



جامعة السلطان مولاي سليمان
Université Sultan Moulay Slimane

ROYAUME DU MAROC
Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques
Béni Mellal



N° d'ordre : 79

Centre des Etudes Doctorales : Sciences et Techniques.
Formation Doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées.

THÈSE

Presentée par

Youssef KHMOU

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Specialité : Physique Informatique.

Estimation des Directions d'Arrivées des Sources Rayonnantes par un Réseau d'Antennes

Soutenue le vendredi 20/11/2015 à 15h, devant le jury composé de :

Pr. M. NAÏMI	: Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal	Président.
Pr. M. M. HASSANI	: Professeur à la Faculté des Sciences Semlalia de Marrakech	Rapporteur.
Pr. A. ZEROUAL	: Professeur à la Faculté des Sciences Semlalia de Marrakech	Rapporteur.
Pr. B. BOUIKHALENE	: Professeur à la Faculté Polydisciplinaire de Béni Mellal	Rapporteur.
Pr. M. FAKIR	: Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal	Examinateur.
Pr. S. SAFI	: Professeur à la Faculté Polydisciplinaire de Béni Mellal	Directeur de thèse.

AVANT-PROPOS

Renseignements de la thèse

- Prénom et Nom de l'auteur de la thèse : Youssef KHMOU.
- Titre de la thèse : Estimation des Directions d'Arrivées des Sources Rayonnantes par un Réseau d'Antennes.
- Spécialité : Physique informatique.
- Prénom et Nom du directeur de la thèse : Pr. Said SAFI (Professeur à la Faculté Polydisciplinaire de Béni-Mellal).
- Laboratoire d'accueil : Laboratoire de Traitement de l'Information et Aide à la Décision (TIAD), Faculté des Sciences et Techniques, Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Sciences et Techniques (LIRST), Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane, Béni-Mellal.

Liste des Publications

Articles dans des journaux internationaux

1. **Youssef Khmou**, Said Safi, and Miloud Frikel. Comparative study between several direction of arrival estimation methods. *Journal of Telecommunications and Information Technology*, vol. 1, pp.41-48, 2014.
2. **Youssef Khmou** and Said Safi. Angles of arrival estimation with unitary partial propagator. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, vol. 8, 2014.
3. **Youssef Khmou** and Said Safi. Angle of arrival detection with fifth order phase operators. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, vol. 8, 2014.

4. **Youssef Khmou**, Said Safi, and Miloud Frikel. Generalized maximum entropy method for cosmic source localization. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, vol. 8, 2014.
5. **Youssef Khmou**, Said Safi, and Miloud Frikel. Exponential operator for bearing estimation. *International Journal of Advanced Science and Technology*, vol. 74 :1-10, 2015.
6. **Youssef Khmou**, Said Safi, and Miloud Frikel. Extending the quantum entropy to multidimensional signal processing, *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, vol. 9, 2015.
7. **Youssef Khmou**, Said Safi, and Miloud Frikel. Lorentzian Operator for Angular Source Localization with Large Array. *Journal of Telecommunications and Information Technology*, vol. 4, pp.98-105, 2015.

Proceedings de conférences internationales

8. **Y. Khmou** and S. Safi. Doa estimation with fourth order propagator. In *Multimedia Computing and Systems (ICMCS)*, 2014 International Conference on, pages 1295-1300, April 2014.
9. **Y. Khmou** and S. Safi. New radiolocation technique for intelligent antennas. In *Intelligent Systems and Computer Vision (ISCV)*, 2015, pages 1-4, March 2015.

RÉSUMÉ

La présente thèse s'articule sur l'étude et la contribution des techniques de haute résolution d'estimation des directions d'arrivées des sources rayonnantes par un réseau d'antennes dans un milieu de propagation. Les signaux issus des antennes élémentaires du réseau sont émis par des sources ponctuelles, de type bande étroite, situées en champ lointain et fixes dans leurs positions durant la période d'observation, les disciplines mises en jeu sont le traitement statistique des signaux, la propagation des ondes et l'interférométrie.

La première partie étudie les différents principes et applications de la localisation angulaire en distinguant le mécanisme de localisation basé sur le temps d'arrivée et celui basé sur la combinaison de plusieurs directions d'arrivées. La deuxième partie traite la solution de propagation des ondes émises et les expressions mathématiques des signaux issus du réseau tout en combinant une étude détaillée des hypothèses simplificatrices du problème et les différentes composantes du système antennes-sources. Dans la troisième partie, on réalise une étude comparative entre plusieurs techniques des directions d'arrivées puis on explique le principe de simulation Monte Carlo du système, ensuite, on présente deux techniques de détection du nombre des sources rayonnantes, enfin, on applique la transformation unitaire par la méthode du propagateur partiel dans le cas des sources cohérentes et proches.

Dans la quatrième partie, on généralise la méthode d'entropie maximale par introduction des notions de l'entropie quantique pour la localisation bidimensionnelles des sources. Dans un deuxième temps, on généralise l'opérateur du propagateur vers l'ordre trois, quatre et cinq, puis une formule générale pour un rapport du nombre des éléments du réseau sur le nombre des sources n tel qu'il est possible de générer $n(n + 1)/2 - 1$ versions d'opérateurs qui dépendent du rapport signal sur bruit. La dernière partie est consacrée à la proposition des opérateurs non linéaires de localisation à savoir : l'opérateur exponentiel gaussien, l'opérateur exponentiel décroissant et l'opérateur lorentzien. Les méthodes étudiées et proposées sont appliquées sur des données synthétiques ainsi que sur quelques données acoustiques expérimentales.

Mots-clés : Direction d'arrivée, haute résolution, localisation, traitement d'antennes, propagateur, méthode d'entropie maximale, sous espace signal.

ABSTRACT

This thesis is focused on high resolution techniques for Direction of Arrival (DoA) estimation of radiating sources in medium of propagation using an array of antennas. The received signals, by the array, are emitted by narrowband and punctual sources localized in farfield region relatively to the array and non moving during the observation period, the involved areas are : statistical signal processing, wave propagation and interferometry.

The first part of the manuscript deals with different principles and applications of localization by explaining the difference between localization mechanism that is based on time of arrival and by a combination of several directions of arrivals. In the second part, we present the solution of wave propagation and the mathematical expressions of received signals by the array, in parallel, we present a detailed explanation of the main assumptions of the problem and the various components of the antennas-sources system. In the third part, we perform a comparative study between several direction of arrival estimation methods, secondly, we explain the methodology of Monte Carlo simulation of the studied system, next, we present two techniques for detecting the number of radiating sources, finally, we study the case of coherent and colosely sources by applying the unitary transformation to the partial propagator method.

In the fourth part of this thesis, we generalize the Maximum Entropy Method (MEM), by introducing some notions of quantum entropy, in the case of two dimensional localization. Next, we extend the propagator operator to the third, fourth and fifth orders and we propose a general formulation that depends of the ratio of the number of antenna elements to the number of sources n such that it is possible to generate $n(n + 1)/2 - 1$ operators of noise subspace that are dependent on signal to noise ratio. In the last part, we propose a non linear operators which are the exponential gaussian operator, the decreasing exponential operator and the lorentzian operator. The studied and proposed methods are applied to synthetic and experimental acoustic data.

Keywords : Direction of arrival, high resolution, localization, antennas, propagator, maximum entropy method, signal subspace.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	iii
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
TABLE DES FIGURES	xi
Liste des tableaux	xvi
NOTATIONS	xvii
ABRÉVIATIONS	xix
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1 DIFFÉRENTS PRINCIPES DE LA LOCALISATION	4
1.1 INTRODUCTION	4
1.2 SYSTÈME NATUREL DE LOCALISATION	4
1.3 TÉLÉCOMMUNICATIONS	6
1.4 GÉOPHYSIQUE	8
1.5 ACOUSTIQUE SOUS MARINE	9
1.6 RADIOASTRONOMIE	11
1.7 TRAITEMENT D'ANTENNES	13
1.7.1 Élément radiatif	13
1.7.2 Facteur du réseau	15
1.8 LOCALISATION PAR TEMPS D'ARRIVÉES	19
1.9 LOCALISATION PAR DIRECTIONS D'ARRIVÉES	21
1.10 CONCLUSION	25
2 MODÈLE DE PROPAGATION	26
2.1 INTRODUCTION	26
2.2 PROPAGATION DE L'ONDE	26

2.3	HYPOTHÈSES FONDAMENTALES DU MODÈLE DE PROPAGATION	34
2.3.1	Linéarité et isotropie du milieu de propagation	35
2.3.2	Champ lointain	35
2.3.3	Modèle bande étroite	35
2.3.4	Sources fixes	36
2.3.5	Contrainte géométrique du réseau	36
2.4	CARACTÉRISTIQUES DE L'ANTENNE UNIFORME LINÉAIRE	37
2.4.1	Centro-symétrie	37
2.4.2	Ambiguïté planaire	38
2.4.3	Ambiguïté conique	39
2.5	STATISTIQUES D'ORDRE DEUX DES SIGNAUX REÇUS	41
2.5.1	Modèle stochastique	41
2.5.2	Matrice spectrale du réseau	43
	CONCLUSION	48
3	MÉTHODES CONVENTIONNELLES DES DIRECTIONS D'ARRIVÉES	50
3.1	INTRODUCTION	50
3.2	MÉTHODES DE FORMATION DE VOIES	50
3.2.1	Spectre de formation de voies	50
3.2.2	Spectre de formation de voies optimisée	52
3.3	MÉTHODES DU RANG UNITAIRE	54
3.3.1	Spectre dérivé de la prédiction linéaire	54
3.3.2	Spectre de la méthode d'entropie maximale	55
3.4	MÉTHODES DES SOUS ESPACES ORTHOGONAUX	56
3.4.1	Spectre du sous espace orthogonal	57
3.4.2	Spectre de la décomposition harmonique	60
3.4.3	Spectre de la norme minimale	61
3.4.4	Spectre de l'opérateur du propagateur	62
3.4.5	Spectre du propagateur partiel	64
3.5	SIMULATION MONTE CARLO DU SYSTÈME	66
3.6	DÉTECTION DU NOMBRE DES SOURCES	69
3.7	DÉCORRÉLATION DES SOURCES COHÉRENTES	71
3.8	CONCLUSION	75
4	GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE D'ENTROPIE MAXIMALE ET DU PROPAGATEUR	76
4.1	INTRODUCTION	76
4.2	GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE D'ENTROPIE MAXIMALE	77
4.2.1	Fonction de localisation bidimensionnelle	77

4.2.2	Opérateur G-MEM	79
4.3	GÉNÉRALISATION DE L'OPÉRATEUR DU PROPAGATEUR	83
4.3.1	Nouvelle expression du propagateur	86
4.3.2	Propagateur d'ordre trois	87
4.3.3	Propagateur d'ordre quatre	88
4.3.4	Propagateur d'ordre cinq	93
4.3.5	Propagateur généralisé	96
4.4	CONCLUSION	99
5	OPÉRATEURS NON LINÉAIRES POUR LES RÉSEAUX DE GRANDE DIMENSION	100
5.1	INTRODUCTION	100
5.2	FONCTIONS MATRICIELLES	101
5.3	OPÉRATEUR EXPONENTIEL	102
5.4	OPÉRATEUR EXPONENTIEL DÉRIVÉ	107
5.5	OPÉRATEUR LORENTZIEN	110
5.5.1	Résultats de simulation	113
5.5.2	Résultats des données expérimentales	115
5.6	CONCLUSION	120
	CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES	121
	ANNEXE	123
A.1	FONCTION DE CORRÉLATION	123
A.2	FACTEUR DU RÉSEAU	123
A.3	INTERFÉROMÉTRIE	124
A.4	FORMATION DE VOIES	124
A.5	FORMATION DE VOIES OPTIMISÉE	125
A.6	LIMITE DE LA RÉOLUTION ANGULAIRE	125
A.7	RÉSEAU CIRCULAIRE	126
A.8	ERREUR QUADRATIQUE	126
	BIBLIOGRAPHIE	127

TABLE DES FIGURES

1.1	Diagramme De la localisation d'une source sonore en utilisant la formule de Rayleigh.	5
1.2	Simulation des signaux périodiques de fréquence $f = 1500$ Hz, arrivant à deux microphones avec un délai $\delta t = 1.51 \times 10^{-4}$ s. (a) représentation temporelle, (b) fonction de corrélation.	6
1.3	Transmission omnidirectionnelle entre une station de communications fixe (émetteur) et une station mobile (récepteur).	7
1.4	Focalisation des radiations depuis la station mobile vers le récepteur.	7
1.5	Une station de base pour la communication civile, composée de plusieurs antennes.	8
1.6	Réseau de géophones du domaine sous marin disposés dans le laboratoire.	9
1.7	Réseau d'hydrophones qui sont en train d'être immergés dans la mer.	9
1.8	Schéma illustratif du principe de localisation par un système SONAR.	10
1.9	Zone centrale du radiotélescope <i>Square Kilometer Array (SKA)</i> d'un diamètre allant de 5 à 10 Km constitué des groupements de réseaux d'antennes opérants dans la bande de fréquences 70 MHz-1200 MHz [Fel10].	12
1.10	Rayonnement isotrope d'une antenne du point de vue théorique.	14
1.11	Puissance d'une antenne en fonction de la bande passante fréquentielle.	14
1.12	Facteur du réseau $ F(\theta) $ avec des phases électriques aléatoires pour la configuration ($N = 10, i_n = 1A, d = \lambda/2, \phi_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$).	16
1.13	Facteur du réseau $ F(\theta) $ avec des phases électriques nulles pour les différentes configurations ($N = [5, 10, 20], i_n = 1A, d = [0.125\lambda, 0.5\lambda, 1\lambda], \phi_n = 0$).	17
1.14	Facteur du réseau d'antennes uniforme linéaire $ F(\theta) = f(N = 20, d = \frac{\lambda}{2}, i_n = 1A, \phi_n = 0)$	18
1.15	Localisation d'un récepteur par principe de triangulation du système GPS.	20
1.16	Localisation bidimensionnelle en combinant deux directions d'arrivées.	21
1.17	Localisation tridimensionnelle d'une source uniformément rayonnante par une configuration géométrique de deux réseaux rectangulaires.	22
1.18	Projection du système tridimensionnel sur le plan (o, x, y)	23
1.19	Projection du système tridimensionnel sur le plan (o, y, z)	23
2.1	Propagation d'une onde (\vec{E}, \vec{B}) dans la direction \vec{e}_x	27

2.2	Modèle de propagation dans le plan horizontal, onde transversale reçue par trois capteurs.	28
2.3	Variation lente de l'enveloppe du signal : modulation d'une fonction périodique de 2 Hz et d'amplitude de 0.5 V par une porteuse de 25 Hz et d'amplitude de 1 V.	29
2.4	Vecteur d'onde d'une source ponctuelle en coordonnées sphériques.	31
2.5	Expressions des déphasages géométriques en fonction de la différence de marche des fronts d'ondes.	32
2.6	Modèle bidimensionnel des interférences spatiales : diagrammes de 2 sources ponctuelles.	35
2.7	Spectre large bande [250 Hz,400 Hz] en comparaison avec un spectre de bande étroite de fréquence porteuse $f_c = 280$ Hz.	36
2.8	Ambiguïté planaire de l'antenne ULA.	39
2.9	Ambiguïté conique du réseau d'antennes ULA pour une source définie par $(\theta = 90^\circ, 0^\circ < \varphi < 90^\circ)$, (a) représentation tridimensionnelle, (b) projection sur le plan (x,y)	40
2.10	Exemples des réseaux bidimensionnels, (a) rectangulaire, (b) rectangulaire creux, (c) réseau de forme L, (d) circulaire, (e) réseau de forme + et (f) réseau aléatoire.	41
2.11	Exemple d'une représentation des parties imaginaires et réelles des signaux provenant de deux directions différentes, (a) $(\Re[x_1(t)], \Im[x_1(t)])$, (b) $(\Re[x_4(t)], \Im[x_4(t)])$ et (c) la fonction de corrélation $f(x_1(t), x_4(t))$	42
2.12	Norme de Frobenius de l'erreur $\Gamma_t - \Gamma_{t+1}$ en fonction du nombre d'échantillons.	47
3.1	Spectre de formation de voies pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.	52
3.2	Spectre de formation de voies optimisée (MVDR) pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.	54
3.3	Spectre de la méthode de la prédiction linéaire pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.	55
3.4	Spectre de la Méthode d'Entropie Maximale (MEM), $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.	56
3.5	Valeurs propres de la matrice spectrale Γ (a) et valeurs singulières de la matrice $X(t)$ (b) pour la configuration $N = 10, P = 4$ et $SNR = 1$ dB.	58
3.6	Spectre du sous espace orthogonal (MUSIC) pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.	60
3.7	Spectre de la décomposition harmonique de Pisarenko (PHD) pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.	61
3.8	Spectre de la norme minimale (<i>Minimum Norm</i>) pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.	62

3.9	Spectre de l'opérateur du propagateur pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.	63
3.10	Spectre du propagateur partiel pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.	65
3.11	Essais Monte Carlo du spectre de la Méthode d'Entropie Maximale (MEM) pour $SNR = 1$ dB, $K = 80$ et $L = 100$ essais.	66
3.12	Erreurs quadratiques RMSE des neuf fonctions de localisation calculées à partir de $L = 100$ essais pour $SNR = 1$ dB.	68
3.13	Erreurs quadratiques RMSE des neuf fonctions de localisation calculées à partir de $L = 100$ essais pour $SNR = 20$ dB.	68
3.14	Résultats des critères AIC (a) et MDL (b) pour la détection du nombre des sources rayonnantes avec la configuration ($N = 10, P = 4, K = 200, \theta = [-24^\circ, 15^\circ, 21^\circ, 70^\circ], d = \lambda/2, SNR = -2$ dB).	70
3.15	Variation du facteur du réseau $ F(\theta) $ en fonction de la distance $d = f(\lambda)$ pour $N = 11, i_n = 1$ A et $\phi_n = 0$	73
3.16	Moyenne de $L = 150$ essais du propagateur partiel extrait depuis Γ_{FB} avec la configuration ($N = 11, P = 4, \theta = [-65^\circ, 21^\circ, 25^\circ, 51^\circ], SNR = 5$ dB, $K = 200, d = f(\lambda)$) et $s_2(t) = s_3(t)$	74
3.17	Moyenne de $L = 150$ essais du propagateur partiel extrait depuis Γ_r avec la configuration ($N = 11, P = 4, \theta = [-65^\circ, 21^\circ, 25^\circ, 51^\circ], SNR = 5$ dB, $K = 200, d = f(\lambda)$) et $s_2(t) = s_3(t)$	74
3.18	Moyenne de $L = 150$ essais des spectres angulaires du propagateur unitaire Γ_r et du propagateur issu de Γ_{FB} avec la configuration ($N = 11, P = 4, \theta = [-65^\circ, 21^\circ, 25^\circ, 51^\circ], SNR = 5$ dB, $K = 200, d = 0.45\lambda, s_2(t) = s_3(t)$).	75
4.1	Exemple d'un réseau circulaire et uniforme (UCA) de fréquence $f_c = 1$ GHz avec $N = 18$ éléments et $d = \lambda/2$	77
4.2	Moyenne de $L = 1000$ essais du spectre bidimensionnel de la méthode d'entropie MEM avec un réseau circulaire UCA et de configuration ($N = 15, P = 3, (\theta_1 = 15^\circ, \varphi_1 = 50^\circ), (\theta_2 = 40^\circ, \varphi_2 = 44^\circ), (\theta_3 = 57^\circ, \varphi_3 = 60^\circ), S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3), d = \lambda/2, K = 200, SNR = 5$ dB).	81
4.3	Moyenne de $L = 1000$ essais du spectre bidimensionnel de la méthode proposée G-MEM avec un réseau circulaire UCA et de configuration ($N = 15, P = 3, (\theta_1 = 15^\circ, \varphi_1 = 50^\circ), (\theta_2 = 40^\circ, \varphi_2 = 44^\circ), (\theta_3 = 57^\circ, \varphi_3 = 60^\circ), S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3), d = \lambda/2, K = 200, SNR = 5$ dB).	81
4.4	Valeurs propres de l'opérateur P_G et de Γ^{-1} avec la configuration ($N = 15, P = 3, (\theta_1 = 15^\circ, \varphi_1 = 50^\circ), (\theta_2 = 40^\circ, \varphi_2 = 44^\circ), (\theta_3 = 57^\circ, \varphi_3 = 60^\circ), S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3), d = \lambda/2, K = 200, SNR = 5$ dB).	82
4.5	Localisation unidimensionnelle avec les opérateurs MEM et G-MEM pour un réseau ULA de configuration ($N = 15, P = 3, \theta = [15^\circ, 40^\circ, 57^\circ], S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3), d = \lambda/2, K = 200, SNR = 5$ dB).	82

4.6	Entropie de Von Neumann de la matrice spectrale densité ρ pour un réseau ULA de configuration ($N = 15, P = 3, \theta = [15^\circ, 40^\circ, 57^\circ]$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3)$, $d = \lambda/2, K = 200$).	83
4.7	Moyenne de $L = 200$ essais du spectre du propagateur d'ordre 4 avec la configuration ($N = 18, P = 5, \theta = [-17^\circ, -5^\circ, 10^\circ, 33^\circ, 63^\circ]$, $d = \lambda/2, K = 200, S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_5)$, $SNR = 5$ dB).	90
4.8	Erreur quadratique RMSE du propagateur d'ordre quatre et de la technique ESPRIT pour $L = 100$ essais de chaque valeur du SNR avec la configuration ($N = 18, P = 5, \theta = [-17^\circ, -5^\circ, 10^\circ, 33^\circ, 63^\circ]$, $d = \lambda/2, K = 200, S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_5)$).	91
4.9	Spectre du propagateur d'ordre quatre en présence du bruit corrélé de type Toeplitz réel et symétrique avec la configuration ($N = 18, P = 5, \theta = [-17^\circ, -5^\circ, 10^\circ, 33^\circ, 63^\circ]$, $d = \lambda/2, K = 200, S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_5)$).	92
4.10	Modèle du bruit corrélé configuré par les paramètres $N = 18, k = 6, \sigma^2 = 1$ W et $\rho = 0.6$	93
4.11	Moyenne de $L = 100$ essais du spectre bidimensionnel du propagateur d'ordre quatre par un réseau UCA et avec la configuration ($N = 18, P = 3, [(\theta_1 = 10^\circ, \varphi_1 = 55^\circ), (\theta_2 = 33^\circ, \varphi_2 = 40^\circ), (\theta_3 = 63^\circ, \varphi_3 = 70^\circ)]$, $d = \lambda/2, K = 200, S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3)$, $SNR = 8$ dB).	93
4.12	Moyennes de $L = 100$ essais des spectres du propagateur d'ordre cinq ($n = 5$) par un réseau ULA avec la configuration ($N = 18, P = 3, \theta = [10^\circ, 28^\circ, 49^\circ]$, $d = \lambda/2, K = 200, S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3)$, $SNR = 5$ dB).	95
4.13	Moyennes de $L = 100$ essais des spectres : du cinquième sous espace du propagateur d'ordre cinq, de MUSIC et de formation de voies avec la configuration ($N = 18, P = 3, \theta = [10^\circ, 28^\circ, 49^\circ]$, $d = \lambda/2, K = 200, S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3)$, $SNR = 5$ dB).	96
4.14	RMSE des cinq sous espaces du propagateur d'ordre cinq et d'ESPRIT calculées de $L = 100$ essais pour chaque valeur du SNR avec la configuration ($N = 18, P = 3, \theta = [10^\circ, 28^\circ, 49^\circ]$, $d = \lambda/2, K = 200, S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3)$).	96
4.15	Spectres normalisés du premier sous espace du propagateur d'ordre six et de MUSIC par un réseau ULA avec la configuration ($N = 18, P = 3, \theta = [10^\circ, 38^\circ, 45^\circ]$, $d = \lambda/2, K = 200, S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3)$, $SNR = 10$ dB).	99
5.1	Fonction gaussienne appliquée au spectre de la matrice Γ avec les paramètres (λ_N, β)	103
5.2	Moyenne de $L = 100$ essais de l'opérateur exponentiel avec la configuration ($N = 11, P = 4, \theta = [-40^\circ, 5^\circ, 30^\circ, 35^\circ]$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_4)$, $d = \lambda/2, K = 200, SNR = 5$ dB).	105

5.3	Spectre de l'opérateur $e^{-\beta(\Gamma-\lambda_N I_N)^2}$ en fonction du rapport SNR avec la configuration ($N = 11, P = 4, \theta = [-40^\circ, 5^\circ, 30^\circ, 35^\circ], S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_4), d = \lambda/2, K = 200$).	106
5.4	Moyenne de $L = 100$ essais des opérateurs : exponentiel, EG, MUSIC, MVDR et Formation de voies avec la configuration ($N = 11, P = 4, \theta = [-40^\circ, 5^\circ, 30^\circ, 35^\circ], S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_4), d = \lambda/2, K = 200, SNR = 5$ dB).	107
5.5	RMSE des opérateurs : exponentiel, EG, MUSIC et MVDR avec la configuration ($N = 11, P = 4, \theta = [-40^\circ, 5^\circ, 30^\circ, 35^\circ], S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_4), d = \lambda/2, K = 200$).	107
5.6	RMSE des opérateurs exponentiel dérivé, MUSIC et propagateur orthonormal avec la configuration ($N = 20$ dont les signaux aux positions (3,9,13) sont nuls, $P = 3, \theta = [10^\circ, 15^\circ, 18^\circ], d = \lambda/2, K = 60$).	110
5.7	Fonction de Lorentz appliquée au spectre σ_Γ , définie par les paramètres (λ_N, β)	111
5.8	Moyenne de $L = 100$ essais de l'opérateur lorentzien avec la configuration ($N = 11, P = 4, \theta = [-80^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 56^\circ], K = 200, d = \lambda/2, S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_4), SNR = 5$ dB).	114
5.9	Probabilité de résolution de l'opérateur lorentzien avec la configuration ($L = 100, P = 4, \theta = [-80^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 56^\circ], K = 200, d = \lambda/2, S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_4), SNR = 5$ dB).	114
5.10	Opérateur lorentzien des directions d'arrivées, appliqué aux données acoustiques expérimentales [SM05].	116
5.11	Spectres $f_i(\theta)$ de la méthode d'entropie maximale MEM appliquée sur les signaux acoustiques expérimentales [SM05].	117
5.12	Approximation de la fonction rectangulaire $f_1(\lambda)$ appliquée aux valeurs propres de Γ avec les paramètres $(\lambda_c, \alpha = \{1, 3, 5, 7, 9\})$	118
5.13	Densité de probabilité $p(\hat{\theta})$ de la direction d'arrivée $\theta = 23.75^\circ$ par l'opérateur G-MEM pour la configuration ($L = 300, N = 4, K = 200, d = \lambda/2, s(t) \sim \mathcal{CN}(0, 1 W), SNR = 5$ dB).	119
5.14	Densité de probabilité $p(\hat{\theta})$ de la direction d'arrivée $\theta = 23.75^\circ$ par le propagateur 4 pour la configuration ($L = 300, N = 4, K = 200, d = \lambda/2, s(t) \sim \mathcal{CN}(0, 1 W), SNR = 5$ dB).	119
A.1	Interférométrie relativement à l'axe du réseau composé de $N = 3$ antennes espacées de $d = \lambda/2$ tel que $a(\theta) = [1, e^{-j\pi \cos(\theta)}, e^{-j2\pi \cos(\theta)}]^T$	124
A.2	Largeur à mi-hauteur du réseau ULA en fonction du nombre d'antennes N , pour $d = \lambda/2, i_n = 1$ A et $\phi_n = 0$	126

Liste des tableaux

3.1	Caractéristiques des sources ponctuelles.	52
4.1	Technique ESPRIT.	91
5.1	Technique lorentzienne de Localisation DoA.	113
5.2	Description des données acoustiques expérimentales [SM05].	115
5.3	Directions d'Arrivées (DoA) des sources acoustiques sous-marines.	116
5.4	Estimation des puissances des sources acoustiques [SM05].	118
5.5	Statistiques de la simulation d'une source rayonnante de $\theta = 23.75^\circ$	120

NOTATIONS

N	Nombre des antennes élémentaires du réseau.
P	Nombre des sources ponctuelles rayonnantes.
d	Distance uniforme entre les éléments du réseau en mètre [m].
K	Nombre des échantillons acquis par le système du réseau.
L_λ	Longueur du réseau $L_\lambda = (N - 1)d$ en mètre [m].
θ_i	Azimut de la $i^{\text{ème}}$ source ponctuelle en degré [$^\circ$].
φ_i	Élévation de la $i^{\text{ème}}$ source ponctuelle en degré [$^\circ$].
c	Vitesse de propagation des ondes en mètre/seconde [m/s].
f_c	Fréquence porteuse des ondes en Hertz [Hz].
λ	Longueur d'onde des sources ponctuelles en mètre [m], $\lambda = c / f_c$.
ω	Fréquence angulaire des sources en [rad Hz], $\omega = 2\pi f_c$.
r_{0i}	Distance entre la $i^{\text{ème}}$ source et le réseau d'antennes.
\vec{r}_j	Position de la $j^{\text{ème}}$ antenne par rapport au repère.
\vec{k}_i	Vecteur d'onde de la $i^{\text{ème}}$ source ponctuelle.
k_i	Nombre d'onde de la $i^{\text{ème}}$ source en [rad/m], $k_i = \ \vec{k}_i\ $.
$F(\theta)$	Facteur du réseau d'antennes.
i_n	Courant de la $n^{\text{ème}}$ antenne en ampère [A].
ϕ_n	Phase électrique de la $n^{\text{ème}}$ antenne.
$a(\theta)$	Vecteur directionnel du réseau d'antennes, $a(\theta) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$.
$a(\theta, \varphi)$	Vecteur directionnel bidimensionnel du réseau d'antennes, $a(\theta, \varphi) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$.
$A(\theta)$	Matrice directionnelle du réseau d'antennes, $A(\theta) \in \mathbb{C}^{N \times P}$.
$A(\theta, \varphi)$	Matrice directionnelle bidimensionnelle du réseau d'antennes, $A(\theta, \varphi) \in \mathbb{C}^{N \times P}$.
Ω	Domaine angulaire d'observation du réseau d'antennes, $\Omega = [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$.
$f(\theta)$	Fonction de localisation angulaire du réseau.
$f(\theta, \varphi)$	Fonction bidimensionnelle de localisation angulaire du réseau bidimensionnel.
$X(t)$	Matrice des signaux complexes du système d'antennes en volt [V], $X(t) \in \mathbb{C}^{N \times K}$.
$s_i(t)$	Signal de la $i^{\text{ème}}$ source ponctuelle en volt [V].
$n_j(t)$	Bruit au niveau de la $j^{\text{ème}}$ antenne en volt [V].
$x_j(t)$	Signal complexe de la $j^{\text{ème}}$ antenne en volt [V].
σ_i^2	Puissance de la $i^{\text{ème}}$ source ponctuelle en watt [W].
σ^2	Puissance du bruit additif en watt [W].
SNR	Rapport signal sur bruit en décibel [dB], $SNR = 10 \log_{10} (\sigma_i^2 / \sigma^2)$.
δ_{ij}	Symbole de Kronecker, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ ailleurs.
$\delta(\tau)$	Impulsion de Dirac.
$\langle \cdot \rangle$	Valeur moyenne, équivalente à l'expression $E\{\cdot\}$.
$(\cdot)^T$	Opérateur du transposé.

$(.)^*$	Opérateur du conjugué.
$(.)^+$	Opérateur du transposé-conjugué.
$ a\rangle$	Vecteur colonne ou ket, $ a\rangle \in \mathbb{C}^{N \times 1}$.
$\langle a $	Vecteur ligne ou bra, $\langle a = a\rangle^+ \in \mathbb{C}^{1 \times N}$.
\mathbb{H}	Espace de Hilbert de dimension N .
Γ	Matrice spectrale du réseau d'antennes, $\Gamma \in \mathbb{C}^{N \times N}$.
Γ_{ss}	Matrice de corrélation des sources ponctuelles, $\Gamma_{ss} \in \mathbb{C}^{P \times P}$.
I_N	Matrice identité de dimension N , $[I_N]_{ij} = \delta_{ij}$.
e_i	La $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice identité I_N .
Γ_n	Matrice de corrélation du bruit, $\Gamma_n \in \mathbb{C}^{N \times N}$.
Γ_s	Matrice spectrale du réseau sans bruit, $\Gamma_s \in \mathbb{C}^{N \times N}$.
Γ_{FB}	Matrice spectrale transformée par l'opération FB du lissage spatial.
Γ_r	Matrice spectrale des valeurs réelles $\Gamma_r \in \mathbb{R}^{N \times N}$.
λ_i	La $i^{\text{ème}}$ valeur propre de la matrice Γ .
u_i	Le $i^{\text{ème}}$ vecteur propre de la matrice Γ .
$Tr(.)$	Trace de la matrice, $Tr(\Gamma) = \sum_{i=1}^N \Gamma_{ii}$.
λ_c	Valeur propre seuil.
σ_Γ	Spectre de la matrice Γ .
$\ \cdot\ _F$	Norme de Frobenius, $\ Q\ _F = \sqrt{Tr(Q^+Q)}$.
$(.)^\dagger$	Inverse généralisé, $Q^\dagger = (Q^+Q)^{-1}Q^+$.
U	Matrice unitaire, $U^+U = I_N$.
U_s	Sous espace source, $U_s \in \mathbb{C}^{N \times P}$.
U_n	Sous espace orthogonal (sous espace bruit), $U_n \in \mathbb{C}^{N \times N-P}$.
P_s	Projecteur en sous espace source, $P_s = U_s U_s^+$.
P_n	Projecteur en sous espace orthogonal, $P_n = U_n U_n^+$.
L	Nombre des essais Monte Carlo.
Π_N	Matrice d'échange de dimension N , $\Pi_N \Pi_N = I_N$.
Q_N	Matrice unitaire, $Q_N \in \mathbb{C}^{N \times N}$.
$\Delta\lambda$	Ecart type des valeurs propres de Γ .
V_n	Sous espace bruit.
Ψ_{ij}	Propagateur du $j^{\text{ème}}$ au $i^{\text{ème}}$ sous réseau.
Λ	Matrice diagonale, $\Lambda \in \mathbb{C}^{N \times N}$.
$h(\rho)$	Entropie de Von Neumann de la matrice densité ρ en nat [n], $h(\rho) = -Tr(\rho \log \rho)$.
$\mathcal{CN}(m, \sigma^2)$	Loi normale complexe.

ABBREVIATIONS

DoA	Direction of Arrival.
AoA	Angle of Arrival.
ToA	Time of Arrival.
HPBW	Half Power Beam Width.
ULA	Uniform Linear Array.
GPS	Global Positioning System.
SVEA	Slowly Varying Envelope Approximation.
SNR	Signal to Noise Ratio.
MVDR	Minimum Variance Distortionless Response.
MEM	Maximum Entropy Method.
EVD	Eigenvalue Decomposition.
SVD	Singular Value Decomposition.
MUSIC	Multiple Signal Classification.
HR	High Resolution.
PHD	Pisarenko Harmonic Decomposition.
RMSE	Root Mean Square Error.
AIC	Akaike Information Criterion.
MDL	Minimum Description Length.
FB	Forward Backward Averaging.
UPP	Unitary Partial Propagator.
UCA	Uniform Circular Array.
G-MEM	Generalized Maximum Entropy Method.
OPM	Orthonormal Propagator Method.
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance.
EG	Ermolaev and Gershman operator.
HWHM	Half Width at Half Maximum.
FWHM	Full Width at Half Maximum.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Au sens général, la localisation est le fait de mesurer la position d'une ou plusieurs cibles à un instant donné ou pendant une période bien déterminée, par un observateur lié à un référentiel choisi par ce dernier. Le processus de la localisation nécessite trois éléments principaux, l'observateur qu'il s'agit de l'être humain ou d'une machine, la cible ou la source à identifier et un repère sur lequel les mesures sont projetées. D'autre part, l'opération d'obtenir l'information spatiale de la cible fait intervenir généralement une onde qui peut être soit émise par la source est captée par l'observateur avec son instrument de mesure, soit ce dernier qui détecte les réflexions des ondes envoyées par la cible.

Les raisons pour lesquelles on a besoin d'obtenir les informations spatiales des cibles sont variées, par exemple il s'agit d'étudier leurs caractéristiques pour savoir leurs compositions, ou si on veut se déplacer d'une position à une autre, le fait de connaître la position de la destination permet de choisir le chemin le plus proche afin de ne pas dépenser de l'énergie, et ensuite construite une carte de la zone concernée pour de futurs besoins. Parmi les autres raisons, on cite par exemple l'étude des propriétés du milieu c'est à dire comment les radiations traversent ou progressent le milieu depuis la source jusqu'à l'observateur, et de savoir les phénomènes qui influencent ces radiations qu'elles soient de nature électromagnétique ou acoustique.

Dans d'autres applications, l'objectif de la localisation est de calculer la vitesse et/ou l'accélération de l'objet à détecter et de connaître sa nature du mouvement qui peut être périodique ou apériodique selon l'objet considéré. Le but de la localisation peut être aussi relatif à la sécurité, c'est à dire révéler l'existence d'une source quelconque et de savoir si elle présente un danger, un exemple très pratique est celui des applications militaires qui utilisent des antennes intelligentes, fixes ou tournantes pour identifier les positions instantanées des navires dans l'océan à titre d'exemple ou des avions qui volent à proximité.

L'objectif de cette thèse est l'élaboration et l'étude des algorithmes de haute résolution pour la localisation angulaire des source fixes, ponctuelles contrairement à des sources distribuées, et qui se situent à des distances infinies par rapport au réseau d'antennes, il s'agit de construire un spectre angulaire appelé fonction de localisation $f(\theta)$ à l'aide

de la matrice $X(t)$ des signaux reçus par un réseau d'antennes est de déterminer les pics de cette fonction sans tenir compte des puissances des sources. Les indices des pics de la fonction angulaire sont les seuls paramètres considérés, tandis que les amplitudes des pics peuvent ne pas avoir de signification physique, elles mesurent le pouvoir de résolution des sources, pour l'estimation des puissances d'autres approches sont nécessaires.

Dans le premier chapitre, on présente quelques applications des techniques de localisation angulaire dans les domaines scientifiques et civils, puis on montre l'avantage d'utilisation des combinaisons de plusieurs directions d'arrivées (*Direction of Arrival DoA*) pour obtenir une localisation complète des cibles sans utiliser la synchronisation qui est un mécanisme obligatoire pour les autres techniques basées sur le temps d'arrivée (*Time of Arrival ToA*). Après avoir défini l'objectif principal de la thèse qui concerne l'estimation des directions d'arrivées des sources, on explicite dans le deuxième chapitre, les expressions mathématiques des signaux reçus par un réseau d'antennes, qui se basent sur les lois fondamentales de propagation des ondes de type bande étroite. On élabore ensuite quelques propriétés des réseaux d'antennes uniformes puis on développe l'expression générale de la matrice de corrélation des signaux reçus, cette dernière étant une quantité importante pour l'analyse des caractéristiques des sources rayonnantes.

Dans le troisième chapitre, on présente une étude comparative entre plusieurs techniques conventionnelles des spectres DoA, qui sont divisées en des techniques de formation de voies, et celles des sous espaces orthogonaux. Ensuite on présente la méthodologie de la simulation Monte Carlo du système antennes-sources et on applique deux techniques de détection du nombre des sources rayonnantes, ce nombre est important pour la majorité des méthodes des sous espaces. Enfin, on étudie le cas des sources cohérentes et proches par la transformation unitaire de la matrice spectrale du réseau, appliquée à la méthode du propagateur partiel.

Dans le quatrième chapitre, on propose une généralisation de la méthode d'entropie maximale pour le cas de la localisation bidimensionnelle (azimut et élévation) en introduisant des notions de l'entropie quantique. Par la suite, on présente une nouvelle expression de l'opérateur du propagateur en utilisant la matrice orthonormale Q issue de la décomposition QR de la matrice spectrale du réseau. Ensuite, on présente une généralisation du propagateur vers l'ordre trois, quatre et cinq. Finalement, on propose une formule générale définie par le rapport n entre le nombre des éléments du réseau sur le nombre de sources, on montre qu'il est possible de générer $n(n + 1)/2 - 1$ versions d'opérateurs qui dépendent du niveau du bruit du système, ce qui donne une multitude du choix pour construire les spectres angulaires.

Dans le cinquième chapitre, on propose quelques fonctions matricielles non linéaires pour les réseaux d'antennes de grande dimension. Ces opérateurs, appliqués à la matrice spectrale du réseau, sont ajustés avec des paramètres qui permettent de discerner les valeurs propres afin d'obtenir une approximation du projecteur dans le sous espace orthogonal ou dans le sous espace signal. Premièrement, on présente l'opérateur gaussien qui nécessite la connaissance de la valeur propre minimale, puis on dérive une deuxième version basée sur l'opérateur exponentiel décroissant, finalement, on présente l'opérateur lorentzien défini par des paramètres extraits des statistiques des valeurs propres, ce dernier présente l'avantage de la complexité minimale du calcul.

Les résultats d'estimation des directions d'arrivées obtenus sont basés sur les configurations du système où le nombre des antennes N est strictement supérieur au nombre des sources P , ces dernières ont presque la même puissance de radiation et sont localisées spatialement par des directions d'arrivées dont leurs différences sont au moins 4° . Les statistiques des simulations réalisées indiquent qu'à partir de l'état où les puissances des sources dépassent légèrement le triple de la puissance du bruit perturbateur, la racine carrée de l'erreur quadratique, entre les valeurs estimées et les positions exactes, ne dépasse pas 1° . Cette valeur du seuil de la puissance correspond au rapport signal sur bruit égal à 5 dB. L'évaluation du pouvoir de résolution des méthodes étudiées et proposées est faite sur des données de simulation Monte Carlo et sur quelques signaux réels des sources acoustiques sous marines. Nous clôturons ce mémoire par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

DIFFÉRENTS PRINCIPES DE LA LOCALISATION

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente brièvement quelques applications des techniques de localisation avec des réseaux d'antennes. On met en valeur l'intérêt d'utiliser les techniques de localisation en commençant par le système naturel du sens de l'ouïe, les stations de télécommunications, les stations géophysiques, l'acoustiques sous marin et la radioastronomie. On présente ensuite quelques propriétés intéressantes des traitements d'antennes, puis on explique comment on peut complètement localiser des cibles en combinant plusieurs directions d'arrivées tout en différenciant cette méthode avec le principe basé sur les temps d'arrivées. Enfin, on explique la nécessité d'introduire les méthodes des directions d'arrivées en citant différents phénomènes d'interférences lors de la propagation des ondes.

1.2 Système naturel de localisation

L'étude du système auditif, qui est un système sensoriel du sens de l'ouïe, était parmi les premiers résultats qui ont mis en preuve le mécanisme du cerveau pour la localisation des sources sonores. En effet, la théorie du duplex proposée par Lord Rayleigh [Ray07], stipule que le cerveau humain peut localiser une source qui vibre et produit des ondes acoustiques, à l'aide de nos oreilles dont les positions sont symétriques par rapport à l'axe parallèle qui passe par le centre de la tête, les fronts d'ondes acoustiques arrivent au premier oreille puis au deuxième avec une différence du temps (Interaural Time Difference ITD) et/ou avec une différence d'intensité (Interaural Level Difference ILD), à l'aide de ces deux quantités, le cerveau humain peut déduire la direction de propagation de la source [Ray07].

D'après la théorie, la différence du temps d'arrivée est valable pour des fréquences in-

férieures à 1.5 kHz, tandis que la différence d'intensité est valable pour des fréquences supérieures à 1.5 kHz. A noter que les deux mécanismes ITD et ILD peuvent se compenser.

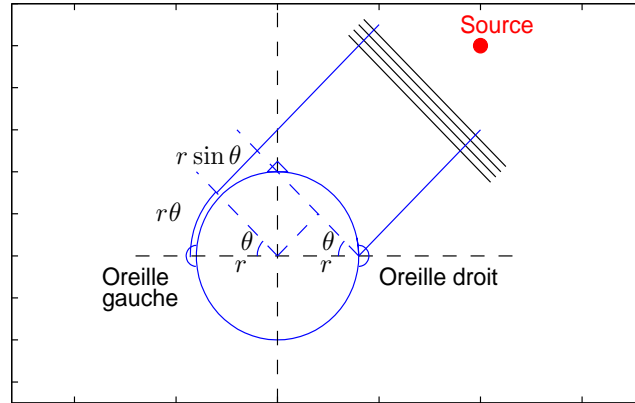


FIGURE 1.1 – Diagramme De la localisation d'une source sonore en utilisant la formule de Rayleigh.

En effet, une expérience a été réalisée par Woodworth en 1938 [AH14], a vérifié la théorie en utilisant une sphère solide pour modéliser la forme de la tête et en mesurant l'indice ITD en fonction de la fréquence et de l'azimut. La figure 1.1 illustre la différence de marche des fronts d'ondes.

Une source sonore vibre dans un plan horizontal faisant un angle θ avec l'oreille (microphone) droit relativement à l'axe y , et avec une vitesse de $c = 343$ m/s. Le front d'onde arrivant au premier capteur de droite doit parcourir une distance supplémentaire pour arriver au deuxième élément, cette distance est donnée par $d = r(\theta + \sin \theta)$, la relation entre la vitesse, la distance et la période est $c = d/\delta t$, ainsi la relation de l'indice ITD est donnée par :

$$ITD = \delta t = \frac{r}{c}(\theta + \sin \theta) \quad (1.1)$$

La source génère une sinusoïde de fréquence $f = 1500$ Hz, une simulation d'enregistrement des signaux des deux microphones est donnée par la figure 1.2,(a) avec un retard de $\delta t = 1.51 \times 10^{-4}$ s.

La déduction du déphasage temporel entre les deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ se fait en général par moyen de corrélation $f(x_1(t), x_2(t), \tau)$ (voir annexe). La figure 1.2, (b) représente la fonction de corrélation. L'indice ou l'abscisse de la valeur maximale de $f(\tau)$ est la durée du retard temporel δt .

Si la fréquence est supérieure à 1500 Hz, la longueur d'onde correspondante devient plus courte que la distance entre les oreilles ce qui fait que l'indice qui permet la localisation est le ILD.

Cet exemple du système auditif est valable pour les êtres humains ainsi que les animaux, il met en valeur l'intérêt de la localisation des sources sonores.

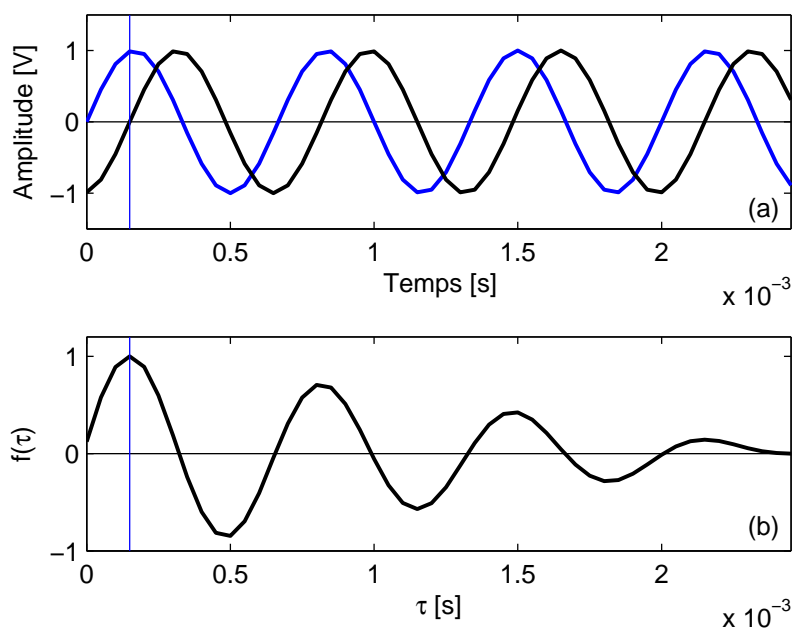


FIGURE 1.2 – Simulation des signaux périodiques de fréquence $f = 1500$ Hz, arrivant à deux microphones avec un délai $\delta t = 1.51 \times 10^{-4}$ s. (a) représentation temporelle, (b) fonction de corrélation.

Afin de présenter d'autres motivations sur ce sujet de recherche, on présente dans ce qui suit quelques exemples des systèmes artificiels.

1.3 Télécommunications

En télécommunications civiles et militaires, la localisation des cibles [LAS02] a un grand intérêt pour l'identification des cibles, ce processus est effectué à l'aide d'une station équipée d'un grand nombre d'antennes connectées avec une centrale pour analyser les ondes transmises et reçues. En général, on considère une station de télécommunications qui doit être en communication avec une cible, il s'agit par exemple d'une autre station mobile, les deux stations envoient et reçoivent des signaux. En premier lieu une transmission d'une onde depuis la station fixe d'une façon isotrope assure que la cible peut détecter le rayonnement, et à son tour elle envoie une onde omnidirectionnelle vers la station fixe pour la confirmation de l'établissement du lien de communication, cette situation est illustrée par la figure 1.3.

Or cette manière de transmission a deux inconvénients majeurs : Le premier est la dépense de l'énergie électromagnétique dans toutes les directions alors que le récepteur se positionne dans une direction bien déterminée, le deuxième est la pollution électromagnétique engendrée dans l'environnement. Aujourd'hui, presque tout le spectre fréquentiel est exploité par tous les services de communications civiles, militaires et scientifiques (astronomique par exemple). Ainsi, afin de diminuer cette pollution et de minimiser les interférences entre différents services, une focalisation de l'énergie électromagnétique de-

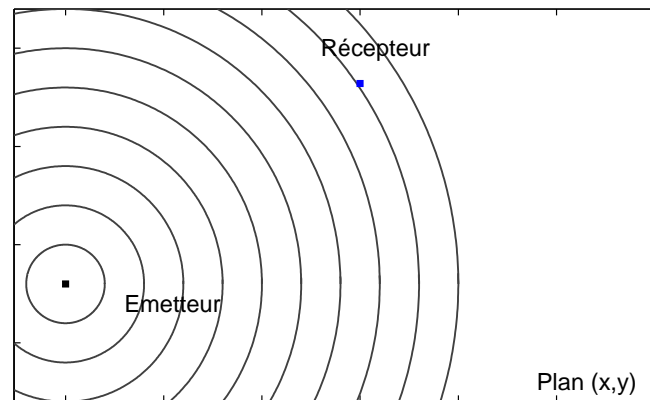


FIGURE 1.3 – Transmission omnidirectionnelle entre une station de communications fixe (émetteur) et une station mobile (récepteur).

puis l'émetteur vers le récepteur semble une solution optimale. Dans ce cas, la station étant composée d'un réseau d'antennes, il est possible avec un traitement électronique de pointer les radiations vers la position précise de la cible. Cette opération est effectuée après avoir analysé les ondes reçues depuis la cible. Ce principe est représenté dans la figure 1.4 avec une focalisation vers la direction $\theta_0 \simeq 34^\circ$.

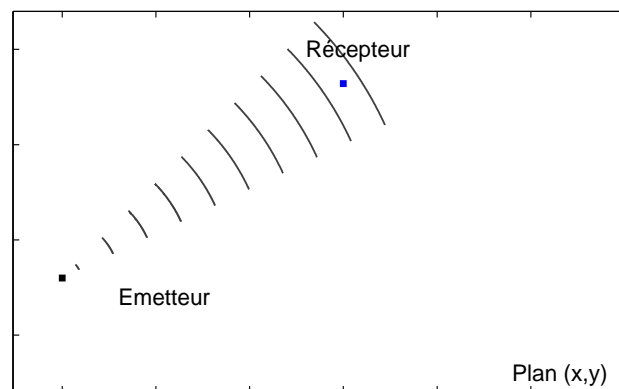


FIGURE 1.4 – Focalisation des radiations depuis la station fixe vers le récepteur.

Du point de vue mathématique, chaque élément (antenne) du réseau possède sa phase, alors en appliquant à chaque élément un poids w_i convenable on peut envoyer les radiations vers la position souhaitée. Pour le champ rayonné E , il s'agit de la fonction du sinus cardinal :

$$E(\theta) = \text{sinc}(\pi(\theta - \theta_0))$$

L'avantage majeur de la localisation, comme le système naturel auditif qu'on a présenté dans l'exemple précédant, est le mécanisme de l'estimation de la direction d'arrivée de la cible, puis de la formation des faisceaux vers cette dernière, ce qu'on appelle aussi la

formation de voies (*Beamforming*). La figure 1.5 est un exemple d'une station de réseau d'antennes utilisée pour la communication.



FIGURE 1.5 – Une station de base pour la communication civile, composée de plusieurs antennes.

Les premiers essais de la formation de voies étaient pendant la période de la seconde guerre mondiale [SM97], ils étaient basés sur la rotation mécanique des antennes et lorsque l'énergie détectée est maximale, la direction correspondante indique la position de la cible. Après, les méthodes de rotation du champ rayonné électroniquement ont donné naissance à des méthodes dites de haute résolution pour identifier les directions des cibles [Gro05, vdVOD92].

1.4 Géophysique

L'un des phénomènes géophysiques que nous observons sur la surface de la terre, est le tremblement de la terre qui présente un danger pour la vie humaine. La naissance de différents types d'ondes comme celles de surface ou de compression du volume peuvent influencer les stabilités des bâtiments sur la surface ce qui conduit à la possibilité de leurs destructions. Pour cela, des services de stations géophysiques sont mises en service pour analyser et observer les variations dynamiques de ces ondes, dont le but principal est de localiser la source des explosions sismiques. Après avoir capté ces ondes par des réseaux d'antennes sismiques, plusieurs traitements sont appliqués pour identifier, séparer et localiser les différents types de perturbations [SGK96]. Les éléments d'un réseau d'antennes sismique sont appelés géophones, ils ont en général une forme tubulaire et permettent de mesurer la vitesse des ondes sismiques, ils sont aussi utilisés dans d'autres domaines à savoir : L'étude de vibrations des machines et l'exploration pétrolière. La figure 1.6 représente un exemple du réseau des géophones.

