(q, \dot{q}) + BM(q)]\dot{q} + [\dot{C}(q, \dot{q}) + BC(q, \dot{q}) + E]\dot{q} + [\dot{G}(q) + BG(q)] \} \\ + M^{-1}(q)Ji \end{aligned}$$

4.6.2 Mise sous forme triangulaire du modèle dynamique.

Pour écrire l'observateur sous forme triangulaire, il faut choisir pour cela le vecteur d'état $x = [q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2]^T$ et comme vecteur de commande $U = [i_1 \ i_2]^T$.

En posant $X_1 = q$, $X_2 = \dot{q}$ et $X_3 = \ddot{q}$ on obtient :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = X_3 \\ \dot{X}_3 = f(X) + g(X_1)U \end{cases} \quad (4.32)$$

Avec $X = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$, $g(X_1) = \begin{pmatrix} g_{11}(X_1) & g_{12}(X_1) \\ g_{21}(X_1) & g_{22}(X_1) \end{pmatrix} = M^{-1}(X_1)J$, $U = [u_1 \ u_2]^T = i$ et

$$\begin{aligned} f(X) = -M^{-1}(X_1) \{ [\dot{M}(X_1) + C(X_1, X_2) + BM(X_1)]X_3 + [\dot{C}(X_1, X_2) + BC(X_1, X_2) + E]X_2 \\ + [\dot{G}(X_1) + BG(X_1)] \} = [f_1(X) \ f_2(X)]^T \end{aligned}$$

4.6.3 Observation par modes glissants sous forme triangulaire a injection de sortie.

Dans ce chapitre, un observateur non linéaire par modes glissants est proposé en vue de la commande d'un robot manipulateur à deux articulations. Il donne une erreur d'observation asymptotique linéaire et stable. La classe des systèmes pour lesquels il est conçu peut-être considérée comme une forme triangulaire d'observation. Le but est d'assurer la stabilité du robot dans la perspective d'une commande robuste et rapide.

Pour commander le robot par retour d'état, il est nécessaire de connaître avec précision les états qui sont la charge, les positions, les vitesses et les accélérations. En pratique, ces deux dernières dérivées ne sont pas facilement mesurables en raison des contraintes techniques et économiques quand elles ne sont pas le plus souvent contaminées par le bruit ou encore pas du tout disponibles, d'autant plus que la mise en oeuvre d'un filtre numérique n'est pas, non plus aisée. C'est pourquoi, il est intéressant d'envisager le contrôle du robot à partir de la mesure des positions et de l'observation des vitesses et des accélérations. Par conséquent, le recours à un observateur est indispensable car seules, les positions du robot sont mesurables dans de bonnes conditions.

Dans la littérature, il existe plusieurs types de structures d'observateurs: linéarisation, modification des coordonnées et injection de sortie [Xia88], systèmes à structure variable [Slot86, Haki02] synthèse basée sur la méthode Lyapunov [Thau73].

Outre la recherche effectuée sur les méthodes d'observation, plusieurs études ont été menées visant la simplification des problèmes d'observation des systèmes non linéaires. Ainsi, à partir d'un simple observateur linéaire [Luen71] et un terme non linéaire connu, une nouvelle forme de systèmes [Kren83], appelée forme à injection de sortie a été introduite. Sa spécificité réside dans la linéarité de l'erreur dynamique d'observation et son indépendance vis à vis de la commande et de l'état.

4.6.4 Observateurs par modes glissants sous forme triangulaire.

L'observateur sous forme triangulaire associé au système (4.32) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}_1 = \hat{X}_2 + \Lambda_{1,4} \text{sign}_{1,4}(X_1 - \hat{X}_1) \\ \dot{\hat{X}}_2 = \hat{X}_3 + \Lambda_{2,5} \text{sign}_{2,5}(\bar{X}_2 - \hat{X}_2) \\ \dot{\hat{X}}_3 = f(X_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) + g(X_1)U + \Lambda_{3,6} \text{sign}_{3,6}(\bar{X}_3 - \hat{X}_3) \end{cases} \quad (4.33)$$

Avec

$$\begin{aligned} X_k &= [x_k \ x_{k+3}]^T, \hat{X}_k = [\hat{x}_k \ \hat{x}_{k+3}]^T, \bar{X}_k = [\bar{x}_k \ \bar{x}_{k+3}]^T, \bar{X}_k - \hat{X}_k = [\bar{x}_k - \hat{x}_k \ \bar{x}_{k+3} - \hat{x}_{k+3}]^T \\ \text{sign}_{k,k+3}(\bar{X}_k - \hat{X}_k) &= [\text{sign}_k(\bar{x}_k - \hat{x}_k) \ \text{sign}_{k+3}(\bar{x}_{k+3} - \hat{x}_{k+3})]^T, \bar{X}_k = \hat{X}_k + \Lambda_{k-1,k+2} \text{sign}_{\text{moy},k-1,k+2}(\bar{X}_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) \\ \text{sign}_{\text{moy},k-1,k+2}(\bar{X}_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) &= [\text{sign}_{\text{moy},k-1}(\bar{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) \ \text{sign}_{\text{moy},k+2}(\bar{x}_{k+2} - \hat{x}_{k+2})]^T, \end{aligned}$$

Et par définition $\bar{X}_1 = X_1$

On peut réécrire le système (4.32) sous la forme (4.34) et l'observateur (4.33) sous la forme (4.35) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + g_{11}(x_1, x_4)u_1 + g_{12}(x_1, x_4)u_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + g_{21}(x_1, x_4)u_1 + g_{22}(x_1, x_4)u_2 \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \lambda_1 \text{sign}_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + \lambda_2 \text{sign}_2(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_3 = f_1(x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6) + g_{11}(x_1, x_4)u_1 + g_{12}(x_1, x_4)u_2 + \lambda_3 \text{sign}_3(\bar{x}_3 - \hat{x}_3) \\ \dot{\hat{x}}_4 = \hat{x}_5 + \lambda_4 \text{sign}_4(x_4 - \hat{x}_4) \\ \dot{\hat{x}}_5 = \hat{x}_6 + \lambda_5 \text{sign}_5(\bar{x}_5 - \hat{x}_5) \\ \dot{\hat{x}}_6 = f_2(x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6) + g_{21}(x_1, x_4)u_1 + g_{22}(x_1, x_4)u_2 + \lambda_6 \text{sign}_6(\bar{x}_6 - \hat{x}_6) \end{cases} \quad (4.35)$$

4.6.5 Convergence de l'observateur.

La dynamique de l'erreur d'observation $e = x - \hat{x}$ s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 \text{sign}_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{e}_2 = e_3 - \lambda_2 \text{sign}_2(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{e}_3 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - f_1(x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6) - \lambda_3 \text{sign}_3(\bar{x}_3 - \hat{x}_3) \\ \dot{e}_4 = e_5 - \lambda_4 \text{sign}_4(\bar{x}_4 - \hat{x}_4) \\ \dot{e}_5 = e_6 - \lambda_5 \text{sign}_5(\bar{x}_5 - \hat{x}_5) \\ \dot{e}_6 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - f_2(x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6) - \lambda_6 \text{sign}_6(\bar{x}_6 - \hat{x}_6) \end{cases} \quad (4.36)$$

Et: $\bar{x}_i = \hat{x}_i + \lambda_{i-1} \text{sign}_{\text{moy}, i-1}(\bar{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1})$.

Avec $\text{sign}_{\text{moy}, i-1}$ désignant la fonction sign_{i-1} filtrée par un filtre passe bas; la fonction $\text{sign}_i(\cdot)$ est mise à zéro s'il existe $j \in \{1, i\}$ tel que $\bar{x}_j - \hat{x}_j \neq 0$ si non $\text{sign}_i(\cdot)$ est égale à la fonction $\text{sign}(\cdot)$ classique. Grâce à cela nous imposons que le terme correcteur ne soit actif que si la condition $\bar{x}_j - \hat{x}_j = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, i$ est vérifiée.

Appliquons l'algorithme de convergence par étape au système (4.35) et à l'observateur (4.36) pour prouver la convergence de l'observateur en temps fini.

➤ **Première étape :**

Nous avons $sign_i(.) = 0$ pour $i \geq 2$.

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \\ \dot{e}_5 \\ \dot{e}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 - \lambda_1 sign_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ e_3 \\ \Delta f_1(x_{14}, \bar{x}_r) \\ e_5 - \lambda_4 sign_4(\bar{x}_5 - \hat{x}_5) \\ e_6 \\ \Delta f_2(x_{14}, \bar{x}_r) \end{pmatrix}$$

Avec $\bar{x}_r = [\bar{x}_2 \ \bar{x}_3 \ \bar{x}_5 \ \bar{x}_6]^T$ et $\Delta f_i = f_i(x) - f_i(x_{14}, \bar{x}_r)$ pour $i=1,2$.

Comme le système est supposé BIBS (entrée et état bornés) puisque le courant d'entrée est borné, l'état observé et l'état réel restent bornés durant cette étape.

Pour la convergence de e_1 en temps fini (respectivement de e_4) considérons la fonction de Lyapunov :

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 \text{ (respectivement } V_4 = \frac{1}{2} e_4^2 \text{)}.$$

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 = e_1 (e_2 - \lambda_1 sign_1(e_1)) \text{ (respectivement } \dot{V}_4 = e_4 \dot{e}_4 = e_4 (e_5 - \lambda_4 sign_4(e_4)) \text{)}$$

En choisissant $\lambda_1 > |e_2|_{\max}$ (respectivement $\lambda_4 > |e_5|_{\max}$) on obtient la convergence de e_1 (respectivement de e_4) après un temps fini t_1 vers zéro.

Après t_1 , l'état atteint la surface de glissement et sur cette surface, nous avons $e_1 = \dot{e}_1 = 0$ (respectivement $e_4 = \dot{e}_4 = 0$) d'où : $\bar{x}_2 = x_2$ (respectivement $\bar{x}_5 = x_5$).

➤ **Deuxième étape :**

Tout en respectant la condition de convergence de la première étape ; montrons la convergence de e_2 en temps fini (respectivement de e_5).

