UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE
Faculté des Sciences et Techniques
Béni Mellal,Maroc

Centre des Études Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Mohamed CHAIB

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques

Contribution à l'étude des fonctions asymptotiquement presque automorphes dans les algèbres des fonctions généralisées

Thèse soutenue le 18/02/2023 devant le jury composé de :

Pr. Khalid HILAL	Professeur à la FST, USMS, Béni Mellal	Président.
Pr. Elhoussine AZROUL	Professeur à la FS, USMBA, Fès	Rapporteur.
Pr. Brahim EL BOUKARI	Professeur à la EST, USMS, Béni Mellal	Rapporteur.
Pr. Mohamed OUKESSOU	Professeur à la FST, USMS, Béni Mellal	Rapporteur.
Pr. Said MELLIANI.	Professeur à la FST, USMS, Béni Mellal	Examinateur.
Pr. Abderrazak KASSIDI	Professeur à la FST, USMS, Béni Mellal	Invité.
Pr. M'Hamed EL OMARI	Professeur à la FP, USMS, Béni Mellal	Co-Encadrant.
Pr. Lalla Saadia CHADLI	Professeur à la FST, USMS, Béni Mellal	Encadrant.

Remerciements

Cette thèse est réalisée au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (LMACS) à la faculté des sciences et techniques de Beni mellal, en vue de l'obtention du diplôme de doctorat en mathématiques de l'université Sultan Moulay Slimane.

Tout d'abord, je remercie Dieu Tout-Puissant, Créateur de l'univers. Il m'a appris à bien compter mes jours, à appliquer mon coeur à la sagesse, à la science et à la recherche du savoir ; il m'a donné la force et le courage nécessaire pour entreprendre mes études. Mon âme est heureuse d'exprimer sa gratitude, sa reconnaissance et ses remerciements à tous ceux et toutes celles qui d'une façon ou d'une autre, ont contribué à l'aboutissement de ce travail de recherches. Je tiens à exprimer, ici, ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, Madame, le Professeur Lalla Saadia CHADLI, qui m'a honoré par la confiance qu'elle m'a accordé, par son soutien et ses précieuses directives durant toutes les années de thèse. Je tiens aussi à le remercier davantage pour son encadrement fructueux et pour la précieuse formation qu'il m'a donné.

Je tiens également à adresser, du fond du coeur, mes plus sincères remerciements à mon cher Co-directeur de thèse Monsieur, le professeur M'hamed ELOMARI, pour son aide capitale, pour sa disponibilité et son inconditionnelle patience tout au long de la réalisation de ce travail, pour tout le temps qu'il a consacré à m'orienter pour faire les bons choix et pour ses conseils qui ont été particulièrement la source de réussite de cette thèse.

J'assure très sincèrement de ma gratitude, à tous Professeurs contribué à notre travail, il m'a donné beaucoup de conseils pour améliorer la qualité de mon travail.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse. Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire de "Mathématiques

Appliquées et Calcul Scientifique", qui m'ont accueilli parmi eux. Nos rencontres, nos échanges ont été d'une précieuse assistance pour mon travail de recherche, en particulier j'adresse mes gratitudes remerciement à monsieur Said Melliani professeur, directeur du laboratoire de recherche "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique".

Mes expressions de respect et d'amour les plus chaleureuses sont destinées à mes parents, ma femme, mon fils, mes soeurs et mon frère, pour leurs soutiens et leurs encouragements permanents, leurs patiences et leurs compréhension durant toutes les années consacrées à ce travail, qu'ils soient certains de toute ma reconnaissance.

Table des matières

Résumé

Notre objectif dans cette thèse est l'étude des fonctions presque automorphes et les fonctions asymptotiuement presque automorphes dans le cadre des algèbres des fonctions généralisées au sens de Colombeau, introduites dans la littérature par C. Bouzar. Nous explorons de nouvelles propriétés de ces fonctions et nous appliquons les résultats à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions presque automorphes d'une nouvelle classe des équations différentielles, en utilisant les semi-groupes généralisés, quand ces équation contient un opérateur qui généralise un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe. Nous avons généralisé aussi l'étude des opérateur de Nemytskii dans le cas de la composition des fonctions presque automorphes ou asymptotiquement presque automorphes. Nous avons établit les différentes propriétés de ce type de fonctions pour étudier les solutions presque automorphes ou asymptotiquement presque automorphes de quelques équations différentielles dans le cadre de l'algèbre des fonctions généralisées de Colombeau.

Introduction générale

Les algèbres des fonctions généralisées, plus particulier l'algèbre de J. F. Colombeau [12] représentent un outil polyvalent pour étudier des problèmes singuliers, et non réguliers en analyse non linéaire, géométrie voir [15, 57, 59], puis en physique mathématiques [37]. Au cours de la dernière décennie, l'intérêt structurale de ces algèbres s'est accru, en particulier ce qui concerne l'analyse fonctionnelle et la topologie [33, 34] . Une large utilité des distributions dans plusieurs branches de mathématiques et dans différents sciences (physique théorique) ont imposé la nécessité de résoudre deux problèmes principaux dans lesquels la théorie des distributions a été rencontré : la multiplication des distributions et la différentiation du produit des distributions (la dérivée du produit des distributions ne satisfait pas toujours la règle de Leibniz). Puis de nombreuses tentatives ont été faites pour donner un sens au produit de distributions [28, 31, 32, 43, 44]. Encore il y avait plusieurs tentatives d'injecter l'espace des distributions dans une algèbre différentielle [58, 63]. Dès le début, certaines questions de nature algébrique ont joué un rôle très important dans la théorie de Colombeau. Parmi eux il y a la solution des équations algébriques dans la théorie des fonctions généralisées. Plus généralement par exemple on peut résoudre des équations algébriques, possèdent seulement des solutions classiques dans un cadre particulier avec une dépendance continue des paramètres [14].

Les travaux autours les algèbres de fonctions généralisées sont multiples, ces dernières années afin de résoudre quelques problèmes des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles [67, 30, 18] qui n'admettent pas de solution au sens des distributions [5]. Au cœur de ces problèmes se trouve souvent l'impossibilité de donner un sens au produit de distributions. Cette difficulté se contourne en injectant l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans une algèbre $\mathcal{G}^s(\Omega)$, appelée algèbre des fonctions généralisées simplifiée de J.F. Colombeau, où l'on peut donner un sens au produit des distributions voir [36]. L'algèbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ s'injecte également dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$ et les opérateurs de $\mathcal{G}^s(\Omega)$ restreintes à $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, prolongent celles de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à un "infiniment petit près".

On énonce des théorèmes généraux d'existence et d'unicité pour des formulations du problème de Cauchy dans un espace de fonctions généralisées. L'existence générale des solutions est obtenue au prix de devoir accepter comme solutions les fonctions généralisées qui ne sont pas en général des distributions [13]. L'unicité est obtenue en formulant le problème d'une façon très précise, ce qui implique un choix non contenu dans la formulation classique. La notion de presque automorphie a été introduite dans la littérature par S.Bochner [8] il y a une cinquantaine d'années comme une généralisation de la presque périodicité classique au sens de Bochner. En [46, 56, 65], Ding, Goldstien, Xiao, N'Guérékata, Zhang ont donné une riche littérature sur la théorie de la presque automorphie et ces applications aux équations différentielles et au équations aux dérivées partielles. Récemment Xiao, Liang et Zhang introduisent une nouvelle classe de fonctions dite fonctions pseudo-presque automorphes. Plusieurs ouvrages intéressants traitent le concept de presque automorphie, notamment le livre de Diagana [19] et celle de N'Guérékata [56] et la série d'articles de Shen et Yi [66]. Aussi dans la littérature on rencontre les fonctions pseudo-presque automorphes avec poids généralisent les fonctions pseudo-presque automorphes.

Dans le cadre de l'algèbre de Colombeau, les travaux sur les fonctions presque périodiques, presque automorphes et asymptotiquement presque automorphes restent assez rares, à l'exception des travaux de C.Bouzar et al voir [10]. Ce dernier qui a construit pour la première fois les classes de l'algèbre de Colombeau compatibles avec des fonctions presque périodiques, presque automorphes et asymptotiquement presque automorphes. Notre idées principales s'inspire de ses travaux afin d'y ajouter quelques propriétés qui leur manquaient, à savoir les propriétés de la solution de l'équation $\frac{d}{dt}u(t) = A\,u(t) + f(t)$. Nous étudions ici cette équation différentielle singulière dans deux cas : le premier on suppose que A est un nombre complexe généralisé où nous avons montré que si f a un représentant $(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$est une fonction presque automorphe, alors c'est le cas de la solution généralisée de cette équation différentielle. Dans le second cas, nous supposons que A est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe fortement continu, voir [62] où nous avons également prouvé que si tout représentant du

$\mathcal{C}_0$-semi-groupe généralisé à un paramètre est continu et que le représentant $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ de f est Bouchner intégrable, alors la solution généralisée est asymptotiquement presque automorphe.

Dans le but d'aborder les différents aspects traités dans cette thèse, nous avons organisé ce travail en cinq chapitres suivis par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1 : Dans ce chapitre de cette thèse après cette brève introduction on a introduit quelques motivations, exemples, et l'impossibilité de Laurent Schwartz, pour entamer la théorie des fonctions généralisées de Colombeau. Ainsi que le besoin de cette théorie dans l'analyse. Dans ce chapitre on a aussi rappeler la construction de l'algèbre des fonctions généralisées $\mathcal{G}$, il regroupe les rappels nécessaires à l'utilisation de l'algèbre spéciale de Colombeau. La définition de l'algèbre spéciale notée $\mathcal{G}^s$ introduite pour la première fois par J.F.Colombeau, et certaines de ses propriétés fondamentales ont été rappelé ici. Ainsi que la définition des nombres généralisés, et les valeurs des fonctions généralisées en un point donné. On a clôturé ce chapitre par un rappel sur la notion de l'intégrale généralisée.

Chapitre 2 : Le deuxième chapitre à pour but d'étude les fonctions presque automorphes et asymptotiquement presque automorphes dans le cadre classique des espaces de Banach, plus précisément on a rappelé premièrement les fonctions presque périodiques et ses propriétés fondamentales, ensuite la classe des fonctions presque automorphes, qui est assez large que celle des fonctions presque périodique. Les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ presque automorphes ont été placé dans la troisième section de ce chapitre, enfin on a terminé ce chapitre par les fonctions asymptotiquement presque automorphes.

Chapitre 3 : Le troisième chapitre, est consacré à la théorie des fonctions généralisées presque automorphes, plus précisément dans la première section on a rappelé quelques propriétés importantes des fonctions généralisées presque automorphes, on a donné un cadre fonctionnel, à savoir l'algèbre notée $\mathcal{G}_{AA}$ sur lequel on définit rigoureusement les fonctions généralisées presque automorphes. Ainsi que les fonctions généralisées asymptotiquement presque automorphes. On liaison avec les équations dans lesquelles apparait des opérateurs qui génèrent des C_0-semi-groupes, il est naturel d'introduire la notion de semi-groupe généralisé de Colombeau afin de l'utiliser pour démontrer notre principaux théorèmes. Les résultats de cette étude ont placé dans la troisième section de ce chapitre, et on a terminé ceci par un exemple pratique.

Chapitre 4 : Dans ce chapitre, on a établit la contribution de l'algèbre de Colombeau dans les fonctions presque automorphes, où on a étudié quelques propriétés fondamentales des fonctions généralisées presque automorphes tout ceci dans des classes d'algèbres de Colombeau, ceci fait l'objet de la première section, puis la deuxième section a été consacré pour l'extension des opérateurs dits de Nemytskii, on a étudié aussi quelques propriétés fondamentales des fonctions généralisées asymptotiquement presque automorphes dans la section trois. Un exemple de problème abstrait de Cauchy illustrant tous ceci est placé dans la dernière section de ce chapitre.

Enfin, nous terminons cette thèse par une conclusion et quelques perspectives du futur.

Notations générales

Dans toute cette thèse, on utilisera les notations suivantes :

$\emptyset$	L'ensemble vide
$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$	L'ensemble des entiers naturels non nuls
$\mathbb{Z}$	L'ensemble des entiers relatif
$\mathbb{Q}$	L'ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	Le corps des nombres réels
$\mathbb{C}$	Le corps des nombres complexes
$\mathbb{R}^+$	L'ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel réel de dimension n
Ω	un ouvert de $\mathbb{R}^n$
$M(2, \mathbb{C})$	L'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficient dans $\mathbb{C}$

$\mathbb{X}$	un espace de Banach
$N(A)$	Le noyau de l'application A
$R(A)$	L'image de l'application A
$\mathcal{D}(\Omega)$	L'espace des fonctions (testes) de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ à support compact dans Ω
$\mathcal{D}(\Omega)^{'}$	L'espace des distributions sur Ω
$\mathcal{E}'(\Omega)$	L'ensemble des distributions à support compact dans Ω
$\mathcal{D}_{L^p}$	L'espace des fonctions $\mathcal{C}^{\infty}$, dont toutes les dérivées entières sont dans L^p
$\mathcal{O}_M(\Omega)$	L'espace des fonctions indéfiniment différentiable à croissance lente
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions ainsi que toutes les dérivées sont à décroissance rapide
$\mathcal{L}(X)$	L'espace des formes linéaire sur X
$\mathcal{L}_c(X)$	L'espace des formes linéaire continue sur X
$BC(\mathbb{R},\mathbb{X})$	L'espace des fonctions bornées continues
$AA(\mathbb{R},\mathbb{X})$	L'espace des fonctions presque automorphes (p.a.)
$\mathcal{B}_{AA}$	L'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ dont toutes les dérivées sont p.a.
$AAA(\mathbb{R},\mathbb{X})$	L'espace des fonctions asymptotiquement presque automorphes

$\mathcal{G}^s$	L'algèbre spéciales de Colombeau définie sur Ω
$\mathcal{E}^s_M(\Omega)$	L'espace des fonctions modérées
$\mathcal{N}^s(\Omega)$	L'espace des fonctions negligeables
$\mathcal{G}^s_r$	L'anneau des nombres réels généralisés
$\mathcal{G}_\tau(\mathbb{C})$	L'algèbre des fonctions généralisées tempérées
$\mathcal{G}_{L^\infty}(\mathbb{R})$	L'algèbre des fonctions généralisées bornées

Chapitre 1

Algèbre spéciale de Colombeau

1.1 Motivation et Impossibilité de Schwartz

1.1.1 Motivation

Le but de cette section est de fournir un exemple de motivation impliquant des produits ou même des opérations non linéaires plus générales avec des distributions.

Exemple : Le modèle proie-prédateur

On considère le modèle proie-prédateur de Yoshikawa-Yamaguti [67] et Hashimoto [40] :

$$\begin{cases} (\partial_x + \partial_t)u = uv, \\ (\partial_x - \partial_t)v = -uv, \end{cases}$$

Qui décrit les densités de deux espèces se déplacent le long de l'axe des x avec des vitesses $+1$ et ayant des taux de croissance proportionnel à leur produit. Supposons d'abord que, les populations se concentrent aux points $x = -1$ et $x = +1$, respectivement, c'est-à-dire.

$$\begin{cases} u(x,0) = \delta(x+1), \\ v(x,0) = \delta(x-1), \end{cases}$$

Pour peu de temps, aucune interaction ne se produit, et les deux populations migrent simplement avec leurs vitesses respectives :

$$\begin{cases} u(x,t) = \delta(x-t+1), \\ v(x,t) = \delta(x+t-1), \end{cases}$$

Cependant, au temps t = 1 les deux populations se rencontrent : mathématiquement, cela engendre le produit de deux mesures de Dirac.

1.2 Impossibilité de Schwartz

Est-t-il vrai qu'une multiplication générale des distributions est impossible ? Pour se rapprocher d'une réponse à cette question, examinons exactement ce qui pourrait être impossible, quels obstacles attendre ? Nous devrons examiner deux catégories d'exemples. Le premier traite de ce qu'on pourrait appeler une multiplication intrinsèque des distributions. la tentative de définir le produit de deux distributions afin que le résultat soit une nouvelle distribution. En effet, une prescription qui donnerait une valeur raisonnable pour le produit d'une paire donnée de distributions semble être impossible. Il vaut la peine de souligner que les problèmes commencent déjà avec le produit usuel de deux fonctions en général, il n'est pas stable en ce qui concerne la régularisation et le passage à la limite. La deuxième catégorie de contre-exemples concerne les algèbres différentielles contenant l'espace des distributions. Dans une telle algèbre, le produit de deux distributions est défini [15, 18, 16]. Ce qui devient impossible maintenant, c'est d'avoir certaines propriétés algébriques (comme l'associativité ou la commutativité) et en même temps la cohérence du nouveau produit et les nouvelles dérivées avec les opérations classiques correspondantes sur ces sous-espaces où ces derniers sont définis.

Exemples :

1)Considérons la mesure de Dirac $\delta(x)$ et $vp\frac{1}{x}$ la valeur principale de Cauchy de $\frac{1}{x}$. On a

$$\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Alors

$$\begin{aligned}\delta &= (vp(\frac{1}{x}).x).\delta\\ &= vp(\frac{1}{x}).(x.\delta)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Car $x.\delta = 0$ au sens des distributions. Ce qui est contradictoire avec $\delta \neq 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2) Considérons la fonction signe $\eta(x) = signe(x)$. Ensuite, η et η^2 sont dans L^∞ et $\eta^2 = 1$. Si dans une telle algèbre dont l'unité est 1, nous avons un produit sur $\mathcal{D}'$ satisfaisant la règle de Leibniz, et coïncidant avec le produit usuel sur L^∞, puis

$$0 \;=\; (\eta^2)' \;=\; 2\eta.\delta + 2\delta\eta,$$

donc

$$(\eta^2)' \; = \; \eta.\delta \; = \; -\delta\eta.$$

Si $\eta.\delta \neq 0$, le produit n'est pas commutatif.

Si $\eta.\delta = 0$, on conclut que

$$\delta \; = \; (\eta\,\eta)\delta \; = \; \eta(\eta\delta) = 0.$$

Donc on n'a pas l'associativité.

Dans l'objectif de surmonter ce problème de la non linéarité des distributions, hirata-Ogata, Minkowski, M. Iltano[43, 44, 45], Fisher[29, 28, 31, 32] ont proposés, en 1957, une définition du produit des distributions.

Définition 1.1. *Soit* $(\rho_n) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *avec*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} supp(\rho_n) &= 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)dx &= 1. \end{aligned}$$

On dit que le produit des distributions S et T existe si pour toute suite (ρ_n),

$$\lim_{n\to+\infty} (S * \rho_n)(T * \rho_n) \qquad \textit{existe dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Mais, malgré cette définition, le problème de la non linéarité est toujours en vigueur puisque δ^2 n'a pas de sens avec cette définition.

En effet : supposons que $\delta^2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On voit que $\rho_n \to \delta$ dans $\mathcal{D}'$.

Choisissons une fonction test φ telle que $\varphi = 1$ au voisinage de 0 et $Supp(\rho_n) \subset Supp(\varphi)$, on trouve que

$$\begin{aligned} < \rho_n^2, \varphi > &= \int_{\mathbb{R}} \rho_n^2(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho_n^2(x)dx, \end{aligned}$$

alors $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^2 et, par conséquent, elle admet une sous-suite convergente L^2.

Donc

$$\delta \in L^2,$$

ce qui est absurde.

On permet de collecter certaines exigences naturelles pour injecter $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans une algèbre

$(A(\Omega), +, \circ)$. On vérifie si c'est possible de construire des algèbres associatives, commutatives et satisfaisant

(i) $\mathcal{D}'(\Omega)$ s'injecte linéairement dans $A(\Omega)$ de sorte que la fonction constante $f(x) = 1$ devient l'unité dans $A(\Omega)$.

(ii) Il existe un opérateur de dérivé partiel $\partial_i : A(\Omega) \longrightarrow A(\Omega) \ \ (i = 1, ..., n)$ qui est linéaire et satisfait la règle de Leibniz.

(iii) La restriction de ∂_i sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ coïncide avec la dérivée partielle usuelle.

(iv) La restriction de $\circ$ sur $L^{\infty}_{loc}(\Omega) \times L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ coïncide avec le produit usuel.

La condition **(ii)** signifie que $A(\Omega)$ est une algèbre différentielle. Malheureusement, dans toute algèbre associative et commutative satisfaisant **(i)** et **(ii)**, les propriétés **(iii)** et **(iv)** s'écartent mutuellement comme on le voit immédiatement de l'exemple suivant.

Exemple :

Soit A une algèbre associative, commutative munie d'une dérivation (satisfaisant la règle de Leibniz). Alors tout élément H de A tel que $H.H = H$ est nécessairement une constante (c'est-à-dire $H' = 0$).

En effet :

On a

$$(H^2)' = 2H.H',$$

et

$$(H^3)' = 3H^2.H' = 3H\ H'.$$

Maintenant, $H = H^2 = H^3$

Ce qui implique que

$$H' = 2H.H' = H' = 3H.H',$$

donc

$$H.H' = 0,$$

d'où

$$H' = 0.$$

En particulier, si on considère la fonction Heaviside $H(x) = (signe(x) + 1)/2$, $\mathcal{D}'$ s'injecte dans une telle algèbre A, et on a $H.H = H$ en $\mathcal{D}'$, alors

$$H' = \delta$$

Ainsi, la substitution de **iv)** par

v) $\circ/\mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega)$, coïncide avec le produit usuel des fonctions. Cette situation a déjà été examinée par Schwartz [63], résultat d'impossibilité suivant :

Théorème 1.1. *Il n'y a pas d'algèbre associative, commutative* $(A(\Omega), +, \circ)$ *satisfaisant **(i)** - **(iii)** et **(v)**.*

Démonstration. Supposons que $(A(\mathbb{R}), +, \circ))$ est une telle algèbre, et D la dérivation sur A. On considère $x_+(x) = \int_0^x H(t)dt$. Ensuite **(v)**implique

$$x_+ \circ x = x^2 \text{ et } x \circ (x\, log|x| - x) = x^2 log|x| - x^2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
D^2(x_+) \circ x &= D^2(x_+ \circ x) - 2D(x_+) \circ D(x) - x_+ \circ D^2(x) \\
&= D^2(x^2) - 2D(x_+) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x \circ D^2(xlog|x| - x) &= D^2(x \circ (xlog|x| - x)) - 2D(x)D(xlog|x| - x) \\
&\quad - D^2 x \circ (xlog|x| - x) \\
&= D^2(x^2 log|x| - x^2) - 2D(xlog|x| - x) \\
&= D(2xlog|x| - x) - D(2xlog|x| - 2x) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
D^2(x_+) &= D^2(x_+) \circ (x \circ D^2(xlog|x| - x)) \\
&= (D^2(x_+) \circ x) \circ D^2(xlog|x| - x) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

en contradiction avec

$$\begin{aligned}
D^2(x_+) &= D(H) \\
&= \delta \neq 0.
\end{aligned}$$

Envers le postulat de Laurent Schwartz affirmant qu'il n'existe pas d'algèbre associative commutative et vérifiant **(i)** - **(v)**. $\square$

Après toutes les impossibilités discutées dans le théorème ci-dessus, le mathématicien français Jean François Colombeau parvient, en 1980, à élaborer une algèbre nommée algèbre des fonctions généralises notée $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$ commutatives, associatives, satisfaisant **(i)** - **(iii)** et **(vi)** $\circ/\mathcal{C}^\infty(\Omega) \times \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ coïncide avec le produit usuel des fonctions.
Les livres [12] et [15] de Jean François Colombeau exposent d'une manière détaillée la base fondamentale sur laquelle repose sa théorie des fonctions généralisées.

