N d'ordre : 477/22

Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques

Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

Centre d'Études Doctorales: Sciences et Techniques

Formation Doctorale: Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

SAID AIT TEMGHART

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR

Discipline: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques

Étude de quelques équations aux dérivées partielles non linéaires de type local et non local

---

Thèse présentée et soutenue le **Lundi 26 Décembre 2022** devant le jury composé de :

Pr. LALLA SAADIA CHADLI	FST, USMS Béni Mellal	Président/Rapporteur
Pr. STANISLAS OUARO	Université Joseph Ki Zerbo, Burkina Fasso	Rapporteur
Pr. AHMED ABERQI	ENSA, USMBA Fès	Rapporteur
Pr. M'HAMED EL OMARI	FP, USMS Béni Mellal	Examinateur
Pr. CHAKIR ALLALOU	FST, USMS Béni Mellal	Co-Encadrant
Pr. KHALID HILAL	FST, USMS Béni Mellal	Encadrant

Dédicace

Cette thèse est dédiée à

- Ma mère
- Mon père
- Mes soeurs
- Mes frères
- Mon professeur Adil Abbassi qu'Allah ait pitié de son âme.

Remerciements

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme.

Je voudrais exprimer tous mes remerciements à mon professeur KHALID HILAL, qui a encadré cette thèse avec beaucoup de patience et de gentillesse ainsi que pour sa rigueur et son enthousiasme dans la direction de ce travail. Je le remercie vivement pour la confiance qu'il m'a accordé et son soutien sans limite, ses encouragements, ainsi que son exigence de clarté m'ont beaucoup apporté. Je le remercie très sincèrement pour sa disponibilité et son accueil chaleureux.

Ma gratitude revient aussi au professeur CHAKIR ALLALOU, qui a toujours répondu patiemment à mes interrogations et m'a apporté maintes éclairages. Il m'a initié à l'univers des équations aux dérivées partielles et il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes et a su me faire progresser dans mes recherches. Je le remercie très sincèrement pour sa disponibilité.

Je remercie le professeur LALLA SAADIA CHADLI pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en acceptant d'être président du jury et de rapporter ma thèse.

C'est un honneur pour moi que les professeurs AHMED ABERQI et STANISLAS OUARO ont accepté la tache de rapporter ma thèse. Je les remercie de s'en être acquittés avec grand soin.

Je remercie le professeur M'HAMED EL OMARI pour le grand honneur qu'il me fait en acceptant d'être membre du jury de cette thèse.

Je n'oublie pas de remercier tous les membres du Laboratoire Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (LMACS) de Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal.

Il me reste à adresser une pensée à ma chère famille: mes parents, mes frères et sœurs dont leur soutien est un ressource inestimable.

Qu'Allah ait pitié de l'âme du mon Professeur ADIL ABBASSI, qui m'avoir proposé ce sujet de la thèse pour la première fois.

Encore un grand merci à tous pour m'avoir conduit à ce jour mémorable.

Publications et Conférences

Liste des Publications

❶ **Said Ait Temghart**, Abderrazak Kassidi, Chakir Allalou, & Adil Abbassi (2021). On an elliptic equation of Kirchhoff type problem via topological degree. **Nonlinear Studies**, 28(4).

❷ Chakir Allalou, Khalid Hilal, & **Said Ait Temghart** (2022). Existence of weak solutions for some local and nonlocal p-Laplacian problem. **Journal of Elliptic and Parabolic Equations**, 8(1), 151-169.

❸ **Said Ait Temghart**, Allalou, C., & Hilal, K. (2022). Existence results of some $p(u)$-Laplacian systems. **International Journal of Nonlinear Analysis and Applications** 13.2 (2022): 3073-3082.

❹ Abbassi, A., Allalou, C., & **Temghart, S. A.** (2022). Check for updates Entropy Solution of Nonlinear Elliptic $p(u)$-Laplacian Problem. **Recent Advances in Fuzzy Sets Theory, Fractional Calculus, Dynamic Systems and Optimization**, 476, 368.

❺ Hasnae El Hammar, **Said Ait Temghart**, Chakir Allalou, Said Melliani (2022). Existence results of quasilinear elliptic systems via Young measures. **International Journal of Nonlinear Analysis and Applications**, doi: 10.22075/ijnaa.2022.26962.3463.

❻ **Said Ait Temghart**, Chakir Allalou, Khalid Hilal, Stanislas Ouaro. Entropy solutions for some elliptic problems involving the generalized $p(u)$-Laplacian operator. **Miskolc Mathematical Notes**. **to appear**.

❼ **Said Ait Temghart**, Chakir Allalou, Khalid Hilal. Nonlinear elliptic problems involving the generalized $p(u)$-Laplacian operator with Fourier boundary condition. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**, (3s.)v. 2023 (41):1-16. 10.5269/bspm.62948.

❽ **Said Ait Temghart**, Chakir Allalou, Adil Abbassi. Entropy solutions for a class of the nonlocal (p, q)-Laplacian problems. **Advanced Mathematical Models & Applications**. **to appear**.

❾ **Said Ait Temghart**, Chakir Allalou, Adil Abbassi. Existence results for a class of local and nonlocal nonlinear elliptic problems. **CUBO, A Mathematical Journal**. **to appear**.

➓ **Said Ait Temghart**, Hasnae El Hammar, Chakir Allalou, Khalid Hilal. Existence of weak solutions for a class of $(p(b(u)), q(b(u)))$-Laplacian problem. **Nonlinear Dynamics and Systems Theory**. **to appear**.

Liste des Articles Soumis

❶ **Said Ait Temghart**, Chakir Allalou, Khalid Hilal. Existence of solutions for some elliptic systems with perturbed gradient.

❷ **Said Ait Temghart**, Chakir Allalou, Khalid Hilal. A nonlinear degenerate parabolic problem via optimization method.

Liste des Conférences

① "Entropy Solution of Nonlinear Anisotropic Degenerated Elliptic Problem with Measure Data", co-authored with Chakir Allalou and Adil Abbassi. The 1th International Conference In Applied Mathematics to Finance, Marketting and Economics. November 26-27, 2020, El Jadida, Morocco.

② "Entropy solution for a class of $(p(u), q(u))$-Laplacian problem", co-authored with Chakir Allalou and Adil Abbassi. The 1st International E-Conference on Differential Equations and Applications (IE-CDEA 2021), September 24-25, 2021, FSDM, Fez, Morocco.

③ "Existence results for a class of nonlocal nonlinear elliptic problems", co-authored with Chakir Allalou and Adil Abbassi. The 3rd International Conference on Research in Applied Mathematics and Computer Science (ICRAMCS 2021), March 27, 2021, Casablanca, Morocco.

④ "Entropy solutions for a nonlinear elliptic $(p(u), q(u))$-Laplacian problem", co-authored with Chakir Allalou and Khalid Hilal. International Conference on Mathematics & Data Science 2 (ICMDS-2021), 28-30 October, 2021, Khouribga, Morocco.

⑤ "Existence of weak solutions for a class of $(p(u), q(u))$-Laplacian problem", co-authored with Chakir Allalou and Khalid Hilal. Nineteenth day of Mathematics and Applications (JMA21), FSBM, November 27, 2021, Casablanca, Maroc.

⑥ "Existence of weak solutions for a class of nonlocal parabolic p-Laplacian problem", co-authored with Chakir Allalou and Khalid Hilal. The 4rd International Conference on Research in Applied Mathematics and Computer Science (ICRAMCS 2022), March 26, 2022, Casablanca, Morocco.

⑦ "Existence of solutions for some elliptic systems with perturbed gradient", co-authored with Chakir Allalou and Khalid Hilal. International Conference on New Trends in Applied Mathematics (ICNTAM'22), Beni Mellal, Morocco.

⑧ Participation in the International Workshop on Numerical and Analytical Techniques in Engineering Problems (IWNATEP-2022). Department of Mathematics held on January 19-21, 2022 at SRM Institute of Science and Technology, Kattankulathur, Tamil Nadu, India.

⑨ "Entropy solution of nonlinear elliptic $p(u)$-Laplacian problem", co-authored with Chakir Allalou and Adil Abbassi. International Conference on PDE & Applications, Modelling and Simulation (ICPAMS'21), June 2-3 2021, Beni Mellal, Morocco.

⑩ "Existence of weak solutions for a class of $(p(u), q(u))$-Laplacian problems", co-authored with Chakir Allalou and Khalid Hilal. The 2^{nd} Edition of the International Congress on dynamical systems, (ICDS'22), November 22-24 2022, El Jadida, Morocco.

Notations et Abréviations

p.p.	Presque partout.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
$\hookrightarrow$	L'injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	L'injection compacte.
$\emptyset$	L'ensemble vide.
$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	L'espace euclidien de dimension N.
Ω	Domaine borné et régulier de frontière $\partial\Omega$.
$\overline{\Omega}$	Fermeture de Ω.
$x = (x_1, \cdots, x_N)$	Élément de Ω point générique de $\mathbb{R}^N$.
$dx = dx_1 dx_2 ... dx_N$	Mesure de Lebesgue sur Ω.
∇v	Gradient de v défini par $\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_N}\right)$.
T_k	Fonction troncature de niveau $k > 0$.
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues nulles au bord de Ω.
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Espaces des fonctions k-fois continument différentiables dans Ω.
$L^p(\Omega), L^\infty(\Omega)$	Espaces de Lebesgue standards sur Ω d'exposants p et ∞.
$p(\cdot)$	Fonction mesurable (exposant variable).
$p(u(x))$	Exposant variable dépend de x et de la fonction $u(x)$.
p^+, p^-	sup essentiel, inf essentiel de $p(\cdot)$.
p'	L'exposant conjugué de $p > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
$L^{p(x)}(\Omega)$	Espaces de Lebesgue généralisé sur Ω d'exposant variable $p(x)$.
$L^{p(u(x))}(\Omega)$	Espaces de Lebesgue généralisé sur Ω d'exposant variable dépendant de x et de $u(x)$.
$W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev standard sur Ω d'exposant variable p.
$W^{1,p(x)}(\Omega)$	Espace de Sobolev généralisé sur Ω d'exposant variable $p(x)$.
$W^{1,p(u(x))}(\Omega)$	Espace de Sobolev généralisé sur Ω d'exposant variable dépendant de x et de $u(x)$.
$W_0^{1,p(x)}(\Omega)$	Adhérence de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{1,p(x)}$.
$L^{p'}(\Omega)$	Le dual topologique de $L^p(\Omega)$.
$L^{p'(x)}(\Omega)$	Le dual topologique de $L^{p(x)}(\Omega)$.
$W^{-1,p'(x)}(\Omega)$	Le dual topologique de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de divers problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique ou parabolique faisant intervenir l'opérateur de Laplace avec des exposants p et q qui peuvent dépendre de la solution inconnue u et de la variable spatiale x. Cette situation où les exposants variables p et q au point x peut dépendre de la valeur inconnue $u(x)$ (ou de l'ensemble des valeurs inconnues $(u(x))_{x\in\Omega}$) n'est pas standard. Néanmoins, les problèmes associés sont bien posés sous des hypothèses de régularité légères sur p et q. Cette thèse composée de quatre chapitres, présente des résultats d'existence de solutions faibles et entropiques pour quelques problèmes non linéaires du type mentionnés ci-dessus. Après un bref exposé de définitions et résultats nécessaires à la suite du thèse, nous prouvons au chapitre 2 l'existence de solutions faibles pour deux problèmes elliptiques du type réaction-diffusion avec des conditions aux limites de Dirichlet. Dans le même axe, au chapitre 3, nous avons établi l'existence de solutions entropiques de deux problèmes elliptiques associés à l'opérateur $p(u)$-Laplacien généralisé avec des conditions de Dirichlet et de Fourier. Le dernier chapitre de ce travail concerne l'étude problèmes aux limites de Dirichlet impliquant un type d'opérateur non homogène qui est généralement connu sous le nom de (p, q)-Laplacien en montrant l'existence de solutions faibles et entropiques pour des équations elliptiques et paraboliques de type local ou non local.

Mots clés : problème elliptique local et non locale, problème parabolique, conditions de Fourier, conditions de Dirichlet, espaces de Sobolev à exposants variables, $p(u)$-Laplacien généralisé, $(p(b(u)), q(b(u)))$-Laplacien, existence, solution faible, solution entropique.

AMS classification : 35J60, 35J05, 35D30, 35J65, 35K55, 35K60.

Abstract

The objective of this work is the study of various problems of nonlinear partial differential equations of the elliptic or parabolic type involving the Laplace operator with exponents p and q which may depend on the unknown solution u and the spatial variable x. This situation where the variable exponents p and q at the point x can depend on the unknown value $u(x)$ (or on the set of unknown values $(u(x))_{x\in\Omega}$) is not standard. Nevertheless, the associated problems are well posed under light regularity assumptions on p and q. This thesis, composed of four chapters, presents existence results of weak and entropy solutions for some nonlinear problems of the type mentioned above. After a brief presentation of definitions and results necessary for the sequel of the thesis, we prove in chapter 2 the existence of the weak solution for two elliptic problems of the reaction-diffusion type with Dirichlet boundary conditions. Along the same lines, in chapter 3, we established the existence of entropy solutions of two elliptic problems associated with the generalised $p(u)$-Laplacian operator with Dirichlet and Fourier boundary conditions. The last chapter of this work concerns the study of Dirichlet boundary problems involving a type of inhomogeneous operator which is generally known as (p, q)-Laplacian by showing the existence of weak and entropy solutions for elliptic and parabolic equations of local or nonlocal type.

Keywors : local and nonlocal elliptic problems, Fourier boundary condition, Dirichlet boundary condition, Sobolev space with variable exponents, generalised $p(u)$-Laplacian, $(p(b(u)), q(b(u)))$-Laplacian, existence, weak solution, entropy solution.

AMS classification : 35J60, 35J05, 35D30, 35J65, 35K55, 35K60.

Contents

Introduction Générale

La modélisation est une phase essentielle en physique, elle est la base de la démarche scientifique. Les équations aux dérivées partielles (EDPs) et les équations différentielles ordinaires (EDOs) traduisent mathématiquement les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, etc.) utilisés dans des phénomènes du monde réel. Les situations dépendant du temps se traduisent plus particulièrement par des équations d'évolution tenant compte d'éventuelles interactions entre objets et événements.