En remplaçant \bar{x}_2 par x_2 (respectivement \bar{x}_5 par x_5) on obtient :

$\dot{e}_2 = e_3 - \lambda_2 sign(e_2)$ (respectivement $\dot{e}_5 = e_6 - \lambda_5 sign(e_5)$) ; l'erreur d'observation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \\ \dot{e}_5 \\ \dot{e}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 - \lambda_1 \text{sign}_1(x_1 - \hat{x}_1) = 0 \\ e_3 - \lambda_2 \text{sign}_2(\bar{x}_2 - \hat{x}_1) \\ \Delta f_1(x_1, \bar{x}_2, \hat{x}_3, x_4, \bar{x}_5, \hat{x}_6) \\ e_5 - \lambda_4 \text{sign}_4(x_4 - \hat{x}_5) = 0 \\ e_6 - \lambda_5 \text{sign}_5(\bar{x}_5 - \hat{x}_5) \\ \Delta f_{21}(x_1, \bar{x}_2, \hat{x}_3, x_4, \bar{x}_5; \hat{x}_6) \end{pmatrix}$$

En choisissant la fonction de Lyapunov :

$$V_2 = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) \text{ (respectivement } V_5 = \frac{1}{2}(e_4^2 + e_5^2) \text{)}.$$

On a après le temps t_1 , $e_1 = 0$ (respectivement $e_4 = 0$) d'où : $\dot{V}_2 = e_2 \dot{e}_2 = e_2(e_3 - \lambda_2 \text{sign}_2(e_2))$ (respectivement $\dot{V}_5 = e_5 \dot{e}_5 = e_5(e_6 - \lambda_5 \text{sign}_5(e_5))$).

En choisissant $\lambda_2 > |e_3|_{\max}$ (respectivement $\lambda_5 > |e_6|_{\max}$) on obtient la convergence de e_2 (respectivement de e_5) après un temps fini $t_2 > t_1$ vers zéro.

Après t_2 , l'état atteint la surface de glissement et sur cette surface, nous avons $e_2 = \dot{e}_2 = 0$ (respectivement $e_5 = \dot{e}_5 = 0$) d'où : $\bar{x}_3 = x_3$ (respectivement $\bar{x}_6 = x_6$).

➤ **Troisième étape :**

Tout en respectant les conditions de convergence des deux étapes précédentes ; montrons la convergence de e_3 en temps fini (respectivement de e_6).

En remplaçant \bar{x}_2 par x_2 , \bar{x}_3 par x_3 (respectivement \bar{x}_5 par x_5 , \bar{x}_6 par x_6) on obtient :

$$\dot{e}_3 = -\lambda_3 \text{sign}(e_3) \text{ (respectivement } \dot{e}_6 = -\lambda_6 \text{sign}(e_6) \text{)}$$

La dynamique de l'erreur devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \\ \dot{e}_5 \\ \dot{e}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 - \lambda_1 \text{sign}_1(x_1 - \hat{x}_1) = 0 \\ e_3 - \lambda_2 \text{sign}_2(\bar{x}_2 - \hat{x}_1) = 0 \\ -\lambda_2 \text{sign}_2(\bar{x}_2 - \hat{x}_1) \\ e_5 - \lambda_4 \text{sign}_4(x_4 - \hat{x}_5) = 0 \\ e_6 - \lambda_5 \text{sign}_5(\bar{x}_5 - \hat{x}_5) \\ \lambda_6 \text{sign}_6(\bar{x}_6 - \hat{x}_6) \end{pmatrix}$$

En choisissant la fonction de Lyapunov :

$$V_3 = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \text{ (respectivement } V_6 = \frac{1}{2}(e_4^2 + e_5^2 + e_6^2) \text{)}$$

On a après le temps t_2 , $e_1 = e_2 = 0$ (respectivement $e_4 = e_5 = 0$) d'où :

$$\dot{V}_3 = e_3 \dot{e}_3 = e_3(-\lambda_3 \text{sign}_3(e_3)) \text{ (respectivement } \dot{V}_6 = e_6 \dot{e}_6 = e_6(-\lambda_6 \text{sign}_6(e_6)) \text{)}.$$

En choisissant λ_3 (respectivement λ_6) au voisinage de zéro on obtient la convergence de e_3 (respectivement de e_6) après un temps $t_3 > t_2$.

Remarque 4.1 :

Comme la convergence vers la surface de glissement est assurée seulement par les valeurs de λ_1 et λ_4 , nous pouvons choisir λ_1 et λ_4 de manière que cette durée t_{n-1} soit aussi petite que l'on veut. D'ailleurs nous pouvons initialiser l'erreur d'observation sur les mesures à $e_1 = 0$ et $e_4 = 0$, si nous connaissons la valeur réelle de $x_1 = q_1$ et $x_4 = q_2$, ceci rend la convergence quasi instantanée ce qui rend la propriété de séparation vérifiée [Mana 98].

4.6.5.1 Application pour le système de pompage.

Considérons le système (2.1) vu au chapitre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{di}{dt} = V - uE \\ C \frac{dV}{dt} = i - i_m \\ L_m \frac{di_m}{dt} = V - R_m i_m - K_e \omega \\ J \frac{d\omega}{dt} = -B_m \omega + K_m i_m - K_r \omega^2 \end{array} \right. \quad (4.37)$$

Avec que $x_1 = \omega$ comme sortie du système, nous avons représenté le système en représentation d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f(x_1, x_2, x_3, x_4) + g u \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Proposition.4.1 [Alao08]: Pour le modèle du système défini en (4.29), l'observateur triangulaire en mode glissant qui fait les erreurs observées tendent vers zéro en un temps fini peut être écrit comme suit:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + \lambda_2 \text{sign}(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_4 + \lambda_3 \text{sign}(\bar{x}_3 - \hat{x}_3) \\ \dot{\hat{x}}_4 = f(x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) + gu + \lambda_4 \text{sign}(\bar{x}_4 - \hat{x}_4) \end{cases} \quad (4.39)$$

Avec $\bar{x}_i = \hat{x}_i + \lambda_{i-1} \text{sign}_{\text{moy}}(\bar{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1})$, $i = 2,3,4$. $\bar{x}_1 = x_1$ et sign_{moy} est l'approximation continue de la fonction signe comme par exemple :

$$\text{sign}_{\text{moy}}(\bar{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1}) = \arctg\left(\frac{2}{\pi}(\bar{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1})\right) \quad (4.40)$$

Preuve: La dynamique de l'erreur d'observation : $e_i = x_i - \hat{x}_i$ avec $i = 1, \dots, 4$. est:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{e}_2 = e_3 - \lambda_2 \text{sign}(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{e}_3 = e_4 - \lambda_3 \text{sign}(\bar{x}_3 - \hat{x}_3) \\ \dot{e}_4 = f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f(x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) - \lambda_4 \text{sign}(\bar{x}_4 - \hat{x}_4) \end{cases} \quad (4.41)$$

La démonstration de la convergence de l'observateur par mode glissant sous forme triangulaire en utilisant la stabilité de la fonction de Lyapunov, s'effectue en 4 étapes:

➤ **Étape 1 :**

Pour la convergence de e_1 en un temps fini, on considère la fonction de Lyapunov : $V_1 = \frac{1}{2} e_1^2$

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 = e_1 (e_2 - \lambda_1 \text{sign}(e_1))$$

Par le choix $\lambda_1 > |e_2|_{\max}$ nous obtenons la convergence de e_1 vers zéro après le temps t_1

Après le temps t_1 , l'état atteint la surface de glissement et sur cette surface nous avons :

$$e_1 = \dot{e}_1 = 0 : \text{alors on a } \bar{x}_2 = x_2.$$

Notons que la même procédure de démonstration est utilisé pour montrer la convergence en temps fini de e_2 , e_3 et e_4 .

4.6.5.2 Résultats de simulation pour le système de pompage.

Nous rappelons que notre système de pompage se compose d'un convertisseur de type "buck", un moteur (MCC) à courant continu et d'une pompe centrifuge. Les paramètres nominaux du modèle sont ceux déjà utilisés au chapitre 2.

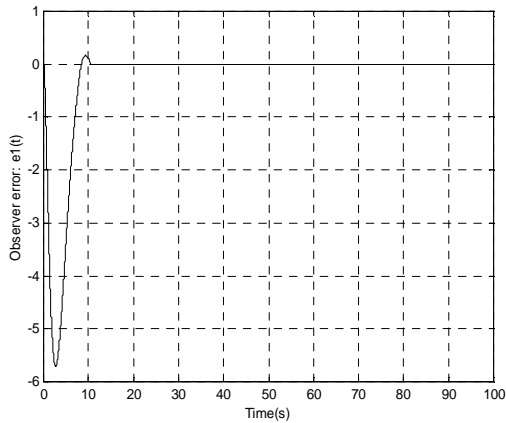


Fig.4.2 : Erreur d'observation $e_1(t)$.

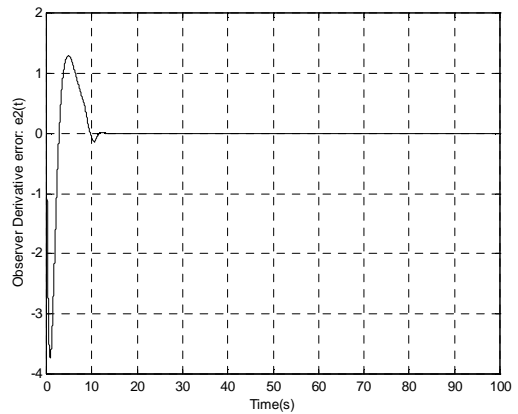


Fig.4.3 : Erreur d'observation $e_2(t)$.

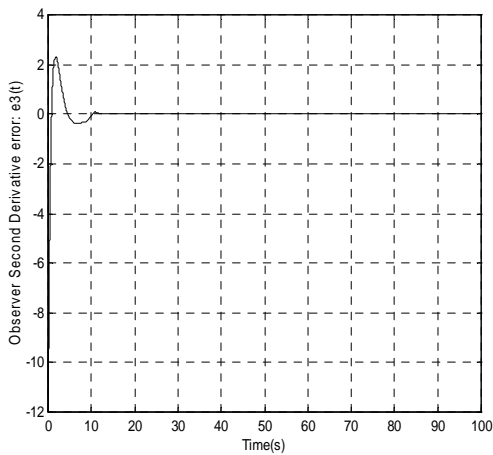


Fig.4.4 : Erreur d'observation $e_3(t)$.

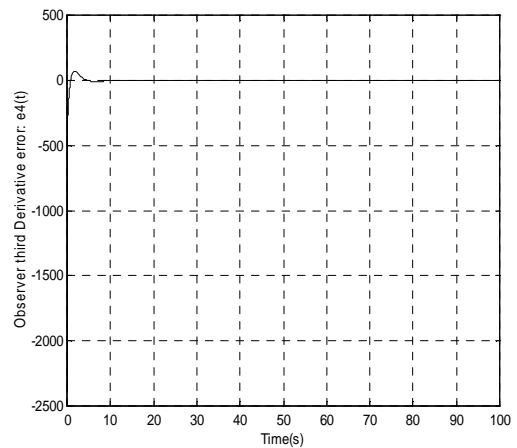


Fig.4.5: Erreur d'observation $e_4(t)$.