1.3 Idée générale

L'algèbre de Colombeau, a été introduite dans le but de fournir une solution au problème de la multiplication dans $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$, Dans cette Algèbre s'injectent les espaces $\mathcal{C}(\Omega)$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$, et du coût, le produit de deux distributions quelconques existe, mais ne donne pas toujours une Distribution, la construction de cette algèbre est basé sur l'idée suivante : Comme pour la construction des nombres réelles, on confond chaque nombre réel avec la classe des suites de Cauchy convergente vers le même nombre, l'ensemble des nombres réelles est alors identifié à l'espace quotient des suite de Cauchy modulo les suite de Cauchy convergentes vers 0, ainsi puisque chaque distribution est aussi limite d'une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ relativement à la topologie de $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ nous pouvons aussi identifié $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ à un certain espace quotient.

1.4 Algèbre spéciale de Colombeau

Avant d'aborder la définition des algèbres spéciales de Colombeau, permettez-nous d'abord introduire une description alternative de l'espace des distributions qui affichera déjà certaines des caractéristiques de base des constructions qui sont à suivre. Comme indiqué dans la section précédente, la régularisation des distributions sera la notion clé de l'injection de $\mathcal{D}'$ dans une algèbre de fonctions généralisées. Nous verrons que cette procédure permet également d'obtenir une représentation séquentielle de $\mathcal{D}'$ pour nos recherches supplémentaires.

Soit $I = (0, 1]$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)^I / \exists u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \ avec \ u_\varepsilon \to u \ dans \ \mathcal{D}'\}, \\
\mathcal{J} &= \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)^I / u_\varepsilon \to 0 \ dans \ \mathcal{D}'\}.
\end{aligned}$$

Proposition 1.1. *L'application linéaire*

$$\begin{aligned}
\psi : \ \mathcal{A}/\mathcal{J} &\longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\
(u_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{J} &\longrightarrow \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} u_\varepsilon
\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. L'injectivité de ψ est claire.
Choisissons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\int \varphi(x)dx = 1, \text{et} \int x^\alpha \varphi(x)dx = 0, \ \forall \alpha \text{ multi-indice.}$$

Et on définit

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Alors $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{D}'$.
D'où ψ est surjective. □

Pour injecter l'espace $\mathcal{D}'$ dans une algèbre en gardant les propriétés **(i) - (iii)** et **(vi)**. Les auteurs ont choisi un idéal $\mathcal{I}$ dans $\Big(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\Big)^I$ avec $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ et l'espace $\mathcal{D}'$ est injecté de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \Big(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\Big)^I / \mathcal{I} \\
u &\longrightarrow \Big(u * \varphi_\varepsilon\Big)_\varepsilon + \mathcal{I}.
\end{aligned}$$

Dans cette présentation **(vi)** signifie que

$$\Big((f * \varphi_\varepsilon).(g * \varphi_\varepsilon)\Big) + \mathcal{I} = \Big((fg) * \varphi_\varepsilon\Big)_\varepsilon + \mathcal{I},$$

pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
On considère une autre injection de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\Big(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\Big)^I / \mathcal{I}$ par l'injection constante

$$f \quad \to \quad (f)_\varepsilon + \mathcal{I}.$$

D'autre part on peut injecter $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\Big(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\Big)^I / \mathcal{I}$ par :

$$f \quad \to \quad \Big(f * \varphi_\varepsilon\Big)_\varepsilon + \mathcal{I}.$$

1.4.1 Définition et propriétés de base

Notation 1.1.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^s(\Omega) &= (\mathcal{C}^\infty(\Omega))^I,\\ \mathcal{E}^s_M(\Omega) &= \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s(\Omega)/\forall K \Subset \Omega\ \forall \alpha \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}, \sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{-N})\},\\ \mathcal{N}^s(\Omega) &= \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s(\Omega)/\forall K \Subset \Omega\ \forall \alpha \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}, \sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{m})\}.\end{aligned}$$

Proposition 1.2. *(i) L'espace $\mathcal{E}^s_M(\Omega)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)^I$ stable par dérivation. (ii) $\mathcal{N}^s(\Omega)$ est un idéal de $\mathcal{E}^s_M(\Omega)$.*

Démonstration. (i) Soient $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)^I$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\forall K \Subset \Omega$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, on a

$$\exists m_1 = m_1(\alpha) > 0, \exists c_1 = c_1(\alpha) > 0, \exists \varepsilon_1 = \varepsilon(\alpha) \in I, \forall \varepsilon \le \varepsilon_1, \sup_{x\in K} \mid \partial^\alpha u_\varepsilon(x) \mid \le c_1 \varepsilon^{m_1}$$

et

$$\exists m_2 = m_2(\alpha) > 0, \exists c_2 = c_2(\alpha) > 0, \exists \varepsilon_2 = \varepsilon(\alpha) \in I, \forall \varepsilon \le \varepsilon_2, \sup_{x\in K} \mid \partial^\alpha u_\varepsilon(x) \mid \le c_2 \varepsilon^{m_2}$$

alors

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K} |\partial^\alpha (\lambda_1 u_\varepsilon(x) + \lambda_2 v_\varepsilon(x))| &\le |\lambda_1| |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| + |\lambda_2| |\partial^\alpha v_\varepsilon(x)|\\ &\le |\lambda_1| c_1 \varepsilon^{m_1} + |\lambda_2| c_1 \varepsilon^{m_2}.\end{aligned}$$

On prend $c = \mathrm{Max}(c1 |\lambda_1|, c_2 |\lambda_2|), m = m_1 + m_2$ for $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ on obtient

$$\sup_{x\in K} \mid \partial^\alpha \Big(\lambda_1 u_\varepsilon(x) + \lambda_2 v_\varepsilon(x) \mid \le c\varepsilon^{-m}.$$

Par conséquent $\lambda_1 (u_\varepsilon)_\varepsilon + \lambda_2 (v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_m(\Omega)$. De plus, nous avons

$$|\partial^\alpha (u_\varepsilon v_\varepsilon)(x)| \le \sum_{\beta\le\alpha} C^\beta_\alpha \left|\partial^\beta u_\varepsilon(x)\right| \cdot \left|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon(x)\right|.$$

Et par suite

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K} |\partial^\alpha (u_\varepsilon v_\varepsilon)(x)| &\le \sum_{\beta\le\alpha} C^\beta_\alpha \sup_{x\in K} \left|\partial^\beta u_\varepsilon(x)\right| \cdot \sup_{x\in K} \left|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon(x)\right|\\ &\le \sum_{\beta\le\alpha} C^\beta_\alpha \cdot c_\beta \cdot \varepsilon^{-m_\beta} \cdot c_{\alpha-\beta} \cdot \varepsilon^{-m_{\alpha-\beta}}.\end{aligned}$$

Soit $m = \min_{\beta\le\alpha}(m_\beta, m_{\alpha-\beta}), C = \sum_{\beta\le\alpha} C^\beta_\alpha c_\beta c_{\alpha-\beta}$, alors $(u_\varepsilon v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_m(\Omega)$. soit $K \Subset \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$ alors $\left|\partial^\alpha \left(\partial^\beta u_\varepsilon\right)(x)\right| = \left|\partial^{\alpha+\beta} u_\varepsilon(x)\right|$, par définition $\exists m_{\alpha+\beta} > 0, \exists c_{\alpha+\beta} > 0, \exists \varepsilon_{\alpha+\beta} \in I$, $\forall \varepsilon \le \varepsilon_{\alpha+\beta}$.

$$\mid \partial^\alpha(\partial^\beta) u\varepsilon)(x) \mid \le c_{\alpha+\beta} \varepsilon^{-m_{\alpha+\beta}}.$$

D'où $\partial^\beta u_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(\Omega)$.

(ii) Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(\Omega), (v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega), K \Subset \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, on a

$$|\partial^\alpha (u_\varepsilon v_\varepsilon)(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \left|\partial^\beta u_\varepsilon(x)\right| \left|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon(x)\right|.$$

Par définition $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \forall q > 0, \exists c_{\alpha-\beta} > 0, \exists \varepsilon_2 \in I, \forall \varepsilon < \varepsilon_2$,

$$\sup_{x \in K} \left|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon(x)\right| \leq c_{\alpha-\beta} \varepsilon^q.$$

Donc

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha (u_\varepsilon v_\varepsilon)(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta c_\beta \varepsilon^{-m_\beta} c_{\alpha-\beta} \varepsilon^q$$

Soit $m' < \min_{\beta \leq \alpha} (m_\beta, q), m_\beta = q - m'$ et $C = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta c_\beta \cdot c_{\alpha-\beta}$. On a

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha (u_\varepsilon v_\varepsilon)(x)| \leq C \varepsilon^q.$$

Ceci montre que $(u_\varepsilon v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega)$. □

Les éléments de $\mathcal{E}_M^s(\Omega)$ (resp $\mathcal{N}^s(\Omega)$) sont appelées fonctions modérées (resp. fonctions négligeables).

L'algèbre de Colombeau sur Ω est définie comme suit

$$\mathcal{G}^s(\Omega) \quad = \quad \mathcal{E}_M^s(\Omega)/\mathcal{N}^s(\Omega).$$

L'espace $\mathcal{E}_M^s(\Omega)$ des suites modérées est une algèbre différentielle avec les opérations usuelles [7]. On peut voir que c'est la plus grande sous-algèbre différentielle (c'est-à-dire stable par des dérivées partielles) de $\mathcal{E}_M^s(\Omega)$ dans lequel $\mathcal{N}^s(\Omega)$ est un idéal, par conséquent, $\mathcal{G}^s(\Omega)$ est une algèbre différentielle associative, commutative. Dans ce qui suit, si $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(\Omega)$ est un représentant d'un élément $u \in \mathcal{G}^s(\Omega))$, on écrit $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon]$. Il est évident que $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}^s(\Omega)$.

Exemple 1.4.1.

Soit $\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad$ *on note*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon}), \quad \text{avec} \quad \varepsilon > 0.$$

1) *On pose* $\quad u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon]$ *avec*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \varphi_\varepsilon(x) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Alors, pour tout opérateur de dérivation, on a

$$\partial^\alpha u_\varepsilon(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon^{n+|\alpha|}}\partial^\alpha\varphi(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K}|\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| \;&\leq\; \frac{1}{\varepsilon^{n+|\alpha|}}\sup_{x\in K}|\partial^\alpha\varphi(\frac{x}{\varepsilon})|\\ &\leq\; C\,\varepsilon^{-n-|\alpha|}.\end{aligned}$$

Donc

$$(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^n).$$

2) *Pour $\Omega = \mathbb{R}$, on pose*

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{\frac{x^2}{x^4+\varepsilon^4}}.$$

Alors

$$|u_\varepsilon(x)| \leq 1, \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

D'autre part, les dérives de u_ε sont de la forme suivante

$$u_\varepsilon^{(k)}(x) = r_k\Big(x,\varepsilon,\log(\varepsilon)\Big)\,u_\varepsilon(x),$$

où r_k est une fonction rationnelle.

Donc

$$(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}).$$

Ainsi

$$u := [(u_\varepsilon)_\varepsilon]\;\in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$$

3) *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.*

On pose

$$\begin{aligned}v_\varepsilon(x) \;&=\; (f*\varphi_\varepsilon)(x)\\ &=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}v_\varepsilon(x) \;&=\; \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\varphi(\frac{x-y}{\varepsilon})dy\\ &=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon\, t)\,\varphi(t)dt.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\partial^\alpha v_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^{n+|\alpha|}}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial^\alpha\varphi(\frac{x-y}{\varepsilon})dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon\, t)\partial^\alpha\varphi(t)dt.\end{aligned}$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K}|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon t)\partial^\alpha\varphi(t)dt| &\leq \sup_{x\in K, t\in\ supp(\phi),\delta\in[0,1]}|f(x-\delta t)|\int_{\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha\varphi(t)|dt \\ &\leq c.\end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha v_\varepsilon(x)| \leq C\,\varepsilon^{-|\alpha|},$$

donc

$$(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^n).$$

d'où

$$[(v_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n).$$

Remarque 1.1. *Soient u, v deux éléments de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$u = (u_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{avec } (u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^n),$$

$$v = (v_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{avec } (v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^n).$$

Alors

$$u = v \text{ dans } \mathcal{G}(\mathbb{R}^n) \quad \text{si et seulement si} \quad (u_\varepsilon)_\varepsilon - (v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n)$$

$$u+v = (u_\varepsilon + v_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n),$$

$$u\circ v = (u_\varepsilon\cdot v_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n).$$

Le résultat suivant présente une caractérisation très utile de $\mathcal{N}^s$ comme un sous-espace de $\mathcal{E}^s_M(\Omega)$. Il montre que un élément $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de $\mathcal{E}^s_M(\Omega)$ appartient à $\mathcal{N}^s$ si $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ satisfait les estimations $\mathcal{N}^s$ dans le cas $\alpha = 0$.

Théorème 1.2. *$(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\Omega)$ est négligeable si et seulement si :*

$$\forall K \Subset \Omega\ \forall m\in\mathbb{N}, \sup_{x\in K}|u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^m).$$

Si $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ et Ω' est un sous-ensemble ouvert de Ω, la restriction $u/\Omega' \in \mathcal{G}^s(\Omega')$ est définie comme $(u/\Omega')_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega')$. (Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, la restriction aux sous-espaces est également définie par les composantes). Nous disons que u est nul sur Ω' si ($u/\Omega' = 0$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega')$). Le support de u est défini comme

$$(\cup\{\Omega' \subseteq \Omega \quad \textit{ouvert}, \quad u/\Omega' = 0\})^c.$$

Soient Ω'' et Ω' deux ouverts de Ω tel que $\Omega'' \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$, il est clair que

$$(u/\Omega')/\Omega'' = u/\Omega''.$$

Si P est un polynôme et $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$, il est claire que $P(u) = (P(u_\varepsilon))_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega)$ est un élément de $\mathcal{G}^s(\Omega)$.
On définit $\mathcal{O}_M(\Omega)$ par

$$\mathcal{O}_M(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) /\ \forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in\Omega}(1+|x|)^{-p}|\partial^\alpha f(x)| < \infty\}.$$

Et on définit $\mathcal{S}(\Omega)$ par

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) /\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in\Omega}(1+|x|)^{p}|\partial^\alpha f(x)| < \infty\}.$$

Proposition 1.3.

Si $u = (u_1, \cdots, u_m) \in \mathcal{G}^s(\Omega)^m$ et $v \in \mathcal{O}_M(\mathbb{K}^m)$ alors

$$v \circ u := [v \circ u_\varepsilon)_\varepsilon] \ \in \mathcal{G}^s(\Omega).$$

Définition 1.2.

On dit que $(u_\varepsilon)_\varepsilon = (u_\varepsilon^1, \cdots, u_\varepsilon^m)_\varepsilon \in {\mathcal{E}_M^s}^m$ est un élément c-borné de Ω dans Ω' si

$$\forall K \subset \Omega, \exists K' \subset \Omega', \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \textit{tel que } \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 : \ u_\varepsilon(K) \subseteq K'. \tag{1.1}$$

On note l'espace des fonctions modérées c-bornées de Ω dans Ω' par $\mathcal{E}_M^s[\Omega, \Omega']$.
Un élément de $\mathcal{G}^s(\Omega)^m$ est dit c-borné s'il possède un représentant satisfaisant (1.1).
Notation :
$\mathcal{G}^s[\Omega, \Omega']$ l'espace des fonctions généralisées c-bornées de Ω dans Ω'.

Proposition 1.4. *(Composition des fonctions)*

Soit $u = (u_1, \cdots, u_m) \in \mathcal{G}^s(\Omega)^m$ est un c-bornée dans Ω' et $v \in \mathcal{G}^s(\Omega')$. Alors

$$v \circ u := [(v_\varepsilon \circ u_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}^s(\Omega)$$

est bien définit dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$.

1.4.2 L'injection de $\mathcal{D}'(\Omega)$

La construction de $\mathcal{G}^s(\Omega)$ a été faite de telle sorte que l'injection de l'espace des distributions devrait être possible par produit de convolution. Dans cette section, nous aurons besoin d'une fonction $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\int \rho(x)dx = 1, \tag{1.2}$$

$$\int x^\alpha \rho(x)dx = 0 \quad \forall|\alpha| \geq 1. \tag{1.3}$$

Et nous notons toujours

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Le premier problème avec ce type de ρ est qu'il ne peuvent pas être convolé avec des éléments de $\mathcal{D}'$ sans restriction. Pour commencer, nous allons nous restreindre aux distributions à support compact.

Notation :

• On note $\mathcal{E}'$ l'ensemble des distributions à support compact, et on a le résultat

Proposition 1.5. *L'application suivante*

$$\begin{aligned} i_0 : \mathcal{E}'(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{G}^s(\Omega) \\ \omega &\longmapsto ((\omega * \rho_\varepsilon)/\Omega)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega) \end{aligned}$$

est linéaire et injective.

• On note l'injection constante de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} \sigma \ : \ \mathcal{C}^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{G}^s(\Omega) \\ f &\longmapsto (f)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega) \end{aligned}$$

En effet :

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Alors

$$f_\varepsilon(.) = f(.) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

D'autre part, pour tout opérateur de dérivation, on a

$$\partial^\alpha f_\varepsilon(x) = \partial^\alpha f(x),$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K} |\partial^\alpha f_\varepsilon(x)| &= \sup_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)| \\ &\leq c\varepsilon^{-N}, \qquad N \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

Donc

$$(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n).$$

D'où

$$[(f_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_s(\mathbb{R}^n).$$

• On note l'injection de $\mathcal{C}(\Omega)$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned}\sigma_2\ :\ \mathcal{C}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{G}^s(\Omega) \\ f &\longmapsto (f * \varphi_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega).\end{aligned}$$

Remarque 1.2. *L'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ s'injecte donc de deux manières différentes.*

On a la proposition

Proposition 1.6.

$$i_0/\mathcal{D}(\Omega) = \sigma_2.$$

donc i_0 est un homomorphisme injective sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

La construction de l'injection de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$ sera faite en plusieurs étapes. Premièrement, on choisit un recouvrement d'ouverts $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de Ω tel que $\overline{\Omega}_\lambda$ est compact dans Ω.
Soit $(\psi_\lambda)_\lambda$ la famille des éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ avec $\psi_\lambda = 1$ sur tout voisinage de $\overline{\Omega}$.
Pour tout $\lambda \in \Lambda$ on définit

$$\begin{aligned}i_\lambda : \mathcal{D}'(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{G}^s(\Omega_\lambda) \\ \omega &\longmapsto (((\psi_\lambda \omega) * \rho_\varepsilon)/\Omega_\lambda)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega_\lambda),\end{aligned}$$

Proposition 1.7. *Pour tout* $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$*, la famille* $(i_\lambda(\omega))_{\lambda\in\Lambda}$ *est cohérente,*

$$(i.e. \quad i_\lambda(\omega)/\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu = i_\mu(\omega)/\Omega_\mu \cap \Omega_\lambda \;\; \forall \lambda, \mu \in \Lambda.$$

Théorème 1.3.

$$i : D'(\Omega) \;\; \hookrightarrow \;\; \mathcal{G}^s(\Omega)$$

est linéaire et injective.

Proposition 1.8. 1. *On a*

$$\begin{aligned} i/\mathcal{E}'(\Omega) &= i_0, \\ i/\mathcal{C}^\infty(\Omega) &= \sigma. \end{aligned}$$

2. *Si* $\alpha \in \mathbb{N}$ *et* $\omega \in \mathcal{D}'$*, alors*

$$\partial^\alpha\left((\omega)\right) \;=\; i(\partial^\alpha \omega).$$

Exemple 1.4.2. 1. *La distribution de Dirac* δ *s'injecte dans* $\mathcal{G}^s(\mathbb{R})$ *sous la forme :*

$$i(\delta) \;=\; (\delta_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}) \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon(x) &= (\delta * \rho_\varepsilon)(x) \\ &= < \delta(y), \rho_\varepsilon(x-y) > \\ &= \rho_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

2. *On a*

$$i(x)i(\delta) \;=\; (x\rho_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}).$$

Il est claire que $x.\delta \;=\; 0$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$*, mais* $i(x)i(\delta) \;=\; [(x\rho_\varepsilon)_\varepsilon] \neq 0$ dans $\mathcal{G}^s(\mathbb{R})$.
En effet :
On choisit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $\rho(x_0) \neq 0$ *posons* $x = \varepsilon\, x_0$,
alors $x\rho_\varepsilon(x) = x_0\rho_\varepsilon(x_0) \neq 0$.

$$\sup_{x\in[-1+x_0, x_0+1]} |x\rho_\varepsilon(x)| \nrightarrow 0 \;\; (\varepsilon \to 0),$$

donc $(x\rho_\varepsilon))_\varepsilon \notin \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$.

3. *On a* $\quad i(\sin(\delta)) \; = \; (\; \sin(\rho_\varepsilon)_\varepsilon) + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}) \qquad$ *(la Proposition (1.8)).*

4. *On a* $i(H) \; = \; (h_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$ *avec*

$$h_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho_\varepsilon(y)dy$$

   On a $i(H)^2 \neq i(H)$.

Remarque 1.3. *On définit l'opérateur* ∂^α *par :*

$$\begin{array}{rcl} \partial^\alpha \; : \; \mathcal{G}^s(R) & \longrightarrow & \mathcal{G}^s(R) \\ u & \longmapsto & \partial^\alpha u = (\partial^\alpha u_\varepsilon) + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}), \qquad \alpha \in \mathbb{N} \end{array}$$

pour tout opérateur de dérivation ∂^α.

Il s'ensuit que l'opérateur de dérivation est linéaire et satisfait la règle de Leibniz.