Les équations aux dérivées partielles interviennent dans d'autres domaines à savoir la chimie pour modéliser les réactions, le traitement d'images pour restaurer les dégradations, le finance pour étudier les produits dérivés et l'économie pour étudier le comportement des marchés.

Le développement des EDPs a été commencé au 17ème siècle par beaucoup de mathématiciens et de physiciens: Euler, Navier et Stokes ont développé les équations de la mécanique des fluides, Maxwell a travaillé sur celles de l'électromagnétisme, Fourier a étudié l'équation de la chaleur, Schrödinger et Heisenberg ont fait les premiers pas dans l'étude des équations de la mécanique quantique.

Cependant, l'étude systématique des EDPs est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20ème siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. Un pas de géant a été accompli par Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès, au moins comparable, est dû à Hörmander pour la mise au point du calcul pseudodifférentiel (au début des années 1970). Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des EDPs reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21ème siècle. D'ailleurs, ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes, à la fois en géométrie et en analyse.

Par ailleurs, les travaux présentés dans cette thèse concernent quelques équations aux dérivées partielles du type elliptique et d'autres du type parabolique, locaux et non locaux faisant intervenir l'opérateur de Laplace avec des exposants p qui peuvent dépendre de la solution inconnue u et de la variable spatiale x. La première préoccupation que confronté un mathématicien à une équation aux dérivées partielles c'est de lui donner un sens dans des espaces fonctionnels appropriés et d'y démontrer l'existence et l'unicité de la notion de solution appropriée.

Illustrons tout d'abord quelques difficultés qui peuvent apparaître lors de l'étude de ces équations en considérant les problèmes modèles suivants : du type local

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$ avec une frontière de Lipschitz $\partial\Omega$, f est une donnée et $p : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ est la fonction exposante non linéaire telle que p est continue et $1 < \alpha \leq p \leq \beta < \infty$, pour certaines constantes α, β, et sa version non locale

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u) = f \text{ in } \Omega \\ \\ u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.2}$$

où b est une application de $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ telle que b soit continue et bornée. Des exemples appropriés de l'application b peuvent être choisis comme

$$b(u) = \|\nabla u\|_\alpha,$$

ou

$$b(u) = \|u\|_q, \text{ pour tout } q \leq \alpha^*, \text{ où } \frac{1}{\alpha^*} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{N}.$$

La question de l'existence des problèmes (0.0.1) et (0.0.2) reste ouverte. En effet, la non-densité possible des fonctions régulières dans les espaces de Sobolev à exposants variables entrave l'analyse de convergence. Nous évitons cette difficulté en exigeant que $p = p(u(\cdot))$ est suffisamment régulier. Par conséquent, notre analyse se réduit au cas où $\alpha > N$ (N étant la dimension du domaine spatial) et p vérifie la condition de Hölder.

Le problème (0.0.1) est l'extension naturelle du problème $p(x)$-Laplacien introduit par Zhikov dans [87] et pour lequel le regain d'intérêt au cours des deux dernières décennies est venu d'applications de modélisation telles que les fluides thermiques ou électro-rhéologiques [16, 45] et restauration d'images [42]. Pour les problèmes $p(x)$-Laplacien différentes questions d'existence, d'unicité et de régularité ont déjà été abordées dans de nombreux travaux et par différents auteurs (voir encore [16, 42, 45]). Cependant pour le problème $p(u)$-Laplacien (0.0.1), et à notre connaissance, le premier travail est dû à Andreianov et al. [18], où le problème considéré est

$$\begin{cases} u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) = f \ \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.3}$$

Notez que la situation où l'exposant variable p au point x peut dépendre de la valeur inconnue $u(x)$ (ou de l'ensemble des valeurs inconnues $(u(x))_{x\in\Omega}$) n'est pas standard, car les problèmes (0.0.1) et (0.0.2) ne peuvent pas être écrites comme égalités en termes de dualité dans des espaces de Banach fixes. Néanmoins, sous des hypothèses de régularité légères sur p, b et Ω et sous la restriction clé $p \geq \alpha > N$, nous prouvons que les problèmes (0.0.1) et (0.0.2) sont bien posés dans $L^1(\Omega)$. Concernant la deuxième classe de problèmes non locaux (0.0.2), il est important de souligner que de nombreuses équations de diffusion, ou de réaction-diffusion, avec des termes non locaux distincts ont été étudiées dans de nombreux travaux et par différents auteurs. Dans ce cas, puisque $p = p(b(u(x)))$ et comme b est complètement déterminé par u, on peut considérer que p dépend de u de manière non locale (on note une telle dépendance par $p = p\,[u]$). En général, la motivation pour étudier des problèmes non locaux repose sur le fait physique qu'en réalité les mesures de certaines grandeurs ne sont pas faites ponctuellement mais à travers des moyennes locales.

Parfois ces équations sont mal posées dans le cadre des solutions faibles (c'est-à-dire des solutions au sens de distributions). L'existence des solutions faibles des problèmes elliptiques (0.0.1) et (0.0.2) a été aborder récemment par M. Chipot and H. B. de Oliveira dans [38]. La question de l'unicité pour ces problèmes est également abordée dans ce travail, en particulier en établissant l'unicité pour un problème local à une dimension et en montrant que l'unicité se perd facilement pour le problème non local. La notion de solution faible ne suffit donc pas à déterminer la solution physiquement observée car elle n'est pas unique. Il paraît alors nécessaire de trouver un critère d'origine physique qui permet de sélectionner, parmi toutes les solutions faibles, la solution physiquement admissible. La notion juste de solution est celle dite entropique.

Le problème de non unicité des solutions des problèmes elliptiques et paraboliques se pose également lorsque les données sont peu régulières (fonctions intégrables ou mesures). Des formulations, plus appropriées que le cadre habituel des solutions faibles, ont alors vu le jour, avec l'espoir d'arriver à une définition de solutions qui permettrait d'obtenir l'unicité. Trois notions de solutions ont été adoptées : les solutions appelées SOLA (solutions obtenues comme limite d'approximation) utilisées par A. Dall'Aglio [43], les solutions entropiques au sens de Ph. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre et J.-L. Vazquez [27] et enfin les solutions renormalisées ayant pour origine l'article de R. DiPerna et P.L. Lions [45] sur les équations de Boltzmann. Par exemple, pour le problème elliptique local (0.0.2) la solution entropique u est une fonction mesurable sur Ω vérifiant

$$\begin{cases} T_k(u) \in W_0^{1,p(b(u))}(\Omega) \text{ pourtout } k > 0 \\ \\ \int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u \cdot \nabla T_k(u-\varphi)dx \leq \int_\Omega fT_k(u-\varphi)dx \ \forall \varphi \in C_0^1, \end{cases}$$

où T_k est la fonction troncature au niveau k définie par $T_k(x) = \min(k, \max(x, -k))$. Il faut signaler que parallèlement à cette définition, F. Murat [69, 68] a développé le concept de solutions renormalisées pour le problème elliptique, et s'est avéré, pour de nombreux problèmes d'ailleurs, équivalent à celui de solutions entropiques, et les deux mènent à une solution unique.

Au cours des dernières décennies, l'intérêt pour les formes générales de problèmes différentiels, dont l'opérateur principal est de type (p, q)-Laplacien a fortement augmenté. La raison principale de cette augmentation c'est que ce type d'opérateur non linéaire apparaît naturellement dans l'étude de la diffusion non locale avec des caractéristiques particulières (voir Rŭžička [77]). En effet, si l'opérateur Laplacien (c'est-à-dire $p = q = 2$) est reconnu comme un prototype mathématique clé pour l'étude complète des équations elliptiques linéaires dans le contexte des phénomènes physiques, le (p, q)-Laplacien (dans le cas où $q \neq 2$) étend la gamme d'applications des équations non linéaires dans le contexte des phénomènes physiques non linéaires comme l'analyse de la viscosité des matériaux avec différents exposants de durcissement dans les taux de croissance, et le comportement des fluides intelligents avec et sans l'influence des champs externes (par exemple, un champ électromagnétique). Une collection intéressante de monographies est disponible sur la théorie générale des équations Laplacien, les équations p-Laplacien, les équation (p, q)-Laplacien, les équations de $(p(x), q(x))$-Laplacien, et les cadres fonctionnels appropriés (voir, par exemple, [42, 45, 75, 90]). Ainsi, le lecteur peut trouver des réponses précises à toutes les questions concernant la source des difficultés et des complications supplémentaires dans l'extension de la théorie de régularité de l'équation Laplacien jusqu'aux équations $(p(x), q(x))$-Laplacien avec des fonctions d'exposant variable p et q (voir aussi le livre Rădulescu-Repovš [76]).

Sans être exhaustif, nous soulignons brièvement quelques faits qui disent qu'il n'est pas trivial de poursuivre l'étude théorique des opérateurs $(p(x), q(x))$-laplaciens. Suivant l'approche du calcul des variations et de la théorie du point critique, le point de départ naturel de la théorie existante est constitué par les travaux qualitatifs sur l'existence et la régularité des solutions des intégrales variationnelles (intégrales d'énergie totale) de la forme

$$I(u) = \int_{\Omega} g(x, \nabla u(x))dx$$

où $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ (Ω est un domaine ouvert borné) et ∇u est la matrice $N \times N$ du gradient de déformation. L'étude est réalisée en imposant une hypothèse de croissance de la forme

$$c_0|u|^{c_1} \leq |g(x,u)| \leq c_2\,(1+|u|^{c_3}) \text{ pour tout } (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

où c_0, c_1, c_2, c_3 sont des constantes positives et $1 \leq c_1 \leq c_3$; nous nous référons à [16, 24, 25, 65, 64] pour une large discussion sur le sujet.

De plus, nous distinguons le cas des exposants constants p, q (à savoir les équations isotropes) et le cas des exposants variables $p(x), q(x)$ (à savoir les équations anisotropes). Les résultats existants ont été développés dans les cadres abstraits des espaces de Lebesgue et de Sobolev avec et sans exposants variables, à savoir, $L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega), L^{p(x)}(\Omega), W^{1,p(x)}(\Omega)$. Or, il est bien connu que $L^{p(x)}(\Omega)$ n'est pas invariant par rapport à la translation (Kováčik-Rákosník [61]). Ceci forme une source de difficultés sur les convolutions et la continuité des fonctions. De plus, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ présente des difficultés sur la densité des fonctions régulières (Meyers-Serrin [66]), l'inégalité de Sobolev, et les théorèmes d'injections (Edmunds-Rákosník [51], Kováčk-Rákosník [61]). Cela signifie que le passage du cadre de l'exposant constant au cadre de l'exposant variable nécessite une attention particulière aux cas spéciaux, et donc que certains problèmes difficiles restent ouverts (pour plus de détails, nous nous référons à Barile-Figueiredo [23] et Cencelj-Rădulescu-Repovš [36], et aux références qui y figurent).

Cette thèse, qui est composée de quatre chapitres, présente des résultats d'existence de solutions faibles ou entropiques pour des problèmes non linéaires du type, mentionnés ci-dessus. Nous allons présenter ici, d'une manière détaillée, le contenu de chacun d'eux.

Le premier chapitre est entièrement consacré aux préliminaires mathématiques concernant un cadre fonctionnel des espaces de Sobolev classiques et des espaces de Sobolev à exposant variable. Nous rappelons aussi quelques résultats fondamentaux nécessaires à la suite de cette thèse.

Le deuxième Chapitre est consacré à l'étude d'existence des solutions faibles des problèmes elliptiques à exposant variable avec un exposant p qui peut dépendre de la solution inconnue u. Nous considérons deux cas pour chaque problème; le cas où la dépendance de

p par rapport à u est une quantité locale et le cas d'une dépendance non locale.
Dans la première partie de ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) = f + g(u)|\nabla u|^{p(u)-1} & \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$ avec une frontière de Lipschitz $\partial\Omega$, f est une donnée et $p : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ est la fonction exposante non linéaire telle que p est continue et $1 < \alpha \leq p \leq \beta < \infty$, pour certaines constantes α, β.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée et continue qui appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et qui satisfait la condition de signe suivante

$$-g(u)|\nabla u|^{p(\cdot)-1}u \geq 0.$$

Nous prouvons l'existence des solutions faibles en utilisant une technique de perturbation singulière. Cette technique consiste à introduire un problème auxiliaire et par la théorie des opérateurs monotones et le théorème de point fixe de Schauder, on montre que ce problème approximé admet une solution. En passant à la limite, on montre que le problème local admet une solution faible.
Dans la même partie, nous étudions la version non locale de premier problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u) = f + g(u)|\nabla u|^{p(b(u))-1} & \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où g satisfait les mêmes hypothèses dans le problème local ci-dessus. On note b une application de $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ telle que b est continue et bornée. Des exemples appropriés d'application b peuvent être choisis comme

$$b(u) = \|\nabla u\|_\alpha,$$

ou

$$b(u) = \|u\|_q, \text{ for } q \leq \alpha^*, \text{ où } \frac{1}{\alpha^*} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{N}.$$

Dans le même axe, la deuxième partie de ce chapitre a été consacré à l'étude du problème non linéaire suivant:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) + |u|^{p(u)-2}u = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^{N\geq 2}$, f est une donnée et p est la fonction d'exposant non linéaire $p : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ tel que

$$p \text{ est continue et } \quad 1 < \alpha \leq p \leq \beta < \infty \quad \text{pour un certains } \alpha, \beta.$$

Nous considérons également le problème non local suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u) + |u|^{p(b(u))-2}u = f & \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $p : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty)$ et $b : W_0^{1,\alpha}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions impliquées dans l'exposant de non-linéarité, pour un certain exposant constant α tel que $1 < \alpha < \infty$.