Les résultats de simulations obtenus pour le système de pompage montrent des bonnes performances de l'observateur triangulaire par mode glissant, les schémas de la figure 4 montrent que le temps de convergence augmente avec la dérivée de l'erreur d'observation $t_4 > t_3 > t_2 > t_1$.

4.6.5.3 Résultats de simulations pour le robot à deux articulations.

Nous allons discuter les résultats de simulation effectués sous Matlab avec les paramètres du modèle du robot qui ont été utilisés au chapitre 3.

Les simulations présentées ci-dessous représentent la dynamique du bras manipulateur. L'objectif de la commande est de suivre la trajectoire désirée en utilisant une commande par modes glissants. Les trajectoires de référence choisies sont des sinusoides.

Les trajectoires désirées sont:

$$x_{1d} = \cos(2t) ; x_{4d} = \sin(3t)$$

Les paramètres nominaux du modèle sont:

$g = 9.81 \text{ (m/s}^2\text{)}$, les longueurs et les masses des deux segments ($l_1 = 0.11 \text{ (m)}$, $l_2 = 0.15 \text{ (m)}$), ($m_1 = 0.6 \text{ (Kg)}$, $m_2 = 0.4 \text{ (Kg)}$), les inerties ($I_1 = 0.07 \text{ (kg.m}^2\text{)}$, $I_2 = 0.025 \text{ (kg.m}^2\text{)}$), et les paramètres thermodynamiques:

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Les résultats de simulations obtenus de la figure (Fig.4.6.a) à la figure (Fig.4.11.a) montrent respectivement les trajectoires réelles (--) et les trajectoires désirées (- -) des positions, vitesses et accélérations, et les résultats de simulations obtenus de la figure (Fig.4.6.b) à la figure (Fig.4.11.b) montrent respectivement les trajectoires réelles (--) et les trajectoires observées (- -) des positions, vitesses et accélérations.

Les résultats de simulation montrent que le système en boucle fermée avec la commande et l'observateur assure une bonne poursuite et une bonne estimation des vitesses et accélérations dérivées.

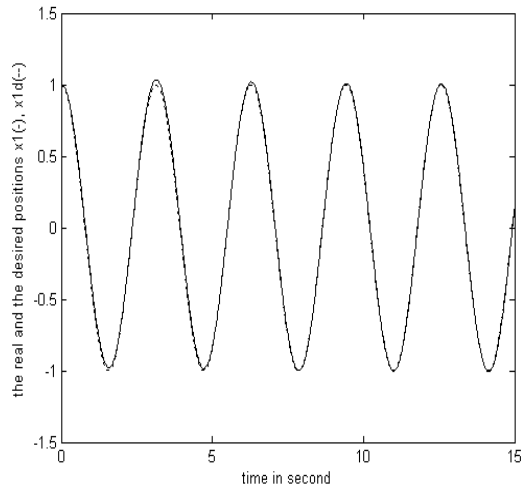


Fig: 4.6.a.

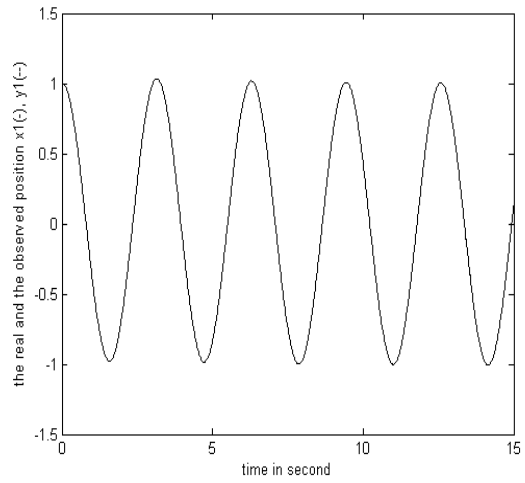


Fig.: 4.6.b.

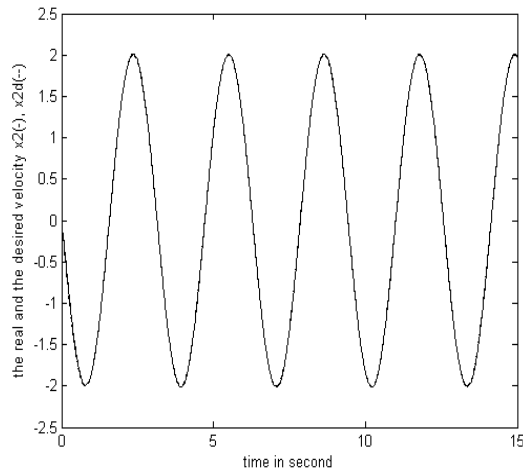


Fig: 4.7.a .

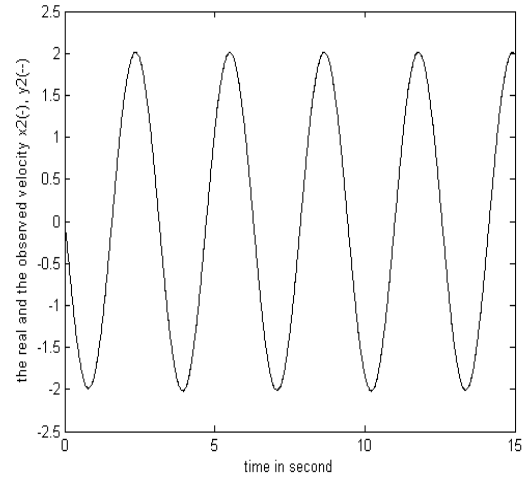


Fig: 4.7.b.

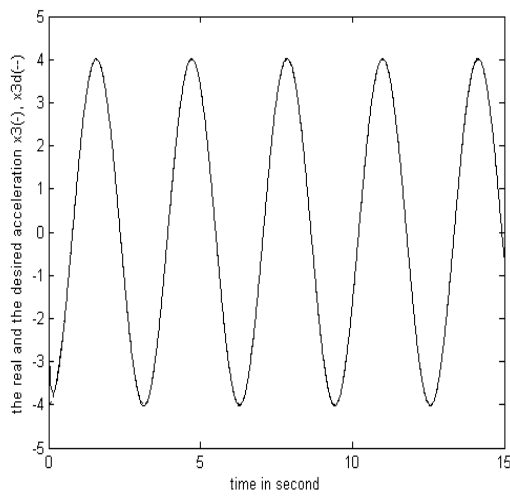


Fig: 4.8.a.

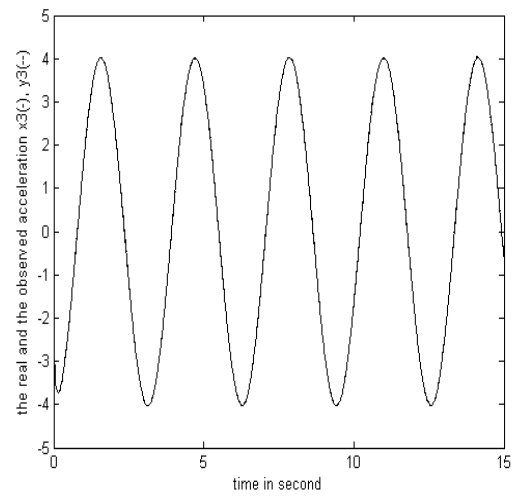


Fig.: 4.8.b.

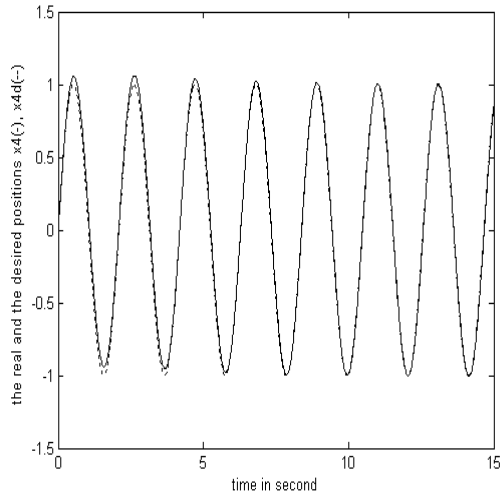


Fig: 4.9.a.

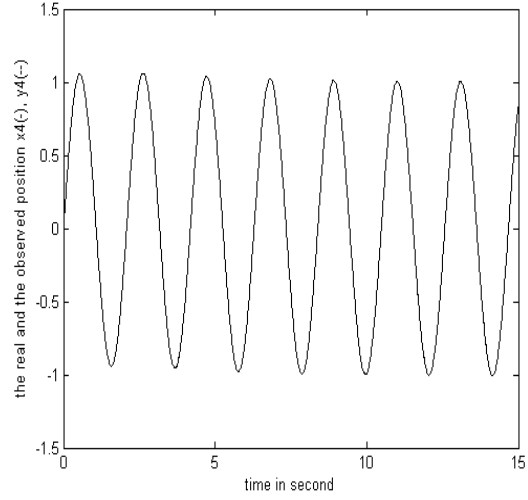


Fig : 4.9.b.

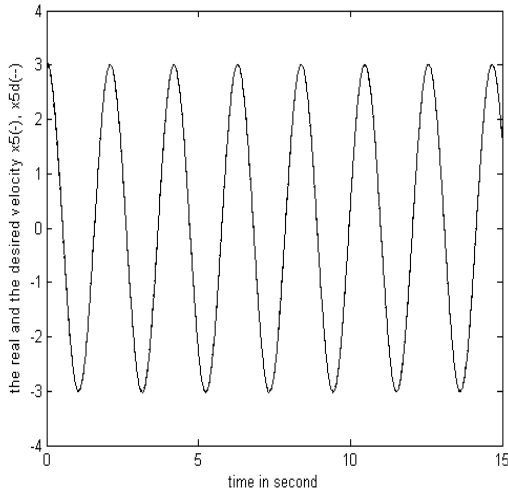


Fig : 4.10.a.

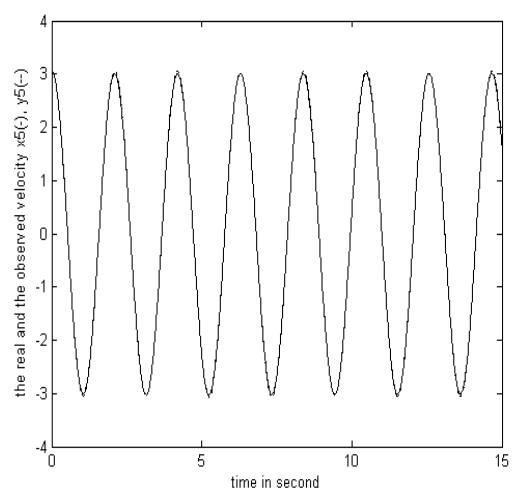


Fig :4.10.b.