Exemple 1.4.3. *Soit* H *la fonction heaviside. Alors* $i(H) \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$ *et on a :*

$$i(H) \; = \; (h_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}),$$

avec

$$h_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho_\varepsilon(y)dy.$$

Donc

$$i(H)' \; = \; (h'_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}),$$

avec

$$\begin{aligned} h'_\varepsilon(x) \; &= \; \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} \rho_\varepsilon(y)dy \\ &= \; \rho_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

D'où

$$i(H') = i(\delta) \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R}).$$

1.4.3 Les fonctions généralisées tempérées

L'algèbre $\mathcal{G}^s_\tau$ des fonctions généralisées tempérées a été introduite par J. F. Colombeau dans [12] afin de développer la théorie des distributions tempérées dans l'algèbre de fonctions généralisées. L'intérêt principal dans cette classe d'algèbre de Colombeau consiste d'une part à justifier la composition par composantes des applications indéfiniment différentiables, et d'autre part dans la théorie des transformations des groupes, pour plus de détail voir [38].
Soit $I = (0,1]$, on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^s_\tau(\Omega) &= \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in (C^\infty(\Omega))^I / \forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \\ &\qquad \sup_{x\in\Omega}(1+|x|)^{-N}|\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{-N})\}, \\ \mathcal{N}^s_\tau(\Omega) &= \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in (C^\infty(\Omega))^I / \forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \\ &\qquad \sup_{x\in\Omega}(1+|x|)^{-p}|\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{m})\}. \end{aligned}$$

Remarque 1.4. • *$\mathcal{N}^s_\tau(\Omega)$ est un idéal de $\mathcal{E}^s_\tau(\Omega)$, et dans ce cas l'algèbre des fonctions généralisées tempérées sur Ω est définie par*

$$\mathcal{G}^s_\tau(\Omega) = \mathcal{E}^s_\tau(\Omega)/\mathcal{N}^s_\tau(\Omega).$$

1.4.4 Les nombres généralisés et la valeur en un point d'une fonction généralisée

Dans la théorie de la distribution classique, une définition des valeurs de point pour distributions a été introduite par Lojasiewicz dans [47]. Cependant, ce concept ne peut pas être appliqué à des distributions arbitraires à des points arbitraires. De plus, il n'y a aucun moyen de caractériser les distributions par leur valeurs en un point quelconque de telle manière que ce soit similaire aux fonctions classiques. D'autre part, pour les éléments des algèbres de Colombeau il y a une manière très naturelle et directe d'obtenir des valeurs de points, notamment en insérant des points pour les représentants. Les objets tirés d'une telle opération sont les suites des nombres qui ne sont pas à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$, considérées comme étant des représentants des nombres généralisés.

Notation 1.2. *Soit $I = (0,1]$*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^s_r &= \{(r_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathbb{K}^I / \exists N \in \mathbb{N}, |r_\varepsilon| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{-N})\}, \\ \mathcal{N}^s_r &= \{(r_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathbb{K}^I / \forall m \in \mathbb{N}, |r_\varepsilon| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{m})\}. \end{aligned}$$

Remarque 1.5. *$\mathcal{N}_r^s$ est un idéal $\mathcal{E}_r^s$, et dans ce cas l'algèbre des nombres généralisés sur Ω est définie par*

$$\mathcal{G}_r^s = \mathcal{E}_r^s / N_r^s.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) alors $\mathcal{G}_r^s = \tilde{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathcal{G}_r^s = \tilde{\mathbb{C}}$).

Proposition 1.9. *$\mathcal{G}_r^s$ n'est pas un corps*

Démonstration. Soit

$$r_\varepsilon = \begin{cases} 0 & si \ \ \varepsilon = \frac{1}{n}, \ \ n \in \mathbb{N} \\ \\ 1 & si\ non. \end{cases}$$

On a

$$(r_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_r^s,$$

et

$$(r_\varepsilon)_\varepsilon \notin \mathcal{N}_r^s,$$

supposons qu'il existe $s = [(s_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_r^s$ tel que $r.s = 1$,
donc pour $(n_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_r^s$, on a

$$r_\varepsilon . s_\varepsilon + n_\varepsilon = 1 \ \forall \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on trouve que

$$n_\varepsilon = 1,$$

ce qui est absurde (quand $\varepsilon \to 0$). □

- On note l'injection constante de $\mathbb{K}$ dans $\mathcal{G}_r^s$ par :

$$\begin{array}{rccc} \sigma \ : \ \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathcal{G}_r^s \\ r & \longmapsto & (r)_\varepsilon + \mathcal{N}_r^s \end{array}$$

Définition 1.3. *Pour $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ ou $u \in \mathcal{G}_\tau^s(\Omega)$) et $x_0 \in \Omega$, la valeur de u en x_0 est définie comme la classe de $u_\varepsilon(x_0))_\varepsilon$ dans $\mathcal{G}_r^s$, c'est à dire*

$$u(x_0) = [(u_\varepsilon(x_0))_\varepsilon].$$

Exemple 1.4.4.

1. *Si* $f \in C^{\infty}$ *et* $x_0 \in \Omega$, *alors*

$$i(f)(x_0) = \sigma(f)(x_0) = f(x_0) \quad \text{dans} \quad \mathcal{G}_r^s.$$

2. *Si* $f \in C(\Omega)$ *le résultat n'est pas vrai en général*

   En effet : pour $x_0 = 0$ *on a*

$$\begin{aligned} i(x_+)(x_0) &= (x_+ * \rho_\varepsilon(x_0))_\varepsilon + \mathcal{N}_r^s \\ i(x_+)(x_0) &= (\int_0^\infty y\rho_\varepsilon(x_0 - y)dy)_\varepsilon + \mathcal{N}_r^s \\ i(x_+)(0) &= (\varepsilon \int_0^\infty y\rho(-y)dy)_\varepsilon + \mathcal{N}_r^s \end{aligned}$$

   Donc $i(x_+)(0)$ *dépend de* ρ *en général on a* $i(x_+)(0) \neq 0$ *dans* $\mathcal{G}_r^s$, *mais la valeur classique est* $x_+(0) = 0$.

3. *On a* $i(x)i(\delta) \neq 0$ *dans* $\mathcal{G}^s(\mathbb{R})$.

   De plus la valeur de $i(x)i(\delta)$ *en tout point est nulle.*

   En effet :

   - *Si* $x_0 = 0$ *évidente*
   - *Si* $x_0 \neq 0$ *alors*

$$x_0\rho(x_0) = \frac{x_0}{\varepsilon}\rho(\frac{x_0}{\varepsilon}) \to 0, \ \textit{quand } \varepsilon \to 0,$$

   car $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1.5 Intégrale d'une fonction généralisée

La prochaine construction de la théorie non linéaire des fonctions généralisées est le concept d'intégration sur $\mathcal{G}^s$. Ce n'est pas surprenant que l'idée de base de la présentation suivante consistera en élevant les définitions par composant au niveau des classes d'équivalence.

Proposition 1.10. *Soit* M *un ensemble Lebesgue-mesurable tel que* $\overline{M} \subset\subset \Omega$ *et* $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$, *alors*

$$\int_M u(x)dx = \Big(\int_M u_\varepsilon(x)dx\Big)_\varepsilon + \mathcal{N}_r^s \in \mathcal{G}_r^s.$$

Preuve 1.1. *On a* $(u_\varepsilon(x))_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\Omega)$ *donc,*

$$\left(\int_M u_\varepsilon(x)dx\right)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_r,$$

d'où

$$\int_M u(x)dx \in \mathcal{G}^s_r.$$

Proposition 1.11. *On note* λ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^n$ *et soient* M_1, M_2, M_3 *des ensembles* λ*-mesurable tels que* $\overline{M}_i \subset \Omega,\ \ i = 1, 2, 3.$
De plus, si $u, v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ *et* $\alpha \in \mathcal{G}^s_r$*, alors*
i) *On a*

$$\int_M (u + \alpha v) = \int_M u + \alpha \int_M v.$$

ii) *Si* $\lambda(M) = 0$ *alors*

$$\int_M u = 0.$$

iii) *Si* $\lambda(M_1 \cap M_2) = 0$ *alors*

$$\int_{M_1 \cup M_2} u = \int_{M_1} u + \int_{M_2} u.$$

iv) *Si* $\overline{M} \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$ *alors*

$$\int_M u = \int_M (u/\Omega').$$

v) *Si* $f \in C^\infty(\Omega)$ *alors*

$$\textstyle\int_M i(f) = \int_M f \text{ dans } \mathcal{G}^s_r.$$

Exemple 1.5.1. • *Soit* $K = [-a, a]$*, alors*

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_K i(\delta)(x)dx & = & (\displaystyle\int_{-a}^a \rho_\varepsilon(x)dx)_\varepsilon + \mathcal{N}^s_r \\ & = & 1 \text{ dans } \mathcal{G}^s_r. \end{array}$$

En effet : $\forall r > 0$*, on a*

$$\begin{array}{rcl} |1 - \displaystyle\int_{-a}^a \rho_\varepsilon(x)dx| & = & |\displaystyle\int_{|y| \geq \frac{a}{\varepsilon}} \rho(y)dy| \\ & \leq & C_r \varepsilon^r. \end{array}$$

Définition 1.4. *Soit* $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ *avec* $supp(u) = K$ *compact dans* Ω *on définit*

$$\int_\Omega u(x)dx := \int_L u(x)dx,$$

où L *est un compact de* Ω *contient* K*.*

Exemple 1.5.2.

1) *On a*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} i(\delta)(x)dx &= \int_K i(\delta)(x)dx \\ &= 1.\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} i(\delta)^2(x)dx &= (\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon^2(x)dx)_\varepsilon + \mathcal{N}_r^s \\ &= (\frac{1}{\varepsilon}\int_K \rho^2(x)dx)_\varepsilon \ + \ \mathcal{N}_r^s.\end{aligned}$$

Théorème 1.4.

Si $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors

$$\textstyle\int_\Omega i(\omega)(x)i(\varphi)(x)dx = \langle \omega, \varphi \rangle \text{ dans } \mathcal{G}_r^s.$$

Corollaire 1.1.

Si $\omega \in D'(\Omega)$ et $\varphi \in D(\Omega)$ alors

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega i(\omega)_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \langle \omega, \varphi \rangle.$$

Chapitre 2

Fonctions presque automorphes et asymptotiquement presque automorphes

2.1 Rappel sur les fonctions presque périodiques

Définition 2.1. *Soit* $(\mathbb{X}, \parallel . \parallel)$ *un espace de Banach, une fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ *est dite presque périodique si :*
1) f *est continue*
2) Pour chaque $\varepsilon > 0$ *il existe un* $l(\varepsilon) > 0$ *tel que tout intervalle* I *de longueur* $l(\varepsilon) > 0$ *contient un nombre* τ *avec la propriété*

$$\parallel f(t+\tau) - f(t) \parallel < \varepsilon,$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$.
Les nombres τ *sont appelés des* ε *presque-périodes.*

Théorème 2.1. *(Voir [8]) [Caractérisation de Bouchner] Soit* $\mathbb{X}$ *un espace de Banach muni d'une norme notée* $\parallel . \parallel$ *une fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ *est presque-périodique si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :*
1) f *est continue*
2) De toute suite $(h_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres réels on peut extraire une sous suite* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que la suite* $(f(t+h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *soit uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$.

Théorème 2.2. *(Voir [8]) [Deuxième caractérisation de Bouchner] Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ *une fonction continue. Alors* f *est presque périodique si et seulement si pour toute suite* $((\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}},$

$(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *avec* σ_n, $\tau_n \in \mathbb{R}$, *il existe une sous suite* $((\sigma'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tau'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $(f(t+\sigma'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* $g(t)$ *et* $(f(t+\tau'_n))_{n\in\mathbb{N}}, (g(t+\tau'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent simplement vers la même fonction* $h(t)$.

Nous citons dans la suite les principales propriétés des fonctions presque périodiques définies de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{X}$.

Proposition 2.1. *(Voir [17])*
1) Toute fonction presque-périodique est bornée.
2) Toute fonction presque-périodique est uniformément continue.
3) L'ensemble des fonctions presque-périodique est invariant par translation.
4) L'image d'une fonction presque périodique est relativement compacte.
5) L'espace des fonctions presque périodiques est complet pour la norme sup.
6) La somme et le produit de fonctions presque périodiques est presque périodique.
7) La composée de deux fonctions presque périodiques est presque périodique.
8) Si f *est une fonction presque périodique et* g *est une fonction uniformément continue alors* $g\circ f$ *est une fonction presque périodique.*
9) Soit f *une fonction presque périodique dérivable. Si* f' *est uniformément continue alors* f' *est presque périodique.*
10) Si f *est une fonction presque périodique, alors la fonction* F *définie par*

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

est presque périodique si et seulement si l'image de F *est relativement compacte dans* $\mathbb{X}$.
11) Si $\mathbb{X}$ *est un espace de Banach uniformément convexe, et* f *une fonction presque périodique, alors la fonction* F *définie par* $F(t) = \int_0^t f(s)ds$, *est presque périodique si et seulement si*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| F(t) \| < \infty.$$

Remarque 2.1. *Toute fonction périodique est presque périodique, et la réciproque est fausse en général comme le montre le contre exemple suivant*

Exemple 2.1.1. *Un exemple de fonction presque périodique qui n'est pas périodique est le suivant : Considérons la fonction f définie par*

$$f(x) = e^{ix} + e^{i\sqrt{2}x}.$$

Elle s'écrit comme somme de deux fonctions périodique, l'une de période 2π*, l'autre de période* $\sqrt{2}\pi$*. donc* f *est presque périodique. Montrons par absurde que* f *n'est pas périodique. Supposons qu'il existe* $\tau \neq 0$*, tel que pour tout réel* x *on a* $f(x+\tau) = f(x)$*. On doit avoir*

$$e^{ix}\, e^{i\tau} + e^{i\sqrt{2}x}\, e^{i\sqrt{2}\tau} = e^{ix} + e^{i\sqrt{2}x},$$

donc

$$e^{ix}\, (e^{i\tau} - 1) + e^{i\sqrt{2}x}\, (e^{i\sqrt{2}\tau} - 1) = 0.$$

En dérivant on obtient

$$e^{ix}\, (e^{i\tau} - 1) + \sqrt{2}e^{i\sqrt{2}x}\, (e^{i\sqrt{2}\tau} - 1) = 0.$$

En prenant $x = 0$*, on voit que l'on doit aussi avoir*

$$e^{i\tau} - 1 + \sqrt{2}(e^{i\sqrt{2}\tau} - 1) = 0.$$

Ceci donne, avec l'équation de départ évaluée en $x = 0$ *que* $e^{i\tau} = e^{i\sqrt{2}\tau} = 1$*. Il existe donc* $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\tau = 2k_1\pi$ *et* $\sqrt{2}\tau = 2k_2\pi$*. Or* $\tau \neq 0$*, on obtient* $\sqrt{2} = \frac{k_2}{k_1}$*. Ce qui est absurde.*

2.2 Les fonctions presque automorphes

Définition 2.2. *Une fonction continue* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ *est dite presque automorphe (p.a.) si pour toute suite de nombres réels* $(s_n^{'})$ *on peut extraire une sous suite* (s_n) *telle que*

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f(t + s_n - s_m) = f(t). \tag{2.1}$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$*.*
L'ensemble des fonctions presque automorphes est noté par $AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *ou* $AA(\mathbb{X})$*.*

Remarque 2.2.

La définition précédente est équivalente à : De toute suite de nombres réels $(s_n^{'})$ on peut extraire une sous-suite (s_n), $(s_n) \subset (s_n^{'})$ telle que

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} f(t + s_n), \tag{2.2}$$

est bien définie pour chaque $t \in \mathbb{R}$, et

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} g(t - s_n) \tag{2.3}$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

En effet, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(t + s_n) = g(t),$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$, et

$$\lim_{n\to\infty} g(t - s_n) = f(t),$$

donc

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(t + s_n - s_m) &= \lim_{m\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty} f((t - s_m) + s_n)\Big)\\ &= \lim_{m\to\infty} g(t - s_m)\\ &= f(t).\end{aligned}$$

Réciproquement, on a :

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(t + s_n - s_m) = f(t),$$

alors $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(t + s_n - s_m)$ existe pour chaque $t \in \mathbb{R}$. On pose $g(t?s_m) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(t + s_n - s_m)$, donc

$$\lim_{m\to\infty} g(t - s_m) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(t + s_n - s_m), \tag{2.4}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} f(t + s_m) &= \lim_{m\to\infty}\lim_{m\to\infty} g(t + s_m - s_m)\\ &= g(t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Remarque 2.3.

Si dans les deux limites (2.2) et (2.3) la convergence est uniforme en $t \in \mathbb{R}$, alors f est presque périodique. La notion de presque automorphie est donc plus générale que la presque périodicité [66]. On a les inclusions suivantes

$$AP(\mathbb{X}) \subsetneq AA(\mathbb{X}) \subsetneq BC(\mathbb{X}).$$

Exemple 2.2.1. *(voir [55]) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$f(t) = \sin\left(\frac{1}{2+\cos(t)+\cos(\sqrt{2}t)}\right)$$

alors f est presque automorphe, mais f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que f n'est pas presque périodique.

Théorème 2.3. *[61] Supposons que les fonctions f, f_1, f_2 sont presque automorphes et λ un scalaire. Alors les assertions suivantes sont vraies*

1) *$f_1 + f_2$ est presque automorphe.*

2) *λf est presque automorphe pour tout λ dans $\mathbb{R}$.*

3) *$f_a = f(t+a)$ est presque automorphe pour tout constant a dans $\mathbb{R}$.*

4) *$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \| < \infty$, c'est-à-dire que f est une fonction bornée.*

Démonstration. 1. 1. Soit $(s^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, puisque $f_1 \in AA(\mathbb{X})$, il existe une sous-suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (s^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty, m\to\infty} f_1(t+s_n-s_m) = f_1(t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. De même $f_2 \in AA(\mathbb{X})$ alors il existe une sous suite $(t_n) \subset (s_n)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty, m\to\infty} f_1(t+t_n-t_m) = f_2(t),$$

On a $(t_n) \subset (s_n) \subset (s^{'}_n)$ et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty, m\to\infty}(f_1+f_2)(t+t_n-t_m) &= \lim_{n\to\infty, m\to\infty} f_1(t+t_n-t_m) + \lim_{n\to\infty, m\to\infty} f_2(t+t_n-t_m)\\ &= f_1(t)+f_1(t)\\ &= (f_1+f_2)(t) \qquad (2.6)\end{aligned}$$

et ceci pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $f_1 + f_2$ est presque automorphe.

2. Comme f est presque automorphe, $(s^{'}_n) \in \mathbb{R}$, il existe une sous-suite (s_n) de $(s^{'}_n)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty, m\to\infty} f(t+s_n-s_m)$$

on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty, m\to\infty}(\lambda f)(t+s_n-s_m) &= \lambda \lim_{n\to\infty, m\to\infty} f(t+s_n-s_m)\\ &= (\lambda f)(t), \qquad (2.7)\end{aligned}$$

donc λf est presque automorphe.
3. Soit $(s_n^{'})$ une suite de nombres réels, puisque $f \in AA(\mathbb{X})$, on peut extraire une sous-suite $(s_n) \subset (s_n^{'})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty, m\to\infty} f(t+s_n-s_m) = f(t)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty, m\to\infty} f_a(t+s_n-s_m) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} f(t+s_n-s_m+a) \\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} f(t+a+s_n-s_m) \\
&= f(t+a) \\
&= f_a(t)
\end{aligned}$$

Par suite f_a est une fonction presque automorphe.
4. Supposons par l'absurde que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \| = \infty,$$

alors il existe une suite de nombres réels $(s_n^{'})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \| f(s_n^{'}) \| = \infty.$$

Puisque f est presque automorphe nous pouvons extraire $(s_n) \subset (s_n^{'})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) = g(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particulier $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) = g(0) = \alpha$. D'où

$$\lim_{n\to\infty} \| f(s_n) \| = \| \alpha \| < \infty.$$

qui est une contradiction, on conclut donc que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \|$ est fini. □

Théorème 2.4. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions presque automorphes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f alors f est presque automorphe.*

Démonstration. Soit (s_n) une suite réelle. Puisque les fonctions f_n sont presque automorphes par procédé diagonal on peut extraire une même sous-suite (s_n) telle que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} f_i(t+s_n) = g_i(t) \; (*)$$

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on observe que la suite $(g_i(t))$ est une suite de Cauchy. En effet on peut écrire

$$g_i(t) - g_j(t) = g_i(t) - f_i(t+s_n) + f_i(t+s_n) - f_j(t+s_n) + f_j(t+s_n) - g_j(t),$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire on obtient

$$\| g_i(t) - g_j(t) \| \leq \| g_i(t) - f_i(t+s_n) \| + \| f_i(t+s_n) - f_j(t+s_n) \| + \| f_j(t+sn) - g_j(t) \|,$$

Soit alors $\varepsilon > 0$, puisque (f_n) converge uniformément vers la fonction f alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i, j > N$ on a

$$\| f_i(t+s_n) - f_j(t+s_n) \| < \varepsilon.$$

Maintenant, puisque $\mathbb{X}$ est complet et que $(g_i(t))$ est de Cauchy, donc $(g_i(t))$ converge simplement vers une fonction $g(t)$ On montre que,

$$\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) = g(t),$$

et

$$\lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t),$$

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, et tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$\| f(t+s_n) - g(t) \| \leq \| f(t+s_n) - f_i(t+s_n) \| + \| f_i(t+s_n) - g_(t) \| + \| g_i(t) - g(t) \|,$$

soit $\varepsilon > 0$, il existe alors $M_1 = M_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\| f(t+s_n) - f_{M_1}(t+s_n) \| < \varepsilon,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $\exists M_2 = M_2(\varepsilon, t)$

$$\| g_{M_2}(t) - g(t) \| < \varepsilon,$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$.
D'où, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}, \exists M = M(\varepsilon, t) = \max(M_1, M_2)$ tel que

$$\| f(t+s_n) - g(t) \| < 2 + \| f_M(t+s_n) - g_M(t) \|,$$

d'après $(*)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$, il existe un entier naturel $K = K(t, M)$ tel que pour tout $n \geq K$ on a :

$$\| f_M(t+s_n) - g_M(t) \| < \varepsilon,$$

Finalement,

$$\| f(t+s_n) - g(t) \| < \varepsilon,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) = g(t)$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Théorème 2.5. *Si $f \in AA(\mathbb{X})$ et sa dérivée $f^{'}$ existe et est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f^{'} \in AA(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On cherche à écrire $f^{'}$ comme une limite uniforme d'une suite de fonctions presque automorphes. On sait que pour tout réel x on a

$$f^{'}(x) = \lim_{n\to\infty} n(f(x+1/n) - f(x)).$$

On pose,

$$f_n(x) = n(f(x+1/n) - f(x)).$$

On a

$$\begin{aligned} \| f^{'}(x) - f_n(x) \| &= \| f^{'}(x) - n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f^{'}(t)dt \|, \\ &\leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} \| f^{'}(x) - f^{'}(t) \| dt, \\ &\leq \sup_{t\in[x,x+\frac{1}{n}]} \| f^{'}(x) - f^{'}(t) \| . \end{aligned}$$

Prenons $\varepsilon > 0$, l'uniforme continuité de $f^{'}$ assure l'existence d'un δ tel que si $|u-v| \leq \delta$ alors $\| f^{'}(t) - f^{'}(v) \| \leq \varepsilon$. Il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on a $\frac{1}{n} \leq \delta$ donc pour $n \geq n_0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $\| f(x) - f_n(t) \| \leq \varepsilon$, d'où la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f^{'}$ sur $\mathbb{R}$. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque automorphe d'aprés le Théorème 2.4 $f^{'}$ est presque automorphe. $\square$

Proposition 2.2. *Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ presque automorphe et $f(t) = 0$ pour tout $t > \alpha$, avec α une constante réelle alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Montrons que $f(t) = 0$ pour tout $t \leq \alpha$, on considère la suite des nombres naturels (n), puisque f est presque automorphe on peut extraire une sous-suite (n_k) telle que

$$\lim_{k\to\infty} f(t+n_k) = g(t),$$

et

$$\lim_{k\to\infty} g(t-n_k) = f(t),$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Il est clair que pour tout $t \leq \alpha$ on peut trouver $(n_{k_j}) \subset (n_k)$ avec $t + n_{k_j} > \alpha$, pour tout j tel que $f(t+n_{k_j}) = 0$ pour tout j et puisque

$$\lim_{k\to\infty} f(t+n_{k_j}) = g(t).$$

On obtient $g(t) = 0$, donc $f(t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. □

Théorème 2.6. *L'espace* $(AA(\mathbb{X}), \| \,.\, \|_\infty)$ *est un espace de Banach*

Démonstration. Comme $AA(\mathbb{X}) \subset BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ d'après le Théorème 2.4 on a $AA(\mathbb{X})$ est un sous-espace fermé de $(BC(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ qui est complet donc, $(AA(\mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Proposition 2.3.