Ces types d'antennes sont utilisés dans le cadre de la prospection sismique. Les ondes sismiques obéissent aux mêmes lois de la propagation des ondes électromagnétiques, des traitements des données reçues par les géophones, basés sur les principes d'interférométries permettent d'obtenir une vision globale des structures géologiques. En général plusieurs méthodes sont exploitées comme celles basées sur les phénomènes de la ré-



FIGURE 1.6 – Réseau de géophones du domaine sous marin disposés dans le laboratoire.

flexion et de la réfraction des ondes sismiques [SGK96]. Ces processus sont observés aux interfaces des couches géologiques, les résultats des traitements des données permettent d'estimer la position de la source qui génère les perturbations et permettent d'estimer la vitesse de propagation des ondes [SGK96].

1.5 Acoustique sous marine

Les communications dans le domaine du sous marin, qu'il s'agit des applications militaires, civiles ou scientifiques, font appel à des techniques de localisation des objets fixes ou mouvants dans la mer [ShWHb12]. Les premières tentatives de concevoir un système de localisation acoustique étaient basées sur des mécanismes très simples, en 1490 Léonard de Vinci a mentionné que si on arrête notre bateau et on place un tube cylindrique creux dans l'eau et l'autre extrémité dans l'oreille, on entend le mouvement des bateaux qui bougent à des grandes distances [FF98]. L'évolution technologique du domaine des communications sous marines a permis l'invention des antennes acoustiques [Lur98], dédiées à cette mission, appelées hydrophones dont la figure 1.7 représente un exemple.

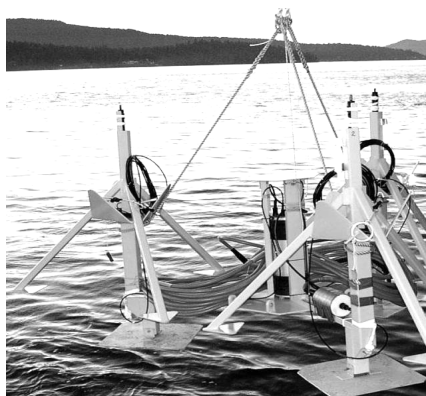


FIGURE 1.7 – Réseau d'hydrophones qui sont en train d'être immergés dans la mer.

Les ondes électromagnétiques constituent le moyen de communications pour les systèmes de télécommunications et télédétection à travers les satellites, parce qu'elles se propagent dans le vide et dans l'atmosphère. Au contraire, dans la mer qui couvre 70% de la surface de la terre, les ondes électromagnétiques ne sont pas utilisées comme moyen de transport des informations parce que l'eau de la mer qui se caractérise par sa forte conductivité, conduit à leurs atténuations importantes ce qui les rend inopérantes. Ce qui a mené vers la recherche d'autres moyens pour transporter les informations sous la mer. Ce sont les ondes acoustiques qui sont utilisées comme moyen de transport dans le domaine sous marin du SONAR (Sound Navigation and Ranging).

La propagation des ondes sonores est toutefois dépendante du milieu de propagation. Les signaux transmis sont atténués à cause de l'absorption des ondes dans l'eau, de la variation de la célérité du son, de la réflexion des signaux sur les interfaces et de l'existence des trajets multiples qui génèrent des sources d'ondes secondaires, qui à leurs tours produisent des interférences parasites [Lur98].

Parmi les autres facteurs qui contribuent à l'atténuation des ondes est le changement des fréquences lorsque les systèmes ou les cibles sont en mouvement, les fréquences des signaux reçus subissent un changement dû à l'effet Doppler [Lur98]. Le mouvement des organismes vivants, la pluie et l'agitation surfacique de l'eau dû au trafic maritime sont parmi les causes qui génèrent un bruit perturbateur qui déforme les signaux transmis lors de leurs réception [Lur98]. Des traitements des signaux reçus sont nécessaires pour effectuer les opérations du filtrage, séparation des sources et localisation des cibles qui se caractérisent par leurs dimensions, bandes de fréquences et des angles d'arrivées.

Le principe de localisation est illustré par la figure 1.8, les ondes sonores rayonnées par une source de petite dimension sont captées par un réseau d'hydrophones qui sont immergés dans l'eau, d'un système SONAR embarqué dans un bateau, ces ondes captées sont perturbées par un bruit de différentes sources sous l'eau et par des réflexions de surface et du fond de la mer [Lur98].

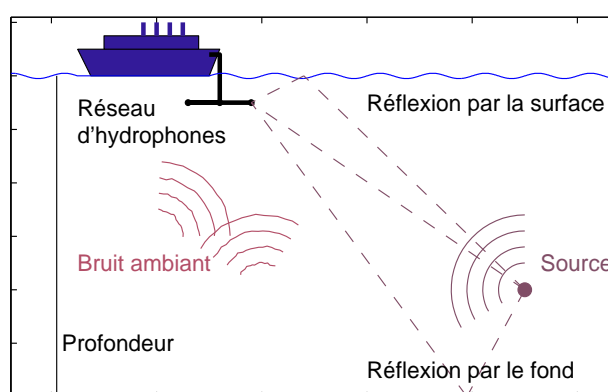


FIGURE 1.8 – Schéma illustratif du principe de localisation par un système SONAR.

Le système SONAR de localisation acoustique est l'équivalent du système RADAR (Radio Detection and Ranging) pour les ondes électromagnétiques. Le système est constitué d'un réseau d'hydrophones immergés dans l'eau, le mécanisme de détection est basé sur deux concepts : Soit le système diffuse des ondes et récolte les échos réfléchis par les cibles, soit que le système est opérationnel en mode de surveillance et analyse les signaux reçus générés par les bruits rayonnés par les cibles [Lur98]. Dans le premier cas, les signaux issus du système sont de forte puissance, et les versions des signaux réfléchis sont atténuées et bruitées, un traitement est nécessaire pour affaiblir les puissances des bruits associés afin de caractériser spatialement la cible. Les algorithmes de traitement d'antennes pour l'identification des directions d'arrivées (DoA) sont implémentés dans le système afin de localiser la source, mesurer le temps de propagation des signaux et d'estimer la puissance sonore de la cible [Lur98].

1.6 Radioastronomie

Un autre domaine scientifique, dont l'utilisation des techniques de localisation des sources en champ lointain est nécessaire, est la radioastronomie, qui est une branche de l'astrophysique qui étudie les propriétés des objets célestes qui émettent des radiations qui se propagent dans l'univers et qui arrivent à la terre.

En 1932, Karl Jansky a découvert l'existence des ondes radio [Fel10] qui provenaient de la voie lactée et qui perturbaient les communications au niveau transatlantique. Cette découverte a ouvert une autre voie de l'observation astronomique en utilisant les radiofréquences. En 1938, Grote Reber a construit le premier radiotélescope [Fel10] opérationnel pour les sources cosmiques, ce radiotélescope a permis de découvrir plusieurs signaux cosmiques de basse énergie et d'établir une carte radiofréquence du ciel [Fel10]. Le système du radiotélescope est un groupement de réseaux d'antennes qui collecte les données des ondes provenant de l'univers puis les analyse afin de révéler l'existence des sources cosmiques, de vérifier les théories proposées de l'astrophysique, d'étudier l'évolution des galaxies, détecter l'énergie noire, trouver l'origine du magnétisme cosmique, etc. La figure 1.9 est un exemple de radiotélescope SKA (*Square Kilometer Array*) construit avec différents types d'antennes [Fel10].

Les signaux captés par les radiotélescopes sont considérés comme une combinaison des signaux provenant des sources cosmiques, des interférences des ondes radio terrestres et du bruit additif. La mission principale des systèmes d'analyse implémentés dans les radiotélescopes est : Le filtrage des données, la séparation de différentes sources en discernant entre les signaux utiles des sources cosmiques et les interférences à l'aide des propriétés statistiques de chaque type de source. En effet, les signaux d'ori-

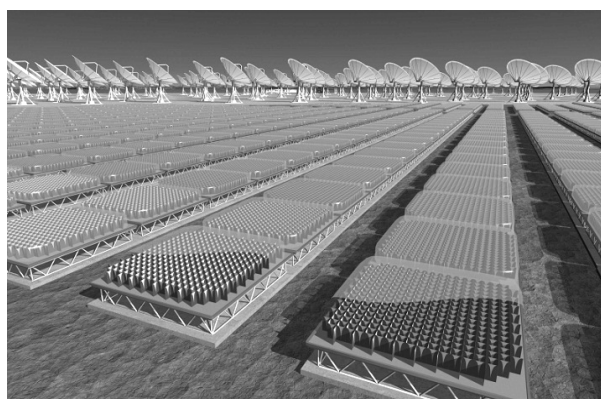


FIGURE 1.9 – Zone centrale du radiotélescope Square Kilometer Array (SKA) d'un diamètre allant de 5 à 10 Km constitué des groupements de réseaux d'antennes opérants dans la bande de fréquences 70 MHz-1200 MHz [Fel10].

gine cosmique sont modélisés par des processus aléatoires, ils sont gaussiens, blancs et stationnaires [Fel10], tandis que la plupart des signaux des télécommunications sont cyclostationnaires, cette différence entre les deux types permet de les différencier afin d'obtenir des résultats fiables sur l'étude des sources et de construire des cartes du ciel avec une haute résolution.

Parmi les caractéristiques des sources cosmiques ou des interférences est leurs directions d'arrivées (DoA), le traitement spatial des interférences par les radiotélescopes permet, après filtrage spatial des données reçues, d'estimer les angles d'arrivées de différentes sources en utilisant des méthodes de sous espaces extraits de la matrice de corrélation des données. On constate que la localisation spatiale de la provenance des signaux utiles et/ou des interférences est une étape importante pour le traitement des données des radiotélescopes [Fel10].

En plus des exemples présentés, il existe d'autres applications des techniques de localisation angulaire, on peut déjà constater l'avantage qu'apportent ces techniques dans plusieurs domaines. D'après les cas traités, le processus d'analyse des données nécessite au moins deux éléments récepteurs/transmetteurs ou détecteurs afin d'exploiter l'évolution des fronts d'ondes sur des distances de l'ordre des longueurs d'ondes correspondantes [CGY10, Gro05, FSB08]. En effet, au fur et à mesure que le nombre des éléments du réseau détecteur augmente, on obtient des résultats plus fins et précis, ainsi cette relation entre le nombre des éléments et la robustesse des résultats se traduit par la variation du champ rayonné par le réseau, ce qu'on appelle le diagramme du rayonnement du réseau, c'est une représentation spatiale de la répartition du champ local du réseau dans les directions de l'espace, cette répartition n'est que la somme des contributions de chaque élément du réseau [Gro05]. La connaissance de la propriété de répartition du champ du

réseau est, dans la majorité des cas, nécessaire afin de prédire à quel niveau de résolution on peut atteindre quand on traite les ondes captées.

1.7 Traitement d'antennes

1.7.1 Élément radiatif

A l'heure actuelle, tous les types de communications sans fils sont valables grâce aux antennes, ces dernières jouent le rôle de l'interface entre le milieu de transmission (l'atmosphère par exemple) et les appareils électroniques associés au système de communication [Gro05]. Généralement, une antenne est un appareil électronique [CGY10] destiné à transmettre et recevoir des ondes électromagnétiques ou acoustiques. L'antenne transmetteur transforme les tensions électriques en des ondes qui se propagent dans le milieu, tandis que l'antenne réceptrice capte les ondes et les transforme en des tensions électriques qui sont ensuite traitées par les appareils électroniques du système [CGY10, Gro05, God97]. Chaque antenne a ses propriétés propres, et pour étudier les paramètres d'un système de communication, il est nécessaire de faire une analyse des propriétés des deux parties du système émetteur/récepteur. Heureusement il est possible d'extraire les paramètres d'une antenne réceptrice à partir de ses fonctions de transmission [CGY10], ces fonctions sont déduites par des tests dans le laboratoire, plus précisément dans des chambres anéchoïques.

Pour un seul élément radiatif, il a été découvert que l'énergie électromagnétique rayonnée dans l'espace n'est pas uniforme [CGY10], il existe des directions privilégiées où l'intensité de l'énergie est plus concentrée, en plus, les ondes de différentes fréquences dans la gamme choisie ne sont pas toutes réparties de la même manière. Quelques fréquences sont efficacement transmises dans le milieu considéré que les autres, par conséquent plusieurs fonctions caractéristiques sont nécessaires pour mesurer l'efficacité d'une antenne qu'il s'agit de type électromagnétique ou acoustique. La référence des mesures de ces fonctions sont relatives à une antenne parfaite, son rayonnement est uniforme dans toutes les directions ou isotrope comme illustré dans la figure 1.10.

Parmi ces fonctions, la directivité qui est le rapport entre l'intensité de la puissance rayonnée par l'antenne dans une direction donnée sur celle rayonnée par l'antenne isotrope dans la même direction quand les deux antennes fonctionnent avec la même puissance. En général on utilise le terme de la directivité pour des antennes dont la puissance est plus forte dans une zone étroite de l'espace, contrairement à l'antenne isotrope. Le diagramme du rayonnement associé à une antenne est une fonction géométrique de la répartition du champ rayonné dans l'espace, pour une antenne isotrope cette fonction n'est qu'une sphère comme celle présentée dans la figure 1.10. Chaque type d'antenne possède son propre diagramme de rayonnement de telle sorte que les directions dont le champ rayonné est plus puissant sont représentées par des rayons plus longs [CGY10]. Le gain

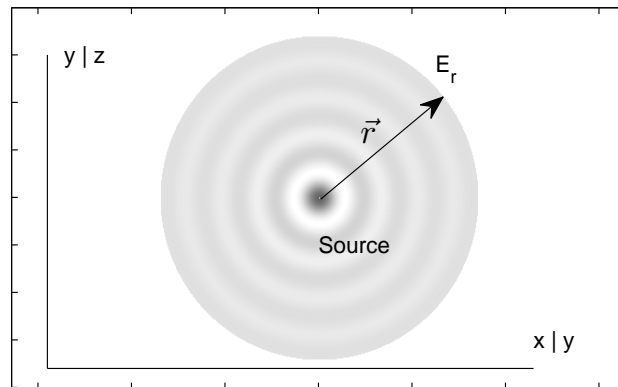


FIGURE 1.10 – Rayonnement isotrope d’une antenne du point de vue théorique.

$g(\theta)$ est aussi un facteur important pour caractériser une antenne, c’est le produit de la directivité par l’efficacité. Cette dernière est la mesure du rapport de la puissance rayonnée par la puissance d’alimentation du système électronique.

Parmi les autres caractéristiques qui nous intéressent pour l’étude des directions d’arrivée, est la fréquence de fonctionnement. En effet chaque antenne peut être modélisée par un circuit équivalent constitué d’une combinaison d’inductances, résistances et capacités [CGY10]. L’étude de ce circuit équivalent permet de trouver la répartition de la puissance en fonction de la fréquence, ce qui donne la bande passante de l’antenne, la figure 1.11 illustre la fréquence de résonance d’une antenne.

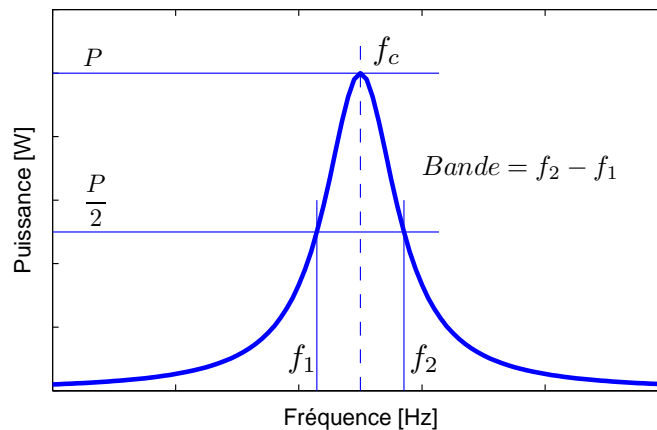


FIGURE 1.11 – Puissance d’une antenne en fonction de la bande passante fréquentielle.

La largeur de la bande est définie par les deux fréquences qui correspondent au demi du maximum de la puissance, $BW = f_2 - f_1$, la puissance rayonnée est prise en compte pour l’antenne si la fréquence appartient à la gamme $[f_1, f_2]$. Souvent, pour détecter une cible avec un réseau d’antennes il faut spécifier la configuration relative à la bande de fréquences, c’est à dire qu’il faut avoir une information sur les fréquences des ondes de la cible à localiser. Pour des raisons de simplification, comme on verra dans le chapitre suivant, on considère que la fréquence de résonance f_c de tous les éléments radiatifs du

réseau est la même fréquence porteuse de la cible rayonnante. Un réseau d'antenne est une combinaison de plusieurs éléments radiatifs connectés par un seul système électronique, la principale propriété du réseau est le facteur du réseau [Gro05].

1.7.2 Facteur du réseau

La répartition finale du champ rayonné par un réseau d'antenne est la somme des répartitions élémentaires de chaque antenne, on présente dans cette section les différentes variables qui contribuent à la répartition du champ résultant. Afin de simplifier l'étude, on calcule le facteur du réseau par rapport à l'azimut θ . On considère un nombre N d'éléments, chaque antenne est repérée par son courant d'excitation i_n et sa phase électrique ϕ_n pour $n = \{1, \dots, N\}$. Les antennes sont identiques et disposées le long d'une ligne avec une distance d de l'ordre de la longueur d'onde correspondante à leur fréquence opérationnelle f_c . On considère que la rayonnement de chaque élément est omnidirectionnel et que son gain est unitaire $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, $g_n(\theta) = 1$, le facteur du réseau est donné par la relation [Gro05] :

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^N i_n e^{j((n-1)kd \cos(\theta) + \phi_n)} \quad (1.2)$$

Avec $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde. On étudie les variations des paramètres qui influencent la répartition du $F(\theta)$, on commence par les phases électriques ϕ_n . La figure 1.12 représente neuf réalisations avec des phases aléatoires $\phi_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Le vecteur $\Phi_i \in \mathbb{R}^{1 \times 10}$, pour l'indice $i = 1, \dots, 9$, représente la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice des phases aléatoires $\Phi \in \mathbb{R}^{9 \times 10}$ donnée comme suit :

$$\Phi = \begin{pmatrix} -0.58 & -0.76 & -2.17 & -0.20 & 0.29 & 0.20 & 0.23 & -0.28 & -0.07 & -1.56 \\ 1.57 & -0.25 & 0.23 & -0.17 & -0.84 & -0.71 & -1.40 & 1.03 & 0.69 & -0.39 \\ -0.51 & -1.37 & -0.73 & 0.21 & -2.53 & 0.75 & 0.65 & -0.36 & -0.79 & -0.14 \\ 1.22 & -1.26 & -1.77 & 1.68 & -2.37 & -1.64 & -2.55 & 1.34 & -0.80 & -2.33 \\ 1.58 & -0.89 & 0.44 & 0.11 & -0.34 & -1.05 & -0.53 & 1.00 & -0.00 & -1.35 \\ -2.08 & 0.58 & 0.58 & 0.65 & -0.61 & -0.25 & 3.20 & 0.21 & -0.72 & -1.81 \\ 2.94 & 1.84 & 0.85 & 2.08 & -0.40 & -1.29 & 0.43 & -0.29 & -1.49 & 1.10 \\ 1.35 & 1.34 & -0.26 & -0.33 & -1.41 & 1.23 & -1.14 & 0.25 & 0.87 & -0.14 \\ 1.05 & -0.49 & -0.41 & 0.73 & 0.22 & 1.49 & 0.88 & -0.19 & -0.26 & 1.11 \end{pmatrix}$$

On remarque, d'après la figure 1.12, que les phases électriques ont un rôle très important pour focaliser le champ total du réseau même lorsque toutes les antennes sont identiques et omnidirectionnelles. Les distributions aléatoires ont généré des facteurs dont les intensités des énergies rayonnées sont réparties dans plusieurs directions. Afin de concentrer le faisceau principal vers la direction $\theta_0 = 0^\circ$, on impose la condition des phases électriques nulles $\phi_n = 0$ et on simplifie l'expression de $F(\theta)$ avec des amplitudes des courants $i_n = 1$ A, en utilisant la somme de la série géométrique (voir annexe), l'équation (1.2) devient :

$$F(\theta) = e^{j\frac{(N-1)kd\cos(\theta)}{2}} \frac{\sin(\frac{N}{2}kdcos(\theta))}{\sin(\frac{1}{2}kdcos(\theta))} \quad (1.3)$$

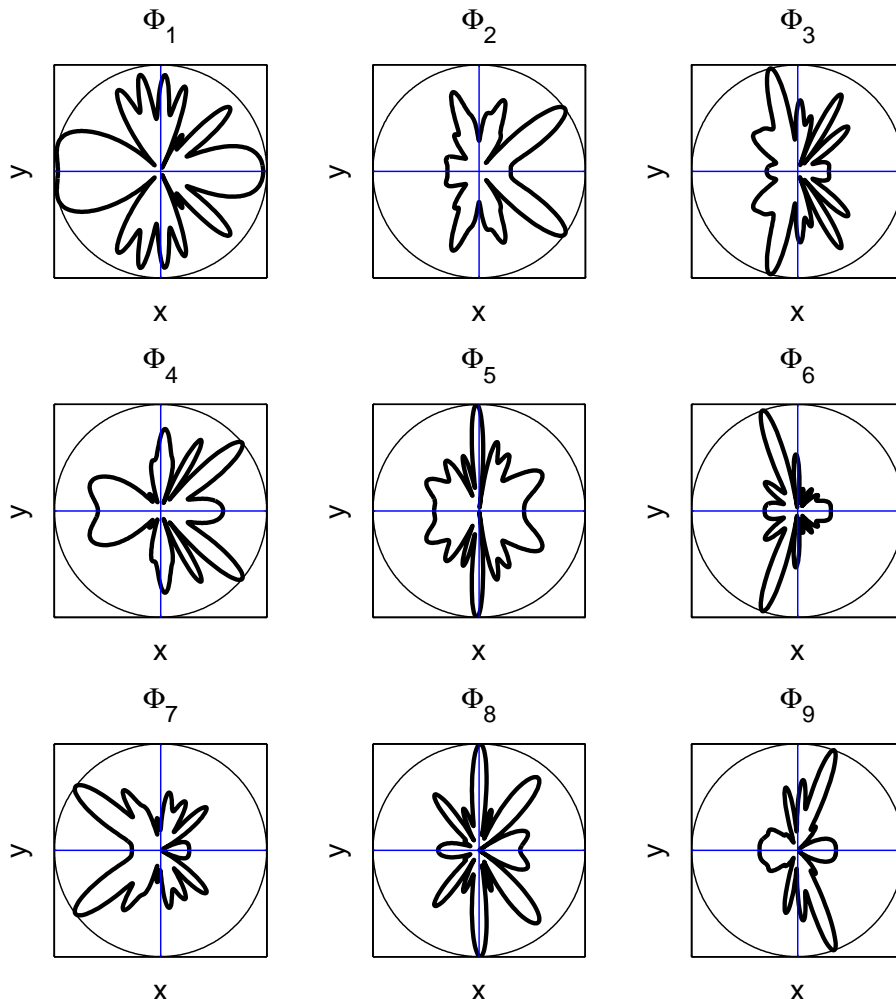


FIGURE 1.12 – Facteur du réseau $|F(\theta)|$ avec des phases électriques aléatoires pour la configuration $(N = 10, i_n = 1A, d = \lambda/2, \phi_n \sim \mathcal{N}(0, 1))$.

La valeur absolue du facteur du réseau normalisé pour la configuration des phases nulles est :

$$|F(\theta)| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(\frac{N}{2}kdcos(\theta))}{\sin(\frac{1}{2}kdcos(\theta))} \right| \quad (1.4)$$

On fait varier le nombre des antennes N et la distance uniforme $d \in [0, \lambda]$ et on trace le facteur du réseau, la figure 1.13 représente différentes configurations. L'augmentation du nombre N affine la résolution des lobes principaux, ils deviennent plus étroits et le réseau devient plus directive, d'autre part, on remarque dans la figure que si la distance entre les éléments est supérieure au demi de la longueur d'onde λ , les lobes secondaires (*Grating Lobes*) apparaissent. La meilleure configuration parmi les différents cas présentés (1.13) est celle de la position (3, 2) qui correspond à $|F(\theta)| = f(N = 20, d = \frac{\lambda}{2}, i_n = 1A, \phi_n = 0)$.

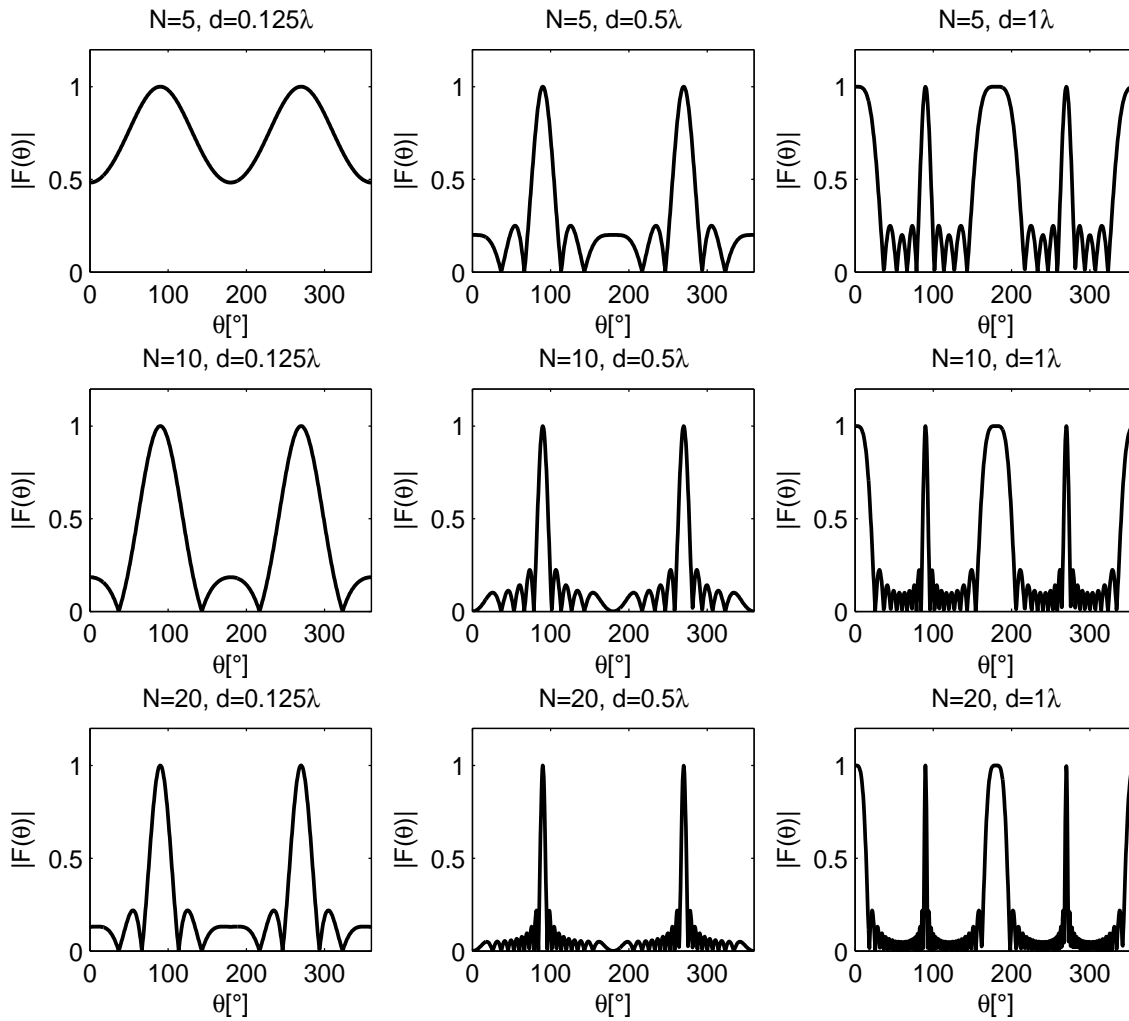


FIGURE 1.13 – Facteur du réseau $|F(\theta)|$ avec des phases électriques nulles pour les différentes configurations ($N = [5, 10, 20]$, $i_n = 1A$, $d = [0.125\lambda, 0.5\lambda, 1\lambda]$, $\phi_n = 0$).

On peut déjà remarquer dans le graphe de la position (3, 2) que $|F(\theta)|$ est symétrique par rapport à deux intervalles $[0, \pi]$ et $[\pi, 2\pi]$.

On élimine le deuxième intervalle pour l'analyse de $|F(\theta)|$, en effet on verra dans le chapitre suivant que ce réseau qui est linéaire et avec une distance uniforme présente deux types d'ambiguïté, ainsi le domaine angulaire est restreint au premier intervalle $[0, \pi]$, le facteur $|F(\theta)|$ pour ce réseau basique est représenté par la figure 1.14.

La répartition du champ est caractérisée par un lobe principal, des lobes secondaires et par la largeur à mi hauteur du lobe principal (*Half Power Beam Width*), ce type du réseau est appelé *Broadside array* dont la valeur maximale est atteinte quand $\theta = 90^\circ$, la largeur du lobe principal est donnée par la formule suivante [R.S05] :

$$\theta_{HPBW} \simeq \frac{\lambda}{L_\lambda} = \frac{\lambda}{d(N-1)} \quad (1.5)$$

avec $L_\lambda = d(N-1)$ est la longueur du réseau où elle est peut être approximée par dN

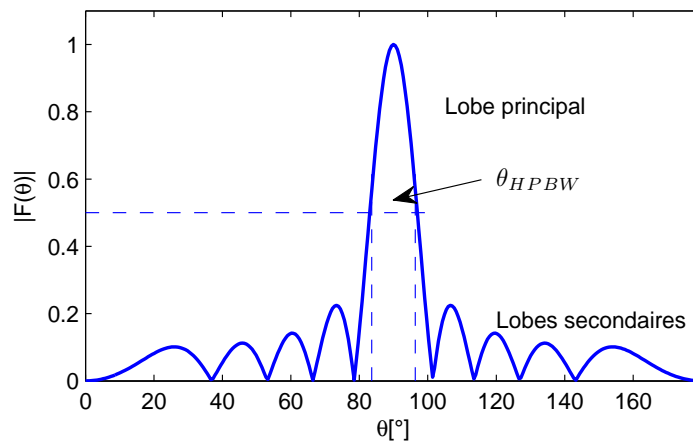


FIGURE 1.14 – Facteur du réseau d’antennes uniforme linéaire

$$|F(\theta)| = f(N = 20, d = \frac{\lambda}{2}, i_n = 1A, \phi_n = 0).$$

quand le nombre d’antennes est grand $N \gg 1$. Il faut noter que chaque type du réseau possède ses propres caractéristiques basées sur les types des éléments constitutifs et des paramètres qu’on vient de citer ci-dessus, ce sujet étant large, on se limite au cas du réseau uniforme linéaire (*Uniform Linear Array*) qu’on présentera dans le chapitre suivant. On illustrera quelques propriétés relatives à sa matrice caractéristique qui joue un rôle très important pour l’analyse des directions d’arrivée.

D’après cette partie qui traite brièvement le traitement d’antenne, on peut déjà constater que les techniques de localisation par des réseaux d’antennes se basent sur une dérivée du facteur du réseau $F(\theta)$. C’est à dire une fonction semblable. En choisissant une zone de balayage angulaire Ω , les résultats de ces techniques sont des fonctions angulaires $f(\theta)$ dont les valeurs maximales indiquent les positions des sources, or une localisation parfaite est déterminée par les trois variables d’espace du référentiel cartésien (x, y, z) ou des coordonnées sphériques (r, θ, φ) , et ces fonctions angulaires ne permettent qu’une localisation partielle $f(\theta)$, soit les indices θ_i des cibles ponctuelles.

La solution en effet existe si on combine des résultats de localisation provenant de plusieurs réseaux, ou si on mesure les temps d’arrivée (*Time of Arrival ToA*) des signaux provenant des sources par un seul réseau, or cette dernière méthode nécessite une synchronisation entre les sources émettrices et le réseau [Guo07].

Dans la plupart des cas la synchronisation n’est pas toujours assurée, sauf pour des systèmes industrialisés où les transmetteurs et les récepteurs sont conçus pour avoir un mode de fonctionnement déterminé par les constructeurs. Dans d’autres cas, on ne peut pas déterminer exactement la date d’émission des signaux. Le problème du temps d’arrivée exploite l’information de vitesse de propagation des ondes afin de déduire la distance parcourue entre les deux parties de communications. Donc les principes de localisation sont aussi basés sur la diversité spatio-temporelle, dans la section suivante on présente la

technique temporelle basée sur le principe de triangulation, et on montre qu'une localisation parfaite peut être aussi obtenue en exploitant seulement la dimension spatiale, c'est à dire les directions d'arrivées, sans faire recours à la synchronisation.

1.8 Localisation par temps d'arrivées

Les différents mécanismes de localisation sont basés sur les angles d'arrivée, les temps d'arrivée ou une combinaison de ces deux techniques, parmi les applications basées sur la dimension temporelle est le système de positionnement par satellites (*Global Positioning System GPS*). Le GPS est un système fondé par le physicien D.Fenelli [Guo07], il est destiné à fournir la position, la vitesse et l'heure n'importe où à la surface de la terre ou dans ses environs, sa précision du positionnement va de 100 mètres à quelques mètres en temps réel, selon la qualité du récepteur.

Le système est constitué, actuellement, d'une constellation de 31 satellites qui suivent une orbite quasi circulaire d'une altitude de 20000 à 20500 Km qu'ils parcourent en 11 heures, 58 minutes et 02 secondes avec une vitesse voisine de 14000 Km/heure, compte tenu de la rotation de la terre, chaque satellite se retrouve au dessus du même point après deux rotations successives. Les satellites émettent en permanence sur deux fréquences $f_1 = 1575.42$ MHz et $f_2 = 1227.60$ MHz des micro-ondes ou encore des ondes radioélectriques générées en utilisant des horloges atomiques de très haute précision, les utilisateurs civils et militaires ne font que recevoir et exploiter les informations des satellites. L'avantage est que le système ne peut pas être saturé, le nombre maximum d'utilisateurs GPS est illimité, ce qui donne plusieurs possibilités d'applications telles que le génie civil pour la localisation des lieux géographiques en construction des bâtiments, le génie aérodynamique pour la localisation des avions et détermination des positions et temps du décollage et d'atterrissage, les stations géophysiques pour les observations des couches atmosphériques et l'étude de leurs propriétés thermodynamiques, la navigation maritime pour la localisation des bateaux et mesure des grandeurs cinématiques et géométriques.

Pratiquement un récepteur GPS peut calculer, en se basant sur les signaux détectés des satellites, les coordonnées d'un point géographique, les projeter sur une carte implantée dans la mémoire du processeur, calculer la vitesse lorsque il est en mouvement. La transmission des données des satellites utilise le système des coordonnées ECEF (*Earth Fixed Earth Centered*), avec l'origine $(0, 0, 0)$ représente le centre de masse de la terre. L'architecture de localisation est différente dans ce cas du GPS par rapport aux exemples présentés précédemment, l'équivalent des réseaux d'antennes est les satellites qui sont en orbite autour de la terre. Le principe de localisation est basé sur le mécanisme de triangulation. Considérons un cas d'une seule cible fixe à localiser avec quatre satellites comme illustré par la figure 1.15.

L'idée sur laquelle est basée le GPS est une triangulation en trois dimensions, un point

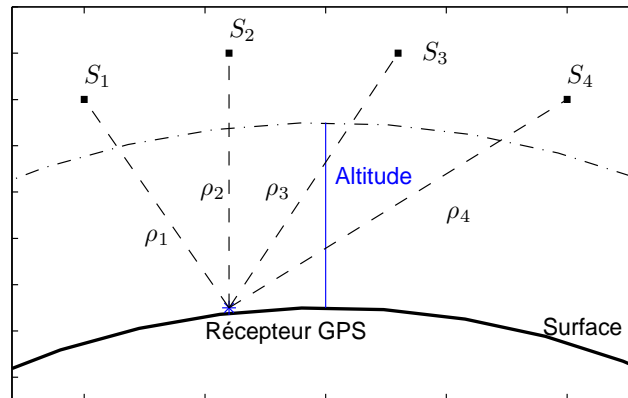


FIGURE 1.15 – Localisation d'un récepteur par principe de triangulation du système GPS.

sur la terre est déterminé par ses distances respectives avec trois autres points, le premier point \vec{r} est le lieu où est situé le récepteur GPS, les trois autres points sont les positions des satellites \vec{r}_i , les distances sont mesurées grâce au temps d'aller-retour des signaux radio [Guo07]. Cette méthode requiert un calcul du temps très précis ainsi que l'ajout des termes correctifs pour tenir compte de la réalité qui n'est pas une triangulation spatiale pure, pour cela il est nécessaire d'utiliser quatre satellites plutôt que trois, ce qui permet de calculer à la fois la position et le temps au lieu de la réception du signal GPS. Les ondes émises subissent plusieurs perturbations avant d'arriver à la cible, chaque satellite envoie un signal à l'instant t_i , la distance entre les deux parties de communications est donnée par :

$$\rho_i = c(t - t_i) \quad (1.6)$$

Avec c est la vitesse de la lumière et t est le temps de l'horloge du récepteur, l'observateur qui reçoit en même instant quatre signaux depuis quatre satellites peut déduire sa position \vec{r} en résolvant le système de quatre équations :

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\|_2 - \rho_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} - \rho_i = 0 \quad (1.7)$$

Pour $i = \{1, 2, 3, 4\}$, en effet la quantité ρ_i n'est pas une distance mais une pseudo-distance qui est définie par une mesure indirecte de la distance par un repérage de l'instant de réception d'un signal daté à l'émission lorsque les horloges du récepteur et de l'émetteur ne sont pas bien synchronisées, plusieurs facteurs influencent les mesures de ρ_i tels que les effets ionosphériques et troposphériques [Guo07] plus l'erreur due à la rotation de la terre pendant le temps des trajets des signaux. Prenons un exemple pour quantifier l'effet de ces erreurs, si le retard mesuré est 72 ms, la pseudo-distance vaut $\rho_i = c(t - t_i) = 3 \times 10^8 \times 72 \times 10^{-3} = 21600$ Km, et si le retard réel est 60 ms, alors la vraie distance est $d = c\Delta t = 3 \times 10^8 \times 60 \times 10^{-3} = 18000$ Km, on voit qu'une incertitude de $\delta t = 12$ ms, crée une incertitude de mesure de $\delta d = 3600$ Km.

Cet exemple du système GPS basé sur la triangulation montre bien que la localisation par

principe du temps d'arrivée, principe de triangulation dans ce cas, nécessite une synchronisation de haute précision. Dans d'autres cas, il est aussi possible de localiser des cibles en utilisant les directions d'arrivée.

1.9 Localisation par directions d'arrivées

En commençant par le cas bidimensionnel, la position d'une cible relativement à un référentiel peut être identifiée soit par les coordonnées cartésiennes $(x, y, z = cte)$, soit par les coordonnées polaires (r, θ) . Bien que le spectre angulaire $f(\theta)$ ne permet que d'obtenir l'information angulaire θ , il est possible de localiser complètement la source en combinant plusieurs angles d'arrivées déduits par plusieurs réseaux d'antennes, il s'agit d'exploiter la dimension spatiale sans faire appel à la condition de synchronisation.

Un prototype de combinaison de deux angles d'arrivées d'une seule source est représenté par la figure 1.16. Deux réseaux d'antennes uniformes perpendiculaires sont constitués des nombres d'éléments $N = 5$ et $M = 5$. Un référentiel orthonormé est associé aux deux réseaux, une source fixe et ponctuelle positionnée en (x_0, y_0) avec un rayon du trajet r_0 et qui peut être en une position $(x_0 > 0, y_0 > 0)$. Le premier réseau horizontal permet de détecter la première position angulaire de la source θ_1 par rapport au premier élément mesurée depuis la normale du réseau (axe perpendiculaire), de la même manière le deuxième réseau permet d'obtenir le deuxième angle d'arrivée θ_2 .

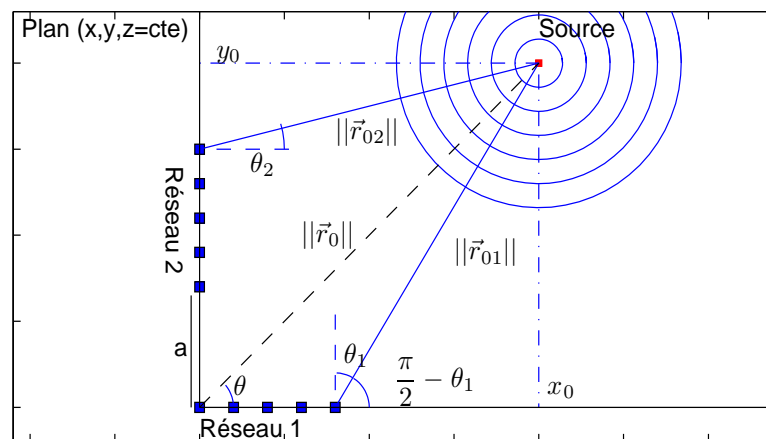


FIGURE 1.16 – Localisation bidimensionnelle en combinant deux directions d'arrivées.

La distance entre les éléments étant uniforme, on définit les longueurs des réseaux par $L_{\lambda,1} = (N - 1)d$ et $L_{\lambda,2} = (M - 1)d$. Le principe de localisation [FTSM10] est basé sur l'intersection de deux droites données par (θ_1, θ_2) qui permet de trouver (x_0, y_0) . Les équations des droites sont données par :

$$\begin{cases} y_1 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)(x - L_{\lambda,1}) \\ y_2 = \tan(\theta_2)x + L_{\lambda,2} + a \end{cases} \quad (1.8)$$

Il faut noter que la distance a , entre les deux réseaux, ne doit pas être négligeable devant r_{01} et r_{02} pour assurer une différence de mesure entre les deux angles θ_1 et θ_2 . L'intersection des droites signifie qu'on a trouvé les deux rayons du trajets (r_{01}, r_{02}) qui mènent vers la position exacte de la source. L'égalité des deux équations $y_1 = y_2$ donne le résultat suivant :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{L_{\lambda,2} + a + L_{\lambda,1} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) - \tan(\theta_2)} \\ y_0 = \tan(\theta_2)x_0 + L_{\lambda,2} + a \end{cases} \quad (1.9)$$

La position principale en termes de coordonnées polaires de la source est déduite de la solution de l'équation (1.9) par les relations $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ et $\theta = \arctan(y_0/x_0)$.

La généralisation du cas traité ci-dessus est possible afin d'avoir une localisation tridimensionnelle. Il existe plusieurs configuration géométriques pour le cas tridimensionnel où la source rayonnante est identifiée par deux variables, l'azimut θ et l'élévation φ . Pour cet effet, il est nécessaire d'utiliser une géométrie bidimensionnelle du réseau d'antennes parce que le réseau linéaire présente des ambiguïtés qu'on expliquera dans le chapitre suivant. Prenons un système constitué de deux réseaux rectangulaires comme illustré dans la figure 1.17.

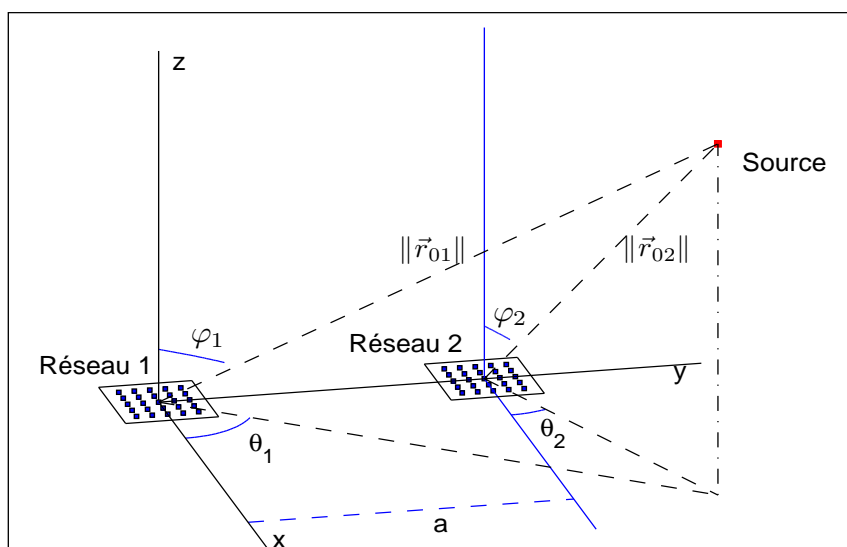


FIGURE 1.17 – Localisation tridimensionnelle d'une source uniformément rayonnante par une configuration géométrique de deux réseaux rectangulaires.

Chaque réseau est constitué de $N = 25$ antennes élémentaires de telle sorte que la réf-

rence de la projection géométrique est l'élément central. Les deux réseaux sont séparés par une distance a similairement au premier exemple de la figure 1.16. Soit une source considérée ponctuelle qui génère d'une façon isotrope des radiations et qui est placée dans la position (x_0, y_0, z_0) relativement au repère (o, x, y, z) dont l'origine coïncide avec le centre du premier réseau. La source peut être dans n'importe quelle position définie par les conditions $(x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0)$. En combinant les mesures d'azimut et d'élévation, obtenues des deux réseaux, l'ensemble des données du système entier est $\{\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, a\}$. Ensuite, le problème de détermination du rayon \vec{r}_0 , de la source, peut être résolu par les projections sur les plans (o, x, y) et (o, y, z) comme illustré dans les figures 1.18 et 1.19.

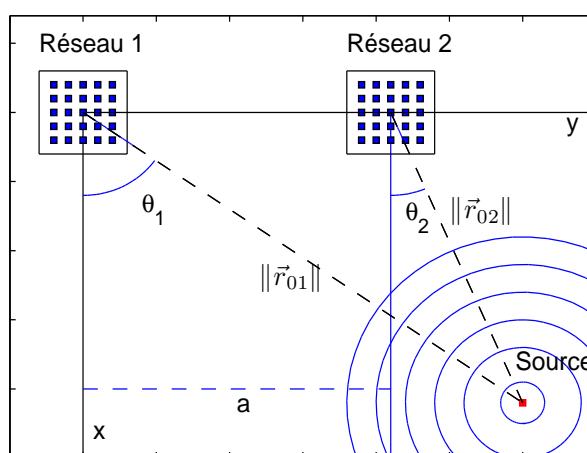


FIGURE 1.18 – Projection du système tridimensionnel sur le plan (o, x, y) .

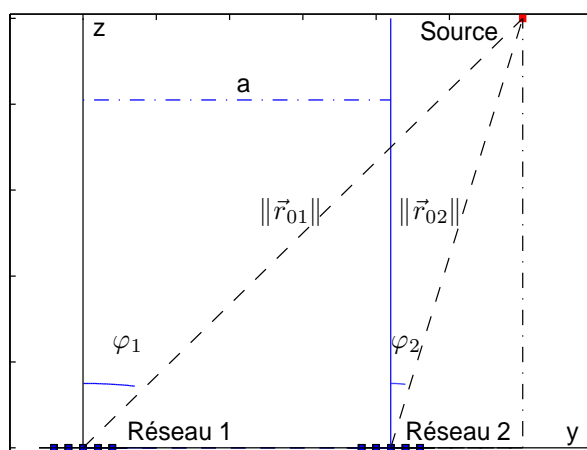


FIGURE 1.19 – Projection du système tridimensionnel sur le plan (o, y, z)

Pour la première projection, l'intersection des deux droites $y_1 = f(x)$ et $y_2 = g(x)$ permet d'estimer les variables (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} y_1 = \tan(\theta_1)x \\ y_2 = \tan(\theta_2)x + a \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = \frac{a}{\tan(\theta_1) - \tan(\theta_2)} \\ y_0 = \tan(\theta_1)x_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

De la même manière, la projection sur le plan (o,y,z) permet d'exprimer y en fonction de z . Etant donné que la différence de mesure de φ_1 et φ_2 est assurée, le calcul de la troisième variable z_0 est donné comme suit :

$$\begin{cases} y_1 = \tan(\varphi_1)z \\ y_2 = \tan(\varphi_2)z + a \end{cases} \quad \begin{cases} z_0 = \frac{a}{\tan(\varphi_1) - \tan(\varphi_2)} \\ y_0 = \tan(\varphi_1)z_0 = \tan(\theta_1)x_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Ces exemples montrent que le problème de la direction d'arrivée peut être développé pour obtenir une localisation complète des cibles sans synchronisation, il s'agit d'exploiter l'évolution des fronts d'ondes de la cible lorsqu'ils traversent les éléments du réseau d'antennes [CGY10, KV96, FSB08].

D'après les différents exemples cités dans ce chapitre, on constate que le problème des directions d'arrivées est un sujet de recherche important et l'objectif de la présente thèse est restreint à l'estimation des angles d'arrivées des sources rayonnantes par un réseau d'antennes. Les résultats obtenus par l'analyse des données reçues par le réseau ne représentent que des estimations parce que, parmi les causes qui engendrent les erreurs, plusieurs phénomènes perturbent la propagation uniforme des ondes, ces perturbations génèrent des multi-trajets (*Multipaths*) des ondes d'une façon aléatoire à cause de l'existence de plusieurs obstacles dans le canal de transmission [Gro05].

Les phénomènes qui perturbent la progression uniforme de l'onde sont nombreux, l'onde est déviée vers plusieurs directions quand elle interagit avec des objets dont les dimensions sont petites par rapport à la longueur d'onde λ , ce phénomène est appelé diffusion [Gro05]. Quand l'onde traverse deux milieux qui possèdent des propriétés électriques différentes, elle est réfractée et les rayons sont divergés à cause du passage de l'onde à l'interface entre ces deux milieux. Dans les environnements où il y a des constructions par exemple, l'onde est réfléchiée quand elle heurte des surfaces lisses [Gro05], dans les conditions normales l'angle d'incidence (*Angle of Incidence AoI*) est égal à l'angle de réflexion (*Angle of Reflection AoR*), d'autre part la diffraction [Gro05] peut avoir lieu quand l'onde arrive à un obstacle qui permet une propagation partielle comme une ouverture par exemple, ce dernier cas est observable pour la propagation des ondes radio dans les villes. En général l'environnement de propagation est difficile à modéliser pour prendre en compte ces facteurs des multi-trajets, la solution est de traiter statistiquement les signaux émis depuis la cible jusqu'au réseau des récepteurs tout en se basant sur un modèle mathématique issu des lois de propagation des ondes, afin de faire une estimation précise le plus possible des caractéristiques des sources [CGY10]. En plus, les paramètres liés au réseau ainsi que l'existence de plusieurs sources et leurs interactions nécessitent

d'introduire les méthodes de haute résolution pour effectuer une localisation angulaire précise.

1.10 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté quelques applications qui nécessitent d'utiliser les techniques de localisation angulaires, puis on a montré que la combinaison de plusieurs angles d'arrivées peut assurer une localisation complète des sources rayonnantes, en utilisant des réseaux d'antennes et sans faire appel à la synchronisation, contrairement aux techniques basées sur les temps d'arrivée. Après avoir mis en valeur le problème des directions d'arrivées (DoA), on a cité quelques facteurs qui perturbent les propagations uniformes des ondes générées par les sources, ce qui implique la nécessité d'utiliser des techniques de haute résolution pour identifier les angles des sources. Avant de développer ces techniques, on explicite dans le chapitre suivant le modèle de propagation et les expressions mathématiques des signaux reçus depuis des sources ponctuelles de type bande étroite et en champ lointain.

Chapitre 2

MODÈLE DE PROPAGATION

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons une description générale du modèle de propagation des sources ponctuelles de type bande étroite et en champ lointain relativement au réseau d'antennes. Dans un premier temps on présente la solution générale de l'équation de propagation du champ résultant de la superposition de plusieurs fronts d'ondes, puis on complète cette solution par les hypothèses prises pour les propriétés des sources rayonnantes, ensuite on explique les contraintes géométriques qu'il faut avoir pour effectuer un échantillonnage spatial du front d'onde total. Dans la deuxième partie, on présente premièrement les caractéristiques spatiales du réseau d'antennes uniforme qui sont relatives à l'ambiguïté et la centro-symétrie. Deuxièmement, on présente les statistiques d'ordre deux des signaux reçus, dont la plupart des techniques de localisation de directions d'arrivée (*Direction of Arrival DoA*) en reposent.

2.2 Propagation de l'onde

Plusieurs phénomènes physiques sont basés sur la propagation des ondes électromagnétiques ou acoustiques, les solutions de ces types de propagation permettent de contrôler et prédire le comportement de ces ondes. L'analyse des caractéristiques des milieux de propagation ainsi que celles des sources qui génèrent les radiations se fait par l'étude des ondes captées par des récepteurs électroniques.

Afin d'étudier les signaux reçus, un modèle théorique est nécessaire pour comparer les solutions analytiques et numériques issues soit des simulations ou des expériences. Une onde électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) qui se propage dans le vide (absence du courant électrique et de charge) vérifie les quatre équations de Maxwell comme suit [KV96] :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{2.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Avec $\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla défini par $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$ dans le système des coordonnées cartésiennes, (\cdot) désigne le produit scalaire et (\wedge) est le produit vectoriel entre deux vecteurs, pour le champ \vec{E} on a :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad (2.5)$$

Le vecteur \vec{B} est le champ magnétique, μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$, et ε_0 est la permittivité électrique du vide $\varepsilon_0 \simeq 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$. Un modèle théorique de l'onde (\vec{E}, \vec{B}) est illustré dans la figure 2.1.

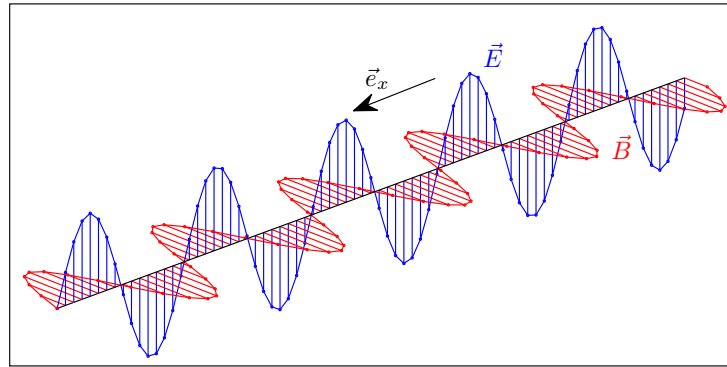


FIGURE 2.1 – Propagation d'une onde (\vec{E}, \vec{B}) dans la direction \vec{e}_x .