L'objet de **troisième chapitre** est de présenter des résultats d'existence de solutions entropiques des problèmes elliptiques associés à un opérateur de type $p(u)$-Laplacien.
On commence en un premier temps par prouver l'existence de solutions entropiques pour certaines équations elliptiques associées à l'opérateur $p(u)$-Laplacien généralisé avec des exposants p qui peuvent dépendre de la solution inconnue u. Nous considérons le cas où la dépendance de p par rapport à u est une quantité locale. Plus précisément, nous étudions le problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u - \Theta(u)|^{p(u)-2}\,(\nabla u - \Theta(u))) = f \text{ in } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, f est une donnée, $p : \mathbb{R} \to [p_-, p_+]$ est une fonction continue réelle, $1 < p_- \leq p_+ < +\infty$ et $p'(z) = \frac{p(z)}{p(z)-1}$ est l'exposant conjugué de $p(z)$, avec

$$p_- := \operatorname{ess}\inf_{z\in\mathbb{R}} p(z) \text{ and } p_+ := \operatorname{ess}\sup_{z\in\mathbb{R}} p(z).$$

Le résultat d'existence est obtenue sous les hypothèses suivantes:
(H_1) $f \in L^1(\Omega)$.
(H_2) $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue telle que $\Theta(0) = 0$ et $|\Theta(x)-\Theta(y)| \leq \lambda|x-y|$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, avec λ est une constante positive telle que $\lambda < \dfrac{1}{2C_0}$, et C_0 est une constante donnée par l'inégalité de Poincaré.
Nous montrons d'abord que le problème approximé admet une suite de solutions faibles en appliquant la méthode variationnelle combinée à un type spécial d'opérateurs. Dans un deuxième temps, nous prouverons que la suite de solutions approximées converge vers une certaine fonction u et en utilisant des estimations a priori, nous montrerons que cette fonction u est une solution entropique de problème étudié.

Le dernier problème, présenté au Chapitre 2, concerne le problème non linéaire de Fourier suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u - \Theta(u)|^{p(u)-2}(\nabla u - \Theta(u))) + |u|^{p(u)-2}u + \alpha(u) = f \text{ dans } \Omega \\ \\ (|\nabla u - \Theta(u)|^{p(u)-2}(\nabla u - \Theta(u))).\eta + \lambda u = g \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ avec une frontière de Lipschitz $\partial\Omega$, $\lambda > 0$, η est le vecteur normal unitaire extérieur sur $\partial\Omega$, α, Θ sont des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ or $\mathbb{R}^N$, $f \in L^1(\Omega)$, $g \in L^1(\partial\Omega)$ et $p : \mathbb{R} \to [p_-, p_+]$ est une fonction continue réelle telle que, $1 < p_- \leq p_+ < +\infty$ et $p'(z) = \frac{p(z)}{p(z)-1}$ est l'exposant conjugué de $p(z)$.

Nous prouvons l'existence de solutions entropiques de ce problème sous les hypothèses suivantes :

(H_0) α est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\alpha(x).x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(H_1) $f \in L^1(\Omega)$ et $g \in L^1(\partial\Omega)$.

(H_2) $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue telle que $\Theta(0) = 0$ et $|\Theta(x) - \Theta(y)| \leq \lambda|x - y|$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, où λ est une constante positive telle que $\lambda < \dfrac{1}{2C_0}$, et C_0 est la constante donnée par l'inégalité de Poincaré.

Dans le **quatrième chapitre**, l'attention est portée sur l'existence des solutions faibles et entropiques des problèmes elliptiques et paraboliques impliquants un tel opérateur jouent un rôle crucial dans la modélisation de divers phénomènes physiques et la dynamique des sciences de la vie, c'est l'opérateur (p, q)-Laplacien de type local ou non local. Plus précisément, pour un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, nous prouvons l'existence de solutions entropiques pour le problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u) - \operatorname{div}(|\nabla u|^{q(b(u))-2}\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans la deuxième partie , on s'intéresse à l'étude des solutions faibles pour le problème elliptique de la forme suivante

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) - \operatorname{div}(|\nabla u|^{q(u)-2}\nabla u) + |u|^{p(u)-2}u + |u|^{q(u)-2}u = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Nous terminons ce chapitre en montrant l'existence des solutions faibles pour le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u) - \operatorname{div}(|\nabla u|^{q(b(u))-2}\nabla u) = f \text{ dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Organisation de la thèse

Le contenu de cette thèse fait l'objet des articles suivant :
Chapter 2: est l'objet de l'article [14] publié dans le journal "Journal of Elliptic and Parabolic Equations" et de l'article [10] accepté à la publication dans le journal "CUBO, A Mathematical Journal".
Chapter 3: est l'objet de l'article [8] accepté à la publication dans le journal "Miskolc Mathematical Notes" et de l'article [9] accepté à la publication dans le journal "Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática".
Chapter 4: est l'objet d'un article accepté à la publication dans le journal "Advanced Mathematical Models & Applications", un article soumis dans le journal "International mathematical journal of analysis and its applications" et de l'article accepté à la publication dans le journal "Nonlinear Dynamics and Systems Theory".

Chapter 1

Préliminaires

Contents

Dans ce chapitre, nous introduisons les notations et présentons quelques propriétés sur les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev à exposant variable. De plus, nous présentons quelques résultats fondamentaux nécessaires à la suite de la thèse.

1.1 Espaces fonctionnels

Les espaces de Lebesgue et de Sobolev sont un outil très intéressant dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques. Leur compréhension est donc une étape nécessaire avant d'aborder ce type des équations. Nous présentons dans cette section certains énoncés de O. Kavian [60] et de H. Brezis [33] sur ces espaces, pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra consulter l'ouvrage de R.A. Adams [5].

1.1.1 Espaces de Lebesgue et de Sobolev

Nous supposons Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. Pour toute $1 \leq p < \infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace défini par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable; } \int_\Omega |u|^p < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable; ess-sup } |u| < \infty\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_\infty = ess - \sup_\Omega |u|.$$

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega); \exists g_1, \cdots, g_N \in L^p(\Omega), \int_\Omega g_i\varphi = -\int_\Omega u\varphi_{x_i} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p^p + \|Du\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

si $p < \infty$, et

$$\|u\|_{1,\infty} = \max\left(\|u\|_\infty, \|Du\|_\infty\right)$$

si $p = \infty$. On note pour $1 \leq p < \infty$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}}(\Omega)^{W^{1,p}(\Omega)}.$$

On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega), p' = \frac{p}{p-1}, 1 \leq p < \infty$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ que l'on peut caractériser comme suit : $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$, alors il existe $f_0, f_1, \cdots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$ telles que

$$\langle F, \phi\rangle = \int_\Omega f_0\phi + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et } \|F\| = \max_{1\leq i\leq N} \|f_i\|_{L'(\Omega)}.$$

A présent rappelons brièvement quelques propriétés de base de ces espaces. Commençons par le critère de compacité de Fréchet-Kolmogorov.

Théorème de Fréchet-Kolmogorov : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\omega \subset \Omega$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta < \operatorname{dist}\left(\omega, \mathbb{R}^N \backslash \Omega\right) \text{ tel que} \\ \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \ \ \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ avec } |h| < \delta \text{ et } \forall f \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Résultat de densité : On suppose Ω de classe C^1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une suite $(u_n)_n \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ telle que $u_{n|\Omega} \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème de Rellich-Kondrachov : On suppose Ω de classe C^1. Si $p < N$, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in \left[1, p^*\right[, \text{où} \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

compactement. En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ est une injection compacte pour tout p.

Nous rappelons quelques inégalités très utiles portant sur les normes de Sobolev.

Inégalité de Poincaré : Soient $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constante C telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on ait

$$\|u\|_p \leq C\|Du\|_p.$$

En particulier, $\|Du\|_p$ est une norme équivalente à celle de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Inégalité de Poincaré-Wirtinger : Soient $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert borné, connexe et lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constante C telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on ait

$$\|u - \bar{u}\|_p \leq C\|Du\|_p,$$

où $\bar{u} = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u(x)dx$.

Traces des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$

Nous mentionnons le résultat suivant sur les traces des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.1.1 *Soient Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq \infty$. Alors il existe un opérateur linéaire continu $\tau : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$, appelé opérateur trace, tel que $\tau : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ est compact.*

Pour $1 \leq p \leq \infty$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ on définit l'espace vectoriel $W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$ comme suit :

$$W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega) = \left\{\tau(u);\ u \in W^{1,p}(\Omega)\right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{\frac{1}{p'},p} = \inf\{\|u\|_{1,p}; \tau(u) = f\}.$$

Les premières propriétés les plus remarquables et utiles à notre exposé sont les suivantes:
- Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $\tau : W^{1,p}(\Omega) \to W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$ est linéaire surjectif et

$$\|\tau(u)\|_{\frac{1}{p'},p} \leq C\|u\|_{1,p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

- Comme Ω est régulier, toute fonction $u \in W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$ est la trace d'une fonction $\widehat{u} \in W_0^{1,p}(G)$, i.e. $\widehat{u}_{|\partial\Omega} = u$, où G est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant $\overline{\Omega}$. Pour plus des détails sur les espaces traces, voir par exemple C.B.Jr. Morrey [67], J. Nečas [70], J.L. Lions et E. Magenes [62] et J. Droniou [48].

Les espaces $L^p([0,T];X)$

Dans cette partie, on présente quelques résultats très utiles sur les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach. On suppose que X est un espace de Banach et $T > 0$. Nous définissons les espaces suivants :

$$C([0,T];X) = \{u : [0,T] \to X \text{ continue }\},$$

$$L^p(0,T;X) = \left\{u : (0,T) \to X \text{ mesurable} \,;\, \int_0^T \|u(t)\|_X dt < \infty\right\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$L^\infty(0,T;X) = \{u : (0,T) \to X \text{ mesurable} \,; \exists C > 0 \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p. } t\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{C > 0;\ \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p. } t\}.$$

Remarque 1.1.2 *Pour tout* $1 \leq p < \infty$, $L^p(0,T;X)$ *est un espace de Banach et* $C([0,T];X)$ *est dense dans* $L^p(0,T;X)$. *Si* $1 < p < \infty$ *et si* X *est réflexif, alors* $L^p(0,T;X)$ *est réflexif (cf. H. Brezis [32] et J. Droniou [49]).*

Théorème de Egorov : Si $f_n : (0,T) \to X$ est une suite de fonctions qui converge presque partout vers f, alors $\forall \varepsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable $A_\varepsilon \subset (0,T)$ tel que $|A_\varepsilon| < \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur $(0,T)\backslash A_\varepsilon$.

Le théorème de Vitali est l'un des résultats de base de l'intégration, il repose sur la définition suivante :

Définition 1.1.3 *Soit* $1 \leq p < \infty$. *On dit qu'une suite de fonctions* $(f_n)_n$ *de* $L^p([0,T];X)$ *est p-équi-intégrable si elle vérifie la condition suivante :* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *tel que* $\forall n \geq 1,\ \forall A \subset (0,T)$ *mesurable avec* $|A| < \delta$, *on ait*

$$\int_A \|f_n(t)\|_X^p dt < \varepsilon.$$

Remarque 1.1.4 *Une fonction* $f \in L^p([0,T];X)$ *est p-équi-intégrable (cf. J. Droniou [49]).*

Théorème de Vitali : Soit $1 \leq p < \infty$. Si $(f_n)_n$ de $L^p([0,T];X)$ convergeant presque partout vers f, alors

$$f_n \to f \text{ dans } L^p(0,T;X) \text{ si et seulement si } (f_n)_n \text{ est p-équi-intégrable.}$$

Le dual de $L^p([0,T];X)$

Soit X^* le dual de X, nous intéressons à la caractérisation des fonctionnelles linéaires continues sur $L^p(0,T;X)$. Rappelons qu'une application $\psi : (0,T) \to X^*$ est dite faiblement $*$ mesurable si l'application $t \mapsto \langle x, \psi(t)\rangle$ est mesurable pour tout $x \in X$. Muni de cette définition, on présente le théorème suivant:

Théorème 1.1.5 *[35, Theorem 1.5.4] Soit $1 \le p < \infty$, alors pour tout $\Gamma \in (L^p(0,T;X))^*$ il existe une fonction $\psi : (0,T) \to X^*$ telle que*
- *ψ est faiblement $*$ mesurable*
- *L'application $t \mapsto \|\psi(t)\|_{X^*}$ est mesurable et appartient à $L^{p'}(0,T)$*
- $\Gamma(f) = \int_0^T \langle f(t), \psi(t)\rangle dt$ *pour tout* $f \in L^p(0,T;X)$
- $\|\Gamma\| = \| \|\psi(\cdot)\|_{X^*}\|_{p'}$.

Inversement, toute fonction $\psi : (0,T) \to X^*$ w^*-mesurable pour laquelle il existe $g' \in L^{p'}(0,T)$ telle que $\|\psi(t)\|_{X^*} \le g(t)$ p.p. $t \in (0,T)$, induit, par la troisième propriété, une fonctionnelle linéaire continue Γ sur $L^p(0,T;X)$, de norme inférieure ou égale à $\|g\|_{p'}$.

Le théorème précédent donne une bonne caractérisation des fonctionnelles linéaires continues sur $L^p(0,T;X)$; cependant une structure vectorielle fait défaut, dans le sens que si ψ_1, ψ_2 sont associées à $\Gamma_1, \Gamma_2, \psi_1 + \psi_2$ peut ne pas convenir à $\Gamma_1 + \Gamma_2$. Cela est due notamment au fait que la mesurabilité de $t \mapsto \|\psi_1(t)\|, \|\psi_2(t)\|$ ne garantit pas la mesurabilité de $t \mapsto \|\psi_1(t) + \psi_2(t)\|$. Pour y remédier, on procède comme suit :

Soit $1 \le q \le \infty$. On note par $L^q(0,T;w^* - X^*)$ l'espace des fonctions $\psi : (0,T) \to X^*$ faiblement $*$ mesurables pour lesquelles il existe $g \in L^q(0,T)$ telle que

$$\|\psi(t)\|_{X^*} \le g(t) \text{ pour presque tout } t \in (0,T).$$

Considérons dans $L^q(0,T;w^* - X^*)$ la relation d'équivalence $\overset{*}{\sim}$, définie par

$$\psi_1 \overset{*}{\sim} \psi_2 \Leftrightarrow \text{ pour tout } x \in X, \langle x, \psi_1(t)\rangle = \langle x, \psi_2(t)\rangle \text{ p.p. } t \in (0,T).$$

Soit $\mathbf{L}^q(0,T;w^* - X^*)$ l'espace quotient induit par $\overset{*}{\sim}$. On définit la norme d'une classe $[\psi]$ comme

$$|||[\psi]|||_q = \inf \|g\|_q,$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les fonctions $g \in L^q(0,T)$ pour lesquelles il existe une certaine $\psi_0 \in [\psi]$ telle que $\|\psi_0(t)\|_{X^*} \le g(t)$ pour presque tout t.