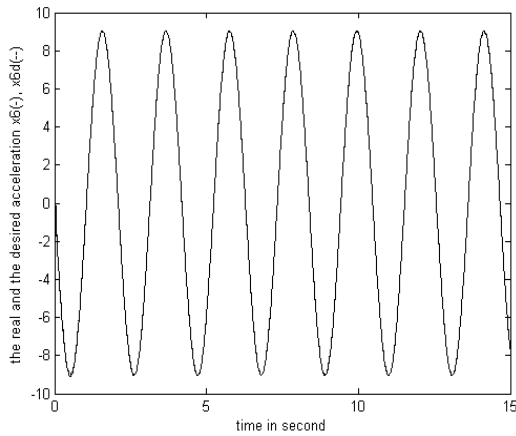


Fig : 4.11.a.

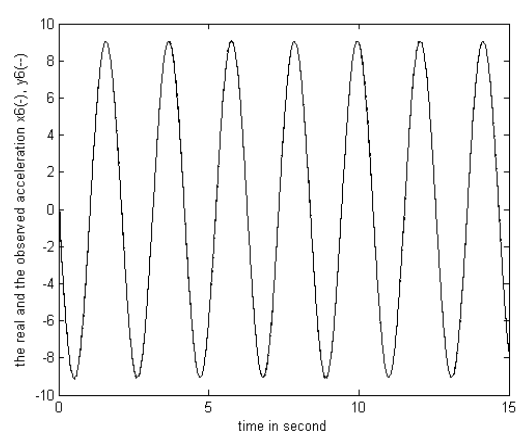


Fig : 4.11.b.

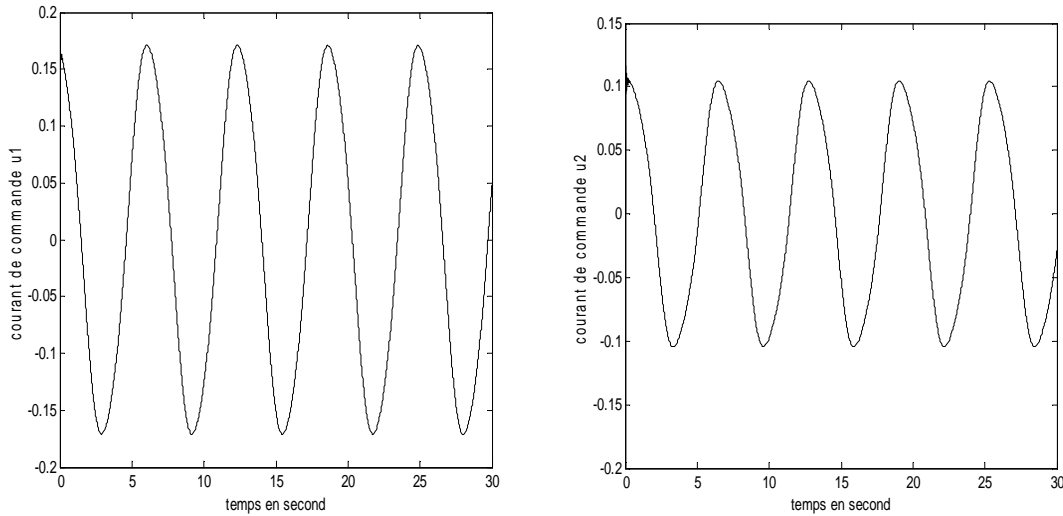


Fig: 4.12. Courants de commande des deux axes du robot.

Les Figures 4.12 montrent les deux courants de commande des axes 1 et 2 du robot, nous constatons que la commande obtenue est lisse.

4.7 Conclusion.

Dans ce chapitre nous avons proposé deux observateurs non linéaires par mode glissant qui présentent l'avantage d'être robuste aux incertitudes sur les paramètres du modèle. Cette étude sur les observateurs a été faite pour l'implémentation des commandes étudiées vu la nécessité des vitesses et accélérations articulaires. Le premier observateur étudié est une extension de celui présenté par Canudas de Wit [Canu91] [Canu90] ; il a été développé par [Cher01] et qui lors des simulations présente des difficultés des réglages des gains. Dans ce travail, nous avons proposé un second observateur par mode glissant sous forme triangulaire à laquelle se prête parfaitement le modèle du robot manipulateur à deux articulations. Cet observateur non linéaire est robuste par rapport aux incertitudes dans le modèle et présente l'avantage de la convergence en temps fini qui permet pour la commande une propriété de séparation.

Les résultats de simulations montrent l'efficacité d'un tel observateur. Les dérivées des sorties obtenues par des méthodes numériques introduisent du retard et les résultats sont plus ou moins bruités car le choix d'un filtre numérique approprié n'est pas facile. Nous avons

montré l'utilité de l'observateur non linéaire par mode glissant pour le cas de commande en position, vitesse et accélération du bras manipulateur.

Conclusion générale et perspective.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux problèmes de commande et d'observateur robustes par modes glissants pour deux systèmes, un système de pompage et un robot manipulateur à deux articulations.

Le système de pompage considéré est constitué d'un convertisseur de puissance électrique de type " buck ", d'un moteur à courant continu (MCC), combiné à une pompe centrifuge. La technique par mode glissant d'ordre un a été appliquée pour commander la vitesse de rotation du moteur. La comparaison avec la commande robuste H^∞ montre de meilleures performances pour la commande en modes glissants que ce soit en temps de réponse, ou en précision du suivi de trajectoire. L'utilisation des fonctions de lissage, telles que, la fonction de saturation a largement réduit le problème de réticence qui est le problème principal rencontré pour les systèmes à structures variables. De point de vue théorique, une nouvelle stratégie basée sur la technique d'optimisation LMIs a été proposée dans le chapitre 3 pour réaliser un choix optimal de la surface de glissement, cette stratégie a été appliquée pour la commande d'un robot manipulateur à deux articulations.

Dans le chapitre 4 nous avons aussi proposé un schéma de commande basé sur l'intégration d'un observateur triangulaire par modes de glissements, ce dernier est utilisé pour déterminer la vitesse, l'accélération des bras du robot, et la dynamique de l'erreur d'observation pour le système de pompage. Les résultats de simulations ont montré une meilleure performance que ce soit en poursuite de trajectoires ou en robustesse, ce qui favorise largement la possibilité de réaliser une expérimentation implémentant les différentes commandes proposées.

Au terme de ce mémoire, il s'avère intéressant de préciser les perspectives à aborder dans le futur. Dans tous les cas, la technique d'optimisation LMIs est un outil important pour le choix des gains au niveau des techniques, d'observateurs et de modes glissants d'ordres supérieurs.

Bibliographie.

- [Astr89] K. J. Astrom and B. Wittenmark. Adaptive control. Addison-Wesley, 1989.
- [Alao07a] C. Alaoui, J. Boumhidi and M. Mrabti. "DC Motor Velocity Sliding Mode Control For the Combined Pumping Load DC Motor Buck Converter". SEI&TI-07 Mohammédia, Morocco, pp 146-151, Janvier, 2007.
- [Alao07b] C. Alaoui, J. Boumhidi and M. Mrabti. "Sliding Surface Design Based On the Linear Matrix Inequalities with Control Application of the Two-Link Robot". Conference System and Control CSC 07. Marakech Maroc, 16-17-18 Mai 2007.
- [Alao07c] C. Alaoui, J. Boumhidi and M. Mrabti. "Sliding Surface Controller Design Based On the LMIs with Application to a Two Links Robot". International Journal Of Science and techniques of Automatic Control and computer Engineering IJ. STA, Special issue, CSC, pp 300-311, December 2007.
- [Alao08] C. Alaoui, J. Boumhidi and M. Mrabti " Application of H-infinity Synthesis and Sliding Mode Control for Robust Control of DC Motor Type Buck Converter". Les 6èmes Journées d'Optique et de Traitement de l'Information 17 et 18 avril, FST- Mohammédia – Maroc 2008.
- [Arab04] Haj Arab A, Chenoa F, Benghanem M., " Loss-of- probability of photovoltaic Water pumping systems", Solar Energy, vol.76, no .6, p.713-23. 2004.
- [Bond85] A. G. Bondarev, S. A. Bondarev, N. E. Kosteleva and V. I. Utkin. Sliding modes in systems with asymptotic state observers. Automation and remote control, 46(6):49-64. 1985.
- [Boum04] J. Boumhidi and M. Mrabti. " Sliding Mode Controller for Robust Force Control of Hydraulic Servo-Actuator ". ISEE 2004, IEEE International Symposium on Electrical Engineering, pp 27-33, Targoviste, Romania 2004.
- [Boum05] J. Boumhidi and M. Mrabti.. "Sliding Mode Controller for Robust Force Control of Hydraulic Actuator with environmental Uncertainties ". Colombian Journal of Computation. Vo. 6, n° 1, pp 25-34. June 2005.
- [Bouk97]. T. Boukhobza. " Observateurs à modes glissants et formes d'observabilité et

- analyse et synthèse des commandes par ordres supérieurs''. PhD thesis, Université de Paris-Sud Orsay, Laboratoire des Signaux et Systèmes, 1997.
- [Boyd89] S. Boyd, V. Balakrishnan, and P. Kambaba. "A Bisection Method for computing the H^∞ Norm of a transfert matrix and related Problems". Math. Control, Signals, and Systems, Vol.2, pages 207-220, 1989.
- [Canu90] C. Canudas De Wit, K. J. Astrom, and N. Fixot. "Computed torque control via a nonlinear observer". Int. Jour. of Adap. Cont. and Sig. Proc, pages 443-452, 1990.
- [Canu91] C. Canudas de Wit and J. J. E. Slotine. Sliding observers in robot manipulators. Automatica, 27(5) :859-864, 1991.
- [Cher01] Cherrid, H. "Commande et observateur par modes glissants d'ordre un et deux: Application aux systèmes robotisés". Thèse présentée à l'Université de Versailles Saint Quentin, 19 Décembre 2001
- [Chad02] M. Chadli, D. Maquin, J. Ragot, "Nonquadratic stability analysis of Takagi-Sugeno models", IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 2, pp 143- 2148, 2002.
- [Choi03] Choi, H.H.: An LMI-Based Switching Surface Design Method for a Class of Mismatched Uncertain Systems. IEEE Transactions on Automatic Control. 48(2003) 1634-1638.
- [Doyl 89] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Kargonekar, and B.A. Francis. "State space solution to standard H_2 and H^∞ Control Problems". IEEE Trans. On automatic control, Vol. 34, No 8, pages 831-847, August 1989.
- [Drak92] S.V. Drakunov. "Sliding mode observer based on equivalent control method". In IEEE Conf. on Dec. and Cont., pages 2368-2369, 1992.
- [Drak95] S. Drakunov and V. Utkin. "Sliding mode observer. Tutorial". IEEE Conf. on Dec. and Cont., pages 3376-3379, 1995.
- [Djem97] M. Djemai, N. Manamani, T. Boukhobza, and N.K. M'Sirdi. "Non linear sliding observer for a pneumatique robot leg". IEEE-Syst, Men and Cyber. IMACS, CESA 98, Hamamat, Tunisia. 1997.
- [Djem99] M. Djemai, J.P. Barbot, and T. Boukhobza. "Some comments on higher order sliding modes". Proc. of the Euro. Cont. Conf. Karlsruhe, Germany, 1999.