On utilise la propriété suivante :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} \quad (2.6)$$

D'autre part, en tenant compte des équations (2.1), (2.3) et (2.4), on obtient le résultat suivant :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E} \quad (2.7)$$

A partir de l'équation (2.7) on trouve l'équation fondamentale de propagation de l'onde :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

c est la vitesse de propagation de l'onde, égale à $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \simeq 3 \times 10^8$ m/s. Le champ \vec{E} est le vecteur considéré seulement, tandis que le champ magnétique \vec{B} est omis. Il faut noter que l'équation (2.8) est valable aussi pour la propagation des ondes acoustiques, dans ce cas \vec{E} devient la variable de pression et c est prise comme vitesse de propagation du son dans le milieu considéré [Lur98].

L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé direct (o, x, y, z) de vecteurs unitaires $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, la projection du champ électrique par rapport à la base choisie est $\vec{E} = (\vec{E} \cdot \vec{e}_x)\vec{e}_x + (\vec{E} \cdot \vec{e}_y)\vec{e}_y + (\vec{E} \cdot \vec{e}_z)\vec{e}_z$ de module correspondant $\|\vec{E}\| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$, pour simplifier le problème, on considère une seule composante du \vec{E} , ainsi on traite le problème dans le plan $(o, x, y, z = 0)$. Une source ponctuelle située à une distance $\|\vec{r}_0\|$ par rapport à l'origine du repère, génère une onde transversale qui se propage dans le plan horizontal, ce principe est illustré dans la figure 2.2.

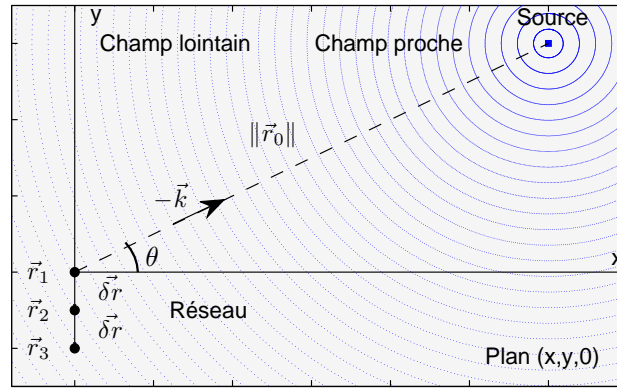


FIGURE 2.2 – Modèle de propagation dans le plan horizontal, onde transversale reçue par trois capteurs.

Le vecteur \vec{r}_0 pointe vers l'origine $(0,0)$, la solution générale de l'onde dans ce cas est donnée par la formule suivante [KV96] :

$$\vec{E}(-\vec{r}_0, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t)e^{j\omega t} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

La variable $\omega = 2\pi f_c$ est la fréquence angulaire avec f_c étant la fréquence de l'onde porteuse, la fonction $f(t)$ varie lentement par rapport au terme $e^{j\omega t}$, en effet la solution de l'équation (2.9) n'est qu'une approximation connue souvent sous le nom SVEA (Slowly Varying Envelope Approximation) dans d'autres domaines de propagation des ondes [PS88]. La solution de l'équation de propagation $E_z = f(t)e^{j\omega t}$ est interprétée comme une modulation d'amplitude. Pour éclaircir ce concept, on présente dans la figure 2.3 un exemple théorique d'une modulation de deux sinusoïdes.

Pour analyser l'onde, on se place sur l'axe $(-y)$ à partir de l'origine, des capteurs capables de détecter la composante E_z . Le milieu de propagation est supposé isotrope, le front d'onde arrive sans distorsion au premier capteur située en $(0,0)$ après avoir par-

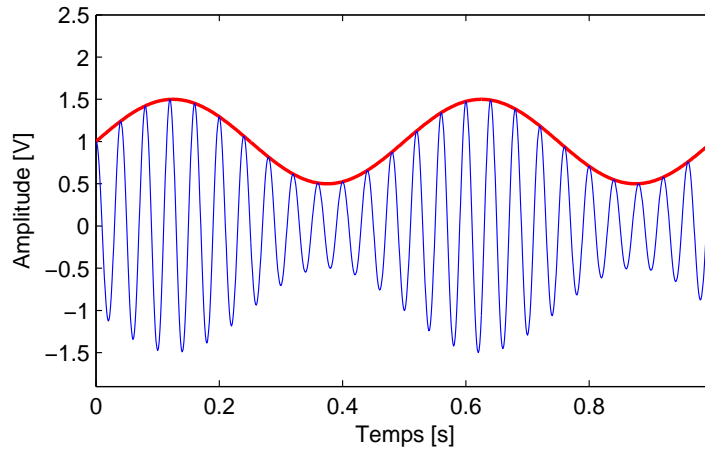


FIGURE 2.3 – Variation lente de l'enveloppe du signal : modulation d'une fonction périodique de 2 Hz et d'amplitude de 0.5 V par une porteuse de 25 Hz et d'amplitude de 1 V.

couru la distance $\|\vec{r}_0\|$ pendant la durée $\tau_0 = r_0/c$, la solution du champ devient :

$$E_z = f\left(t - \frac{r_0}{c}\right)e^{j\omega(t-\tau_0)} \quad (2.10)$$

Avec $\omega(t - \tau_0) = \omega t - 2\pi f_c r_0/c = \omega t - 2\pi r_0/\lambda$, ce résultat est déduit à partir de la relation $c = f_c \lambda$ ou λ est la longueur d'onde et $2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde qui est égal au module du vecteur d'onde $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ tel que :

$$\|\vec{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.11)$$

En termes de vecteurs, la variable de phase $\frac{2\pi}{\lambda} r_0$ peut être écrite en fonction du vecteur d'onde, puisque \vec{k} et \vec{r}_0 sont colinéaires, donc $\vec{k} \cdot \vec{r}_0 = \|\vec{k}\| \|\vec{r}_0\| \cos(\vec{k}, \vec{r}_0) = \frac{2\pi}{\lambda} r_0$, par conséquent la fonction du champ est reformulée comme suit :

$$E_z(\vec{r}_1, t) = f\left(t - \frac{r_0}{c}\right)e^{j\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_0} \quad (2.12)$$

Cette notation est utilisée dans plusieurs domaines tels que l'optique ondulatoire et la cristallographie [JA09]. La source ponctuelle est orientée avec un angle θ par rapport à l'axe (ox), donc le vecteur d'onde s'écrit :

$$\vec{k} = -\frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta \vec{e}_x - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z \quad (2.13)$$

On suit spatialement l'évolution de E_z en utilisant des distances infinitésimales $\delta r = d$ à partir de r_0 . les coordonnées des capteurs sont $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$, $\vec{r}_2 = (0, -d, 0)$ et $\vec{r}_3 = (0, -2d, 0)$, le réseau est caractérisé par une distance uniforme d . Lorsque le front d'onde arrive au deuxième détecteur, l'onde a donc parcouru une distance $\vec{r}_0 + \vec{r}_2$, l'expression correspondante de la composante E_z est :

$$E_z(\vec{r}_2, t) = f\left(t - \frac{r_0}{c} - \frac{d}{c}\right)e^{j\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}_2} \quad (2.14)$$

Parmi les hypothèses principales dans ce mémoire est celle de la bande étroite des fonctions temporelles $f(t)$, c'est à dire que la fonction $f(t)$ varie lentement pendant une période donnée par les positions de mesures de E_z [CGY10], cela signifie que :

$$f\left(t - \frac{r_0}{c} - \frac{d}{c}\right) \simeq f\left(t - \frac{r_0}{c}\right) \quad (2.15)$$

Ainsi on a $E(\vec{r}_2, t) = f\left(t - \frac{r_0}{c}\right)e^{j\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_0} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}_2} = E(\vec{r}_1, t)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}_2}$, ceci est équivalent à dire que le champ reçu par le deuxième capteur est la version retardée du champ au premier élément avec une expression additionnelle de phase $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}_2} = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta}$. De même pour le troisième élément, on a la relation suivante :

$$E(\vec{r}_3, t) = f\left(t - \frac{r_0}{c}\right)e^{j\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}_3} = E(\vec{r}_1, t)e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}2d \sin \theta} \quad (2.16)$$

Pour ne pas alourdir les notations des équations, on propose la forme simplifiée du signal de base comme suit $s(t) = f\left(t - \frac{r_0}{c}\right)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}_0}$, ensuite on réécrit les trois équations du champ sur les trois points de mesure :

$$\begin{aligned} E(\vec{r}_1, t) &= s(t)e^{j\omega t} \\ E(\vec{r}_2, t) &= s(t)e^{j\omega t} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}_2} = E(\vec{r}_1, t)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}_2} \\ E(\vec{r}_3, t) &= s(t)e^{j\omega t} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}_3} = E(\vec{r}_1, t)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}_3} \end{aligned} \quad (2.17)$$

On peut étendre ce principe pour un $N^{\text{ième}}$ point de mesure $r_N = -(N-1)d\vec{e}_y$ à condition que l'hypothèse de bande étroite soit vérifiée $f\left(t - \frac{r_0}{c} - \frac{r_N}{c}\right) \simeq f\left(t - \frac{r_0}{c}\right)$. A partir des équations (2.17) on peut exprimer la composante E_z sur n'importe quelle position de mesure en fonction de l'équation du premier élément et la $n^{\text{ième}}$ expression du déphasage dans cet exemple du réseau unidimensionnel est $\vec{k} \cdot \vec{r}_n = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d \sin \theta$.

Le vecteur d'onde \vec{k} est une grandeur importante en propagation des ondes, il est équivalent à la quantité du mouvement en mécanique du point matériel ($\vec{p} = m\vec{v}$). \vec{k} pointe vers la direction de propagation de l'onde comme illustré dans la figure 2.4, en coordonnées sphériques, la projection est donnée par :

$$\vec{k} = -\frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Dans le cas tridimensionnel, la source ponctuelle est caractérisée par deux variables, l'azimut $\theta \in [0, 2\pi]$ est l'élévation $\varphi \in [0, \pi]$ appelées Angles d'Euler. Pour le cas bidimensionnel de la figure 2.2, on a considéré que $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Les équations (2.17) sont basées sur l'hypothèse du champ lointain, les fronts d'onde arrivant au antennes \vec{r}_i sont des ondes planes. La source génère une onde sphérique dans l'amplitude est inversement proportionnelle à la distance, l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) appartenant à la surface de la sphère de rayon r sont en même phase, ce

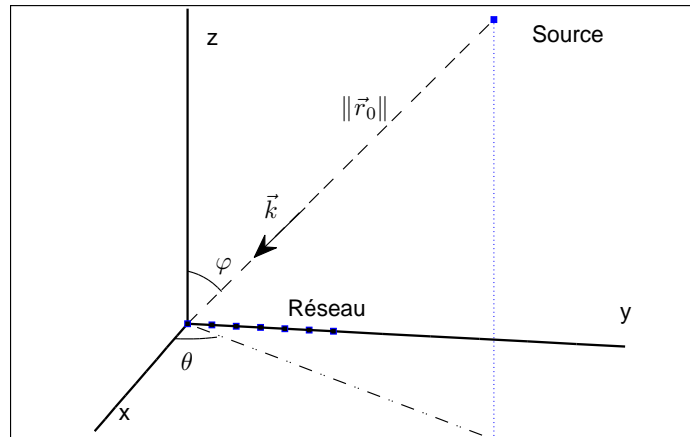


FIGURE 2.4 – Vecteur d’onde d’une source ponctuelle en coordonnées sphériques.

qui constitue le front d’onde. Nous expliciterons dans ce qui suit la condition qu’il faut vérifier par le réseau d’antennes afin d’obtenir l’approximation de l’onde plane. Concernant le traitement en champ proche, il faut tenir compte de la sphéricité du front d’onde [KV96].

Le milieu de propagation étant isotrope et uniforme implique que le principe de superposition est valable, s’il y a P sources présentes dans le même plan horizontal mais avec des positions différentes, le champ résultant $\sum_i^P E_i$ en trois points de mesure est la superposition des champs élémentaires de chaque source :

$$\begin{aligned} E(\vec{r}_1, t) &= \sum_{i=1}^P s_i(t) e^{j(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}_1)} \\ E(\vec{r}_3, t) &= \sum_{i=1}^P s_i(t) e^{j(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}_3)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dans cette situation, chaque source ponctuelle est caractérisée par son vecteur d’onde $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} \cos(\theta_i) \vec{e}_x + \frac{2\pi}{\lambda_i} \sin(\theta_i) \vec{e}_y$, une autre hypothèse simplificatrice consiste à dire que toutes les sources ont approximativement la même longueur d’onde λ donc de même fréquence angulaire ω , ainsi on a :

$$E(\vec{r}_n, t) = \sum_{i=1}^P s_i(t) e^{j\omega t} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} \quad (2.20)$$

En général, chaque source est caractérisée par plusieurs paramètres tels que les directions de propagation, relativement au repère, qui sont l’azimut et l’élévation (θ_i, φ_i) , la polarisation de l’onde si l’antenne permet de capter toutes les composantes du champ électromagnétique et la forme du signal transporté $s_i(t)$ à savoir son contenu fréquentiel $F[s_i(t)]$.

Après avoir explicité les expressions de l’onde captée par les antennes, on développe ensuite les équations finales des signaux générés, c’est à dire la forme digitale. En effet les signaux sont démodulés avant l’échantillonnage de telle sorte à enlever les termes de la

porteuse $e^{j\omega t}$ [KV96]. On considère que toutes les antennes sont identiques, isotropes et configurées pour fonctionner selon la fréquence f_c , le gain de la $i^{\text{ème}}$ antenne $g_i(\theta, \varphi) = 1$ est indépendant des angles (θ, φ) et les signaux numériques $x(t)$ sont proportionnels au champ E_z . Les signaux reçus après échantillonnage par les trois capteurs sont donnés par :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= s(t) \\ x_2(t) &= s(t)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}_2} = x_1(t)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}_2} \\ x_3(t) &= x_1(t)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}_3} \end{aligned} \quad (2.21)$$

On doit retrouver les expressions du déphasage en utilisant le principe de la différence de marche, on présente une autre configuration du modèle de propagation dans la figure 2.5.

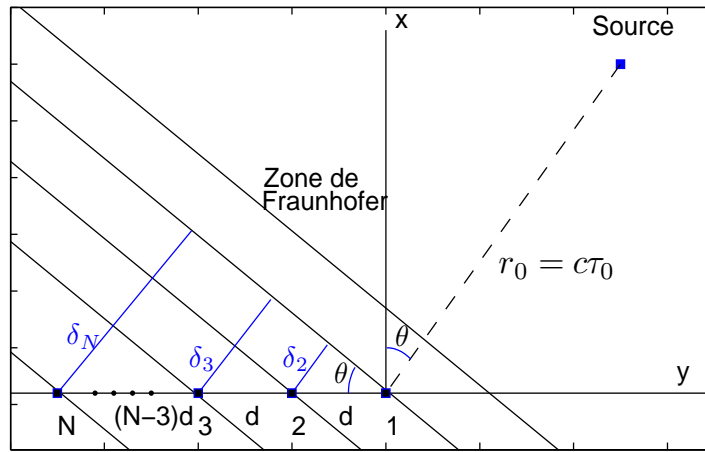


FIGURE 2.5 – Expressions des déphasages géométriques en fonction de la différence de marche des fronts d'ondes.

Ce type du réseau est appelé antenne linéaire uniforme (*Uniform Linear Array ULA*) [CGY10], [Gro05], [KV96]. Les projections des vecteurs \vec{k} et \vec{r}_i sont identiques à celles de la figure 2.2 et les capteurs sont équidistants et répartis linéairement sur l'axe $(-y)$. La source génère une onde transversale qui est captée par le réseau, le signal reçu par le premier élément $(0,0)$ est $x_1(t) = s(t)$ avec un angle de direction θ relativement à la normale du réseau (axe ox).

Par convention la première différence de marche est $\delta_1 = 0$, le même front d'onde doit parcourir une distance supplémentaire δ_2 pour arriver au deuxième élément $(0, -d)$. En utilisant les relations trigonométriques, cette distance est donnée par $\delta_1 = d \sin \theta$, le délai temporel est $\tau_2 = \frac{\delta_2}{c} = \frac{d}{c} \sin \theta$, le signal au deuxième élément est $x_2(t) = x_1(t - \tau_2) = x_1(t)e^{-j\omega\tau_2}$. Le déphasage est donné par la relation $\omega\tau_2 = 2\pi f_c \frac{d}{c} \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = \vec{k}\cdot\vec{r}_2$, en général pour le $m^{\text{ème}}$ élément la fonction linéaire du déphasage du front d'onde est :

$$\mu_m = \omega\tau_m = \frac{2\pi}{\lambda} (m-1)d \sin \theta \quad (2.22)$$

En présence de P sources ponctuelles, le signal reçu en $m^{\text{ième}}$ élément est :

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^P s_i(t) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_m} = \sum_{i=1}^P s_i(t) e^{-j2\pi\lambda^{-1}(m-1)d \sin \theta_i} \quad (2.23)$$

Cette équation est basée sur le fait que le milieu de propagation est idéal, les interférences entre les sources sont absentes et les antennes sont toutes calibrées. En réalité ces considérations ne sont pas toujours vraies, au moins l'espace entre les sources et le réseau présente des obstacles qui empêchent une progression uniforme des ondes, sauf si l'expérience est faite dans un laboratoire en utilisant une chambre anéchoïque. Alors pour modéliser la perturbation il faut corriger l'équation (2.23) en ajoutant une composante du bruit gaussien [CGY10], qui est un processus (signal) aléatoire, complexe, ergodique et de moyenne nulle :

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^P s_i(t) e^{-j2\pi\lambda^{-1}(m-1)d \sin \theta_i} + n_m(t) \quad (2.24)$$

Le signal $x_m(t)$ est échantillonné en K épreuves (échantillons) avec $t = 1, \dots, K$ et $x_m(t) \in \mathbb{C}^{1 \times K}$. $n_m(t)$ est le bruit additif au niveau du $m^{\text{ième}}$ antenne $n_m(t) = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j \arctan \frac{b}{a}}$ avec $E\{a\} = 0$, $E\{b\} = 0$ et $E\{a.b\} = 0$, l'opérateur $E\{\cdot\}$ est la moyenne statistique définie par $E\{x\} = \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx$ avec $x = a$ ou $x = b$, $p(x)$ est la fonction de densité de probabilité. Pour une distribution gaussienne, $p(x)$ est donnée par la relation :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Le bruit additif permet de modéliser les perturbations externes du milieu de propagation [Gro05] et celles internes telles que les bruits électronique et thermique [SWSPB03]. Il suit la même loi pour tous les éléments du réseau [CGY10], en conséquence $n(t)$ est ergodique spatialement et temporellement, si le réseau est constitué d'un très grand nombre d'éléments ($N \rightarrow +\infty$), l'ergodicité affirme que les moments statistiques ne dépendent pas du temps. Par exemple, la moyenne dans le temps de la $m^{\text{ième}}$ composante $\langle n_m(t) \rangle$ est égale à la moyenne de tous les éléments à un instant donné :

$$\langle n_m(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i(t = cte)$$

Ce principe est l'un des postulats de la physique statistique [NN08]. Dans ce cas, la puissance du bruit est $\sigma^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K n(i)^2$ qui est la même d'un élément à autre. Si cette hypothèse d'ergodicité n'est pas vérifiée expérimentalement, on considère alors la présence d'un bruit coloré [Fri96].

Pour synthétiser toutes les données issues du système, la forme compacte doit être utilisée. En notation matricielle, le vecteur des signaux générés à l'instant t est donné par :

$$x(t) = A(\theta_1, \dots, \theta_P)s(t) + n(t) = \begin{pmatrix} a(\theta_1), \dots, a(\theta_P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_P(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1(t) \\ \vdots \\ n_N(t) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Les dimensions sont données par $x(t) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$, $A(\theta_1, \dots, \theta_P) \in \mathbb{C}^{N \times P}$, $s(t) \in \mathbb{C}^{P \times 1}$ et $n(t) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$, la concaténation de tous les échantillons nous donne la forme compacte :

$$X(t) = A(\theta_1, \dots, \theta_P)S(t) + N(t) \quad (2.26)$$

Avec $X(t) \in \mathbb{C}^{N \times K}$, $S(t) \in \mathbb{C}^{P \times K}$, et la matrice ergodique $N(t) \in \mathbb{C}^{N \times K}$. La matrice déterministe $A(\theta_1, \dots, \theta_P) \in \mathbb{C}^{N \times P}$ s'appelle aussi matrice directionnelle du réseau (*steering matrix*) [CGY10], le $i^{\text{ème}}$ élément est donné par : $a_{ij} = e^{-j\vec{k}_j \cdot \vec{r}_i}$. Chaque type de réseau d'antennes est caractérisé par sa matrice directionnelle. En prenant le premier élément du réseau linéaire dans la figure 2.5 comme référence, le $i^{\text{ème}}$ vecteur de $A(\theta_1, \dots, \theta_P)$ est :

$$a(\theta_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-j\mu_i} \\ \vdots \\ e^{-j(N-1)\mu_i} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Avec $\mu_i = 2\pi\lambda^{-1}d \sin \theta_i$ représente la fréquence spatiale, la matrice directionnelle se caractérise par une progression géométrique dans chaque ligne qui est de type Vandermonde [Gro05] :

$$\begin{aligned} A(\theta_1, \dots, \theta_P) &= \begin{bmatrix} a(\theta_1) & \dots & a(\theta_i) & \dots & a(\theta_P) \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\mu_1} & \dots & e^{-j\mu_i} & \dots & e^{-j\mu_P} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-j(N-1)\mu_1} & \dots & e^{-j(N-1)\mu_i} & \dots & e^{-j(N-1)\mu_P} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

L'objectif global dans ce mémoire est l'estimation des directions d'arrivée (*Direction of Arrival DoA*) des sources en utilisant des traitements statistiques des données reçues tout en se basant sur la géométrie de l'antenne. Pour trouver les angles des sources il faut estimer la matrice directionnelle $A(\theta)$. Dans la section suivante on complète la description de l'équation (2.26) en expliquant les hypothèses fondamentales du problème.

2.3 Hypothèses fondamentales du modèle de propagation

Une description bidimensionnelle (azimut seulement) du problème est illustrée dans la figure 2.6. L'équation de base des données reçues par le système est basée sur les hypothèses suivantes.

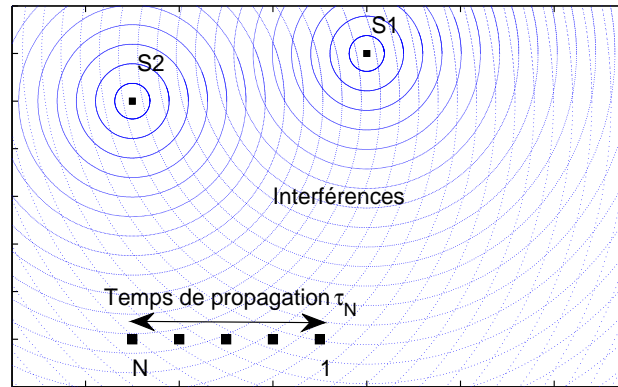


FIGURE 2.6 – Modèle bidimensionnel des interférences spatiales : diagrammes de 2 sources ponctuelles.

2.3.1 Linéarité et isotropie du milieu de propagation

L'espace qui englobe les sources et le système des antennes est isotrope et linéaire [CGY10, Gro05, KV96], c'est à dire qu'il possède les mêmes propriétés de perméabilité et de permittivité (ϵ, μ) dans toutes les directions, la vitesse de phase d'une onde est égale à sa vitesse de groupe. Si P sources se propagent, le signal capté par n'importe quel élément est la superposition linéaire des P ondes [CGY10, KV96].

2.3.2 Champ lointain

Le réseau est caractérisé par sa plus grande dimension. Sachant que la distance entre deux éléments consécutifs est uniforme, la longueur du réseau est donnée par la relation $L_\lambda = \sum_{i=1}^{N-1} d = (N-1)d$, afin de justifier l'expression de la matrice directionnelle dans l'équation (2.28), il faut que les fronts d'ondes soient des ondes planes et par conséquent, la distance de chaque source r_{0i} , ($i = \{1, \dots, P\}$) vérifie :

$$r_{0i} \gg \frac{2L_\lambda^2}{\lambda} \quad (2.29)$$

Avec cette condition [CGY10, Gro05, KV96], les fronts d'ondes arrivant au système sont parallèles et proviennent d'une même direction (DoA) pour les éléments du réseau relativement à sa normale (axe perpendiculaire au réseau). Pour la distance minimale $r = \text{Min}\{r_{01}, \dots, r_{0P}\}$ telle que $r \gg 2L_\lambda^2 \lambda^{-1}$, les positions des sources n'appartiennent pas à la sphère définie par le centre du réseau et de rayon r .

2.3.3 Modèle bande étroite

La longueur du réseau L_λ définie ci-dessus correspond à un temps de propagation :

$$\tau_N = \frac{L_\lambda}{c} = \frac{(N-1)d}{c}$$

Lorsque la source est située à l'angle $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. En effet les ondes transportées $s_i(t)e^{j\omega t}$ sont de bande étroite tant que les signaux de base $s_i(t)$ varient lentement par rapport à la période τ_N qui est la durée nécessaire qu'un signal se propage du premier au dernier élément [CGY10, Gro05, KV96, FSB08], ceci est équivalent à :

$$s_i(t - \frac{r_{0i}}{c} - \tau_N) \simeq s_i(t - \frac{r_{0i}}{c}) \quad (2.30)$$

L'analyse spectrale d'une telle onde $s_i(t)e^{j(\omega t - \mu)}$ montre que le spectre est étroitement concentré autour de la fréquence porteuse f_c , contrairement au modèle large bande [YKM06, FTSM10] dont la figure 2.7 représente un exemple d'un spectre d'une source large bande ayant une fréquence centrale égale à $f_c = 325$ Hz.

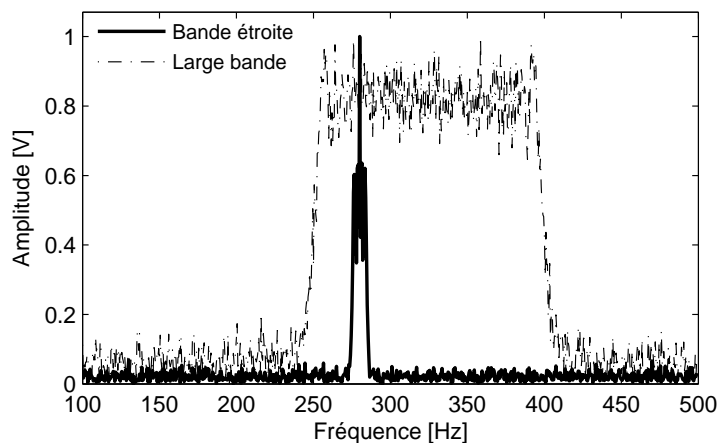


FIGURE 2.7 – Spectre large bande [250 Hz, 400 Hz] en comparaison avec un spectre de bande étroite de fréquence porteuse $f_c = 280$ Hz.

2.3.4 Sources fixes

Durant le temps d'observation T qui correspond à K échantillons, les P sources qui émettent les radiations doivent être stables dans leurs positions [FSB08] ou au moins leurs déplacements sont négligeables. Pour la $i^{\text{ème}}$ source de coordonnées (x_i, y_i, z_i) relativement au repère associé au système, les dérivées temporelles pendant la période T doivent être nulles :

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial y_i}{\partial t} = \frac{\partial z_i}{\partial t} = 0$$

2.3.5 Contrainte géométrique du réseau

On peut considérer le front d'onde qui est capté par N éléments comme il a subi un échantillonnage spatial, ce processus est régulier avec une incrémentation de la distance lorsque le front d'onde traverse progressivement les antennes. On a déjà montré dans ce qui précède que le facteur du déphasage de la $i^{\text{ème}}$ onde entre les deux premiers éléments

est donné par $e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_2} = e^{-j2\pi\lambda^{-1}d \sin\theta} = e^{-j\mu_i}$ où l'argument principal est borné $-\pi \leq \mu_i \leq \pi$ ce qui implique que :

$$\frac{d}{\lambda} \leq \frac{1}{2} \quad (2.31)$$

La valeur optimale de la distance doit être inférieure ou égale au demi de la longueur d'onde [CGY10].

2.4 Caractéristiques de l'antenne uniforme linéaire

2.4.1 Centro-symétrie

L'antenne ULA est décrite par sa matrice directionnelle donnée par l'équation (2.28) qui vérifie la condition de centro-symétrie que nous expliquons dans cette partie. Considérons une matrice X de l'ensemble des matrices $\mathbb{R}^{N \times K}$, X est dite centro-symétrique [CGY10] si elle vérifie la condition :

$$\Pi_N X \Pi_K = X \quad (2.32)$$

Avec $\Pi_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est la matrice d'échange définie par :

$$\Pi_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Le produit $\Pi_N X$ inverse l'ordre des lignes de X , tandis que $\Pi_N X \Pi_K$ inverse l'ordre des colonnes, géométriquement, si X a subi une rotation de 180° elle reste inchangée. Dans le cas des matrices complexes $X \in \mathbb{C}^{N \times K}$, X est dite centro-symétrique hermitienne si elle vérifie la relation :

$$\Pi_N X^* \Pi_K = X \quad (2.34)$$

Avec $(.)^*$ est l'opérateur du conjugué. La matrice directionnelle du réseau ULA est considérée centro-symétrique [CGY10] parce que les positions des antennes élémentaires du réseau sont symétriques par rapport au centroïde du diagramme du rayonnement sachant que tous les éléments sont identiques, la matrice $A(\theta) \in \mathbb{C}^{N \times P}$ vérifie l'équation suivante :

$$\Pi_N A^* = A \Lambda \quad (2.35)$$

La matrice $\Lambda \in \mathbb{C}^{P \times P}$ est diagonale unitaire dont les éléments diagonaux sont :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e^{j(N-1)\mu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{j(N-1)\mu_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & e^{j(N-1)\mu_P} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Avec la phase $\mu_i = 2\pi\lambda^{-1}d \sin \theta_i$. On peut aussi déduire une expression de centrosymétrie plus simplifiée que celle de l'équation (2.35), si on suppose que le nombre des antennes élémentaires N est impair, on peut choisir l'élément central de position $(N-1)/2 + 1$ comme référence de phase, la matrice directionnelle est réécrite sous la nouvelle forme comme suit :

$$A_c = \begin{pmatrix} e^{-j\frac{(N-1)}{2}\mu_1} & e^{-j\frac{(N-1)}{2}\mu_2} & \dots & e^{-j\frac{(N-1)}{2}\mu_P} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{j\frac{(N-1)}{2}\mu_1} & e^{j\frac{(N-1)}{2}\mu_2} & \dots & e^{j\frac{(N-1)}{2}\mu_P} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Ainsi, il est facile de démontrer que la nouvelle matrice A_c vérifie la relation suivante [CGY10] :

$$\Pi_N A_c^* = A_c \quad (2.38)$$

2.4.2 Ambiguïté planaire

Chaque réseau est défini par son domaine de visibilité en terme d'angle solide, c'est à dire l'espace disponible d'observation qui est décrit généralement par les coordonnées sphériques. Si une source, qui rayonne, est située en dehors du domaine Ω , l'analyse spectrale ne peut donner la position exacte de la source, on dit qu'il y a une ambiguïté d'interprétation de la position (θ, φ) [MP98]. Afin d'explicitier le domaine de visibilité de l'antenne ULA, on commence par le cas bidimensionnel, le réseau et la source se situent dans le même plan horizontal, on associe au réseau un référentiel (o, x, y, z) , la position du $n^{\text{ième}}$ élément est $\vec{r}_n = -(n-1)d\vec{e}_y$, cette configuration est donnée par la figure 2.8.

La source est placée à l'infini avec un angle θ par rapport au référentiel. Etant donné que le plan est divisé en quatre sous plans, on exploite toutes les possibilités de la position θ , ainsi on suppose que quatre sources sont présentes. En suivant le sens trigonométrique, les vecteurs d'ondes correspondants sont donnés par :

$$\begin{cases} \vec{k}_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta \vec{e}_x - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{k}_2 = +\frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta \vec{e}_x - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{k}_3 = +\frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta \vec{e}_x + \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{k}_4 = -\frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta \vec{e}_x + \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \vec{e}_y \end{cases} \quad (2.39)$$

L'analyse des positions est basée sur l'expression du déphasage $e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}_n}$, en appliquant cette relation aux quatre quantités ci-dessus on trouve le système (2.40).

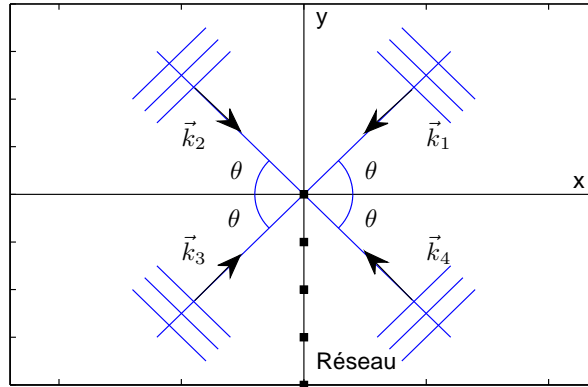


FIGURE 2.8 – Ambiguïté planaire de l'antenne ULA.

$$\begin{cases} \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_n = +\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d\sin(\theta) \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_n = +\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d\sin(\theta) \\ \vec{k}_3 \cdot \vec{r}_n = -\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d\sin(\theta) \\ \vec{k}_4 \cdot \vec{r}_n = -\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d\sin(\theta) \end{cases} \quad (2.40)$$

On déduit qu'on ne peut pas discerner les sources \vec{k}_1 et \vec{k}_2 , ce qui est la même chose pour les deux autres sources \vec{k}_3 et \vec{k}_4 . En regroupant les sources discernables, on constitue deux ensembles $\{\vec{k}_1, \vec{k}_4\}$ et $\{\vec{k}_2, \vec{k}_3\}$. La zone exploitable pour l'antenne ULA est $\Omega = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (respectivement $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$). On peut démontrer ce résultat si on considère deux cas particuliers de la position, si la propagation est horizontale ($\theta = 0$), le vecteur d'onde est colinéaire avec la normale (axe (ox)), deux cas sont possibles $\vec{k} = \pm \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_x$, les fronts d'onde sont parallèles avec l'antenne et $e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}_n} = 1$, on ne peut pas savoir si la source est dans le demi-plan $(o, -x, y)$ ou dans $(o, +x, y)$. Par contre si la propagation est verticale ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$), les deux possibilités sont $\vec{k} = \pm \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_y$ et le facteur de phase devient $e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}_n} = \pm(n-1)d2\pi\lambda^{-1}$, il y a possibilité d'obtenir l'information de la position soit dans le demi-plan $(o, x, -y)$ ou dans $(o, x, +y)$.

Cette ambiguïté est connue sous le nom de *Back-Front Ambiguity*. Si on veut identifier les deux paramètres (θ, φ) . On montre dans la partie qui suit que le réseau ULA présente un autre type d'ambiguïté ce qui nécessite l'utilisation d'autres types de réseaux.

2.4.3 Ambiguïté conique

La source ponctuelle est généralement identifiée par trois variables (r_0, θ, φ) dans les gammes $r_0 \in [0, +\infty]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varphi \in [0, \pi]$. Prenons les deux variables angulaires (θ, φ) , pour que le résultat précédent du domaine Ω soit compatible avec le présent cas, on doit changer les coordonnées de l'antenne. En effet, on considère un trièdre orthonormé direct (o, x, y, z) de telle sorte que l'axe de l'antenne soit sur l'axe (oz) , le domaine

d'observation est translaté en $\Omega = [0, \pi]$, cette transformation est équivalente à multiplier les coordonnées des éléments du réseau ULA de la configuration précédente par la matrice de rotation autour de l'axe (ox) :

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

les nouvelles coordonnées des éléments sont $\vec{r}_n = (n-1)d\vec{e}_z$ et la projection complète du vecteur d'onde est $\vec{k} = \vec{k}_r + \vec{k}_\theta + \vec{k}_\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(\sin(\varphi)\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\sin(\theta)\vec{e}_y + \cos(\varphi)\vec{e}_z)$ de module $\|\vec{k}\| = \sqrt{\vec{k}_r^2 + \vec{k}_\theta^2 + \vec{k}_\varphi^2} = 2\pi\lambda^{-1}$. Le produit scalaire de la relation du déphasage est $\vec{k} \cdot \vec{r}_n = -2\pi\lambda^{-1}d(n-1)\cos(\varphi)$, le seul paramètre qui est dans cette expression est φ , la variable θ est ambiguë, est puisque $\theta \in [0, 2\pi]$ donc le signal reçu par l'antenne d'une source (θ, φ) est le même pour toute source de même élévation φ mais de n'importe quelle valeur de θ ce qui donne une ambiguïté conique de l'antenne ULA comme illustré dans la figure 2.9 où l'élément central de coordonnées (0,0,0) est pris comme référence de phase.

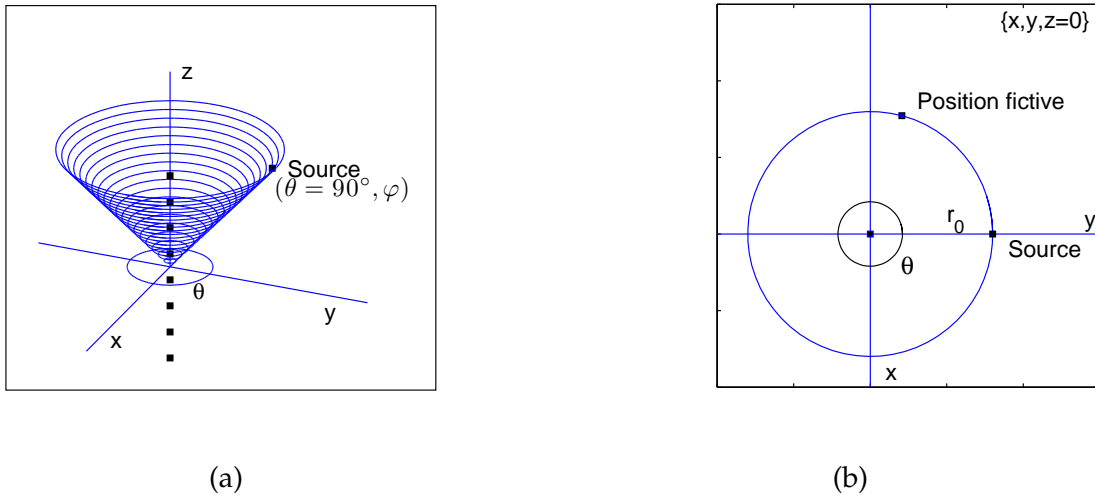


FIGURE 2.9 – Ambiguïté conique du réseau d'antennes ULA pour une source définie par ($\theta = 90^\circ$, $0^\circ < \varphi < 90^\circ$), (a) représentation tridimensionnelle, (b) projection sur le plan (x, y).

L'antenne ULA permet de détecter un seul degré de liberté de la source ponctuelle θ ou φ , selon la polarisation de cette dernière, dans la gamme $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pour effectuer une localisation bidimensionnelle, il est nécessaire d'utiliser une géométrie bidimensionnelle du réseau [CGY10] dont on présente dans la figure 2.10 quelques configurations.

Les coordonnées du $n^{\text{ième}}$ capteur \vec{r}_n pour n'importe quelle géométrie sont données par la relation $\vec{r}_n = (\vec{r}_n \cdot \vec{e}_x)\vec{e}_x + (\vec{r}_n \cdot \vec{e}_y)\vec{e}_y$ et chaque géométrie a sa matrice directionnelle.

$$A(\theta, \varphi) = [a(\theta_1, \varphi_1), a(\theta_2, \varphi_2), \dots, a(\theta_P, \varphi_P)] \quad (2.42)$$

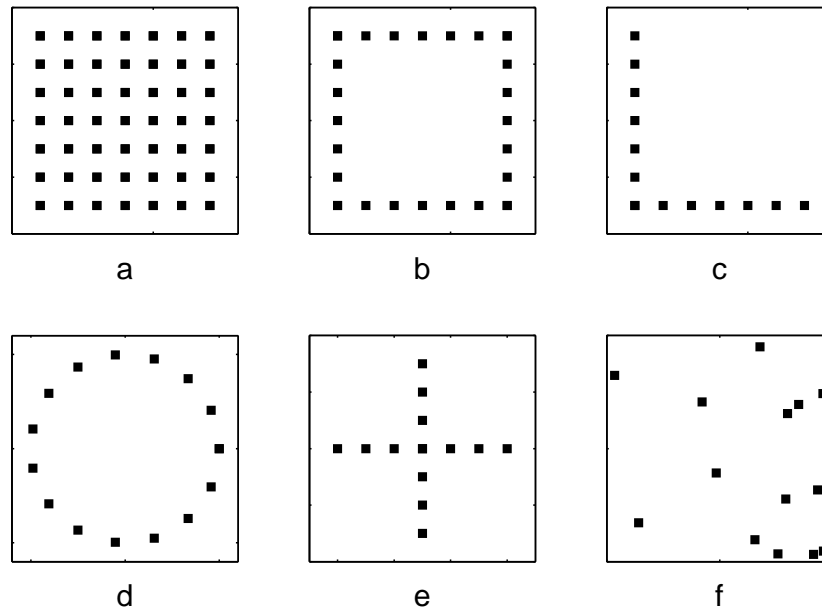


FIGURE 2.10 – Exemples des réseaux bidimensionnels, (a) rectangulaire, (b) rectangulaire creux, (c) réseau de forme L, (d) circulaire, (e) réseau de forme + et (f) réseau aléatoire.

Avec $A(\theta, \varphi) \in \mathbb{C}^{N \times P}$ et N est le nombre total des éléments, par exemple le cas rectangulaire (a) de la figure 2.10, $N = N_x N_y = 49$.

2.5 Statistiques d'ordre deux des signaux reçus

2.5.1 Modèle stochastique

Comme on a expliqué précédemment, plusieurs obstacles empêchent la propagation uniforme des ondes. Parmi les perturbations on cite, par exemple, la diffraction quand l'onde rencontre un objet ou une ouverture [Gro05], la réflexion est aussi un phénomène souvent observé, l'onde change sa direction de propagation quand les fronts d'onde traversent l'interface entre deux milieux qui possèdent différentes propriétés électriques [Gro05]. Durant ce processus l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion de telle sorte que les fronts d'onde réfléchis se propagent dans le même milieu que ceux incidents [Gro05].

L'autre type de perturbation réside au niveau des antennes, à savoir : le bruit thermique [SWSPB03] et les défauts électroniques du réseau. Pour cet effet les signaux modulés $s(t)$ et le bruit additif $n(t)$ sont les deux variables stochastiques [CGY10] de l'équation (2.26). Les variables multidimensionnelles $S(t)$ et $N(t)$ sont des processus complexes ergodiques de moyennes nulles et de puissances différentes :

$$\begin{cases} S(t) = \Re[S(t)] + j\Im[S(t)] \\ N(t) = \Re[N(t)] + j\Im[N(t)] \\ E\{S(t)\} = E\{\Re[S(t)]\} + jE\{\Im[S(t)]\} = 0_{P \times 1} \\ E\{N(t)\} = E\{\Re[N(t)]\} + jE\{\Im[N(t)]\} = 0_{N \times 1} \end{cases} \quad (2.43)$$

La figure 2.11 représente un exemple des signaux reçus de deux sources ponctuelles de différentes directions. La matrice $X(t)$ est stochastique, sa puissance moyenne est donnée par la relation [SS10] :

$$\sigma_{X(t)}^2 = \frac{\text{Tr}(\Gamma)}{N} \quad (2.44)$$

Γ est la matrice de covariance de $X(t)$, l'opérateur $\text{Tr}(\cdot)$ est la trace de la matrice définie par $\text{Tr}(\Gamma) = \sum_{i=1}^N \Gamma_{ii}$. La plupart des techniques d'analyse spectrale de la matrice $X(t)$ sont basées sur les statistiques d'ordre deux [CGY10], pour cela on doit expliciter l'expression théorique de la matrice $\Gamma = \langle x(t)x^+(t) \rangle$ qu'on appelle matrice spectrale ou de covariance spatiale.

Remarque : Les notations de la moyenne statistique $E\{\cdot\}$ et $\langle \cdot \rangle$ sont équivalentes.

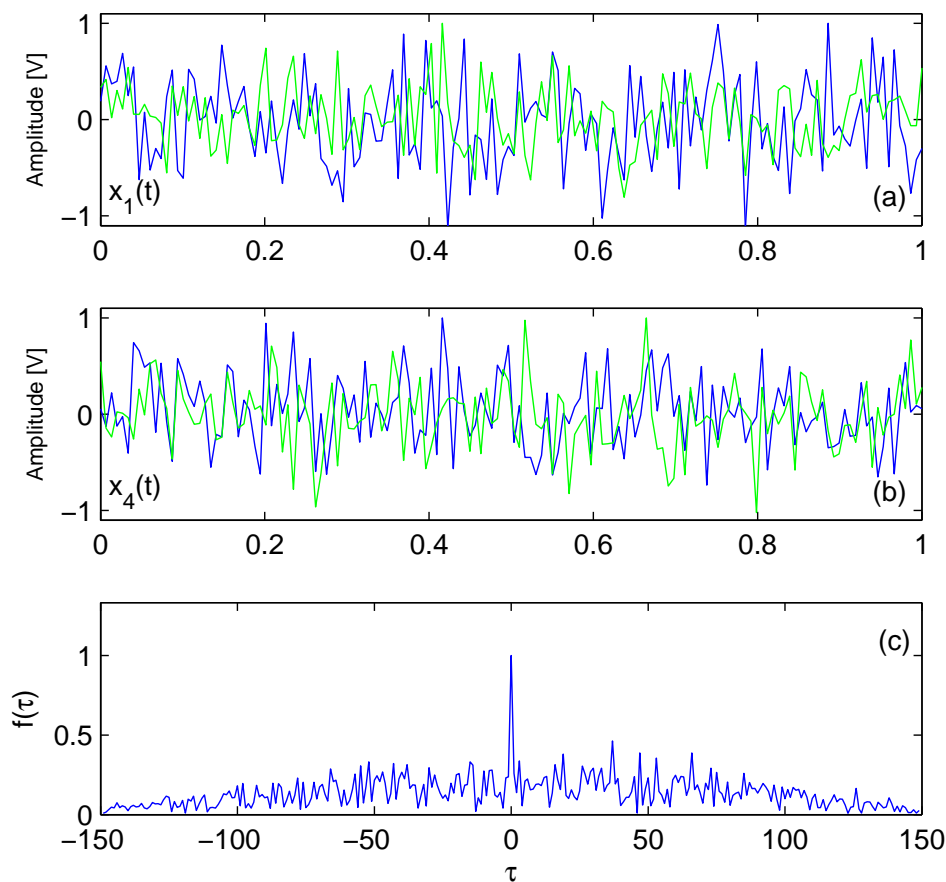


FIGURE 2.11 – Exemple d'une représentation des parties imaginaires et réelles des signaux provenant de deux directions différentes, (a) $(\Re[x_1(t)], \Im[x_1(t)])$, (b) $(\Re[x_4(t)], \Im[x_4(t)])$ et (c) la fonction de corrélation $f(x_1(t), x_4(t))$.

2.5.2 Matrice spectrale du réseau

Généralement pour un signal complexe et continue $x(t) \in \mathbb{C}$, la fonction d'autocorrélation mesure la corrélation de $x(t)$ avec lui même pendant un intervalle du temps τ , elle est définie par :

$$f(x(t), \tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t + \tau)dt \quad (2.45)$$

Avec $x^*(t)$ est le signal conjugué, si $x(t)$ est un processus aléatoire au sens large, alors la fonction d'autocorrélation peut être calculée par la moyenne statistique $f(x(t), \tau) = \langle x(t)x^*(t + \tau) \rangle$, de plus si $x(t)$ est un processus ergodique, cette moyenne peut être remplacée par la limite de la moyenne temporelle :

$$f(x(t), \tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x^*(t + \tau)dt \quad (2.46)$$

La version discrète de l'équation (2.46) pour un nombre K d'échantillons, est donnée par $f(x(t), \tau) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \sum_{t=1}^K x(t)x^*(t + \tau)$. On applique cette définition de l'autocorrélation pour définir la matrice de covariance Γ associée à la matrice des signaux $X(t)$, la mesure de corrélation est prise en retard nul i.e $\tau = 0$. On commence par réécrire le système des équations (2.26) pour un système de N antennes et P sources à l'instant t :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ x_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} & \dots & e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_1} & \dots & e^{-j\vec{k}_P \cdot \vec{r}_1} \\ e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_2} & \dots & e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_2} & \dots & e^{-j\vec{k}_P \cdot \vec{r}_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_N} & \dots & e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_N} & \dots & e^{-j\vec{k}_P \cdot \vec{r}_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ s_P(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ n_N(t) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Le signal reçu au niveau du $n^{ième}$ capteur est $x_n(t) = \sum_{i=1}^P s_i(t)e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} + n_n(t)$, en mesurant la corrélation pour un retard nul $\tau = 0$, on définit la puissance du signal par l'équation suivante :

$$\langle x_n(t)x_n^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x_n^2(t)|dt \quad (2.48)$$

De façon similaire, on définit la puissance d'interaction entre le $n^{ième}$ et le $p^{ième}$ signal par la relation suivante :

$$\langle x_n(t)x_p^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_n(t)x_p^*(t)dt \quad (2.49)$$

Ensuite, on définit à l'instant (t) la matrice dyadique (de rang 1) par le produit suivant :

$$x(t)x^+(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ x_N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^*(t) & x_2^*(t) & \dots & \dots & x_N^*(t) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

$$= \begin{pmatrix} |x_1^2(t)| & x_1(t)x_2^*(t) & x_1(t)x_3^*(t) & \dots & x_1(t)x_N^*(t) \\ x_2(t)x_1^*(t) & |x_2^2(t)| & x_2(t)x_3^*(t) & \dots & x_2(t)x_N^*(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N-1}(t)x_1^*(t) & \dots & \dots & \dots & x_{N-1}(t)x_N^*(t) \\ x_N(t)x_1^*(t) & \dots & \dots & \dots & |x_N^2(t)| \end{pmatrix}$$

La matrice de corrélation de l'ensemble des signaux est la moyenne de $\langle x(t)x^+(t) \rangle$ définie par l'intégrale matricielle :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x^+(t)dt$$

En appliquant cette intégrale pour chaque entrée de la matrice, on obtient la matrice suivante :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \langle |x_1^2(t)| \rangle & \langle x_1(t)x_2^*(t) \rangle & \langle x_1(t)x_3^*(t) \rangle & \dots & \langle x_1(t)x_N^*(t) \rangle \\ \langle x_2(t)x_1^*(t) \rangle & \langle |x_2^2(t)| \rangle & \langle x_2(t)x_3^*(t) \rangle & \dots & \langle x_2(t)x_N^*(t) \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle x_{N-1}(t)x_1^*(t) \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle x_{N-1}(t)x_N^*(t) \rangle \\ \langle x_N(t)x_1^*(t) \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle |x_N^2(t)| \rangle \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

On doit maintenant expliciter chaque composante de la matrice Γ qui dépend des deux processus stochastiques $s(t)$ et $n(t)$, afin de traiter le cas le plus simple, c'est à dire que les interactions entre les composantes du bruit $n(t)$ et celles du signal $s(t)$ sont minimales, on doit se baser sur les trois hypothèses suivantes :

- Les signaux ergodiques $S(t)$ ne sont pas corrélés mais peuvent avoir des puissances différentes, donc $\forall (i, j) \in \{1, \dots, P\}$ on a :

$$\begin{cases} \langle s_i(t)s_j^*(t) \rangle = \sigma_i^2 \delta_{ij} \\ \langle s_i(t)s_i^*(t + \tau) \rangle = \sigma_i^2 \delta(\tau) \end{cases} \quad (2.52)$$

L'exemple de la fonction de corrélation pour la deuxième équation (2.52) est présenté dans la figure 2.11 (c).