Nous définissons $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ par $F(t) = \int_0^t f(s)ds$, où $f \in AA(\mathbb{X})$. Alors $F \in AA(X)$, si et seulement si $R_F = \{F(t)/t \in \mathbb{R}\}$ est pré-compacte.

Démonstration. □

Il suffit de prouver que F est une fonction presque automorphe si R_F est relativement compact. Soit $(s_n^{"})$ une suite réelle, alors il existe une sous-suite $(s_n^{'}) \subset (s_n^{"})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f(t+s_n^{'}) = g(t),$$

et

$$\lim_{n\to\infty} g(t-s_n^{'}) = f(t),$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et

$$\lim_{n\to} F^{'}(s) = \alpha_1.$$

Nous obtenons alors pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} F(t+s_n^{'}) &= \int_0^{t+s_n^{'}} f(r)dr \\ &= \int_0^{s_n^{'}} f(r)dr + \int_{s_n^{'}}^{t+s_n^{'}} f(r)dr \\ &= F(s_n^{'}) + \int_{s_n^{'}}^{t+s_n^{'}} f(r)dr, \end{aligned} \tag{2.8}$$

en utilisant le changement de variable $\sigma = r - s_n^{'}$ on obtient

$$F(t + s_n^{'}) = F(s_n^{'}) + \int_0^t f(\sigma + s_n^{'})d\sigma.$$

En appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons,

$$\begin{aligned} F(t + s_n^{'}) &= \lim_{n\to\infty} F(s_n^{'}) + \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(\sigma + s_n^{'})d\sigma \\ &= \lim_{n\to\infty} F(s_n^{'}) + \int_0^t \lim_{n\to\infty} f(\sigma + s_n^{'})d\sigma \\ &= \alpha_1 + \int_0^t g(\sigma)d\sigma, \end{aligned} \tag{2.9}$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$, nous observons que l'ensemble $R_G = \{G(t) : t \in \mathbb{R}\}$ où

$$G(t) = \alpha_1 + \int_0^t g(r)dr$$

est également relativement compact et

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| G(t) \| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \| .$$

Pouvons donc extraire une sous-suite (s_n) de $(s_n^{'})$ tel que $\lim_{n\to\infty} G(-s_n) = \alpha_2$ pour un certain $\alpha_2 \in \mathbb{X}$ Maintenant, nous pouvons écrire

$$G(ts_n) = G(-s_n) + \int_0^t g(rs_n)dr.$$

Pour que

$$\lim_{n\to\infty} G(t - s_n) = \alpha_2 + \int_0^t f(r)dr = \alpha_2 + F(t),$$

il faut que $\alpha_2 = 0$. En utilisant la notation T_s, qui est un opérateur linéaire, avec $T_s f = g$ pour exprimer que

$$\lim_{n\to\infty} f(t + s_n) = g(t),$$

où $s = (s_n)$ et $A_s f = T_{-s} T_s f$ nous obtenons

$$A_s F = \alpha_2 + F.$$

Maintenant on a l'équation

$$A_s^2 F = A_s \alpha_2 + A_s F = \alpha_2 + \alpha_2 + F = 2\alpha_2 + F.$$

Nous pouvons continuer indéfiniment le processus pour obtenir

$$A_s^n F = n\alpha_+ F, \;\; n = 1, 2, ...$$

Mais nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| A_s^n F(t) \| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \| F(t) \|,$$

avec $F(t)$ qui est une fonction bornée. Ce qui conduit à une contradiction si $\alpha_2 \neq 0$, donc $\alpha_2 = 0$ et $A_s F = F$. Alors F est presque automorphe ce qui achève la démonstration. $\square$

Corollaire 2.1. *(Voir[56]) Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach uniformément convexe et $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ définie par $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ où $f \in AA(\mathbb{X})$. Alors $F \in AA(\mathbb{X})$ si et seulement si F est bornée.*

Théorème 2.7. *Soit $f \in AA(\mathbb{X})$, si $h \in L^1(\mathbb{R})$ alors leur convolution définie par*

$$(f * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)h(t-s)ds$$

appartient à $AA(\mathbb{X})$

Démonstration. Puisque f est continue et $h \in L^1(\mathbb{R})$ on peut voir que la fonction $t \longrightarrow (f*h)(t)$ est continue. Soit (s_n') une suite de nombres réels, puisque f est presque automorphe, il existe une sous suite $(s_n) \subset (s_n')$ tel que

$$g(t-\sigma) = \lim_{n\to\infty} f(t-\sigma+s_n),$$

et

$$f(t-\sigma) = \lim_{n\to\infty} g(t-\sigma-s_n),$$

pour tous $t, \sigma \in \mathbb{R}$. Considèrerons alors

$$(f * h)(t+s_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\sigma+s_n)h(\sigma)d\sigma,$$

pour tous $t, \sigma \in \mathbb{R}$. Grâce à la continuité de f, on a

$$\| f(t-\sigma+s_n)h(\sigma) \| \leq \| f \|_\infty |h(\sigma)|.$$

En utilisant le fait que $h \in L^1(\mathbb{R})$ et compte tenu de ce qui précède, on en déduit alors du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (f * h)(t+s_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f(t-\sigma+s_n)h(\sigma) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\sigma)h(\sigma)d\sigma \\
&= (g * h)(t),
\end{aligned}$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$. D'une manière similaire considérons

$$(g * h)(t - s_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \sigma - s_n)h(\sigma)d\sigma$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$. On a clairement :

$$\| g(t - \sigma - s_n) \| \leq \| g \|_\infty |h(\sigma)|,$$

pour chaque $t, \sigma \in \mathbb{R}$, de nouveau par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il en résulte que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (g * h)(t - s_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} g(t - \sigma + s_n)h(\sigma) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \sigma)h(\sigma)d\sigma \\ &= (f * h)(t), \end{aligned}$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$.
Finalement $f * h$ est presque automorphe. □

2.3 Les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ presque automorphes

Définition 2.3. *On définit l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées sont presque automorphes par*

$$\mathcal{B}_{AA} = \left\{ \varphi \in \mathcal{E} : \forall j \in \mathbb{Z}_+, \quad \varphi^{(j)} \in AA(\mathbb{R}) \right\}.$$

Cette espace peut munir de la topologie induite par la famille de semi-normes

$$\| \varphi \|_{k,\infty} = \sum_{j \leq k} \| \varphi^{(j)} \|_{L^\infty} \quad k \in \mathbb{N}_0, \ \varphi^{(j)} \in L^\infty \tag{2.10}$$

Des propriétés importantes sont données dans la

Proposition 2.4. *1. L'espace $\mathcal{B}_{AA}$ est une sous-algèbre de Frechét de $\mathcal{B}$.*

2. $\tau_\omega \mathcal{B}_{AA} \subset \mathcal{B}_{AA}, \ \forall \omega \in \mathbb{R}$.

3. $\mathcal{B}_{AA} * L^1 \subset \mathcal{B}_{AA}$.

Démonstration. 1. Comme la topologie de $\mathcal{B}_{AA} \subset \mathcal{D}_{L^\infty}$ est donnée par la famille sous-multiplicative dénombrable de normes $\| \ . \ \|_{k,\infty}, \ k \in \mathbb{N}$, il reste à montrer la complétion de l'espace $\mathcal{B}_{AA}$. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_{AA}$ une suite de Cauchy, il est claire que, $\forall i \in \mathbb{N}$, $(f_m^{(i)})_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $AA(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions presque continues, qui est complet par rapport à la norme de la convergence uniforme, alors $\forall i \in \mathbb{N}$, $(f_m^{(i)})_m$ converge uniformément vers $f_i \in AA(\mathbb{R})$, posons $f_0 = f$, on obtinet, grâce à la convergence uniforme, que $f \in \mathcal{C}^\infty$, et $\forall i \in \mathbb{N}, \ f^{(i)} = f_i \in AA(\mathbb{R})$, c.à.d $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la topologie de $\mathcal{B}_{AA}$, ce qui signifie que $\mathcal{B}_{AA}$ est complet.
2. Soit $f \in \mathcal{B}_{AA}$, et soit ω un nombre réel , on prouve que $\tau_\omega f$ est un élément de $\mathcal{B}_{AA}$, puisque la translation de toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est aussi une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, il reste à montrer que $\tau_\omega f$ est une fonction presque automorphe, qui est claire d'après la définition.
3. Si $h \in L^1$ et $f \in \mathcal{B}_{AA}$, alors $(f * h) \in \mathcal{C}^\infty$ et $\forall i \in \mathbb{N}$, $(f * h)^{(i)} = f^{(i)} * h \in AA(\mathbb{R})$. □

Remarque 2.4. *On a* $\mathcal{B}_{AA} \subsetneq \mathcal{C}^\infty \cap AA(\mathbb{X})$.

Le résultat suivant est une conséquence de la proposition précédente.

Corollaire 2.2. *Soit* $f \in \mathcal{D}_{L^\infty}$, *alors* $f \in \mathcal{B}_{AA}$, *si et seulement si* $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $f * \varphi \in AA(\mathbb{X})$.

Démonstration. La condition de nécessité ressort clairement de la proposition ci-dessus. Soit $f \in \mathcal{D}_{L^\infty}$, prenons une suite $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tel que $\psi_m \geq 0$, supp $\psi_m \subset \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right]$ et $\int_\mathbb{R} \psi_m(x)dx = 1$, par hypothèse $f * \psi_m \in AA(\mathbb{X}), \forall m \in \mathbb{N}$. Comme

$$\begin{aligned}
|f * \psi_m(x) - f(x)| &= \left| \int_\mathbb{R} \psi_m(y)(f(x-y) - f(x))dy \right| \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}} |f'(y)| \int_{\frac{-1}{m}}^{\frac{1}{m}} \psi_m(y)|y|dy \\
&\leq \frac{1}{m} \sup_{z\in\mathbb{R}} |f'(z)| ,
\end{aligned}$$

donc $(f * \psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, d'après la Proposition 2.4, $f \in AA(\mathbb{X})$, c'est à dire $f \in \mathcal{D}_{L^\infty} \cap AA(\mathbb{X}) = \mathcal{B}_{AA}$. □

2.4 Les fonctions asymptotiquement presque automorphes

Définition 2.4. *Nous définissons plusieurs classes de fonctions comme suit :*
(a) Une fonction continue $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *est dite presque automorphe si* $f(t, x)$ *est presque*

automorphe dans $t \in \mathbb{R}$ uniformément pour tout $x \in K$, où K est tout sous-ensemble borné de $\mathbb{X}$, c'est-à-dire, pour toute suite de nombres réels $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, nous pouvons extraire une sous-suite $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ telle que :

$$\lim_{k\to\infty} f\left(t+s_{n_k},x\right)=g(t,x),$$

est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in K$, et

$$\lim_{k\to\infty} g\left(t-s_{n_k},x\right)=f(t,x),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in K$. Soit $AA(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ l'ensemble de tous ces fonctions.
(b) Une fonction continue bornée $f : \mathbb{R}\times\mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ est dite nulle à l'infini si
$\lim_{t\to\infty} \parallel f(t,x) \parallel = 0$ *uniformément sur tout sous-ensemble borné de $\mathbb{X}$. En particulier, on a le résultat*

Proposition 2.5.

1. L'espace $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{X}),\|.\|_\infty)$ est une sous-algèbre de Banach de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
2. $\tau_\omega C_0(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$, *pour tout* $\omega \in \mathbb{R}$.
3. $C_0(\mathbb{R},\mathbb{X}) * L^1 \subset C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
4. $C_0(\mathbb{R},\mathbb{X}) \times \mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Remarque 2.5.

La dérivée et la primitive d'une fonction qui s'annule à l'infini, ne s'annulent pas nécessairement à l'infini. Autrement dit, si $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$, et F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors $f^{'}$ et F ne sont pas nécessairement dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$. En effet on a le résultat

Proposition 2.6. *Soit $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$.*

1. *Si f' existe et est uniformément continue sur $\mathbb{R}$; alors il existe une fonction $F \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$ tel que $F = f'$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Il existe $F \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$ une primitive de$f$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\int_0^\infty f(t)dt < \infty$ et $\int_0^x f(t)dt$ est borné sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. □

1. Soit $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs convergente vers zéro. Considérons la suite de fonctions $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_m(.) = \frac{f\,(. + s_m) - f(.)}{s_m} = \int_0^1 f'\,(. + \lambda s_m)\,d\lambda.$$

En raison de la continuité uniforme de f', la suite de fonctions $(\varphi_m)_m$ converge uniformément vers f' sur $\mathbb{R}$. Définissons la fonction F par

$$F(x) = \begin{cases} f'(x),\ x \geq 0 \\ f'(0),\ x < 0. \end{cases}$$

Alors F est la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonction $(F_m)_m \subset C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$:

$$F_m(x) = \begin{cases} \varphi_m(x),\ x \geq 0 \\ \varphi_m(0),\ x < 0, \end{cases}$$

par conséquent $F \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
2. Comme $F \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$, alors F est continue, bornée et on a pour une constante $C \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + C, x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent $\int_0^x f(t)dt$ est bornée sur $\mathbb{R}$. L'annulation à l'infini de la fonction F donne que $\int_0^{+\infty} f(t)dt = -C < \infty$. Inversement, si $\int_0^x f(t)dt$ est borné sur $\mathbb{R}$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt < \infty$. On définit la fonction F par

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)dt - \int_0^{+\infty} f(t)dt, & x \in \mathbb{R} \\ \\ -\int_0^{+\infty} f(t)dt, & x < 0. \end{cases}$$

Alors on voit que $F \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $F' = f$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.5.

Une fonction continue $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{X}$ ($resp$ $\mathbb{R}\times\mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$) est dite asymptotiquement presque automorphe s'il existe une fonction $g \in AA(\mathbb{R},\mathbb{X})(AA\ (resp\ \mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X}))$ et $h \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})\,(C_0\ (resp\,\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X}))$ telles que $f = g + h$ sur $\mathbb{R}(resp\,\mathbb{R}\times\mathbb{X})$.
On note par $\mathrm{AAA}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ ($resp$ $\mathrm{AAA}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$) l'ensemble de toutes les fonctions asymptotiquement presque automorphe définies sur $\mathbb{R}$ ($resp\,\mathbb{R}\times\mathbb{X}$).

Remarque 2.6. *1. Si on supposons que $f \in AA(\mathbb{X})$, alors sa restriction à $\mathbb{R}^+$ appartiendra à $AAA(\mathbb{X})$. En effet, il suffit de prendre $g = f$ sur $\mathbb{R}$ et $h = 0$ sur $\mathbb{R}$.*

2. Dans les deux cas, g est appelé le terme principal de f et h son terme correctif.

Proposition 2.7. *La décomposition d'une fonction asymptotiquement presque automorphe définie dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{R} \times \mathbb{X}$), est unique sur $\mathbb{R}^+$.*

Démonstration. Nous donnons la preuve dans le cas où f est définie sur $\mathbb{R}$, l'autre cas est similaire. Soit f une fonction asymptotiquement presque automorphe possédant deux décompositions, c'est-à-dire

$$f = g_j + h_j \; j = 1, 2 \;\; sur \;\; \mathbb{R}^+,$$

où $g_j \in AA(\mathbb{X})$ et $h_j \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors

$$g_1(t) - g_2(t) = h_2(t) - h_1(t), \;\; \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

et $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \| g_1(t) - g_2(t) \| = 0$, puis le fait que $AA(\mathbb{X}) \cap C_0(\mathbb{R}, \mathbb{X}) = \{0\}$ donne $g_1 = g_2$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $h_1 = h_2$ sur $\mathbb{R}$. □

On rappelle quelques propriétés fondamentales des fonctions presque automorphes, voir [9, 69], l'ensemble de ces fonctions est donnée dans la Définition 2.2 du chapitre précédent par $AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.

Théorème 2.8.

Si $f \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ est Lipschitzienne par rapport à x uniformément en $t \in \mathbb{R}$ alors la fonction g de la Définition 2.4 est aussi Lipschitzienne avec la même constante de Lipschitz.

Démonstration. : □

Soit L une constante de Lipschitz pour la fonction f, c'est-à-dire

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| < L\|x - y\|,$$

pour x, y dans tout sous-ensemble borné K de $\mathbb{X}$ uniformément dans $t \in \mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ arbitraire et $\varepsilon > 0$ et K un ensemble borné dans $\mathbb{X}$ donné. Alors pour toute suite de nombres réels (s_n), il existe une sous-suite (s_{n_k}) telle que

$$\|f\,(t + s_{n_k}, x) - g(t, x)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$\|g\left(t-s_{n_k}, x\right)-f(t, x)\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

pour k assez grand et uniformément dans $x \in K$. On peut écrire pour tout $x, y \in K$

$$\begin{aligned} g(t, x)-g(t, y)= & g(t, x)-f\left(t+s_{n_k}, x\right)+f\left(t+s_{n_k}, x\right)-f\left(t+s_{n_k}, y\right) \\ & +f\left(t+s_{n_k}, y\right)-g(t, y) . \end{aligned}$$

Pour k suffisamment grand on obtient :

$$\|g(t, x)-g(t, y)\|<\varepsilon+L\|x-y\| .$$

Et puisque ε est arbitraire on obtient

$$\|g(t, x)-g(t, y)\| \leq L\|x-y\|,$$

uniformément pour $x, y \in K$, ce qui achève la preuve.

Chapitre 3

Fonctions généralisées presque automorphes

Nous traitons dans ce chapitre des algèbres de fonctions généralisées presque automorphes contenant les espaces des fonctions indéfiniment dérivable presque automorphes et l'espace des distributions presque automorphes. Pour effectuer quelques opérations non linéaires sur les distributions. Les algèbres de fonctions généralisées sont étudiés dans [7, 12], voir [39] avec plus de détail.

3.1 Propriétés des fonctions généralisées presque automorphes

Nous commençons cette section en présentant une classe d'algèbres de Colombeau, qui sera compatible avec la théorie des fonctions presque automorphes [68, 69], sur cette classe, voir par exemple [10].
On considère dans l'algèbre des fonctions généralisées presque automorphes l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}u(t) = A\,u(t) + f(t). \tag{3.1}$$

Soit $I = (0;1)$, et rappelons l'algèbre des fonctions généralisées bornées, noté par $\mathcal{G}_{L^\infty}$:

$$\mathcal{G}_{L^\infty} = \mathcal{M}_{L^\infty}/\mathcal{N}_{L^\infty},$$

avec

$$\mathcal{M}_{L^\infty} = \left\{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{D}_{L^\infty})^I : \forall k \in \mathbb{Z}_+, \exists m \in \mathbb{Z}_+, \| u_\varepsilon \|_{k,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-m}), \varepsilon \to 0\right\},$$

et

$$\mathcal{N}_{L^\infty} = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{D}_{L^\infty})^I : \forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall m \in \mathbb{Z}_+, \| \, u_\varepsilon \, \|_{k,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^m), \varepsilon \to 0 \right\},$$

avec $\| \, . \, \|_{k,\infty}$ est la famille de semi-norme donnée dans (2.10). Pour plus de propriétés sur l'algèbre $\mathcal{G}_{L^p}$ le lecteur pourra voir par exemple la référence [39].

Définition 3.1.

On définit l'espace des éléments modérés presque automorphes par

$$\mathcal{M}_{AA} = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{B}_{AA})^I : \forall k \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \| \, u_\varepsilon \, \|_{k,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-m}), \varepsilon \to 0 \right\},$$

et l'espace des éléments négligeables par

$$\mathcal{N}_{AA} = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{B}_{AA})^I : \forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \| \, u_\varepsilon \, \|_{k,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m}), \varepsilon \to 0 \right\}.$$

Le résultat suivant donne une caractérisation de $\mathcal{N}_{AA}$.

Proposition 3.1. *1. $\mathcal{M}_{AA}$ est une sous algèbre de l'algèbre de Banach $\mathcal{B}_{AA}$.*

2. $\mathcal{N}_{AA}$ est un idéal de $\mathcal{M}_{AA}$.

Preuve 3.1. *Soient $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AA}$, $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AA}$, d'après la définition ci-dessus on a,*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; \exists m^{'} \in \mathbb{N}, \; \exists c^{'} > 0, \; \exists \varepsilon_1^{'} \in I, \; \forall \varepsilon < \varepsilon_1^{'}, \; \| \, u_\varepsilon \, \|_{k,\infty} < c^{'} \varepsilon^{-m^{'}}.$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; \forall m_0 \in \mathbb{N}, \; \exists c^{'} > 0, \; \exists \varepsilon_1^{'} \in I, \; \forall \varepsilon < \varepsilon_1^{'}, \; \| \, v_\varepsilon \, \|_{k,\infty} < c^{'} \varepsilon^{m_0}.$$

Par la formule de Leibniz,il existe $c_k > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \| \, u_\varepsilon \, v_\varepsilon \, \| &\leq c_k \, \| \, u_\varepsilon \, \| \, \| \, v_\varepsilon \, \| \\ &\leq c_k \, c_0 \, c_1 \, \varepsilon^{-m^{'} + m_0} \end{aligned}$$

Donc, $\| \, u_\varepsilon \, v_\varepsilon \, \| \leq C \varepsilon^{\tilde{m}}$, avec $\tilde{m} = -m^{'} + m_0 \in \mathbb{N}$,

ce qui montre que $\mathcal{N}_{AA}$ est un idéale de $\mathcal{M}_{AA}$.

L'algèbre des fonctions généralisées presque automorphes est donnée par

$$\mathcal{G}_{AA} = \mathcal{M}_{AA} / \mathcal{N}_{AA}. \tag{3.2}$$

Proposition 3.2. *Une caractérisation de l'idéal des éléments négligeable est donnée par*

$$\mathcal{N}_{AA} = \{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AA} : \forall m \in \mathbb{N}, \| \, u_\varepsilon \, \|_{0,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^m) \; quand \, \varepsilon \to 0 \}.$$

La preuve de ce résultat vous pouvez le voir [39] où il est donné dans le cas général.