- [Edou06] Edouard LAROCHE, Philippe CELKA. ‘‘Identifiabilité des dynamiques d’un manipulateur flexible par vision’’. Journées Identification et Modélisation Expérimentale.16 et 17 novembre – Poitiers. JIME’2006.
- [Edwa96] C. Edwards and S. Spurgeon. ‘‘Robust output tracking using a sliding mode Controller observer scheme’’. Int. Jour. of Cont., 64(5). pp 967.983, 1996.
- [Emel67] S.V. Emelyanov. Variable structure control systems. Moscow Nauka, 1967.
- [Emel86]. S.V. Emelyanov, S.K. Korovin, and L.V. Levantovsky. Drift algorithm in control of uncertain processes. Problems of Control and Information Theory, 15(6):425.438, 1986.
- [Emel93] S. V. Emelyanov, S.K. Korovin, and A. Levant. Higher-order sliding modes in control systems. Differential Equation, 29(11):1627-1647, 1993.
- [Fill 60] A. F.Fillipov. Differential equations with discontinuous right-hand side. Amer.Math. Soc.Trans. 62. p:199-231, 1960.
- [Foll 85] O. Follinger, Regelungstechnik - Einführung in die methoden und ihre anwendungen, Dr. Alfred Huhig Verlag, Heidelberg, 1985.
- [Foss 93] A. J. Fossard et D. Normand-Cyrot, Système non linéaire, tome 1 : modélisation- estimation. Masson, Paris, 1993.
- [Frid96] L. Fridman and A. Levant. Sliding modes of higher order as a natura phenomenon in control theory. In Garofalo, F. Glielmo, L. (Eds.) Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques, Lecture Notes in Control and Information Sciences 217, Springer Verlag, p :107-133, 1996.
- [Frid02] L. Fridman and A. Levant. Higher-Order Sliding Mode in Sliding mode control in Engineering, Editeurs : W. Perruquetti and J.P. Barbot. Marcel Dekker 2002.
- [Glov89] K.Glover and D.McFarlane.’’Robust Stabilisation of normalized Coprime Factor Plant Descriptions with H_{∞} -Bounded Uncertainty’’. IEEE Trans on Automatic Control, Vol. 34, No 8, pages 821-830, 1989.
- [Ghon06] Ghoneim.A.A, ’’Design optimization of photovoltaic powered water pumping Systems’’, Energy conversion and Management, vol.47, pp. 1449-1463. 2006.
- [Hass99] A. Hassibi, J. How et S. Boyd, A path-following method for solving BMI problems in control, American Control Conference, Vol. 2, pp. 1385-

- 1389, San Diego, California, 1999.
- [Haki02] K.Hakiki, B. Mazari , S.Djaber, Induction motor flux estimation using sliding observers,Proc. Cnie'02.Usto Oran 2002, pp. 381-385.
- [Isid95] A. Isidori. Nonlinear control system. Springer Verlag, Berlin, third edition. 1995.
- [Itki76] U. Itkis. Control systems of variable structure. J. Wiley: New York, 1976.
- [Kalm60] R. E. Kalman et J. E. Betram, Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov -I : Continuous-time system, ASME journal of Basic Engineering, Vol. 82, pp. 371-393, 1960.
- [Kren83] A. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. Syst. & Cont. Lett., 3 :47.52, 1983.
- [Kris96] V. Krishnaswami, C. Siviero, F. Cabognani, and V Utkin. Application of sliding mode observers to automobile power-train. In : Proc. of the IEEE int. Conf. On Cont. Appli., pages 355.360, 1996.
- [Peau00] Peaucelle D, Arzelier D, Bachelier O, Bermussou J. ‘‘A New Robust D-stability condition for Real Convex Polytopic Uncertainty’’. System & Control Letters. Vol.40, pp 21-30. 2000.
- [Hard06] Hardiasyah, Seizo Furuya, Juichi Irisawa, ‘‘A robust control H_{∞} power System stabilizer design using reduced –order models’’. *Electrical power and energy systems* Vol. 28. pp. 21-28. 2006.
- [Land93] I.D. Landau. Identification et commande des systèmes. Hermes, 1993. Paris.
- [Lava97] L. Laval. Modélisation et commande en force d’un actionneur Hydraulique Confronté à un environnement incertain. PhD Thesis, Université de ParisVI, Laboratoire de robotique de Paris, France, 1997.
- [Leva99] A. Levant. Controlling output variable via higher order sliding modes. Proc. of the Euro. Cont. Conf., Karlsruhe, Germany, 1999.
- [Leva03]. A. Levant, Universal Higher-order Sliding Modes, differentiation and Output feedback control. Int. J. of control, 76. no: 9/10 :924–941, 2003.
- [Luen71] DG. Luenberger. An introduction to observers . IEEE Trans. On Auto. Const; 16(6), 1971.

- [Lina04] J. Linares-Flores and H. Sira-Ramirez. "DC motor velocity control through a DC-to-DC power converter". 43rd IEEE conference on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, pp 5297-5302, December 14-17, 2004.
- [Mcfa92] D. McFarlane and K. Glover. A Loop Shaping Design Procedure Using H_∞ synthesis. IEEE Trans. On Automatic Control, Vol.37, No 6, pages 759-769, June 1992.
- [Mana96] N. Manamani, N.K. M.Sirdi, N. N-Gauthier, and L. Alvergnat. Simplified modelization and control of a two link hopping robot. ECPD. Conf. on advanced robot and intelligent auto., September 1996. Austria.
- [Mana97] N. Manamani and N.K. Nadjar Gauthier, N and M'Sirdi. Sliding mode control or pneumatique robot leg. ECC. 1997. Bruxelles
- [Mana98] N. Manamani. Commandes et Observateurs pour systèmes pneumatiques- Méthodologie pour la locomotion à pattes. PhD thesis, Université de Paris VI, Laboratoire de Robotique de Paris France, 1998.
- [Marc02] Marcello Romano, Brij N. Agrawal, Franco Bernelli-Zazzera, Experiments on Command Shaping Control of a Manipulator with Flexible Links
Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol. 25, No. 2, March– April 2002.
- [M.Sir96] N.K. M.Sirdi, N. Manamani, and N. N-Gauthier. Modelization and identification of a pneumatic legged robot. IEEE-Syst. Men. and Cyber. IMACS. CESA.96, 5:803.809, July 1996.
- [M.Sir97] N.K. M.Sirdi, P. Fraise, P. Dauchez, and N. Manamani. Sliding mode control for a hydraulic underwater manipulator. Syroco 97, September 97. Nantes, France.
- [Nest94] Y. Nesterov et J. Balakrishnan, A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 39 (12), pp: 2469-2471, 1994.
- [Nico89] S. Nicosia, A. Tornambe. High-gain observers in the state and parameter estimation of robots having elastic joints. *Syst & Cont. Lett.*, 13: 331-337, 1989.
- [Orte89] R. Ortega and M.W. Spong. Adaptive motion control of rigid robots : A tutorial

- Automatica, 25(6) , pp: 877.888, 1989.
- [O'Rei83] J. O'Reilly, Observer for linear system, Richard Bellman, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 140, Academic Press, New York, 1983.
- [Oliv99] De Olivera M.C, Bermussou J., Geromel J.C. "A new discrete-time robust stability condition". System & Control Letters, Vol 37. pp 261-265. 1999.
- [Path05] D.M.T Pathé, J.boumhidi, and M.Mrabti "Sliding mode controller and triangular observer for robot control" international Conference on modelling and simulation ICMS 2005 Marrakech Morocco 22,23,24 Novembre 2005.
- [Sust96] C.Y. Su and Y. Stepanenko. On the robuste control of robot manipulators including actuator dynamics. Jour. of Robot. Syst., 13(1) :1.10, 1996.
- [Sira88] H. Sira-Ramirez. Differential geometric methods in variable structure control. Int.J of control., 48(4) :1359-1390, 1988.
- [Sira92] H. Sira-Ramirez. On the sliding mode control of nonlinear systems. Syst. & Cont.Lett., 19 :303.312, 1992.
- [Sira93] H. Sira-Ramirez. On the dynamical sliding-mode control of nonlinear systems. Int. Jour. of Cont., 57 :1039.1061, 1993
- [Sira94] H. Sira-Ramirez and S.K. Spurgeon. On the robust design of sliding observers for linear systems. Syst. & Cont. Lett., 23 : 9.14, 1994.
- [Slot83] J.J. Slotine and S.S. Sastry. Tracking control of nonlinear system using sliding surface, with application to robotic manipulators. Int. Jour. of Cont., 38:465.492, 1983.
- [Slot84] J.J.E. Slotine. Sliding controller design for nonlinear systems. Int. Jour. of Cont., 40(2) : 421.434, 1984.
- [Slot86]. J.J.E. Slotine, J.K. Hedrick, and E.A. Misawa. Nonlinear state estimation using sliding observers. In Proc. of 25th IEEE Conf. on Dec. and Cont., pages 332.339, Greece.1986.
- [Slot87] J.J.E. Slotine and W. Li. On the adaptive control of robot manipulators. Int. Jour.of Robot. Research, 6(3): 49.59, 1987.
- [Sira94] H. Sira-Ramirez and S.K. Spurgeon. On the robust design of sliding observers for linear systems. Syst.& Cont. Lett. 23 : 9.14, 1994.
- [Tan 00] Tan, C.P, Edwards, C.: An LMI Approach for Designing Sliding Mode

- Observers. In proceedings of the 39th IEEE CDC Sydney, 2000, pp:2587-2592
- [Thau73]. F.E Thau , observing the state of nonlinear dynamic systems, Int. J . of Control 17, 1973, 441-479.
- [Utk77] V. I. Utkin. Variable structure systems with sliding mode. IEEE Trans. On Auto.Cont, 26(2) :212-222, 1977.
- [Utki78] V. I. Utkin. Sliding mode and their application in variable structure systems Mir, Moscou, 1978.
- [Utk92] V. I. Utkin. Sliding modes in control optimisation. Springer-Verlag, 1992.
- [Utki93] V. I. Utkin. Sliding mode control design principles. IEEE Trans. on Industr. Electron., 40 :23.36, 1993.
- [Utki95] V. I. Utkin and S. Drakunov. Sliding mode observer. tutorial. IEEE Conf.On Dec.and Cont., pages 3376.3378, 1995.
- [Vidy85] Vidyasagar M. “ Control system Synthesis: a Coprime Factorization Approach”, M.I.T.Press, Cambridge 1985.
- [Xia88] X. Xia and W. Gao. “ Nonlinear observer design by observer canonical forms. Int Jour. of Cont., 47 :1081.1100, 1988.
- [West92] R. Weston, J. Pu, & P. Moore, “ Digital motion control and profile planning for pneumatic force actuation and position control”, J. of Dynamic Systems, Measurements, and Control,114, 1992.
- [Yang99] J.M. Yang and J.H. Kim. “ Sliding mode control for trajectory tracking of nonholomic wheeled mobile robots”. IEEE Trans. on Robot. and Auto., 15(3) pp 578.587,1999.
- [Zame66] G.Zames. “ On the Input-Output Stability of Time Varying Nonlinear Feedback Systems Part II: Conditions Involving Circles in the frequency Plane and Sector Non Linearities”. IEEE Trans. On Automatic Control, Vol, AC-11, pages 465- 476, August 1966.