- De même, l'ensemble des processus aléatoires, $N(t)$, des perturbations sont décorrelés. $\forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}$ on a la même puissance pour chaque élément du réseau d'antennes :

$$\begin{cases} \langle n_i(t)n_j^*(t) \rangle = \sigma^2 \delta_{ij} \\ \langle n_i(t)n_i^*(t + \tau) \rangle = \sigma^2 \delta(\tau) \end{cases} \quad (2.53)$$

- Les deux processus stochastiques multivariés $N(t)$ et $S(t)$ sont statistiquement indépendants, c'est à dire $\forall i \in \{1, \dots, P\}$ et $\forall j \in \{1, \dots, N\}$ on a la relation :

$$\langle s_i(t)n_j^*(t) \rangle = 0 \quad (2.54)$$

Pour calculer théoriquement les composantes de Γ , on commence par les éléments diagonaux, on utilise les indices n et p pour ne pas confondre les notations :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{nn} &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^P s_i(t) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} + n_n(t) \right] \left[\sum_{i=1}^P s_i^*(t) e^{j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} + n_n^*(t) \right] dt \quad (2.55) \\
&= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left[\int_0^T \sum_{i=1}^P |s_i^2(t)| dt + \int_0^T \sum_{i=1}^P \sum_{j=1, j \neq i}^P s_i(t) s_j^*(t) e^{j(\vec{k}_j - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}_n} dt + \right. \\
&\quad \left. \int_0^T \sum_{i=1}^P s_i(t) n_n^*(t) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} dt + \int_0^T \sum_{i=1}^P s_i^*(t) n_n(t) e^{j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} dt + \int_0^T |n_n^2(t)| dt \right]
\end{aligned}$$

En fonction de la moyenne statistique, cette dernière équation (2.55) peut être mise sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{nn} &= \sum_{i=1}^P \langle |s_i^2(t)| \rangle + \langle |n_n^2(t)| \rangle + \sum_{i=1}^P \langle s_i^*(t) n_n(t) e^{j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} \rangle + \quad (2.56) \\
&\quad \sum_{i=1}^P \sum_{j=1, j \neq i}^P \langle s_i(t) s_j^*(t) e^{j(\vec{k}_j - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}_n} \rangle + \sum_{i=1}^P \langle s_i(t) n_n^*(t) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} \rangle
\end{aligned}$$

Les hypothèses de corrélation vont simplifier l'équation, en effet les trois dernières expressions sont nulles et l'expression théorique des éléments de la diagonale sont :

$$\Gamma_{nn} = \sum_{i=1}^P \langle |s_i^2(t)| \rangle + \langle |n_n^2(t)| \rangle \quad (2.57)$$

On évalue de la même manière les autres éléments, la puissance moyenne d'interaction entre le $n^{\text{ième}}$ et le $p^{\text{ième}}$ élément est :

$$\Gamma_{np} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^P s_i(t) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} + n_n(t) \right] \left[\sum_{i=1}^P s_i^*(t) e^{j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_p} + n_p^*(t) \right] dt \quad (2.58)$$

En calculant chaque terme, comme on a fait pour le cas précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{np} &= \sum_{i=1}^P \langle |s_i^2(t)| e^{j\vec{k}_i \cdot (\vec{r}_p - \vec{r}_n)} \rangle + \sum_{i=1}^P \sum_{j=1, j \neq i}^P \langle s_i(t) s_j^*(t) e^{j(\vec{k}_j \cdot \vec{r}_p - \vec{k}_i \cdot \vec{r}_n)} \rangle + \quad (2.59) \\
&\quad \sum_{i=1}^P \langle s_i(t) n_p^*(t) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} \rangle + \sum_{i=1}^P \langle s_i^*(t) n_n(t) e^{j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_p} \rangle + \langle n_n(t) n_p^*(t) \rangle
\end{aligned}$$

Dans ce cas on exploite toutes les hypothèses des deux processus mis en équation, ainsi le seul terme non nul est le premier et les expressions théoriques des éléments non diagonaux de la matrice de covariance spatiale sont données par :

$$\begin{cases} \Gamma_{np} = \sum_{i=1}^P \langle |s_i^2(t)| \rangle e^{j\vec{k}_i \cdot (\vec{r}_p - \vec{r}_n)} \\ \Gamma_{pn} = \sum_{i=1}^P \langle |s_i^2(t)| \rangle e^{j\vec{k}_i \cdot (\vec{r}_n - \vec{r}_p)} \end{cases} \quad (2.60)$$

Dans un second temps, on élabore facilement l'expression théorique de la matrice Γ en utilisant la forme compacte du modèle des signaux comme suit :

$$\begin{aligned} \langle x(t)x^+(t) \rangle &= \langle As(t) + n(t) \rangle \langle s^+(t)A^+ + n^+(t) \rangle \\ &= \langle As(t)s^+(t)A^+ \rangle + \langle As(t)n^+(t) \rangle + \langle n(t)s^+(t)A^+ \rangle + \langle n(t)n^+(t) \rangle \end{aligned} \quad (2.61)$$

Les hypothèses d'indépendance statistique entres les différents signaux nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} A \langle s(t)n^+(t) \rangle = 0_{N \times N} \\ \langle n(t)s^+(t) \rangle A^+ = 0_{N \times N} \end{cases}$$

Finalement la matrice Γ [CGY10, KV96, FSB08] est donnée par la formule suivante :

$$\Gamma = A \langle s(t)s^+(t) \rangle A^+ + \langle n(t)n^+(t) \rangle = A\Gamma_{ss}A^+ + \Gamma_n \quad (2.62)$$

Avec $\Gamma_n = \sigma^2 I_N$ représente la matrice de corrélation de processus multivariable $N(t)$, σ^2 est le puissance du bruit (tous les éléments des antennes ont la même puissance), et Γ_{ss} est la matrice de corrélation du processus aléatoire $S(t)$, par hypothèse les signaux peuvent avoir des puissances différentes :

$$\Gamma_{ss} = \langle s(t)s^+(t) \rangle = \begin{pmatrix} \langle |s_1^2(t)| \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle |s_2^2(t)| \rangle & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \langle |s_P^2(t)| \rangle \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

On éclaire la structure générale de la matrice Γ par un exemple de simulation théorique. On considère un cas simple de trois antennes et une source de puissance $\langle |s^2(t)| \rangle = \sigma_1^2$ avec une puissance de bruit de $\langle |n_i^2(t)| \rangle = \sigma^2$ pour $i = 1, 2, 3$, l'angle d'incidence est mesuré par rapport au premier élément, le vecteur directionnel est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-j\mu_1} \\ e^{-j2\mu_1} \end{pmatrix}$$

Avec $\mu_1 = 2\pi d\lambda^{-1} \sin \theta_1$, les hypothèses de décorrélation sont prises en compte, la matrice de corrélation de processus $N(t)$ est ($\Gamma_n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$) donnée par :

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de corrélation des sources $S(t)$ devient un scalaire, puisque on n'a considéré qu'une seule source $\Gamma_{ss} = \sigma_1^2$. Le calcul du premier terme de l'équation (2.62) donne :

$$A\Gamma_{ss}A^+ = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1^2 e^{j\mu_1} & \sigma_1^2 e^{j2\mu_1} \\ \sigma_1^2 e^{-j\mu_1} & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 e^{j\mu_1} \\ \sigma_1^2 e^{-j2\mu_1} & \sigma_1^2 e^{-j\mu_1} & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

La matrice de covariance spatiale théorique pour cet exemple de trois antennes est donnée par :

$$\Gamma = A\Gamma_{ss}A^+ + \Gamma_n = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \sigma^2 & \sigma_1^2 e^{j\mu_1} & \sigma_1^2 e^{j2\mu_1} \\ \sigma_1^2 e^{-j\mu_1} & \sigma_1^2 + \sigma^2 & \sigma_1^2 e^{j\mu_1} \\ \sigma_1^2 e^{-j2\mu_1} & \sigma_1^2 e^{-j\mu_1} & \sigma_1^2 + \sigma^2 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Les signaux sont numériques, alors la version discrète de la matrice de covariance est obtenue en remplaçant les intégrales par les sommations, elle est fonction d'un nombre infini d'échantillons K :

$$\Gamma = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \sum_{t=1}^K x(t)x^+(t) \quad (2.66)$$

Puisque le nombre des échantillons K est limité, on obtient une estimation [FSB08] de Γ :

$$\Gamma = \frac{1}{K} \sum_{t=1}^K x(t)x^+(t) = \frac{1}{K} X(t)X^+(t) \quad (2.67)$$

Au fur et à mesure que K augmente l'estimation s'améliore, on peut mettre en preuve cette constatation en mesurant l'erreur de la norme comme suit, on définit Γ_t la matrice obtenue avec t échantillons, et Γ_{t+1} celle de $t+1$, avec $t \in [1, \dots, K]$, à chaque valeur de t on calcule la norme de Frobenius de l'erreur $d\Gamma$ définie par :

$$\|d\Gamma\|_F = \|\Gamma_t - \Gamma_{t+1}\|_F \quad (2.68)$$

Avec l'opérateur $\|d\Gamma\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |d\Gamma_{ij}|^2}$.

La figure 2.12 représente le résultat de la simulation pour un système de $\Gamma \in \mathbb{C}^{11 \times 11}$ et deux sources de différentes positions avec $t = 1, \dots, 600$, on remarque que la norme de l'erreur diminue avec l'augmentation du nombre t .

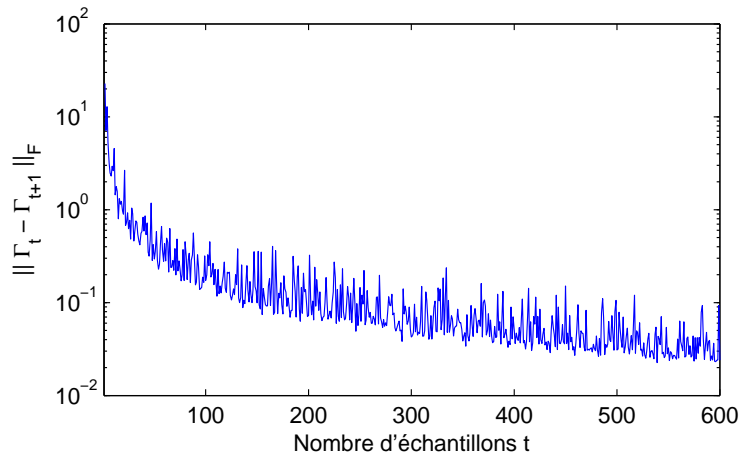


FIGURE 2.12 – Norme de Frobenius de l'erreur $\Gamma_t - \Gamma_{t+1}$ en fonction du nombre d'échantillons.

La plupart des algorithmes de localisation DoA reposent sur la matrice Γ [CGY10], en effet la structure de cette matrice est sensible à des variations des paramètres du système

à étudier à savoir : le nombre des antennes N et le nombre des sources ponctuelles P , ainsi que le nombre des échantillons K .

Pour la cas de localisation bidimensionnelle, les positions des sources (θ_i, φ_i) ainsi que leurs différences angulaires $(|\theta_i - \theta_j|, |\varphi_i - \varphi_j|)$ jouent un rôle important pour leurs séparations, si ces différences angulaires sont petites, la distinction devient difficile [SMM03]. D'un autre côté, les caractéristiques des processus $S(t)$ et $N(t)$ déterminent les propriétés de la matrice de covariance, la structure théorique de Γ que nous avons élaboré ci-dessus est basée sur les hypothèses d'absence de corrélation et d'interférence entre les sources et le bruit. Si les fronts d'ondes arrivant au système d'antennes sont partiellement corrélés ou cohérents [KV96], le modèle de l'équation (2.62) n'est plus valide, ce qui nécessite de prendre en compte le degré de corrélation entre les ensembles des deux variables statistiques $n(t)$ et $s(t)$, ou d'utiliser d'autres approches comme par exemple des statistiques d'ordre supérieur à savoir les cumulants d'ordre supérieur [YF97].

Concernant les paramètres des sources d'ondes, on a supposé que tous les signaux ont une même fréquence porteuse, si ces sources ont différentes fréquences $f_i, i \in \{1, \dots, P\}$ (différentes longueurs d'onde λ_i), le problème devient difficile à traiter, parce que l'échantillonnage spatial des fronts d'ondes par le réseau n'est plus uniforme. En effet le réseau (pour le cas de bande étroite) est destiné à opérer avec une fréquence bien déterminée et qui se caractérise par la distance entre les capteurs $d = f(\lambda)$, sa géométrie $\vec{r}_j, j \in \{1, \dots, N\}$ unidimensionnelle ou bidimensionnelle, sa longueur maximale $L_\lambda = f(d, N)$ et son domaine de visibilité $\Omega = [\theta_{min}, \theta_{max}]$. La dernière remarque concernant ce chapitre est que les sources peuvent exister avec différentes puissances, dans ce cas on associe à chaque source $i = 1, \dots, P$ son rapport signal sur bruit quand ce dernier n'est pas corrélé :

$$SNR_i = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} \right) \quad (2.69)$$

Avec σ_i^2 est la puissance de la $i^{\text{ème}}$ source et σ^2 est la puissance du bruit, le cas le plus simple est lorsque toutes les sources ont approximativement la même puissance afin de définir un rapport signal sur bruit unique [CGY10].

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons détaillé le modèle de propagation pour le problème de localisation des directions d'arrivées DoA des sources ponctuelles en champ lointain pour le modèle de bande étroite. A partir de l'équation de propagation du front d'onde jusqu'à les statistiques d'ordre deux des signaux numériques reçus par le réseau d'antennes. En premier temps, on a explicité la solution de propagation issue des équations des ondes électromagnétiques, puis on a présenté cinq hypothèses fondamentales sur le problème de traitement des positions des sources rayonnantes ainsi que la nature du milieu de propagation. Dans un deuxième temps, nous avons défini les caractéristiques du réseau

d'antennes à savoir la centro-symétrie et les types d'ambiguïté spatiales. Ensuite, on a présenté le modèle statistique des signaux reçus par le réseau qui est un processus aléatoire multivariable, enfin on a calculé les statistiques d'ordre deux des données en détaillant la structure générale de la matrice de covariance spatiale dans le cas où les processus stochastiques sont décorrélés.

Chapitre 3

MÉTHODES CONVENTIONNELLES DES DIRECTIONS D'ARRIVÉES

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'élaborer une étude comparative entre les méthodes conventionnelles d'estimation des directions d'arrivées (DoA) des sources ponctuelles, fixes, et lointaines. On commence par la présentation des méthodes de formation de voies (*Beamforming*), les méthodes des opérateurs du rang unitaire et les méthodes des sous espaces orthogonaux. L'étude comparative est réalisée en se basant sur une configuration unique du système antennes-sources pour les neuf méthodes que nous élaborons. Ensuite on explique le principe de la simulation numérique Monte Carlo des données du système afin de prendre en compte plusieurs facteurs perturbateurs. Les méthodes haute résolution des sous espaces orthogonaux requièrent la connaissance du nombre de sources présentes durant le temps d'observation. Dans la quatrième partie, on présente les critères de détection du nombre des sources, qui utilisent un mécanisme d'optimisation des fonctions des valeurs propres de la matrice spectrale du réseau. Dans la dernière partie, on présente une des solutions de décorrélation des sources partiellement corrélées ou cohérentes, il s'agit de la transformation en valeurs réelles de la matrice du réseau à l'aide des opérateurs unitaires, on choisit le spectre du propagateur partiel, méthode DoA récemment proposée, pour évaluer l'influence de la transformation unitaire pour les sources proches et cohérentes.

3.2 Méthodes de formation de voies

3.2.1 Spectre de formation de voies

Parmi les premières techniques de construction des spectres angulaires est la formation de voies (*Beamforming*) [Bar50, God97]. Le principe du fonctionnement est basé

sur un balayage électronique d'une zone angulaire Ω et de mesurer la puissance des signaux du réseau à chaque direction θ avec un pas convenablement choisi $d\theta$ tel que $\Omega = [\theta_{min} : d\theta : \theta_{max}]$. Si l'angle testé est une direction d'arrivée (DoA), alors la puissance du spectre $f(\theta)$ est maximale, ceci requiert la connaissance de la géométrie du réseau pour générer électroniquement le vecteur directionnel (*steering vector*) w . Une combinaison linéaire du vecteur directionnel avec le vecteur des mesures à l'instant t donne un signal unidimensionnel :

$$y(t) = w^+ x(t) \quad (3.1)$$

La puissance totale moyenne du réseau est obtenue en combinant tous les échantillons acquis comme suit :

$$\sigma_{y(t)}^2 = \frac{1}{K} \sum_{t=1}^K |y^2(t)| = \frac{1}{K} \sum_{t=1}^K w^+ x(t) x^+(t) w = w^+ \Gamma w \quad (3.2)$$

Cette puissance est une fonction de la matrice de corrélation Γ du réseau. La méthode de Bartlett [Bar50] est basée sur la normalisation du vecteur directionnel comme suit :

$$w = \frac{a(\theta)}{\sqrt{a^+(\theta)a(\theta)}} \quad (3.3)$$

Le vecteur w est considéré comme un filtre spatial dont les coefficients égalisent les différences de phase sur tous les éléments du réseau pour combiner leurs contributions à maximiser la puissance, le spectre spatial est donné par la relation suivante :

$$f_{bar}(\theta) = \frac{a^+(\theta)\Gamma a(\theta)}{a^+(\theta)a(\theta)} \quad (3.4)$$

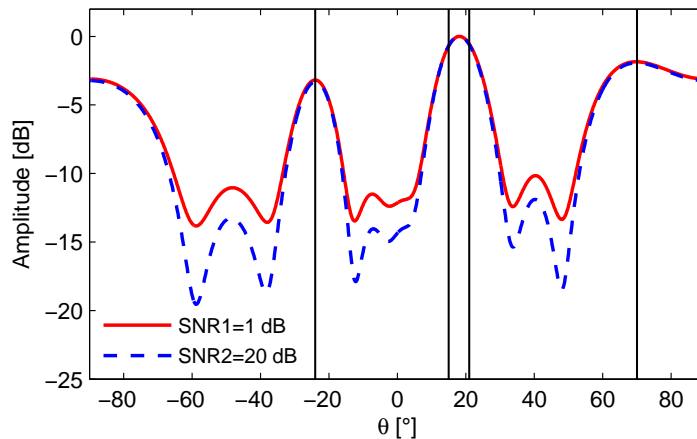
Pour tester le pouvoir de résolution, on implémente une simulation [KSF14a] d'un réseau (ULA) composé de $N = 10$ antennes omnidirectionnelles dont la distance est le demi de la longueur d'onde. Quatre sources ($P = 4$) à peu près de la même puissance émettent des radiations avec la même fréquence porteuse de $f_c = 1$ GHz, la distance uniforme est $d = 15$ cm et la longueur du réseau $L_\lambda = 135$ cm, le nombre des échantillons est fixé à $K = 200$ mesures. Les quatre sources sont non cohérentes et leur matrice de corrélation $\langle s^+(t)s(t) \rangle$ a les valeurs suivantes :

$$\Gamma_{ss} \simeq \begin{pmatrix} 0.9911 & -0.0957 & -0.0586 & 0.0449 \\ -0.0957 & 1.3207 & -0.0092 & -0.0462 \\ -0.0586 & -0.0092 & 1.4030 & 0.0623 \\ 0.0449 & -0.0462 & 0.0623 & 1.4980 \end{pmatrix}$$

Le tableau 3.1 résume les caractéristiques de puissance et d'angle d'arrivée des sources ponctuelles. La figure 3.1 représente le résultat de simulation obtenu à l'aide de la méthode de Bartlett pour deux rapports signal sur bruit $SNR1 = 1$ dB qui modélise la

TABLE 3.1 – Caractéristiques des sources ponctuelles.

Sources	S1	S2	S3	S4
Direction d'arrivée θ_i	-24°	15°	21°	70°
Puissance σ_i^2	1.20 W	1.30 W	1.44 W	1.50 W

FIGURE 3.1 – Spectre de formation de voies pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.

condition d'un environnement perturbé et $SNR2 = 20$ dB pour un environnement optimal. Les lignes verticales de la figure sont les directions d'arrivée exactes, le spectre est normalisé puis tracé en décibel :

$$f_{bar}(\theta) = 20 \log_{10} \left\{ \frac{f(\theta)}{\max(f(\theta))} \right\}$$

Si on trace la fonction $f_{bar}(\theta)$ en échelle linéaire, on peut remarquer que les amplitudes des pics de θ_1 et θ_4 sont proportionnelles à les puissances des sources σ_i^2 avec un facteur égal à N , soit 10 dans ce cas (voir annexe). Le spectre ne peut pas différentier entre les sources de $\theta_2 = 15^\circ$ et $\theta_3 = 21^\circ$, en plus les largeurs des lobes sont grandes et la résolution est plus de 6° , le spectre présente un faible pouvoir de résolution. La limite de Rayleigh de la résolution angulaire pour ce réseau est $\theta_{HPBW} \simeq 11^\circ$ et la résolution de la fonction $f(\theta)$ ne peut dépasser cette limite. La solution consiste à ajouter plusieurs antennes au réseau. La formation de voies est efficace qu'on a une seule source [CGY10], mais lorsque plusieurs sources existent dont les distances angulaires sont petites, une solution optimale existe et qui est basé sur un problème d'optimisation [Cap69].

3.2.2 Spectre de formation de voies optimisée

L'existence de plusieurs sources radiatives contribue à l'apparition des pics secondaires dans le spectre de formation de voies, ce qui rend l'interprétation des données difficile, en plus les sources proches ne sont pas discernables par le spectre. Afin de surmonter ce problème, Capon a proposé une méthode [Cap69] pour focaliser la direction du

lobe principal du réseau lors du balayage électronique tout en annulant la puissance dans les autres directions, cette technique est appelée MVDR (*Minimum Variance Distortionless Response*) [CGY10, FSB08]. Mathématiquement, il s'agit d'un problème d'optimisation où on cherche un vecteur $w \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ qui minimise la puissance de sortie du réseau tout en maintenant un gain unitaire dans la direction du balayage, le problème est modélisé par l'équation suivante :

$$\text{Min}\{w^+ \Gamma w\} \text{ Sous contrainte } w^+ a(\theta) = 1 \quad (3.5)$$

Pour un vecteur directionnel $a(\theta)$, ce problème peut être résolu par les multiplicateurs de Lagrange λ , la fonction résultante est donnée par l'équation :

$$L(w, \lambda) = w^+ \Gamma w - \lambda(1 - w^+ a(\theta)) \quad (3.6)$$

Le minimum de la fonctionnelle ci-dessus est atteint si la dérivée du premier ordre est nulle, la résolution est donnée par les étapes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(w, \lambda)}{\partial w} = 2\Gamma w - \lambda a(\theta) = 0 \\ w = \frac{\lambda}{2} \Gamma^{-1} a(\theta) \\ \lambda = \frac{2}{a^+(\theta) \Gamma^{-1} a(\theta)} \\ w = \frac{\Gamma^{-1} a(\theta)}{a^+(\theta) \Gamma^{-1} a(\theta)} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

En substituant l'expression du vecteur w dans l'équation de la puissance, on obtient le spectre spatial comme suit :

$$f_{Cap}(\theta) = w^+ \Gamma w = \frac{a^+(\theta) \Gamma^{-1} \Gamma \Gamma^{-1} a(\theta)}{a^+(\theta) \Gamma^{-1} a(\theta) a^+(\theta) \Gamma^{-1} a(\theta)} = \frac{1}{a^+(\theta) \Gamma^{-1} a(\theta)} \quad (3.8)$$

Le calcul nécessite l'inversion de la matrice spectrale Γ , pour comparer le pouvoir de résolution avec la méthode de formation de voies, on prend la même configuration du système. La figure 3.2 représente le spectre spatial du MVDR.

On remarque que pour le cas du $SNR = 20$ dB, la résolution du spectre est plus performante que celle de Beamforming [KSF14a]. Les pics sont bien localisés, d'autre part, le deuxième spectre de l'environnement bruité $SNR = 1$ dB n'a pas séparé les sources proches de $\theta_1 = 15^\circ$ et $\theta_2 = 21^\circ$, un test numérique a montré que ces deux sources sont identifiées dès que leur différence angulaire est supérieure ou égale à 9° [KSF14a].

Bien que cette méthode apporte une amélioration considérable, elle présente un inconvénient, lorsque les signaux des sources présentes sont corrélés, leur matrice de corrélation

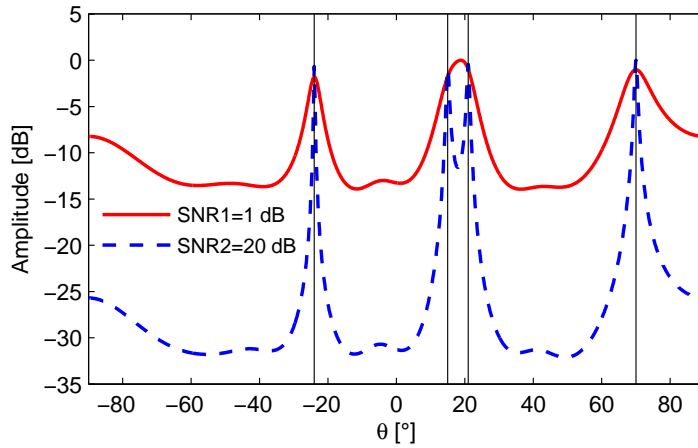


FIGURE 3.2 – Spectre de formation de voies optimisée (MVDR) pour $SNR1 = 1 \text{ dB}$ et $SNR2 = 20 \text{ dB}$.

Γ_{ss} devient singulière [CGY10]. Donc le processus de minimisation du MVDR ne devient plus efficace, d'autres solutions étaient proposées en modifiant la contrainte du gain unitaire $w^+ a(\theta) = 1$, ces approches se basent sur des opérateurs du rang unitaire contrairement à l'opérateur du MVDR qui est de rang complet $\text{rang}\{\Gamma^{-1}\} = N$. Dans le cas des sources statistiquement indépendantes, il qui est équivalent de dire que $\text{rang}\{\Gamma_{ss}\} = P$.

3.3 Méthodes du rang unitaire

3.3.1 Spectre dérivé de la prédiction linéaire

La technique basée sur le principe de la prédiction linéaire [Mak75, Gro05] est souvent utilisée en analyse spectrale et en traitement d'antennes dont le but est l'estimation des directions d'arrivées. Le mécanisme consiste à chercher un vecteur w qui minimise la puissance de sortie du réseau avec la condition de garder le coefficient choisi w_i unitaire pour l'indice $i = \{1, \dots, N\}$, le vecteur solution est donné par la relation suivante :

$$w = \frac{\Gamma^{-1}e_i}{e_i^T \Gamma^{-1}e_i} \quad (3.9)$$

Où $e_i \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la matrice identité I_N , l'indice i spécifie que le coefficient unitaire correspond à la $i^{\text{ème}}$ antenne du réseau, aucune condition n'est imposée sur le choix de la position de cet élément, mais en général, même si on a considéré un réseau uniforme, le choix de cet élément peut influencer les résultats qui dépendent du SNR , des positions des sources et de leurs séparations angulaires $|\theta_i - \theta_j|$. Le spectre de puissance est donnée par :

$$f_{Pl}(\theta) = \frac{e_i^T \Gamma^{-1}e_i}{|e_i^T \Gamma^{-1}a(\theta)|^2} = \frac{\Gamma_{ii}^{-1}}{|e_i^T \Gamma^{-1}a(\theta)|^2} \quad (3.10)$$

Avec Γ_{ii}^{-1} la $i^{\text{ème}}$ composante diagonale de Γ^{-1} , généralement les spectres angulaires sont calculés à l'aides des opérateurs, si on réécrit le dénominateur de l'équation (3.10) sous

la forme $a^+(\theta)\Gamma^{-1}e_i e_i^T \Gamma^{-1}a(\theta)$ on remarque que l'opérateur dérivé $P_i = \Gamma^{-1}e_i e_i^T \Gamma^{-1}$ n'est que le produit dyadique de $i^{\text{ème}}$ colonne de l'inverse de la matrice spectrale, qui est un opérateur de rang unitaire. La figure 3.3 représente le résultat de simulation obtenu du spectre de la prédiction linéaire pour la même configuration du système en choisissant le cinquième élément du réseau comme paramètre e_5 .

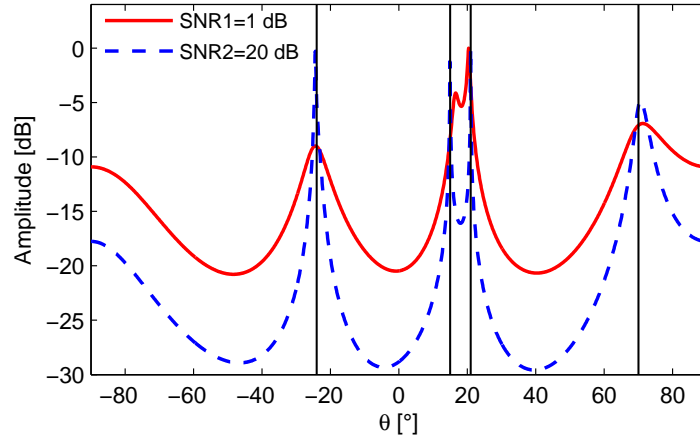


FIGURE 3.3 – Spectre de la méthode de la prédiction linéaire pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.

Le résultat du spectre fournit une résolution meilleure que les deux précédents, les sources proches sont séparées. Généralement cette technique est performante dans le cas où les signaux des sources sont corrélés, concernant l'influence de l'élément de référence e_i , il est préférable de choisir l'élément central du réseau.

3.3.2 Spectre de la méthode d'entropie maximale

La méthode du maximum d'entropie MEM [God97] (*Maximum Entropy Method*) proposée par Burg [Gro05], est similaire à celle de la prédiction linéaire, c'est à dire un opérateur de rang unitaire déduit de l'inverse de la matrice spectrale.

Le principe consiste en un problème d'optimisation de telle sorte à minimiser la puissance de sortie du réseau à l'aide d'un vecteur w dont le $i^{\text{ème}}$ élément est égal à un. C'est une extrapolation de la matrice spectrale dont le but est de maximiser l'entropie du signal, la formulation du problème est donnée comme suit :

$$\text{Min}\{w^+ \Gamma w\} \text{ Sous contrainte } w^+ e_i = 1 \quad (3.11)$$

Le Lagrangien du problème (3.11) est $L(w, \lambda) = w^+ \Gamma w - \lambda(1 - w^+ e_i)$ et la solution du vecteur w est détaillée par les étapes suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(w, \lambda)}{\partial w} = 2\Gamma w - \lambda e_i = 0 \\ w = \frac{\lambda}{2} \Gamma^{-1} e_i \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{2}{e_i^T \Gamma^{-1} e_i} \\ w = \frac{2\Gamma^{-1} e_i}{2e_i^T \Gamma^{-1} e_i} = \frac{\Gamma^{-1} e_i}{\Gamma_{ii}^{-1}} \end{cases} \quad (3.12)$$

La constante Γ_{ii} n'est pas prise en compte dans le résultat final, l'opérateur de la méthode MEM est $P_{Mem} = \Gamma^{-1}e_i e_i^T \Gamma^{-1} = C_i C_i^+$ où C_i représente la $i^{ème}$ colonne de l'inverse de la matrice spectrale, la fonction du spectre angulaire est donnée par l'équation suivante :

$$f_{Mem}(\theta) = \frac{1}{a^+(\theta)C_i C_i^+ a(\theta)} \quad (3.13)$$

Le choix de l'indice de référence e_i peut influencer la forme du spectre, pour un réseau uniforme (ULA), il est préférable de choisir l'élément du centre [Gro05] pour un nombre impair des antennes élémentaires.

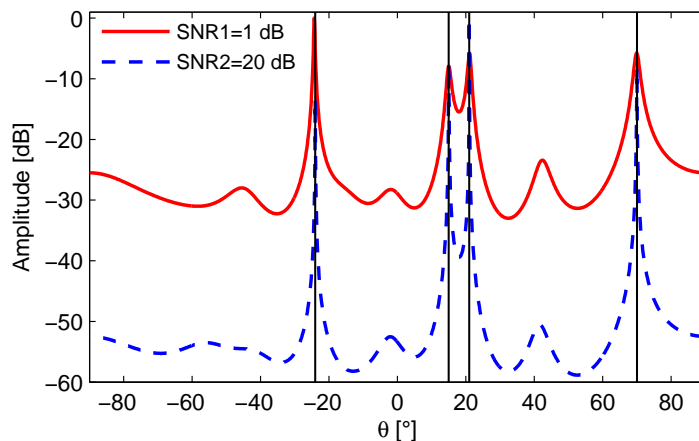


FIGURE 3.4 – Spectre de la Méthode d'Entropie Maximale (MEM), $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.

La figure 3.4 représente le résultat obtenu du spectre à l'aide de la méthode MEM en prenant le premier élément du réseau e_1 . On remarque qu'on peut identifier toutes sources pour les deux cas du bruit $SNR1$ et $SNR2$ et le spectre présente légèrement des lobes secondaires qui se situent entre les deux sources proches et la quatrième source de direction $\theta_4 = 70^\circ$.

3.4 Méthodes des sous espaces orthogonaux

Les quatre techniques décrites précédemment utilisent la matrice spectrale Γ avec des critères d'optimisation de puissance, d'autres solutions se basent sur la notion des espaces vectoriels des données reçues $X(t) = AS(t) + N(t)$. En général considérons un espace d'Hilbert \mathcal{H} de dimension N , la matrice des signaux est une combinaison des signaux sources et des perturbations, donc une décomposition de la matrice $X(t)$ est un système binaire composé d'un sous espace source et d'un sous espace bruit. L'obtention de l'espace vectoriel complexe se fait soit par la décomposition spectrale [CGY10, FSB08] (*Eigenvalue Decomposition EVD*) de la matrice spectrale Γ ou par la décomposition en valeurs singulières (*Singular Value Decomposition SVD*) directement de la matrice $X(t)$ [CGY10, FSB08]. Pour la première technique, le théorème de la décomposi-

tion spectrale est donné par l'équation suivante :

$$\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_n = U\Lambda U^+ = \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i u_i^+ \quad (3.14)$$

Avec $\Gamma_s = A\Gamma_{ss}A^+$ et $\Gamma_n = \sigma^2 I_N$, l'opérateur Γ étant hermitien $\Gamma^+ = \Gamma$ (auto-adjoint), alors les valeurs propres sont réelles, λ_i est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre associée au $i^{\text{ème}}$ vecteur propre u_i de norme unitaire, $\Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est une matrice diagonale contenant les valeurs propres et $U \in \mathbb{C}^{N \times N}$ est une matrice unitaire qui vérifie les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} U^+U = I_N \\ \|U\|_F = \sqrt{\text{Tr}(UU^+)} = \sqrt{N} \end{cases} \quad (3.15)$$

Pour la deuxième technique SVD, le résultat de la décomposition est donné par la relation suivante :

$$X(t) = U\Sigma V^+ \quad (3.16)$$

Avec $U \in \mathbb{C}^{N \times N}$ est la matrice unitaire, $\Sigma \in \mathbb{C}^{N \times K}$ une matrice diagonale rectangulaire dont les éléments diagonaux $[\Sigma]_{ii}$ sont les valeurs singulières pour $i = \{1, \dots, N\}$ et $V \in \mathbb{C}^{K \times K}$ vérifie la propriété $\|V\|_F = \sqrt{K}$. Plusieurs méthodes se basent sur la propriété d'orthogonalité entre les vecteurs directionnels $a(\theta)$ et les colonnes de la matrice U qui forment l'espace vectoriel du système.

3.4.1 Spectre du sous espace orthogonal

Cette technique développée par Schmidt (*Multiple Signal Classification* MUSIC) [Sch86], est basée sur la séparation des sous espaces source et bruit contenus dans la matrice unitaire U . Dans le cas général, le nombre des source P est inférieur au nombre d'antennes N et les sources sont localisées dans des positions angulaires distinctes, autrement dit la matrice de corrélation des sources Γ_{ss} est régulière ou encore le rang de la matrice directionnelle du réseau est P . Commençons par le cas idéal sans perturbation, c'est à dire que $N(t) = 0_{N \times K}$ ou $\Gamma_n = 0_N$, la matrice du réseau est donnée par $\Gamma = \Gamma_s = A\Gamma_{ss}A^+ = U\Lambda U^+$, l'espace engendré par la matrice unitaire $U = [u_1, \dots, u_P, u_{P+1}, \dots, u_N]$ peut être divisée en deux entités [CGY10, KV96, Sch86], en effet les P premiers vecteurs propres forment une base orthonormale d'un sous espace $U_s \in \mathbb{C}^{N \times P}$ qu'on appelle sous espace source et qui correspond aux premières valeurs propres non nulles λ_i pour l'indice $i = \{1, \dots, P\}$, les $N - P$ vecteurs propres qui restent forment un sous espace $U_n \in \mathbb{C}^{N \times N-P}$ qu'on appelle sous espace orthogonal ou sous espace bruit, qui correspond à $N - P$ valeurs propres nulles $\lambda_j = 0$ pour l'indice $j = \{P + 1, \dots, N\}$, les deux sous espaces $U = [U_s, U_n]$ vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} U_s^+ U_s = I_P \\ U_n^+ U_n = I_{N-P} \\ U_s^+ U_n = 0_{P \times N-P} \end{cases} \quad (3.17)$$

Théoriquement, la matrice spectrale du bruit $\Gamma_n = \sigma^2 I_N$ est de rang plein lorsque le bruit est ergodique spatialement et temporellement, la valeur propre σ^2 , puissance du bruit, est dégénérée N fois et pour la matrice Γ_s , la valeur propre nulle est dégénérée $N - P$ fois. La propriété sur laquelle se base la méthode MUSIC est la relation d'orthogonalité, tout vecteur u qui est orthogonal au sous espace source, par conséquent orthogonal aux colonnes de la matrice directionnelle A , est contenu dans le sous espace bruit. Cette implication est traduite par la relation suivante :

$$A^+ u = 0_{P \times 1} \quad (3.18)$$

Ceci veut dire que les vecteurs du sous espace bruit sont orthogonaux aux vecteurs directionnels du réseau :

$$\{a(\theta_1), \dots, a(\theta_P)\} \perp \{u_{P+1}, \dots, u_N\} \quad (3.19)$$

L'opération de division des sous espaces est faite en examinant les valeurs propres, avec un nombre fini d'échantillons K , les $N - P$ valeurs propres de la matrice Γ ne sont pas nulles mais sont égales à peu près à la puissance du bruit σ^2 , l'ordre décroissant du spectre σ_Γ est donné comme suit :

$$\sigma_\Gamma = \left\{ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_P > \lambda_{P+1} \simeq \dots \simeq \lambda_N \simeq \sigma^2 \right\} \quad (3.20)$$

En déterminant la multiplicité de la valeur propre minimale [Sch86], il est possible de déduire le nombre des sources P , la figure 3.5 représente les valeurs propres de la matrice Γ et les valeurs singulières résultantes de la décomposition SVD de la matrice initiale $X(t)$, pour la même configuration précédente du système.

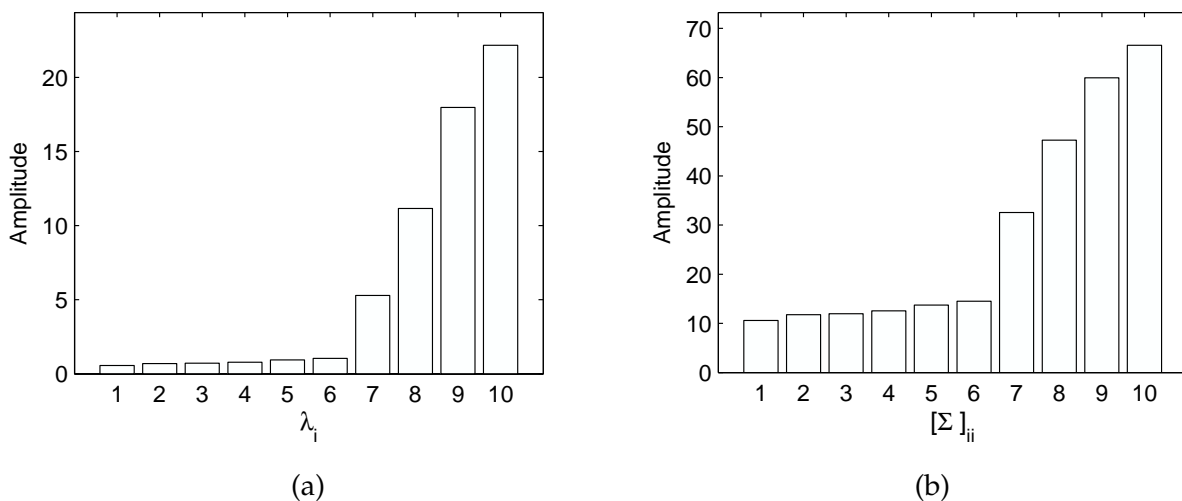


FIGURE 3.5 – Valeurs propres de la matrice spectrale Γ (a) et valeurs singulières de la matrice $X(t)$ (b) pour la configuration $N = 10$, $P = 4$ et $SNR = 1dB$.

On remarque d'après la figure 3.5 qu'on peut discerner les quatre valeurs propres ou singulières des sources, comme on peut aussi déterminer la multiplicité de la valeur propre minimale qui correspond à la puissance du bruit pour la décomposition de Γ . En effet,

l'estimation de cette puissance est calculée par la moyenne des $N - P$ valeurs :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - P} \sum_{j=P+1}^N \lambda_j \quad (3.21)$$

Pour cette configuration, il est facile de déterminer les valeurs propres du sous espace source. Généralement pour un rapport SNR élevé, le problème est facile à résoudre, mais quand le SNR est faible, voir négatif pour les signaux noyés dans le bruit, ou quand le nombre des échantillons est limité, la séparation devient difficile, ainsi plusieurs critères basés sur la théorie de l'information ont été proposés afin de déterminer le nombre des sources P , on décrira quelques unes de ces techniques ultérieurement.

On peut réécrire la décomposition spectrale de la matrice Γ en fonction des deux sous espace comme suit :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} U_s & U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0_{P \times N-P} \\ 0_{N-P \times P} & \Lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s & U_n \end{bmatrix}^+ \quad (3.22)$$

Avec les matrices diagonales $\Lambda_s \in \mathbb{R}^{P \times P}$ et $\Lambda_n \in \mathbb{R}^{N-P \times N-P}$, pour un nombre infini d'échantillons, on a $\Lambda_n = \sigma^2 I_{N-P}$. La matrice U_n permet de construire le projecteur en sous espace orthogonal $P_n = U_n U_n^+$ qui vérifie les propriétés suivantes pour $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} P_n^m = P_n \\ Tr(P_n) = N - P \\ \|P_n\|_F = \sqrt{N - P} \end{cases} \quad (3.23)$$

De la même manière le projecteur en sous espace source est défini par $P_s = U_s U_s^+$ et qui vérifie les propriétés suivantes pour $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} P_s^m = P_s \\ Tr(P_s) = P \\ \|P_s\|_F = \sqrt{P} \end{cases} \quad (3.24)$$

Le calcul de l'un des deux projecteurs permet de déduire l'autre parce qu'ils forment une base complète :

$$\begin{cases} P_s + P_n = I_N \\ P_s P_n = 0_N \end{cases} \quad (3.25)$$

Pour un vecteur directionnel $a(\theta)$ défini par un angle $\theta \in \Omega$, on calcule la fonction de localisation angulaire définie par :

$$f_{Mu}(\theta) = \frac{1}{a(\theta)^+ P_n a(\theta)} = \frac{1}{a(\theta)^+ U_n U_n^+ a(\theta)} \quad (3.26)$$

Les pics du spectre $f_{Mu}(\theta)$ correspondent aux directions d'arrivées des sources, parce que $a(\theta) \perp U_n$ ce qui fait que le dénominateur doit être nul et la valeur de la fonction de

localisation doit normalement tendre vers l'infini. En pratique, la présence du bruit ne rend pas une annulation parfaite de la quantité $a(\theta)^+ U_n U_n^+ a(\theta)$. Les hauteurs des pics de la fonction $f_{Mu}(\theta)$ n'ont pas de signification physique mais mesurent simplement le degré d'orthogonalité entre les vecteurs directionnels testés et le projecteur P_n , ce sont les indices des pics qui comptent.

La figure 3.6 représente le spectre MUSIC pour la même configuration utilisée pour les méthodes précédentes [KSF14a]. La méthode MUSIC fournit des meilleurs résultats par rapport aux méthodes précédentes, les sources sont détectées pour les deux cas du SNR et les deux fonctions ne contiennent pas de lobes secondaires.

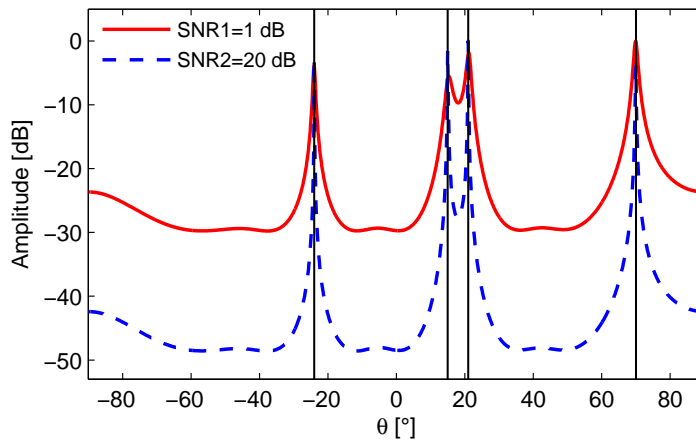


FIGURE 3.6 – Spectre du sous espace orthogonal (MUSIC) pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.

3.4.2 Spectre de la décomposition harmonique

La deuxième technique qui se base sur la décomposition spectrale ou singulière est celle de la décomposition harmonique de Pisarenko proposée en 1973 (*Pisarenko Harmonic Decomposition PHD*) [Gro05]. En effet, cette technique est plus ancienne que le projecteur de MUSIC, le but de cette proposition est de chercher un vecteur $u \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ qui minimise l'erreur quadratique moyenne de la puissance du réseau à condition que le vecteur solution ait une norme unitaire. Le problème peut être interprété par le critère d'optimisation $Min\{u^+ \Gamma u\}$ sous la contrainte $u^+ u = 1$, le principe variationnel affirme la relation suivante, quelque soit le vecteur u :

$$\frac{u^+ \Gamma u}{u^+ u} \geq \lambda_{min} = \lambda_N \quad (3.27)$$

La borne inférieure de l'équation ci-dessus correspond à la valeur propre minimale, on doit exploiter deux propriétés intéressantes de la matrice spectrale, l'équation aux valeurs propres à la relation d'orthogonalité entre les vecteurs propres comme suit :

$$\begin{cases} \Gamma u_i = \lambda_i u_i \\ u_i^+ u_j = \delta_{ij} \end{cases} \quad (3.28)$$

Avec δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Si on combine les équations (3.27) avec (3.28) on peut démontrer que le minimum est atteint si le vecteur solution est égal au vecteur propre u_N qui correspond à la valeur propre minimale λ_N . L'opérateur de Pisarenko est de rang unitaire composé de produit dyadique et le spectre est donné par l'équation suivante :

$$f_{Pi}(\theta) = \frac{1}{|a^+(\theta)u_N|^2} = \frac{1}{a^+(\theta)u_N u_N^+ a(\theta)} \quad (3.29)$$

La figure 3.7 représente le résultat du spectre angulaire, les sources lointaines localisées en $\theta_1 = -24^\circ$ et $\theta_4 = 70^\circ$ sont identifiées pour le cas du $SNR = 1$ dB, mais le spectre n'a pas pu séparer les positions des sources proches ($\theta_2 = 15^\circ$ et $\theta_3 = 21^\circ$). D'autre part, toutes les positions sont bien identifiées pour le cas d'un rapport signal sur bruit élevé $SNR = 20$ dB. En respectant l'ordre chronologique, le spectre de Pisarenko est la première technique proposée qui exploite la décomposition spectrale, donc le projecteur de MUSIC et d'autres techniques ont été développées ensuite afin d'améliorer la précision angulaire.

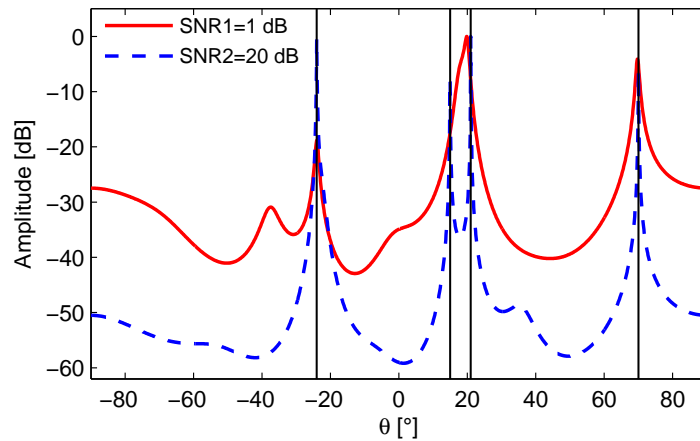


FIGURE 3.7 – Spectre de la décomposition harmonique de Pisarenko (PHD) pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.

3.4.3 Spectre de la norme minimale

L'autre technique basée sur la décomposition spectrale est celle de la norme minimale qui requiert la structure d'une antenne uniforme linéaire (ULA) [CGY10, Gro05, KV96]. La solution consiste à trouver un vecteur $w \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ qui est orthogonal au sous espace source U_s , c'est à dire qu'il est contenu dans le sous espace orthogonal U_n , dont le premier élément est unitaire $w_1 = 1$ et qui a une norme minimale. La formulation du problème d'optimisation est donnée en utilisant la première colonne de la matrice identité e_1 comme suit :

$$\text{Min}\{w^+ w\} \text{ Sous contrainte } U_s^+ w = 0_{P \times 1} \text{ et } w^+ e_1 = 1 \quad (3.30)$$

La solution est obtenue avec la relation :

$$f_{Mn}(\theta) = \frac{1}{a^+(\theta)U_n U_n^+ e_1 e_1^T U_n U_n^+ a(\theta)} \quad (3.31)$$

Avec $U_n \in \mathbb{C}^{N \times N-P}$ est le sous espace orthogonal. L'opérateur de la norme minimale peut être écrit en fonction du projecteur en sous espace orthogonal :

$$P_{Mn} = P_n e_1 e_1^T P_n$$

Cet opérateur est aussi du rang unitaire obtenu par un produit de la première colonne du projecteur P_n par sa première ligne. La figure 3.8 illustre le résultat du spectre de la configuration précédente du système antennes-sources, pour les deux niveaux du bruit. Toutes les sources sont localisées, une différence qu'on peut remarquer par rapport à celle de MUSIC est que pour $SNR = 20$ dB, le minimum du spectre de la norme minimale est à -50 dB tandis que la fonction de localisation MUSIC présente à peu près un minimum de -48.50 dB. On peut aussi remarquer que la méthode de Pisarenko utilise seulement le vecteur propre de la valeur minimale alors que la méthode de norme minimale combine tous les vecteurs propres du sous espace bruit [Gro05].

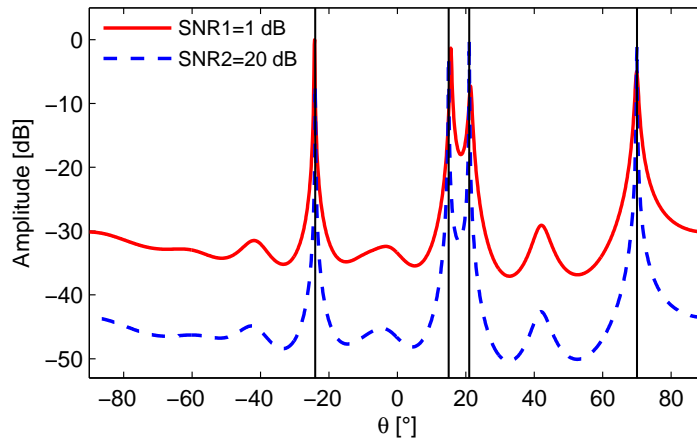


FIGURE 3.8 – Spectre de la norme minimale (Minimum Norm) pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.

3.4.4 Spectre de l'opérateur du propagateur

Le propagateur [MD91, Fri05, MMB95] est une méthode, de haute résolution (*High Resolution HR*), qui a été proposée pour diminuer la complexité des méthodes sous espaces parce qu'il ne nécessite pas la décomposition spectrale [XS04]. Le concept du propagateur est basé sur l'évolution du front d'onde lorsqu'il traverse les éléments du réseau, ce dernier est supposé être constitué de deux groupes d'antennes, le propagateur est un opérateur linéaire qui relie la phase du premier groupe au deuxième. En suivant l'évolution temporelle du front d'onde pendant une durée infinitésimale dont la valeur maximale est la durée de propagation du réseau τ_N , cet opérateur est causal c'est à dire qu'il donne le résultat de la phase lorsque l'onde arrive au deuxième groupe à partir de l'expression de la première phase. Le réseau d'antennes (ULA) étant divisé en deux ensembles, la matrice directionnelle A à son tour est partitionnée en deux blocs matricielles $A = [A_1^T | A_2^T]^T$ avec les dimensions $A_1 \in \mathbb{C}^{P \times P}$ et $A_2 \in \mathbb{C}^{N-P \times P}$. Théoriquement le propagateur est

donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} A_2 = \Psi_{21} A_1 \\ [\Psi_{21}, -I_{N-P}] A = 0_{N-P \times P} \end{cases} \quad (3.32)$$

Avec $\Psi_{21} \in \mathbb{C}^{N-P \times P}$. La matrice résultante $[\Psi_{21}, -I_{N-P}]$ est orthogonale aux colonnes de la matrice directionnelle. L'opérateur Ψ_{21} peut être calculé par plusieurs approches, soit par la partition de la matrice des données $X(t) = [X_1^T(t) | X_2^T(t)]^T$ ou par la partition de la matrice spectrale somme suit :

$$\Gamma = [\Gamma_1^T | \Gamma_2^T]^T \quad (3.33)$$

Avec $\Gamma_1 \in \mathbb{C}^{P \times N}$ et $\Gamma_2 \in \mathbb{C}^{N-P \times N}$, le propagateur est donné par la relation suivante :

$$\begin{cases} \Gamma_2 = \Psi_{21} \Gamma_1 \\ \Psi_{21} = \Gamma_2 \Gamma_1^\dagger \end{cases} \quad (3.34)$$

Avec $(\cdot)^\dagger$ est l'opérateur du pseudo-inverse de Penrose tel que $\Gamma_1^\dagger = (\Gamma_1^+ \Gamma_1)^{-1} \Gamma_1^+$, ensuite le sous espace bruit construit par cet opérateur est donné par $V_n = [\Psi_{21}, -I_{N-P}]$. Le spectre angulaire est finalement donné par :

$$f_{Pr}(\theta) = \frac{1}{a^+(\theta) V_n^+ V_n a(\theta)} \quad (3.35)$$

Le propagateur est opérationnel quand le bruit perturbateur $N(t)$ est ergodique spatialement et temporellement, mais en présence du bruit coloré spatialement, c'est à dire que la matrice de corrélation du bruit Γ_n n'est plus diagonale, le propagateur peut ne pas fournir des résultats fiables. La figure 3.9 représente le résultat de la fonction de localisation.

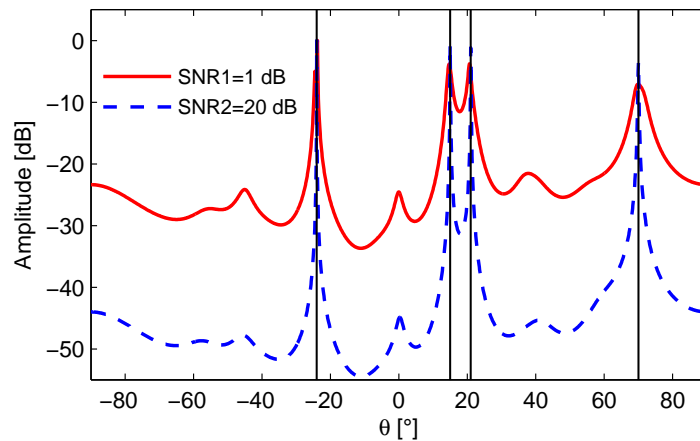


FIGURE 3.9 – Spectre de l'opérateur du propagateur pour $SNR1 = 1 \text{ dB}$ et $SNR2 = 20 \text{ dB}$.