3.2 Semi-groupe généralisé

Suite à la tentative de nombreux chercheurs qui consiste à donner la relation entre semi-groupe et son générateur infinitésimal. Dans cette section nous discutons la méthode de construire l'algèbre de Colombeau pour donner un sens aux semi-groupes généralisés.
Soit X un espace localement convexe défini par la famille des semi-normes $(p_i)_{i\in I}$.
On rappelle que :

$$\mathcal{E}^s_M(X) = \{(x_\varepsilon)_\varepsilon \in (X)^{(0,1)} / \exists m \in \mathbb{N}, \forall i \in I, \quad p_i(x_\varepsilon) = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{-m})\ \},$$

$$\mathcal{N}(X) = \{(x_\varepsilon)_\varepsilon \in (X)^{(0,1)} / \forall m \in \mathbb{N}^s, \forall i \in I, \quad p_i(x_\varepsilon) = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{m})\ \}.$$

Remarque 3.1.
- $\mathcal{E}^s_M(X)$ *est une algèbre*
- $\mathcal{N}(X)$ *est un idéal de* $\mathcal{E}^s_M(X)$.

L'algèbre de Colombeau sur X est définie par

$$\tilde{X} = \mathcal{E}^s_M(X)/\mathcal{N}^s(X).$$

Définition 3.2. *[52]* • $\mathcal{SE}_M(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}_c(X))$ *est l'espace des applications* $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ *fortement continues*
$S_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}_c(X),\ \ \varepsilon \in (0,1)$ *avec la propriété : pour tout* $T > 0$ *il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\sup_{t\in[0,T)} \|S_\varepsilon(t)\| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^a). \tag{3.3}$$

• $\mathcal{SN}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}_c(X))$ *est l'espace des applications* $(N_\varepsilon)_\varepsilon$ *fortement continues*
$N_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}_c(X),\ \ \varepsilon \in (0,1)$ *satisfaisant :*
pour tout $b \in \mathbb{R}$ *et* $T > 0$

$$\sup_{t\in[0,T)} \|N_\varepsilon(t)\| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^b), \textit{il existe } t_0 > 0 \textit{ et } a \in \mathbb{R} \textit{ tel que } \sup_{t<t_0} \|\frac{N_\varepsilon(t)}{t}\| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^a). \tag{3.4}$$

Il existe une suite $(H_\varepsilon)_\varepsilon$ *dans* $\mathcal{L}_c(X)$ *et* $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *tel que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{N_\varepsilon(t)}{t} H_\varepsilon x, \quad x \in X, \quad \varepsilon < \varepsilon_0,\ \textit{et}\ \ \|H_\varepsilon\| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^b), \textit{pour tout } b > 0. \tag{3.5}$$

Proposition 3.3. *[52]*

$\mathcal{SE}_M(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}_c(X))$ est une algèbre et $\mathcal{SN}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}_c(X))$ est un idéal de $\mathcal{SE}_M(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}_c(X))$. L'algèbre des semi-groupes généralisés sur X est définie par

$$\mathcal{SG}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(X)) = \mathcal{SE}_M(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(X))/\mathcal{SN}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(X)).$$

Les éléments de $\mathcal{SG}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(X))$ sous la forme $S = [S_\varepsilon]$, avec $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ est un représentant de S.

Définition 3.3. *[52] $S \in \mathcal{SG}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(X))$ est appelé un C_0-semi groupe de Colombeau s'il admet un représentant $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ tel que, pour tout $\varepsilon_0 > 0$, S_ε est un C_0-semi-groupe, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$.*
Dans la suite on utilise seulement les représentants $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ de C_0-semi-groupe S qui sont des C_0-semi-groupes, pour ε assez petit.

Proposition 3.4. *[52]*

Soient $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$ deux représentants d'un C_0-semi-groupe S de Colombeau, de générateur infinitésimale $A_\varepsilon,\ \varepsilon < \varepsilon_0$, et $\tilde{A}_\varepsilon,\ \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_0$, respectivement, où ε_0 et $\tilde{\varepsilon}_0$ correspondent (dans le sens de la Définition 3.2 à $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$, respectivement.
Alors, $D(A_\varepsilon) = D(\tilde{A}_\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon < \bar{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_0, \tilde{\varepsilon}_0\}$, $A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon$ peut être étendu en un élément de $\mathcal{L}(X)$, noté par $A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon$.
Par suite, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\|A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon\| = \mathcal{O}_{\varepsilon \longrightarrow 0}(\varepsilon^a). \tag{3.6}$$

Maintenant on note par $\mathcal{A}$ l'ensemble des paires $((A_\varepsilon)_\varepsilon, (D(A_\varepsilon))_\varepsilon)$, où A_ε un opérateur linéaire fermé de X à domaine dense $D(A_\varepsilon) \subset X$, pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$. On introduit sur $\mathcal{A}$ la relation d'équivalence

$$((A_\varepsilon)_\varepsilon, (D(A_\varepsilon))_\varepsilon) \sim ((\tilde{A}_\varepsilon)_\varepsilon, (D(\tilde{A}_\varepsilon))_\varepsilon).$$

S'il existe $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ tel que $D(A_\varepsilon) = D(\tilde{A}_\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$ ils existent $C > 0$ et $\varepsilon_a \leq \varepsilon_0$ tel que, pour $x \in A(A_\varepsilon)$, $\|(A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon)x\| \leq C\varepsilon^a \|x\|$, $x \in D(A_\varepsilon), \varepsilon \leq \varepsilon_a$.
Puisque A_ε est à domaine dense dans X, $R_\varepsilon := A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon$ peut être étendu à un opérateur dans $\mathcal{L}_c(X)$ satisfaisant $\|(A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon)x\| = \mathcal{O}(\varepsilon^a)$, $\ \varepsilon \to 0$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. un tel opérateur R_ε est appelé un opérateur négligeable.
On note par A l'élément de l'espace quotient $\mathcal{A}/\sim$. D'après la Définition 3.3, les résultats suivants ont un sens.

Définition 3.4. *[52]*

$A \in \mathcal{A}/\sim$ est un générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe généralisé S s'il existe un représentant $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ de A tel que A_ε est un générateur infinitésimal de S_ε, pour ε assez petit.

Proposition 3.5. *[52]*

Soit S un C_0-semi-groupe généralisée dont le générateur infinitésimal est A. Alors il existe $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tel que :

(a) l'application $t \longmapsto S_\varepsilon(t)x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ est continue pour tout $x \in X$ et $\varepsilon < \varepsilon_0$.

(b)

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \int_t^{t+h} S_\varepsilon(s)xds = S_\varepsilon(t)x, \qquad \varepsilon < \varepsilon_0, \quad x \in X.$$

(c)

$$\int_0^t S_\varepsilon(s)xds \quad \in D(A_\varepsilon), \qquad \varepsilon < \varepsilon_0, \quad x \in X.$$

(d) Pour tout $x \in D(A_\varepsilon)$, $t \geq 0$ $S_\varepsilon(t)x \in D(A_\varepsilon)$, et

$$\frac{d}{dt} S_\varepsilon(t)x = A_\varepsilon S_\varepsilon(t)x = S_\varepsilon(t)A_\varepsilon x, \qquad \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{3.7}$$

(e) Soit $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$ des représentants du C_0-semi-groupe généralisé S, dont les générateurs infinitésimaux sont A_ε et $\tilde{A}_\varepsilon$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, respectivement. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$

$$\| \frac{d}{dt} S_\varepsilon(t) - \tilde{A}_\varepsilon S_\varepsilon(t) \| = \mathcal{O}_{\varepsilon \longrightarrow 0}(\varepsilon^a). \tag{3.8}$$

(f) Pour tout $x \in D(A_\varepsilon)$ et tout $t, s \geq 0$,

$$S_\varepsilon(t)x - S_\varepsilon(s)x = \textstyle\int_s^t S_\varepsilon(\tau)A_\varepsilon x d\tau = \int_s^t A_\varepsilon S_\varepsilon(\tau)xd\tau.$$

Théorème 3.1. *[52]*

Soient S et $\tilde{S}$ deux C_0-semi-groupes dont les générateurs infinitésimaux sont A et $\tilde{A}$, respectivement. Si $A = \tilde{A}$ alors $S = \tilde{S}$.

Remarque 3.2. *[7]*

On suppose que les assertions de la Définition 3.2 sont satisfaites. De plus, on suppose une hypothèse plus forte que (3.3), ils existent $M > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tels que

$$\|S_\varepsilon(t)\| \leq M\varepsilon^a e^{\alpha_\varepsilon t}, \quad \varepsilon < \varepsilon_0, \quad t \geq 0, \quad \textit{où} \;\; 0 < \alpha_\varepsilon < \alpha, \;\; \textit{pour certain} \;\; \alpha > 0.$$

On obtient donc une sous-algèbre de $\mathcal{SG}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(X))$. Pour cette sous algèbre le théorème de Hille-Yosida est valable dans le sens usuel.

3.3 Théorèmes fondamentaux

3.3.1 Cas $A \in \tilde{\mathbb{C}}$ (A est un nombre complexe généralisé)

On considère un système linéaire d'équation différentielle ordinaire (3.1) avec $A = [(\lambda_\varepsilon)_\varepsilon] \in \tilde{\mathbb{C}}$ ($\lambda_\varepsilon = \lambda \in \mathbb{C}$) est un nombre complexe généralisé, $u \in \mathcal{G}_{AA}$, et $f = [(f_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_{AA}$, avec une donnée initiale $u_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ est un nombre complexe généralisé.

Définition 3.5.

Une fonction généralisée $u \in \mathcal{G}_{AA}$ est dite solution de (3.1) sur $\mathbb{J} = [0, \infty)$ s'elle satisfaite

$$\Big(u'_\varepsilon(t) - \lambda u_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(t)\Big)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AA}.$$

où $\lambda = \lambda_\varepsilon \ \forall \varepsilon \in I$, et $f = [(f_\varepsilon(t))]$.

Théorème 3.2. *Avec les mêmes notations da la définition précédente, et si $\lambda \in \mathbb{C}$, $f_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction généralisée presque automorphe, alors la solution de (3.1) est donnée par la fonction généralisée presque automorphe*

$$u_1(t) = \Big(-\int_t^{+\infty} e^{\lambda(t-s)} f_\varepsilon(s)ds\Big)_\varepsilon + \mathcal{N}_{AA} \qquad si \quad Re\lambda > 0.$$

$$u_2(t) = \Big(\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} f_\varepsilon(s)ds\Big)_\varepsilon + \mathcal{N}_{AA} \qquad si \quad Re\lambda < 0.$$

La preuve de ce théorème nécessite le lemme suivant

Lemme 3.1. *(Inégalité de Landau-Kolomogorov)*

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On suppose que f est infiniment différentiable, alors

$$\| f^{(k)} \|_{L^\infty(T)} \leq C(n,k,T) \ \| f \|^{1-k/n}_{L^\infty(T)} \| f^{(n)} \|_{L^\infty(T)} .$$

Démonstration. Pour démontrer le Théorème 3.2, On montre d'abord que si $u(t)$ est bien définie comme élément de $\mathcal{G}_{AA}$, alors c'est le cas pour $\frac{d}{dt}u(t)$, En effet : Un représentant $u_j(t), \ \ j = 1, 2$ est donné par

$$u_{j,\varepsilon}(t) = -\int_t^{\infty} e^{\lambda(t-r)} f_\varepsilon(r)dr \quad si \ \ Re\,(\lambda) > 0 \; et \ \ j = 1, 2,$$

on a $(u_{j,\varepsilon})_\varepsilon(t) \in \mathcal{M}_{AA}$, ce qui signifie que

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \forall m > 0,\ \exists c > 0,\ \exists \varepsilon_0 \in I \quad \| u_{j,\varepsilon} \|_{k,\infty} \leq c^{-\varepsilon}\ \ \forall \varepsilon < \varepsilon_0,$$

on a pour $j = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\| u'_{j,\varepsilon} \|_{k,\infty} &= \sum_{j \leq k} \| (u'_{j,\varepsilon})^{(j)} \|_\infty \\
&= \sum_{j \leq k} \| (u'_{j,\varepsilon})^{(j+1)} \|_\infty \\
&= \sum_{l \leq k+1} \| (u'_{j,\varepsilon})^{(l)} \|_\infty \\
&= \sum_{l \leq k+1} \| (u'_{j,\varepsilon})^{(l)} \|_\infty \\
&= \| u_{j,\varepsilon} \|_{k+1,\infty} .
\end{aligned}$$

Puisque k est arbitraire dans la définition de $\mathcal{M}_{AA}$, on obtient $\| u'_{j,\varepsilon} \|_{k,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-m})$ pour un réel $m > 0$, ce qui prouve que $u'_j \quad j = 1, 2$ est un élément de $\mathcal{M}_{AA}$. Il est claire que $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont des solutions de (3.1) dans le sens de la définition précédente. Il reste à prouver que ce sont des fonctions généralisées presqu'automorphes.

Soit $s = t - r$, alors on peut écrire

$$u_{j,\varepsilon}(t) = -\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda s} f_\varepsilon(t - s) ds. \qquad j = 1, 2.$$

Soit $(s_n)_n$ une suite de nombres réels. Puisque pour tout $\varepsilon \in I$ avec I est un ensemble d'indices, f_ε est une fonction presque automorphe , il existe une sous-suite $(s_{n_{k(\varepsilon)}})_k$ de $(s_n)_n$ telle que

$$\lim_{k \to +\infty} f_\varepsilon(t + s_{n_{k(\varepsilon)}}) = g_\varepsilon(t) \quad et \quad \lim_{k \to +\infty} g_\varepsilon(t - s_{n_{k(\varepsilon)}}) = f_\varepsilon(t) \quad sur\ \mathbb{R}.$$

On a $u_{1,\varepsilon}(t) = -\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda s} f(t - s + s_{n_k}) ds$, on montre qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\| e^{\lambda s} f(t - . + s_{n_k}) \|_{k,\infty} \leq c\, e^{Re\,\lambda\, s}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. En effet , on a quel que soit $k \in \mathbb{N}$

$$\| e^{\lambda s} f_\varepsilon(t - s + s_{n_k}) \|_{k,\infty} = \sum_{j \leq k} \| f_\varepsilon^{(j)} \|_\infty .$$

En appliquant l'inégalité classique de Landau-Kolomogorov :
$\| f^{(p)} \|_\infty \leq 2\pi \| f \|_\infty^{1-p/n} \| f^{(n)} \|_\infty^{p/n}$ où $0 < p < n \in \mathbb{N}$, et f est de classe $\mathcal{C}^n$. En particulier

pour $p = j$,et $n = 2j$, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\| e^{\lambda s} f(t-s+s_{n_k}) \|_{k,\infty} &\leq e^{(Re\,\lambda)\,s} \sum_{j\leq k} (2\pi) \| f_\varepsilon \|_\infty^{1-1/2} \| f_\varepsilon^{(2j)} \|_\infty^{1/2} \\
&\leq e^{(Re\lambda)\,s}\, 2\pi (\| f_\varepsilon \|_{0,\infty})^{1/2} \sum_{j\leq k} \| f_\varepsilon^{(2j)} \|_\infty^{1/2} \\
&= \left(2\pi (\| f_\varepsilon \|_{0,\infty})^{1/2} \sum_{j\leq k} \| f_\varepsilon^{(2j)} \|_\infty^{1/2} \right) e^{(Re\lambda)s} \\
&\leq \left(2\pi c^{1/2}\, c_2^{1/2}\, \varepsilon^{-m_1/2} \varepsilon^{m_2/2} \right) e^{(Re\lambda)s}.
\end{aligned}$$

Puisque le terme entre parenthèses dans le membre de droite de l'inégalité précédente est une constante qui ne dépend pas de la variable s, donc le membre de droite est dans $L^1(-\infty, 0)$, de plus $Re\,\lambda > 0$, et du coût, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesque, puisque g_ε est une fonction bornée et mesurable sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} u_{1,\varepsilon}(t+s_{n_k}) = -\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\, s}\, g_\varepsilon(t-s)ds := y_\varepsilon(t) \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

En appliquant le même raisonnement à la fonction $y_\varepsilon(t)$, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} y_\varepsilon(t-s_{n_k}) = -\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\, s}\, g_\varepsilon(t-s)ds := u_{1,\varepsilon}(t) \quad \textit{por tout } t \in \mathbb{R},$$

ce qui montre que $u_1(t) = [(u_{1,\varepsilon}(t))_\varepsilon]$ est une fonction généralisée presque automorphe. □

3.3.2 Cas A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe généralisé

Dans ce paragraphe on aura besoin de la notion du semi-groupe généralisé de Colombeau, défini dans la Définition 3.2, et pour plus d'informations voir [53]. On suppose que $f \in \mathcal{G}_{AA}$ et que A est un générateur infinitésimale d'un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires $T(t) = [(T_\varepsilon(t))_{t\in\mathbb{R}}]$. D'abord on rappel le définition suivante

Définition 3.6. *Une fonction $u(t) = [(u_\varepsilon(t))] \in \mathcal{G}_{AA}$ avec un représentant donné par l'intégrale*

$$u_\varepsilon(t) = T_\varepsilon(t)u(0) + \int_0^t T_\varepsilon(t-s) f_\varepsilon(s)ds \quad \forall\varepsilon \in I. \tag{3.9}$$

sera dite une solution intégrale (maild solution) de l'équation différentielle (3.1).

Théorème 3.3. *Soient $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ un C_0-semi-groupe généralisé de représentant $(T_\varepsilon(t))$ et $f = [(f_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_{AA}(\mathbb{R})$ tels que*

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{X}, \quad T_\varepsilon(t)\, x \in AA(\mathbb{R})$.
2. f_ε *est un élément de* $L^1(\mathbb{J}; X)$.

Alors toute solution intégrale "mild solution" de (3.1) restreint à $\mathbb{J} = [0\,, +\infty)$ *est presque automorphe.*

Démonstration. La solution intégrale est donnée par

$$x_\varepsilon(t) = T_\varepsilon(t)x_{0,\varepsilon} + \int_0^t T_\varepsilon(t-s)f_\varepsilon(s)ds$$

Pour toute suite de nombre réels $(\tau_n^{'})_n$, il existe une sous suite $(\tau_n)_n$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} T_\varepsilon(t+\tau_n)x_{0,\varepsilon} := g(t)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} g(t-\tau_n) = T_\varepsilon(t)x_{0,\varepsilon}$$

Soit maintenant $(\tau_n^{'})_n$ une suite de nombres réels. Puisque $f \in \mathcal{G}_{AA}$, il existe une sous-suite $(\tau_n)_n$ de $(\tau_n^{'})_n$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_\varepsilon\,(t+\tau_n) = \bar{f}_\varepsilon(t).$$

est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et on a

$$\lim_{t\to\infty} \bar{f}_\varepsilon\,(t-\tau_n) = f_\varepsilon(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon\,(t+\tau_n) &= \int_0^{t+\tau_n} T_\varepsilon\,(t+\tau_n-s)\, f_\varepsilon(s)ds \\
&= \int_0^{t+\tau_n} T_\varepsilon\,(t+\tau_n-(r+\tau_n))\, f_\varepsilon\,(r+\tau_n)\, dr \\
&= \int_0^{t} T_\varepsilon(t-r) f_\varepsilon\,(r+\tau_n)\, dr \\
&= \int_0^{t} T_\varepsilon(t-r) f_{\varepsilon,n}(r)dr,
\end{aligned}$$

où $f_{\varepsilon,n}(r) = f_\varepsilon\,(r+\tau_n)\,, n = 0, 1, \cdots$. On a aussi,

$$\| \, x_\varepsilon\,(t+\tau_n) \, \|_{k,\infty} \leq K \, \| \, f_\varepsilon \, \|_{k,\infty} \, C_\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

par la continuité du semi-groupe,

$$\lim_{n\to\infty} T_\varepsilon(t-r) f_{\varepsilon,n}(r) = T_\varepsilon(t-r)\bar{f}_\varepsilon(r), \quad \forall r \in \mathbb{R} \;\; et \;\; r \leq t.$$

Soit
$$\bar{x}_\varepsilon(t) = \int_0^t T_\varepsilon(t-s)\, \bar{f}_\varepsilon(s) ds,$$
on remarque que l'intégrale est absolument convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} x_\varepsilon(t + \tau_{n_k}) = \bar{x}_\varepsilon(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De manière similaire, on peut prouver que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \bar{x}_\varepsilon(t - \tau_{n_k}) = x_\varepsilon(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ceci montre que $x_\varepsilon(t)$ est une fonction presque automorphe. □

Corollaire 3.1. *Dans le théorème précédent, si de plus on suppose que A est un opérateur inversible, alors on aura l'unicité de la solution généralisée presque automorphe.*

Définition 3.7. – *On dit dans le cas classique qu'un C_0-semi-groupe $T(t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est exponentiellement stable s'il existe $M \geq 1$ et $\alpha > 0$ tels que*

$$\| T(t) \| \leq M\, e^{-\alpha t} \ \textit{pour tout}\ t \geq 0. \tag{3.10}$$

– *Un C_0 semi-groupe généralisé $(S(t))$ est dit exponentiellement stable s'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et un représentant $(S_\varepsilon(t))$ de S tel que (3.10) satisfaite pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$.*

Théorème 3.4. *Soient $(T(t))_{\mathbb{R}+}$ un C_0-semi-groupe généralisé exponentiellement stable de générateur infinitésimal A et f une fonction généralisée presque automorphe. Alors (3.1) possède une unique solution généralisée presque automorphe.*

Démonstration. Soit $u_\varepsilon^{'}(t) = A_\varepsilon u_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(t)$ la régularisation de l'équation (3.1) en terme de représentants, dans l'algèbre $\mathcal{M}_{AA}$. On sait que cette équation possède une solution intégrale définie par

$$x_\varepsilon(t) = T_\varepsilon(t-t_0)\, x_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t T_\varepsilon(t-s)\, f_\varepsilon(s) ds, \ \text{ pour tout } \qquad t \geq t_0.$$

On doit montrer qu'elle est bien définie comme élément de l'algèbre $\mathcal{M}_{AA}$, et si on prend un autre représentant $(y_\varepsilon)_\varepsilon$ on montrera que $(x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t))_\varepsilon$ est un élément de $\mathcal{N}_{AA}$.