Annexe A

Modélisation du bras manipulateur**A.1 Modèle dynamique d'un robot manipulateur.**

Nous montrons dans cette annexe le cheminement qui permet d'obtenir le modèle dynamique du bras manipulateur à partir des équations de Lagrange. Nous faisons l'hypothèse qu'ils sont rigides et sans frottements. En effet, le cas des robots ayant des frottements non négligeables pourrait être étudié de façon à peu près similaire. Nous choisissons de ne pas les considérer pour ne pas trop compliquer l'exposé des résultats.

A.1.1 Les équations de Lagrange.

Soit un système mécanique de dimension n , $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$ étant les coordonnées généralisées du système et $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \dots \ \tau_n]^T$ le vecteur des forces généralisées agissant sur le système, on peut définir le Lagrangien du système comme étant la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.

$$L = E_c - E_p$$

Les équations de Lagrange se traduisent alors par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

Dans le cas des robots manipulateurs rigides et sans frottement, l'énergie potentielle $E_p(q)$ ne dépend que de la position, elle n'est pas fonction des vitesses généralisées \dot{q} , et l'énergie cinétique $E_c(q, \dot{q})$ est une fonction quadratique des vitesses généralisées \dot{q}

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j .$$

$M(q)$ est la matrice d'inertie de dimension $n \times n$, elle est symétrique, définie positive pour tout $q \in \mathfrak{R}^n$. Le lagrangien s'écrit alors:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - E_p(q),$$

On a d'une part :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj}(q) \dot{q}_j$$

Et donc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt} m_{kj}(q) \dot{q}_j = \sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{dm_{kj}}{dt}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial P}{\partial q_k}$$

Les équations de Lagrange pour un tel système se traduit donc par :

$$\sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_j \left\{ \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial P}{\partial q_k} = \tau_k \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

En interchangeant l'ordre de la somme dans le deuxième terme et en utilisant la symétrie de la matrice d'inertie, on peut montrer que :

$$\sum_{i,j} \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Et ainsi, en définissant les coefficients C_{ijk} connus sous le nom de symbole de Christoffel, par :

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right\}$$

Et en posant :

$$C_k = \frac{\partial P}{\partial q_k}$$

On peut écrire les équations de Lagrange sous la forme :

$$\sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_j C_{ijk}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + C_k(q) = \tau_k \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

que l'on peut regrouper sous la forme matricielle suivante :

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{A.1})$$

$C(q, \dot{q}) \dot{q}$ est formé d'éléments quadratiques en \dot{q} dont les coefficients peuvent dépendre de q . Ils sont classés en deux catégories : les termes en \dot{q}_i^2 représentent les forces de centrifuges et les termes en $\dot{q}_i \dot{q}_j, i \neq j$, représentent les forces de Coriolis. Plusieurs représentations de

la matrice $C(q, \dot{q})$ peuvent être choisies, on prendra de préférence celle dont les éléments sont définis par :

$$C_{kj}(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n C_{ijk}(q) \dot{q}_i$$

car elle a des propriétés intéressantes. $G(q)$ représente les termes de gravité du système et τ les couples appliqués sur chacun des éléments du bras manipulateur.

A.1.2 Représentation d'état du système.

Pour notre étude, nous mettons le modèle dynamique du robot manipulateur.

(A.1) sous forme d'équation d'état en prenant comme vecteurs d'état x_1 le vecteur des positions articulaire et x_2 le vecteur des vitesses articulaires ; on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = M^{-1}(x_1)[-C(x_1, x_2)x_2 - G(x_1) + \tau] \end{cases}$$

De plus, nous supposons que seules les positions articulaires sont mesurées, on a donc l'équation de sortie :

$$y = x_1$$

A.1.3 Propriétés dynamiques du modèle du robot

Dans ce paragraphe, nous énonçons quelques propriétés liées à la dynamique du système qui seront très utiles pour la conception de la commande dans les chapitres de ce mémoire. Les propriétés de bornitude des différentes matrices, pour tout $x_1 < n$, ne sont valables théoriquement que pour les liaisons rotoïdes. Dans la pratique, elles sont aussi valables pour les liaisons prismatiques grâce aux butées mécaniques.

A.1.3.1 La matrice d'inertie $M(x_1)$.

Comme nous l'avons déjà souligné précédemment, la matrice d'inertie $M(x_1)$, qui n'est une matrice carrée de dimension $n \times n$ et qui ne dépend que de la position, est symétrique définie positive pour tout $x_1 < n$.

$$\mathbf{P.1} \quad M(x_1) = M(x_1)^T > 0.$$

Il en résulte directement qu'elle est inversible

P.2. $M(x_1)^T$ existe.

Les éléments de la matrice d'inertie et de son inverse dépendent de la position mais ils sont aussi bornés. Il existe deux constantes positives qui bornent respectivement la norme de la matrice d'inertie et celle de son inverse pour tout $x_1 < n$

P.3. $\|M(x_1)\| \leq m_1$.

P.4. $\|M^{-1}(x_1)\| \leq n_1$.

A.1.3.2 Les termes de gravité $G(x_1)$.

Le vecteur $G(x_1)$ de dimension n , représente les termes de gravité. Chacun de ses éléments, fonction des positions, est borné.

P.5. $\|G(x_1)\| \leq g_1$.

A.1.3.3 Les forces centrifuges et de Coriolis $C(x_1, x_2)x_2$.

Le vecteur $C(x_1, x_2)x_2$, de dimension n , est formé d'éléments quadratiques en x_2 , vitesse articulaire, représentés par :

P.6. $\{C(x_1, x_2)x_2\}_k = x_2^T N_k(x_1)x_2 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$

où les $N_k(x_1)$ sont des matrices carrées de dimension $n \times n$, symétriques et bornées.

$\|N_k(x_1)\| < \infty \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$.

Les éléments de la matrice sont les symboles de Christoffel :

$$\{N_k(x_1)\}_{ij} = C_{ijk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right\}$$

On peut majorer la norme de $C(x_1, x_2)x_2$ par une fonction du carré de la vitesse articulaire x_2

P.7. $\|C(x_1, x_2)x_2\| \leq c_1 \|x_2\|^2$

Le vecteur $C(x_1, x_2)x_2$ étant donné, il existe plusieurs paramétrisations possibles pour la matrice $C(x_1, x_2)x_2$. Nous avons cité précédemment celle définie par les symboles de Christoffel :

$$\{C(x_1, x_2)x_2\}_{kj} = \sum_i C_{ijk}(x_1)x_{2i}$$

Dans la littérature on peut rencontrer par exemple :

$$\{C(x_1, x_2)x_2\}_{kj} = \sum_i \left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial x_{1i}} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_{1k}} \right) x_{2i}$$

On peut montrer [Orte89] que, quelle que soit la définition de la matrice $C(x_1, x_2)$, la relation suivante est vraie :

$$\mathbf{P.8.} \quad x_2^T \left[\frac{d}{dt} (M(x_1)) - 2C(x_1, x_2) \right] x_2 = 0$$

C'est une propriété de conservation d'énergie.

Preuve 3 [Orte89] :

Pour démontrer cette propriété, on définit l'hamiltonien du système :

$$H = p^T x_2 - L(x_1, x_2)$$

Où L est le Lagrangien du système et p est le vecteur des moments généralisés : $p = \frac{\partial L}{\partial x_2}$

Il en résulte que H est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du système.

$$H = \frac{1}{2} x_2^T M(x_1) x_2 + E_p(x_1) \quad (\text{A.2})$$

La définition de l'hamiltonien est les équations de Lagrange conduisent aux équations de Hamilton du système :

$$\begin{aligned} x_{2i} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_{1i}} + \tau_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

De ces équations, on définit la dérivée totale de l'hamiltonien par rapport au temps

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial x_{1i}} x_{2i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = x_2^T \tau$$

D'autre part, d'après l'équation (A.2), on a :

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= x_2^T M(x_1) \dot{x}_2 + \frac{1}{2} x_2^T \frac{dM(x_1)}{dt} x_2 + \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 \\ &= x_2^T \tau + \frac{1}{2} x_2^T \left[\frac{dM(x_1)}{dt} - 2C(x_1, x_2) \right] x_2\end{aligned}$$

Car $M(x_1) \dot{x}_2 = \tau - C(x_1, x_2) x_2 - \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2$ d'après l'équation du modèle obtenue par les équations de

Lagrange.

On a donc montrer que quelle que soit la paramétrisation de $C(x_1, x_2) x_2$ choisie, elle vérifie la propriété (P.8).

Mais il existe une propriété plus générale pour certaines paramétrisations de la matrice $C(x_1, x_2)$, notamment pour celle définie par les symboles de Christoffel. On peut montrer que pour une telle définition de $C(x_1, x_2) x_2$, la matrice $\dot{M}(x_1) - 2C(x_1, x_2)$ est antisymétrique [Orte89].

On a alors :

$$\mathbf{P.9.} \quad \zeta^T \left[\frac{d}{dt} (M(x_1)) - 2C(x_1, x_2) \right] \zeta = 0 \quad \forall \zeta \in \mathfrak{R}^n$$

Preuve 4 [Orte89] :

Les éléments de la dérivée de la matrice d'inertie par rapport au temps sont donnés par :

$$\left\{ \frac{dM(x_1)}{dt} \right\}_{kj} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_{kj}}{\partial x_{1i}} x_{2i}$$

Ceux de $C(x_1, x_2)$ sont donnés par :

$$C_{kj} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial m_{kj}}{\partial x_{1i}} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial x_{1j}} + \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_{1k}} \right\} x_{2i}$$

Les éléments de la matrice $\dot{M}(x_1) - 2C(x_1, x_2)$ sont :

$$S_{kj} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_{1ki}} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial x_{1j}} \right\} x_{2i} = -S_{jk}$$

Car la matrice d'inertie est symétrique.