Proposition 1.1.6 *Soit $1 \le q \le \infty$. Alors l'espace $\mathbf{L}^q(0,T;w^* - X^*)$ muni de la norme $|||[\cdot]|||_q$ est un espace de Banach.*

Soit $1 \leq p \leq \infty \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1\right)$ et soit l'application

$$\mathcal{I} : L^{p'}(0,T; w^* - X^*) \longrightarrow (L^p(0,T;X))^*$$
$$[\psi] \longrightarrow \mathcal{I}[\psi] \quad \text{définie par } \mathcal{I}[\psi](f) = \int_\Omega \langle f(t), \psi_0(t)\rangle \, dt$$

où $\psi_0 \in [\psi]$. A partir de l'application $\mathcal{I}$, on peut reformuler le Théorème 1.1.5 comme suit :

Théorème 1.1.7 *[35, Theorem 1.5.5] Soit $1 \leq p < \infty$, alors l'application linéaire $\mathcal{I}$ est un isomorphisme isométrique sur $(L^p(0,T;X))^*$, et pour tout $[\psi] \in L^{p'}(0,T; w^* - X^*)$ il existe $\psi_0 \in [\psi]$ telle que la fonction $t \mapsto \|\psi_0(t)\|_{X^*}$ est mesurable et appartient à $L^{p'}(0,T)$, et $| \, \|[\psi]\| \, \|_{p'} = \| \, \|\psi_0(\cdot)\|_{X^*} \, \|_{p'}$.*

Cas où X est séparable

Lorsque X est séparable, la construction précédente se simplifie considérablement grâce au lemme suivant :

Lemme 1.1.8 *[46, Lemme 1] Soient X un espace de Banach séparable et $\psi : (0,T) \to X^*$ une fonction w^*-mesurable. Alors la fonction $t \mapsto \|\psi(t)\|_{X^*}$ est mesurable.*

En effet, grâce à ce lemme, l'espace $L^q(0,T; w^* - X^*)$ se définit tout simplement comme

$$L^q(0,T; w^* - X^*) := \left\{\psi : (0,T) \to X^* w^* - \text{mesurable} \, ; \int_0^T \|\psi(t)\|_{X^*}^q \, dt < \infty\right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|\psi(\cdot)\|_{L^q(0,T;w^*-X^*)} = \left(\int_0^T \|\psi(t)\|_{X^*}^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.1.2 Espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable

D'après l'énoncé des problèmes locaux, nous pouvons voir que la fonction exposante p dépend de la solution inconnue u et donc elle dépend de la variable spatiale x. Par conséquent, la puissance p peut être écrite comme étant un exposant variable $\pi(x)$ dans le sens suivant

$$\pi(x) = p(u(x)).$$

Ceci nous motive à travailler dans des espaces de Sobolev à exposants variables. Dans cette partie, nous rappelons quelques définitions préliminaires et propriétés de base des espaces de Lebesgue généralisés $L^{\pi(x)}(\Omega)$ et des espaces de Sobolev généralisés $W^{1;\pi(x)}(\Omega)$ et $W^{m;\pi(x)}(\Omega)$. Plus de détails peuvent être trouvés dans [45, 48, 51, 56, 61, 86].

Nous désignons par $C_+(\overline{\Omega})$ l'ensemble suivant

$$C_+(\overline{\Omega}) = \{\pi \in C(\overline{\Omega}) : \pi(x) > 1 \quad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega}\}.$$

Tout au long de cette thèse,

$$\pi^- := \operatorname{ess}\inf_{x\in\Omega} \pi(x) \quad \text{et} \quad \pi^+ := \operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega} \pi(x),$$

pour tout $\pi \in C_+(\overline{\Omega})$. On dit qu'une fonction continue à valeurs réelles $\pi(\cdot)$ est log-Hölder continue dans Ω si

$$\exists C > 0 : \; |\pi(x) - \pi(y)| \leq \frac{C}{\ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right)} \;\; \forall x, y \in \Omega, \;\; |x-y| < \frac{1}{2}. \tag{1.1.1}$$

Nous définissons le modulaire d'une fonction mesurable $u : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$\rho_{\pi(.)}(u) := \int_\Omega |u(x)|^{\pi(x)} dx.$$

L'espace de Lebesgue à exposant variable $L^{\pi(x)}(\Omega)$ est un espace de Banach qui est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que son modulaire

$$\rho_{\pi(.)}(u) < +\infty,$$

est finie, muni de la norme de Luxemburg

$$\|u\|_{L^{(x)}(\Omega)} := \|u\|_{\pi(x)} = \inf\left\{\beta > 0 : \rho_{\pi(\cdot)}\left(\frac{u}{\beta}\right) \leq 1\right\}.$$

L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω. Si

$$1 \leq \pi^- \leq \pi^+ < \infty. \tag{1.1.2}$$

$L^{\pi(x)}(\Omega)$ est séparable et, en particulier, $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{\pi(x)}(\Omega)$. Si on restreindre $\pi(.)$ pour satisfaire

$$1 < \pi^- \leq \pi^+ < \infty,$$

alors $L^{\pi(x)}(\Omega)$ devient réflexif, et son dual est donné pour $\pi'(x) = \frac{\pi(x)}{(\pi(x)-1)}$ par $L^{\pi'(x)}(\Omega)$, où $\pi'(x)$ est le conjugué de $\pi(x)$. Dans ces espaces, une version de l'inégalité Hölder

$$\int_\Omega uv dx \leq \left(\frac{1}{\pi^-} + \frac{1}{\pi^+}\right) \|u\|_{\pi(x)} \|v\|_{\pi'(x)} \leq 2\|u\|_{\pi(x)} \|v\|_{\pi'(x)},$$

est valable pour $u \in L^{\pi(x)}(\Omega)$ et $v \in L^{\pi'(x)}(\Omega)$. Concernant la relation entre le modulaire $\rho_{\pi(\cdot)}(\cdot)$ et la norme $\|\cdot\|_{\pi(x)}$, on rappelle les propriétés suivantes: si $u_k, u \in L^{\pi(x)}(\Omega)$ et $1 < \pi^- \leq \pi^+ < \infty$, alors:

$$\begin{aligned}
&\text{si } \|u\|_{\pi(x)} > 1 \Longrightarrow \|u\|_{\pi(x)}^{\pi^-} \leq \rho_{\pi(x)}(u) \leq \|u\|_{\pi(x)}^{\pi^+};\\
&\text{si } \|u\|_{\pi(x)} < 1 \Longrightarrow \|u\|_{\pi(x)}^{\pi^+} \leq \rho_{\pi(x)}(u) \leq \|u\|_{\pi(x)}^{\pi^-};\\
&\|u_k\|_{\pi(x)} \to 0 \text{ (resp. } +\infty) \Leftrightarrow \rho_{\pi(x)}(u_k) \to 0 \text{ (resp. } +\infty);\\
&\min\left\{\rho_{\pi(x)}(u)^{\frac{1}{\pi_-}}, \; \rho_{\pi(x)}(u)^{\frac{1}{\pi_+}}\right\} \leq \|u\|_{\pi(x)} \leq \max\left\{\rho_{\pi(x)}(u)^{\frac{1}{\pi_-}}, \; \rho_{\pi(x)}(u)^{\frac{1}{\pi_+}}\right\};
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

$$\|u\|_{\pi(x)}^{\pi_-} - 1 \leq \rho_{\pi(x)}(u) \leq \|u\|_{\pi(x)}^{\pi_+} + 1. \tag{1.1.4}$$

Nous définissons maintenant l'espace de Sobolev généralisé $W^{1,\pi(x)}(\Omega)$ comme étant l'ensemble de tous les fonctions $u \in L^{\pi(x)}(\Omega)$ tel que $\nabla u \in L^{\pi(x)}(\Omega)$, qui est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{1,\pi(x)} = \|u\|_{\pi(x)} + \|\nabla u\|_{\pi(x)}.$$

Cet espace est à nouveau un cas particulier des espaces de Sobolev-Orlicz et hérite de nombreuses propriétés de $L^{\pi(x)}(\Omega)$. En particulier, $W^{1,\pi(x)}(\Omega)$ est séparable si $1 \leq \pi^- \leq \pi^+ < \infty$, et réflexive si $1 < \pi^- \leq \pi^+ < \infty$.
Maintenant, nous introduisons l'espace fonctionnel suivant

$$W_0^{1,\pi(\cdot)}(\Omega) := \{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \nabla u \in L^{\pi(\cdot)}(\Omega)\},$$

muni de la norme suivante

$$\|u\|_{W_0^{1,\pi(\cdot)}(\Omega)} := \|u\|_1 + \|\nabla u\|_{\pi(\cdot)}. \tag{1.1.5}$$

Si $\pi \in C(\overline{\Omega})$, alors la norme dans $W_0^{1,\pi(\cdot)}(\Omega)$ est équivalente à $\|\nabla u\|_{\pi(\cdot)}$. Lorsque π est log-Hölder continue, alors $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,\pi(.)}(\Omega)$.
L'espace dual de $W_0^{1,\pi(x)}(\Omega)$ peut être identifié à $W^{-1,\pi'(x)}(\Omega)$ pour $\frac{1}{\pi(x)} + \frac{1}{\pi'(x)} = 1$. Il est muni de la norme.

$$\|v\|_{-1,\pi'(x)} = \inf \left\{ \|v_0\|_{\pi'(x)} + \sum_{i=1}^{N} \|v_i\|_{\pi'(x)} \right\}$$

où la borne inférieure est pris sur toutes les décompositions possibles $v = v_0 - \operatorname{div} F$ avec $v_0 \in L^{\pi'(x)}(\Omega)$ et $F = (v_1, \ldots, v_N) \in \left(L^{\pi'(x)}(\Omega)\right)^N$.

Résumons les propriétés ci-dessus dans la proposition suivante :

Proposition 1.1.9 *([61]).*
1) $W^{1,\pi(x)}(\Omega)$ et $W_0^{1,\pi(x)}(\Omega)$ sont des espaces de Banach qui sont séparables si $\pi(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ et réflexifs si $1 < \pi^- \leq \pi^+ < \infty$.
2) Si $q \in C_+(\overline{\Omega})$ avec $q(x) < \pi^*(x) := \frac{n\pi(x)}{n-\pi(x)}$ pour tout $\pi(x) < n$, alors on a l'injection compacte $W^{1,\pi(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$. En particulier, puisque $\pi(x) < \pi^*(x)$ pour tout $x \in \Omega$ alors

$$W^{1,\pi(x)} \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\pi(x)}(\Omega).$$

3) Il existe une constante $C > 0$ avec $\|u\|_{\pi(x)} \leq C\|\nabla u\|_{\pi(x)}$ pour tout $u \in W_0^{1,\pi(x)}(\Omega)$, donc $\|\nabla u\|_{\pi(x)}$ et $\|u\|_{1,\pi(x)}$ sont deux normes équivalentes sur $W_0^{1,\pi(x)}(\Omega)$.

1.1.3 Autres espaces fonctionnels

Soit $k \geqslant 0$, la fonction de troncature au niveau k est définit par:

$$T_k(r) = \min\{k, \max\{r, -k\}\} = \begin{cases} k & \text{si } r \geqslant k \\ r & \text{si } |r| < k, \\ -k & \text{si } r \leqslant -k. \end{cases}$$

Il est clair que :

1) $T_k(-s) = -T_k(s)$,
2) $|T_k(s)| = \min\{|s|, k\}$,
3) $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(s) = s$,
4) $\lim\limits_{k\to 0} \frac{1}{k} T_k(s) = \text{sign}(s)$,

où

$$\text{sign}(s) := \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0, \\ -1 & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

Pour tout $u \in W^{1,h(.)}(\Omega)$, on note $\tau(u)$ la trace de u sur $\partial\Omega$ au sens usuel. Nous identifions à la frontière u et $\tau(u)$. Soit

$$\mathcal{T}^{1,h(.)}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ measurable such that } T_k(u) \in W^{1,h(.)}(\Omega), \text{ for any } k > 0\right\}.$$

On définit $\mathcal{T}_{tr}^{1,h(.)}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions $u \in \mathcal{T}^{1,h(.)}(\Omega)$ tel qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,h_+}(\Omega)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) $u_n \to u$ p.p. dans Ω.

(ii) $\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u)$ dans $L^1(\Omega)$.

(iii) Il existe une fonction mesurable v sur $\partial\Omega$, telle que $u_n \to v$ p.p. sur $\partial\Omega$.

Dans la suite, la trace de $u \in \mathcal{T}_{tr}^{1,p(.)}(\Omega)$ sur $\partial\Omega$ sera notée $tr(u)$. Si $u \in W^{1,p(.)}(\Omega), tr(u)$ coïncide avec $\tau(u)$ au sens usuel. De plus, pour $u \in \mathcal{T}_{tr}^{1,p(.)}(\Omega)$ et pour tout $k > 0$, $tr(T_k(u)) = T_k(tr(u))$ et si $\varphi \in W^{1,p(.)}(\Omega)$ alors $u - \varphi \in \mathcal{T}_{tr}^{1,h(.)}(\Omega)$ et $tr(u-\varphi) = tr(u) - tr(\varphi)$.
Ensuite, nous définissons le gradient au sens faible d'une fonction mesurable $u \in \mathcal{T}^{1,p(u)}(\Omega)$.

Proposition 1.1.10 *([18]) Pour toute fonction mesurable $u \in \mathcal{T}_0^{1,p(u)}(\Omega)$, il existe une unique fonction mesurable $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$, que nous appelons le très faible gradient de u et notons $v = \nabla u$, tel que*

$$\nabla T_k(u) = v\chi_{\{|u|<k\}} \quad \textit{p.p. } x \in \Omega \textit{ et pour tout } k > 0,$$

où χ_E désigne la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable E.

De plus, si u appartient à $W_0^{1,1}(\Omega)$, alors v coïncide avec le gradient faible de u.