D'abord on prouve que x_ε est presque automorphe. En effet

Considérons la fonction $u_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} T_\varepsilon(t-s)\, f_\varepsilon(s)ds$. Grâce à la Propriété (3.10), on obtient

$$\begin{aligned}
\| u_\varepsilon(t) \|_{k,\infty} &= \| \int_{-\infty}^{t} T_\varepsilon(t-s) f_\varepsilon(s)ds \|_{k,\infty} \\
&\leq M \| \int_{-\infty}^{t} exp(\alpha(t-s)) f_\varepsilon(s)ds \|_{k,\infty} \\
&\leq M \| f_\varepsilon \|_{k,\infty} C_\alpha,
\end{aligned}$$

avec C_α est une constante positive dépend de α, ce qui prouve que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{t} T_\varepsilon(t-s) f_\varepsilon(s)ds.$$

est absolument convergente, par suite elle est convergente. Et par conséquent $u(t)$ existe et

$$\| u_\varepsilon(t) \|_{k,\infty} \leq M \| f_\varepsilon \|_{k,\infty} C_\alpha \qquad t \geq 0.$$

Soit maintenant $(\tau_n^{'})_n$ une suite de nombres réels. Puisque $f \in \mathcal{G}_{AA}$, il existe une sous-suite $(\tau_n)_n$ de $(\tau_n^{'})_n$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_\varepsilon\left(t+\tau_n\right) = \bar{f}_\varepsilon(t).$$

est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et on a

$$\lim_{t\to\infty} \bar{f}_\varepsilon\left(t-\tau_n\right) = f_\varepsilon(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Considérons

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon\left(t+\tau_n\right) &= \int_{-\infty}^{t+\tau_n} T_\varepsilon\left(t+\tau_n-s\right) f_\varepsilon(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{t+\tau_n} T_\varepsilon\left(t+\tau_n-(r+\tau_n)\right) f_\varepsilon\left(r+\tau_n\right) dr \\
&= \int_{-\infty}^{t} T_\varepsilon(t-r) f_\varepsilon\left(r+\tau_n\right) dr \\
&= \int_{-\infty}^{t} T_\varepsilon(t-r) f_{\varepsilon,n}(r)dr,
\end{aligned}$$

où $f_{\varepsilon,n}(r) = f_\varepsilon\left(r+\tau_n\right), n = 0, 1, \cdots$. On a aussi,

$$\| u_\varepsilon\left(t+\tau_n\right) \|_{k,\infty} \leq K \| f_\varepsilon \|_{k,\infty} C_\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

par la continuité du semi-groupe,

$$\lim_{n\to\infty} T_\varepsilon(t-r) f_{\varepsilon,n}(r) = T_\varepsilon(t-r)\bar{f}_\varepsilon(r), \quad \forall r \in \mathbb{R} \;\; et \;\; r \leq t.$$

Soit

$$\bar{u}_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} T_\varepsilon(t-s)\, u_\varepsilon(s) ds,$$

on remarque que l'intégrale est absolument convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_\varepsilon(t+\tau) = \bar{u}_\varepsilon(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De manière similaire, on peut prouver que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \bar{u}_\varepsilon(t-\tau) = u_\varepsilon(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ceci montre que $u_\varepsilon(t)$ est une fonction presque automorphe.
Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel donné. on a donc

$$u_\varepsilon(a) = \int_{-\infty}^{a} T_\varepsilon(a-s)\, f_\varepsilon(s) ds.$$

Alors pour tout $t \geq a$, en utilisant la propriété de la continuité du semi-groupe,

$$T_\varepsilon(t-a)\, u_\varepsilon(a) = \int_{-\infty}^{a} T_\varepsilon(a-s)\, f_\varepsilon(s) ds,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \int_{a}^{t} T\varepsilon(t-s)\, f_\varepsilon(s) ds &= \int_{-\infty}^{t} T\varepsilon(t-s)\, f_\varepsilon(s) ds - \int_{-\infty}^{a} T\varepsilon(t-s)\, f_\varepsilon(s) ds \\ &= u_\varepsilon(t) - T_\varepsilon(t-a)\, u_\varepsilon(a). \end{aligned}$$

D'où

$$u_\varepsilon(t) = T_\varepsilon(t-a)\, u_\varepsilon(a) + \int_{a}^{t} T_\varepsilon(t-s)\, f_\varepsilon(s) ds.$$

Si on prend $x(a) = u(a)$, on aura $x(t) = u(t)$, alors $(x_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AA}$. Il reste à montrer l'unicité de la solution intégrale généralisée dans $\mathcal{G}_{AA}$. Soient $x = [(x_\varepsilon)_\varepsilon]$ et $y = [(y_\varepsilon)_\varepsilon]$ deux solutions intégrales de l'équation (3.1), et supposons que les deux sont presque automorphes, soit $z = x - y$. Alors $z = [(z_\varepsilon)_\varepsilon] = (x_\varepsilon - y_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}_{AA}$ est bien définit comme élément de $\mathcal{G}_{AA}$, et satisfait

$$u'(t) = A\, u(t).$$

Alors on a $z_\varepsilon(t) = T_\varepsilon(t-s) w_\varepsilon(s)$ avec $w_\varepsilon(s) = x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s)$ $\forall t, s \in \mathbb{R}$ $t \geq s$. On a aussi

$$\| z_\varepsilon(t) \|_{k,\infty} \leq M\, e^{-\alpha(t-s)} \| z_\varepsilon(s) \|_{k,\infty} \qquad \forall t \geq s.$$

Par les propriétés élémentaires de l'exponentiel on trouve.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \parallel z_\varepsilon(n\tau) \parallel_{k,\infty}= 0, \text{ pour tout } \tau > 0.$$

Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe une constante $c > 0$ telle que $\parallel z_\varepsilon(t) \parallel\leq c\,\varepsilon^q$ quand $\varepsilon \to 0$, donc $(z_\varepsilon)_\varepsilon$, est un élément négligeable, puisque $t \longmapsto T_\varepsilon(t)x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ est presque automorphe, donc on a l'alternative suivante

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \parallel x(t) \parallel > 0, \;\; ou \;\; x(t) = 0, \; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par suite $x = y$ dans $\mathcal{G}_{AA}$. □

3.4 Exemples

3.4.1 Exemple 1

On considère l'équation suivante

$$A\frac{d}{dt}u(t) + Bu(t) = g(t), t \in \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C}), B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C}),\; g(t) = [(g_\varepsilon(t))_\varepsilon] \in \Big(\mathcal{G}_{AA}\Big)^2$ et $g_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} g_{1,\varepsilon}(t) \\ g_{2,\varepsilon}(t) \end{pmatrix}$ où $g_{1,\varepsilon}(t) = cos(t) + cos(\sqrt{2}t) + 2$
$g_{2,\varepsilon}(t) = e^{it} + e^{i\sqrt{2}t} + 2$. Remarquez que $g_{1,\varepsilon}(t)$ est la partie réelle de $g_{2,\varepsilon}(t)$.
$g_{i,\varepsilon}(t)$ est un élément bien défini de $\mathcal{M}_{AA}$. on peut montrer que $g_{i,\varepsilon}(t)$ $i = 1, 2$ ont une borne modérée d'ordre ε^{-m} avec un entier non négatif, puisque toutes leurs dérivées d'ordre entier sont bornées, ceci prouve que $g(t)$ est une fonction généralisée presque automorphe. Trouvons $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$. Maintenant, nous avons $C = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C})$.
Posons $Bu(t) = v(t)$. Ainsi, le système devient :

$$Cv'(t) + v(t) = g(t) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,\varepsilon}(t) \\ g_{2,\varepsilon}(t) \end{pmatrix}$$

En appliquant la décomposition de l'espace, le noyau est

$$\mathrm{X}_1 = N(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Soit $V_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il est facile de voir que $X_2 = R(C) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Clairement, $W = \{V_0, V_1\}$ est une base orthogonale pour $\mathbb{C}^2$. La matrice associée à W est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si nous exprimons C dans la nouvelle base $W = \{V_0, V_1\}$, nous obtenons :

$$C' = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En calculons $p_{N(C)}(t)$ et $p_{R(C)}(g)$, les projections spectrales de g sur N et R respectivement, on trouve $p_1(t)$ et $p_2(t)$ tels qu'on obtient un équivalence du système (3.11) sous la forme

$$\begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,\varepsilon}(t) \\ v_{2,\varepsilon}(t) \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} v_{1,\varepsilon}(t) \\ v_{2,\varepsilon}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,\varepsilon}(t) \\ p_{2,\varepsilon}(t) \end{pmatrix}$$

peut s'exprimer par le formulaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda v'_{1,\varepsilon}(t) + v_{1,\varepsilon}(t) = p_{1,\varepsilon}(t) \\ \qquad\qquad v_{2,\varepsilon}(t) = p_{2,\varepsilon}(t). \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} \lambda v_{1,\varepsilon}(t) = e^{-5/2(t-\sigma)} v_{1,\varepsilon}(\sigma) + 5/2 \int_\sigma^t e^{-5/2(t-\tau)} p_{1\varepsilon}(\tau) d\tau \\ v_{2,\varepsilon}(t) = p_{2,\varepsilon}(t). \end{cases}$$

3.4.2 Exemple 2

On considère l'équation différentielle

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda t\right) u(t) = 0, \tag{3.12}$$

où $u(t) = [(u_\varepsilon(t))_\varepsilon] \in \mathcal{G}(\mathcal{R}))$, et $\lambda = [(2/\varepsilon)_\varepsilon] \in \tilde{\mathbb{C}}$ est un nombre réel complexe. Il est bien connu que les fonctions gaussiennes

$$g_{\varepsilon,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-t^2/\varepsilon}, \quad t \in \mathbb{R}, \ \ et \ \ \varepsilon \in (0, 1).$$

Et soit φ_ε la fonction de test définie par

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où φ est une fonction lisse avec un support compact. La fonction $g_\varepsilon(t) * \varphi_\varepsilon(t)$ satisfaire l'équation analogue

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda t\right) u_\varepsilon(x) = 0,$$

sur la droite réelle $\mathbb{R}$. Par conséquent, en cherchant une solution de l'équation (3.12), considérons les fonctions

$$u_{\varepsilon,s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{\varepsilon,s}(t + 2\pi k)$$

qui sont paramétrés par ε, auxquels on applique l'opérateur $\frac{d}{dt} + \frac{2}{\varepsilon}t$ et on obtient

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon,s}(t) &= \left(\frac{d}{dt} + \frac{2}{\varepsilon}t\right) u_{\varepsilon,s}(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} + \frac{2}{\varepsilon}t\right) g_{\varepsilon,s}(t+2\pi k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{2}{\varepsilon}t - \frac{4}{\varepsilon}\pi k + \frac{2}{\varepsilon}t\right) e^{-(t+2\pi k)^2/\varepsilon} \\ &= -\frac{4\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k e^{-(t+2\pi k)^2/e}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $U_{\varepsilon;s}(t)$ est majorée par l'estimation

$$|U_{\varepsilon,s}(t)| \leq \frac{4\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{s}} \left(\left| \sum_{k=-\infty}^{-1} k e^{-(t+2\pi k)^2/\varepsilon} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left| k e^{-(t+2\pi k)^2/\varepsilon} \right| \right),$$

et sur l'intervalle $t \in [-\pi, \pi]$

$$|U_{\varepsilon,s}(t)| \leq \frac{8\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\pi^2(2k-1)^2/\varepsilon} = \frac{8\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} e^{-\pi^2/\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(e^{-\pi^2/s}\right)^{4k(k-1)}$$

où les premiers termes de la somme finale sont donnés explicitement entre crochets de la relation

$$|U_{\varepsilon,s}(t)| \leq \frac{8\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} e^{-\pi^2/\varepsilon} \left[1 + 2\left(e^{-\pi^2/\varepsilon}\right)^8 + 3\left(e^{-\pi^2/\varepsilon}\right)^{24} + \ldots\ldots\right] = \mathcal{O}(\varepsilon^{-C}), \text{comme } \varepsilon \to 0 \text{ avec } C > 0$$

ce qui implique que $(U_{\varepsilon,s}(t))_\varepsilon$ est un élément de l'espace modéré $\mathcal{N}_{AA}$. Et donc $u(t)$ est une fonction généralisée presque automorphe, $u(t) \in \mathcal{G}_{AA}$.

3.5 Fonctions généralisées asymptotiquement presque automorphes

Nous introduisons l'algèbre des fonctions généralisées asymptotiquement presque automorphes comme dans le cas de $\mathcal{G}_{AA}$ où nous remplaçons l'algèbre des fonctions modérées $\mathcal{M}_{AA}$, et l'algèbre de fonctions négligeables $\mathcal{N}_{AA}$ par $\mathcal{M}_{AAA}$ et $\mathcal{N}_{AA}$, respectivement.

Définition 3.8. *On définit l'espace des fonctions modérées par*

$$\mathcal{M}_{AAA} = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{B}_{AAA})^I : \forall k \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \| \, u_\varepsilon \, \|_{k,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-m}), \varepsilon \to 0 \right\},$$

où $\mathcal{B}_{AAA}$ est l'algèbre des fonctions asymptotiquement presque automorphe indéfiniment dérivables, et l'espace des fonctions négligeables correspondant par

$$\mathcal{N}_{AAA} = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{B}_{AAA})^I : \forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \| \, u_\varepsilon \, \|_{k,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m}), \varepsilon \to 0 \right\}$$

Proposition 3.6. *$\mathcal{N}_{AAA}$ est un idéale de $\mathcal{M}_{AAA}$.*

Preuve 3.2. *soient $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$, $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AAA}$. D'après la Définition (3.8), on a les deux estimations*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall m' \in \mathbb{N}, \ \exists c' > 0, \ \exists \varepsilon_1' \in I, \ \forall \varepsilon < \varepsilon_1', \ \| \, u\varepsilon \, \|_{k,\infty} < c' \varepsilon^{m'}.$$

Puisque la famille de norme $\| \, . \, \|_{k,\infty}$ est compatible avec la structure algébrique de l'espace $\mathcal{B}$,donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists c_k > 0$ tel que

$$\| \, u_\varepsilon v_\varepsilon \, \|_{k,\infty} \leq c_k \, \| \, u_\varepsilon \, \|_{k,\infty} \, \| \, v_\varepsilon \, \|_{k,\infty} < c_k \, c \, c' \varepsilon^{-m} \, \varepsilon^{m'}.$$

On prend $m' \in \mathbb{N}$ tel que $m' = -m + m' \in \mathbb{N}$, on obtient donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exists \, C = c_k \, c \, c' > 0$, $\exists \, \varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_1') \in I$, $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$, $\| \, u_\varepsilon \, v_\varepsilon \, \| < C \, \varepsilon^{m_0}$, ce qui montre que $\mathcal{N}_{AAA}$ est un idéale de $\mathcal{M}_{AAA}$.

L'algèbre des fonctions généralisées asymptotiquement presque automorphes est défini comme l'algèbre quotient

$$\mathcal{G}_{AAA} = \mathcal{M}_{AAA} / \mathcal{N}_{AAA},$$

pour plus de détail pour cette algèbre le lecteur peut voir [10].

Pour $\omega \in \mathbb{R}$, le translaté d'une fonction généralisé asymptotiquement presque automorphe $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_{AAA}$ est notée et définie par

$$\tau_\omega u = [(\tau_\omega u_\varepsilon)_\varepsilon].$$

On rappelle les définitions de quelques algèbres des fonctions généralisées. L'algèbre de fonctions-L^p généralisées , $1 \leq p \leq +\infty$, voir [6], est définie comme l'algèbre quotient

$$\mathcal{G}_{L^p} = \mathcal{M}_{L^p} / \mathcal{N}_{L^p},$$

avec

$$\mathcal{M}_{L^p} = \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{D}_{L^p})^I : \forall k \in \mathbb{Z}_+, \exists m > 0, \| u_\varepsilon \|_{k,p} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-m}),\ \varepsilon \to 0\},$$

et

$$\mathcal{N}_{L^p} = \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{D}_{L^p})^I : \forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall m > 0, \| u_\varepsilon \|_{k,p} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m}),\ \varepsilon \to 0\}.$$

Remarque 3.3.

Soit $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_{L^\infty}$ et $v = [(v_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_{AA}$ le produit $u \times v$ est défini par

$$u \times v = [((u_\varepsilon] v_\varepsilon)_\varepsilon),$$

et si $v \in \mathcal{G}_{L^1}$ la convolution $u * v$ est définie par

$$u * v = [(u_\varepsilon * v_\varepsilon)_\varepsilon].$$

On rappel les propriétés de stabilité de l'algèbre $\mathcal{G}_{AAA}$ dans la

Proposition 3.7.

1. $\mathcal{G}_{AAA}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}_{L^\infty}$ stable par dérivation.

2. $\tau_\omega \mathcal{G}_{AAA} \subset \mathcal{G}_{AAA},\ \forall \omega \in \mathbb{R}$.

3. $\mathcal{G}_{AAA} \times \mathcal{G}_{AA} \subset \mathcal{G}_{AAA}$.

4. $\mathcal{G}_{AAA} * \mathcal{G}_{L^1} \subset \mathcal{G}_{AAA}$.

Démonstration. 1. On montre la stabilité sous dérivation. Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$, satisfait

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+,\ \exists m \in \mathbb{Z}_+,\ \exists c > 0,\ \exists \varepsilon_1(0,1),\ \forall \varepsilon < \varepsilon_1,\ \| u_\varepsilon \|_{k,\infty} < c\varepsilon^{-m}, \tag{3.13}$$

et comme $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}^I_{AA}$, donc$(u_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{D}_{L^\infty})^I$. Si $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AAA}$, on obtient le même résultat que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{L^\infty}$.

2. Découle de la stabilité de $\mathcal{B}_{AAA}$ par translation. d'écrire un élément de $\mathcal{G}_{AAA}$ et de montrer la propriété pour un représentant.

3. Soient $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_{AAA}$ et $v = [(v_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_{AAA}$, donc $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$ et $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AA}$ alors $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ satisfont l'estimation (3.13). Au vu d'un résultat dans le cas classique nous avoir $\forall \varepsilon \in I$, $u_\varepsilon v_\varepsilon \in \mathcal{B}_{AAA}$. Pour tout $j \in \mathbb{Z}_+$.

$$\| (u_\varepsilon u_\varepsilon)^{(j)} \| \leq 2^j \| u_\varepsilon \|_{j,\infty} \| v_\varepsilon \|_{j,\infty} \leq 2^j \, c_1 \, c_2 \varepsilon^{-m_1} \varepsilon^{-m_1},$$

par conséquent, pour tout entier positif k, il existe $m = m_1 + m_2 \in \mathbb{N}$, $\| u_\varepsilon v_\varepsilon \|_{k,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-m})$, $\varepsilon \to 0$, donc $(u_\varepsilon u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$. Le produit $u \times v$ est indépendant des représentants $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(v_\varepsilon)_\varepsilon$. En effet, supposons que $(u'_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$ et $(v'_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AA}$ soient d'autres représentants de u et v respectivement, alors pour $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\| \left(u_\varepsilon v_\varepsilon - u'_\varepsilon v'_\varepsilon \right)^{(j)} \|_\infty &= \| \left(u_\varepsilon v_\varepsilon - u'_\varepsilon v_\varepsilon + u'_\varepsilon v_\varepsilon - u'_\varepsilon v_\varepsilon \right)^{(j)} \|_\infty \\
&\leq \| \left((u_\varepsilon - u'_\varepsilon) v_\varepsilon \right)^{(j)} \|_\infty + \| \left(u'_\varepsilon (v_\varepsilon - v'_\varepsilon) \right)^{(j)} \|_\infty \\
&\leq 2^j \Big(\| u_\varepsilon - u'_\varepsilon \|_{j,\infty} \| v_\varepsilon \|_{j,\infty} + u'_\varepsilon \|_{j,\infty} \|_\infty v_\varepsilon - v'_\varepsilon \|_{j,\infty} \Big)
\end{aligned}$$

puisque $(u_\varepsilon - u'_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AAA}$ et $(v_\varepsilon - v'_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AA}$, alors $\forall m \in \mathbb{N}$, $\| u_\varepsilon u_\varepsilon - u'_\varepsilon v'_\varepsilon \|_{k,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^m)$, quand $\varepsilon \to 0$, ce qui donne que $(u_\varepsilon v_\varepsilon - u'_\varepsilon v'_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AAA}$.

4. En utilisant l'estimation (3.13) et l'inégalité de Yong on déduit le résultat. □

Nous présentons les différentes conditions pour introduire des solutions integrales presque automorphes dans le cadre de l'algèbre de Colombeau.

3.6 Extension des opérateurs de Nemytskii

Nous avons également souhaité pousser plus loin l'étude des opérateurs de Nemytskii. Ces opérateurs sont en effet les bons outils pour travailler dans des cadre fonctionnel adéquat. Une étude assez complète a été faite dans un cadre régulier et est présenté dans cette section, et nous verrons également apparaître, souvent de manière décisive, ces opérateurs dans le cadre des fonctions généralisées asymptotiquement presque automorphe.