A.2 Modèle dynamique du système.

Le modèle dynamique présenté dans le chapitre 3 (équation (2.1)) représente la partie mécanique du système étudié :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

Nous présentons dans ce paragraphe les termes de chaque matrice, ainsi que de leurs dérivés utilisées dans la loi de commande.

En sachant que :

m_1, m_2 : les masses du premier et du second segment de la patte,

l_1, l_2 : les longueurs respectives du premier et du second segment de la patte,

I_1, I_2 : les inerties respectives du premier et du second segment du bras manipulateur.

g : le terme de gravité,

$$c_i = \cos(q_i) \quad s_i = \sin(q_i), \quad s_{ij} = \sin(q_i + q_j), \quad c_{ij} = \cos(q_i + q_j).$$

Nous avons pour :

La matrice d'inertie :

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + 4m_2l_1^2 + 4m_2l_1l_2c_2 & I_2 + 2m_2l_1l_2c_2 \\ I_2 + 2m_2l_1l_2c_2 & I_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{M}(q) = \begin{bmatrix} -4m_2l_1l_2s_2 & -2m_2l_1l_2\dot{q}_2s_2 \\ -2m_2l_1l_2\dot{q}_2s_2 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice des effets Coriolis et centrifuge,

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2m_2l_1l_2\dot{q}_2s_2 & -2m_2l_1l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)s_2 \\ 2m_2l_1l_2\dot{q}_1s_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2m_2l_1l_2\ddot{q}_2s_2 - 2m_2l_1l_2\dot{q}_2^2c_2 & -2m_2l_1l_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)s_2 - 2m_2l_1l_2\dot{q}_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)c_2 \\ 2m_2l_1l_2\ddot{q}_1s_2 - 2m_2l_1l_2\dot{q}_2\dot{q}_1c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur représentant la gravité,

$$G(q) = \begin{bmatrix} m_2gl_2s_{12} + m_1gl_1s_1 \\ m_2gl_2s_{12} \end{bmatrix}$$

$$\dot{G}(q) = \begin{bmatrix} m_2 g l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) c_{12} + m_1 g l_1 \dot{q}_1 c_1 + 2m_2 g l_1 \dot{q}_1 c_1 \\ m_2 g l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) c_{12} \end{bmatrix}$$

Pour plus de détails sur la modélisation du système mécanique voir : [Mana98] [Mana96] [M'Sir96].

Annexe B

Compléments sur la Synthèse de commande par H^∞

B.1 Synthèse théorique d'un correcteur par factorisation première à gauche normalisée.

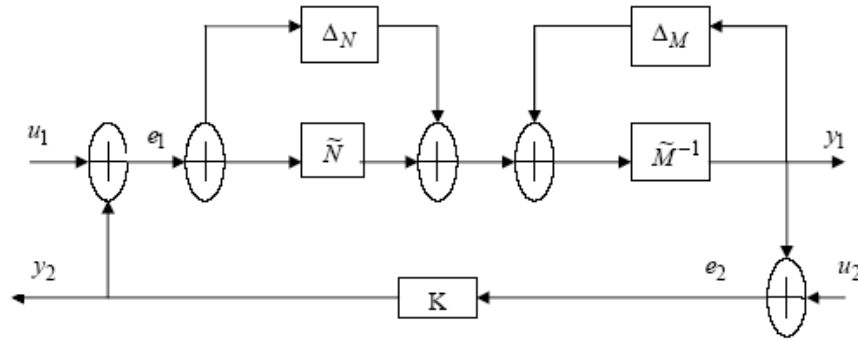


Figure B.1 Configuration du système avec factorisation première

Considérons le système bouclé de la figure B.1 pour lequel :

- Le système nominal G est supposé linéaire, rationnel, stationnaire, continu, de dimension finie et caractérisé par une factorisation première à gauche normalisée (NLGF), [Vidy88] :

$$G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \quad \tilde{M}, \tilde{N} \in \mathfrak{RH}_\infty \quad (\text{B.1})$$

Tell que :

$$\tilde{M}\tilde{M}^* + \tilde{N}\tilde{N}^* = I \quad (\text{B.2})$$

- G_Δ Représente le système nominal affecté d'incertitudes non structurées de modèle.

Autrement dit, G_Δ désigne le modèle incertain défini, dans ce contexte, par l'expression :

$$G_\Delta = (\tilde{M} + \Delta_M)^{-1} (\tilde{N} + \Delta_N) \quad (\text{B.3})$$

Pour laquelle $[\Delta_M, \Delta_N] \in \mathfrak{RH}_\infty$ caractérisent les incertitudes de modèle affectant respectivement les facteurs \tilde{M} et \tilde{N} de la NLGF du modèle nominal.

- $N(\tilde{M}, \tilde{N}, \varepsilon)$ désigne la famille des systèmes G_Δ fondée sur l'expression d'un ε – voisinage fondamental de la factorisation première à gauche normalisée de G , à savoir :

$$N(\tilde{M}, \tilde{N}, \varepsilon) = \left\{ ((\tilde{M} + \Delta_M)^{-1}(\tilde{N} + \Delta_N)) / \|\Delta_M, \Delta_N\|_\infty < \varepsilon \right\} \quad (\text{B.4})$$

- $N(\tilde{M}, \tilde{N}, \varepsilon)$ désigne le système bouclé

Théorème B.1 (Glover et Mac Farlane 1989 [Glov89]) : Tous les correcteurs satisfaisant au problème sous optimal de stabilisation robuste d'un système décrit par une factorisation première à gauche normalisée sont définis par une transformation linéaire fractionnaire

$T_{L[\phi]}$:

$$K = T_{L[\phi]} \cong (L_{11}\phi + L_{12})(L_{21}\phi + L_{22})^{-1} \quad (\text{B.5})$$

Pour laquelle le paramètre $\phi \in H_\infty^{m \times p}$ vérifie $\|\phi\|_\infty \leq 1$ et L est caractérisée par la représentation d'état suivante

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & \vdots & L_{12} \\ \dots & \vdots & \dots \\ L_{21} & \vdots & L_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} \frac{A^c}{F} & \frac{-\gamma^2 W^{*-1} B S^{-1/2}}{S^{-1/2}} & \frac{\gamma^2 \zeta^{-1} W^{*-1} Z C^* R^{-1/2}}{\zeta^{-1} D^* R^{-1/2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ C + D F & D S^{-1/2} & -\zeta^{-1} R^{-1/2} \end{array} \right]$$

Pour laquelle $\zeta = (\gamma^2 - 1)^{1/2}$ où $\gamma = \frac{1}{\varepsilon}$ désigne le niveau des incertitudes admissibles.

$W = I + (XZ - \gamma^2 I)$ où X et Z désignent les solutions respectives des équations de Riccati, GCARE et GFARE. $[A, B, C, D]$ est une représentation d'état du modèle nominal,

$S = I + D D^*$, F est le gain de filtrage défini par $F = -S^{-1}(D^* C + B^* X)$ est A^c la matrice de commande définie par : $A^c = A + B F$.

En annulant à présent le paramètre libre ϕ de la LFT, on définit alors la représentation d'état du correcteur central de la paramétrisation:

Corollaire B.2 (Glover et Mac Farlane 1989[Glov89]):

Le correcteur central possède pour représentation d'état :

$$K_0 = \begin{pmatrix} A^c + \gamma^2 W^{*-1} Z C^* (C + DF) & \gamma^2 W^{*-1} Z C^* \\ B^* X & -D^* \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Pour laquelle $[A, B, C, D]$ désigne une représentation d'état du modèle nominal, X et Z sont les solutions respectives de GCARE et GFARE, F est le gain de filtrage défini par $F = -S^{-1}(D^*C + B^*X)$, A^c est la matrice de commande définie par $A^c = A + BF$ et $W = I + (XZ - \gamma^2 I)$

Remarque : il découle des dimension de chaque composante de la représentation d'état des correcteurs sous optimaux que ceci que ceci possède un ordre supérieur où égale à celui du système nominale.

Au regard du théorème B.1 et du corollaire B.2, la synthèse d'un correcteur H^∞ suivant une approche par factorisation première, présente une partie systématique et une partie empirique (optionnelle). La partie systématique correspond à la détermination de la base fondamentale de la structure de compensation constituée par le correcteur central. Cette phase conditionne ainsi en grande partie les performances et la stabilité du système en boucle fermée. La seconde partie, inhérente à la définition du paramètre libre de la paramétrisation, autorise, quant à elle, une certaine modulation du compromis stabilité/performance en fonction de la stratégie de commande adoptée par l'automaticien.

B.2 La norme H^∞ .

1.1 Outils mathématique .

1.1.1 Espace H^∞ et norme associé .

Définissons d'abord l'espace L_∞ comme l'ensemble des fonctions associées de transferts ou matrices de transferts de la variable complexe p sans pole et essentiellement bornée sur l'axe imaginaire, possédant donc une norme L_∞ finie définie comme suit :

$$\|G(p)\| = \sup \bar{\sigma}(G(p)) = \sup_{\omega \in \Re} \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

L'espace H^∞ est un sous espace de L_∞ des fonctions de transferts de la variable complexe p tel que $R_e(p) > 0$, la norme H^∞ d'une fonction de transfert $G(p)$ est donnée par :

$$\|G(p)\| = \sup_{R_\gamma(p) > 0} \bar{\sigma}(G(p)) = \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

Calcul de la norme H^∞ d'un opérateur :

Les différentes méthodes de calculs de la norme H^∞ , sont fondés sur les résultats suivant, à savoir : considérons un système G dont une représentation d'état minimale est $[A, B, C, D]$.

On lui associe une matrice hamiltonienne H_γ tel que :

$$H_\gamma = \begin{pmatrix} A + BR_\gamma^{-1}D^*C & \gamma BR_\gamma^{-1}B^* \\ -\gamma C^*S_\gamma^{-1}C & -(A + BR_\gamma^{-1}D^*C)^* \end{pmatrix}$$

Avec $R_\gamma = (\gamma^2 I - D^*D)$ et $S_\gamma = (\gamma^2 I - DD^*)$

Si $\gamma > \bar{\sigma}(G)$, autrement dit si $\|G(p) < \gamma\|$, alors H_γ ne possède pas de valeurs propres situées sur l'axe imaginaire.

De part cette propriété, le calcul de la norme H^∞ s'opère par la recherche de la plus petite valeur de γ pour laquelle la matrice hamiltonienne H_γ ne possède pas des valeurs propres sur l'axe imaginaire. Cette recherche est ainsi généralement opérée suivant une approche dichotomique (Cf. algorithme de Boyd et al [Boyd 89]).