Lemme 1.1.11 *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, u et v finies presque partout et appartenant à $\mathcal{T}_0^{1,p(u)}(\Omega)$ introduits,*

$$\nabla(u+\lambda v) = \nabla u + \lambda \nabla v \quad \textit{p.p. dans} \quad \Omega,$$

où ∇u, ∇v et $\nabla(u+\lambda v)$ sont respectivement les gradients de u, v et $u+\lambda v$ introduit dans la Proposition 1.1.10.

1.2 Sur les opérateurs monotones

Dans ce qui suit, X est un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de X dans X'.

Définition 1.2.1 *On dit que*

i) A est monotone si :

$$\forall u, v \in X, \quad \langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq 0.$$

ii) A est hémicontinue si : pour tous $u, v, w \in X$, l'application $t \mapsto \langle A(u+tv), w\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

iii) A est coercif si :

$$\lim_{\|u\|_X \to +\infty} \frac{\langle A(u), v\rangle}{\|u\|_X} = +\infty.$$

Théorème 1.2.2 *([63]) Soit A un opérateur vérifiant :*

1. A est borné,

2. A est hémi-continu,

3. A est monotone,

4. A est coercif.

Alors A est surjectif de $X \to X'$, i.e. pour $f \in X'$, il existe $u \in X$ tel que $A(u) = f$.

Remarque 1.2.3 *([63]) Le résultat du Théorème 1.2.2 reste vrai si l'on remplace l'hypothèse de monotonie par la Propriété de type (M):*

A est de type (M) si :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u \textit{ dans } X \\ A(u_n) \rightharpoonup \chi \textit{ dans } X' \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \chi, u\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \chi = A(u)$$

1.3 Résultats Fondamentaux

Lemme 1.3.1 *[38] Nous supposons que*

$$1 < \alpha \leq q_n(x) \leq \beta < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\textit{pour tout } x \in \Omega, \textit{ et pour certains constantes } \alpha \textit{ et } \beta, \tag{1.3.1}$$

$$q_n \to q \textit{ p.p. dans } \Omega, \textit{ quand } n \to \infty, \tag{1.3.2}$$

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ dans } L^1(\Omega)^N, \textit{ quand } n \to \infty, \tag{1.3.3}$$

$$\| |\nabla u_n|^{q_n(x)} \|_1 \leq C, \textit{ pour une certaine constante positive } C \textit{ ne dépend pas de } n. \tag{1.3.4}$$

Alors $Du \in L^{q(\cdot)}(\Omega)^N$ *et*

$$\liminf_{n \to \infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{q_n(x)} dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^{q(x)} dx. \tag{1.3.5}$$

Preuve. Par l'inégalité de Young on a pour tout $a, b \in \mathbb{R}^N$ et $1 < q < \infty$,

$$a \cdot b \leq |a||b| \leq |a|^q + \frac{|b|^{q'}}{q' q^{\frac{q'}{q}}}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \tag{1.3.6}$$

Si b est une fonction dans $L^\infty(\Omega)^N$ et nous prenons $q = q_n$ dans (1.3.6) et utilisons l'hypothèse (1.3.1), on dérive

$$\int_\Omega (\nabla v_n \cdot b - \frac{|b|^{q_n'(x)}}{q_n'(x) q_n(x)^{\frac{q_n'(x)}{q_n(x)}}}) dx \leq \int_\Omega |\nabla v_n|^{q_n(x)} dx. \tag{1.3.7}$$

En utilisant les hypothèses (1.3.2) et (1.3.3), nous pouvons passer à la limite dans (1.3.7) quand $n \to \infty$, de sorte que

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot b - \frac{|b|^{q'(x)}}{q'(x) q(x)^{\frac{q'(x)}{q(x)}}}) dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^{q_n(x)} dx := L. \tag{1.3.8}$$

On considère alors la fonction suivante b,
$b := \frac{\nabla v}{|\nabla v|} q(x) |\nabla v|^{\frac{1}{kq'(x)-1}}$, avec $|\nabla v|_k := |\nabla v| \wedge k, k > 0$,
où $u \wedge v := \min\{u, v\}$. En prenant cette fonction b dans (1.3.8), on obtient

$$\int_\Omega (|\nabla v|_k q(x) |\nabla v|_k^{\frac{1}{q(x)-1}} - |\nabla v|_k^{\frac{q'(x)}{q'(x)-1}} \frac{q(x)}{q(x)}) dx \leq L,$$

ce qui implique
$$\int_\Omega |\nabla v|_k^{\frac{1}{q(x)-1}+1} dx \leq L.$$
En observant que $\dfrac{1}{q(x)-1}+1=q(x)$, on arrive à
$$\int_\Omega |\nabla v|_k^{q(x)} dx \leq L. \tag{1.3.9}$$
Enfin, on obtient (1.3.5) en faisant k tend vers ∞ dans (1.3.9), et d'après l'hypothèse (1.3.4) nous avons $\nabla u \in L^{q(\cdot)}(\Omega)^N$.

Dans la suite de la thèse, nous traitons des problèmes (p,q)-Laplacien, nous avons donc besoin de l'argument similaire suivant

Lemme 1.3.2 *Soient $p_n, q_n : \mathbb{R} \to [1,+\infty)$ deux fonctions mesurables et $\alpha, \beta \in (1,+\infty)$. On suppose que*

$$1<\alpha \leq q_n(x), p_n(x) \leq \beta < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$q_n \to q,\ p_n \to p \ \textit{p.p. dans } \Omega, \ \textit{quand } n \to \infty,$$
$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \text{ dans } L^1(\Omega)^N, \ \textit{quand } n \to \infty,$$
$$\| |\nabla u_n|^{q_n(x)}\|_{L^1(\Omega)}, |\nabla u_n|^{p_n(x)}\|_{L^1(\Omega)} \leq C, \ C \textit{ est une constante positive ne dépend pas de } n.$$

Alors $|\nabla u_n|^{q(x)}, |\nabla u_n|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$ et
$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{q_n(x)} + |\nabla u_n|^{p_n(x)}\right) dx \geq \int_\Omega \left(|\nabla u|^{q(x)} + |\nabla u|^{p(x)}\right) dx.$$

Preuve. Puisque $1<\alpha \leq q_n(x), p_n(x) \leq \beta < +\infty$, nous pouvons appliquer le Lemme 1.3.1 séparément pour (p_n,p) et (q_n,q) pour obtenir
$$|\nabla u_n|^{p(x)} \in L^1(\Omega), \ \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p_n(x)} dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx,$$
$$|\nabla u_n|^{q(x)} \in L^1(\Omega), \ \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{q_n(x)} dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^{q(x)} dx.$$
En additionnant les inégalités ci-dessus, on en déduit le résultat.

Lemme 1.3.3 *[63] Pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, les assertions suivantes sont vérifiées :*
$$2 \leq p < \infty \Rightarrow \frac{1}{2p-1}|\xi-\eta|^p \leq (|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta)\cdot(\xi-\eta);$$
$$1<p<2 \Rightarrow (p-1)|\xi-\eta|^2 \leq (|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta)\cdot(\xi-\eta)(|\xi|^p+|\eta|^p)^{\frac{2-p}{p}}.$$

Lemme 1.3.4 *Soit $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ et soit $1 \leq p < \infty$. On a*
$$\frac{1}{p}|\xi|^p - \frac{1}{p}|\eta|^p \leq |\xi|^{p-2}\xi(\xi-\eta).$$

Preuve. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^p - px + (p-1)$. On a

$$f(x) \geq \min_{y \in \mathbb{R}^+} f(y) = f(1) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

On prend $x = \frac{|\eta|}{|\xi|}$ (si $|\xi| = 0$, le résultat est trivial) dans la fonction ci-dessus pour obtenir le résultat du lemme en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Lemme 1.3.5 *Soient* $a \geq 0, b \geq 0$ *et soit* $1 \leq p < +\infty$. *On a*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right).$$

Preuve. Si $a = 0$, le résultat est trivial.
Si $a > 0$, on peut écrire l'inégalité sous la forme

$$(1+x)^p \leq 2^{p-1}\left(1 + x^p\right),$$

avec $0 \leq x = \frac{b}{a}$ la fonction

$$f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p},$$

satisfait

$$f(0) = 1 = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

et

$$f(x) > 0, \text{ pour tout } 0 < x < +\infty.$$

Donc, pour $x \geq 0$, f atteint son maximum seulement au point $x = 1$. Comme

$$f(1) = 2^{p-1},$$

le résultat s'ensuit.

Remarque 1.3.6 *Il est clair de voir que sous la condition* $1 \leq p^- \leq p^+ < +\infty$, *on a*

$$(a+b)^{p(x)} \leq 2^{p^+-1}\left(a^{p(x)} + b^{p(x)}\right).$$

Lemme 1.3.7 *(See[19]) Soit* $(v_n)_{n \in N}$ *une suite de fonctions mesurables dans* Ω. *Si* v_n *converge en mesure vers* v *et uniformément borné dans* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *pour un certain* $1 \ll p(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$, *alors* v_n *converge fortement vers* v *dans* $L^1(\Omega)$.

Chapter 2

Étude de certains problèmes locaux et non locaux

Contents

2.1 Existence des solutions faibles pour des problèmes p-Laplacien locaux et non locaux

2.1.1 Motivation

Dans cette section, nous considérons le problème $p(u)$-laplacien suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) = f + g(u)|\nabla u|^{p(u)-1} & \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$ avec une frontière Lipschitzienne $\partial\Omega$, f est une fonction donnée et $p : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ est la fonction exposante de non-linéarité telle que p est continue et $1 < \alpha \leq p \leq \beta < \infty$, pour certaines constantes α, β.

[0] This work

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée et continue qui appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et qui satisfait la condition de signe suivante

$$-g(u)|\nabla u|^{p(\cdot)-1}u \geq 0. \tag{2.1.2}$$

On considère également le problème non local suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u) = f + g(u)|\nabla u|^{p(b(u))-1} & \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

où g satisfait les mêmes hypothèses dans le problème local ci-dessus. On note b une application de $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ telle que b soit continue et bornée. Des exemples appropriés d'application b peuvent être choisis comme

$$b(u) = \|\nabla u\|_\alpha,$$

où

$$b(u) = \|u\|_q, \text{ pour tout } q \leq \alpha^*, \text{ où } \frac{1}{\alpha^*} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{N}.$$

Dans les dernières années, l'étude de ce genre de problèmes suscite beaucoup d'intérêt avec le développement de la mécanique élastique, des fluides électro-rhéologiques, de la restauration d'images, etc. Nous renvoyons le lecteur à [16, 29, 30, 41, 77, 79]. Des résultats d'existence pour différents systèmes elliptiques issus du problème des thermistances et de la modélisation des fluides thermorhéologiques, déjà obtenus par Zhikov [91, 89] et par Antontsev et Rodrigues [17]. La majorité des preuves de ces travaux sont basées sur le théorème du point fixe de Schauder. De nombreuses équations de diffusion et de réaction-diffusion avec des termes non locaux distincts ont été étudiées par différents auteurs comme les travaux pionniers de Chipot et al. [38, 39, 40]. Ouaro et Sawadogo dans [71] ont étudié l'existence et l'unicité de la solution faible et le résultat du stabilité structurelle d'un problème non linéaire de type $p(u)$-Laplacien avec condition aux limites de Neumann homogène à travers une méthode d'approximation et des suites convergentes en terme de mesure de Young. Chipot et al. ont établi l'existence des solutions faibles de problème (2.1.1) avec $g = 0$ dans un travail très intéressant [38], ils ont considéré le problème $p(u)$-Laplacien du prototype suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

ainsi que la question de l'unicité pour le cas unidimensionnel. L'existence de solutions faibles pour sa version non locale également été prouvée.

A notre connaissance, il n'y a que quelques contributions importantes concernant le bien-posé des solutions de ce type des problèmes. L'une est due à Andreianov et al. [18], où les auteurs ont prouvé l'existence de deux types de solutions faibles ainsi que l'unicité de telles solutions Lipschitziennes sous certaines hypothèses.

2.1.2 Le problème local

Nous définissons l'ensemble où nous allons chercher les solutions comme suit

$$W_0^{1,p(u)}(\Omega) := \Big\{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \int_\Omega |\nabla u|^{p(u)} dx < \infty\Big\}.$$

Si $1 < p(u) < \infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, cet ensemble est un espace de Banach pour la norme $\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$ définie dans (1.1.5) (voir [18], Proposition 2.3) qui est équivalente à $\|\nabla u\|_{p(u)}$ dans le cas où $p(u) \in C(\overline{\Omega})$. Si pour une constante $\alpha, 1 < \alpha \leq p, p$ est continue, alors $W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, par conséquent il est séparable et réflexif.

Définition 2.1.1 *On suppose que la fonction* p *donnée dans* (2.1.1) *est continue et que*

$$1 < \alpha \leq p(u) \leq \beta < \infty \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{2.1.4}$$

pour certaines constantes α *et* β*. Supposons également que*

$$f \in W^{-1,\alpha'}(\Omega). \tag{2.1.5}$$

Une fonction $u \in W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ *est dite solution faible du problème* (2.1.1)*, si*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{p(u)-1} v dx + \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p(u)}(\Omega),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *désigne le crochet de dualité entre* $(W_0^{1,p(u)}(\Omega))'$ *et* $W_0^{1,p(u)}(\Omega)$.

Notez que $q = p(u) \in \mathcal{Q}(\Omega)$ et que l'infimum essentiel q_- et le supremum essentiel q_+ satisfont à (1.1.2) pour tout $u \in W_0^{1,p(u)}(\Omega)$.

Théorème 2.1.2 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$*, un domaine borné avec une frontière* $\partial\Omega$ *Lipschitzienne. Supposons que*

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty) \text{ est une fonction Lipschitzienne-continue }, \tag{2.1.6}$$

et que la condition (2.1.5) *est vérifiée. Si*

$$N < \alpha \leq p(u) \leq \beta < \infty \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{2.1.7}$$

alors il existe, au moins, une solution faible au problème (2.1.1) *au sens de la Définition* 2.1.1.

Preuve. La preuve du Théorème 2.1.2 est divisée en plusieurs étapes.