Définition 3.9. *Soient $\mathbb{X}$ un espace de Banach, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ deux fonctions. L'opérateur de superposition de Nemytskii $\mathcal{H}_u : \mathbb{X}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{X}^{\mathbb{R}}$ généré par u est défini par*

$$\mathcal{H}_u(\varphi)(t) = u(t, \varphi(t)).$$

Théorème 3.5. *(généralisation de l'opérateur de Nemytskii) Soient $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_{AA}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ et $\varphi \in \mathcal{G}_{AA}(\mathbb{R})$, tels que $u_\varepsilon(t, .)$ est uniformément continue sur chaque ensemble borné $K \subset \mathbb{X}$ uniformément pour $t \in \mathbb{R}$. Alors $[\mathcal{H}_{u,\varepsilon}(\varphi_\varepsilon)(t)]$ est bien défini dans $\mathcal{G}_{AA}$.*

Démonstration. Soient u et φ deux fonctions généralisées telles que décrites dans l'énoncé du théorème, montrons que $u(., \varphi(.))$ est un élément bien défini de $\mathcal{G}_{AA}(\mathbb{X})$. Si on considère $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ deux représentants de u et φ respectivement dans $\mathcal{G}_{AA}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ et $\mathcal{G}_{AA}(\mathbb{X})$, alors nous devons prouver que $(u_\varepsilon(t, \varphi_\varepsilon(t)))_\varepsilon$ est un élément de $\mathcal{M}_{AA}(\mathbb{X})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists m_1 \in \mathbb{N}, \exists c_1 > 0, \exists \varepsilon_1 \in I, \forall \varepsilon < \varepsilon_1, \| u_\varepsilon \|_{k,\infty} < c_1 \, \varepsilon^{-m_1},$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists m_2 \in \mathbb{N}, \exists c_2 > 0, \exists \varepsilon_2 \in I, \forall \varepsilon < \varepsilon_2, \|\varphi_\varepsilon\|_{k,\infty} < c_2 \, \varepsilon^{-m_2}.$$

On peut écrire

$$\| u_\varepsilon(., \varphi_\varepsilon(.)) \|_{k,\infty} = \sum_{j<k} \|\partial_t^j u_\varepsilon(t, \varphi_\varepsilon(t))\|_\infty = \sum_{j<k} \|\partial_t^j u_\varepsilon\|_\infty = \| u_\varepsilon \|_{k,\infty} < c_1 \, \varepsilon^{-m},$$

ceci implique que $(\mathcal{H}_{u,\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AA}(\mathbb{X})$. Si nous considérons deux représentants $(u_{1,\varepsilon}(t, \varphi_{1,\varepsilon}(t)))_\varepsilon$, $(u_{2,\varepsilon}(t, \varphi_{2,\varepsilon}(t)))_\varepsilon$, on montre de même que la différence est bien un élément de $\mathcal{N}_{AA}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$
Soit $(s_n)_n$ une suite de nombres réels. Alors il existe une sous-suite $(s_{n_k})_k$ de $(s_n)_n$ tel que
(i) $\lim_{k\to\infty} u_\varepsilon\,(t + s_{n_k}, x) = g(t, x)$, $\lim_{k\to\infty} g\,(t - s_{n_k}, x) = u_\varepsilon(t, x)$,$\forall \varepsilon \in I$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $x \in$ X,
(ii) $\lim_{k\to\infty} \varphi_\varepsilon\,(t + s_{n_k}) = h(t)$ $\lim_{k\to\infty} h\,(t + s_{n_k}) = \varphi_\varepsilon(t)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$, pur tout $\varepsilon \in I$
Définissons $G = [(G_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_{AA}$ par $G(t) = g(t, h(t))$. On obtient

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{H}_{u,\varepsilon}\,(t + s_{n_k}) = G_\varepsilon(t),$$

$$\lim_{k\to\infty} G_\varepsilon\,(t - s_{n_k}) = \mathcal{H}_{u,\varepsilon}(t),$$

En effet : Considérons l'inégalité

$$\begin{aligned}\|N_\varepsilon(t+s_{n_k}) - G_\varepsilon(t)\| \leq & \|u_\varepsilon(t+s_{n_k}, \varphi_\varepsilon(t+s_{n_k})) - u_\varepsilon(t+s_{n_k}, h(t))\| \\ & + \|u_\varepsilon(t+s_{n_k}, h(t)) - g(t, h(t))\|.\end{aligned}$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{G}_{AA}$, alors φ_ε et h sont bornées. On choisit $K \subset X$ tel que $\varphi_\varepsilon(t), h(t) \in K$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après (ii) et continuité uniforme de $u_\varepsilon(t,x)$ en $x \in K$, on obtient

$$\lim_{k\to\infty} \|u_\varepsilon(t+s_{n_k}, \varphi_\varepsilon(t+s_{n_k})) - u_\varepsilon(t+s_{n_k}, h(t))\| = 0.$$

Par la première hypothèse (i), on obtient

$$\lim_{k\to\infty} \|u_\varepsilon(t+s_{n_k}, h(t)) - g(t, h(t))\| = 0,$$

ce qui prouve que pour chaque $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{H}_{u,\varepsilon}(t+s_{n_k}) = G_\varepsilon(t).$$

De la même façon, on peut prouver que

$$\lim_{k\to\infty} G_\varepsilon(t-s_{n_k}) = \mathcal{H}_{u,\varepsilon}(t),$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Ce qui termine la démonstration du théorème. □

Chapitre 4

Quelques propriétés des fonctions généralisées asymptotiquement presque automorphe

4.1 Fonctions généralisées asymptotiquement presque automorphe

Nous introduisons l'algèbre des fonctions généralisées asymptotiques presque automorphes comme dans le cas de $\mathcal{G}_{AA}$ où nous remplaçons l'algèbre des fonctions modérées $\mathcal{M}_{AA}$, et l'algèbre des fonctions négligeables $\mathcal{N}_{AA}$ par $\mathcal{M}_{AAA}$ et $\mathcal{N}_{AAA}$, respectivement.

Pour plus de détails sur cette algèbre, le lecteur pourra voir [10].

Notation : On note par $\mathcal{B}'$ l'espace des distributions bornées.

Définition 4.1. – *Le translaté $\tau_\omega T$ d'une distribution bornée T est définie par*

$$< \tau_\omega T, \varphi >=< T, \tau_{-\omega}\varphi >$$

– *Une distribution est dite nulle à l'infini si*

$$\lim_{\omega \to +\infty} < \tau_\omega T, \varphi >= 0 \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

– *L'espace des distributions bornées s'annulent à l'infini est noté par $\mathcal{B}'_{0,+}$.*

– *L'espace des distributions asymptotiquement presque automorphes est noté par $\mathcal{B}'_{AAA}$, et on a le résultat suivant*

Proposition 4.1. *L'application*

$$i_A : \mathcal{B}'_{AAA} \longrightarrow \mathcal{G}_{AAA} \qquad \text{qui associe à chaque } T \in \mathcal{B}'_{AAA},\ \left(T * \rho_\varepsilon\right)_\varepsilon + \mathcal{N}_{AAA}$$

est une injection linéaire commute avec les dérivées.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{B}'_{AAA}$, par la caractérisation d'une distribution asymptotiquement presque automorphe, il existe une suite $(f_j)_{j\leq m}$ de fonctions continues et asymptotiquement presque automorphes, telle que $T = \Sigma_{j\leq m} f_j^{(\alpha)}$. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, écrivons

$$\begin{aligned}\left|\Big(T * \rho_\varepsilon\Big)^{(\alpha)}(x)\right| &\leq \Sigma_{j\leq m}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha+j}}\int_{\mathbb{R}}\left|f_j(x-\varepsilon y)\rho^{(\alpha+j)}(y)dy\right.\\ &\leq \Sigma_{j\leq m}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha+j}} \parallel f_j \parallel_\infty \int_{\mathbb{R}}\left|\rho^{(\alpha+j)}(y)dy\right.\end{aligned}$$

Par conséquent il existe une constante $C_{m,\alpha}$ telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\Big(T * \rho_\varepsilon\Big)^{(\alpha)}(x)\right| \leq \frac{C_{m,\alpha}}{\varepsilon^{\alpha+j}}.$$

Ainsi

$$\parallel T * \rho_\varepsilon \parallel_{k,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-m'}),\ \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

ce qui montre que $\Big(T * \rho_\varepsilon\Big)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$. La linéarité de i_A résulte du fait que la la convolution est linéaire. Si $\Big(T * \rho_\varepsilon\Big)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AAA}$, et $\psi \in \mathcal{D}_{L^1}$.

$$< T, \psi >= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \Big(T * \rho_\varepsilon\Big)(x)\psi(x)dx$$

Par la caractérisation des éléments de $\mathcal{N}_{AAA}$, $\forall m' \in \mathbb{Z}_+$, $\exists \varepsilon' > 0$, $\forall \varepsilon < \varepsilon'$ tels que

$$\left|\int \Big(T * \rho_\varepsilon\Big)(x)\psi(x)dx\right| < c'\,\varepsilon'.$$

par conséquent lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient $< T, \psi >= 0$, $\forall \psi \in \mathcal{D}_{L^1}$, donc i_A est injectif. Pour terminer,

$$\begin{aligned} i_A\Big(T^{(\alpha)}\Big) &= \Big(T^{(\alpha)} * \rho\Big)_\varepsilon + \mathcal{N}_{AAA}\\ &= \Big(T * \rho\Big)_\varepsilon^{(\alpha)} + \mathcal{N}_{AAA} = \Big(i_A(T)\Big)^\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

□

Définissons maintenant l'injection canonique

$$\sigma_A : \mathcal{B}_{AAA} \longrightarrow \mathcal{G}_{AAA} \qquad \text{qui associe à chaque } f \in \mathcal{B}_{AAA},\ [(f)_\varepsilon] = (f)_\varepsilon + \mathcal{N}_{AAA}$$

Choisissons $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\int \rho(x)dx = 1, \text{et} \int x^k\rho(x)dx = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Proposition 4.2. *Le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{AAA} & \longrightarrow & \mathcal{B}'_{AAA} \\ \sigma_A \searrow & \downarrow & i_A \\ & \mathcal{G}_{AAA} & \end{array}$$

est commutatif

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{B}_{AAA}$, on montre que $(f * \rho_\varepsilon - f)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AAA}$. On prend ρ_ε comme celles données dans la preuve de la Proposition 4.1, par la formule de Taylor, pour $\theta \in]0,1[$ et $m \in \mathbb{N}$, on obtient $\left(f^{(\alpha)} * \rho_\varepsilon - f^{(\alpha)}\right)(x)$ égale à

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-\varepsilon y)^k}{k!} f^{(k+\alpha)}(x)\rho(y)dy + \int_{\mathbb{R}} \frac{(-\varepsilon y)^m}{m!} f^{(m+\alpha)}(x-\theta\varepsilon y)\rho(y)dy$$

Donc on aura

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \left(f^{(\alpha)} * \rho_\varepsilon - f^{(\alpha)}\right)(x) \right| &\leq \varepsilon^m \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{(-y)^m}{m!} \right| \left| f^{(m+\alpha)}(x-\theta\varepsilon y) \right| |\rho(y)| dy \\ &\leq \frac{\varepsilon^m}{m!} \left\| f^{(m+\alpha)} \right\|_\infty \|y^m \rho\|_1 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\| f * \rho_\varepsilon - f \|_{k,\infty} \leq \frac{\varepsilon^m}{m!} \| f \|_{m+k,\infty} \|y^m \rho\|_1 ,$$

ce qui signifie que $(f * \rho_\varepsilon - f)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{\mathrm{AAA}}$. □

Notons que la composée d'une fonction généralisée quelconque avec une fonction généralisée presque automorphe n'est pas nécessairement presque automorphe, c'est pour cette raison qu'on compose avec des fonctions généralisées tempérées introduite dans le premier chapitre. L'algèbre des fonctions généralisées tempérées sur $\mathbb{C}$ est noté par $\mathcal{G}_\tau(\mathbb{C})$, pour plus de détails voir [39].

Proposition 4.3.

Soit $\widetilde{u} \in \mathcal{G}_{\mathrm{AAA}}$ et $\widetilde{F} \in \mathcal{G}_\tau(\mathbb{C})$, alors $\widetilde{F} \circ \widetilde{u} := [(f_\varepsilon \circ u_\varepsilon)_\varepsilon]$ est un élément bien définie de l'algèbre $\mathcal{G}_{AAA}$

Démonstration. Soient $\widetilde{u} = u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_{AAA}$ et $\widetilde{F} = F = [(f_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_\tau(\mathbb{C})$, si $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$ et $(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_\tau(\Omega)$, par la formule classique de Faa di Bruno on obtient $\forall j \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{(f_\varepsilon \circ u_\varepsilon)^{(j)}(x)}{j!} = \sum_{l_1+2l_2+\ldots+jl_j=j} \frac{f_\varepsilon(r)(u_\varepsilon(x))}{l_1!l_2!\ldots l_j!} \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{u_\varepsilon^{(i)(x)}}{i!}\right)^{l_i}$$

On a pour tout $\varepsilon \in I$, pour tout $j \in \mathbb{Z}_+$, $u_\varepsilon^{(j)} \in AAA(\mathbb{R})$ et $f_\varepsilon \in \mathcal{E}$, on déduit que, $f_\varepsilon(r)(u_\varepsilon) \in AAA(\mathbb{R})$ et puisque $AAA(\mathbb{R})$ est une algèbre, alors $\forall \varepsilon \in I$, $f_\varepsilon \circ u_\varepsilon \in \mathcal{B}_{AAA}$. comme $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$, donc satisfait l'estimation

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+, \exists n_k \in \mathbb{Z}_+, \exists c_k > 0, \exists \varepsilon_k \in I, \forall \varepsilon < \varepsilon_k,\ \| u_\varepsilon \|_{k,\infty} < c_k\ \varepsilon^{-n_k}.$$

Et comme $(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_\tau^s$ alors

$$\forall j \in \mathbb{Z}_+, \exists N_j \in \mathbb{Z}_+, \exists C_j > 0, \exists \varepsilon_j^{'} \in I, \forall \varepsilon < \varepsilon_j^{'}, \| f_\varepsilon^{(j)}(u_\varepsilon) \|_\infty < C_j \varepsilon^{-N_j}(1+ \| u_\varepsilon \|_\infty)^{-N_j}$$

Par conséquent on obtient

$$\frac{\| (f_\varepsilon \circ u_\varepsilon)^{(j)} \|_\infty}{j!} \leq \sum_{l_1+2l_2+...+jl_j=j} \frac{C_r \varepsilon^{-N_r}(1+\|u_\varepsilon\|_\infty)^{-N_r}}{l_1!l_2!...l_j!} \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{\| u_\varepsilon^{(i)(x)} \|_\infty}{i!} \right)^{l_i}$$

Il existe donc $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{\| (f_\varepsilon \circ u_\varepsilon)^{(j)} \|_\infty}{j!} &\leq \sum_{l_1+2l_2+...+jl_j=j} \frac{c\varepsilon^{-N_r(1+n_0)}}{l_1!l_2!...l_j!} \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{c_i \varepsilon^{-n_i}}{i!} \right)^{l_i} \\ &\leq \sum_{l_1+2l_2+...+jl_j=j} \frac{c\varepsilon^{-(N_r(1+n_0)+\sum_{i=1}^{j} n_i\ l_j)}}{l_1!l_2!...l_j!} \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{c_i \varepsilon^{-n_i}}{i!} \right)^{l_i} \\ &\leq C^{'}\ \varepsilon^{-m}, \end{aligned}$$

avec

$$m = \max\left\{-(N_r(1+n_0) + \sum_{i=1}^{j} n_i\ l_j)\right\},\ et\ C^{'} = \sum_{l_1+2l_2+...+jl_j=j} \frac{c}{l_1!l_2!...l_j!} \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{c_i}{i!} \right)^{l_i}.$$

Par conséquent si on pose $C = C^{'} \sum_{j \leq k} j!$, on a

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}_+, \exists\, m \in \mathbb{Z}_+, \exists\, C > 0, \exists\, \varepsilon_0 = \inf_{1\leq i \leq\ j \leq k} (\varepsilon, \varepsilon_j^{'}), \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0,\ \| f_\varepsilon \circ u_\varepsilon \|_{k,\infty} < C\ \varepsilon^{-m}.$$

Ce qui signifie que $(f_\varepsilon \circ u_\varepsilon)_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$. Cette définition ne dépend pas des représentants. En effet, supposons que $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$ et $(g_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_\tau^s(\Omega)$ soient d'autres représentants de u et F respectivement. Soit $(n_\varepsilon)_\varepsilon = ((v_\varepsilon)_\varepsilon - (u_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AAA}$ et $(m_\varepsilon)_\varepsilon = ((f_\varepsilon)_\varepsilon - (g_\varepsilon)_\varepsilon) \in \mathcal{N}$. Pour montrer que $(f_\varepsilon \circ u_\varepsilon - g_\varepsilon \circ v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AAA}$, par la caractérisation d'ordre zéro de l'idéal $\mathcal{N}_{AAA}$, il suffit de montrer que $(f_\varepsilon \circ u_\varepsilon - g_\varepsilon \circ v_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifie l'estimation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists m_1 \in \mathbb{N}, \exists c_1 > 0, \exists \varepsilon_1 \in I, \forall \varepsilon < \varepsilon_1, |u_\varepsilon|_{k,\infty} < c_1\ \varepsilon^{-m_1},$$

puisque $(f_\varepsilon \circ u_\varepsilon - g_\varepsilon \circ v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
\| f_\varepsilon \circ u_\varepsilon - g_\varepsilon \circ v_\varepsilon \|_{k,\infty} &= \| f_\varepsilon \circ u_\varepsilon - f_\varepsilon \circ v_\varepsilon + f_\varepsilon \circ v_\varepsilon - g_\varepsilon \circ v_\varepsilon \|_\infty, \\
&\leq \| f_\varepsilon \circ u_\varepsilon - f_\varepsilon \circ v_\varepsilon \|_\infty + \| f_\varepsilon \circ v_\varepsilon - g_\varepsilon \circ v_\varepsilon \|_\infty, \\
&= \| f_\varepsilon(u_\varepsilon) - f_\varepsilon(u_\varepsilon + n_\varepsilon) \|_\infty + \| m_\varepsilon(v_\varepsilon) \|_\infty, \\
&\leq \| n_\varepsilon \|_\infty f^{'}(u_\varepsilon) \|_\infty + \| m_\varepsilon(v_\varepsilon) \|_\infty .
\end{aligned}$$

Il est clair que $\forall k \in \mathbb{Z}_+, \| n_\varepsilon \|_\infty \| f^{'}_\varepsilon(u_\varepsilon) \|_\infty = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^k)$, et nous avons aussi $\forall l \in \mathbb{Z}_+, \| m_\varepsilon(v_\varepsilon) \|_\infty = \mathcal{O}(\varepsilon^l),_\varepsilon \to 0$. Par conséquent $\forall q \in \mathbb{Z}_+, \| f_\varepsilon \circ u_\varepsilon - g_\varepsilon \circ v_\varepsilon \|_\infty = \mathcal{O}(\varepsilon^q),_\varepsilon \to 0$, ce qui donne que $(f_\varepsilon \circ u_\varepsilon - g_\varepsilon \circ v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AAA}$.

$\square$

Dans la suite on montre qu'une fonction généralisée asymptotiquement presque automorphe est uniquement décomposé. L'algèbre des fonctions généralisées bornées s'annulant à l'infini, introduit dans [11], est défini par

$$\mathcal{G}_{+,0} = \mathcal{M}_{+,0}/\mathcal{N}_{+,0},$$

avec

$$\mathcal{M}_{+,0} := \{(u_\varepsilon) \in (\mathcal{B}_{+,0})^I : \forall k \in \mathbb{Z}_+, \exists m \in \mathbb{Z}_+, \| u_\varepsilon \|_{k,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-m}), \varepsilon \to 0\},$$

et

$$\mathcal{N}_{+,0} := \{(u_\varepsilon) \in (\mathcal{B}_{+,0})^I : \forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall m \in \mathbb{Z}_+, \| u_\varepsilon \|_{k,\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m}), \varepsilon \to 0\}.$$

Théorème 4.1. *Soit $u \in \mathcal{G}_{AAA}$, alors il existe $v \in \mathcal{G}_{AA}$ et $w \in \mathcal{G}_{+,0}$ tels que $u = v + w$ sur $\mathbb{J} = [0, +\infty)$.*

Démonstration. Soit $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{G}_{AAA}$, donc $\forall \varepsilon \in I, \forall j \in \mathbb{Z}_+, u_\varepsilon^{(j)} \in AAA(\mathbb{R})$, alors il existe $v_{\varepsilon,j} \in AA(\mathbb{R})$ et $w_{\varepsilon,j} \in \mathcal{C}_{+,0}$, tel que $\forall j \in \mathbb{Z}_+, u_\varepsilon^{(j)} = (v_{\varepsilon,j} + w_{\varepsilon,j}) \in AAA(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{J}$. Pour $j = 0$. on a $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$ sur $\mathbb{J}$. et $\forall j \in \mathbb{Z}_+, v_{\varepsilon,j} = (v_\varepsilon)^{(j)}$ sur $\mathbb{R}$ et $w_{\varepsilon,j} = (w_\varepsilon)^{(j)}$ sur $\mathbb{J}$, donc $v_\varepsilon \in \mathcal{B}_{AA}$ et $w_\varepsilon \in \mathcal{B}_{+,0}(\mathbb{J})$.
On montre que $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AA}$. Comme $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$ on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+, \exists m \in \mathbb{Z}_+, \exists c > 0, \exists \varepsilon_0 \in I, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \| u_\varepsilon \|_{k,\infty} < c\varepsilon^{-m}. \tag{4.2}$$

D'après une caractérisation des éléments de $AA(\mathbb{R})$, on a

$$\forall j \in \mathbb{Z}_+, \| v_\varepsilon^{(j)} \|_\infty \leq \sup_{x\in\mathbb{J}} | u_\varepsilon^{(j)}(x) |, \tag{4.3}$$

Alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+, \exists m \in \mathbb{Z}_+, \exists c > 0, \exists \varepsilon_0 \in I, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \| v_\varepsilon \|_{k,\infty} < c\varepsilon^{-m}, \tag{4.4}$$

ce qui montre que $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AA}$. Si $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AAA}$ alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall m \in \mathbb{Z}_+, \exists c > 0, \exists \varepsilon_0 \in I, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \| u_\varepsilon \|_{k,\infty} < c\varepsilon^{m}. \tag{4.5}$$

Combinons (4.3) et (4.5), on obtient $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AA}$. Par suite $v \in \mathcal{G}_{AA}$.
D'autre part

$$\forall j \in \mathbb{Z}_+, \sup_{x\in\mathbb{J}} | w_\varepsilon^{(j)}(x) | \leq \sup_{x\in\mathbb{J}} u_\varepsilon^{(j)}(x) + \sup_{x\in\mathbb{J}} v_\varepsilon^{(j)}(x), \tag{4.6}$$

si $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AAA}$, alors (4.2), (4.4) et (4.6) donnent

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+, \exists m \in \mathbb{Z}_+, \exists c > 0, \exists \varepsilon_0 \in I, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \| w_\varepsilon \|_{k,\infty} < 2c\varepsilon^{-m},$$

donc $(w_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{+,0}$. Si $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{AAA}$, alors d'après (4.5) et (4.6), $(w_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{+,0}$. Par conséquent $w = [(w_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{M}_{+,0}(\mathbb{J})$. On en déduit qu'on a $u = v + w$ sur $\mathbb{J}$. □

Proposition 4.4. *La décomposition d'une fonction généralisée asymptotiquement presque automorphe est unique sur $\mathbb{J}$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{G}_{AAA}$ une fonction généralisée asymptotiquement presque automorphe avec deux décompositions, c'est-à-dire

$$u = v_i + w_i \text{ sur } \mathbb{J},\ i = 1, 2,$$

où $v_i \in \mathcal{G}_{AA}$ et $w_i \in \mathcal{G}_{+,0}$, soit $(v_{\varepsilon,i})_\varepsilon \in \mathcal{M}_{AA}$ et $(w_{\varepsilon,i})_\varepsilon \in \mathcal{M}_{+,0}$ respectivement représentants de v_i et w_i, $i = 1, 2$. Alors $(v_{\varepsilon,1} - v_{\varepsilon,2})_\varepsilon + (w_{\varepsilon,1} - (w_{\varepsilon,1})_\varepsilon \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{L^\infty}}(\mathbb{J})$, c'est à dire. $\forall k, m \in \mathbb{Z}_+ \exists c > 0, \exists \varepsilon_0 \in I,\ \forall \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\| v_{\varepsilon,1} - v_{\varepsilon,2} + w_{\varepsilon,1} - w_{\varepsilon,2} \|_{k,\infty} \leq c\varepsilon^m, \tag{4.7}$$

Puisque $\forall \varepsilon \in I, v_{\varepsilon,i} \in \mathcal{B}_{AA},\ i = 1, 2$, alors pour toute suite réelle $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$, telle que $s_m \to +\infty$ il existe $\left(s_{m_{k(\ell)}}\right)_k$ une sous-suite de $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $g_{\varepsilon,i}, i = 1, 2$, et en raison de la proposition 14, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall j \in \mathbb{Z}_+$nous avons

$$g_{\varepsilon,i}^{(j)}(x) := \lim_{k\to+\infty} v_{\varepsilon,i}^{(j)}\left(x + s_{m_{k(\varepsilon)}}\right) \text{ et } \lim_{k\to+\infty} g_{\varepsilon,i}^{(j)}\left(x - s_{m_{k(\varepsilon)}}\right) = v_{\varepsilon,i}^{(j)}(x).$$