Les variations de la fonction pour les deux niveaux du bruit sont presque identiques et les positions des sources sont identifiées. L'avantage du propagateur est que la complexité du calcul du sous espace bruit V_n , est réduite, elle est égale à $NPK + O(P^3)$ [JYHH11]. Plusieurs améliorations ont été proposées pour améliorer le pouvoir de résolution du

propagateur [MMB95, MFB08], soit par orthonormalisation des colonnes du sous espace V_n ou par discrétisation de l'opérateur en plusieurs sous ensembles. Nous présenterons dans le chapitre suivant une étude détaillée de la généralisation du propagateur.

3.4.5 Spectre du propagateur partiel

Le propagateur partiel est une méthode récemment proposée [JYHH11] qui n'est valable que si le nombre des éléments du réseau est strictement supérieur à deux fois le nombre de sources $N > 2P$. Cet opérateur est construit à partir des blocs partiels, de la matrice spectrale, choisis parmi neuf blocs sans utiliser les éléments diagonaux, qui sont affectés par le bruit perturbateur donné par l'opérateur Γ_n . La matrice directionnelle du réseau est partitionnée en trois groupes comme suit :

$$A = \left[A_1^T, A_2^T, A_3^T \right]^T \quad (3.36)$$

Avec $A_i, i = 1, 2, 3$ sont des blocs de dimensions $\mathbb{C}^{P \times P}$, $\mathbb{C}^{P \times P}$ et $\mathbb{C}^{N-2P \times P}$ respectivement. L'opérateur étant extrait de la matrice spectrale, la matrice des signaux reçus est partitionnée avec le même ordre comme suit :

$$X(t) = \left[X_1^T(t), X_2^T(t), X_3^T(t) \right]^T \quad (3.37)$$

Avec $X_i(t), i = 1, 2, 3$ sont des données partielles de dimensions $\mathbb{C}^{P \times K}$, $\mathbb{C}^{P \times K}$ et $\mathbb{C}^{N-2P \times K}$. Les blocs partielles de la matrice spectrale sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Gamma_{12} = \langle X_1(t) X_2^+(t) \rangle = A_1 \Gamma_{ss} A_2^+ \\ \Gamma_{31} = \langle X_3(t) X_1^+(t) \rangle = A_3 \Gamma_{ss} A_1^+ \\ \Gamma_{32} = \langle X_3(t) X_2^+(t) \rangle = A_3 \Gamma_{ss} A_2^+ \end{cases} \quad (3.38)$$

Ensuite, on doit considérer que les sources ne sont pas corrélées, ou au moins la matrice de corrélation des sources Γ_{ss} est inversible, le troisième bloque de la matrice directionnelle peut être calculé par deux solutions différentes :

$$\begin{cases} A_3 = \Gamma_{32} \Gamma_{12}^{-1} A_1 \\ A_3 = \Gamma_{31} \Gamma_{21}^{-1} A_2 \end{cases} \quad (3.39)$$

Si on combine les deux relations ci-dessus, on peut construire le sous espace bruit partiel comme suit :

$$V_n = \left[\Gamma_{32} \Gamma_{12}^{-1} | \Gamma_{31} \Gamma_{21}^{-1} | - 2I_{N-2P} \right] \quad (3.40)$$

Cette matrice $V_n \in \mathbb{C}^{N-2P \times N}$ est orthogonale aux colonnes de la matrice directionnelle du réseau $V_n A = 0_{N-2P \times P}$ et le spectre, similairement au propagateur, est donné par :

$$f_{Par}(\theta) = \frac{1}{a^+(\theta) V_n^+ V_n a(\theta)} \quad (3.41)$$

La matrice spectrale étant hermitienne, pour déduire un bloque situé dans la partie triangulaire supérieure, il suffit de calculer le transposé-conjuguée du bloque symétrique par rapport à la diagonale, par exemple on a le bloque $\Gamma_{21} = \Gamma_{12}^+$. On peut dire que le sous espace bruit du propagateur partiel est déduit en exploitant la partie triangulaire inférieure de la matrice Γ . Pour tester la performance de cet opérateur, la figure 3.10 représente le résultat du spectre pour la configuration du système antennes-sources utilisée dans les méthodes décrites précédemment.

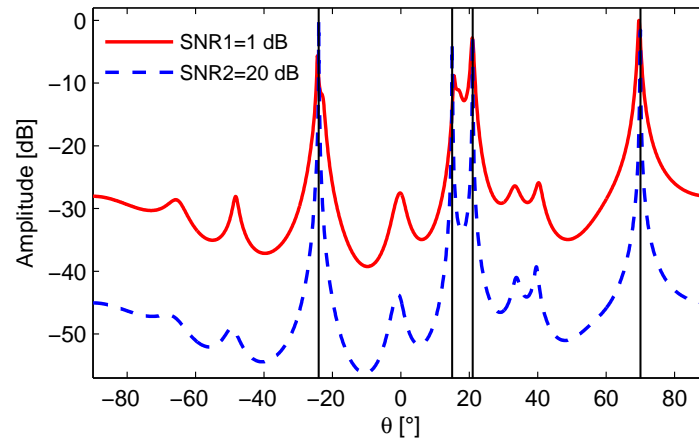


FIGURE 3.10 – Spectre du propagateur partiel pour $SNR1 = 1$ dB et $SNR2 = 20$ dB.

La fonction de localisation a pu détecter les positions des sources pour les deux niveaux du bruit avec une complexité réduite par rapport au propagateur original. En effet cette technique est performante en présence du bruit coloré [JYHH11] parce que le sous espace bruit est construit sans utiliser les bloques diagonaux Γ_{ii} , le bruit coloré est généralement modélisé par un opérateur dont les éléments diagonaux ont une forte puissance et au fur à mesure qu'on éloigne de la diagonale la corrélation entre les éléments du réseau décroît d'une façon linéaire [KS14a] ou non linéaire. L'inconvénient qu'on peut citer est que la méthode du propagateur partiel n'est valable que si $N > 2P$, par contre le propagateur original peut, dans des conditions optimales, détecter $N - 1$ sources.

Cette étude comparative [KSF14a] entre les neuf spectres nous permet de vérifier la performance relative à la configuration de système choisie pour la simulation et reproduire les résultats de la littérature. Généralement, tester la performance d'une méthode est fait par un grand nombre d'expériences où ces techniques angulaires sont appliquées sur des mesures réelles afin de prendre en compte plusieurs facteurs expérimentaux tels que le couplage et le calibrage des antennes élémentaires du réseau. D'autre part, la simulation numérique basée sur la technique Monte Carlo reste un outil nécessaire pour vérifier la qualité de précision d'une méthode de localisation.

3.5 Simulation Monte Carlo du système

Tenant en compte la nature stochastique de la matrice des données reçues $X(t)$, déduire une conclusion sur la performance d'un spectre angulaire revient à faire une moyenne sur un ensemble des tests générés par l'ordinateur. Il s'agit de prélever les fonctions de localisation issues de L essais Monte Carlo puis faire une analyse statistique dont les résultats montrent l'efficacité de la technique angulaire testée, la nécessité de faire plusieurs tests peut être mise en évidence si on trace à chaque essai la fonction de localisation correspondante, la figure 3.11 présente les résultats de $L = 100$ essais de la technique d'entropie maximale pour la configuration précédente du système antennes-sources et avec un nombre limité d'échantillons $K = 80$.

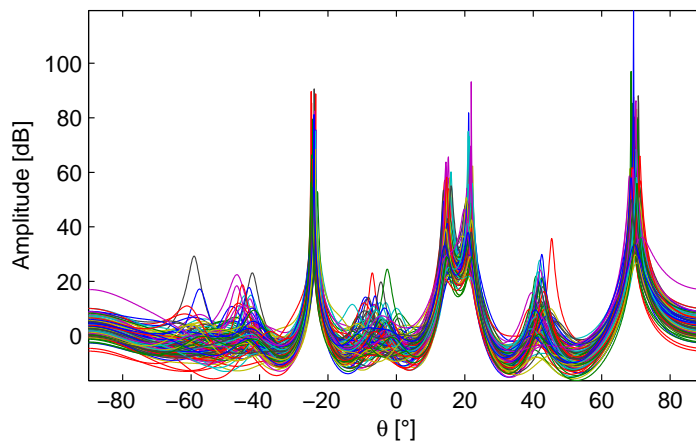


FIGURE 3.11 – Essais Monte Carlo du spectre de la Méthode d'Entropie Maximale (MEM) pour $SNR = 1$ dB, $K = 80$ et $L = 100$ essais.

La majorité des essais montrent que les fonctions de localisation détectent dans la plupart des cas les positions des sources mais avec des biais d'erreurs, les déviations des pics des positions exactes ainsi que l'apparition des lobes secondaires deviennent plus apparentes si la puissance de bruit est élevée. C'est le cas d'un rapport signal sur bruit négatif, ou si le bruit n'est pas spatialement et temporellement ergodique [JYHH11, Fri96, TWLZ10]. Donc la nature stochastique des données de la matrice perturbatrice $N(t)$ ainsi que celle des sources $S(t)$ nécessite de prélever un nombre suffisant d'épreuves Monte Carlo. La fonction de localisation moyenne est calculée à partir des L essais comme suit :

$$f(\theta) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L f_l(\theta) \quad (3.42)$$

La fonction résultante $f(\theta)$ décrit d'une façon générale la précision des positions des sources, la détection des maxima de cette fonction se fait par une technique de détection des pics, ainsi il est nécessaire d'utiliser un algorithme de détection des pics pour les méthodes DoA basées sur les spectres angulaires, par contre les méthodes algébriques [RK89] fournissent des résultats sous forme d'un vecteur de taille $P \times 1$ ce qui permet

d'éviter la détection des pics.

En effet, la détection des pics de la fonction $f(\theta)$ devient facile si la technique implémentée est de haute résolution, il suffit par exemple d'utiliser une approche basée sur la dérivée seconde $d^2f(\theta)/d\theta^2$. Une fois les indices des pics sont calculés $\hat{\theta}_i$ pour $i = 1, \dots, P$, l'évaluation de la technique de localisation est fait en calculant l'erreur quadratique entre les vraies positions angulaires et celles estimées des L essais, la métrique de la racine carrée de l'erreur quadratique RMSE (*Root Mean Square Error*) est donnée par la formule suivante :

$$RMSE(f(\theta)) = \sqrt{\frac{1}{PL} \sum_{i=1}^P \sum_{l=1}^L (\hat{\theta}_{il} - \theta_i)^2} \quad (3.43)$$

Avec $\hat{\theta}_{il}$ est l'indice estimé de la $i^{\text{ème}}$ source au $l^{\text{ème}}$ essai et θ_i est la vraie position angulaire de la $i^{\text{ème}}$ source ponctuelle. La simulation numérique de Monte Carlo est décrite par les étapes suivantes :

- Pour un nombre d'essais L , générer à chaque essais l ($l = 1, \dots, L$), K épreuves de la matrice des signaux $X(t) \in \mathbb{C}^{N \times K}$ et calculer la fonction de localisation $f_l(\theta)$.
- Détecter les pics $\hat{\theta}_{il}$ de chaque essais l de la fonction $f_l(\theta)$.
- Calculer l'erreur RMSE finale de toutes les sources par l'équation (3.43).
- Calculer la fonction de localisation moyenne $f(\theta)$ par l'équation (3.42).

La génération de K épreuves est fait par un choix de la distribution des variables stochastiques $s_i(t)$ et $n_j(t)$ pour $i = 1, \dots, P$ et $j = 1, \dots, N$, soit la loi gaussienne complexe. Le résultat RMSE calculé à partir des étapes ci-dessus correspond à un rapport signal sur bruit SNR fixe. Afin d'évaluer complètement la fonction de localisation d'une technique choisie pour une configuration donnée du système, il faut calculer l'erreur RSME pour chaque valeur du rapport SNR dans une gamme définie, par exemple l'intervalle $[SNR_{min} = -10 \text{ dB}, SNR_{max} = 20 \text{ dB}]$. Ainsi on obtient une fonction $RMSE = f(SNR)$ qu'on trace pour voir la robustesse de la fonction de localisation en fonction du niveau des perturbations du bruit. On peut aussi calculer l'erreur quadratique $RMSE_i$ pour chaque source en séparant les indices des pics θ_i .

On réalise une comparaison des erreurs quadratiques [KSF14a] des neuf spectres présentés qui sont : la formation de voies ou le Beamforming, le MVDR, la prédiction linéaire, l'entropie maximale, le sous espace orthogonal ou MUSIC, la décomposition harmonique de Pisarenko, la norme minimale, le propagateur et le propagateur partiel. Pour chaque spectre, on calcule l'erreur RMSE pour $L = 100$ essais de la configuration du système ($N = 10, P = 4, K = 200, \theta = [-24^\circ, 15^\circ, 21^\circ, 70^\circ], d = \lambda/2$), la figure 3.12 représente le résultat de la comparaison pour le niveau $SNR_1 = 1 \text{ dB}$.

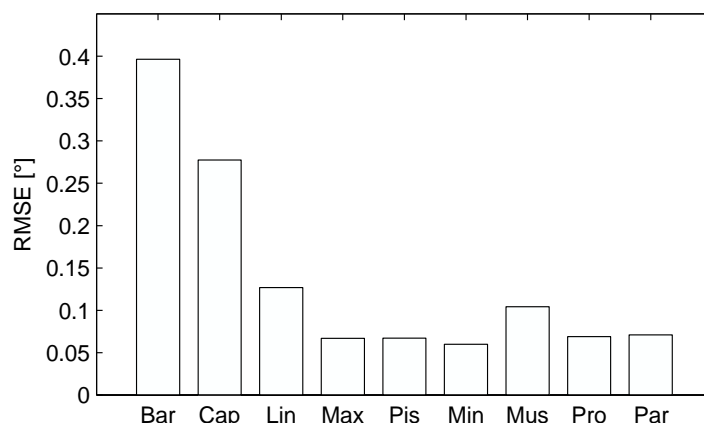


FIGURE 3.12 – Erreurs quadratiques RMSE des neuf fonctions de localisation calculées à partir de $L = 100$ essais pour $SNR = 1$ dB.

En suivant l'ordre chronologique, les méthodes sont dénotées par les expressions : **Bar** : Formation de voies, **Cap** : spectre MVDR de Capon, **Lin** : Prédiction linéaire, **Max** : Entropie maximale, **Pis** : Décomposition harmonique de Pisarenko, **Min** : Norme minimale, **Mus** : Sous espace orthogonal de MUSIC, **Pro** : Propagateur et **Par** : Propagateur partiel.

La fonction de localisation qui a donné la meilleure précision, c'est à dire la valeur minimale de l'erreur RMSE, est celle de la norme minimale, et la méthode la moins performante est la formation de voies parce qu'elle a un pouvoir de résolution faible. La figure 3.13 représente les résultats pour le deuxième niveau du bruit $SNR_2 = 20$ dB.

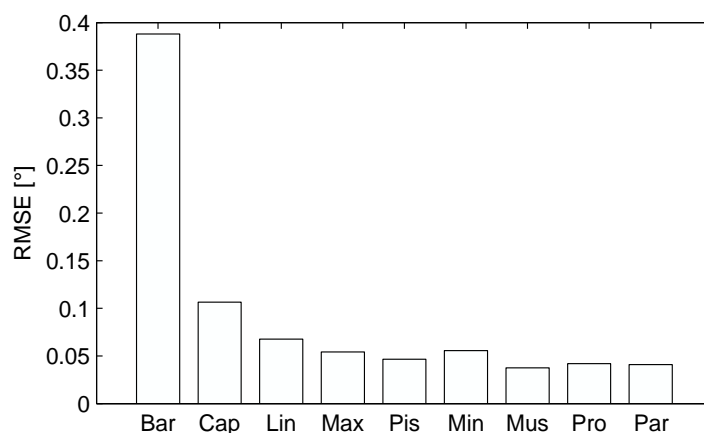


FIGURE 3.13 – Erreurs quadratiques RMSE des neuf fonctions de localisation calculées à partir de $L = 100$ essais pour $SNR = 20$ dB.

Pour le deuxième niveau du bruit, l'erreur est considérablement diminuée pour le spectre MVDR et la méthode du sous espace orthogonal (MUSIC) a donné la meilleure précision. Dans ce cas, les deux spectres des méthodes du propagateur et du propagateur partiel sont équivalents en terme de performance pour les deux niveaux du bruit. Les fonctions de localisation sont calculées avec un pas de résolution égal à $d\theta = 0.1^\circ$ pour un domaine angulaire de $\Omega = [-90^\circ, 90^\circ]$.

3.6 Détection du nombre des sources

Les méthodes de la norme minimale, du projecteur en sous espace orthogonal et du propagateur partiel, nécessitent la connaissance du nombre de sources rayonnantes [KV96, CGY10] pour prélever le nombre $N - P$ des vecteurs propres qui appartiennent au sous espace bruit U_n . La déduction du nombre P se fait en examinant les valeurs propres de la matrice spectrale Γ ou les valeurs singulières de la matrice des signaux $X(t)$. Si le rapport signal sur bruit est élevé, il est facile de discerner les valeurs propres des sources λ_i qui ont des amplitudes élevées par rapport aux valeurs propres du sous espace orthogonal $\lambda_j \sim \sigma^2$. Plusieurs facteurs rendent la séparation des valeurs propres des sources difficile, tels que le nombre limité des échantillons K , la cohérence entre les sources $s(t)$ et la non ergodicité spatiale et temporelle du bruit $n(t)$. Dans l'une de ces conditions, les valeurs propres du sous espace bruit ne sont plus approximativement égales entre eux ce qui mène à la confusion de l'interprétation des résultats.

Plusieurs fonctions, basées sur la théorie de l'information, ont été proposées pour choisir convenablement le nombre de sources P , il s'agit de choisir un paramètre $g = 0, 1, \dots, N - 1$ qui optimise une fonction logarithmique, parmi ces fonctions est le critère de Akaike (*Akaike Information Criterion* AIC) [Aka73] dont la définition est donnée par l'équation suivante :

$$AIC(g) = -K(N - g) \log \left\{ \frac{a_1}{a_2} \right\} + g(2N - g) \quad (3.44)$$

Avec le numérateur et le dénominateur de la fonction log sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \prod_{i=g+1}^N \lambda_i^{\frac{1}{N-g}} \\ a_2 = \frac{1}{N-g} \sum_{i=g+1}^N \lambda_i \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Le critère (équation 3.44) est constitué de deux parties : La première est une fonction de vraisemblance et la deuxième est un facteur qui équilibre l'augmentation de la fonction logarithmique. La solution consiste à calculer la valeur de la fonction pour chaque itération g , quand g augmente, la première partie décroît tandis que c'est le contraire pour la deuxième partie de l'équation (3.44). La solution est la valeur g qui minimise la fonction $AIC(g)$. Il faut noter que si les sources sont cohérentes, il faut implémenter les techniques de décorrélation, pour rendre la matrice de corrélation Γ_{ss} régulière avant de chercher le nombre P .

Une deuxième méthode basée sur le même principe que le AIC, est le descripteur de longueur minimale, critère proposé par Rissanen (*Minimum Description Length* MDL) [Ris78],

la différence avec le premier critère réside dans la deuxième expression comme suit :

$$MDL(g) = -K(N - g) \log \left\{ \frac{a_1}{a_2} \right\} + \frac{1}{2} \log(K)g(2N - g) \quad (3.46)$$

Avec a_1 et a_2 ont les mêmes expressions de l'équation (3.45) [CGY10]. Ces critères sont appliqués sur les valeurs propres de la matrice spectrale du réseau $\Gamma \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Si on applique ces fonctions sur la matrice spectrale transformée, la deuxième expression des équations (3.44) et (3.46) doit être changée selon la nature de la transformation appliquée à Γ [CGY10].

Une simulation des deux critères est implémentée en choisissant la configuration précédente du système composée des paramètres ($N = 10, P = 4, K = 200, d = \lambda/2, \theta = [-24^\circ, 15^\circ, 21^\circ, 70^\circ], SNR = -2$ dB). La figure 3.14 illustre les histogrammes des deux critères.

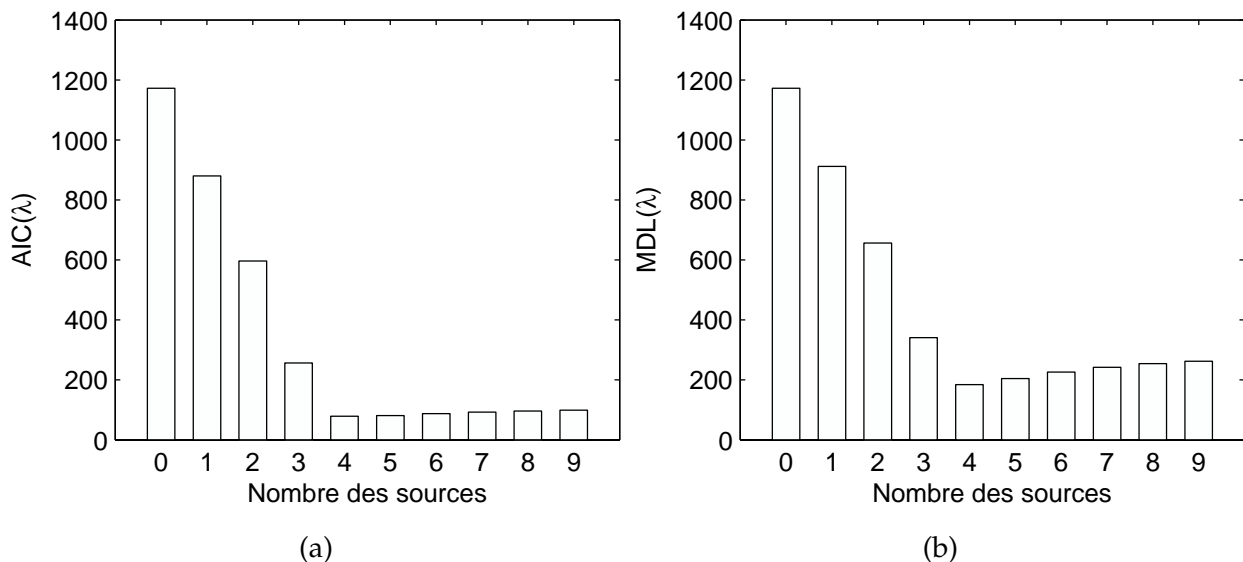


FIGURE 3.14 – Résultats des critères AIC (a) et MDL (b) pour la détection du nombre des sources rayonnantes avec la configuration ($N = 10, P = 4, K = 200, \theta = [-24^\circ, 15^\circ, 21^\circ, 70^\circ], d = \lambda/2, SNR = -2$ dB).

Les deux fonctions atteignent des minimums aux indices $g = 4$ ce qui correspond exactement au nombre des sources. Ces critères dépendent des valeurs propres. La corrélation entre les sources influence le résultat du nombre de sources P . La solution consiste à décorréler les sources avant d'appliquer les fonctions AIC et MDL, ou de transformer les valeurs propres. Par exemple dans le cas d'un bruit corrélé en présence des sources cohérentes, les valeurs propres sont altérées par des coefficients b_i pour $i = 1, \dots, N$ comme suit :

$$\lambda'_i = \lambda_i + b_i = \lambda_i + \sqrt{\sum_{j=1}^i \lambda_j} \quad (3.47)$$

Cette transformation contribue à rapprocher les valeurs propres du sous espace bruit

[TWLZ10]. Une autre approche se base sur la transformation de décorrélation de la matrice Γ avant d'effectuer la décomposition spectrale.

3.7 Décorrélation des sources cohérentes

Les méthodes de formation de voies ainsi que les méthodes des sous espaces sont sensibles à la corrélation des sources [CGY10, TWLZ10]. Lorsque q sources sont partiellement corrélées ou cohérentes, le rang de la matrice de corrélation des sources diminue $\text{rang}(\Gamma_{ss}) = P - q$ et la multiplicité de la valeur propre minimale devient $N - P + q$. Les critères de détection des sources donnent une valeur erronée du nombre des sources $P - q$. Par exemple, considérons que les deux premières sources sont cohérentes $s_2(t) = \alpha s_1(t)$ avec α est le facteur d'amplitude et de phase entre les deux signaux, la matrice source devient $S(t) = [s_1(t), \alpha s_1(t), \dots, s_P(t)]$ et le rang de la matrice spectrale sans bruit est $\text{rang}(\Gamma_s) = \text{rang}(A\Gamma_{ss}A^+) = P - 1$. Dans ce cas les méthodes de localisation ne fournissent que des estimations $\{\theta_3, \dots, \theta_P\}$ [CGY10]. En général, les éléments extra-diagonaux de la matrice de corrélation des sources Γ_{ss} , en cas de sources corrélées, sont $[\Gamma_{ss}]_{ij} = \sigma_i \sigma_j c_{ij}$ où c_{ij} est le coefficient de corrélation entre la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ source avec les bornes $0 \leq |c_{ij}| \leq 1$. Les sources cohérentes ont un coefficient $|c_{ij}| = 1$. Calculons la matrice de corrélation partielle des deux premières sources :

$$\Gamma_{s_1 s_2} = \begin{bmatrix} \langle s_1(t) s_1^*(t) \rangle & \langle s_1(t) s_2^*(t) \rangle \\ \langle s_2(t) s_1^*(t) \rangle & \langle s_2(t) s_2^*(t) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \alpha^* \sigma_1^2 \\ \alpha \sigma_1^2 & \alpha^2 \sigma_1^2 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

D'autre part, cette matrice partielle peut être exprimée en fonction du coefficient de corrélation comme suit :

$$\Gamma_{s_1 s_2} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 c_{12}^* \\ \sigma_1 \sigma_2 c_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Donc la relation entre le coefficient de corrélation et la facteur d'amplitude-phase est donnée par l'équation $\alpha = c_{12} \sigma_2 / \sigma_1$.

Dans ces conditions, il est nécessaire de séparer ces sources. Plusieurs solutions ont été proposées afin de décorréler les sources comme le lissage spatial (*Spatial Smoothing*) [KV96, CGY10, FSB08] où le réseau d'antennes est découpé en plusieurs sous-réseaux et la matrice spectrale finale est la moyenne des matrices spectrales des sous réseaux. L'autre technique de décorrélation exploite la centro-symétrie du réseau uniforme ULA qu'on a déjà expliquée dans le chapitre précédent, la version décorrélée de la matrice spectrale (*Forward backward averaged FB*) [CGY10] est définie par :

$$\Gamma_{FB} = \frac{1}{2}(\Gamma + \Pi \Gamma^* \Pi) \quad (3.50)$$

Avec $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est la matrice d'échange, le développement de cette équation exploite la centro-symétrie de l'antenne réseau ULA par la relation $\Pi A^* = A \Lambda$ où $\Lambda \in \mathbb{C}^{P \times P}$ est une

matrice diagonale définie dans le chapitre précédent par $[\Lambda]_{ii} = e^{2\pi j(N-1)\lambda^{-1}d \sin(\theta_i)}$. Sachant que dans le cas du bruit ergodique, l'opérateur Γ_n est invariant par transformation $\Pi \Gamma_n^* \Pi$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma_{FB} &= \frac{1}{2}(A\Gamma_{ss}A^+ + A\Lambda\Gamma_{ss}^*\Lambda^+A^+ + 2\Gamma_n) \\ \Gamma_{FB} &= \frac{1}{2}A(\Gamma_{ss} + \Lambda\Gamma_{ss}^*\Lambda^+)A^+ + \Gamma_n\end{aligned}\quad (3.51)$$

La nouvelle matrice de corrélation des sources donnée par $0.5(\Gamma_{ss} + \Lambda\Gamma_{ss}^*\Lambda^+)$ a un rang plein P et les techniques spectrales de la localisation sont appliquées sur la nouvelle matrice Γ_{FB} . Une autre technique efficace pour la décorrélation des sources est la transformation unitaire [DXZ12], c'est la transformation de la matrice spectrale en domaine réel à l'aide des opérateurs unitaires définis pour $N = 2n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$Q_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & jI_n \\ \Pi_n & -j\Pi_n \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Avec I_n est la matrice identité de taille n et Π_n est la matrice d'échange, pour une dimension impaire $N = 2n + 1$, l'opérateur est donné par :

$$Q_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n \times 1} & jI_n \\ 0_{1 \times n} & \sqrt{2} & 0_{1 \times n} \\ \Pi_n & 0_{n \times 1} & -j\Pi_n \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Ces opérateurs vérifient les relations : $\Pi_N Q_N^* = Q_N$, $Q_N^+ Q_N = I_N$ et $\|Q_N\|_F = \sqrt{N}$. Le théorème (3.1) [DXZ12, HY91] permet de transformer la matrice spectrale en valeurs réelles.

Théorème 3.1 Soit la matrice $\Gamma = \langle x(t)x^+(t) \rangle$ telle que $\Gamma \in \mathbb{C}^{N \times N}$ et soit sa transformation définie par $\Gamma_{FB} = \frac{1}{2}(\Gamma + \Pi \Gamma^* \Pi)$ qui vérifie la relation $\Pi_N \Gamma_{FB}^* \Pi_N = \Gamma_{FB}$, alors la matrice Γ_r définie par $\Gamma_r = Q_N^+ \Gamma_{FB} Q_N$ est à valeurs réelles $\Gamma_r \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et symétrique $\Gamma_r^T = \Gamma_r$.

Preuve : On utilise les propriétés $Q_N^+ \Pi_N = Q_N^{+*}$ et $\Pi_N Q_N = Q_N^*$, pour démontrer la transformation en valeurs réelles :

$$\begin{aligned}\Gamma_r &= Q_N^+ \left(\frac{1}{2}(\Gamma + \Pi \Gamma^* \Pi) \right) Q_N \\ &= \frac{1}{2}(Q_N^+ \Gamma Q_N + Q_N^+ \Pi \Gamma^* \Pi Q_N) \\ &= \frac{1}{2}(Q_N^+ \Gamma Q_N + Q_N^{+*} \Gamma^* Q_N^*) \\ &= \Re\{Q_N^+ \Gamma Q_N\}\end{aligned}\quad (3.54)$$

D'autre part, on peut vérifier que $\Gamma_r^* = \Gamma_r$. Premièrement on démontre la relation $\Pi_N \Gamma_{FB}^* \Pi_N = \Gamma_{FB}$ en utilisant la propriété $\Pi_N \Pi_N = I_N$ comme suit :

$$\Pi_N \Gamma_{FB}^* \Pi_N = \Pi_N \frac{1}{2}(\Gamma^* + \Pi_N \Gamma \Pi_N) \Pi_N = \frac{1}{2}(\Pi_N \Gamma^* \Pi_N + \Gamma) = \Gamma_{FB} \quad (3.55)$$

Ensuite on vérifie la relation $\Gamma_r^* = \Gamma_r$ par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\Gamma_r^* &= (Q_N^+ \Gamma_{FB} Q_N)^* = Q_N^T \Gamma_{FB}^* Q_N^* = Q_N^T \Pi_N \Pi_N \Gamma_{FB}^* \Pi_N \Pi_N Q_N^* \\ &= Q_N^T \Pi_N \Gamma_{FB} \Pi_N Q_N^* = Q_N^+ \Gamma_{FB} Q_N = \Gamma_r\end{aligned}\quad (3.56)$$

CQFD.

Afin de comparer les performances de la localisation basée sur Γ_{FB} et Γ_r , on considère une configuration du système [KS14c] composé d'un réseau de $N = 11$ éléments omnidirectionnels et $P = 4$ sources complexes et ergodiques provenant des directions $\theta = [-65^\circ, 21^\circ, 25^\circ, 51^\circ]$, le nombre d'échantillons est $K = 200$. Les sources proches ($21^\circ, 25^\circ$) sont cohérentes $s_2(t) = s_3(t)$ et $s_1(t) \neq s_2(t) \neq s_4(t)$. On choisit la méthode du propagateur partiel où le sous espace bruit est extrait depuis Γ_{FB} et Γ_r . L'objectif de cette simulation est de chercher l'ensemble des valeurs de la distance uniforme entre les éléments du réseau $d = f(\lambda)$ qui permettent la séparation des sources cohérentes avec les bornes $d_{min}/\lambda = 0.1$ et $d_{max}/\lambda = 1$. La figure 3.15 représente la variation du facteur du réseau en fonction de la distance.

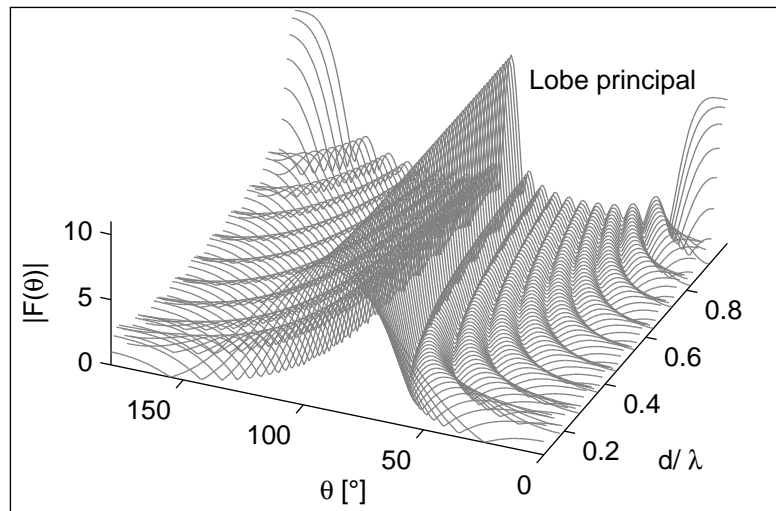


FIGURE 3.15 – Variation du facteur du réseau $|F(\theta)|$ en fonction de la distance $d = f(\lambda)$ pour $N = 11$, $i_n = 1$ A et $\phi_n = 0$.

La limite de Rayleigh de la résolution angulaire du réseau pour $d = \lambda/2$ est $\theta_{HPBW} \simeq 10^\circ$. On calcule la moyenne de $L = 150$ essais Monte Carlo du propagateur partiel basé sur Γ_{FB} (*Forward Backward Partial Propagator*) pour un niveau de $SNR = 5$ dB. La figure 3.16 représente le résultat obtenu.

On remarque que l'ensemble des spectres angulaires peut être divisé en trois régions définies par les gammes $[0.01\lambda, 0.3\lambda]$, $[0.3\lambda, 0.45\lambda]$ et $[0.45\lambda, \lambda]$. Dans la première région $d \leq 0.3\lambda$, la localisation peut ne pas être opérationnel à cause des effets mutuels entre les éléments-antennes. Dans la deuxième région définie par les distances $d \in [0.3\lambda, 0.45\lambda]$, on peut identifier les sources localisées en -65° et 51° tandis que les sources proches

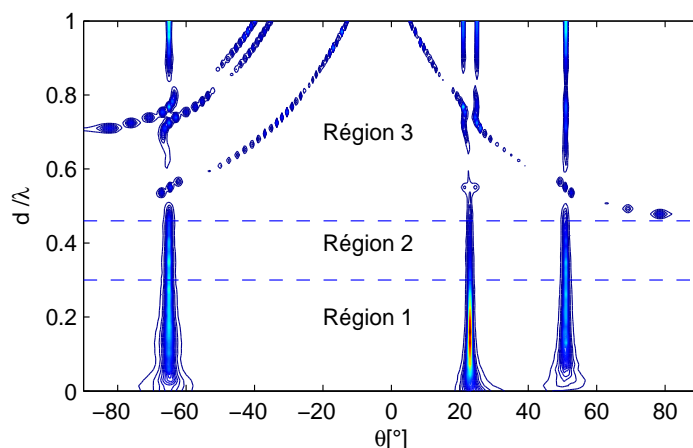


FIGURE 3.16 – Moyenne de $L = 150$ essais du propagateur partiel extrait depuis Γ_{FB} avec la configuration ($N = 11, P = 4, \theta = [-65^\circ, 21^\circ, 25^\circ, 51^\circ]$, $SNR = 5$ dB, $K = 200, d = f(\lambda)$) et $s_2(t) = s_3(t)$.

et cohérentes ne sont pas discernées mais confondues et le spectre présente un seul pic. Dans la troisième région qui commence à partir de $d \geq 0.45\lambda$, les sources cohérentes sont bien localisées mais les lobes secondaires de forte intensité apparaissent ce qui fait que la localisation faite par ces distances n'est pas fonctionnelle.

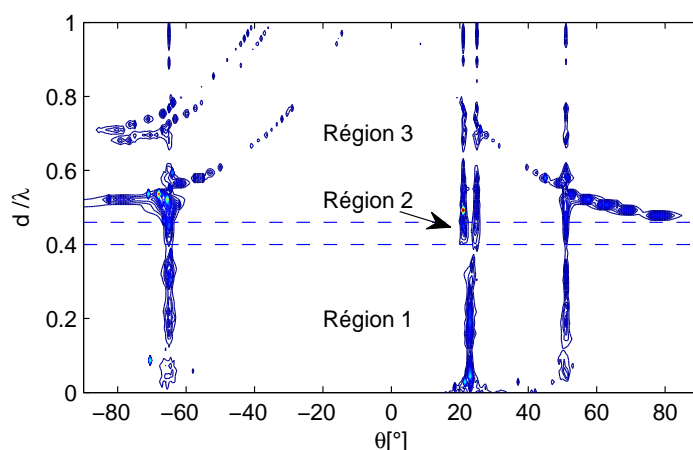


FIGURE 3.17 – Moyenne de $L = 150$ essais du propagateur partiel extrait depuis Γ_r avec la configuration ($N = 11, P = 4, \theta = [-65^\circ, 21^\circ, 25^\circ, 51^\circ]$, $SNR = 5$ dB, $K = 200, d = f(\lambda)$) et $s_2(t) = s_3(t)$.

La figure 3.17 représente le résultat du propagateur partiel (*Unitary Partial Propagator* UPP) extrait depuis la matrice réelle Γ_r . En divisant encore l'ensemble des distances d en trois parties, on remarque dans ce cas que le spectre est performant dans la gamme $d \in [0.4\lambda, 0.45\lambda]$, les sources cohérentes sont bien séparées [KS14c]. Afin de bien montrer la différence du pouvoir de résolution des deux opérateurs, on trace les deux fonctions de localisation des deux spectres des figures 3.16 et 3.17 pour la distance $d = 0.45\lambda$. La figure 3.18 met en évidence le pouvoir de résolution du propagateur partiel unitaire (UPP) comparativement avec le propagateur partiel extrait de la matrice Γ_{FB} .

Ce test peut être appliqué sur n'importe quelle méthode de haute résolution pour voir l'efficacité de la transformation unitaire Γ_r qui, en effet, réduit la complexité du calcul par un facteur égal au moins à quatre [DXZ12].

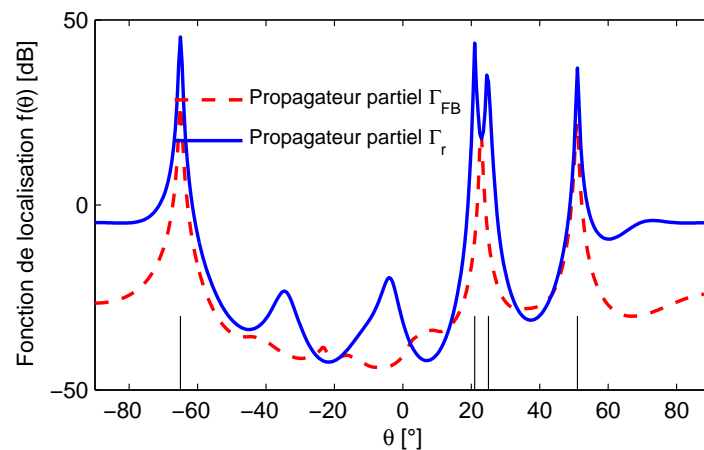


FIGURE 3.18 – Moyenne de $L = 150$ essais des spectres angulaires du propagateur unitaire Γ_r et du propagateur issu de Γ_{FB} avec la configuration ($N = 11, P = 4, \theta = [-65^\circ, 21^\circ, 25^\circ, 51^\circ]$, $SNR = 5$ dB, $K = 200, d = 0.45\lambda, s_2(t) = s_3(t)$).

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a réalisé une étude comparative entre plusieurs méthodes d'estimation des directions d'arrivées (DoA) des sources ponctuelles en champ lointain. Commençant par les méthodes de formation de voies, puis celles construites par des opérateurs du rang unitaire et les méthodes des sous espaces orthogonaux. Cette comparaison est effectuée pour une configuration optimale du système antennes-sources. Les résultats obtenus ont montré que le spectre de la norme minimale est le plus précis dans le cas d'un SNR faible alors que le spectre du sous espace orthogonal est plus performant pour un SNR élevé. Dans un deuxième temps, on a présenté le principe de la simulation Monte Carlo du système, puis on a présenté les techniques de détection des sources. Enfin, on a appliqué la méthode du propagateur partiel sur la matrice du réseau transformée en valeurs réelles par la transformation unitaire, les résultats obtenus ont montré que cette transformation est très efficace pour la décorrélation des sources cohérentes.

Chapitre 4

GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE D'ENTROPIE MAXIMALE ET DU PROPAGATEUR

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de développer quelques extensions de quelques méthodes de localisation DoA de haute résolution en exploitant des propriétés du formalisme quantique. Dans un premier temps on explique le mécanisme de localisation bidimensionnelle de l'azimut et de l'élévation de la source ponctuelle à l'aide d'un réseau d'antennes circulaire uniforme (*Uniform Circular Array UCA*), ensuite on élabore une généralisation du spectre de l'entropie maximale (*Generalized Maximum Entropy Method G-MEM*) qui consiste en une sommation des projecteurs calculés par les colonnes de l'inverse de la matrice spectrale. Ces opérateurs doivent minimiser l'entropie de Von Neumann afin de représenter des états pures du sous espace bruit du système. Dans la deuxième partie, on présente des méthodes nouvelles du calcul du propagateur, cet opérateur relie deux sous réseaux constitutifs du réseau principal, on montre alors qu'on peut dériver des versions telles que celles de l'ordre quatre et cinq. La matrice directionnelle est discrétisée en n phases et l'opérateur du propagateur est, à son tour, découpé en plusieurs propagateurs partiels, le calcul du sous espace bruit des ces nouveaux opérateurs est efficace quand le SNR est suffisamment élevé et il ne fait pas intervenir les éléments diagonaux de la matrice spectrale du réseau. Généralement pour un rapport du nombre d'antennes sur le nombre de sources $n = E(N/P)$, on montre qu'il est possible de générer un ensemble de $n(n+1)/2 - 1$ versions distinctes des sous espaces bruit construits par les propagateurs élémentaires.

4.2 Généralisation de la méthode d'entropie maximale

Dans cette première partie, on généralise la méthode d'entropie maximale [KSF14b] pour une localisation angulaire bidimensionnelle, le concept qu'on a utilisé est basé sur la notion de minimisation d'entropie quantique par l'opérateur d'entropie maximale (MEM), ce principe est expliqué dans la section suivante.

4.2.1 Fonction de localisation bidimensionnelle

La détection de l'azimut et de l'élévation des sources (θ_i, φ_i) est réalisée par une géométrie bidimensionnelle du réseau d'antennes [TWLZ10, FSB08], parmi ces types on trouve par exemple la géométrie rectangulaire [CGY10, FSB08], le réseau de forme L et le réseau aléatoire où les éléments sont distribués aléatoirement dans le plan (x, y) . L'une des géométries les plus utilisées est le réseau circulaire uniforme (*Uniform Circular Array* UCA) illustré par la figure 4.1, les éléments sont disposés sur un cercle du rayon r , l'avantage du réseau UCA est la symétrie, il permet la détection de l'azimut dans la gamme $\Omega = [0, 2\pi]$ est le diagramme du rayonnement azimutal est invariant [TWLZ10].

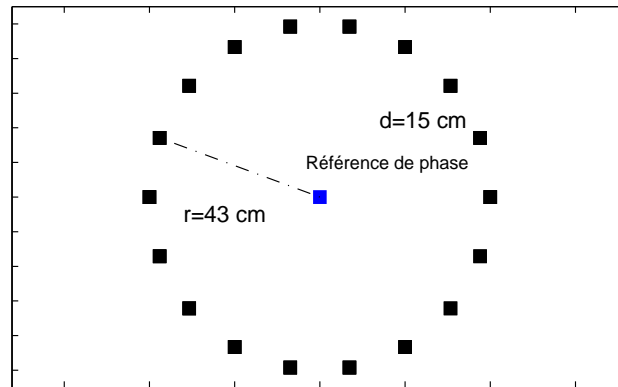


FIGURE 4.1 – Exemple d'un réseau circulaire et uniforme (UCA) de fréquence $f_c = 1$ GHz avec $N = 18$ éléments et $d = \lambda/2$.

La position du $n^{\text{ième}}$ élément pour $n = 0, \dots, N - 1$ est donnée par le vecteur :

$$\vec{r}_n = r \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \vec{e}_x + r \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \vec{e}_y \quad (4.1)$$

La référence de la phase géométrique est prise au centre du cercle $(0, 0)$ et la matrice directionnelle $A(\theta, \varphi) \in \mathbb{C}^{N \times P}$ du réseau contient deux degrés de liberté :

$$A(\theta, \varphi) = [a(\theta_1, \varphi_1), a(\theta_2, \varphi_2), \dots, a(\theta_P, \varphi_P)] \quad (4.2)$$

Avec (θ_i, φ_i) sont l'azimut et l'élévation de la $i^{\text{ème}}$ source respectivement, tenant en compte l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}_i = -2\pi/\lambda(\sin(\varphi_i) \cos(\theta_i) \vec{e}_x + \sin(\varphi_i) \sin(\theta_i) \vec{e}_y + \cos(\varphi_i) \vec{e}_z)$, le $i^{\text{ème}}$ vecteur directionnel est écrit sous la forme suivante :

$$a(\theta_i, \varphi_i) = \left(e^{\zeta_i \zeta_{i,0}} \quad e^{\zeta_i \zeta_{i,1}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad e^{\zeta_i \zeta_{i,N-1}} \right)^T \quad (4.3)$$

Avec les expressions $\zeta_i = jkr \sin(\varphi_i)$, r est la rayon du réseau, k est le nombre d'onde, c est la vitesse de propagation de l'onde porteuse, et ω est la fréquence angulaire. La deuxième expression est $\zeta_{i,n} = \cos(\gamma_n - \theta_i)$ avec $\gamma_n = \frac{2\pi n}{N}$ est la position angulaire du $n^{\text{ième}}$ élément avec $n = 0, 1, \dots, N-1$. L'équation du vecteur directionnel [KS14a] est calculée en développant le terme de phase $e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n}$ (voir annexe).

Le principe de localisation consiste à choisir une gamme de balayage angulaire pour les deux angles. Soit dans ce cas $\varphi_i \in [0 : d\varphi : \frac{\pi}{2}]$ and $\theta_i \in [0 : d\theta : 2\pi]$ avec les pas de résolution angulaires $d\varphi$ et $d\theta$, puis générer électroniquement le vecteur directionnel correspondant pour chaque couple (θ, φ) , ensuite la fonction de localisation bidimensionnelle est calculée par la formule suivante :

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{a^+(\theta, \varphi) P_n a(\theta, \varphi)} \quad (4.4)$$

Avec $P_n \in \mathbb{C}^{N \times N}$ est l'opérateur construit par une méthode DoA choisie, ainsi la plupart des techniques peuvent être développées pour la localisation bidimensionnelle. Pour une fréquence opérationnelle f_c du réseau, on a déjà montré dans le troisième chapitre que la distance optimale entre les éléments est le demi de la longueur d'onde, ainsi pour un nombre N d'éléments, la distance consécutive entre deux éléments et le rayon du réseau sont liés par la relation $d = \sqrt{2r^2(1 - \cos(\frac{2\pi}{N}))}$ et le rayon est déterminé [KS14a] par l'équation suivante :

$$r = \sqrt{\frac{\lambda^2}{8(1 - \cos(\frac{2\pi}{N}))}} \quad (4.5)$$

L'exemple de la figure 4.1 est configuré pour une fréquence de $f_c = 1$ GHz qui correspond à la longueur d'onde $\lambda = 0.3$ m avec $d = 15$ cm et $r = 0.43$ m. L'opérateur qu'on veut généraliser est celui de la méthode d'entropie maximale (MEM) [Gro05], récapitulons le problème initial de la méthode pour un vecteur solution w :

$$\text{Min}\{w^+ \Gamma w\} \text{ Sous contrainte } w^+ e_i = 1 \quad (4.6)$$

La solution du problème est un opérateur $P_{Mem} = P_i = C_i C_i^+$ pour $i = 1, \dots, N$ avec C_i étant la $i^{\text{ème}}$ colonne de l'inverse de la matrice spectrale $\Gamma = \langle x(t)x^+(t) \rangle$ à partir du modèle bidimensionnel $X(t) = A(\theta, \varphi)S(t) + N(t)$. En effet l'opérateur P_{Mem} est du rang unitaire, et en cas de présence de plusieurs sources $P < N$, la fonction bidimensionnelle $f(\theta, \varphi)$ peut avoir quelque fluctuations [KSF14b] à cause du rang unitaire, pour cet effet on présente une généralisation qui permet de construire un opérateur de rang complet et avec une forte atténuation du sous espace source, cette généralisation est inspirée du principe de l'entropie quantique qu'on explique dans la section suivante [vN95].

4.2.2 Opérateur G-MEM

Le but de la généralisation est de construire la somme des opérateurs P_i pour $i = 1, \dots, N$ qui minimisent l'entropie quantique, en effet, la théorie de l'information quantique [Djo12] est une généralisation de la théorie d'information classique où le système étudié est décrit dans l'espace des phases. Considérons un espace de Hilbert \mathbb{H} de dimension N , l'état du système quantique est représenté par un ensemble des opérateurs, par exemple une source quantique est décrite par un vecteur d'états appelé *ket* donné par $|\Psi_i\rangle \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ et qui contient toutes les informations du système [KSF15b]. Soit par exemple l'état de polarisation du photon. La matrice densité du système quantique est l'ensemble statistique de tous les états quantiques possibles du système avec des probabilités λ_i , l'opérateur densité est donné par l'équation :

$$\rho = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \quad (4.7)$$

Avec $|\Phi_i\rangle^+ = \langle \Phi_i|$ est le vecteur appelé *bra*, tous les vecteurs des états sont normalisés et orthogonaux $\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = \delta_{ij}$ avec la relation des probabilités $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$, l'entropie de Von Neumann [vN95] de l'état mixte est donnée par la relation :

$$h(\rho) = - \sum_{i=1}^N \lambda_i \ln \lambda_i = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) \quad (4.8)$$

L'entropie d'un état pure est nulle où l'opérateur ρ est idempotent $\rho^2 = \rho$, tandis que l'entropie d'un état mixte est toujours supérieure à zéro, qui devient maximale lorsque l'état est totalement mixte [KSF15b]. Dans ce cas l'entropie égale $h(\rho) = \log(N)$, un exemple d'opérateur où $h(\rho)$ est maximale correspond à $\rho = (1/N)I_N$, parmi les propriétés intéressantes de $h(\rho)$ est l'invariance par transformation unitaire, soit un opérateur unitaire $Q \in \mathbb{C}^{N \times N}$ tel que $QQ^+ = I_N$, alors on a la propriété $h(Q\rho Q^+) = h(\rho)$.

Revenons à la méthode (MEM), l'opérateur P_i du rang unitaire n'est pas un projecteur, c'est à dire qu'il contient une seule valeur propre β non nulle et différente de 1 [KSF15b], en effet son spectre est donné par :

$$\sigma_{P_i} = [0, 0, 0, \dots, \beta] \quad (4.9)$$

La condition pour que cet opérateur représente un état pure en terme de mécanique quantique est que si on lui associe l'entropie de Von Neumann [vN95], alors elle doit être égale à zéro, la solution consiste en effet à le transformer en un opérateur densité comme suit :

$$\rho_i = \frac{P_i}{\text{Tr}(P_i)} \quad (4.10)$$

L'opérateur densité résultant est un projecteur de telle sorte que $\forall m \in \mathbb{N}$ on a $\rho_i^m = \rho_i$. Le spectre correspondant est binaire $\sigma_{\rho_i} = [0, 0, 0, \dots, 1]$, par conséquent l'entropie de Von

Neumann devient nulle :

$$h(\rho_i) = -\text{Tr}(\rho_i \log \rho_i) = 0 \quad (4.11)$$

Avec la convention $0 \log 0 = 0$, l'opérateur qui généralise la méthode MEM consiste à la sommation de tous les projecteurs ρ_i calculés pour tous les éléments du réseau d'antennes $i = 1, \dots, N$. L'opérateur final de rang complet N est alors :

$$P_G = \sum_{i=1}^N \rho_i = \sum_{i=1}^N \frac{P_i}{\text{Tr}(P_i)} \quad (4.12)$$

Le spectre du nouvel opérateur est divisé en deux entités, les P premières valeurs propres sont atténuées et tendent vers zéro [KSF14b, KSF15b], et les $N - P$ valeurs propres sont non nulles avec des amplitudes différentes :

$$\sigma_{P_G} = [\lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq \dots \simeq \lambda_P < \lambda_{P+1} \leq \dots \leq \lambda_N] \quad (4.13)$$

Pour mettre en preuve l'effet de cette généralisation, on doit tester la variation de la fonction $f(\theta, \varphi) = (a^+(\theta, \varphi) P_G a(\theta, \varphi))^{-1}$. Pour cela on considère une application en radio-astronomie dont le but est d'effectuer une localisation des sources cosmiques avec un réseau bidimensionnel, la méthode MEM est efficace quand les sources $s_i(t)$ sont complexes et ergodiques ce qui est donc un modèle convenable pour les signaux cosmiques [Fel10]. On compare la performance de la méthode MEM avec celle proposée G-MEM en choisissant une configuration du système comme suit : un réseau circulaire UCA composé de $N = 15$ éléments calibrés et isotropes collectent $K = 200$ échantillons des radiations depuis $P = 3$ sources cosmiques provenant des directions $(\theta_1 = 15^\circ, \varphi_1 = 50^\circ)$, $(\theta_2 = 40^\circ, \varphi_2 = 44^\circ)$ et $(\theta_3 = 57^\circ, \varphi_3 = 60^\circ)$, la distance consécutive entre les éléments est $d = \lambda/2$, les sources ont la même puissance qui est égale à $\sigma_i^2 \simeq 1$ W et sont ergodiques complexes $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3)$. On considère un niveau modéré du bruit qui correspond à $SNR = 20 \log(1/0.56) = 5$ dB et qui est spatialement et temporellement ergodique. Afin de comparer les deux spectres, on effectue $L = 1000$ essais Monte Carlo pour chaque spectre. La figure 4.2 représente la moyenne du spectre calculé par la méthode MEM [KSF14b] en utilisant l'opérateur $C_1 C_1^+$ relativement au premier élément-antenne. On remarque que la fonction $f(\theta, \varphi)$ se caractérise par quelques fluctuations aux bords et autour de la première source. La figure 4.3 représente la moyenne de $L = 1000$ essais de la méthode proposée [KSF14b], les fluctuations sont supprimées dans ce cas, la fonction est plus stable parce qu'elle est calculée à partir de l'opérateur P_G du rang complet.