1.1.2 Valeur singulière et norme de Hankel.

En préliminaire à la définition de la norme de Hankel, introduisons les notions de gramiens de commandabilité et d'observabilité. En rappelons les Equations Algébriques de Riccati relatives à la commande et à l'observation :

Définition B.1

Considérons une fonction (ou matrice) de transfert stable $G(p)$ dont une représentation d'état minimale est $[A, B, C, D]$. On définit les gramiens de commandabilité et d'observabilité notés respectivement P et Q à travers les relations suivantes :

$$P \triangleq \int_0^\infty e^{At} B B^* e^{A^*t} dt$$

$$Q \triangleq \int_0^{\infty} e^{At} C C^* e^{A^* t} dt$$

Nota : on démontre que P et Q représentent également les solutions uniques et définies positives des équations de Lyapunov suivantes :

$$AP + PA^* + BB^* = 0$$

$$A^*Q + QA^* + C^*C = 0$$

Valeurs singulières et norme de Hankel :

Définition B.2

Considérons une fonction (ou matrice) de transfert stable $G(p)$, de degré n dont une représentation d'état minimale est $[A, B, C, D]$. Considérons de plus le gramien de commandabilité P et le gramien d'observabilité Q définie conformément aux relations (B.3) et (B.4), alors :

- les valeurs singulières de Hankel de $G(p)$ sont données par :

$$\sigma_i(G(p)) = \lambda_i^{1/2}(PQ), \quad i = 1, \dots, n$$

et ordonnées par convention, dans l'ordre décroissant ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$)

- La norme de Hankel de la fonction (ou matrice) de transfert $G(p)$, notée :

$$\|G(p)\|_H = \max(\sigma_i(G(p)))$$

Notons que la norme de Hankel de la fonction (ou matrice) de transfert $G(p)$ peut être définie de manière équivalente à partir des solutions uniques Z et X des Equations Algébriques de Riccati (respectivement GCARE et GFARE) associé à une représentation d'état minimale de $G(p)$ [Doyl 89], à savoir :

$$\|G(p)\|_\infty = \lambda_{\max}^{1/2}(ZX(1 + ZX)^{-1})$$

1.1.3 Transformation linéaire fractionnaire.

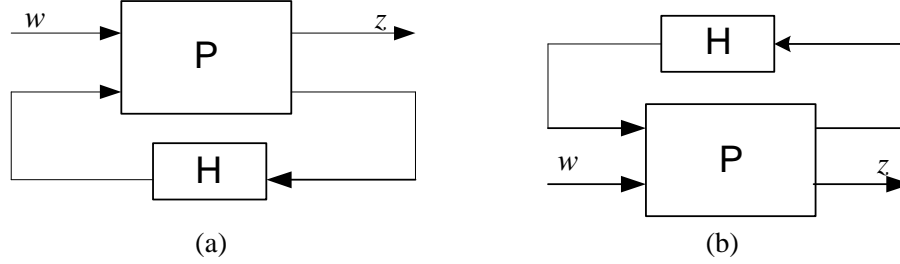


Figure B.1 : schéma associé aux transformations linéaires fractionnaires (a) inférieures (b) supérieurs

Considérons les systèmes définis au travers des figures B.1.(a) et B.1.(b) pour lesquelles P désigne la matrice d'interconnexions partitionnée comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \vdots & P_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ P_{21} & \vdots & P_{22} \end{pmatrix}$$

En respect de ces configurations, la matrice de transfert T_{wz} entre l'entrée w et la sortie z par le biais des transformation linéaire fractionnaire inférieur (LLFT), notée $F_L(P, H)$, et définie par :

$$F_L(P, H) = F_L \left(\begin{pmatrix} P_{11} & \vdots & P_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ P_{21} & \vdots & P_{22} \end{pmatrix}, H \right) = P_{11} + P_{12}H(I - P_{22}H)^{-1}P_{21}$$

Avec : $\det(I - P_{22}H) \neq 0$.

Lemme B.4 : toute transformation linéaire fractionnaire, conforme a la définition précédente, pour laquelle P_{22} est inversible (i.e. $\det(P_{22}) \neq 0$) peut être également définie par :

$$T_U[H] = (U_{11}H + U_{12})(U_{21}H + U_{22})^{-1}$$

Avec :

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & \vdots & U_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ U_{21} & \vdots & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{12} - P_{11}P_{21}^{-1}P_{22} & \vdots & P_{11}P_{21}^{-1} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ -P_{21}P_{22} & \vdots & P_{21}^{-1} \end{pmatrix}$$

Définition B.5 : En se référant à la figure B.1 (b), une transformation linéaire fractionnaire supérieur, (ULFT) notée $F_U(P, H)$, et définie par :

$$T_{wz} = F_U(P, H) = F_U \left(\begin{pmatrix} P_{11} & \vdots & P_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ P_{21} & \vdots & P_{22} \end{pmatrix}, H \right) = P_{22} + P_{21}H(I - P_{11}H)^{-1}P_{12}$$

1.2. Problème standard .

La plupart des configurations de commande peuvent en effet, par simple transformation topologique, être mise sous la forme standard représentée au travers de la figure B.2 suivante :

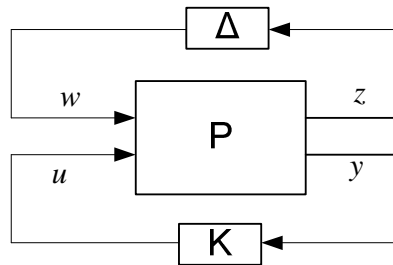


Fig B.2

Configuration pour laquelle w désigne le vecteur des entrées exogènes (consigne, perturbations,.....), u est le vecteur de commande, y est le vecteur des sorties mesurées et z désigne le vecteur des sorties à contrôler (à annuler, borner ou minimiser). Le bloc P représente quand à lui, la matrice d'interconnexions intégrant le modèle nominale et les éventuels transferts relatifs aux performances souhaitées, Δ caractérise les incertitudes (ou perturbations) attachées au système et K désigne le correcteur.

En notant alors respectivement $F_L(P, K)$ l'opérateur d'entrée w et de sortie z lorsque $\Delta = 0$, et $F_U(P, \Delta)$ l'opérateur d'entrée u et de sortie y lorsque $K=0$, il en résulte des critères de stabilité (entrées-sorties) établie notamment par Zames au travers du théorème des petits gains [Zam 66], le résultat fondamental suivant [Vid 85], [Macf 92].

Théorème B.6: Un correcteur K stabilise $F_U(P, \Delta)$ de la figure B.2 pour toute perturbation admissible Δ telle que $\|\Delta\|_\infty \leq \varepsilon$ et tout système standard P stabilisant les conditions d'observabilités et de commanditaire, si et seulement si :

i) K stabilise $F_U(P,0)$ (i.e K stabilise le modèle nominale $G(p)$).

ii) $\|T_{wz}\|_\infty = \|F_L(P,K)\|_\infty \leq \varepsilon^{-1}$.

ε désigne la marge de stabilité (avec $0 < \varepsilon < 1$) et T_{wz} représente la matrice de transfert entre les entrées exogènes et les sorties à contrôler.

Ainsi le problème générique de commande robuste H^∞ peut être exprimé comme la recherche d'un correcteur qui stabilise (de manière interne) le système en boucle fermé et qui minimise (problème optimal) la norme H^∞ de la matrice de transfert T_{wz} .

Notons toute fois que la commande H^∞ ne désigne essentiellement qu'un formalisme et un concept associé à l'analyse et à la résolution des problèmes de commande robuste. Cette approche regroupe, de fait, un certain nombre de techniques de synthèse qui représentent chacune leurs singularités. Ces spécificités sont relatives notamment aux hypothèses fondamentales (nature de la représentation du système P...), au niveau de complexité de mise en œuvre et au degré d'implication de l'automaticien dans l'élaboration de la loi de commande.

ANNEXE C

Linéarisation

Cet appendice rappelle quelques règles pour la linéarisation des relations non linéaires

C.1 Fonction non linéaire d'une variable.

Considérons la variable y fonction non linéaire de la variable x :

$$y = f(x)$$

On peut linéariser cette fonction par introduction de petites variations autour du point de fonctionnement P_0 en posant :

$$y = y_0 + \Delta y \cong f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \Delta x$$

$$y_0 = f(x_0)$$

D'où $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0$ représente la pente au point de fonctionnement P_0

Ainsi

$$\Delta y = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \Delta x = c \Delta x \quad \text{avec} \quad c = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0$$

C.2 Fonction non linéaire de deux variables :

Soit une fonction non linéaire de deux variables x_1 et x_2 :

$$y = f(x_1, x_2)$$

Cette fonction peut être linéariser par l'énoncé :

$$y = y_0 + \Delta y \cong f(x_{10}, x_{20}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_0 \Delta x_2$$

$$\Delta y = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_0 \Delta x_2$$

$$\Delta y = c_1 \Delta x_1 + c_2 \Delta x_2$$

Avec

$$c_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_0 \quad c_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_0$$

Les coefficients c_1 et c_2 dépendent du point de fonctionnement P_0 .

Cas particuliers :

.Produit de deux variables x_1 et x_2 tel que $y = x_1 x_2$

D'après le principe de décomposition présenté précédemment on a :

$$\Delta y = \left. \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 + \left. \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_0 \Delta x_2$$

$$\Delta y = x_{20} \Delta x_1 + x_{10} \Delta x_2$$

Quotient de deux variables x_1 et x_2 tel que $y = \frac{x_1}{x_2}$

En décomposant comme précédemment, on a :

$$\Delta y = \left. \frac{\partial(x_1 / x_2)}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 + \left. \frac{\partial(x_1 / x_2)}{\partial x_2} \right|_0 \Delta x_2$$

$$\Delta y = \left. \frac{\partial(x_1 x_2^{-1})}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 + \left. \frac{\partial(x_1 x_2^{-1})}{\partial x_2} \right|_0 \Delta x_2$$

$$\Delta y = x_{20}^{-1} \Delta x_1 - x_{10} x_{20}^{-2} \Delta x_2$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_{20}} \Delta x_1 - \frac{x_{10}}{x_{20}^2} \Delta x_2$$

C.3 Fonction non linéaire de n variables.

Soit $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Une fonction non linéaire de n variables x_1, x_2, \dots, x_n

Cette fonction peut être linéarisée par :

$$\Delta y = c_1 \Delta x_1 + c_2 \Delta x_2 + \dots + c_n \Delta x_n$$

Avec

$$c_i = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_0 \quad \text{Les coefficients } c_i \text{ dépendent du point de fonctionnement } P_0.$$