De plus $\forall\varepsilon \in I, w_{\varepsilon,i} \in \mathcal{B}_{+,0}, i = 1, 2$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall j \in \mathbb{Z}_+$,

$$\lim_{k\to+\infty} w^{(j)}_{\varepsilon,i}\left(x + s_{m_{k(\varepsilon)}}\right) = 0, i = 1, 2.$$

D'autre part, en utilisant (4.7) nous avons $\forall m \in \mathbb{Z}_+, \exists c > 0, \exists\varepsilon_0 \in I, \forall\varepsilon < \varepsilon_0, \forall x \geq -s_{m_{k(\varepsilon)}}$,

$$\parallel v^{(j)}_{\varepsilon,1}\left(x + s_{m_{k(\varepsilon)}}\right) - v^{(j)}_{\varepsilon,2}\left(x + s_{m_{k(\varepsilon)}}\right) + w^{(j)}_{\varepsilon,1}\left(x + s_{m_{k(\varepsilon)}}\right) - w^{(j)}_{\varepsilon,2}\left(x + s_{m_{k(\varepsilon)}}\right) \parallel \leq c\varepsilon^m,$$

donc quand $k \to +\infty$ on obtient que $\forall m \in \mathbb{Z}_+, \exists c > 0, \exists\varepsilon_0 \in I, \forall\varepsilon < \varepsilon_0, \forall x \geq -s_{m_{k(\varepsilon)}}$,

$$\left|g^{(j)}_{\varepsilon,1}(x) - g^{(j)}_{\varepsilon,2}(x)\right| \leq c\varepsilon^m,$$

prendre le translate par $-s_{m_{k(\varepsilon)}}$ et on passe à la limite on obtient $\forall m \in \mathbb{Z}_+, \exists c > 0, \exists\varepsilon_0 \in I, \forall\varepsilon < \varepsilon_0, \forall x \geq 0$,

$$\left|v^{(j)}_{\varepsilon,1}(x) - v^{(j)}_{\varepsilon,2}(x)\right| \leq c\varepsilon^m.$$

D'après le Théorème 1.2, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall m \in \mathbb{Z}_+, \exists c > 0, \exists\varepsilon_0 \in I, \forall\varepsilon < \varepsilon_0, \parallel v_{\varepsilon,1} - v_{\varepsilon,2} \parallel_{k,\infty} < c\,\varepsilon^m, \tag{4.8}$$

ce qui montre que $(v_{\varepsilon,1} - v_{\varepsilon,2})_\varepsilon \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{L^\infty}}$, donc $v_1 = v_2$ dans $\mathcal{G}_{\mathcal{D}_{L^\infty}}(\mathbb{R})$. De (4.7) et (4.8), on obtenir $(w_{\varepsilon,1} - w_{\varepsilon,2})_\varepsilon \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{L^\infty}}$, alors $w_1 = w_2$ sur $\mathbb{J}$. □

Théorème 4.2. *Soit $u = (u_{aa} + u_{cor}) \in \mathcal{G}_{AAA}$ et $F \in \mathcal{G}_\tau(\mathbb{C})$, alors $F \circ u \in \mathcal{G}_{AAA}$. Le terme principal et le terme correctif de $F \circ u$ sont respectivement $F \circ u_{aa}$ et $F \circ u - F \circ u_{aa}$.*

Démonstration. Soient $u = (u_{aa} + u_{cor}) \in \mathcal{G}_{AAA}$ et $F \in \mathcal{G}_\tau(\mathbb{C})$, il est clair que $F \circ u = F \circ u_{aa} + F \circ u - F \circ u_{aa}$, d'après la Proposition 4.3 on a $F \circ u \in \mathcal{G}_{AAA}$. On a $F \circ u_{aa} \in \mathcal{G}_{AA}$, puisque $\mathcal{G}_{AAA}$ et $\mathcal{G}_{AA}$ sont contenus dans $\mathcal{G}_{\mathcal{B}} = \mathcal{G}_{\mathcal{D}_{L^\infty}}$ alors $F \circ u - F \circ u_{aa} \in \mathcal{G}_{\mathcal{B}}$. Il reste à prouver que $F \circ u - F \circ u_{aa} \in \mathcal{G}_{+,0}$. En effet, il suffit de montrer que $\forall\varepsilon \in I, f_\varepsilon \circ u_\varepsilon - f_\varepsilon \circ u_{aa,\varepsilon}, \in \mathcal{B}_{+,0}$, où $(f_\varepsilon)_\varepsilon$, $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, $(u_{aa,\varepsilon})_\varepsilon$ et $(u_{cor,\varepsilon})_\varepsilon$ sont respectivement des représentants de F, u, u_{aa}, et u_{cor}. Le résultat classique sur la composition d'une fonction asymptotiquement presque automorphe avec une fonction continue montre que le terme correctif de $f_\varepsilon \circ u_\varepsilon$ est $f_\varepsilon \circ u_\varepsilon - f_\varepsilon \circ u_{aa,\varepsilon}$ et le fait que $F \circ u - F \circ u_{aa} \in \mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ donne $\forall\varepsilon \in I$, $(f_\varepsilon \circ u_\varepsilon - f_\varepsilon \circ u_{aa,\varepsilon}) \in \mathcal{C}_{+,0} \cap \mathcal{B}$. Or on sait que $\mathcal{C}_{+,0} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}_{+,0}$. Alors $\forall\varepsilon \in I$, $f_\varepsilon \circ u_\varepsilon - f_\varepsilon \circ u_{aa,\varepsilon} \in \mathcal{B}_{+,0}$. □

Théorème 4.3. *Supposons que pour tout représentant $(T_\varepsilon(t))$ du C_0-semi-groupe généralisé $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$, on a $T_\varepsilon(t)\,x$ est une fonction presque automorphe de $\mathbb{R}$ dans l'algèbre de Banach*

X, et que $f = [(f_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$, si de plus f_ε est un élément de $L^1(\mathbb{J}; X)$. Alors toute solution intégrale " mild solution" de (3.1) restreint à $\mathbb{J} = [0\,, +\infty)$ est asymptotiquement presque automorphe.

Démonstration. La presque automorphie de la solution découle directement du Théorème (3.5), il reste à montrer que la solution généralisée est asymptotiquement presque automorphe. En effet Soit $x_\varepsilon(t) = T_\varepsilon(t)u(0) + \int_0^t T_\varepsilon(t-s)f_\varepsilon(s)ds \quad \forall \varepsilon \in I$ un représentant de la solution intégrale de (3.1) et considérons $v_\varepsilon(t) : \mathbb{R} \longrightarrow X$ définie par

$$v_\varepsilon(t) = \int_t^{+\infty} T_\varepsilon(t-s)f_\varepsilon(s)ds.$$

$v_\varepsilon(t)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et $\lim\limits_{t\to\infty} \| v_\varepsilon(t) \| = 0$. En effet, puisque $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un C_0-semi-groupe on a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| T_\varepsilon(t) \| < \infty,$$

En utilisant le théorème de Banach Sthenhauss D'où,

$$\| v_\varepsilon(t) \| \leq M \int_t^{+\infty} \| f_\varepsilon(s) \| \, ds \to 0, \quad \text{quand } \; t \to \infty.$$

Et il est claire que v_ε est continue sur $\mathbb{R}$.
d'autre part la fonction $u(t)$

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) &= T_\varepsilon(t)\, x(0) + \int_0^\infty T_\varepsilon(t-s)f_\varepsilon(s)ds \\ &= T_\varepsilon(t)\Big(x(0) + \int_0^\infty T_\varepsilon(-s)f_\varepsilon(s)ds. \end{aligned}$$

est presque automorphe puisque $T_\varepsilon(-t)f(t) : \mathbb{R} \longrightarrow X$ est une fonction continue et

$$\int_0^\infty \| T_\varepsilon(-s)\, f_\varepsilon(s) \| \, ds \leq M \int_0^\infty \| f(s) \| \, ds.$$

De plus $\int_0^\infty T_\varepsilon(-s)\, f(s)ds$ existe dans $\mathbb{X}$. Maintenant on observe que $x(t) = u(t) + v(t) \quad \forall t \in \mathbb{J}$, par conséquent $x(t)$ est presque automorphe. □

Théorème 4.4. *Soit $u = u(t,x) = [(u_\varepsilon)] \in \mathcal{G}_{AAA}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ avec terme principal $v = v(t,x)$ et terme correctif $w = w(t,x)$. Supposons que $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ est uniformément continue sur tout borné fixé $K \subset \mathbb{X}$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$. Supposons également que $\varphi \in \mathcal{G}_{AAA}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$. Alors la valeur de l'opérateur Nemytskii généralisé $\mathcal{H}_u$ en $\varphi(t)$, est bien définie dans $\mathcal{G}_{AAA}(\mathbb{X})$.*

Démonstration. Nous devons prouver que $u(.,\varphi(.))$ est un élément bien défini de $\mathcal{G}_{AAA}$. En effet on a pour tout $\varepsilon \in I$.

Soient $x(t)$ et $y(t)$ les termes principal et correctif respectivement de $\varphi(t)$. Écrivons pour tout $\varepsilon \in I$

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t,\varphi_\varepsilon(t)) =& v_\varepsilon(t,x_\varepsilon(t)) + u_\varepsilon(t,\varphi_\varepsilon(t)) - v_\varepsilon(t,x_\varepsilon(t)) = v_\varepsilon(t,x_\varepsilon(t)) + v_\varepsilon(t,\varphi_\varepsilon(t)) \\ & - v_\varepsilon(t,x_\varepsilon(t)) + w_\varepsilon(t,\varphi_\varepsilon(t)) \end{aligned}$$

Au vu du Théorème 3.5 $v_\varepsilon(t,x_\varepsilon(t)) \in AA(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$. D'autre part, la continuité uniforme de $v_\varepsilon(t,\varphi_\varepsilon(t))$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|v_\varepsilon(t,\varphi_\varepsilon(t)) - v_\varepsilon(t,x_\varepsilon(t))\| < \varepsilon,$$

si $\varphi_\varepsilon(t), x_\varepsilon(t) \in K$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et un ensemble borné donné $K \subset \mathbb{X}$ et $\|\varphi_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)\| < \delta$. De plus puisque $y_\varepsilon(t) \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{X})$, il existe $T > 0$ tel que

$$\|\varphi_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)\| = \|y_\varepsilon(t)\| < \delta,$$

pour $t > T$, on obtient

$$\lim_{t\to\infty} \|v_\varepsilon(t,\varphi_\varepsilon(t)) - v_\varepsilon(t,x_\varepsilon(t))\| = 0,$$

on sait aussi que

$$\lim_{t\to\infty} \|w_\varepsilon(t,\varphi_\varepsilon(t))\| = 0,$$

cela prouve que

$$v_\varepsilon(t,\varphi_\varepsilon(t)) - v_\varepsilon(t,x(t)) + w_\varepsilon(t,\varphi_\varepsilon(t)) \in C_0\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}\right)$$

et par conséquent $\mathcal{H}_u(\varphi)(.) = u(.,\varphi(.)) \in \mathcal{G}_{AAA}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons établi des nouvelles propriétés des fonctions presque automorphes et asymptotiquement presque automorphes en étendant les résultats de Bouzar dans les algèbres de Colombeau. Nous avons utiliser aussi le concept de fonction asymptotiquement presque automorphe afin d'étudier les opérateurs de Nemytskii qui permet de prendre en compte une sorte de composition "non autonome". Ce qui constitue, pour notre part, une grande contribution au développement de la théorie des fonctions presque automorphes ou asymptotiquement presque automorphes dans le cadre des fonctions généralisées au sens de Colombeau. L'introduction de ces nouvelles notions dans la littérature des fonctions asymptotiquement presque automorphes a son importance et ses applications dans des domaines divers de la recherche scientifique. Des chercheurs s'y mettent à fond et établissent d'importants résultats sur d'autres types de presque automorphie : "fonctions pseudo-presque automorphes, fonctions pseudo-presque automorphes au sens de Stepanov, etc." en témoignant les papiers [11, 25, 26]. Le chemin à parcourir est encore long et le travail ne fait que commencer, donc les amoureux de la presque automorphie généralisée ont encore du pain sur la planche.

Bibliographie

[1] J. Aragona, A. Garcia, S. Juriaans, *Algebraic theory of Colombeau's generalized numbers*, Journal of Algebra, 384, 194–211, (2013)

[2] M. Arshad, *Fixed points in topological vector spaces (tvs) valued cone metric spaces.* Advances in Fixed Point Theory, 5(2), 135–146, (2015)

[3] M. Berti, P. Bolle,*Cantor families of periodic solutions of completely resonant wave equations*, Duke Mathematical Journal, 134(2), 356–419, (2006)

[4] H. Biagioni, A. Pilipovi'c, *Colombeau semigroups, Preprint*, (1998)

[5] H. Biagioni, *The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with generalized functions as initial conditions.* Results Math. 14, 231–241, (1988)

[6] H. Biagioni, M. Oberguggenberger, *Generalized solutions to the Korteweg-de Vries and the regularized long-wave equations*, SIAM J. Math. Anal, 23, 923–940, (1992)

[7] H. Biagioni, *Nonlinear theory of generalized functions*, lecture Notes in Math. 1421, Springer, Berlin, (1990)

[8] S. Bochner, *A new approach to almost periodicity,*Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A. 48, 2039–2043, (1962)

[9] S. Bochner, *Uniform convergence of monotone sequences of functions.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 47, 582–585, (1961)

[10] C. Bouzar, M. Khalladi, F. Tchouar, *Almost automorphic generalized functions.* Novi Sad J. Math. 45(1), 207–214, (2015)

[11] C. Bouzar, M. Khalladi, *Asymptotically almost periodic generalized functions. Operator Theory.* Advances and Applications, 231, 261–272, (2013)

[12] J. Colombeau, *Elementary Introduction to New Generalized Functions,* North-Holland Math. Stud. 113, Elsevier Science Publishers, (1985)

[13] J. Colombeau, M.Langlais, *Existence and uniqueness of solutions of nonlinear parabolic equations with Cauchy data distributions.* J.Math.Anal.Appl. 145, 186–196, (1990)

[14] J. Colombeau, A.Heibig, M.Oberguggenberger, *Generalized solutions to partial differential equations of evolution type*, (1991)

[15] J. Colombeau, *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions.* North Hollan, Amsterdam, (1984)

[16] J. Colombeau, A. Meril, *Generalized functions and multiplication of distributions on manifolds.* J. Math. Anal. Appl, 186, 357–364, (1994)

[17] C. Corduneanu, N. Gheorghiu, V. Barbu, *Almost periodic functions,* Chelsea Publishing Company, (1989)

[18] J. Colombeau, *Multiplication of Distributions, a Tool in Applied Mathematics.* Lecture Notes, Preprint, (1991)

[19] T. Diagana, *Almost Automorphic Type and Almost Periodic Type Functions in Abstract Spaces.* Springer International Publishing. Springer, Berlin, (2013)

[20] M.Elomari, M.Chaib, S. Melliani, *On the Existence of Almost Automorphic Generalized Solutions to Some Differential Equations* Bulletin of Parana's Mathematical Society, named Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica (BSPM) doi :10.5269/bspm.61116 (41), 1–12, (2023)

[21] M. Elomari, M. Chaib, S. Melliani, *Solving Schr odinger equation and heat equationwith distributions data* soumis à "Nonlinear Differential Equations and Applications" NoDEA (2022)

[22] M. Elomari, S. Melliani, A. Taqbibt L. S. Chadli, M. Chaib, *Solving fractional evolution problem in Colombeau algebra by mean generalized fixed point* Journal of Linear and Topological Algebra 08(01), 71–84, (2019)

[23] M. Elomari, M. Chaib, S. Melliani, A. El Mfadel *On the solvability of Schrodinger equation and heat equation involving Risez fractional derivatives and distributions initial data in generalized function algebras* soumis à "São Paulo Journal of Mathematical Sciences"(SPJM) (2022)

[24] M. Elomari, M. Chaib, S. Melliani, *New Properties of Asymptotic Almost Automorphic Generalized Functions* soumis à "Sahand Communications in Mathematical Analysis" dec(2021)

[25] K. Ezzinbi, G. N'Guérékata, *Massera type theorem for almost automorphic solutions of functional differential equations of neutral type,* J. Math. Anal. Appl. 316, 707–721, (2006)

[26] K. Ezzinbi, G. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions for some partial functional differential equations,*

[27] K. Ezzinbi, B. Es-sebbar, K. Khalil *Compact almost automorphic solutions for semilinear parabolic evolution equations* Applicable Analysis 101(7), 2553–2579, (2022)

[28] B. Fisher, *Neutrices and the product of distributions.* Studia Math. 57, 263–274, (1976)

[29] B. Fisher, *On defining the product of distributions.* Math.Nachr. 99, 239–249, (1980)

[30] B. Fisher, *The product of the distributions* x^r *and* $\delta^{r-1}(x)$*,* Proc.Camb.Phil.Soc. 72, 201–204, (1972)

[31] B. Fisher, *The product of distributions.* Quart. J.Math. Oxford 25(2) 22, 299–308, (1971)

[32] B. Fisher, *The product of the distributions* $x_+^{-r-1/2}$ *and* $x_-^{-r-1/2}$ Proc.Camb.Phil.Soc. 71, 123–130, (1972)

[33] C. Garetto, *Topological structures in Colombeau algebras : investigation of the duals of* $G_c(\Omega)$*,* $G(\Omega)$ *and* $G_S(\mathbb{R}^n)$. Acta Applicandae Mathematica 88.1, 81–123, (2005)

[34] C. Garetto, *Topological Structures in Colombeau Algebras : Topological* $\widetilde{\mathbb{C}}$ *-modules and Duality Theory.* North Holland, Amsterdam, (1985)

[35] G. Gentile, V. Mastropietro, M. Procesi, *Periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations*, Comm. Math. Phys. 256(2), 437–490, (2005)

[36] M. Grosser, M. Kunzinger, R. Steinbauer, J. Vickers *A global theory of algebras of generalized functions*, Adv. Math., to appear, (2001)

[37] H. Grosse, M. Oberguggenberger, I. Todorov. *Generalized functions for quantum fields obeying quadratic exchange relations.* arXiv preprint math-ph/9902008, (1999)

[38] M. Grosser, G. Hormann, M. Kunzinger, M. Oberguggenberger, *Nonlinear Theory of Generalized Functions,* of Chapman , Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 401, 85–98, (1999)

[39] M. Grosser, M. Kunzinger, M. Oberguggenberger, R. Steinbauer, *Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity*, Mathematics and its Applications 537, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (2001)

[40] H. Hasimoto, *Exact solution of a certain semi-linear system of partial differential equations related to a migrating predation problem.* Proc.Japan Acad. 50, 623–627, (1974)

[41] R. Hermann, M. Oberguggenberger, *Ordinary differential equations and generalized functions*, Springer, Berlin, (1991)

[42] G. Hormann, M. Oberguggenberger, *Elliptic regularity and solvability for partial differential equations with Colombeau coefficients*, Electron. J. Diff. Eqns. 14, 1–30, (2004)

[43] M. Itano, *On the multiplicative products of distributions.* J.Sci.Hiroshima Univ. A-I. 29, 51–74, (1965)

[44] M. Itano, *On the multiplicative products ofdistributions* . J.Sci.Hiroshima Univ. A-I 29, 225–241, (1965)

[45] M.Itano, *On the theory of multiplicative products of distributions.* J.Sci.Hiroshima Univ. A-I, 30, 151–181, (1966)

[46] J. Liang, T. Xia, *Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically al- most automorphic functions*,Journal of Mathematical Analysis and Applications, 340, 1493–1499, (2008)

[47] S. Lojasiewicz, *la valeur et la limite d'une distribution en un point.* Studia Math., 161–36, (1957)

[48] J. Marti, (C,E,P)-sheaf structures and applications. Nonlinear Theory of Generalized

[49] J. Marti, Regularity, Local and Microlocal Analysis in Theories of Generalized Functions. Act. Appl. Math 105, 267–309, (2006)

[50] S.Melliani, L.S.Chadli, A.Moujahid, M.Elomari ,*"Generalized Solution of Sine- Gordon Equation"*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 7, 87-92, (2015)

[51] S. Melliani, A. Taqbibt, M.chaib L. Saadia Chadli, *Solving generalized heat equation by mean generalized fixed point.* Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Technics, Beni-Mellal, Morocco.IEEE 978-1-7281-6654-4/2031.00, (2020)

[52] M. Nedeljkov, S.Pilipovi'c, D.Rajter, *semigroup in generalized function algebras. heat equation with singular potential and singular data.* Proc. of Edinburg Royal Soc : 19, (2003)

[53] M. Nedeljkov, S.Pilipovi'c, D.Rajter, *Heat equation with singular potential and singular initial data*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics 135.4, 863–886, (2005)

[54] M. Nedeljkov, Pilipovi'c S, D. Scarpalézos, *The Linear Theory of Colombeau Generalized Functions,* Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman, Essex, (1998)

[55] G. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions to second-order semilinear evolution* ,Nonliear Analysis, 71,432–435, (2009)

[56] G. M. N'Guérékata.*Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces*. Springer Science+Business Media. Springer, New York, (2001).

[57] M. Oberguggenberger, *Multiplication of Distributions And Applications to Partial Differential Equations*. Pitman Res. Not.Math.259,Longman Sci.Techn.Essex , (1992)

[58] M Oberguggenberger, and Todorov, T. D, *An embeding of Schwartz distributions in the algebra of asymtotic functions*, Internat, J. Math.Math. Sc. 21(3), (1998)

[59] M. Oberguggenberger, *Generalized functions in nonlinear models, Nonlinear Analy.* 47 5029–5040, (2001)

[60] M. Oberguggenberger, *Hyperbolic systems with discontinuous coefficients : generalized solution and a transmission problem in acoustic,* J. Math. Anal. Appl. 142, 452–467, (1989)

[61] G. NéGuréerékata, *Almost Automorphic and Almost Periodic Function in Abstract Spaces* . Springer Sience Business Media New York, (2001)

[62] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 12, (1985)

[63] L. Schwartz, *l'impossibilité de la multiplication des distributions*. C. R. Acad. Sci. Paris, 239, 847–848, (1954)

[64] M. Stojanovi'c, *Nonlinear Schrodinger equation with singular potential and initial data* Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications 64.7, 1460–1474, (2006)

[65] T. Xiao, J.Liang, J.Zhang, *Pseudo almost automorphic solutions to semilinear differential equations in Banach spaces* ,Semigroup Form 76, (2008)

[66] Y. Yi and W. Shen. *Almost Automorphic and Almost Periodic Dynamics in Skew-product Semiflows* of Memoirs of the American Mathematical Society. Amer. Math. Soc, 647, (1998)

[67] A. Yoshikawa, M.Yamaguti, *On some further properties of solutions to a certain semi-linear system of partial differential equations.* Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences 93, 577–595, (1974)

[68] M. Zaki, *Almost automorphic integrals of almost automorphic functions.* Canad. Math. Bull, 15, 433–436, (1972)

[69] M. Zaki, *Almost automorphic solutions of certain abstract differential equations.* Annali. di Mat. Pura ed Appl. Ser, 101, 91–114, (1974)