Pour un deuxième test, on compare le spectre de l'opérateur P_G avec celui de l'opérateur MVDR donné par l'inverse de la matrice spectrale Γ^{-1} pour la même la configuration du système. La figure 4.4 représente le résultat [KSF14b] de la comparaison.

On remarque que les P premières valeurs de P_G sont plus atténuées que celles de Γ^{-1} , en effet cette constatation peut être plus explicitée en comparant les spectres monodimensionnels des deux opérateurs. Dans le troisième test, on forme un réseau uniforme

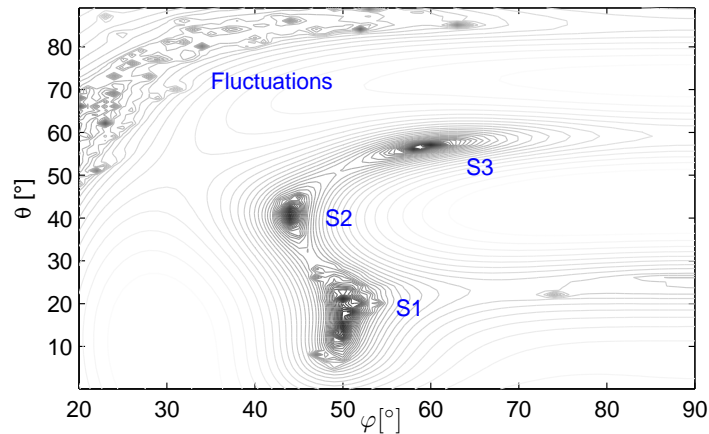


FIGURE 4.2 – Moyenne de $L = 1000$ essais du spectre bidimensionnel de la méthode d'entropie MEM avec un réseau circulaire UCA et de configuration $(N = 15, P = 3, (\theta_1 = 15^\circ, \varphi_1 = 50^\circ), (\theta_2 = 40^\circ, \varphi_2 = 44^\circ), (\theta_3 = 57^\circ, \varphi_3 = 60^\circ), S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3), d = \lambda/2, K = 200, \text{SNR} = 5 \text{ dB})$.

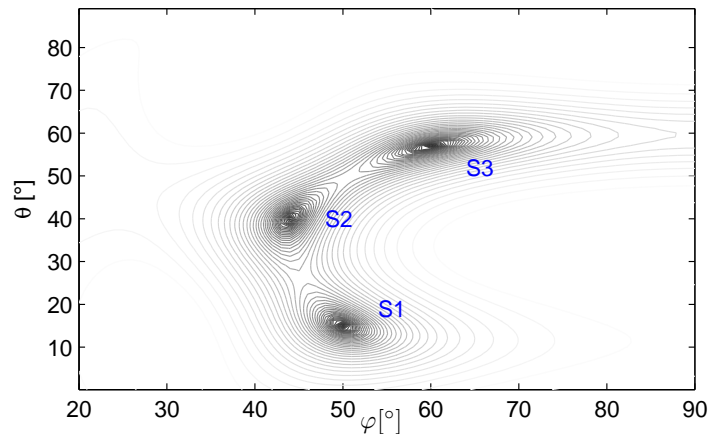


FIGURE 4.3 – Moyenne de $L = 1000$ essais du spectre bidimensionnel de la méthode proposée G-MEM avec un réseau circulaire UCA et de configuration $(N = 15, P = 3, (\theta_1 = 15^\circ, \varphi_1 = 50^\circ), (\theta_2 = 40^\circ, \varphi_2 = 44^\circ), (\theta_3 = 57^\circ, \varphi_3 = 60^\circ), S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3), d = \lambda/2, K = 200, \text{SNR} = 5 \text{ dB})$.

linéaire ULA en réarrangeant les 15 éléments du réseau UCA, avec les mêmes conditions du premier test, il y aura une ambiguïté au niveau des angles d'élévations φ_i , seules les angles θ_i qui sont pris en compte $\theta = [15^\circ, 40^\circ, 57^\circ]$. On compare les spectres MEM et G-MEM en calculant les moyennes des deux fonctions à partir de $L = 1000$ essais, le résultat est illustré dans la figure 4.5.

La fonction $f(\theta)$ de la méthode MEM présente des pics avec des hauteurs très élevées par rapport à la fonction G-MEM, d'un autre côté, la fonction G-MEM est plus stable pour les petites valeurs tandis que la fonction MEM présente quelques fluctuations qui peuvent être visualisées en échelle logarithmique [KSF14b]. D'après ces résultats on peut conclure que la généralisation proposée en deux dimensions est considérée comme approche valide pour la méthode d'entropie maximale.

Revenons à l'entropie quantique, l'état quantique pure se caractérise par une entropie

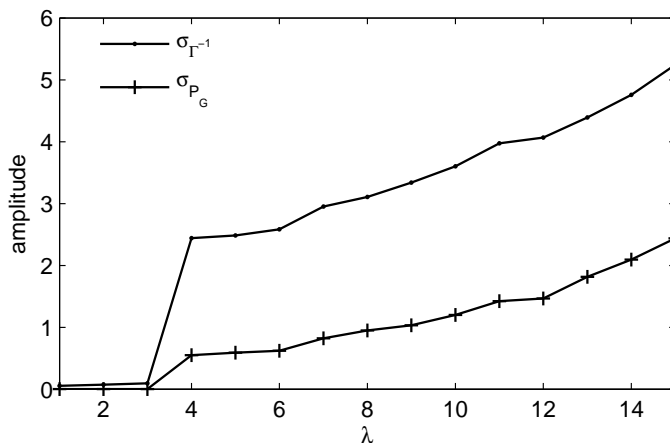


FIGURE 4.4 – Valeurs propres de l'opérateur P_G et de Γ^{-1} avec la configuration ($N = 15, P = 3, (\theta_1 = 15^\circ, \varphi_1 = 50^\circ), (\theta_2 = 40^\circ, \varphi_2 = 44^\circ), (\theta_3 = 57^\circ, \varphi_3 = 60^\circ), S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3), d = \lambda/2, K = 200, SNR = 5 \text{ dB}$).

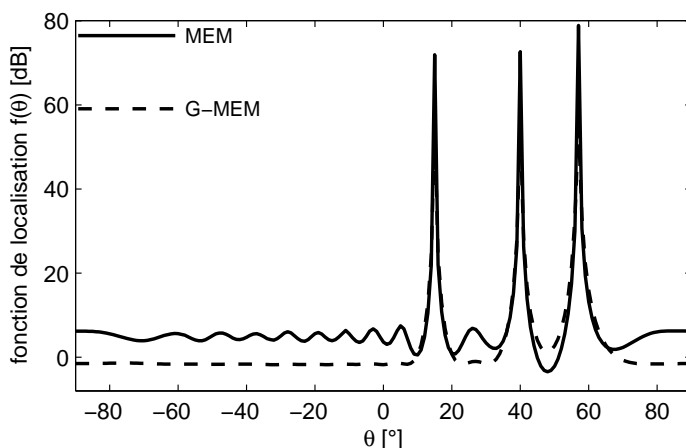


FIGURE 4.5 – Localisation unidimensionnelle avec les opérateurs MEM et G-MEM pour un réseau ULA de configuration ($N = 15, P = 3, \theta = [15^\circ, 40^\circ, 57^\circ], S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3), d = \lambda/2, K = 200, SNR = 5 \text{ dB}$).

de Von Neumann nulle, pour le problème du traitement d'antennes, l'état pure peut être considéré comme un système d'une seule source sans bruit. Dans ce cas idéal le spectre de la matrice du réseau contient une seule valeur non nulle proportionnelle à la puissance de la source $\sigma_T = [N\sigma_1^2, 0, 0, \dots, 0]$, si on transforme Γ en une matrice densité $\rho = \Gamma / \text{Tr}(\Gamma)$, alors cette dernière vérifie la condition de l'état pure en terme de la mécanique quantique $h(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho) = 0$. Cet état pure n'est pas réalisable que dans le laboratoire en absence de toute forme de perturbations $N(t) = 0_{N \times K}$. Dans le cas général, le calcul de l'entropie pour un petit nombre de sources P , nous permet de définir trois zones relatives au rapport SNR . Par exemple on prend la configuration précédente du système et on fait varier la puissance du bruit σ^2 . Pour chaque valeur du SNR on calcule l'entropie $h(\Gamma / \text{Tr}(\Gamma))$, la variation est représentée dans la figure 4.6.

La fonction d'entropie varie selon la puissance du bruit, on remarque qu'on peut diviser ces variations en trois phases. La phase perturbatrice allant de -20 dB jusqu'à -5 dB

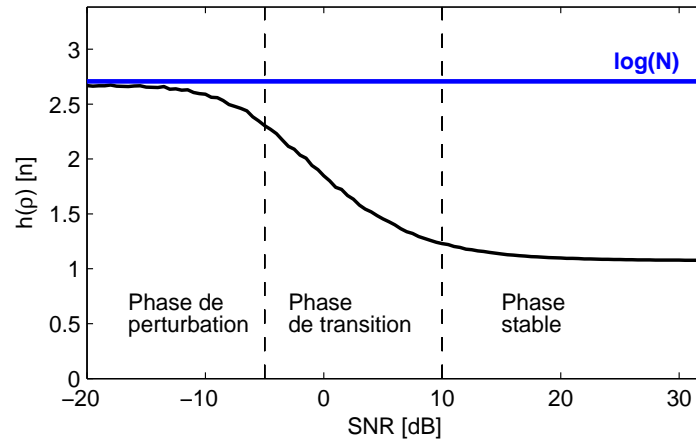


FIGURE 4.6 – Entropie de Von Neumann de la matrice spectrale densité ρ pour un réseau ULA de configuration ($N = 15, P = 3, \theta = [15^\circ, 40^\circ, 57^\circ], S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3), d = \lambda/2, K = 200$).

presque, se caractérise par une forte puissance du bruit, dans cette gamme, il est difficile de séparer les valeurs propres du sous espace signal et celles du sous espace bruit. Les valeurs propres se rapprochent ce qui fait l'entropie $h(\rho)$ tend vers sa valeur maximale $\log(N)$ qui est égale dans ce cas à 2.7081 n, cette remarque est en harmonie avec le principe des états mixtes de la mécanique quantique [Djo12, vN95]. Dans le deuxième intervalle $[-5 \text{ dB}, 10 \text{ dB}]$, la fonction $h(\rho)$ diminue considérablement, c'est la phase de transition où la résolution des directions d'arrivées dépend de la robustesse de la méthode choisie. Dans la troisième zone débutant de 10 dB, la fonction d'entropie est une constante mais différente de zéro, la plupart des méthodes de haute résolution fournissent dans cette gamme des résultats θ_i fiables. Donc comme déduction générale, l'introduction du formalisme quantique a apporté des résultats consistants pour le problème bidimensionnel des directions d'arrivées, dans la section suivante on présente une généralisation de la méthode du propagateur en se basant sur le principe du découpage de la matrice directionnelle du réseau.

4.3 Généralisation de l'opérateur du Propagateur

Le propagateur est un opérateur d'évolution infinitésimale des phases des sources lorsque les fronts d'onde traversent les antennes élémentaires du réseau [MD91, HWXS05, MMB95]. L'idée de base du propagateur consiste à diviser le temps de propagation du front d'onde le long du réseau en deux durées partielles, puis calculer le sous espace bruit du système en exploitant la relation linéaire entre les phases du premier et deuxième groupes d'antennes. L'avantage de cette conception est qu'il n'est pas obligatoire que les deux groupes d'antennes soient identiques alors que cette condition est obligatoire pour les méthodes algébriques telles que la méthode ESPRIT [RK89]. Le découpage en deux parties implique qu'on considère deux matrices partielles des échos captés $X_1(t) \in \mathbb{C}^{P \times K}$ et $X_2(t) \in \mathbb{C}^{N-P \times K}$, la matrice initiale $X(t)$ étant fonction de la matrice directionnelle du

réseau. L'opérateur de propagateur se calcule soit par les deux partitions de $X(t)$, soit à partir de la matrice Γ en se basant sur la partition de la matrice directionnelle $A = [A_1^T, A_2^T]^T$ avec les dimensions $A_1 \in \mathbb{C}^{P \times P}$ et $A_2 \in \mathbb{C}^{N-P \times P}$, la dépendance linéaire entre les lignes de la matrice A permet de calculer l'opérateur linéaire $\Psi_{21} = A_2 A_1^{-1}$.

On a déjà montré dans le chapitre précédant que cet opérateur peut être calculé via une partition de la matrice spectrale $\Gamma = [\Gamma_1^T | \Gamma_2^T]^T$ telle que $\Gamma_1 \in \mathbb{C}^{P \times N}$ et $\Gamma_2 \in \mathbb{C}^{N-P \times N}$, la solution de l'opérateur est $\Psi_{21} = \Gamma_2 \Gamma_1^+$ et le sous espace bruit [MD91] se construit par la relation $V_n = [\Psi_{21} \mid -I_{N-P}]$.

Une autre solution du propagateur [Fri05] existe qui permet de réduire la complexité du calcul. Considérons le cas idéal sans perturbations $\Gamma = A \Gamma_{ss} A^+$ telle que la matrice Γ_{ss} est inversible, suivant les deux partitions de A , on peut partitionner Γ en quatre blocs :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Avec $\Gamma_{11} \in \mathbb{C}^{P \times P}$, $\Gamma_{21} \in \mathbb{C}^{N-P \times P}$, $\Gamma_{12} \in \mathbb{C}^{P \times N-P}$ et $\Gamma_{22} \in \mathbb{C}^{N-P \times N-P}$, si on écrit les deux parties des signaux des deux réseaux partiels dans le cas sans bruit :

$$\begin{cases} X_1(t) = A_1 S(t) \\ X_2(t) = A_2 S(t) \end{cases} \quad (4.15)$$

On peut donc réécrire la partition de Γ en fonction du premier bloque Γ_{11} à l'aide du propagateur :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{11} \Psi_{21}^+ \\ \Psi_{21} \Gamma_{11} & \Psi_{21} \Gamma_{11} \Psi_{21}^+ \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Combinant les deux expressions des équations (4.14) et (4.16) de la matrice Γ , la deuxième version du propagateur et du sous espace bruit sont données par la relation :

$$\left[\Gamma_{21} \Gamma_{11}^{-1} \mid -I_{N-P} \right] A = 0_{N-P \times P} \quad (4.17)$$

Les deux relations du propagateur $\Gamma_{21} = \Psi_{21} \Gamma_{11}$ pour la partition en quatre blocs ainsi que $\Gamma_2 = \Psi_{21} \Gamma_1$ pour la partition en deux blocs sont exactes pour le cas sans bruit, en présence de perturbation $\Gamma_n \neq 0_{N \times N}$, la solution du propagateur ne représente qu'une estimation [Fri05].

Dans la littérature [MD91, MB90, HWXS05, AS11, MMB95], l'opérateur Ψ_{21} est souvent exprimé par $\Gamma_2 = \Psi_{21} \Gamma_1$, la deuxième solution $\Gamma_{21} = \Psi_{21} \Gamma_{11}$ a été proposée [Fri05] pour réduire le taux des calculs. En effet, on peut démontrer qu'une troisième version du propagateur existe si on calcule son inverse généralisé, soit :

$$\begin{cases} A_1 = \Psi_{21}^+ A_2 \\ [-I_P | \Psi_{21}^+] A = 0_{P \times P} \\ [-I_P | \Gamma_{12} \Gamma_{22}^+] A = 0_{P \times P} \end{cases} \quad (4.18)$$

La partition d'ordre deux de la matrice directionnelle du réseau nous permet de calculer trois versions du sous espace bruit que nous regroupons dans l'équation suivante :

$$\begin{cases} V_{n,1}A = [-I_P | \Gamma_{12}\Gamma_{22}^\dagger] A = 0_{P \times P} \\ V_{n,2}A = [\Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1} | -I_{N-P}] A = 0_{N-P \times P} \\ V_{n,3}A = [\Gamma_2\Gamma_1^\dagger | -I_{N-P}] A = 0_{N-P \times P} \end{cases} \quad (4.19)$$

Dans le cas sans bruit et pour un nombre inférieur de sources $N \gg P$, les trois versions du sous espace bruit sont à peu près équivalentes, mais en présence du bruit et avec un nombre quelconque des sources $N > P$, les fonctions de localisation $(a^+(\theta)V_n^+V_n a(\theta))^{-1}$ deviennent différentes, parce que les sous espaces sont calculés des blocs Γ_{11} et Γ_{22} qui sont affectés par la matrice de corrélation du bruit $\Gamma_n = \sigma^2 I_N$. Le nombre possible P des sources à détecter est $N - 1$, pour les deux sous espaces $V_{n,2}$ et $V_{n,3}$. Mais quand le nombre des sources devient $N < 2P$, alors le sous espace $V_{n,1}$ ne peut calculer correctement le sous espace orthogonal à A parce que $V_{n,1}$ devient dans ce cas une matrice creuse, elle contient $P(P - 1)$ zéros.

Remarque : L'opérateur Ψ_{21} représente l'évolution temporelle de la phase depuis le premier groupe de P antennes élémentaires au deuxième groupe de $N - P$ éléments. Ceci veut dire que c'est un opérateur causal et son inverse $\Psi_{21}^\dagger = \Psi_{12}$ donne l'information de phase du premier groupe depuis le deuxième, ce qui veut dire que c'est un opérateur retardé. L'assemblage des deux sous espaces bruit composés des deux types d'opérateurs constitue la matrice de propagateur d'ordre deux :

$$\Psi = \begin{pmatrix} V_{n,1} \\ V_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_P & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & -I_{N-P} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Par convention, les blocs des positions diagonales sont des opérateurs identité négatifs $\Psi_{11} = -I_P$, $\Psi_{22} = -I_{N-P}$.

Une amélioration du propagateur (*Orthonormal Propagator Method* OPM) a été proposée [MMB95] pour augmenter le pouvoir de résolution des directions d'arrivées et de réduire la complexité. La solution consiste à calculer une version orthonormalisée du sous espace bruit :

$$V_0 = V_n(V_n^+V_n)^{-1/2} \quad (4.21)$$

Avec la propriété $\|V_0\|_F = \sqrt{N - P}$, avec un rapport SNR modéré, la version V_0 a une performance presque équivalente au projecteur en sous espace P_n de MUSIC [MMB95]. D'autres solutions [MFB08] sont basées sur l'extraction de l'opérateur du propagateur depuis la matrice triangulaire supérieure $R \in \mathbb{C}^{N \times N}$ résultante de la décomposition QR de la matrice spectrale du réseau $\Gamma = QR$ avec Q étant un opérateur unitaire, ou de la matrice triangulaire supérieure U obtenue depuis la factorisation LU par la relation $\Gamma = LU$. Ces approches contribuent à la précision des pics des spectres angulaires $f(\theta)$ même si le rapport SNR est faible [MFB08], parce que les matrices triangulaires R et U

contiennent les informations relatives aux sources et le calcul du sous espace bruit ne fait pas intervenir les blocs diagonaux de Γ affectés par le bruit. Dans la section suivante, on démontre qu'il est aussi possible d'extraire le propagateur de l'opérateur unitaire Q de la décomposition QR [KS15].

4.3.1 Nouvelle expression du propagateur

La factorisation QR de la matrice spectrale Γ est donnée par relation $\Gamma = QR$ avec Q est un opérateur orthonormal de norme $\|Q\|_F = \sqrt{N}$ et R étant une matrice triangulaire supérieure telle que les éléments diagonaux $[R]_{ii}$ sont ses valeurs propres, si on effectue une partition de Q suivant celle de Γ dans l'équation (4.14), on obtient :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Avec les dimensions $Q_{11} \in \mathbb{C}^{P \times P}$, $Q_{12} \in \mathbb{C}^{P \times N-P}$, $Q_{21} \in \mathbb{C}^{N-P \times P}$ et $Q_{22} \in \mathbb{C}^{N-P \times N-P}$. Etant donnée la propriété de l'opérateur unitaire $Q^{-1} = Q^+$, on peut calculer R par le relation $R = Q^+ \Gamma$ comme suit :

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0_{N-P \times P} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^+ & Q_{21}^+ \\ Q_{12}^+ & Q_{22}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Si on calcule le bloque $R_{21} = 0_{N-P \times P}$, on obtient la propriété suivante :

$$Q_{12}^+ \Gamma_{11} + Q_{22}^+ \Gamma_{21} = 0_{N-P \times P} \quad (4.24)$$

Utilisons l'expression $\Gamma_{21} = \Psi_{21} \Gamma_{11}$, on déduit de la propriété ci-dessus que $Q_{12}^+ \Gamma_{11} = -Q_{22}^+ \Psi_{21} \Gamma_{11}$, en conséquence, l'opérateur du propagateur peut être exprimé en fonction de la matrice unitaire [KS15] par la relation :

$$\Psi_{21} = -Q_{22}^{+ -1} Q_{12}^+ \quad (4.25)$$

Alternativement $\Psi_{21}^+ = -Q_{12} Q_{22}^{-1}$, le pouvoir de résolution du sous espace bruit construit par cette nouvelle formule est le même que celui du propagateur dérivé depuis la matrice spectrale. Donc l'avantage de cette expression est de montrer que les $N - P$ colonnes de la matrice Q de la décomposition QR appartiennent au sous espace bruit, les P colonnes qui restent appartiennent au sous espace source $Q = [Q_s, Q_n]$. En effet le lien entre Q est l'espace de la décomposition spectrale de Γ existe $Q = U \Lambda U^+ R^{-1}$.

La nouvelle technologie des antennes a permis la conception des réseaux avec un nombre d'antennes pouvant aller jusqu'à milles cellules radiatives. De ce fait, l'implémentation de ces types de réseaux pour les applications de directions d'arrivées nécessite une grande mémoire RAM (*Random Access Memory*) des processeurs et le but des voies de

recherches actuelles consiste à réduire la complexité des méthodes de localisation par un échantillonnage spatial réduit des fronts d'ondes arrivant aux réseaux tout en exploitant l'avantage d'utilisation d'un grand nombre d'antennes élémentaires $N \gg 1$, ce principe d'optimisation s'appuie sur le mécanisme d'échantillonnage compressé (*Compressed sensing*) [WLP09].

Restons toujours dans le cadre du propagateur, si on a des nombres d'antennes et de sources quelconques (N, P) avec la condition $N > P$, existe-t-il d'autres possibilités de calcul efficace propagateur sans utiliser les éléments diagonaux de la matrice spectrale Γ_{ii} ? La réponse à cette question dépend du rapport $n = E(N/P)$ où selon cette valeur on peut développer un ensemble défini des opérateurs du propagateur. On présente dans les sections qui suivent quelques exemples.

4.3.2 Propagateur d'ordre trois

On considère que pour un système d'antennes-sources, le nombre des éléments est supérieur strictement à deux fois le nombre des sources $N > 2P$, on peut discrétiser le propagateur en trois phases. Pour expliquer le mécanisme, commençons d'abord par un cas particulier de $N = 3$ antennes et une source $P = 1$, la matrice directionnelle est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e^{-j\mu_1} & e^{-j2\mu_1} \end{pmatrix}^T \quad (4.26)$$

Avec $\mu_1 = 2\pi d\lambda^{-1} \sin(\theta_1)$, les propagateurs scalaires entre les trois antennes sont donnés par les équations :

$$\begin{cases} \Psi_{21} = e^{-j\mu_1} \\ \Psi_{32} = e^{-j\mu_1} \\ \Psi_{31} = \Psi_{32}\Psi_{21} \end{cases} \quad (4.27)$$

De ces expressions, on peut déduire trois vecteurs du sous espace bruit orthogonaux à la matrice A , qu'on peut assembler pour construire la matrice du propagateur :

$$\Psi = \begin{pmatrix} -2 & e^{j\mu_1} & e^{2j\mu_1} \\ e^{-j\mu_1} & -2 & e^{j\mu_1} \\ e^{-2j\mu_1} & e^{-j\mu_1} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \Psi_{21} & -2 & \Psi_{23} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & -2 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Ψ est orthogonal à la matrice directionnelle $\Psi A = 0_{3 \times 1}$ et chaque ligne de Ψ représente une version du propagateur avec les propriétés $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}^{-1}$ pour $i \neq j$ et $\Psi^+ = \Psi$, la matrice Ψ est hermitienne dans le cas d'une seule source.

On peut remarquer que la troisième ligne de la matrice Ψ présente une similarité avec l'opérateur du propagateur partiel [JYHH11], la ligne $[\Psi_{31}, \Psi_{32}, -2]$ est la version réduite de l'opérateur $[\Gamma_{32}\Gamma_{12}^{-1}, \Gamma_{31}\Gamma_{21}^{-1}, -2I_{N-2P}]$ telle que $\Psi_{31} = \Gamma_{32}\Gamma_{12}^{-1}$ et $\Psi_{32} = \Gamma_{31}\Gamma_{21}^{-1}$, ceci montre que le propagateur partiel [JYHH11] est une version de l'ordre trois et on peut développer les deux autres versions. La matrice spectrale peut s'écrire sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_1^T & A_2^T & A_3^T \end{pmatrix}^T \quad (4.29)$$

Avec $A_1 \in \mathbb{C}^{P \times P}$, $A_2 \in \mathbb{C}^{P \times P}$ et $A_3 \in \mathbb{C}^{N-2P \times P}$. suivant le même principe des opérateurs Ψ_{ij} et en utilisant l'inverse généralisé, la matrice du propagateur d'ordre 3 est donnée par :

$$\Psi = \begin{pmatrix} -2I_P & \Gamma_{13}\Gamma_{23}^+ & \Gamma_{12}\Gamma_{32}^+ \\ \Gamma_{23}\Gamma_{13}^+ & -2I_P & \Gamma_{21}\Gamma_{31}^+ \\ \Gamma_{32}\Gamma_{12}^{-1} & \Gamma_{31}\Gamma_{21}^{-1} & -2I_{N-2P} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Telle que $\Psi A = 0_{N \times P}$, les deux versions des sous espaces bruit proposées dans l'équation ci-dessus $[-2I_P, \Gamma_{13}\Gamma_{23}^+, \Gamma_{12}\Gamma_{32}^+]$ et $[\Gamma_{23}\Gamma_{13}^+, -2I_P, \Gamma_{21}\Gamma_{31}^+]$ sont robustes en présence du bruit corrélé similairement au propagateur partiel [JYHH11] parce que les sous espaces ne sont pas fonctions des blocs de la diagonale Γ_{ii} pour $i = 1, 2, 3$. Ces deux nouvelles versions correspondent à la valeur du rapport $n \geq 3$, par exemple une simulation d'un système de $N = 15$ et de $P = 5$ est convenable pour l'implémentation de cette version du propagateur.

4.3.3 Propagateur d'ordre quatre

Si le nombre des éléments du réseau est strictement supérieur à trois fois le nombre des sources $N > 3P$, la discrétisation du propagateur en ordre quatre [KS14a] est possible où le sous espace est de dimensions $\mathbb{C}^{N-3P \times N}$, les opérateurs Ψ_{ij} de ce sous espace dépendent de la géométrie des fronts d'ondes et de la disposition des éléments du réseau dont il n'est obligatoire que les quatre sous réseaux soient symétriques. La seule condition qu'il faut avoir est que la matrice de corrélation des sources Γ_{ss} doit être inversible, la partition de la matrice directionnelle d'ordre quatre est donnée par :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} A_1 \\ -- \\ A_2 \\ -- \\ A_3 \\ -- \\ A_4 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Avec $A_i, i = 1, 2, 3$ de dimensions $P \times P$ sont des blocs réguliers et A_4 est le bloque de dimensions $(N - 3P) \times P$. Selon cette partition, on divise la matrice initiale des signaux $X(t) = [X_1^T(t), X_2^T(t), X_3^T(t), X_4^T(t)]^T$ avec $X_i(t) \in \mathbb{C}^{P \times K}, i = 1, 2, 3$ et la dernière partition $X_4(t) \in \mathbb{C}^{N-3P \times K}$, les six blocs, de la matrice spectrale, qu'on doit calculer sont donnés par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{12} = \langle X_1(t)X_2^+(t) \rangle = A_1\Gamma_{ss}A_2^+ \\ \Gamma_{31} = \langle X_3(t)X_1^+(t) \rangle = A_3\Gamma_{ss}A_1^+ \\ \Gamma_{32} = \langle X_3(t)X_2^+(t) \rangle = A_3\Gamma_{ss}A_2^+ \\ \Gamma_{41} = \langle X_4(t)X_1^+(t) \rangle = A_4\Gamma_{ss}A_1^+ \\ \Gamma_{42} = \langle X_4(t)X_2^+(t) \rangle = A_4\Gamma_{ss}A_2^+ \\ \Gamma_{43} = \langle X_4(t)X_3^+(t) \rangle = A_4\Gamma_{ss}A_3^+ \end{array} \right. \quad (4.32)$$

La formule générale est de la forme $\Gamma_{ij} = A_i \langle s(t)s^+(t) \rangle A_j^+$, choisissons la quatrième partition A_4 comme base du calcul [KS14a], alors ce bloque peut être exprimé par trois différentes méthodes comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_4 = \Gamma_{43}\Gamma_{13}^{-1}A_1 = A_4\Gamma_{ss}A_3^+A_3^{+^{-1}}\Gamma_{ss}^{-1}A_1^{-1}A_1 \\ A_4 = \Gamma_{41}\Gamma_{21}^{-1}A_2 = A_4\Gamma_{ss}A_1^+A_1^{+^{-1}}\Gamma_{ss}^{-1}A_2^{-1}A_2 \\ A_4 = \Gamma_{42}\Gamma_{32}^{-1}A_3 = A_4\Gamma_{ss}A_2^+A_2^{+^{-1}}\Gamma_{ss}^{-1}A_3^{-1}A_3 \end{array} \right. \quad (4.33)$$

La sommation de ces trois équations, puis l'augmentation de la matrice par assemblage des partitions nous permet de construire le sous espace bruit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{43}\Gamma_{13}^{-1}A_1 + \Gamma_{41}\Gamma_{21}^{-1}A_2 + \Gamma_{42}\Gamma_{32}^{-1}A_3 = 3A_4 \\ \left[\Gamma_{43}\Gamma_{13}^{-1} | \Gamma_{41}\Gamma_{21}^{-1} | \Gamma_{42}\Gamma_{32}^{-1} | - 3I_{N-3P} \right] A = 0_{N-3P \times P} \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Les trois propagateurs mis en jeu sont des fonctions des bloques de la matrice spectrale $\Psi_{41} = \Gamma_{43}\Gamma_{13}^{-1}$, $\Psi_{42} = \Gamma_{41}\Gamma_{21}^{-1}$ et $\Psi_{43} = \Gamma_{42}\Gamma_{32}^{-1}$ et le sous espace bruit $V_n \in \mathbb{C}^{N-3P \times N}$ est exprimé par la relation :

$$V_n A = [\Psi_{41} | \Psi_{42} | \Psi_{43} | - 3I_{N-3P}] A = 0_{N-3P \times P} \quad (4.35)$$

L'opérateur Γ est hermitien ce qui implique que les bloques vérifient la relation $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}^+$, la partition de Γ montre les bloques utilisés pour calculer le sous espace d'ordre quatre :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ \mathbf{\Gamma}_{21} & \tilde{\Gamma}_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} \\ \mathbf{\Gamma}_{31} & \mathbf{\Gamma}_{32} & \tilde{\Gamma}_{33} & \Gamma_{34} \\ \mathbf{\Gamma}_{41} & \mathbf{\Gamma}_{42} & \mathbf{\Gamma}_{43} & \tilde{\Gamma}_{44} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Il est évident que l'extraction du propagateur est effectué par la partie triangulaire inférieure de Γ et ne fait pas intervenir les bloques diagonaux affectés par le bruit :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ii} &= A_i\Gamma_{ss}A_i^+ + \sigma^2 I_P, & i = 1, 2, 3 \\ \tilde{\Gamma}_{44} &= A_4\Gamma_{ss}A_4^+ + \sigma^2 I_{N-3P} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Afin de tester le pouvoir de résolution du sous espace V_n , on considère un système [KS14a] antennes-sources composé de $N = 18$ éléments d'un réseau ULA dont la distance uniforme est le demi de la longueur d'onde $d = \lambda/2$.

La limite de Rayleigh de la résolution angulaire de ce réseau est $\theta_{HPBW} \simeq 6^\circ$. Pour la deuxième partie du système, on considère un champ d'ondes constitué par la superposition des radiations de $P = 5$ sources ponctuelles ayant la même puissance $\sigma_i^2 \simeq 1$ W, fixes durant la durée de l'observation et situées en champ lointain par rapport au réseau avec des directions $\theta_1 = -17^\circ$, $\theta_2 = -5^\circ$, $\theta_3 = 10^\circ$, $\theta_4 = 33^\circ$ et $\theta_5 = 63^\circ$. Les signaux des sources sont ergodiques, complexes et de moyennes nulles $s_i(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_i^2 \simeq 1$ W) et le nombre des échantillons est fixé en $K = 200$ mesures.

Les directions d'arrivées sont mesurées par rapport à la normale du premier élément du réseau. La figure 4.7 représente la moyenne de $L = 200$ essais Monte Carlo de la fonction de localisation avec un rapport $SNR = 5$ dB.

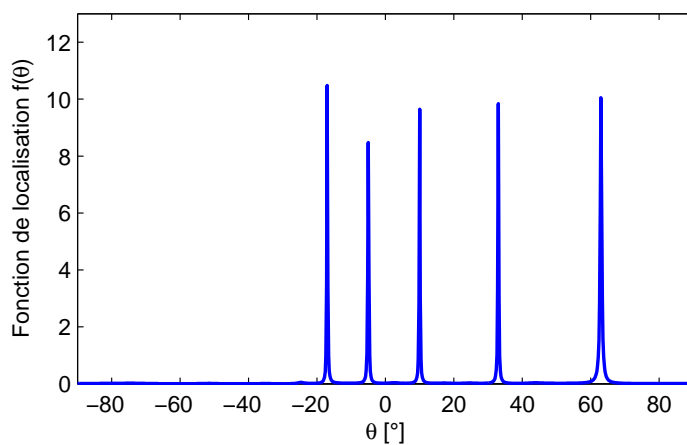


FIGURE 4.7 – Moyenne de $L = 200$ essais du spectre du propagateur d'ordre 4 avec la configuration ($N = 18$, $P = 5$, $\theta = [-17^\circ, -5^\circ, 10^\circ, 33^\circ, 63^\circ]$, $d = \lambda/2$, $K = 200$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_5)$, $SNR = 5$ dB).

Le spectre est de haute résolution sans apparition des lobes secondaires dans le domaine visible du réseau Ω et les hauteurs des pics des directions des sources sont approximativement les mêmes [KS14a]. Dans la deuxième expérience, on teste la performance du sous espace V_n en fonction du bruit, l'évaluation du pouvoir de résolution est comparée avec la méthode algébrique ESPRIT qu'on décrit brièvement.

La méthode ESPRIT [RK89] (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance*) est une technique de haute résolution et de double décomposition spectrale, qui est basée sur la partition du réseau d'antennes en deux sous réseaux identiques telle que la distance de chaque élément du premier sous réseau au deuxième est constante, le calcul des directions d'arrivées se fait à l'aide d'un opérateur de rotation Ψ , la condition qu'il faut avoir pour implémenter la technique ESPRIT est que les deux sous réseaux doivent être symétriques, la table 4.1 résume les étapes de calcul.

On effectue une comparaison en faisant varier le rapport SNR et à chaque fois on calcule la racine carrée de l'erreur quadratique, de $L = 100$ essais, du propagateur d'ordre quatre par détection des pics et de la technique ESPRIT.

TABLE 4.1 – *Technique ESPRIT.*

Données initiales : $X \in \mathbb{C}^{N \times K}$, d , λ .
1. Calculer le sous espace signal U_s par la décomposition $X(t) = U\Sigma V^+$ ou par la décomposition $\Gamma = U\Lambda U^+$.
2. Créer deux partitions du réseau d'antennes en choisissant un nombre m défini par $P \leq m \leq N - 1$.
3. Générer les matrices de sélection $E_1 = \begin{bmatrix} I_m & & 0_{m \times (N-m)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times N}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0_{m \times (N-m)} & & I_m \end{bmatrix}$ et résoudre le problème $E_1 U_s \Psi \simeq E_2 U_s$.
4. Calculer les valeurs propres de l'opérateur Ψ par la décomposition $\Psi = T\Phi T^{-1}$.
5. Calculer $\mu_i = \arg\{\Phi_i\}$ et $\theta_i = \arcsin(-\lambda\mu_i/2\pi d)$ pour $i = 1, \dots, P$.

On rappelle l'expression de la fonction $RMSE$ par l'équation suivante :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{PL} \sum_{i=1}^P \sum_{l=1}^L (\hat{\theta}_{il} - \theta_i)^2} \quad (4.38)$$

Avec $\hat{\theta}_{il}$ est la $i^{\text{ème}}$ direction estimée du $l^{\text{ème}}$ essai, la figure 4.8 représente le résultat obtenu. Quand le SNR est négatif, le propagateur présente des erreurs d'estimation de l'ordre de 3° mais à partir de $SNR = 0$ dB, les valeurs des directions sont presque équivalentes à celles de la technique ESPRIT dans cette configuration.

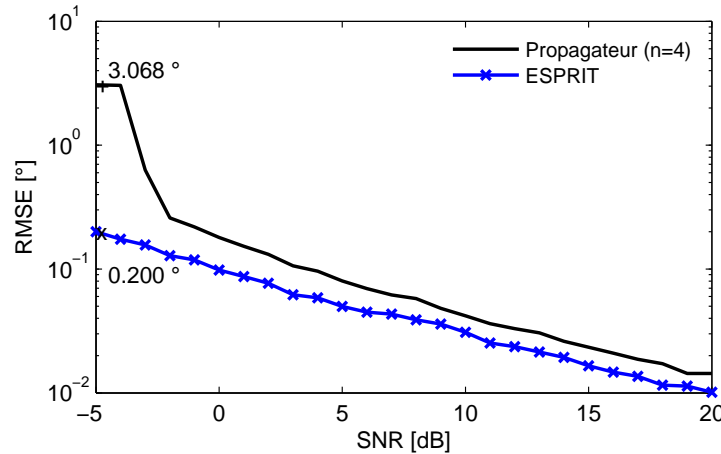


FIGURE 4.8 – Erreur quadratique $RMSE$ du propagateur d'ordre quatre et de la technique ESPRIT pour $L = 100$ essais de chaque valeur du SNR avec la configuration ($N = 18$, $P = 5$, $\theta = [-17^\circ, -5^\circ, 10^\circ, 33^\circ, 63^\circ]$, $d = \lambda/2$, $K = 200$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_5)$).

Pour le troisième test, on évalue la performance du V_n en présence d'un bruit corrélé [KS14a]. On choisit, comme modèle, un bruit qui s'exprime par un opérateur Γ_n Toeplitz symétrique et réel, tel que la puissance de chaque élément (antenne) est $\sigma^2 = 1$ W et pour un élément donné, la puissance d'interaction avec les autres éléments du réseau décroît linéairement jusqu'à la valeur minimale $\sigma_{1N}^2 = 0.1$ W, la structure Toeplitz est formée en spécifiant la première ligne de Γ_n par l'équation $\Gamma_n(1, x) = \alpha x + \beta$ avec les constantes

$\beta = (0.1 - N)/(1 - N)$ et $\alpha = 1 - \beta$. On teste la robustesse du propagateur d'ordre quatre en calculant en un seul essai la fonction de localisation. On trace dans la figure 4.9 la fonction en échelle logarithmique pour visualiser l'effet de corrélation du bruit entre les antennes élémentaires.

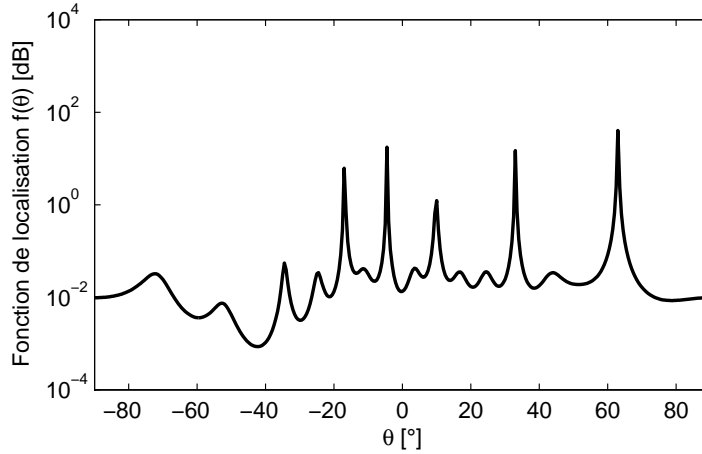


FIGURE 4.9 – Spectre du propagateur d'ordre quatre en présence de bruit corrélé de type Toeplitz réel et symétrique avec la configuration ($N = 18$, $P = 5$, $\theta = [-17^\circ, -5^\circ, 10^\circ, 33^\circ, 63^\circ]$, $d = \lambda/2$, $K = 200$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_5)$).

Le spectre présente des fluctuations infinitésimales mais les pics principaux correspondent aux vraies directions d'arrivées. L'efficacité du propagateur d'ordre quatre réside dans l'extraction du sous espace bruit sans utiliser les éléments diagonaux de la matrice spectrale Γ .

Pour évaluer la sensibilité du sous espace bruit face au bruit corrélé, il faut effectuer d'autres tests avec d'autres modèles du bruit corrélé spatialement [MHC09], temporellement ou avec un bruit de corrélation spatio-temporelle, l'un des ces modèles [BB07, KSF15b] est donné par un l'opérateur $\Gamma_n \in \mathbb{C}^{N \times N}$ défini par :

$$\begin{cases} \Gamma_n(x, y) = \sigma^2 \rho^{|x-y|} e^{j\pi(x-y)/2} \\ \Gamma_n(x, y) = 0 \text{ si } |x - y| > k \end{cases} \quad (4.39)$$

Avec k est la longueur de la corrélation spatiale tel que $k < N$ et ρ est un paramètre d'ajustement de l'intensité de puissance d'interaction. La figure 4.10 représente la valeur absolue de la première ligne de Γ_n avec une longueur de corrélation $k = 6$.

On réalise un quatrième test de localisation bidimensionnelle avec un champ d'ondes de six degrés de liberté, on réarrange le réseau ULA pour en former un réseau circulaire UCA de rayon $r = 43$ cm qui correspond à la fréquence opérationnelle $f_c = 1$ GHz comme illustré dans la figure 4.1. La distance entre les éléments est le demi de la longueur d'onde $d = \lambda/2$.

On considère la présence de $P = 3$ sources ponctuelles de même puissance, définies par les six variables ($\theta_1 = 10^\circ$, $\varphi_1 = 55^\circ$), ($\theta_2 = 33^\circ$, $\varphi_2 = 40^\circ$) et ($\theta_3 = 63^\circ$, $\varphi_3 = 70^\circ$). On calcule la moyenne de $L = 100$ essais de la fonction bidimensionnelle $f(\theta, \varphi)$ du propagateur

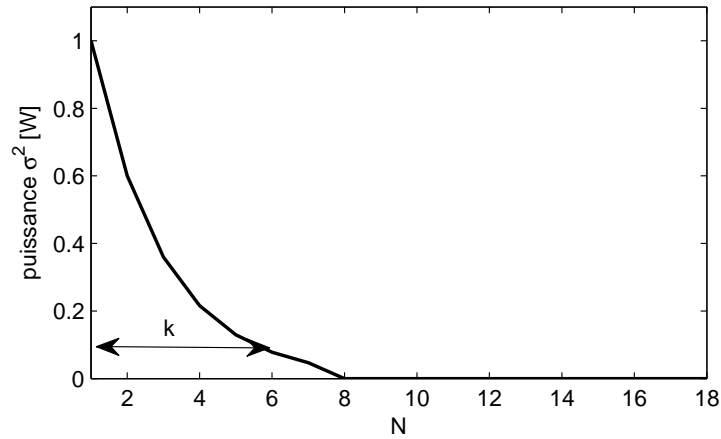


FIGURE 4.10 – Modèle du bruit corrélé configuré par les paramètres $N = 18$, $k = 6$, $\sigma^2 = 1$ W et $\rho = 0.6$

d'ordre quatre pour un environnement caractérisé par $SNR = 8$ dB, le spectre bidimensionnel en décibel, dans la gamme ($\Omega_\theta = [0, \frac{\pi}{2}]$, $\Omega_\varphi = [0, \frac{\pi}{2}]$), est donné par la figure 4.11.

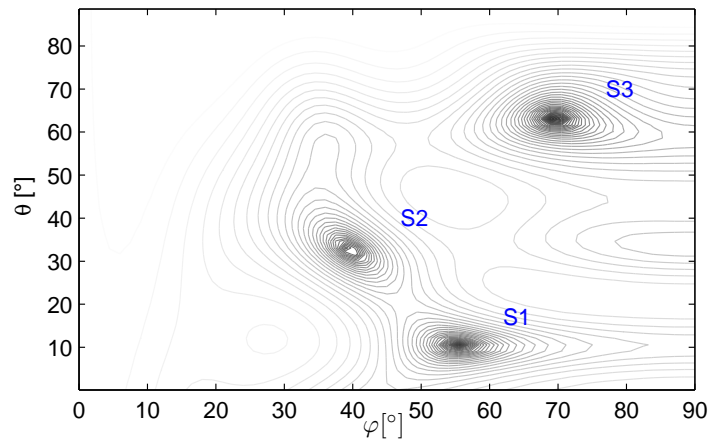


FIGURE 4.11 – Moyenne de $L = 100$ essais du spectre bidimensionnel du propagateur d'ordre quatre par un réseau UCA et avec la configuration ($N = 18$, $P = 3$, $[(\theta_1 = 10^\circ, \varphi_1 = 55^\circ), (\theta_2 = 33^\circ, \varphi_2 = 40^\circ), (\theta_3 = 63^\circ, \varphi_3 = 70^\circ)]$, $d = \lambda/2$, $K = 200$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3)$, $SNR = 8$ dB).

Dans ce dernier test, le propagateur d'ordre quatre est efficace pour un rapport SNR moyen et pour effectuer une localisation bidimensionnelle exacte, il faut augmenter le nombre des éléments du réseau [KS14a] ou améliorer le sous espace bruit V_n par la transformation unitaire ou par l'orthonormalisation. Les quatre tests ci-dessus mettent en preuve la performance de la partition d'ordre quatre de la matrice directionnelle du réseau lorsque la condition $N > 3P$ est vérifiée.

4.3.4 Propagateur d'ordre cinq

Dans cette partie, on traite différemment le propagateur d'ordre cinq en montrant les cinq versions [KS14b] du sous espace bruit V_n construits de la partition d'ordre cinq si la condition $N > 4P$ est vérifiée. Le découpage de la matrice directionnelle $A(\theta)$ devient

dans ce cas :

$$A(\theta) = \left[A_1^T | A_2^T | A_3^T | A_4^T | A_5^T \right]^T \quad (4.40)$$

Avec les dimensions des blocs $A_i \in \mathbb{C}^{P \times P}$ pour l'indice $i = 1, 2, 3, 4$ et $A_5 \in \mathbb{C}^{N-4P \times P}$. D'une façon générale, le propagateur qui relie la $i^{\text{ème}}$ phase à la $j^{\text{ème}}$ phase est :

$$A_j = \Psi_{ji} A_i \quad (4.41)$$

L'opérateur Ψ_{ji} peut avoir les dimensions $\mathbb{C}^{P \times P}$, $\mathbb{C}^{N-4P \times P}$ ou $\mathbb{C}^{P \times N-4P}$ et le sous espace bruit est calculé par la combinaison des opérateurs Ψ_{ji} qui forment un espace orthogonal à la matrice directionnelle $A(\theta)$. Suivant le même ordre du découpage, la matrice spectrale du réseau est arrangée dans l'ordre suivant :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} + \sigma^2 I_P & \Gamma_{12} & \dots & \dots & \Gamma_{15} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} + \sigma^2 I_P & \dots & \dots & \Gamma_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_{51} & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{55} + \sigma^2 I_{N-4P} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Chaque bloque est calculé par la formule $\Gamma_{ij} = \langle x_i(t) x_j^+(t) \rangle = f(A_i, A_j) = A_i \Gamma_{ss} A_j^+$ et chaque propagateur élémentaire s'obtient par l'équation :

$$A_j = \Gamma_{jk} \Gamma_{ik}^{-1} A_i = A_j \Gamma_{ss} A_k^+ A_k^{-1} \Gamma_{ss}^{-1} A_i^{-1} A_i = \Psi_{ji} A_i \quad (4.43)$$

Tel que l'indice $k \neq (i, j)$. Ensuite, la construction du sous espace bruit se fait en prenant n'importe quel bloque comme base du calcul, choisissons par exemple la troisième partition :

$$\begin{cases} A_3 = \Psi_{31} A_1 = \Psi_{32} A_2 = \Psi_{34} A_4 = \Psi_{35} A_5 \\ [\Psi_{31} | \Psi_{32} | -4I_P | \Psi_{34} | \Psi_{35}] A(\theta) = 0_{P \times P} \end{cases} \quad (4.44)$$

De la même manière, on calcule les quatre sous espaces qui restent, en les concaténant, la matrice du propagateur d'ordre cinq [KS14b] a la structure suivante :

$$\Psi = \begin{pmatrix} -4I_P & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} & \Psi_{15} \\ \Psi_{21} & -4I_P & \Psi_{23} & \Psi_{24} & \Psi_{25} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & -4I_P & \Psi_{34} & \Psi_{35} \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & \Psi_{43} & -4I_P & \Psi_{45} \\ \Psi_{51} & \Psi_{52} & \Psi_{53} & \Psi_{54} & -4I_{N-4P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{n,1} \\ V_{n,2} \\ V_{n,3} \\ V_{n,4} \\ V_{n,5} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Les cinq sous espaces peuvent être différents au niveau du pouvoir de résolution mais en absence totale de perturbation ($X(t) = A(\theta)S(t)$) et en cas des sources non cohérentes, ils vérifient les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(V_{n,i}, A(\theta)) = \frac{\pi}{2} \\ \Psi \Gamma = 0_{N \times N} \\ \Psi X(t) = 0_{N \times K} \end{cases} \quad (4.46)$$

Avec $\varphi(\cdot, \cdot)$ est l'angle entre les opérateurs. La matrice Ψ vérifie la propriété de la trace $\text{Tr}(\Psi) = -4N$. Les fonctions de localisation des cinq sous espaces sont :

$$f_i(\theta) = \frac{1}{a^+(\theta)V_{n,i}^+V_{n,i}a(\theta)} \quad i = 1, \dots, 5 \quad (4.47)$$

On effectue une comparaison [KS14b] de la performance des cinq sous espaces avec une configuration du système antennes-sources composé de $N = 18$ éléments d'un réseau ULA dont la distance uniforme est $d = \lambda/2$, un champ d'ondes de $P = 3$ sources de même puissance est capté par le réseau où les signaux des sources sont ergodiques et complexes. Les positions des trois sources sont $\theta_1 = 10^\circ$, $\theta_2 = 28^\circ$ et $\theta_3 = 49^\circ$. L'analyse des données reçues est effectuée en $K = 200$ mesures. Les moyennes des cinq spectres à partir de $L = 100$ essais sont tracés dans la figure 4.12 pour un environnement de $\text{SNR} = 5$ dB.

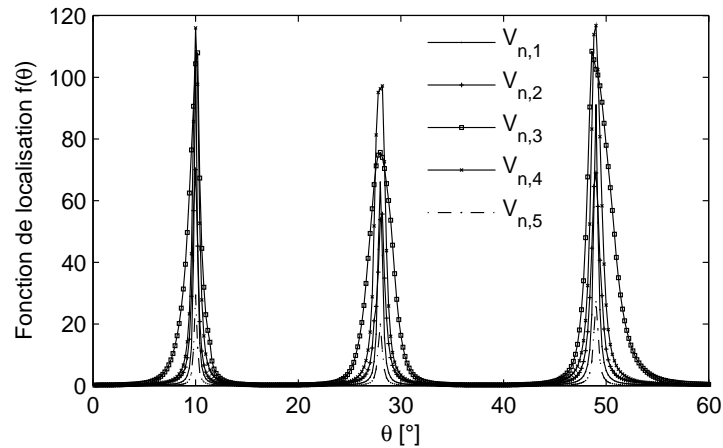


FIGURE 4.12 – Moyennes de $L = 100$ essais des spectres du propagateur d'ordre cinq ($n = 5$) par un réseau ULA avec la configuration ($N = 18$, $P = 3$, $\theta = [10^\circ, 28^\circ, 49^\circ]$, $d = \lambda/2$, $K = 200$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3)$, $\text{SNR} = 5$ dB).

Les pics des cinq fonctions correspondent aux vraies directions avec des biais des erreurs qui ne dépassent pas 1° . Dans les mêmes conditions de la première simulation, on compare la fonction du cinquième sous espace avec le projecteur en sous espace orthogonal de MUSIC. La figure 4.13 illustre la comparaison. La technique de formation de voies offre des positions précises des directions parce que le nombre des antennes et relativement large dont la limite de la résolution du réseau est presque 6.7° .