Etape 1 : Approximation

Pour chaque $\varepsilon > 0$, nous considérons le problème auxiliaire suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) - g(u)|\nabla u|^{p(u)-1} + \varepsilon\left(-\operatorname{div}(|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u) - g(u)|\nabla u|^{\beta-1}\right) = f \ \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

Pour une fonction exposante p satisfaisant (2.1.6) et (2.1.7), on dit qu'une fonction u est une solution faible du problème régularisé (2.1.8), si

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,\beta}(\Omega), \\ \int_\Omega |\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{p(u)-1} v dx \\ +\varepsilon\left(\int_\Omega |\nabla u|^{\beta-2}\nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{\beta-1} v dx\right) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega), \end{cases}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la crochet de dualité entre $W^{-1,\alpha'}(\Omega)$ et $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$.

Proposition 2.1.3 *Pour chaque $\varepsilon > 0$, le problème (2.1.8) admet une solution faible u_ε.*

Preuve. Soit $w \in L^2(\Omega)$, d'après (2.1.7), nous avons

$$N < \alpha \leq p(w) \leq \beta < \infty \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega. \tag{2.1.9}$$

donc,

$$f \in W^{-1,\alpha'}(\Omega) \subset W^{-1,\beta'}(\Omega)\,,$$

et, par la théorie des opérateurs monotones, le problème admet une solution unique $u = u_w$

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,\beta}(\Omega), \\ \int_\Omega |\nabla u|^{p(w)-2}\nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{p(w)-1} v dx \\ +\varepsilon\left(\int_\Omega |\nabla u|^{\beta-2}\nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{\beta-1} v dx\right) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega), \end{cases} \tag{2.1.10}$$

Si l'on prend $v = u$ comme fonction test dans (2.1.10), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(w)} dx - \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{p(w)-1} u dx + \varepsilon\left(\int_\Omega |\nabla u|^{\beta} dx - \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{\beta-1} u dx\right) \\ = \langle f, u\rangle.$$

Nous utilisons la condition (2.1.2) et l'inégalité Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^{\beta} dx \leq \|f\|_{-1,\alpha'}\|\nabla u\|_\alpha + \varepsilon \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{\beta-1} u dx.$$

Grâce à l'inégalité de Young et au fait que g est une fonction bornée, on a

$$\varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^\beta dx \leq C_1 \|\nabla u\|_\beta + C_2 \int_\Omega |\nabla u|^\beta dx + C_3 \int_\Omega |u|^\beta dx.$$

Ainsi,

$$\varepsilon \|\nabla u\|_\beta^\beta \leq C_1 \|\nabla u\|_\beta + C_2 \|\nabla u\|_\beta^\beta + C_4 \|\nabla u\|_\beta^\beta.$$

On obtient

$$\|\nabla u\|_\beta \leq C, \tag{2.1.11}$$

où $C = C(\alpha, \beta, \Omega, \varepsilon, f)$ indépendant de w. Puisque $\beta > N \geq 2$ on a $W_0^{1,\beta}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, est compact et

$$\|u\|_2 = \|u_w\|_2 \leq C,$$

pour une constante positive $C = C(\alpha, \beta, \Omega, \varepsilon, f, d)$ indépendante de w. On définit $T := \{v \in L^2(\Omega) \ : \|v\|_2 \leq C\}$, et on considère l'application

$$T \ni w \to u_w \in T, \tag{2.1.12}$$

cette application est continue. En effet, nous supposons que w_n est une suite dans $L^2(\Omega)$ telle que

$$w_n \to w \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.1.13}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit u_n la solution du problème (2.1.10) associé à $w = w_n$. Par (2.1.11), on a

$$\|\nabla u_n\|_\beta \leq C.$$

Donc, pour une certaine sous-suite encore appelée u_n et un certain u, nous avons

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\beta}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty, \tag{2.1.14}$$

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.1.15}$$

D'après (2.1.10), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(w_n)-2}\nabla u_n + \varepsilon |\nabla u_n|^{\beta-2}\nabla u_n\right) \cdot \nabla v dx \\ &- \int_\Omega \left(g(u_n)|\nabla u_n|^{p(w_n)-1} + \varepsilon g(u_n)|\nabla u_n|^{\beta-1}\right) v dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

En utilisant la monotonicité, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(w_n)-2}\nabla u_n + \varepsilon |\nabla u_n|^{\beta-2}\nabla u_n\right) \cdot \nabla (u_n - v) dx \\ &\quad - \int_\Omega \left(g(u_n)|\nabla u_n|^{p(w_n)-1} + \varepsilon g(u_n)|\nabla u_n|^{\beta-1}\right) (u_n - v) dx \\ &\quad - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(w_n)-2}\nabla v + \varepsilon |\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right) \cdot \nabla (u_n - v) dx \\ &+ \int_\Omega \left(g(v)|\nabla v|^{p(w_n)-1} + \varepsilon g(v)|\nabla v|^{\beta-1}\right) (u_n - v) dx \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

En prenant $v = u_n - v$ dans (2.1.16) et en utilisant (2.1.17), on obtient

$$\begin{aligned} &\langle f, u_n - v\rangle - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(w_n)-2}\nabla v - \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u_n - v)dx \\ &+ \int_\Omega \left(g(v)|\nabla v|^{p(w_n)-1} + \varepsilon g(v)|\nabla v|^{\beta-1}\right)(u_n - v)dx \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Grâce à l'hypothèse (2.1.6) et la convergence (2.1.13), nous pouvons appliquer le théorème de convergence de Lebesgue, donc

$$|\nabla v|^{p(w_n)-2}\nabla v \to |\nabla v|^{p(w)-2}\nabla v \quad \text{fortement dans} \quad L^{\beta'}(\Omega)^N, \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{2.1.19}$$

et

$$g(v)|\nabla v|^{p(w_n)-1} \to g(v)|\nabla v|^{p(w)-1} \quad \text{fortement dans} \quad L^{\beta'}(\Omega)^N, \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.1.20}$$

En combinant les convergences (2.1.14), (2.1.19) et (2.1.20) on peut passer à la limite dans (2.1.18) pour obtenir

$$\begin{aligned} &\langle f, u - v\rangle - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(w)-2}\nabla v + \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u - v)dx \\ &+ \int_\Omega \left(g(v)|\nabla v|^{p(w)-1} + \varepsilon g(v)|\nabla v|^{\beta-1}\right)(u - v)dx \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Soit $z \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ et $\delta > 0$, on prend $v = u \pm \delta z$, dans (2.1.21), on en déduit

$$\begin{aligned} \pm \Big[&\langle f, z\rangle - \int_\Omega \left(|\nabla(u \pm \delta z)|^{p(w)-2}\nabla(u \pm \delta z) + \varepsilon|\nabla(u \pm \delta z)|^{\beta-2}\nabla(u \pm \delta z)\right)\cdot\nabla z dx \\ &+ \int_\Omega \left(g(u \pm \delta z)|\nabla u \pm \delta z|^{p(w)-1}(u \pm \delta z) + \varepsilon g(u \pm \delta z)|\nabla u \pm \delta z|^{\beta-1}(u \pm \delta z)\right) z dx\Big] \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

En faisant δ tend vers zéro dans (2.1.22), il en résulte que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(w)-2}\nabla u + \varepsilon|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u\right)\cdot\nabla z dx \\ &- \int_\Omega \left(g(u)|\nabla u|^{p(w)-1} + \varepsilon g(u)|\nabla v|^{\beta-1}\right) z dx = \langle f, z\rangle \quad \forall z \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{aligned}$$

Signifie que $u = u_w$. D'après la convergence (2.1.15) et puisque la limite est déterminée d'une manière unique, on trouve

$$u_{w_n} \to u_w \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

on en déduit que l'application (2.1.12) est continue. Par conséquent, d'après le théorème du point fixe de Schauder, cette application admet un point fixe.

Cela signifie que, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $u_\varepsilon \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)-2}\nabla u_\varepsilon \nabla v dx - \int_\Omega g(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)-1} v dx + \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{\beta-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx$$
$$-\varepsilon \int_\Omega g(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{\beta-1} v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \tag{2.1.23}$$

De plus,

$$N < \alpha \leq p(u_\varepsilon) \leq \beta < \infty \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega.$$

Étape 2 : Passage à la limite en tant que $\varepsilon \to 0$

En prenant $v = u_\varepsilon$ dans (2.1.23), on obtient

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} - g(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)-1} u_\varepsilon\right) dx + \varepsilon \int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^{\beta} - g(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{\beta-1} u_\varepsilon\right) dx = \langle f, u_\varepsilon\rangle.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{\alpha} dx \leq C \| |\nabla u_\varepsilon|^{\alpha} \|_{\frac{p(u_\varepsilon)}{\alpha}} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} dx + 1 \right)^{\frac{1}{\left(\frac{p(u_\varepsilon)}{\alpha}\right)_-}}$$
$$\leq C \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} dx + 1 \right), \tag{2.1.24}$$

où $C = C(\alpha, \beta, \Omega)$. Par conséquent

$$\langle f, u_\varepsilon\rangle \leq C \|\nabla u_\varepsilon\|_\alpha \leq C \Big(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} dx + 1 \Big)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.1.25}$$

Grâce à (2.1.25) et en appliquant l'inégalité de Young, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} dx + \varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_\beta^\beta \leq C. \tag{2.1.26}$$

On peut aussi déduire que

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_\alpha \leq C, \tag{2.1.27}$$

où C est une constante positive qui ne dépend pas de ε.

Puisque $\alpha > N \geqslant 2$ alors l'injection $W_0^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compact. Par conséquent, nous avons pour une certaine sous-suite (encore d'indice n) et un certain u

$$u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty, \tag{2.1.28}$$
$$\nabla u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{dans} \quad L^{\alpha}(\Omega)^N, \quad \text{quand} \quad n \to \infty, \tag{2.1.29}$$
$$u_{\varepsilon_n} \to u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$
$$u_{\varepsilon_n} \to u \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega, \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.1.30}$$

La convergence (2.1.30) implique que

$$p(u_{\varepsilon_n}) \to p(u) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega, \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.1.31}$$

Nous rappelons que

$$N < \alpha \leq p(u_{\varepsilon_n}) \leq \beta << \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{for} \quad \text{p.p.quad} x \in \Omega. \tag{2.1.32}$$

Nous remplaçons u_{ε_n} par u_ε dans (2.1.26), selon (2.1.29), (2.1.31) et (2.1.32) ainsi, nous pouvons appliquer le Lemme 1.3.1, nous obtenons

$$u \in W_0^{1,p(u)}(\Omega). \tag{2.1.33}$$

Nous employons la monotonicité pour déduire

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(|\nabla u_{\varepsilon_n}|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla u_{\varepsilon_n} + \varepsilon|\nabla u_{\varepsilon_n}|^{\beta-2}\nabla u_{\varepsilon_n}\right) \cdot \nabla(u_{\varepsilon_n} - v)dx \\
&\quad - \int_\Omega \left(g(u_{\varepsilon_n})|\nabla u_{\varepsilon_n}|^{p(u_{\varepsilon_n})-1} + \varepsilon_n g(u_{\varepsilon_n})|\nabla u_{\varepsilon_n}|^{\beta-1}\right)(u_{\varepsilon_n} - v)dx \\
&\qquad - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla v + \varepsilon_n|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right) \cdot \nabla(u_{\varepsilon_n} - v)dx \\
&\qquad\quad + \int_\Omega \left(g(v)|\nabla v|^{p(u_{\varepsilon_n})-1} + \varepsilon_n g(v)|\nabla v|^{\beta-1}\right)(u_{\varepsilon_n} - v)dx \geq 0 \\
&\forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.1.34}$$

En remplaçant u_{ε_n} par u_ε et en prenant $u_{\varepsilon_n} - v$ à la place de v dans l'égalité (2.1.23), l'inégalité (2.1.34) devient

$$\begin{aligned}
\langle f, u_{\varepsilon_n} - v\rangle - \Bigg(&\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla v + \varepsilon_n|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right) \cdot \nabla(u_{\varepsilon_n} - v)dx \\
&- \int_\Omega \left(g(v)|\nabla v|^{p(u_{\varepsilon_n})-1} + \varepsilon_n g(v)|\nabla v|^{\beta-1}\right)(u_{\varepsilon_n} - v)dx\Bigg) \geq 0,
\end{aligned}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

En utilisant (2.1.31), et le théorème du convergence de Lebesgue, on a pour tout v

$$|\nabla v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla v \to |\nabla v|^{p(u)-2}\nabla v \quad \text{dans} \quad L^{\alpha'}(\Omega)^N, \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{2.1.35}$$

et

$$g(v)|\nabla v|^{p(u_{\varepsilon_n})-1} \to g(v)|\nabla v|^{p(u)-1} \quad \text{dans} \quad L^{\alpha'}(\Omega)^N, \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.1.36}$$

Selon l'estimation (2.1.27), les convergences (2.1.28), (2.1.35) et (2.1.36), on peut passer à la limite dans (**??**) lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle f, u - v\rangle - \Bigg(&\int_\Omega |\nabla v|^{p(u)-2}\nabla v \cdot \nabla(u - v)dx \\
&- \int_\Omega g(v)|\nabla v|^{p(u)-1}(u - v)dx\Bigg) \geq 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.1.37}$$

En faisant intervenir les hypothèses (2.1.6) et (2.1.7), $p(u)$ est log-Hölder continue ce qui implique que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p(u)}(\Omega)$. Ainsi, (2.1.37) est vraie pour tout $v \in$

$W_0^{1,p(u)}(\Omega)$. Soit $z \in W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ et $\delta > 0$, on peut donc prendre $v = u \pm \delta z$ dans l'inégalité (2.1.37) pour obtenir

$$\pm\left(\langle f, z\rangle - \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u \cdot \nabla z dx - \int_\Omega g(v)|\nabla v|^{p(u)-1} z dx\right)\right) \geq 0.$$

Ce qui implique,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u \cdot \nabla z dx - \int_\Omega g(v)|\nabla v|^{p(u)-1} z dx = \langle f, z\rangle \quad \forall z \in W_0^{1,p(u)}(\Omega). \tag{2.1.38}$$

Finalement, on conclut que u est une solution faible du problème (2.1.1).

2.1.3 Le problème non local

En plus du problème (2.1.1), nous considérons dans cette section sa version non-locale. Tout d'abord, nous définissons l'ensemble suivante

$$W_0^{1,p(b(u))}(\Omega) := \{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))} dx < \infty\},$$

où p est une fonction réelle telle que

$$p \text{ est continue,} \quad 1 < \alpha \leq p \leq \beta, \tag{2.1.39}$$

pour certaines constantes, α et β. b est une application de $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$b \text{ est continue et bornée.} \tag{2.1.40}$$

Définition 2.1.4 *On dit qu'une fonction u est une solution faible de problème (2.1.3) si*

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p(b(u))}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{p(b(u))-1} v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p(b(u))}(\Omega)\,, \end{cases} \tag{2.1.41}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le crochet de dualité entre $\left(W_0^{1,p(b(u))}(\Omega)\right)'$ et $W_0^{1,p(b(u))}(\Omega)$.

Théorème 2.1.5 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$, nous supposons que (2.1.39) et (2.1.40) sont satisfaites. De plus, soit $f \in W^{-1,\alpha'}(\Omega)$ et $\alpha > N$. Alors il existe au moins une solution faible au problème (2.1.3) au sens de la Définition 2.1.4.*

La preuve du Théorème 2.1.5 est divisée en plusieurs étapes.

Étape 1: Approximation Pour chaque $\varepsilon > 0$, on considère le problème auxiliaire

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u) - g(u)|\nabla u|^{p(b(u))-1} + \varepsilon\left(-\operatorname{div}(|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u) - g(u)|\nabla u|^{\beta-1}\right) = f \ \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.42}$$

Pour une fonction exposante p satisfaisant (2.1.39) et (2.1.6), on dit qu'une fonction u est une solution faible du problème régularisé (2.1.42), si

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,\beta}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u\cdot\nabla v dx - \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{p(b(u))-1} v dx \\ \displaystyle+\varepsilon\left(\int_\Omega |\nabla u|^{\beta-2}\nabla u\cdot\nabla v dx - \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{\beta-1} v dx\right) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega), \end{cases}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le crochet de dualité entre $W^{-1,\alpha'}(\Omega)$ et $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$.

Proposition 2.1.6 *Pour chaque $\varepsilon > 0$, le problème (2.1.42) admet une solution faible u_ε.*

Preuve. Soit $w \in L^2(\Omega)$, d'après (2.1.39), nous avons

$$N < \alpha \le p(w) \le \beta < \infty \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega. \tag{2.1.43}$$

Donc,

$$f \in W^{-1,\alpha'}(\Omega) \subset W^{-1,\beta'}(\Omega),$$

et, par la théorie usuelle des opérateurs monotones, il existe une solution unique $u = u_w$ du problème

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,\beta}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(b(w))-2}\nabla u\cdot\nabla v dx - \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{p(b(w))-1} v dx \\ \displaystyle+\varepsilon\left(\int_\Omega |\nabla u|^{\beta-2}\nabla u\cdot\nabla v dx - \int_\Omega g(u)|\nabla u|^{\beta-1} v dx\right) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{cases} \tag{2.1.44}$$

En prenant $v = u_w$ comme fonction test dans (2.1.44), on déduit

$$\int_\Omega |\nabla u_w|^{p(b(w))} dx - \int_\Omega g(u_w)|\nabla u_w|^{p(b(w))-1} u_w dx + \varepsilon\left(\int_\Omega |\nabla u_w|^\beta dx - \int_\Omega g(u_w)|\nabla u_w|^{\beta-1} u_w dx\right) = \langle f, u_w\rangle.$$

Au vu de (2.1.2) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\varepsilon\int_\Omega |\nabla u_w|^\beta dx \le \|f\|_{-1,\alpha}\|\nabla u_w\|_\alpha + \varepsilon\int_\Omega g(u_w)|\nabla u_w|^{\beta-1} u_w dx.$$

Grâce à l'inégalité de Young et au fait que g est une fonction bornée, on obtient

$$\varepsilon\int_\Omega |\nabla u_w|^\beta dx \leq C_1\|\nabla u_w\|_\beta + C_2\int_\Omega |\nabla u_w|^\beta dx + C_3\int_\Omega |u_w|^\beta dx.$$

Ainsi,

$$\varepsilon\|\nabla u_w\|_\beta^\beta \leq C_1\|\nabla u_w\|_\beta + C_2\|\nabla u_w\|_\beta^\beta + C_4\|\nabla u_w\|_\beta^\beta.$$

On obtient

$$\|\nabla u_w\|_\beta \leq C, \tag{2.1.45}$$

où $C = C(\alpha,\beta,\Omega,\varepsilon,f)$ indépendant de w. Puisque $\beta > N \geq 2$ on a $W_0^{1,\beta}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte et donc

$$\|u_w\|_2 \leq C,$$

pour une constante positive $C = C(\alpha,\beta,\Omega,\varepsilon,f,)$ indépendante de w. On définit $T := \{v \in L^2(\Omega) \ : \|v\|_2 \leq C\}$, et on considère l'application

$$T \ni w \to u_w \in T. \tag{2.1.46}$$

Tout d'abord, nous montrons que cette application est continue, nous supposons que w_n est une suite dans $L^2(\Omega)$ telle que

$$w_n \to w \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.1.47}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit u_n la solution du problème (2.1.44) associé à $w = w_n$. Par (2.1.45), on a

$$\|\nabla u_n\|_\beta \leq C.$$

Donc, pour une certaine sous suite encore notée u_n et un certain u, nous avons

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\beta}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty, \tag{2.1.48}$$

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.1.49}$$

Selon (2.1.44), nous avons

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(b(w_n))-2}\nabla u_n + \varepsilon|\nabla u_n|^{\beta-2}\nabla u_n\right)\cdot\nabla v dx \\ &-\int_\Omega \left(g(u_n)|\nabla u_n|^{p(b(w_n))-1} + \varepsilon g(u_n)|\nabla u_n|^{\beta-1}\right) v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega).\end{aligned} \tag{2.1.50}$$

En employant la monotonicité, nous avons

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(b(w_n))-2}\nabla u_n + \varepsilon|\nabla u_n|^{\beta-2}\nabla u_n\right)\cdot\nabla(u_n - v) dx \\ &-\int_\Omega \left(g(u_n)|\nabla u_n|^{p(b(w_n))-1} + \varepsilon g(u_n)|\nabla u_n|^{\beta-1}\right)(u_n - v) dx \\ &-\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(b(w_n))-2}\nabla v + \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u_n - v) dx \\ &+\int_\Omega \left(g(v)|\nabla v|^{p(b(w_n))-1} + \varepsilon g(v)|\nabla v|^{\beta-1}\right)(u_n - v) dx \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega).\end{aligned} \tag{2.1.51}$$

Nous prenons $v = u_n - v$ dans (2.1.50) et grâce à (2.1.51), on obtient

$$\begin{aligned} &\langle f, u_n - v\rangle - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(b(w_n))-2}\nabla v - \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u_n - v)dx \\ &+ \int_\Omega \left(g(v)|\nabla v|^{p(b(w_n))-1} + \varepsilon g(v)|\nabla v|^{\beta-1}\right)(u_n - v)dx \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.1.52}$$

En utilisant (2.1.6) et (2.1.47), nous pouvons appliquer le théorème de Lebesgue, donc

$$|\nabla v|^{p(b(w_n))-2}\nabla v \to |\nabla v|^{p(b(w))-2}\nabla v \quad \text{fortement dans} \quad L^{\beta'}(\Omega)^N, \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{2.1.53}$$

et

$$g(v)|\nabla v|^{p(b(w_n))-1} \to g(v)|\nabla v|^{p(b(w))-1} \quad \text{fortement dans} \quad L^{\beta'}(\Omega)^N, \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.1.54}$$

En combinant (2.1.48), (2.1.53) et (2.1.54) nous pouvons passer à la limite dans (2.1.52), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\langle f, u - v\rangle - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(b(w))-2}\nabla v + \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u - v)dx \\ &+ \int_\Omega \left(g(v)|\nabla v|^{p(b(w))-1} + \varepsilon g(v)|\nabla v|^{\beta-1}\right)(u - v)dx \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.1.55}$$

Soit $z \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ et $\delta > 0$, en prenant $v = u \pm \delta z$ dans (2.1.55) on obtient

$$\begin{aligned} &\pm\Big[\langle f, z\rangle - \int_\Omega \left(|\nabla(u\pm\delta z)|^{p(b(w))-2}\nabla(u\pm\delta z) + \varepsilon|\nabla(u\pm\delta z)|^{\beta-2}\nabla(u\pm\delta z)\right)\cdot\nabla z dx \\ &+ \int_\Omega \left(g(u\pm\delta z)|\nabla u\pm\delta z|^{p(b(w))-1}(u\pm\delta z) + \varepsilon g(u\pm\delta z)|\nabla u\pm\delta z|^{\beta-1}(u\pm\delta z)\right) z dx\Big] \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1.56}$$

Nous faisons tendre δ vers 0 dans (2.1.56), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(b(w))-2}\nabla u + \varepsilon|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u\right)\cdot\nabla z dx \\ &- \int_\Omega \left(g(u)|\nabla u|^{p(b(w))-1} + \varepsilon g(u)|\nabla v|^{\beta-1}\right) z dx = \langle f, z\rangle \quad \forall z \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{aligned}$$

Ainsi $u = u_w$. En tenant compte de (2.1.49) et puisque la limite est déterminée de manière unique, nous concluons que

$$u_{w_n} \to u_w \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

on en déduit que l'application (2.1.46) est continue. Par conséquent, d'après le théorème du point fixe de Schauder, cette application admet un point fixe. Cela signifie que, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $u_\varepsilon \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(b(u_\varepsilon))-2}\nabla u_\varepsilon \nabla v dx - \int_\Omega g(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(b(u_\varepsilon))-1} v dx + \varepsilon\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{\beta-2}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla v dx \\ &-\varepsilon\int_\Omega g(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{\beta-1} v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.1.57}$$

De plus,

$$N < \alpha \leq p(b(u_\varepsilon)) \leq \beta < \infty \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega.$$

Étape 2 : Passage à la limite en tant que $\varepsilon \to 0$

En prenant $v = u_\varepsilon$ dans (2.1.57), on obtient

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^{p(b(u_\varepsilon))} - g(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(b(u_\varepsilon))-1}u_\varepsilon\right) dx + \varepsilon \int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^\beta - g(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{\beta-1}u_\varepsilon\right) dx = \langle f, u_\varepsilon\rangle.$$

Nous appliquons l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^\alpha dx \leq C\||\nabla u_\varepsilon|^\alpha\|_{\frac{p(b(u_\varepsilon))}{\alpha}} &\leq C\left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(b(u_\varepsilon))}dx + 1\right)^{\frac{1}{\left(\frac{p(b(u_\varepsilon))}{\alpha}\right)_-}} \\ &\leq C\left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(b(u_\varepsilon))}dx + 1\right),\end{aligned} \tag{2.1.58}$$

où $C = C(\alpha, \beta, \Omega)$. Par conséquent

$$\langle f, u_\varepsilon\rangle \leq C\|\nabla u_\varepsilon\|_\alpha \leq C\Big(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(b(u_\varepsilon))}dx + 1\Big)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

En employant l'inégalité de Young, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(b(u_\varepsilon))}dx + \varepsilon\|\nabla u_\varepsilon\|_\beta^\beta \leq C. \tag{2.1.59}$$

Nous pouvons également déduire que

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_\alpha \leq C,$$

où C est une constante positive qui ne dépend pas de ε.

Puisque $\alpha > N \geqslant 2$, alors l'injection $W_0^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, pour une certaine sous-suite (encore d'indice n) et une certaine fonction u, nous avons

$$u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{2.1.60}$$

$$\nabla u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{dans} \quad L^\alpha(\Omega)^N, \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{2.1.61}$$

$$u_{\varepsilon_n} \to u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

$$u_{\varepsilon_n} \to u \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega, \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{2.1.62}$$

$$p(b(u_{\varepsilon_n})) \to p(b(u)) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega, \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.1.63}$$

Nous remplaçons u_{ε_n} par u_ε dans (2.1.59), en utilisant (2.1.61), (2.1.63) ainsi, nous pouvons appliquer le Lemme 1.3.1, nous obtenons

$$u \in W_0^{1,p(b(u))}(\Omega). \tag{2.1.64}$$

D'après la monotonicité, on a pour tout $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(|\nabla u_{\varepsilon_n}|^{p(b(u_{\varepsilon n}))-2}\nabla u_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n|\nabla u_{\varepsilon_n}|^{\beta-2}\nabla u_{\varepsilon_n}\right)\cdot\nabla(u_{\varepsilon_n}-v)dx\\&\quad -\int_\Omega \left(g(u_{\varepsilon_n})|\nabla u_{\varepsilon_n}|^{p(b(u_{\varepsilon n}))-1} + \varepsilon_n g(u_{\varepsilon_n})|\nabla u_{\varepsilon_n}|^{\beta-1}\right)(u_{\varepsilon_n}-v)dx\\&\qquad -\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(b(u_{\varepsilon n}))-2}\nabla v + \varepsilon_n|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u_{\varepsilon_n}-v)dx\\&\qquad\quad +\int_\Omega \left(g(v)|\nabla v|^{p(b(u_{\varepsilon n}))-1} + \varepsilon_n g(v)|\nabla v|^{\beta-1}\right)(u_{\varepsilon_n}-v)dx \geq 0\end{aligned} \tag{2.1.65}$$

En remplaçant u_{ε_n} par u_ε et en prenant $u_{\varepsilon_n} - v$ à la place de v dans (2.1.57), l'inégalité (2.1.65) devient

$$\begin{aligned}&\langle f, u_{\varepsilon_n}-v\rangle - \Big(\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(b(u_{\varepsilon n}))-2}\nabla v + \varepsilon_n|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u_{\varepsilon_n}-v)dx\\&\quad -\int_\Omega \left(g(v)|\nabla v|^{p(b(u_{\varepsilon n}))-1} + \varepsilon_n g(v)|\nabla v|^{\beta-1}\right)(u_{\varepsilon_n}-v)dx\Big) \geq 0,\end{aligned} \tag{2.1.66}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Selon la convergence (2.1.63), nous appliquons le théorème de convergence de Lebesgue, on aura pour tout v

$$|\nabla v|^{p(b(u_{\varepsilon n}))-2}\nabla v \to |\nabla v|^{p(b(u))-2}\nabla v \quad \text{dans} \quad L^{\alpha'}(\Omega)^N, \quad \text{quand} \quad n\to\infty$$

et

$$g(v)|\nabla v|^{p(b(u_{\varepsilon n}))-1} \to g(v)|\nabla v|^{p(b(u))-1} \quad \text{dans} \quad L^{\alpha'}(\Omega)^N, \quad \text{quand} \quad n\to\infty.$$

Par conséquent, nous pouvons passer à la limite dans (2.1.66) lorsque $n\to\infty$ pour obtenir

$$\begin{aligned}&\langle f, u-v\rangle - \Big(\int_\Omega |\nabla v|^{p(b(u))-2}\nabla v\cdot\nabla(u-v)dx\\&\quad -\int_\Omega g(v)|\nabla v|^{p(b(u))-1}(u-v)dx\Big) \geq 0 \quad \forall v\in C_0^\infty(\Omega).\end{aligned} \tag{2.1.67}$$

En prenant $v = u \pm \delta z$, où $z \in W_0^{1,p(b(u))}(\Omega)$ et $\delta > 0$, dans (2.1.67) on obtient

$$\pm\left(\langle f, z\rangle - \Big(\int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u\cdot\nabla z dx - \int_\Omega g(v)|\nabla v|^{p(b(u))-1} z dx\Big)\right) \geq 0.$$

Ce qui implique,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u\cdot\nabla z dx - \int_\Omega g(v)|\nabla v|^{p(b(u))-1} z dx = \langle f, z\rangle \quad \forall z\in W_0^{1,p(b(u))}(\Omega).$$

Alors, le problème (2.1.3) admet au moins une solution faible.