Pour le troisième test, on compare les erreurs quadratiques des cinq sous espaces avec la technique algébrique ESPRIT, en fonction de l'intensité du bruit dans la gamme $\text{SNR} \in [0 \text{ dB}, 20 \text{ dB}]$, la figure 4.14 représente les résultats obtenus [KS14b] à partir de $L = 100$ essais pour chaque valeur du SNR . Le résultat montre que les deux sous espace $V_{n,1}$ et $V_{n,5}$ sont plus performants que les trois autres sous espaces [KS14b], leurs erreurs d'estimation ne dépassent pas 0.6° si $\text{SNR} = 0$ dB et tendent vers la performance de la fonction ESPRIT à partir de la valeur $\text{SNR} = 10$ dB.

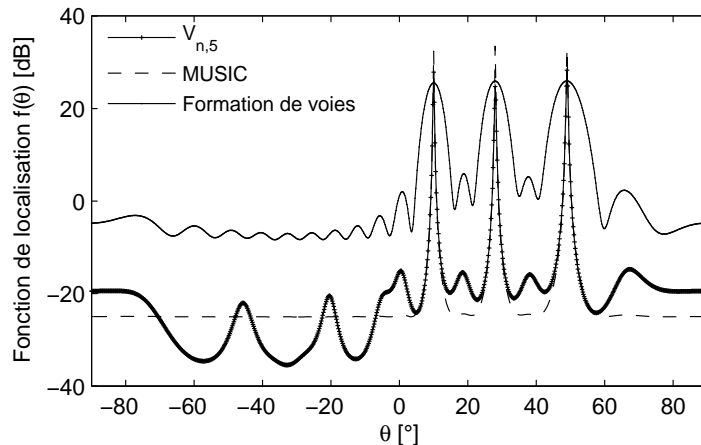


FIGURE 4.13 – Moyennes de $L = 100$ essais des spectres : du cinquième sous espace du propagateur d'ordre cinq, de MUSIC et de formation de voies avec la configuration ($N = 18$, $P = 3$, $\theta = [10^\circ, 28^\circ, 49^\circ]$, $d = \lambda/2$, $K = 200$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3)$, $\text{SNR} = 5$ dB).

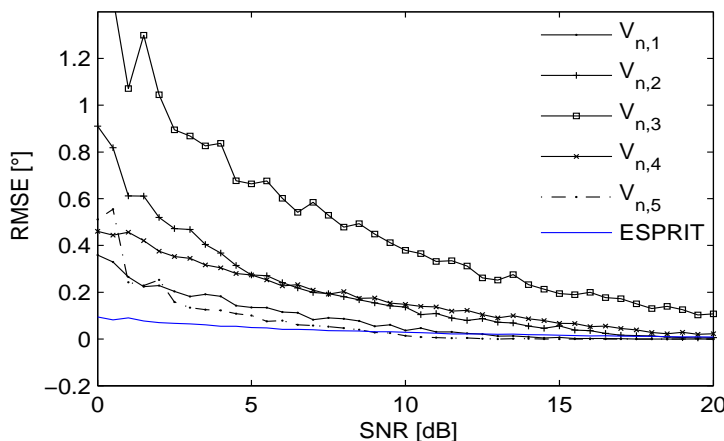


FIGURE 4.14 – RMSE des cinq sous espaces du propagateur d'ordre cinq et d'ESPRIT calculées de $L = 100$ essais pour chaque valeur du SNR avec la configuration ($N = 18$, $P = 3$, $\theta = [10^\circ, 28^\circ, 49^\circ]$, $d = \lambda/2$, $K = 200$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3)$).

Le propagateur d'ordre cinq n'est efficace que pour un rapport SNR élevé et pour un nombre d'antennes relativement large, les conditions $N > 2P$, $N > 3P$ et $N > 4P$ ont permis de générer des extensions du propagateur d'ordre trois, quatre et cinq, ceci montre qu'on peut encore développer d'autres versions du propagateur pour la condition générale $N > nP$ en discrétisant le propagateur en n phases. La section suivante présente le mécanisme général introduit pour une extension n quelconque.

4.3.5 Propagateur généralisé

La généralisation du propagateur en un ordre donné se base sur le rapport n tel que $n = E(N/P)$, il s'agit de discrétiser l'opérateur, basé initialement sur deux partitions de la matrice directionnelle A , en n phases. Les opérateurs résultants sont causals, c'est à dire qu'ils suivent l'évolution des fronts d'ondes le long du réseau, ou retardés tels que les opérateurs fournissent les phases antérieures à partir des phases postérieures. Le principe

de la discrétisation est traduit par un découpage du réseau en n sous réseaux dont il n'est pas obligatoire qu'ils soient symétriques. Pour éclaircir ce découpage, prenons l'exemple de la propagation horizontale d'une source ponctuelle, c'est à dire que le vecteur d'onde \vec{k} est colinéaire avec l'axe le réseau, le temps de propagation maximal est $\tau_N = L_\lambda/c$ où c est la vitesse de l'onde. La discrétisation consiste à diviser le temps du propagation total en n durées infinitésimales $\tau_i = \tau_N/n$ comme suit :

$$\tau_i = \frac{L_\lambda}{cn} \quad (4.48)$$

Si on exprime la longueur du réseau en fonction de la distance considérée égale au demi de la longueur d'onde de la source, on peut déduire que le temps partiel de propagation est fonction de la fréquence porteuse f_c de la source bande étroite :

$$\tau_i = \frac{(N-1)}{2f_cn} \quad (4.49)$$

Chaque temps partiel τ_i lui correspond une phase de la matrice directionnelle A_i relative au sous réseau de longueur $l_i = L_\lambda/n$, cette distance élémentaire peut être exprimée en fonction du nombre de sources P et de la longueur d'onde si $d = \lambda/2$ et $N \gg 1$ comme suit :

$$l_i = \frac{\lambda(N-1)}{2n} \simeq \frac{P\lambda}{2} \quad (4.50)$$

La partition de la matrice directionnelle du réseau $A(\theta) = (A_1^T, \dots, A_n^T)^T$, implique que la matrice des mesures $X(t)$ est divisée en n parties et la matrice spectrale Γ en découpée en n^2 blocs. Théoriquement, le propagateur de la $i^{\text{ème}}$ à la $j^{\text{ème}}$ phase est $A_j = \Psi_{ji}A_i$ et l'extraction numérique se fait par les blocs de Γ comme suit :

$$A_j = \Psi_{ji}A_i = \Gamma_{jk}\Gamma_{ik}^\dagger A_i \quad (4.51)$$

Pour l'indice $k \neq (i, j)$. Le propagateur la $i^{\text{ème}}$ à la $j^{\text{ème}}$ phase est le produit des propagateurs des phases k intermédiaires telles que $i \leq k \leq j$:

$$\Psi_{ji} = \prod_{k=j}^{i+1} \Psi_{k,k-1} \quad (4.52)$$

Par exemple, si on prend trois phases, alors on a : $\Psi_{31} = \Psi_{32}\Psi_{21}$, l'inverse de cette relation est : $\Psi_{13} = \Psi_{12}\Psi_{23}$. Le nombre des propagateurs pour une partition n est $n^2 - n$. Après avoir calculé tous ces opérateurs, on construit la matrice générale du propagateur de la partition d'ordre n comme suit :

$$\Psi = \begin{pmatrix} -\mu I_P & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \dots & \Psi_{1n} \\ \Psi_{21} & -\mu I_P & \Psi_{23} & \dots & \Psi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{n1} & \Psi_{n2} & \Psi_{n3} & \dots & -\mu I_r \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Avec $\mu = n - 1$, $r = N - \mu P$ et $\text{Tr}(\Psi) = -\mu N$, les propagateurs élémentaires vérifient la relation généralisée suivante :

$$\Psi_{ji} = \Psi_{ij}^\dagger \quad (4.54)$$

D'après les versions qu'on a présenté dans ce qui précède, on peut constater que pour un rapport donné n , on peut calculer les deux versions du propagateur d'ordre deux de l'équation (4.20), du propagateur d'ordre quatre, cinq et ainsi de suite jusqu'à la valeur n , et pour chaque partition i telle que $2 \leq i \leq n$, il existe i sous espaces bruit. Par exemple la partition d'ordre trois correspond à trois versions du sous espace $V_{n=3,i}$. Comme généralisation, on considère un ensemble F des versions du sous espaces bruit calculées soit par $X(t)$ ou Γ . Pour un rapport $n = E(N/P)$ le nombre des sous espaces est :

$$\text{Card}(F) = \sum_{i=2}^n i = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \quad (4.55)$$

Chaque ensemble des sous espaces de même partition est contenu dans la matrice $\Psi_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$ pour $i = 2, \dots, n$, l'ensemble F est constitué des matrices des propagateurs $F = \{\Psi_i, i = 2, \dots, n\}$. Afin de décrire quantitativement cet ensemble, prenons un exemple de la simulation d'un réseau d'antennes de $N = 500$ éléments et de $P = 5$ sources avec un rapport SNR suffisamment élevé, alors le nombre des versions du sous espace bruit qu'on peut calculer est $\text{Card}(F) = \sum_{i=2}^{100} i = 5049$ possibilités avec l'ensemble $F = \{\Psi_2, \Psi_3, \dots, \Psi_{100}\}$, ceci veut dire qu'on peut partitionner le système de $i = 2$ jusqu'à la limite $n = 100$.

On présente un dernier exemple d'un système de $N = 18$ éléments et de $P = 3$ sources de directions $\theta_1 = 10^\circ$, $\theta_2 = 38^\circ$ et $\theta_3 = 45^\circ$. Le nombre des partitions possibles est $n = 6$ et l'ensemble des matrices des propagateurs devient :

$$F = \{\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6\}$$

Avec $\text{Card}(F) = 20$ sous espaces possibles. On choisit par exemple le premier sous espace de la sixième partition $V_{n=6,1} \in \mathbb{C}^{3 \times 18}$ qui est donné par la formule suivante :

$$V_{n=6,1} = \left[-5I_3 | \Gamma_{13} \Gamma_{23}^{-1} | \Gamma_{14} \Gamma_{34}^{-1} | \Gamma_{15} \Gamma_{45}^{-1} | \Gamma_{16} \Gamma_{56}^{-1} | \Gamma_{13} \Gamma_{63}^{-1} \right] \quad (4.56)$$

On trace dans la figure 4.15 la moyenne de $L = 200$ essais du spectre comparativement à l'opérateur de MUSIC pour un rapport suffisamment élevé $SNR = 10$ dB.

D'autres tests peuvent être implémentés dans des conditions plus difficiles du bruit corrélié ou de cohérence des sources et ces extensions du propagateur sont valables pour des tests de la simulation.

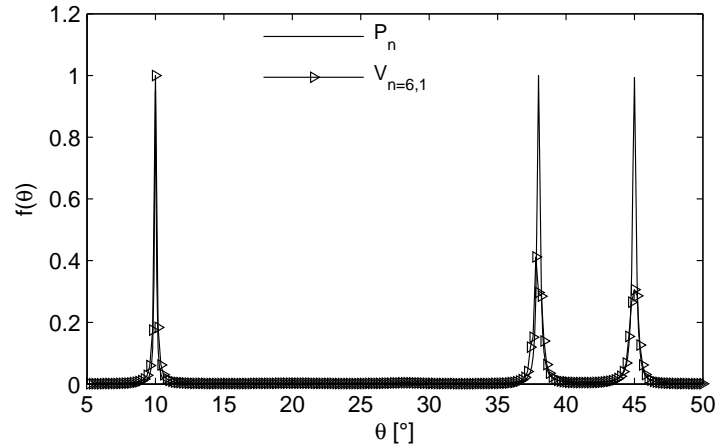


FIGURE 4.15 – Spectres normalisés du premier sous espace du propagateur d'ordre six et de MUSIC par un réseau ULA avec la configuration $(N = 18, P = 3, \theta = [10^\circ, 38^\circ, 45^\circ], d = \lambda/2, K = 200, S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_3), \text{SNR} = 10 \text{ dB})$.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a amélioré la méthode d'entropie maximale pour la localisation bidimensionnelle des sources ergodiques complexes en généralisant l'opérateur MEM en une somme de tous les projecteurs du réseau construits à partir de l'inverse de la matrice spectrale. La propriété principale introduite est la représentation d'un état pure du sous espace bruit qui vérifie que l'entropie de Von Neumann est nulle pour ces projecteurs. Cette proposition montre que la fonction $f(\theta, \varphi)$ est plus stable face aux fluctuations des pics erronés.

Dans la deuxième partie, on a développé une proposition qui permet de généraliser l'opérateur du propagateur en un ordre limité par le rapport entre le nombre des antennes du réseau et le nombre des sources. En effet, ce rapport étant $n = E(N/P)$, on a montré qu'il est possible de générer un ensemble de $n(n+1)/2 - 1$ versions du sous espace bruit en discrétisant l'opérateur du propagateur en n phases qui correspondent à n sous réseaux élémentaires. Les fonctions de localisation déduites fournissent des résultats dont la racine carrée de l'erreur quadratique ne dépasse pas 1° si le rapport SNR est supérieur à 5 dB, ainsi cet ensemble de propagateurs permet d'effectuer d'autres simulations des systèmes antennes-sources dans des conditions non uniformes et de tester leurs performances.

Chapitre 5

OPÉRATEURS NON LINÉAIRES POUR LES RÉSEAUX DE GRANDE DIMENSION

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une classe des opérateurs non linéaires pour la localisation angulaire des sources ponctuelles et fixes en champ lointain. Dans un premier temps, on commence par la description de l'opérateur d'Ermolaev et Gershman [EG94] qui nécessite un paramètre du seuil entre les valeurs propres du sous espace source et celles du sous espace orthogonal. Dans un deuxième temps, on propose une nouvelle solution basée sur l'opérateur exponentiel [KSF15a] dont la fonction de base est une gaussienne centrée en valeur propre minimale, ce nouvel opérateur est une approximation du projecteur en sous espace orthogonal quand la dimension du réseau d'antennes est relativement large. Ensuite on présente une autre version de l'opérateur basée sur la fonction exponentielle décroissante [KS15]. Les simulations montrent que ces deux solutions fournissent des résultats des angles d'arrivées AoA dont les erreurs quadratiques *RMSE* ne dépassent pas 1° si le *SNR* est supérieur ou égal à 5 dB. Bien que les deux approches nécessitent un calcul approximé de l'exponentielle de la matrice spectrale, on présente dans la dernière partie, une autre solution basée sur la fonction de Lorentz. En effet, l'opérateur lorentzien s'obtient par l'inversion de la matrice spectrale, en plus, on propose une borne théorique du seuil déduite par les statistiques du spectre de Γ pour discerner les deux groupes des valeurs propres. Le mécanisme de l'opérateur lorentzien est similaire à celui d'un filtre passe-bas où les valeurs supérieures à la fréquence de coupure sont rejetées. Les trois approches proposées nécessitent la connaissance de la valeur propre minimale et sont performantes pour les réseaux de grande dimension ($N \gg 1$). Une deuxième évaluation du pouvoir de résolution, des opérateurs lorentzien et exponentiel, est effectuée sur des données acoustiques expérimentales [SM05].

5.2 Fonctions matricielles

Dans les chapitres précédents, on a étudié les techniques d'estimation des directions d'arrivées qui sont divisées en des techniques de formation de voies qui optimisent la puissance de sortie du réseau d'antennes. Les techniques des sous espaces orthogonaux dont le calcul des sous espace du système requiert la décomposition spectrale. Enfin les techniques des sous espaces sans décomposition, notamment l'opérateur du propagateur. D'autres approches ont été proposées [EG94] qui exploitent la distribution des valeurs propres de la matrice spectrale afin d'obtenir des approximations du sous espace orthogonal par des opérateurs non linéaires. Ces fonctions matricielles non linéaires sont ajustées avec des paramètres qui permettent une séparation exacte entre les deux sous espaces du système. En suivant cette piste de recherche, on présente dans ce chapitre trois solutions alternatives qui permettent une transformation du spectre de la matrice Γ qui constitue une solution approchée du projecteur en sous espace orthogonal. Avant de détailler ces propositions [KSF15a, KS15], on présente dans ce qui suit, l'opérateur d'Ermolaev et Gershman P_{EG} [EG94] qui est l'une des techniques non linéaires.

Soit la décomposition de la matrice spectrale du réseau $\Gamma = \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i u_i^+$, avec la distribution du spectre $\sigma_\Gamma = \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > \lambda_{p+1} \simeq \dots \simeq \lambda_N = \sigma^2\}$ et les deux sous espaces de la matrice unitaire $U = [U_s, U_n]$. L'opérateur proposé par Ermolaev et Gershman [EG94] exploite cette distribution pour isoler des deux sous groupes, des valeurs propres appartenant aux deux sous espaces qui sont orthogonaux. Soit la valeur λ_c qui appartient à l'intervalle ouvert $] \lambda_{p+1}, \lambda_p [$, cette valeur représente un seuil entre les deux sous systèmes et l'ensemble des valeurs qu'elle peut avoir se situe entre la plus grande valeur propre du sous espace orthogonal λ_{p+1} et la plus petite valeur propre du sous espace source λ_p . Pour une valeur du seuil λ_c , il a été démontré [EG94] que l'opérateur défini par l'équation :

$$P_{EG} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{\Gamma}{\lambda_c} \right)^m + I_N \right)^{-1} \quad (5.1)$$

Est une approximation du projecteur en sous espace orthogonal $P_n = U_n U_n^+$, la preuve s'articule sur le calcul de la $m^{\text{ième}}$ puissance de la matrice spectrale :

$$\Gamma^m = \sum_{i=1}^N \lambda_i^m u_i u_i^+ \quad (5.2)$$

Si on effectue la décomposition spectrale de la base de l'équation (5.1), on obtient :

$$\frac{\Gamma^m}{\lambda_c^m} + I_N = \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_c} \right)^m + 1 \right) u_i u_i^+ \quad (5.3)$$

Ensuite, le calcul de l'inverse de l'expression ci-dessus donne le résultat suivant :

$$\left(\frac{\Gamma^m}{\lambda_c^m} + I_N \right)^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_c} \right)^m + 1} u_i u_i^+ \quad (5.4)$$

Sachant que la valeur du seuil vérifie la relation $\lambda_{P+1} < \lambda_c < \lambda_P$, la limite m de la puissance des valeurs propres donne les deux résultats suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_c} \right)^m + 1} u_i u_i^+ \right) = 0_N \text{ pour } i = \{1, \dots, P\} \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_c} \right)^m + 1} u_j u_j^+ \right) = u_j u_j^+ \text{ pour } j = \{P+1, \dots, N\} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Par conséquent, l'opérateur résulte d'une approximation du projecteur en sous espace bruit :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{\Gamma}{\lambda_c} \right)^m + I_N \right)^{-1} = \sum_{j=P+1}^N u_j u_j^+ = U_n U_n^+ \quad (5.6)$$

Et la fonction de localisation est : $f(\theta) = (a^+(\theta) P_{EG} a(\theta))^{-1}$. En général, la valeur de la puissance est fixée en $m = 10$ [MFB08]. Cette solution de l'opérateur non linéaire de haute résolution peut être implémentée dans la méthode de la norme minimale [EG94]. La valeur seuil λ_c est nécessaire pour construire une approximation correcte du projecteur P_n , afin de calculer cette valeur du seuil, une approche basée sur la factorisation de la matrice spectrale [MFB08] peut accélérer la procédure du calcul.

Considérons les décompositions QR et LU :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & I_{N-P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Les normes des blocs inférieurs des matrices triangulaires supérieures U et R vérifient $\lambda_{P+1} < \|U_{22}\|_2 < \lambda_P$ et $\lambda_{P+1} < \|R_{22}\|_2 < \lambda_P$ [MFB08]. Ainsi il est possible de prendre l'une des ces normes comme seuil de l'opérateur EG : $\lambda_c = \|U_{22}\|_2$ ou $\lambda_c = \|R_{22}\|_2$. Dans le même contexte des fonctions matricielles, on présente dans la section suivante, trois opérateurs non linéaires ajustés par la valeur propre minimale λ_N et la valeur du seuil λ_c .

5.3 Opérateur exponentiel

Commençons par la méthodologie des opérateurs non linéaires pour la localisation des directions d'arrivées. Soit la distribution présentée précédemment des valeurs propres de la matrice spectrale, alors l'application d'une fonction matricielle change la

distribution de ces valeurs et l'opération demandée consiste à transformer et discerner le spectre de Γ . C'est à dire une transformation en projecteur vers le sous espace source ou sous espace orthogonal. Il s'agit de normaliser les valeurs propres du sous espace bruit $\lambda_j, j = P + 1, \dots, N$ et d'annihiler les valeurs propres des sources $\lambda_i, i = 1, \dots, P$. La matrice spectrale est un opérateur auto-adjoint, alors toute fonction lui appliquée agit sur son spectre :

$$f(\Gamma) = Uf(\Lambda)U^+ \quad (5.8)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ la variable des valeurs propres, on remarque que la valeur zéro est exclue parce qu'il y aura toujours des fluctuations du bruit électronique au niveau des antennes du réseau même en absence des sources $P = 0$ [EG94]. En exploitant la distribution du spectre σ_Γ , l'une des fonctions qui permettent de normaliser les valeurs propres du sous espace bruit est la fonction gaussienne [KSF15a] définie par :

$$f(\lambda) = e^{-\beta(\lambda-\lambda_N)^2} \quad (5.9)$$

Avec β étant le paramètre qui contrôle la largeur du pic, où le demi de la largeur à demi hauteur (*Half Width at Half Maximum* HWHM) est $\sqrt{\log(2)}/\beta$, la fonction est représentée dans la figure 5.1 pour deux valeurs de β .

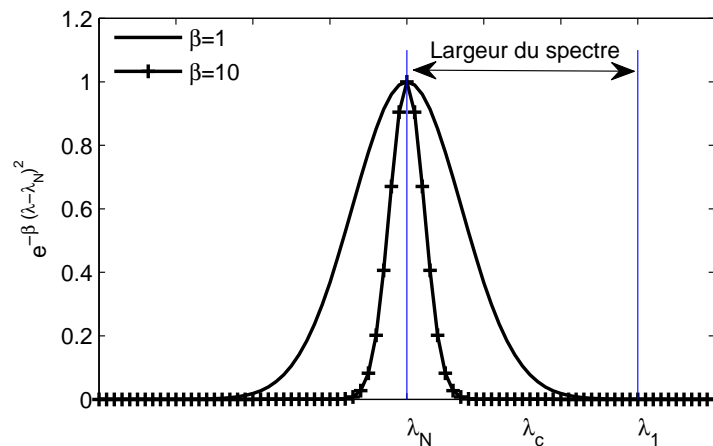


FIGURE 5.1 – Fonction gaussienne appliquée au spectre de la matrice Γ avec les paramètres (λ_N, β) .

Afin d'appliquer cette fonction, il est obligatoire d'estimer la valeur propre minimale à partir du spectre. Pour cet objectif, plusieurs approches sont valables, on choisit par la suite la méthode des puissances [FB97] pour estimer la valeur propre maximale, ensuite on déduit λ_N par le conditionnement défini par la relation :

$$\tau(\Gamma) = \frac{\lambda_1}{\lambda_N} \equiv \frac{\lambda_{Max}}{\lambda_{Min}} \quad (5.10)$$

La méthode des puissances consiste à choisir un vecteur v tel que sa norme infinie est

unitaire $\|v\|_\infty = 1$, puis procéder avec les itérations suivantes pour $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} v_{m+1} &= \Gamma v_m \\ \mu_m &= \langle v_m | v_{m+1} \rangle \\ v_m &= \frac{v_{m+1}}{\langle v_{m+1} | v_{m+1} \rangle} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Après quelques itérations, la valeur μ_m tend vers la valeur maximale λ_1 , ensuite la valeur minimale est déduite par la relation :

$$\lambda_N = \frac{\lambda_1}{\tau(\Gamma)} = \frac{\lambda_1}{\|\Gamma\|_2 \|\Gamma^{-1}\|_2} \quad (5.12)$$

Le second paramètre qu'on doit ajuster est celui de la largeur β qui dépend de la dispersion des valeurs propres du sous espace signal. Normalement, il faut trouver une expression théorique β qui garantie que la fonction $f(\lambda)$ soit amortie pour les valeurs λ_i des sources, si on suppose que le réseau d'antennes contient un nombre des éléments N large relativement au nombre de sources P et que les $P - 1$ distances angulaires entre les sources $|\theta_i - \theta_j|$ ne tendent pas vers zéro, alors la valeur de $\beta = 10$ qui correspond à une largeur étroite de $\sqrt{\log(2)/\beta} \simeq 0.26$ permet une annihilation des valeurs λ_i [KSF15a]. Après avoir défini les paramètres de la fonction scalaire, on la transforme en une fonction matricielle, l'expression théorique de l'opérateur exponentiel est donnée par :

$$e^{-\beta(\Gamma - \lambda_N I_N)^2} = I_N + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-\beta)^k (\Gamma - \lambda_N I_N)^{2k}}{k!} \quad (5.13)$$

Concernant le calcul de cet opérateur, plusieurs solutions [KSF15a] existent comme par exemple la théorie de l'approximation, la série de l'équation (5.13) converge toujours. Analysons l'expression de l'opérateur en fonction de la matrice spectrale pour un nombre infini des échantillons K , la matrice Γ est la somme de deux opérateurs auto-adjoints $\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_n$, il est facile de remarquer que :

$$[\Gamma_s, \Gamma_n] = \Gamma_s \Gamma_n - \Gamma_n \Gamma_s = 0_N \quad (5.14)$$

Avec $[\cdot, \cdot]$ est le commutateur de deux opérateurs. Puisque les deux opérateurs commutent alors on peut évaluer le carré de la matrice par $\Gamma^2 = \Gamma_s^2 + \Gamma_n^2 + 2\Gamma_s \Gamma_n$, et les deux opérateurs vérifient l'inégalité de Golden Thompson [Gol65] :

$$\text{Tr} \left\{ e^{\Gamma_s + \Gamma_n} \right\} \leq \text{Tr} \left\{ e^{\Gamma_s} e^{\Gamma_n} \right\} \quad (5.15)$$

D'après la propriété de commutation et de l'équation (5.14), le résultat de l'opérateur est donné par la proposition suivante [KSF15a] :

Proposition 5.1 *Soit un système d'un réseau linéaire de N antennes et P sources telles que leurs positions angulaires soient suffisamment éloignées et $N \gg P$, alors l'opérateur défini par*

$e^{-\beta(\Gamma-\lambda_N I_N)^2}$ est une approximation du projecteur en sous espace bruit :

$$\begin{aligned} e^{-\beta(\Gamma-\lambda_N I_N)^2} &= e^{-\beta\Gamma^2} e^{2\beta\lambda_N\Gamma} e^{-\beta\lambda_N^2 I_N} \\ &= e^{-\beta\Gamma_s^2} e^{-2\beta\Gamma_s\Gamma_n} e^{-\beta\Gamma_n^2} e^{2\beta\lambda_N\Gamma_s} e^{2\beta\lambda_N\Gamma_n} e^{-\beta\lambda_N^2 I_N} \end{aligned} \quad (5.16)$$

On peut expliciter cette approximation par la décomposition spectrale de l'équation (5.8), on obtient :

$$\begin{aligned} e^{-\beta(\Gamma-\lambda_N I_N)^2} &= U e^{-\beta(\Lambda-\lambda_N I_N)^2} U^+ = \sum_{i=1}^N e^{-\beta(\lambda_i-\lambda_N)^2} u_i u_i^+ \\ &= \sum_{i=1}^P e^{-\beta(\lambda_i-\lambda_N)^2} u_i u_i^+ + \sum_{j=P+1}^N e^{-\beta(\lambda_j-\lambda_N)^2} u_j u_j^+ \\ &\simeq \sum_{j=P+1}^N u_j u_j^+ = U_n U_n^+ = P_n \end{aligned} \quad (5.17)$$

Remarque : L'équation (5.13) est réécrite dans le cas idéal sans bruit par la relation :

$$\lim_{SNR \rightarrow +\infty} P_n = e^{-\beta\Gamma^2} \quad (5.18)$$

Pour évaluer le pouvoir de résolution de la fonction de localisation $f(\theta)$, on choisit une configuration du système antennes-sources définie par $N = 11$ éléments identiques et omnidirectionnels. Le réseau capte un champ résultant de $P = 4$ sources ponctuelles en champ lointain et de type bande étroite, les positions des sources par rapport à la normale du premier élément du réseau sont $\theta = [-40^\circ, 5^\circ, 30^\circ, 35^\circ]$. Les sources sont ergodiques, complexes et de même puissance $s_i(t) \sim \mathcal{CN}(0, 1 \text{ W})$. Pour un nombre de mesures de $K = 200$ et un rapport $SNR = 5 \text{ dB}$, la figure 5.2 représente la moyenne de $L = 100$ essais de l'opérateur exponentiel.

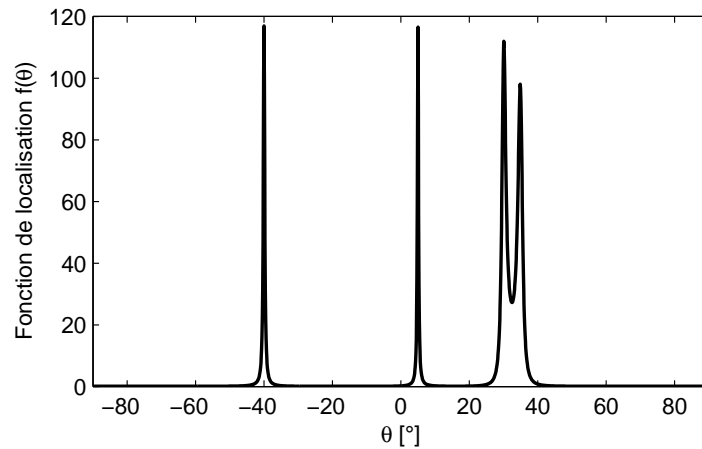


FIGURE 5.2 – Moyenne de $L = 100$ essais de l'opérateur exponentiel avec la configuration ($N = 11$, $P = 4$, $\theta = [-40^\circ, 5^\circ, 30^\circ, 35^\circ]$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_4)$, $d = \lambda/2$, $K = 200$, $SNR = 5 \text{ dB}$).

Les pics du spectre identifient précisément les directions ponctuelles [KSF15a] sans apparition de lobes secondaires et les hauteurs des pics sont supérieures ou égales à 100

unités, c'est à dire que la fonction $f(\theta)$ mesure le degré d'orthogonalité entre les deux sous espaces qui sont linéairement dépendants d'une valeur de $100^{-1} = 0.01$. On effectue un deuxième test pour examiner le nombre des valeurs propres normalisées par l'opérateur exponentiel en fonction de la puissance du bruit. En calculant les valeurs propres de l'opérateur pour chaque valeur du rapport SNR , l'ensemble des spectres est représenté dans la figure 5.3.

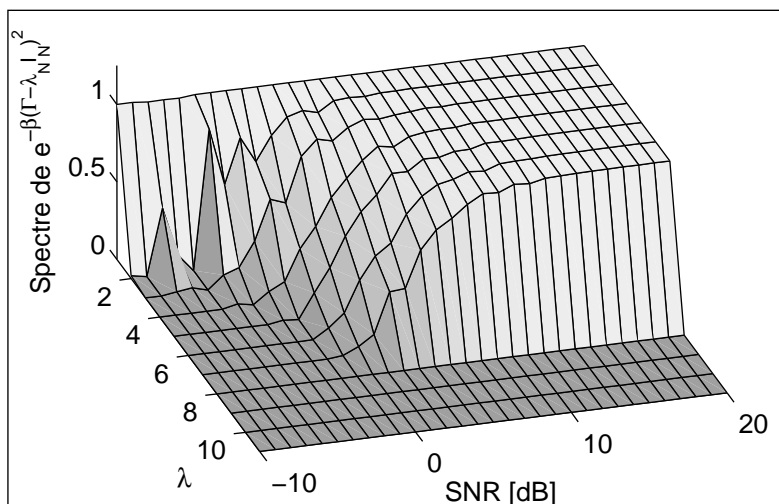


FIGURE 5.3 – Spectre de l'opérateur $e^{-\beta(\Gamma - \lambda_N I_N)^2}$ en fonction du rapport SNR avec la configuration ($N = 11, P = 4, \theta = [-40^\circ, 5^\circ, 30^\circ, 35^\circ], S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_4), d = \lambda/2, K = 200$).

Si la puissance du bruit est supérieure à 1 W qui correspond à la puissance des sources, au moins la valeur minimale λ_N est normalisée tandis que les valeurs propres des sources sont nulles. Dès que la puissance commence à dépasser celle du bruit à partir de $SNR = 0$ dB, toutes les valeurs propres du sous espace orthogonal deviennent unitaires, ceci montre que l'opérateur est efficace quand le rapport SNR est positif. Dans la deuxième partie de la simulation, on compare le pouvoir de résolution de l'opérateur exponentiel avec l'opérateur d'Ermolaev et Gershman (EG) [EG94], le projecteur MUSIC [Sch86] et l'opérateur MVDR [Cap69], la figure 5.4 illustre le résultat de cette comparaison.

Les spectres angulaires des trois premiers opérateurs sont identiques dans cette configuration et la fonction de l'opérateur MVDR n'a pas pu discerner les sources proches. On termine la simulation par une comparaison de la racine carrée de l'erreur quadratique $RMSE$ des quatre spectres de haute résolution, on évalue chaque spectre dans la gamme $SNR \in [-5 \text{ dB}, 20 \text{ dB}]$ en calculant l'erreur à partir de $L = 100$ essais pour chaque valeur du SNR , les quatre fonctions sont représentées dans la figure 5.5.

Pour cette configuration des antennes-sources, les erreurs quadratiques de l'opérateur exponentiel et du projecteur MUSIC deviennent identiques à partir de $SNR = 0$ dB où leur valeur est égale à 0.5° et les pics de la fonction MVDR ne discerne pas les sources proches qu'à partir de 10 dB à peu près. Les résultats de ces simulations montrent que cette méthode est performante si le nombre des éléments du réseau est au moins le triple

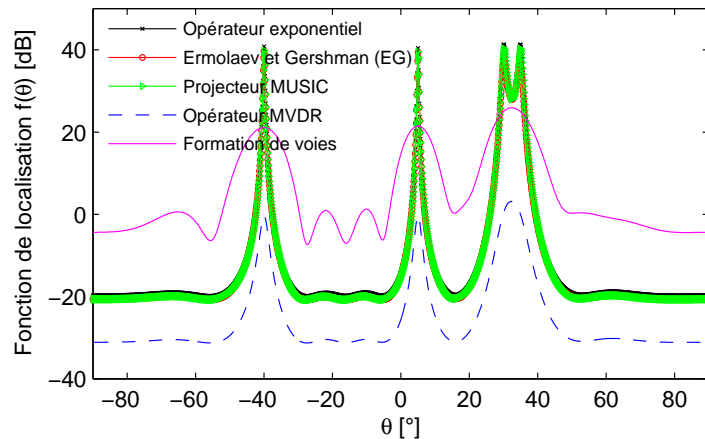


FIGURE 5.4 – Moyenne de $L = 100$ essais des opérateurs : exponentiel, EG, MUSIC, MVDR et Formation de voies avec la configuration ($N = 11$, $P = 4$, $\theta = [-40^\circ, 5^\circ, 30^\circ, 35^\circ]$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_4)$, $d = \lambda/2$, $K = 200$, $\text{SNR} = 5$ dB).

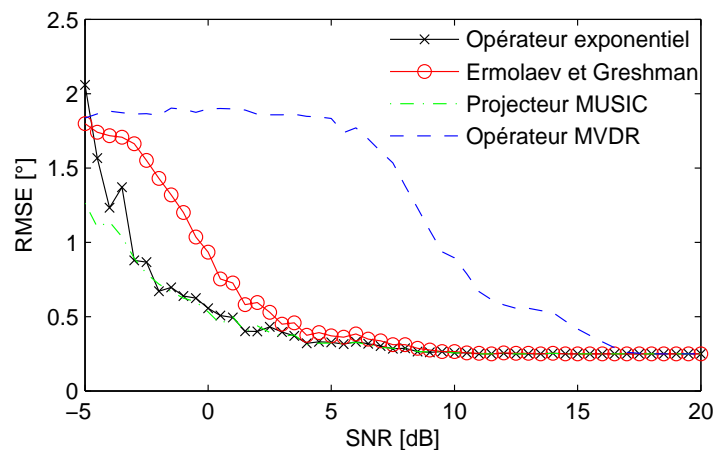


FIGURE 5.5 – RMSE des opérateurs : exponentiel, EG, MUSIC et MVDR avec la configuration ($N = 11$, $P = 4$, $\theta = [-40^\circ, 5^\circ, 30^\circ, 35^\circ]$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_4)$, $d = \lambda/2$, $K = 200$).

du nombre des sources et peut être améliorée s’il existe d’autres méthodes plus sophistiquées qui permettent d’estimer la valeur minimale λ_N . En partant de cette proposition, on montre dans la section suivante qu’une dérivée de l’opérateur exponentiel peut fournir des résultats similaires de localisation pour un réseau de grande dimension N .

5.4 Opérateur exponentiel dérivé

La fonction présentée précédemment $f(\lambda)$ est une gaussienne centrée en valeur propre minimale λ_N avec un facteur β . Une solution alternative [KS15] repose sur la fonction d’une exponentielle décroissante $f(\lambda) = e^{-\beta|\lambda-\lambda_N|}$ définie par deux paramètres qui sont la position du pic principal et le taux de décroissance β . Puisque le spectre de Γ est toujours positif $\sigma_T \in \mathbb{R}^{+*}$, alors on peut exclure la valeur absolue comme suit :

$$f(\lambda) = e^{-\beta(\lambda-\lambda_N)} \quad (5.19)$$

De la même manière, on estime la valeur minimale λ_N et on propose [KS15] un taux d'amortissement de $\beta = \sqrt{N}$ pour un réseau de grande dimension et pour des sources suffisamment éloignées, l'opérateur exponentiel décroissant P_e est donné par l'équation :

$$P_e = e^{-\sqrt{N}(\Gamma - \lambda_N I_N)} = I_N + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k N^{\frac{k}{2}} (\Gamma - \lambda_N I_N)^k}{k!} \quad (5.20)$$

La décomposition spectrale de cet opérateur montre que c'est une approximation du projecteur P_n :

$$\begin{aligned} P_e &= U e^{-\sqrt{N}(\Lambda - \lambda_N I_N)} U^+ = \sum_{i=1}^N e^{-\sqrt{N}(\lambda_i - \lambda_N)} u_i u_i^+ \\ &= \sum_{i=1}^P e^{-\sqrt{N}(\lambda_i - \lambda_N)} u_i u_i^+ + \sum_{j=P+1}^N e^{-\sqrt{N}(\lambda_j - \lambda_N)} u_j u_j^+ \\ &\simeq \sum_{j=P+1}^N u_j u_j^+ = U_n U_n^+ \end{aligned} \quad (5.21)$$

Dans le cas où les perturbations sont absentes $N(t) = 0_{N \times K}$, ce qui est équivalent à dire que le rapport $SNR \rightarrow +\infty$, cet opérateur est réduit en $e^{-\sqrt{N}\Gamma}$ qui vérifie les propriétés suivantes [KS15] pour $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|P_e^m\|_F &= \sqrt{\text{Tr}(P_e^{m+} P_e^m)} = \sqrt{N - P} \\ \text{Tr}(P_e^m) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i^m = N - P \\ h(P_e^m) &= -\text{Tr}(P_e^m \log(P_e^m)) = 0 \\ \cos(P_e^m, I_N) &= \frac{\langle P_n^m \rangle}{\sqrt{N} \langle P_e^{2m} \rangle} = \sqrt{\frac{N - P}{N}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

La troisième formule de l'équation (5.22) est l'entropie de Von Neumann de la théorie quantique de l'information [vN95], qu'on a introduit dans le quatrième chapitre. Pour un opérateur $\rho \in \mathbb{C}^{N \times N}$ défini par ses valeurs propres λ_i , l'entropie est $h(\rho) = -\sum_{i=1}^N \lambda_i \log \lambda_i$ qui est nulle pour un opérateur qui représente un état pure, cette notion en terme de traitement d'antennes est traduite par la séparation des valeurs propres des deux sous espace orthogonaux telle que le spectre est binaire. La borne supérieure de l'entropie est $\text{Max}\{h(\rho)\} = \log N$ qui correspond par exemple à l'opérateur de forme $\rho = I_N/N$.

La dernière ligne de l'équation de (5.22) est l'angle [WS80] entre le projecteur P_e et l'opérateur identité I_N , c'est l'angle entre le spectre de P_e et la ligne équiangulaire définie par $1_{N \times 1}$ avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit entre deux opérateurs [WS80] donné par la relation $\langle \rho_1, \rho_2 \rangle = \text{Tr}(\rho_1 \rho_2)$. Le nombre des sources est une variable bornée $0 \leq P \leq N - 1$, ces bornes sont traduites par deux cas, soit que le système des antennes détecte la présence de $N - 1$ sources ou l'absence totale de toute radiation. S'il n'y a aucune source, alors les opérateurs P_e et I_N sont colinéaires et l'angle est égal à $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{N}{N}} = 0^\circ$, et s'il

ya $N - 1$ radiations durant la période d'observation, alors l'angle devient $\alpha = \arccos N^{-\frac{1}{2}}$.

Remarque : Cet opérateur requiert une estimation de la valeur minimale λ_N , si on possède une information préliminaire sur la somme des puissances des sources, alors il est possible d'extraire efficacement la puissance du bruit par les éléments diagonaux de la matrice spectrale du réseau [KS15]. On a montré dans le deuxième chapitre que les composantes diagonales sont $\Gamma_{ii} = \sum_i^P \sigma_i^2 + \sigma^2$, donc une estimation précise de le l'écart type du bruit est obtenue par la relation suivante :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Gamma_{ii} - \sum_{i=1}^P \sigma_i^2} = \sqrt{\frac{\text{Tr}(\Gamma)}{N} - \sum_{i=1}^P \sigma_i^2} \quad (5.23)$$

Avec $\lambda_N \simeq \sigma^2$ et $\text{Tr}(\Gamma)/N = \langle \lambda \rangle$ est la statistique d'ordre un du spectre σ_Γ .

Prenons une simulation pour tester le pouvoir de résolution de cet opérateur en choisissant une configuration non uniforme d'un système composé de $N = 20$ antennes dont les éléments de la troisième, neuvième et treizième positions ne fonctionnent pas durant le temps d'observation, cette condition influence le diagramme du rayonnement final [KS15]. Le facteur du réseau $F(\theta)$ présente des lobes secondaires dispersés selon les positions des éléments non fonctionnels. Trois sources émettent des échos depuis des directions $\theta_1 = 10^\circ$, $\theta_2 = 15^\circ$ et $\theta_3 = 18^\circ$, les signaux transportés sont des symboles aléatoires de type BPSK (*Binary Phase Shift Keying*) et de même puissance $\sigma_i^2 = 1$ W. Le modèle du bruit est un processus stochastique complexe de même puissance pour tous les éléments du réseau et le nombre de mesures est fixé en $K = 60$ échantillons. On évalue les erreurs quadratiques de l'opérateur exponentiel, du projecteur MUSIC et du propagateur orthonormal OPM à partir des pics détectés pour chaque fonction de localisation de chaque opérateur, pour $L = 200$ essais. La figure 5.6 représente les métriques RMSE en fonction du rapport SNR .

Le propagateur implémenté dans cette simulation est extrait de la partition $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]$ où $\Gamma_1 \in \mathbb{C}^{20 \times 3}$ et $\Gamma_2 \in \mathbb{C}^{20 \times 17}$ avec l'opérateur du propagateur $\Psi = \Gamma_1^\dagger \Gamma_2$ et le sous espace bruit $V_n = [\Psi^+, -I_{N-P}]$. Le projecteur MUSIC [Sch86] est plus performant dans cette configuration, il a une erreur de $\sim 1.97^\circ$ en $SNR = -5$ dB tandis que l'opérateur exponentiel présente une erreur de $\sim 2.34^\circ$ et le propagateur orthonormal $V_0 = V_n(V_n^+ V_n)^{-0.5}$ avec une erreur de $\sim 2.01^\circ$. Ce résultat montre que l'opérateur exponentiel dérivé est performant lorsque la dimension de l'antenne est large et son erreur tend vers celle du projecteur MUSIC à partir de $SNR = 5$ dB.

Les deux versions des opérateurs exponentiels présentées ci-dessus nécessitent une approximation du calcul de l'exponentielle matricielle. Au niveau de la simulation, le calcul ne présente pas de difficultés mais pour l'implémentation sur une carte FPGA (*Field Programmable Gate Array*) par exemple, il est préférable de proposer une solution dont la complexité du calcul est minimale.

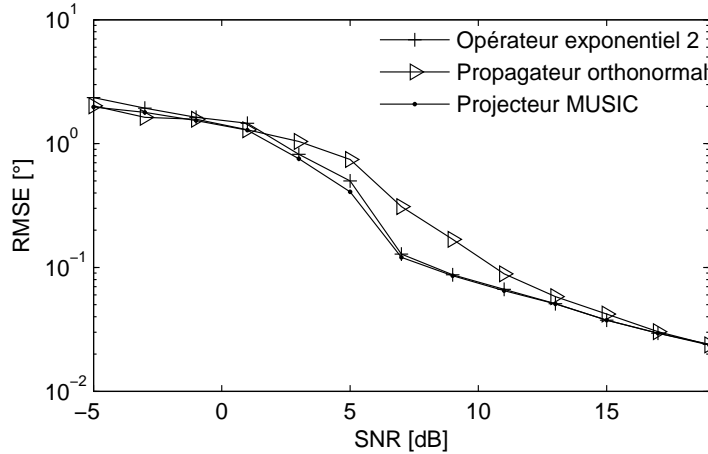


FIGURE 5.6 – RMSE des opérateurs exponentiel dérivé, MUSIC et propagateur orthonormal avec la configuration ($N = 20$ dont les signaux aux positions (3,9,13) sont nuls, $P = 3$, $\theta = [10^\circ, 15^\circ, 18^\circ]$, $d = \lambda/2$, $K = 60$).

Si on considère la fonction des valeurs propres réduite $f(\lambda) = e^{-|\lambda|}$, on peut remarquer que sa transformée de Fourier représente une caractéristique importante :

$$\mathcal{F}\{f(\lambda)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda|} e^{-2\pi j\lambda x} d\lambda = \frac{2}{4\pi^2 x^2 + 1} \quad (5.24)$$

Cette fonction est bornée de valeur maximale égale à 2 et présente un seul pic à l'origine. En se basant sur ce résultat, on présente dans la section suivante une nouvelle approche de l'opérateur non linéaire.

5.5 Opérateur lorentzien

On commence dans cette section par la description de la fonction de Lorentz [CK79] scalaire pour la variable $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x)$ qui présente un seul pic en abscisse x_0 et définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\beta}{(x - x_0)^2 + \beta^2} \quad (5.25)$$

Est la fonction normalisée de Lorentz [CK79] donnée par les paramètres (x_0, β) telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$$

En x_0 la fonction présente un maximum de valeur $f(x_0) = 1/\beta\pi$ dont le demi de cette valeur est atteint en $x = x_0 \pm \beta$ ce qui correspond à une largeur à mi hauteur (*Full Width at Half Maximum* FWHM) égale à 2β . Les points d'inflexion x_c sont obtenus quand la dérivée du second ordre est nulle :

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{-2\beta}{\pi((x - x_0)^2 + \beta^2)^2} + \frac{8\beta(x - x_0)^2}{\pi((x - x_0)^2 + \beta^2)^3} = 0 \quad (5.26)$$

La solution de cette équation est $x_c = x_0 \pm \beta / \sqrt{3}$ et la fonction est égale à $f(x_c) = 3/4\pi\beta$. On peut remarquer qu'aux points d'inflexion, la hauteur maximale est réduite par le facteur 0.75. Soit le spectre σ_Γ qui est divisé en deux entités (λ_n, λ_s) des deux sous espace (U_s, U_n) , afin de normaliser le sous espace orthogonal et d'annihiler le sous espace source, on utilise la version suivante de la fonction lorentzienne :

$$f(\lambda) = \frac{1}{\alpha(\lambda - \lambda_N)^2 + 1} \quad (5.27)$$

Le pic central correspond à la valeur minimale λ_N avec un paramètre du taux d'amortissement α , la structure de la fonction est présentée dans la figure 5.7.

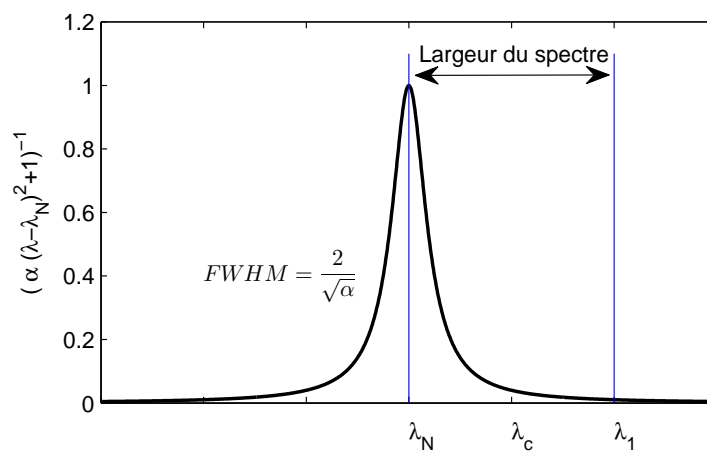


FIGURE 5.7 – Fonction de Lorentz appliquée au spectre σ_Γ , définie par les paramètres (λ_N, β) .

Similairement à l'opérateur exponentiel, la valeur minimale λ_N peut être calculée par la méthode des puissances comme expliqué par l'équation (5.11). Le deuxième paramètre à contrôler, α , qui est fonction du seuil λ_c entre les deux groupes des valeurs propres $\alpha = f(\lambda_c)$. Pour cet effet, on propose une condition de la valeur de la fonction $f(\lambda_c)$ qu'elle doit avoir, on choisit par exemple la valeur $\epsilon = 1 \times 10^{-3}$, ceci est équivalent à $\alpha(\lambda_c - \lambda_N)^2 \simeq \epsilon^{-1}$. Ensuite le paramètre d'amortissement s'exprime en fonction du seuil par la relation :

$$\alpha = \frac{\epsilon^{-1}}{(\lambda_c - \lambda_N)^2} = \frac{1 \times 10^3}{(\lambda_c - \lambda_N)^2} \quad (5.28)$$

Il ne reste que trouver une expression théorique de seuil λ_c . On a proposé la valeur $\beta = 10$ dans l'équation (5.9) pour l'opérateur exponentiel gaussien et la valeur $\beta = \sqrt{N}$ dans l'équation (5.19) pour l'opérateur exponentiel décroissant et ces valeurs donnent des résultats fiables si la dimension de l'antenne est large. Pour le cas de l'opérateur lorentzien, on exprime le taux α d'amortissement autrement [KSF15c]. On choisit une valeur théorique du seuil λ_c qui est la borne supérieure de la valeur propre minimale λ_N , cette borne peut être calculée sans décomposition spectrale de la matrice Γ à l'aide du théorème des traces [WS80].

Soit les statistiques d'ordre deux du spectre σ_Γ données en fonction de la trace comme suit :

$$\begin{cases} \langle \lambda \rangle = \frac{\text{Tr}(\Gamma)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Gamma_{ii} \\ \Delta\lambda = \sqrt{\langle \lambda^2 \rangle - \langle \lambda \rangle^2} = \sqrt{\frac{\text{Tr}(\Gamma^2)}{N} - \left(\frac{\text{Tr}(\Gamma)}{N}\right)^2} \end{cases} \quad (5.29)$$

Théorème 5.1 Soit la matrice spectrale $\Gamma \in \mathbb{C}^{N \times N}$ auto-adjointe $\Gamma = \Gamma^+$ et soit la moyenne $\langle \lambda \rangle$ et l'écart type $\Delta\lambda$ définis par les équations (5.29), alors les bornes inférieures et supérieures des valeurs propres minimale et maximale ($\lambda_1 = \lambda_{\text{Max}}, \lambda_N = \lambda_{\text{Min}}$) du spectre σ_Γ sont données par les relations :

$$\langle \lambda \rangle - \Delta\lambda\sqrt{N-1} \leq \lambda_N \leq \langle \lambda \rangle - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{N-1}} \quad (5.30)$$

$$\langle \lambda \rangle + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{N-1}} \leq \lambda_1 \leq \langle \lambda \rangle + \Delta\lambda\sqrt{N-1}$$

La preuve est présentée dans [WS80].

Pour un cas particulier de deux antennes $\Gamma \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ et éventuellement une source $P = 1$, les valeurs propres sont exactement [WS80] $\lambda_N = \langle \lambda \rangle - \Delta\lambda$ et $\lambda_1 = \langle \lambda \rangle + \Delta\lambda$. Cette situation peut être exploitée pour un réseau de $N > P = 1$ où l'ensemble des N antennes élémentaires est découpé en $N/2$ sous réseaux dont les valeurs propres des $N/2$ matrices spectrales sont facilement déduites par la trace.

A l'aide de ce théorème et pour un système d'une antenne relativement large par rapport au nombre des sources P dont les différences angulaires $|\theta_i - \theta_j|$ ne tendent pas vers zéro, le seuil entre les deux ensembles des valeurs propres est pris égal à la borne supérieure de la puissance du bruit :

$$\lambda_c = \langle \lambda \rangle - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{N-1}} \quad (5.31)$$

Après avoir défini les deux paramètres de la fonction lorentzienne $f(\lambda)$, son application à la matrice spectrale permet de présenter la proposition suivante [KSF15c] :

Proposition 5.2 Soit un système d'antennes-sources de type bande étroite composé de N éléments et P sources tel que $N \gg P$ et d'angles d'arrivées θ_i distincts, et soit la matrice spectrale du réseau $\Gamma = \langle x(t)x^+(t) \rangle = U\Lambda U^+$, alors l'opérateur lorentzien défini par :

$$f(\Gamma) = \frac{I_N}{\alpha(\Gamma - H_N)^2 + I_N} \quad (5.32)$$

constitue une approximation du projecteur en sous espace orthogonal $P_n = U_n U_n^+$, avec les paramètres $H_N = \lambda_N I_N$, $\alpha = \frac{1 \times 10^3}{(\lambda_c - \lambda_N)^2}$ et $\lambda_c = \langle \lambda \rangle - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{N-1}}$.

La décomposition est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
f(\Gamma) &= U \frac{I_N}{\alpha(\Lambda - H_N)^2 + I_N} U^+ = \sum_{i=1}^N \frac{u_i u_i^+}{\alpha(\lambda_i - \lambda_N)^2 + 1} \\
&= \sum_{i=1}^P \frac{u_i u_i^+}{\alpha(\lambda_i - \lambda_N)^2 + 1} + \sum_{j=P+1}^N \frac{u_j u_j^+}{\alpha(\lambda_j - \lambda_N)^2 + 1} \\
&\simeq \sum_{j=P+1}^N u_j u_j^+ \simeq P_n
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Etant donné que $\lambda_j \simeq \sigma^2$, on remarque que l'opérateur est une approximation du projecteur parce que les valeurs propres du sous espace bruit ne sont pas parfaitement normalisées mais leurs transformations présentent des fluctuations d'erreur (exemple $f(\lambda_j) = 0.98$, $j = P + 1, \dots, N$). La même remarque concerne les valeurs propres du sous espace signal qui ne sont pas parfaitement annihilées (exemple $f(\lambda_i) = 1 \times 10^{-3}$, $i = 1, \dots, P$). On récapitule l'ensemble des étapes expliquées ci-dessus de l'opérateur lorentzien dans la table 5.1.

TABLE 5.1 – *Technique lorentzienne de Localisation DoA.*

Données initiales : $\Gamma \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ($N \gg P$), d , λ .
<ol style="list-style-type: none"> 1. Calculer la valeur propre minimale λ_N en utilisant la méthode des puissances. 2. Calculer les statistiques d'ordre deux $m = \frac{\text{Tr}(\Gamma)}{N}$ et $s = \sqrt{\frac{\text{Tr}(\Gamma^2)}{N} - m^2}$. 3. Calculer les paramètres $\lambda_c = m - \frac{s}{\sqrt{N-1}}$, $\alpha = \frac{1 \times 10^3}{(\lambda_c - \lambda_N)^2}$ et $H_N = \lambda_N I_N$. 4. Calculer l'opérateur lorentzien $f(\Gamma) = P_L = (\alpha(\Gamma - \Gamma_0)^2 + I_N)^{-1}$. 5. Calculer la fonction de localisation $f(\theta) = (a^+(\theta) P_L a(\theta))^{-1}$ pour un domaine angulaire $\theta \in \Omega$ et détecter les pics des directions d'arrivées.

5.5.1 Résultats de simulation

La vérification du pouvoir de résolution de cet opérateur est présentée comme suit, on effectue une simulation d'un système antennes-sources composé d'un réseau ULA de $N = 11$ éléments omnidirectionnels dont la distance uniforme est le demi de la longueur d'onde $d = \lambda/2$, le domaine angulaire valable est $\Omega = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Un champ de radiations, dont la composante électrique \vec{E} est captée par le réseau, résulte de la superposition de $P = 4$ sources fixes, ponctuelles, de type bande étroite, en champ lointain et de même fréquence porteuse f_c situées dans les directions -80° , 15° , 20° et 56° mesurées par rapport à la normale du réseau. Les signaux des sources ainsi que le bruit du système électronique sont des processus ergodiques, complexes et de moyennes nulles. Les sources présentes ont la même puissance $\sigma_i^2 \simeq 1$ W. Les données captées sont analysées avec un nombre de mesures de $K = 200$.

La figure 5.8 représente la moyenne de $L = 100$ essais de la fonction angulaire lorentzienne pour un rapport de $SNR = 5$ dB. Les hauteurs des pics sont presque les mêmes pour les quatre sources avec une apparition légère d'un lobe secondaire aux environs de 80° .

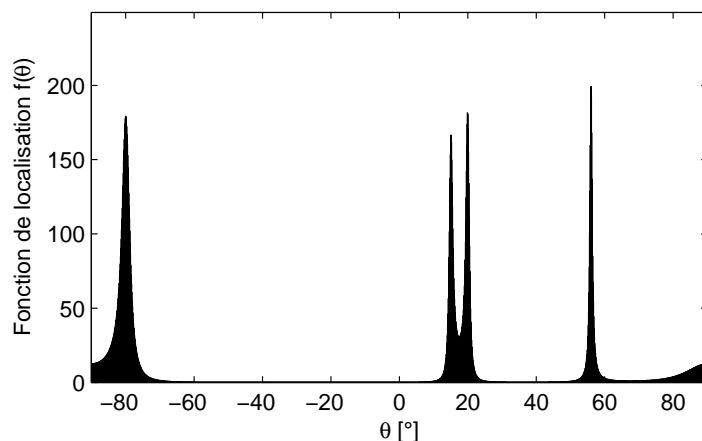


FIGURE 5.8 – Moyenne de $L = 100$ essais de l'opérateur lorentzien avec la configuration ($N = 11$, $P = 4$, $\theta = [-80^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 56^\circ]$, $K = 200$, $d = \lambda/2$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_4)$, $SNR = 5$ dB).

Dans le dernier test, on évalue le pouvoir de résolution en fonction de la dimension de l'antenne, pour tester l'efficacité du seuil proposé dans l'équation (5.31). On fait varier le nombre d'antennes élémentaires dans la gamme [$N = P = 4, \dots, N = 20$], et pour chaque valeur on calcule la probabilité de résolution à partir de $L = 100$ essais pour un rapport de $SNR = 5$ dB. Le pas de résolution choisi pour cette simulation est $d\theta = 1^\circ$. La figure 5.9 représente le résultat obtenu. On déduit que le seuil λ_c n'est correcte que lorsque le nombre des éléments N est au moins le triple des nombres de sources P [KSF15c] et la probabilité de résolution atteint 90% en $N = 13$.

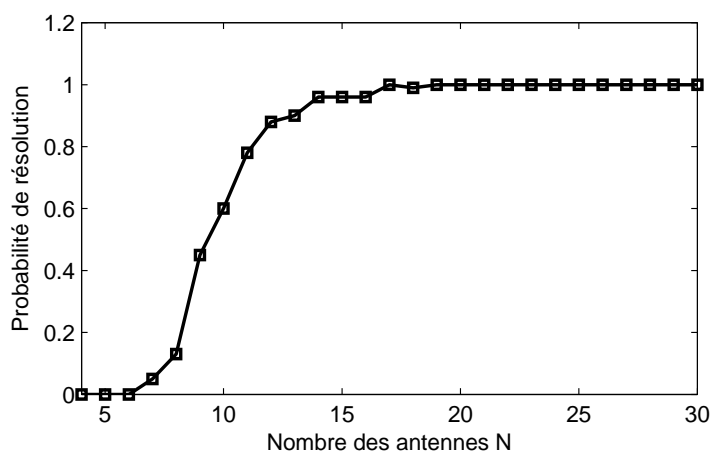


FIGURE 5.9 – Probabilité de résolution de l'opérateur lorentzien avec la configuration ($L = 100$, $P = 4$, $\theta = [-80^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 56^\circ]$, $K = 200$, $d = \lambda/2$, $S(t) \sim \mathcal{CN}(0, I_4)$, $SNR = 5$ dB).

5.5.2 Résultats des données expérimentales

Dans cette dernière partie, on évalue le pouvoir de résolution des opérateurs lorentzien et exponentiel, comparativement aux méthodes conventionnelles, appliqués sur des données réelles enregistrées par un réseau d'hydrophones [KSF15c], les échos reçus sont parvenus de deux sources acoustiques sous marines [SM05], la table 5.2 présente l'ensemble des données initiales et estimées à partir de la matrice $X(t)$.

TABLE 5.2 – Description des données acoustiques expérimentales [SM05].

Paramètre	Valeur
Nombre des hydrophones	$N = 6$.
Distance élémentaire	$d = 0.9$ m.
Longueur du réseau	$L_\lambda = 4.5$ m.
Nombre des échantillons	$K = 4096$.
Longueur d'onde	$\lambda = 5.32$ m.
Nombre d'onde	$\ \vec{k}\ = 1.181$ rad/m.
Puissance moyenne de $X(t)$	$Tr(\Gamma)/N = 0.99$ W.
Valeurs propres de Γ	[4.364, 1.483, 0.122, 0.022, 0.005, 0.0007].
Nombre des sources	$P = 2$.
Résolution angulaire	$d\theta = 0.1^\circ$, $\theta \in \Omega = [-\pi/2, +\pi/2]$.
Puissance estimée du bruit	$\sigma^2 \simeq 0.0376$ W.
Puissances estimées des sources	$\sigma_1^2 \simeq 0.7188$ W, $\sigma_2^2 \simeq 0.3092$ W.
Rapports signal sur bruit	$SNR_1 \simeq 12.81$ dB, $SNR_2 \simeq 9.15$ dB.

L'analyse des valeurs propres de Γ indique l'existence de deux sources et la valeur propre minimale, autrement la puissance du bruit acoustique ambiant, est estimée par l'équation suivante :

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=3}^6 \lambda_j \quad (5.34)$$

Concernant les sources acoustiques (sous-marines), leurs puissances sont estimées à partir du spectre de formation de voies (*Beamforming*) :

$$f_{bf}(\theta) = \frac{1}{N^2} a^+(\theta) \Gamma a(\theta) \quad (5.35)$$

Les hauteurs des deux pics de f_{bf} correspondent approximativement à σ_1^2 et σ_2^2 et le rapport SNR est calculé par la formule $SNR_i = 10 \log_{10}(\sigma_i^2/\sigma^2)$ pour $i = 1, 2$. Le vecteur directionnel $a(\theta) \in \mathbb{C}^{6 \times 1}$ est défini par les relations suivantes :

$$\begin{cases} a(\theta) = e^{-2\pi j r^T \lambda^{-1} \sin(\theta)} \\ r = [0.00, 0.90, 1.80, 2.70, 3.60, 4.50] \end{cases} \quad (5.36)$$

La figure 5.10 représente le résultat de la fonction de localisation lorentzienne, un algorithme de détection des pics montre que le premier sous marin est localisé en -37.70° et le deuxième en $\theta_2 = 58.60^\circ$.

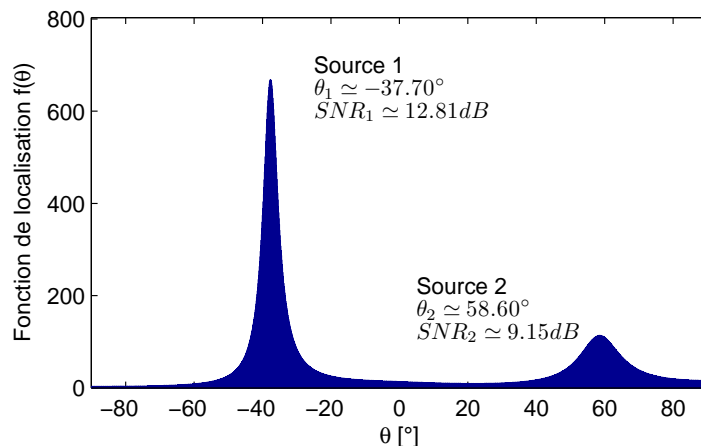


FIGURE 5.10 – Opérateur lorentzien des directions d'arrivées, appliqué aux données acoustiques expérimentales [SM05].

La comparaison du pouvoir de résolution est faite par application de huit méthodes spectrales, pour identifier les positions angulaires des sous-marins, qui sont : l'opérateur exponentiel [KSF15a], le projecteur MUSIC [Sch86], le propagateur orthonormal (OPM) [MMB95], l'opérateur d'Ermolaev et Gershman [EG94], la méthode d'entropie maximale (MEM) [Gro05] où l'opérateur est $P_4 = C_4 C_4^+$ tel que $C_4 \in \mathbb{C}^{6 \times 1}$ est la quatrième colonne de Γ^{-1} , l'opérateur MVDR [CGY10, Gro05], le propagateur partiel [JYHH11], et finalement la méthode algébrique ESPRIT [RK89]. La table 5.3 regroupe les résultats d'estimation des sept techniques [KSF15c].

TABLE 5.3 – Directions d'Arrivées (DoA) des sources acoustiques sous-marines.

Technique spectrale	source 1	source 2	RMSE
Opérateur lorentzien	$\theta_1 = -37.70^\circ$	$\theta_2 = 58.60^\circ$	2.61°
Opérateur exponentiel	$\theta_1 = -36.90^\circ$	$\theta_2 = 54.10^\circ$	0.73°
Projecteur MUSIC	$\theta_1 = -37.00^\circ$	$\theta_2 = 54.00^\circ$	0.75°
Propagateur orthonormal (OPM)	$\theta_1 = -37.00^\circ$	$\theta_2 = 54.20^\circ$	0.63°
Opérateur d'Ermolaev et Gershman	$\theta_1 = -37.00^\circ$	$\theta_2 = 54.00^\circ$	0.75°
Opérateur (MEM)	$\theta_1 = -40.80^\circ$	$\theta_2 = 53.80^\circ$	2.44°
Opérateur MVDR	$\theta_1 = -37.50^\circ$	$\theta_2 = 58.20^\circ$	2.32°
Propagateur partiel	$\theta_1 = -36.90^\circ$	$\theta_2 = 53.60^\circ$	1.03°
ESPRIT	$\theta_1 = -36.94^\circ$	$\theta_2 = 53.73^\circ$	0.93°
Valeurs moyennes	$\hat{\theta}_1 = -37.53^\circ$	$\hat{\theta}_2 = 54.91^\circ$	—

La métrique RMSE est calculée en utilisant les valeurs moyennes des neuf méthodes. Les trois méthodes des sous espaces MUSIC, OPM et EG identifient les sources avec les

mêmes valeurs de θ_1 et θ_2 . Les opérateurs lorentzien et MVDR fournissent le même résultat où la position angulaire de la seconde source est différente de celle obtenue par les techniques des sous espaces par 4° . Cette différence est réduite pour le propagateur partiel où $\theta_2 = 53.60^\circ$ ainsi que pour l'opérateur exponentiel et la méthode ESPRIT. La méthode d'entropie maximale MEM est efficace si la quatrième colonne C_4 est choisie comme référence où la première source est déviée à peu près par 3° . Pour montrer l'effet du choix de la colonne C_i , on trace dans la figure 5.11 les six spectres calculés par les opérateurs dyadiques $P_i = C_i C_i^+$. On compare les indices des pics des fonctions $f_i(\theta)$ par rapport aux valeurs moyennes ($\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$) indiquées par les lignes horizontales, il est évident que C_4 est le meilleur choix pour la méthode MEM.

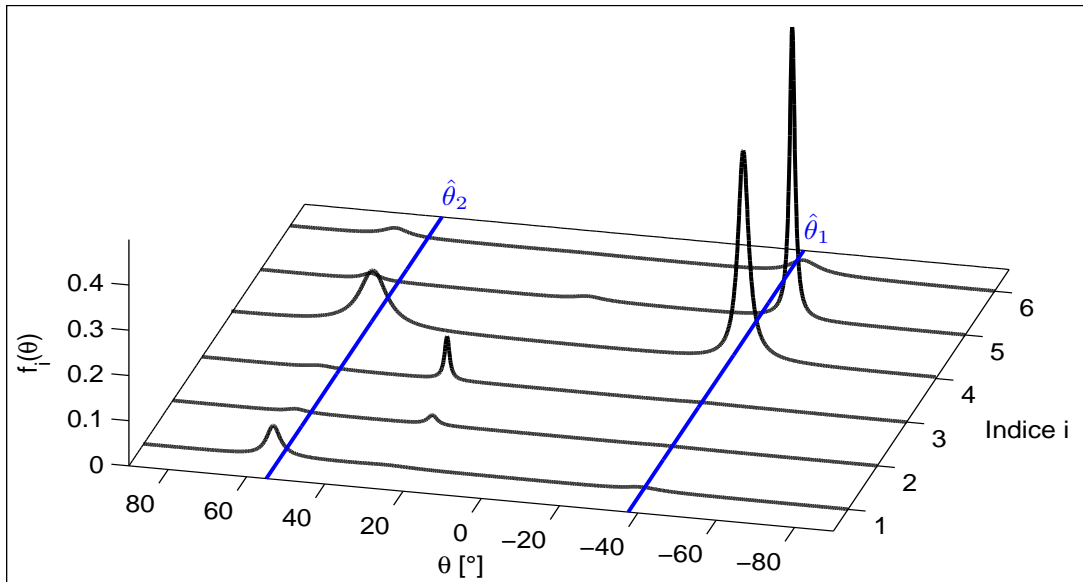


FIGURE 5.11 – Spectres $f_i(\theta)$ de la méthode d'entropie maximale MEM appliquée sur les signaux acoustiques expérimentales [SM05].

Les puissances des sources rayonnantes peuvent être estimées par le spectre de formation de voies $f_{bf}(\theta)$ (équation 5.35). Si les différences angulaires $|\theta_i - \theta_j|$ entre les positions des sources sont inférieures à la limite de Rayleigh du réseau θ_{HPBW} , les puissances σ_i^2 peuvent être obtenues comme suit : après avoir calculé la matrice directionnelle $A(\theta)$ et la puissance du bruit σ^2 à l'aide d'une méthode de haute résolution, la matrice de corrélation des sources est donnée par :

$$\begin{cases} A\Gamma_{ss}A^+ = \Gamma - \sigma^2 I_N \\ \Gamma_{ss} = (A^+A)^{-1}A^+(\Gamma - \sigma^2 I_N)A(A^+A)^{-1} \\ \Gamma_{ss} = A^+(\Gamma - \sigma^2 I_N)(A^+)^+ \end{cases} \quad (5.37)$$

Où $[\Gamma_{ss}]_{ii} \simeq \sigma_i^2$ pour l'indice $i = 1, \dots, P$. La puissance estimée du bruit ambiant est

$\sigma^2 \simeq 0.0376$ W, on construit la matrice directionnelle $A(\theta) \in \mathbb{C}^{6 \times 2}$ à partir des valeurs moyennes des directions d'arrivées ($\hat{\theta}_1 = -37.53^\circ, \hat{\theta}_2 = 54.91^\circ$). La table 5.4 représente le résultat de la comparaison avec la méthode de formation de voies.

TABLE 5.4 – Estimation des puissances des sources acoustiques [SM05].

Méthode d'estimation	source 1, σ_1^2	source 2, σ_2^2	SNR_1	SNR_2
Formation de voies $f_{bf}(\theta)$	0.718 W	0.309 W	12.81 dB	9.15 dB
Décomposition Γ_{ss}	0.697 W	0.263 W	12.68 dB	8.44 dB

Les approches proposées dans ce chapitre sont basées sur des fonctions ayant un seul pic qui correspond à la valeur propre minimale, en effet on peut mieux développer ces propositions par des fonctions rectangulaires, dont on illustre deux modèles par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} f_1(\lambda) = 1 - \frac{1}{e^{-\alpha(\lambda-\lambda_c)} + 1} \\ f_2(\lambda) = \frac{1}{2} + \frac{(\lambda_c - \lambda)}{\sqrt{4(\beta + (\lambda - \lambda_c)^2)}} \end{cases} \quad (5.38)$$

Tel que $\lambda_{p+1} < \lambda_c < \lambda_p$, α représente le paramètre qui contrôle le taux d'amortissement comme illustré dans la figure 5.12 pour $f_1(\lambda)$ et $0 < \beta \leq 1$. Comme perspective, trouver une valeur théorique améliorée du paramètre λ_c peut apporter des résultats plus précis.

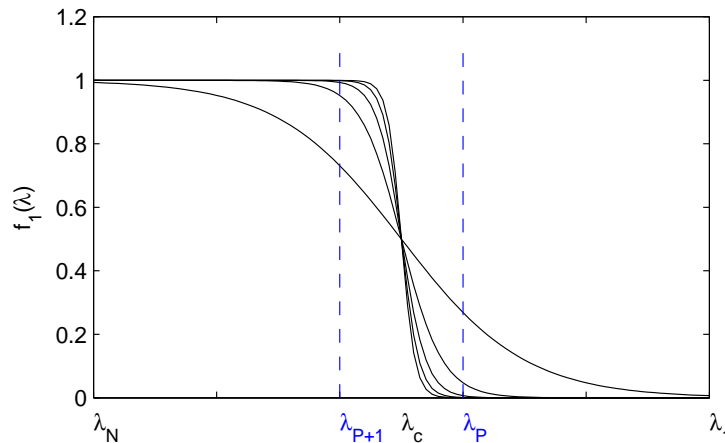


FIGURE 5.12 – Approximation de la fonction rectangulaire $f_1(\lambda)$ appliquée aux valeurs propres de Γ avec les paramètres $(\lambda_c, \alpha = \{1, 3, 5, 7, 9\})$.

Avant de terminer ce chapitre, on présente brièvement une description quantitative des estimations des directions d'arrivées. La quantification de la performance d'une méthode est mesurée par les valeurs moyennes des directions estimées ainsi que la racine carrée de l'erreur quadratique RMSE et le pas de la résolution $d\theta$, choisi, influence les positions des pics. Ainsi il vaut mieux calculer l'intervalle de confiance I_c qui est un segment

fermé qui inclut la vraie valeur de la source θ . En effet l'intervalle de confiance pour un niveau de confiance de 95% est donné par :

$$I_c = \left[E\{\hat{\theta}\} - 1.96\sigma_{\hat{\theta}}/\sqrt{L}, E\{\hat{\theta}\} + 1.96\sigma_{\hat{\theta}}/\sqrt{L} \right] \quad (5.39)$$

Tel que $E\{\hat{\theta}\}$ est la moyenne des valeurs estimées depuis les essais Monte Carlo et $\sigma_{\hat{\theta}}$ est l'écart type. On suppose par exemple que les fronts d'onde d'une source rayonnante font exactement 23.75° avec l'axe du réseau linéaire composé de quatre antennes, pour un rapport de $SNR = 5$ dB, on calcule les niveaux de confiance de la méthode G-MEM [KSF14b] et du propagateur d'ordre quatre [KS14a], pour $L = 300$ essais tout en supposant l'ergodicité de la source $s(t)$ et du bruit $N(t)$. Les figures 5.13 et 5.14 représentent les valeurs estimées de la direction d'arrivée ainsi les densités de probabilité estimées $p(\hat{\theta})$ des deux méthodes.

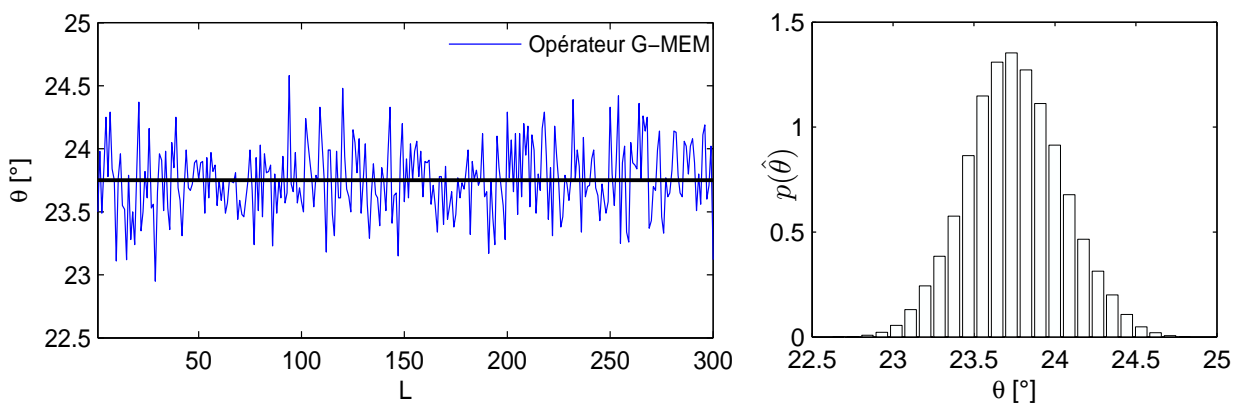


FIGURE 5.13 – Densité de probabilité $p(\hat{\theta})$ de la direction d'arrivée $\theta = 23.75^\circ$ par l'opérateur G-MEM pour la configuration ($L = 300, N = 4, K = 200, d = \lambda/2, s(t) \sim \mathcal{CN}(0, 1 W), SNR = 5$ dB).

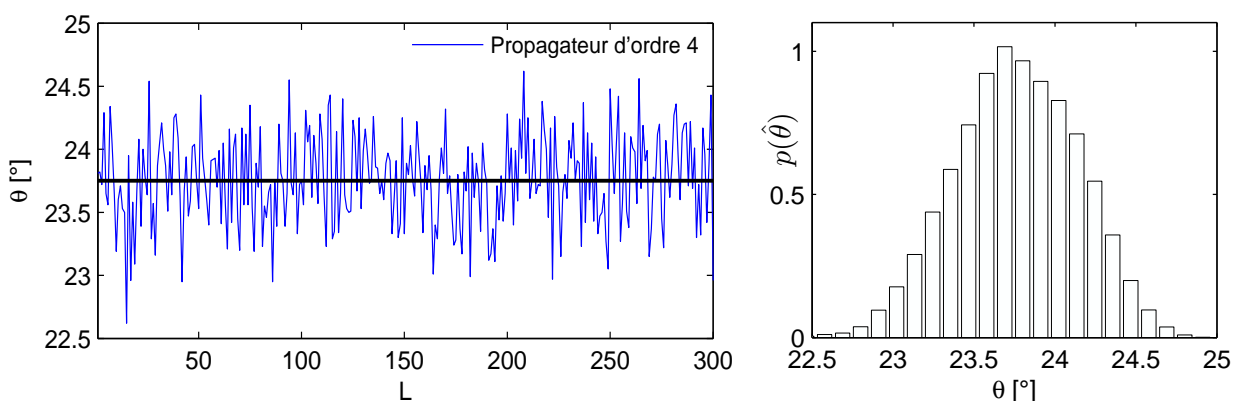


FIGURE 5.14 – Densité de probabilité $p(\hat{\theta})$ de la direction d'arrivée $\theta = 23.75^\circ$ par le propagateur 4 pour la configuration ($L = 300, N = 4, K = 200, d = \lambda/2, s(t) \sim \mathcal{CN}(0, 1 W), SNR = 5$ dB).

La direction d'arrivée estimée $\hat{\theta}$ est une variable stochastique qui suit la loi normale $\mathcal{N}(E\{\hat{\theta}\}, \sigma_{\hat{\theta}}^2)$:

$$p(\hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{\theta}}} \exp \left\{ -\frac{(\hat{\theta} - E\{\hat{\theta}\})^2}{2\sigma_{\hat{\theta}}^2} \right\} \quad (5.40)$$

Finalement on présente dans la table 5.5 les résultats statistiques des deux méthodes. La direction d'arrivée 23.75° est incluse dans les deux intervalles de confiance I_c .

TABLE 5.5 – Statistiques de la simulation d'une source rayonnante de $\theta = 23.75^\circ$.

Paramètre	Opérateur G-MEM	Propagateur d'ordre 4
Intervalle $[\hat{\theta}_{min}, \hat{\theta}_{max}]$	$[22.9500^\circ, 24.5800^\circ]$	$[22.6200^\circ, 24.6200^\circ]$
Valeur moyenne $E\{\hat{\theta}\}$	23.7524°	23.7617°
RMSE $(E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\})^{1/2}$	00.2809°	00.3614°
Variance $\sigma_{\hat{\theta}}^2$	00.0789°	0.1305°
Erreur moyenne $E\{\hat{\theta}\} - \theta$	00.0024°	00.0117°
Intervalle I_c de $E\{\hat{\theta}\}$	$[23.7206^\circ, 23.7842^\circ]$	$[23.7209^\circ, 23.8026^\circ]$

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté l'opérateur non linéaire EG de localisation angulaire puis on a proposé trois types d'opérateurs qui reposent sur le principe de normalisation des valeurs propres du sous espace orthogonal et d'annihilation des valeurs propres du sous espace source. Les fonctions de base de ces opérateurs sont inspirées de plusieurs lois de la physique. Dans la première partie, on a proposé l'opérateur exponentiel basé sur la fonction gaussienne dont le pic central correspond à la valeur propre minimale. Ensuite on a dérivé un deuxième opérateur dont la fonction est une exponentielle décroissante et dans la troisième partie on a déduit l'opérateur lorentzien qui facilite le calcul de l'approximation du projecteur en sous espace orthogonal contrairement à l'exponentielle de la matrice spectrale.

Les approches proposées ne sont considérées que si la dimension du réseau d'antennes est relativement large par rapport au nombre des sources. La vérification des pouvoirs de résolution de ces propositions est effectuée sur des données acoustiques expérimentales ainsi que sur quelques simulations.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

CONCLUSION

Dans cette thèse, on a abordé le problème de la localisation angulaire des sources rayonnantes dans un milieu de propagation par un réseau d'antennes. Les signaux issus du réseau sont basés sur le modèle de propagation des radiations provenant des sources ponctuelles, de type bande étroite, situées en champ lointain par rapport au réseau et fixes dans leurs positions durant le temps d'observation. Les principaux axes étudiés sont basés sur le traitement du signal, la propagation des ondes et l'interférométrie.

Dans le premier chapitre, on a cité quelques applications de la localisation des sources et on a montré par deux exemples que la localisation par combinaison des angles d'arrivées ne nécessite pas la synchronisation entre la source et le réseau d'antennes, ce qui est le cas pour le problème du temps d'arrivée.

Dans la deuxième partie, on a présenté les expressions mathématiques des signaux, reçus par le réseau uniforme d'antennes, basées sur le modèle bande étroite, puis on a détaillé les paramètres du système antennes-sources et la structure générale de la matrice spectrale du réseau.

La troisième partie a traité les méthodes conventionnelles d'estimation des directions d'arrivées DoA par une étude comparative entre plusieurs spectres obtenus pour une configuration optimale du système antennes-sources. Ensuite, on a expliqué la méthodologie de la simulation de Monte Carlo du système et on a cité quelques méthodes de détection du nombre des sources rayonnantes. Par la suite on a traité le problème des sources cohérentes où on a appliqué la méthode du propagateur partiel sur la transformée unitaire de la matrice spectrale du réseau, ce qui a permis de séparer les sources proches et cohérentes.

Dans la quatrième partie, on a proposé deux contributions sous forme de généralisations. Dans un premier temps, on a traité le cas de la localisation bidimensionnelle

(azimut et élévation) par la généralisation de la méthode d'entropie maximale en introduisant l'entropie quantique, ce qui a permis d'améliorer le pouvoir de résolution du spectre bidimensionnel dans le cas de la simulation des sources cosmiques. Dans un deuxième temps, on a proposé des extensions de l'opérateur du propagateur vers les ordres supérieurs puis on a introduit une formule générale de discrétisation de l'opérateur qui dépend du rapport du nombre des antennes élémentaires du réseau sur le nombre de sources. Ces différentes versions du propagateur dépendent du rapport signal sur bruit et sont extraites sans utiliser les blocs diagonaux de la matrice spectrale.

La cinquième partie a été consacrée aux fonctions matricielles non linéaires de localisation pour les réseaux de grande dimension. Partant de l'opérateur d'Ermolaev et Gershman, on a proposé trois classes d'opérateurs qui sont basés sur le principe d'annihilation des valeurs propres du sous espace signal et de normalisation des valeurs propres du sous espace bruit. Il s'agit de construire une approximation de l'opérateur du projecteur. Premièrement, on a introduit les opérateurs exponentiels, puis l'opérateur lorentzien ajusté par les statistiques des valeurs propres de la matrice spectrale. Plusieurs tests ont mis en preuve les pouvoirs de résolution des trois opérateurs comparativement aux spectres conventionnels.

PERSPECTIVES

A l'issue des travaux réalisés, nous avons remarqué que la méthode de maximum d'entropie généralisée ainsi que l'opérateur lorentzien peuvent être améliorés. Parmi les pistes de recherches envisageables est l'étude des performances des deux spectres dans des configurations plus difficiles du système antennes-sources et d'évaluer leurs erreurs quadratiques. Une deuxième possibilité consiste à tester les performances des deux opérateurs pour le cas des sources large bande en commençant par les méthodes incohérentes.

Un deuxième axe de recherche consiste à réaliser une conception d'un appareil électronique de détection des angles d'arrivées des sources bande étroite, il s'agit de proposer une architecture de l'appareil avec une complexité du calcul minimale en exploitant quelques lois de la cristallographie. En effet la loi de Bragg pour la diffraction des radiations sur un cristal est donnée par la relation :

$$2d \sin(\theta) = n\lambda$$

Où d est la distance entre deux plans du cristal, θ est le demi angle de déviation et le nombre entier n est l'ordre de diffraction tel que la variable inconnue de l'équation est d . La méthode d'ingénierie inverse de l'équation de Bragg va permettre de trouver la direction d'arrivée de la source par des réseaux d'antennes symétriques et de voir si la conception permet d'estimer plusieurs angles simultanément.

ANNEXE

A.1 Fonction de corrélation

La fonction de corrélation pour les signaux ergodiques et complexes a été introduite dans le deuxième chapitre. Pour les fonctions périodiques, la fonction de corrélation est calculée pendant une période T . Dans la figure (1.2),(a) du premier chapitre, on a présenté une simulation des signaux $x_1(t) = A_1 \sin(\omega t)$ et $x_2(t) = A_2 \sin(\omega t - \omega \delta t)$ tels que $\omega = 2\pi f$, $f = 1500$ Hz, $A_1 = A_2 = 1$ V et $\delta t = 1.51 \times 10^{-4}$ s. Dans cette partie on démontre l'expression théorique de la fonction $f(x_1, x_2, \tau)$ dont une simulation a été présentée dans la figure (1.2),(b) :

$$f(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t)x_2(t + \tau)dt = \frac{1}{T} \int_0^T A_1 \sin(\omega t)A_2 \sin(\omega t + \omega(\tau - \delta t))dt \quad (\text{A.1})$$

On introduit les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \sin(x + y) & = \cos(x) \sin(y) + \cos(y) \sin(x) \\ \int_0^T \cos(x) \sin(x)dx & = 0 \\ \sin^2(x) & = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Ainsi la fonction de corrélation devient :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \tau) &= \frac{A_1 A_2}{T} \cos(\omega(\tau - \delta t)) \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\omega t)}{2} \right) dt \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} \cos(\omega(\tau - \delta t)) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Facteur du réseau

L'équation (1.4) du facteur du réseau $F(\theta)$, pour $i_n = 1$ A et $\phi_n = 0$, est obtenue en utilisant la somme de la série géométrique, faisons deux changements de variables tels que $p = n - 1$ et $\psi = kd \cos(\theta)$, l'expression devient :

$$F = \sum_{p=0}^{N-1} e^{jp\psi} = 1 + e^{j\psi} + \dots + e^{j(N-1)\psi} = \frac{1 - e^{jN\psi}}{1 - e^{j\psi}} \quad (\text{A.4})$$

$$F = e^{j\frac{(N-1)}{2}\psi} \left(\frac{e^{j\frac{N}{2}\psi} - e^{-j\frac{N}{2}\psi}}{e^{j\frac{1}{2}\psi} - e^{-j\frac{1}{2}\psi}} \right) = e^{j\frac{(N-1)}{2}\psi} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)}$$

Ensuite, la valeur absolue du facteur normalisé est donnée par :

$$|F| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin\left(\frac{N}{2}kd \cos(\theta)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd \cos(\theta)\right)} \right| \quad (\text{A.5})$$

A.3 Interférométrie

La mesure interférométrique des angles entre des fronts d'ondes et le réseau est souvent effectuée par rapport la normale de ce dernier (axe perpendiculaire) de telle sorte que l'expression de phase est $e^{-j\mu} = e^{-2\pi jd\lambda^{-1} \sin \theta}$ et $\Omega = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si la mesure est prise par rapport à la l'axe du réseau et relativement au premier élément, alors l'expression de la phase s'écrit $\mu = 2\pi d\lambda^{-1} \cos \theta$ et la région de visibilité est translaté en $\Omega = [0, \pi]$. La figure A.1 illustre ce cas pour un réseau de trois antennes et une onde plane faisant un angle $\theta \simeq 45^\circ$ par rapport à l'axe du réseau.

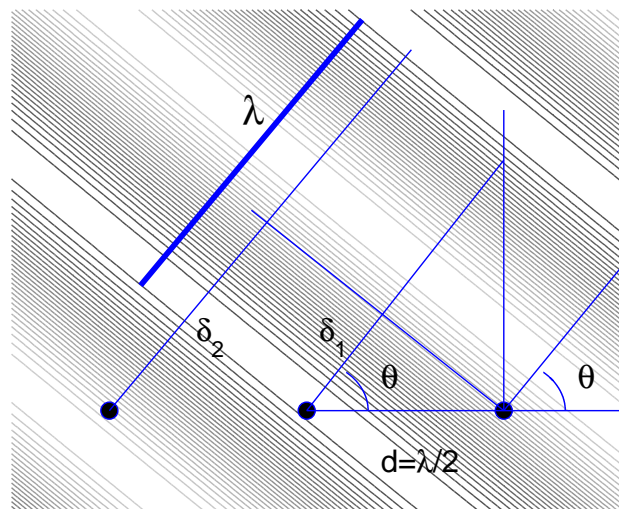


FIGURE A.1 – Interférométrie relativement à l'axe du réseau composé de $N = 3$ antennes espacées de $d = \lambda/2$ tel que $a(\theta) = [1, e^{-j\pi \cos(\theta)}, e^{-j2\pi \cos(\theta)}]^T$.

A.4 Formation de voies

Les hauteurs des pics du spectre du *beamforming* sont presque égales aux puissances des sources. Considérons le cas d'une seule source $\Gamma_{ss} = \sigma_1^2$, la matrice du réseau devient $\Gamma = a_1 a_1^+ \sigma_1^2 + \sigma^2 I_N$, pour un vecteur directionnel a , on obtient :

$$f_{bf} = \frac{1}{N^2} a^+ a_1 a_1^+ a \sigma_1^2 + a^+ a \sigma^2 \quad (\text{A.6})$$

Si le vecteur pointe vers la position de source ponctuelle ($a = a_1$), alors le spectre devient :

$$f_{bf} = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{N} \quad (\text{A.7})$$

A.5 Formation de voies optimisée

On développe l'expression théorique de l'amplitude du pic de $f_{MVDR} = (a^+ \Gamma^{-1} a)^{-1}$ pour le cas d'une seule source rayonnante, pour cet effet, l'inverse de la matrice spectrale est calculé par le lemme général de l'inversion matricielle comme suit :

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} A \Gamma_{ss} A^+ + I_N \right)^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left(I_N - A \left(\sigma^2 \Gamma_{ss}^{-1} + A^+ A \right)^{-1} A^+ \right) \quad (\text{A.8})$$

Pour le cas d'une seule source $P = 1$ tel que $\Gamma_{ss} = \sigma_1^2$, la formule (5.44) se réduit comme suit :

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left(I_N - a_1 \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} + a_1^+ a_1 \right)^{-1} a_1^+ \right) \quad (\text{A.9})$$

Si le vecteur d'état a coïncide avec la direction d'arrivée de la source DoA ($a = a_1$), on obtient :

$$a_1^+ \Gamma^{-1} a_1 = \frac{a_1^+}{\sigma^2} \left(I_N - a_1 \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} + a_1^+ a_1 \right)^{-1} a_1^+ \right) a_1 = \frac{N}{\sigma^2} - \frac{N^2}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} + N \right)^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma^2 N^{-1}} \quad (\text{A.10})$$

Finalement, l'amplitude du pic central de f_{MVDR} a l'expression théorique suivante :

$$f_{MVDR} = (a_1^+ \Gamma^{-1} a_1)^{-1} = \sigma_1^2 + \frac{\sigma^2}{N} \quad (\text{A.11})$$

Les pics des deux spectre f_{bf} et f_{MVDR} ont la même amplitude pour le cas d'une seule source.

A.6 Limite de la résolution angulaire

Le réseau uniforme linéaire ULA est caractérisé par sa limite de Rayleigh de la résolution angulaire où sa valeur théorique est approximée par la fonction :

$$\theta_{HPBW} \simeq \lambda / (d(N - 1))$$

La figure A.2 représente la comparaison entre cette largeur et celle obtenue par l'évaluation numérique en fonction de N .

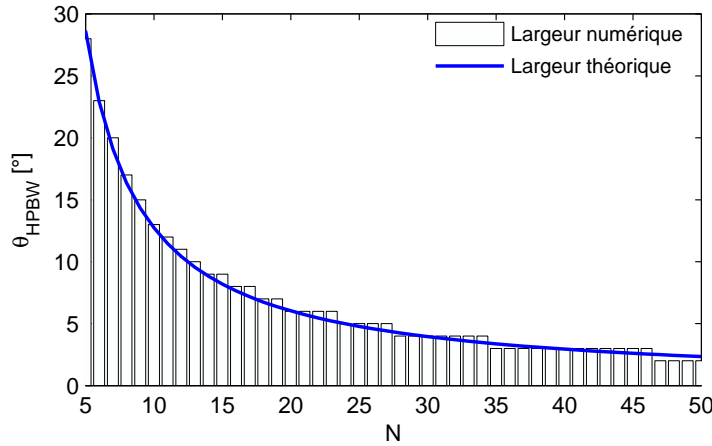


FIGURE A.2 – Largeur à mi-hauteur du réseau ULA en fonction du nombre d’antennes N , pour $d = \lambda/2$, $i_n = 1$ A et $\phi_n = 0$.

A.7 Réseau circulaire

L’expression de la phase du vecteur directionnel $a(\theta_i, \varphi_i)$ donné par l’équation (4.3) est calculé par la formule suivante :

$$\begin{aligned} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} &= \exp \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} r \sin(\varphi_i) \cos(\theta_i) \cos(2\pi n/N) + \frac{2\pi}{\lambda} r \sin(\varphi_i) \sin(\theta_i) \sin(2\pi n/N) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} r \sin(\varphi_i) (\cos(\theta_i) \cos(2\pi n/N) + \sin(\theta_i) \sin(2\pi n/N)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

En utilisant la relation trigonométrique $\cos(p - q) = \cos(p) \cos(q) + \sin(p) \sin(q)$ on obtient le résultat :

$$e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}_n} = e^{jkr \sin(\varphi_i) \cos(\theta_i - (2\pi n/N))}$$

A.8 Erreur quadratique

La racine carrée de l’erreur quadratique est fonction de la variance et de l’erreur moyenne, pour le cas d’une source où on possède L estimations $\hat{\theta}$ de la direction d’arrivée θ , on a :

$$\begin{aligned} \text{RMSE} &= \left(E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\hat{\theta}_i - \theta)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(E\{(\hat{\theta} - E\{\hat{\theta}\} + E\{\hat{\theta}\} - \theta)^2\} \right)^{1/2} \\ &= \left(E\{(\hat{\theta} - E\{\hat{\theta}\})^2\} + 2E\{(\hat{\theta} - E\{\hat{\theta}\})(E\{\hat{\theta}\} - \theta)\} + E\{(E\{\hat{\theta}\} - \theta)^2\} \right)^{1/2} \\ &= \left(\sigma_{\hat{\theta}}^2 + (E\{\hat{\theta}\} - \theta)^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

BIBLIOGRAPHIE

- [AH14] Neil L. Aaronson and William M. Hartmann. Testing, correcting, and extending the woodworth model for interaural time difference. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 135(2) :817–823, 2014.
- [Aka73] H. Akaike. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In B. N. Petrov and F. Csaki, editors, *Second International Symposium on Information Theory*, pages 267–281. Akadémiai Kiado, 1973.
- [AS11] Li An and Wang Shu. Propagator method for doa estimation using fourth-order cumulant. In *Wireless Communications, Networking and Mobile Computing (WiCOM), 2011 7th International Conference on*, pages 1–4, Sept 2011.
- [Bar50] M. S. Bartlett. Periodogram analysis and continuous spectra. *Biometrika*, 37(1-2) :1–16, June 1950.
- [BB07] M. Bouri and S. Bourennane. High resolution methods based on rank revealing triangular factorizations. *International Journal of Mathematical, Computational, Natural and Physical Engineering*, 1 :190 – 193, 2007.
- [Cap69] J. Capon. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proceedings of the IEEE*, 57(8) :1408–1418, Aug 1969.
- [CGY10] Zhizhang Chen, Gopal Gokeda, and Yiqiang Yu. *Introduction to Direction-Of-Arrival Estimation*. Artech House, january 2010.
- [CK79] Shepard A. Clough and Francis X. Kneizys. Convolution algorithm for the lorentz function. *Appl. Opt.*, 18(13) :2329–2333, Jul 1979.
- [Djo12] Ivan Djordjevic. Front matter. In *Quantum Information Processing and Quantum Error Correction*. Academic Press, 2012.
- [DXZ12] Jisheng Dai, Weichao Xu, and Dean Zhao. Real-valued {DOA} estimation for uniform linear array with unknown mutual coupling. *Signal Processing*, 92(9) :2056 – 2065, 2012.
- [EG94] V.T. Ermolaev and A.B. Gershman. Fast algorithm for minimum-norm direction-of-arrival estimation. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 42(9) :2389–2394, Sep 1994.
- [FB97] M. Frikel and S. Bourennane. High-resolution methods without eigendecomposition for locating the acoustic sources. *Applied Acoustics*, 52(2) :139 – 154, 1997.

-
- [Fel10] Rym Feliachi. Traitement spatial des interférences cyclostationnaires pour les radiotélescopes à réseau d'antennes phasé. *Thèse*, 2010.
- [FF98] John Walker Frank Fahy. *Fundamentals of Noise and Vibration*. CRC Press, October 1998.
- [Fri96] Miloud Frikel. Traitement d'antenne en présence d'un bruit coloré. *Thèse*, 1996.
- [Fri05] M. Frikel. Localization of sources radiating on a large antenna. In *Signal Processing Conference, 2005 13th European*, pages 1–4, Sept 2005.
- [FSB08] Jeffrey Foutz, Andreas Spanias, and Mahesh K. Banavar. *Narrowband Direction of Arrival Estimation for Antenna Arrays*. Morgan and Claypool Publishers, July 2008.
- [FTSM10] M. Frikel, B. Targui, S. Safi, and M. M'Saad. Bearing detection of noised wideband sources for geolocation. In *Control Automation (MED), 2010 18th Mediterranean Conference on*, pages 1650–1653, June 2010.
- [God97] L.C. Godara. Application of antenna arrays to mobile communications. ii. beam-forming and direction-of-arrival considerations. *Proceedings of the IEEE*, 85(8) :1195–1245, Aug 1997.
- [Gol65] Sidney Golden. Lower bounds for the helmholtz function. *Phys. Rev.*, 137 :B1127–B1128, Feb 1965.
- [Gro05] Frank Gross. *Smart Antennas for Wireless Communications*. McGraw-Hill Professional, September 2005.
- [Guo07] Xu Guochang. *GPS, Theory, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [HWXS05] Yinghua HAN, Jinkuan WANG, Yanbo XUE, and Xin SONG. The doa estimation of incoherently distributed source using the propagator method. In *PROCEEDINGS OF ISAP2005, SEOUL, KOREA, 2005*.
- [HY91] Keh-Chiarng Huarng and C.-C. Yeh. A unitary transformation method for angle-of-arrival estimation. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 39(4) :975–977, Apr 1991.
- [JA09] Daillant Jean and Gibaud Alain. *X-ray and Neutron Reflectivity*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [JYHH11] Chen Jianfeng, Wu Yuntao, Cao Hui, and Wang Hai. Fast algorithm for doa estimation with partial covariance matrix and without eigendecomposition. *Journal of Signal and Information Processing*, 2(4) :266–269, 2011.
- [KS14a] Y. Khmou and S. Safi. Doa estimation with fourth order propagator. In *Multimedia Computing and Systems (ICMCS), 2014 International Conference on*, pages 1295–1300, April 2014.

-
- [KS14b] Youssef Khmou and Said Safi. Angle of arrival detection with fifth order phase operators. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, 8, 2014.
- [KS14c] Youssef Khmou and Said Safi. Angles of arrival estimation with unitary partial propagator. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, 8, 2014.
- [KS15] Y. Khmou and S. Safi. New radiolocation technique for intelligent antennas. In *Intelligent Systems and Computer Vision (ISCV), 2015*, pages 1–4, March 2015.
- [KSF14a] Youssef Khmou, Said Safi, and Miloud Frikel. Comparative study between several direction of arrival estimation methods. *Journal of Telecommunications and Information Technology*, 1 :41–48, 2014.
- [KSF14b] Youssef Khmou, Said Safi, and Miloud Frikel. Generalized maximum entropy method for cosmic source localization. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, 8, 2014.
- [KSF15a] Youssef Khmou, Said Safi, and Miloud Frikel. Exponential operator for bearing estimation. *International Journal of Advanced Science and Technology*, 74 :1–10, 2015.
- [KSF15b] Youssef Khmou, Said Safi, and Miloud Frikel. Extending the quantum entropy to multidimensional signal processing. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, 9, 2015.
- [KSF15c] Youssef Khmou, Said Safi, and Miloud Frikel. Lorentzian operator for angular source localization with large array. *Journal of Telecommunications and Information Technology*, 4 :98–105, 2015.
- [KV96] H. Krim and M. Viberg. Two decades of array signal processing research : the parametric approach. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 13(4) :67–94, Jul 1996.
- [LAS02] C. Lau, R. Adve, and T. Sarkar. Combined cdma and matrix pencil direction of arrival estimation. In *Vehicular Technology Conference, 2002. Proceedings. VTC 2002-Fall. 2002 IEEE 56th*, volume 1, pages 496–499 vol.1, 2002.
- [Lur98] Xavier Lurton. *Acoustique sous-marine. : Présentation et applications*. Ifremer, juillet 1998.
- [Mak75] J. Makhoul. Linear prediction : A tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 63(4) :561–580, April 1975.
- [MB90] S. Marcos and M. Benidir. On a high resolution array processing method non-based on the eigenanalysis approach. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. ICASSP-90., 1990 International Conference on*, pages 2955–2958 vol.5, Apr 1990.

-
- [MD91] J. Munier and G.Y. Delisle. Spatial analysis using new properties of the cross-spectral matrix. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 39(3) :746–749, Mar 1991.
- [MFB08] J. Marot, C. Fossati, and S. Bourennane. Fast subspace-based source localization methods. In *Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop, 2008. SAM 2008. 5th IEEE*, pages 203–206, July 2008.
- [MHC09] Wing-Kin Ma, Tsung-Han Hsieh, and Chong-Yung Chi. Doa estimation of quasi-stationary signals via khatri-rao subspace. In *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2009. ICASSP 2009. IEEE International Conference on*, pages 2165–2168, April 2009.
- [MMB95] Sylvie Marcos, Alain Marsal, and Messaoud Benidir. The propagator method for source bearing estimation. *Signal Processing*, 42(2) :121 – 138, 1995.
- [MP98] A. Manikas and C. Proukakakis. Modeling and estimation of ambiguities in linear arrays. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 46(8) :2166–2179, Aug 1998.
- [NN08] Christian Ngô and Hélène Ngô. *Physique statistique - Introduction*. Dunod, 2008.
- [PS88] F.P. Payne and A.W. Snyder. The slowly varying envelope approximation in non-linear optics. In *Non-Linear Optical Waveguides, IEE Colloquium on*, pages 9/1–9/4, Jun 1988.
- [Ray07] Rayleigh. On our perception of sound direction. *Philos, Mag*, 13, 1907.
- [Ris78] J. Rissanen. Modeling by shortest data description. *Automatica*, 14(5) :465 – 471, 1978.
- [RK89] R. Roy and T. Kailath. Esprit-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 37(7) :984–995, Jul 1989.
- [R.S05] R. Shevgaonkar. *ELECTROMAGNETIC WAVES*. McGraw Hill Education, 2005.
- [Sch86] R.O. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 34(3) :276–280, Mar 1986.
- [SGK96] P. M. Davis S. Gao, H. Liu and L. Knopoff. Localized amplification of seismic waves and correlation with damage due to the northridge earthquake ; evidence for focusing in santa monica. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 86(1B) :209–230, February 1996.
- [ShWHb12] Chen Shao-hua, Zheng Wei, and Luo Hui-bin. Improved doa estimation of underwater target with acoustic cross array. In *Signal Processing (ICSP), 2012 IEEE 11th International Conference on*, volume 3, pages 2071–2074, Oct 2012.

-
- [SM97] P. Stoica and R. Moses. Introduction to spectral analysis. *Prentice Hall*, 1997.
- [SM05] Petre Stoica and Randolph Moses. *SPECTRAL ANALYSIS OF SIGNALS*. Prentice Hall, 2005.
- [SMM03] H. Sawada, Ryo Mukai, and S. Makino. Direction of arrival estimation for multiple source signals using independent component analysis. In *Signal Processing and Its Applications, 2003. Proceedings. Seventh International Symposium on*, volume 2, pages 411–414 vol.2, July 2003.
- [SS10] Peter J. Schreier and Louis L. Scharf. *Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data*. Cambridge University Press, March 2010.
- [SWSPB03] T. K. Sarkar, Michael C. Wicks, M. Salazar-Palma, and Robert J. Bonneau. *Smart Antennas*. Wiley-IEEE Press, May 2003.
- [TWLZ10] Ping TAN, Pian WANG, Ye LUO, and Yufeng ZHANG. Study of 2d doa estimation for uniform circular array in wireless location system. *International Journal of Computer Network and Information Security*, 2 :54 – 60, 2010.
- [vdVOD92] A.J. van der Veen, P.B. Ober, and E.F. Deprettere. Azimuth and elevation computation in high resolution doa estimation. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 40(7) :1828–1832, Jul 1992.
- [vN95] John von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, 1995.
- [WLP09] Ying Wang, G. Leus, and A. Pandharipande. Direction estimation using compressive sampling array processing. In *Statistical Signal Processing, 2009. SSP '09. IEEE/SP 15th Workshop on*, pages 626–629, Aug 2009.
- [WS80] Henry Wolkowicz and George P.H. Styan. Bounds for eigenvalues using traces. *Linear Algebra and its Applications*, 29(0) :471 – 506, 1980.
- [XS04] Jingmin Xin and A. Sano. Computationally efficient subspace-based method for direction-of-arrival estimation without eigendecomposition. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 52(4) :876–893, April 2004.
- [YF97] N. Yuen and Benjamin Friedlander. Doa estimation in multipath : an approach using fourth-order cumulants. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 45(5) :1253–1263, May 1997.
- [YKM06] Yeo-Sun Yoon, L.M. Kaplan, and J.H. McClellan. Tops : new doa estimator for wideband signals. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 54(6) :1977–1989, June 2006.