2.2 Solution faible d'un problème non linéaire de type local et non local

2.2.1 Motivation

L'objectif de cette section est de dériver des résultats d'existence pour de certains problèmes à exposant variable $p(u)$ ou $p(b(u))$. Nous considérons d'abord le cas où la dépendance de p par rapport à u est une quantité locale. Plus précisément, nous étudions le problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) + |u|^{p(u)-2}u = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^{N\geq 2}$, f est une fonction donnée et p est la fonction exposante de non linéarité $p : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ tel que

$$p \text{ est continue } \quad 1 < \alpha \leq p \leq \beta < \infty \quad \text{où } \alpha, \beta \ \text{ sont des constantes .} \tag{2.2.2}$$

Dans la deuxième partie de cette section, nous étudions le problème non local suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u) + |u|^{p(b(u))-2}u = f \quad \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

où $p : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty)$ et $b : W_0^{1,\alpha}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions impliquées dans l'exposant de non-linéarité, pour un certain exposant constant α tel que $1 < \alpha < \infty$.
Ce type de problèmes apparaît dans les applications de certaines techniques numériques pour la méthode de restauration d'images par variation totale qui ont été utilisées dans certains problèmes de restauration du traitement mathématique des images et de la vision par ordinateur [29, 30, 79]. Türola, J. dans [79] ont présenté plusieurs exemples numériques suggérant que la prise en compte des exposants $p = p(u)$ préserve les bords et réduit le bruit des images restaurées u. Un exemple numérique suggérant une réduction du bruit des images restaurées u lorsque l'exposant du terme de régularisation $p = p(|\nabla u|)$ est présenté dans [29]. L'étude de ces problèmes a été récemment développée par Andreianov et al. [18]. Ils ont établi le résultat d'existence partielle et d'unicité de la solution faible dans les cas de condition limite homogène de Dirichlet pour le problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) + u = f \ \text{ in } \ \Omega, \\ \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad \text{on } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

S. Ouaro et N. Sawadogo dans [72] et [73] ont considéré le problème non linéaire de Fourier à valeur limite suivant

$$\begin{cases} b(u) - \operatorname{div} a(x, u, \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ a(x, u, \nabla u) \cdot \eta + \lambda u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les résultats d'existence et d'unicité des solutions entropiques et faibles sont établis par une méthode d'approximation et des suites convergentes en termes de mesure de Young.

2.2.2 L'existence pour le problème local

Dans cette partie, nous prouvons l'existence de solutions faibles pour le problème local (2.2.1) en utilisant une technique de perturbation singulière. Tout d'abord, nous définissons l'espace suivant :

$$W_0^{1,p(u)}(\Omega) := \{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \int_\Omega |\nabla u|^{p(u)} dx < \infty\} \text{ tel que } 1 < p(u) < \infty \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

C'est un espace de Banach pour la norme $\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$ qui est équivalente à $\|\nabla u\|_{p(u)}$ lorsque $p(u) \in C(\overline{\Omega})$. Puisque p est continue, alors dû au fait que $1 < \alpha \leq p$, $W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ est séparable et réflexif.

Définition 2.2.1 *Supposons que* p *vérifie* (2.2.2) *et que*

$$f \in W^{-1,\alpha'}(\Omega). \tag{2.2.4}$$

Une fonction $u \in W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ *est dite solution faible du problème* (2.2.1)*, si*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(u)-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p(u)-2} u v dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p(u)}(\Omega),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *désigne le crochet de dualité entre* $(W_0^{1,p(u)}(\Omega))'$ *et* $W_0^{1,p(u)}(\Omega)$.

Théorème 2.2.2 *Supposons* (2.2.2), (2.2.4) *et*

$$N < \alpha \leq p(u) \leq \beta < +\infty, \tag{2.2.5}$$

si de plus

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty) \text{ est une fonction Lipschitzienne-continue .} \tag{2.2.6}$$

Alors il existe au moins une solution faible au problème (2.2.1) *au sens de la Définition* 2.2.1.

La preuve du Théorème 2.2.2 est divisée en plusieurs étapes.

Étape 1: Problème approximatif

Pour chaque $\varepsilon > 0$, nous considérons le problème auxiliaire suivant (appelé problème régularisé)

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) + |u|^{p(u)-2}u + \varepsilon\left(|u|^{\beta-2}u - \mathrm{div}(|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u)\right) = f \ \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.7}$$

avec

$$N < \alpha \leq p(u) \leq \beta < \infty \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2.2.3 *Pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (2.2.7) admet une solution faible u_ε.*

Preuve Soit $w \in L^2(\Omega)$, alors

$$N < \alpha \leq p(w) \leq \beta < \infty \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega. \tag{2.2.8}$$

Rappelant que $f \in W^{-1,\alpha'}(\Omega) \subset W^{-1,\beta'}(\Omega)$.

Maintenant, nous nous concentrons sur l'opérateur $T_\varepsilon : W_0^{1,\beta}(\Omega) \to W^{-1,\beta'}(\Omega)$ défini par

$$\langle T_\varepsilon(u), v\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(w)-2}\nabla u \cdot \nabla v dx + |u|^{p(w)-2}uv\right) dx + \varepsilon\left[\int_\Omega \left(|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u \cdot \nabla v dx + |u|^{\beta-2}uv\right) dx\right],$$

pour touts $u, v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$. Nous pouvons établir que:

(i) T_ε est continue, bornée et strictement monotone;

(ii) T_ε est coercif.

Selon (i) et (ii), l'opérateur T_ε est continu, strictement monotone (donc, monotone maximal), et coercif. Il s'ensuit que T_ε est un opérateur surjectif strictement monotone (Voir Corollaire 2.8.7, p. 135, [74]). Par conséquent, il existe une solution unique $u_w \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla u_w|^{p(w)-2}\nabla u_w \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u_w|^{p(w)-2}u_w v dx \\ &+\varepsilon\left(\int_\Omega |\nabla u_w|^{\beta-2}\nabla u_w \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u_w|^{\beta-2}u_w v dx\right) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Nous prenons $v = u_w$ dans (2.2.9), on aura

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_w|^{p(w)} dx + \int_\Omega |u_w|^{p(w)} dx + \varepsilon\left(\int_\Omega |u_w|^\beta dx + \int_\Omega |\nabla u_w|^\beta dx\right) &\leq \|f\|_{-1,\alpha'}\|\nabla u_w\|_\alpha \\ &\leq C\|\nabla u_w\|_\beta, \end{aligned}$$

où $C = C(\alpha, \beta, \Omega, f)$, et $\|\cdot\|_{-1,\alpha'}$ est la norme d'opérateur associée à la norme $\|\nabla\cdot\|_{\alpha}$. Par conséquent,

$$\varepsilon\|u_w\|_{1,\beta}^{\beta} \leq C\|\nabla u_w\|_{\beta} \leq C\|u_w\|_{1,\beta}.$$

Ce qui implique que

$$\|u_w\|_{1,\beta} \leq C, \tag{2.2.10}$$

où $C = C(\alpha, \beta, \Omega, \varepsilon, f)$ est une constante positive sans w-dépendance. Puisque $\beta > N \geq 2$, on peut déduire que

$$\|u_w\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \tag{2.2.11}$$

Ensuite, nous introduisons l'application $T : B \to B$ définie par $T(w) = u_w$, sur l'ensemble $B := \left\{v \in L^2(\Omega) : \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\right\}$. L'injection compacte $W_0^{1,\beta}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ implique que $T(B)$ est relativement compact dans B. En faisant appel au théorème du point fixe de Schauder, on sait que la continuité de T est requise pour obtenir un point fixe de T.
En supposant que nous travaillons sur une suite $\{w_n\}$ dans $L^2(\Omega)$ satisfaisant

$$w_n \to w \text{ dans } L^2(\Omega) \quad \text{quand} \quad n \to \infty, \tag{2.2.12}$$

nous désignons par u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la solution de (2.2.9) liée à $w := w_n$. Par conséquent, l'inégalité dans (2.2.10) conduit à

$$\|u_n\|_{1,\beta} \leq C, \quad \text{pour une certaine constante positive (sans dépendance de } n.$$

En passant à une sous suite si nécessaire (notée encore $\{u_n\}$), pour un certain $u \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ nous obtenons

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\beta}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty, \tag{2.2.13}$$

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.2.14}$$

Nous revenons à (2.2.9), de sorte qu'on considère (u_n, w_n) au lieu de (u, w), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(w_n)-2}\nabla u_n + \varepsilon|\nabla u_n|^{\beta-2}\nabla u_n\right) \cdot \nabla v dx \\ &\quad + \int_\Omega \left(|u_n|^{p(w_n)-2}u_n + \varepsilon|u_n|^{\beta-2}u_n\right) v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Puisque l'opérateur du côté gauche de (2.2.2) est monotone, alors

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(w_n)-2}\nabla u_n + \varepsilon|\nabla u_n|^{\beta-2}\nabla u_n\right) \cdot \nabla(u_n - v) dx \\ &+ \int_\Omega \left(|u_n|^{p(w_n)-2}u_n + \varepsilon|u_n|^{\beta-2}u_n\right)(u_n - v) dx - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(w_n)-2}\nabla v + \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right) \cdot \nabla(u_n - v) dx \\ &\quad - \int_\Omega \left(|v|^{p(w_n)-2}v + \varepsilon|v|^{\beta-2}v\right)(u_n - v) dx \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Nous considérons (2.2.2) avec $v = u_n - v$ comme fonction test, nous utilisons (2.2.16) pour obtenir

$$\langle f, u_n - v\rangle - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(w_n)-2}\nabla v + \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u_n - v)dx$$
$$- \int_\Omega \left(|v|^{p(w_n)-2}v + \varepsilon|v|^{\beta-2}v\right)(u_n - v)dx \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \quad (2.2.17)$$

La convergence (2.2.12) implique

$$w_n \to w \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega, \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Puisque p est une fonction continue, nous pouvons appliquer le théorème de Lebesgue (dans $L^{\beta'}(\Omega)^N$), donc

$$|\nabla v|^{p(w_n)-2}\nabla v \to |\nabla v|^{p(w)-2}\nabla v \quad \text{fortement dans} \quad L^{\beta'}(\Omega)^d, \quad \text{quand} \quad n \to \infty \quad (2.2.18)$$

et

$$|v|^{p(w_n)-2}v \to |v|^{p(w)-2}v \quad \text{fortement dans} \quad L^{\beta}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty, \quad (2.2.19)$$

pour tout $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$. Enfin, Nous employons les convergences (2.2.13), (2.2.18) et (2.2.19) pour passer à la limite dans (2.2.17), nous déduisons que

$$\langle f, u - v\rangle - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(w)-2}\nabla v + \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u - v)dx$$
$$- \int_\Omega \left(|v|^{p(w)-2}v + \varepsilon|v|^{\beta-2}v\right)(u - v)dx \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \quad (2.2.20)$$

Ensuite, nous choisissons $v = u \pm \delta y$, avec $y \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ et $\delta > 0$, nous obtenons

$$\pm\Big[\langle f, y\rangle - \int_\Omega \left(|\nabla(u \pm \delta y)|^{p(w)-2}\nabla(u \pm \delta y) + \varepsilon|\nabla(u \pm \delta y)|^{\beta-2}\nabla(u \pm \delta y)\right)\cdot\nabla y dx$$
$$- \int_\Omega \left(|u \pm \delta y|^{p(w)-2}(u \pm \delta y) + \varepsilon|v|^{\beta-2}(u \pm \delta y)\right) y dx\Big] \geq 0. \quad (2.2.21)$$

Nous passons à la limite lorsque δ tend vers zero dans (2.2.21), nous déduisons que

$$\int_\Omega \left(|\nabla(u)|^{p(w)-2}\nabla u + \varepsilon|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u\right)\cdot\nabla y dx$$
$$+ \int_\Omega \left(|u|^{p(w)-2}u + \varepsilon|v|^{\beta-2}u\right) y dx = \langle f, y\rangle \quad \forall y \in W_0^{1,\beta}(\Omega).$$

Ce qui implique que $u = u_w$. D'après la convergence forte dans (2.2.14), nous concluons que

$$u_{w_n} \to u_w \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

Il s'ensuit que T est continue, et cela établit l'existence d'un point fixe qui est la solution faible du problème (2.2.7).

Étape 2: : Passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$

D'après la Proposition 2.2.3, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $u_\varepsilon \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla(u_\varepsilon)|^{p(u_\varepsilon)-2}\nabla u_\varepsilon \nabla v dx + \int_\Omega |u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)-2}u_\varepsilon v dx \\ &+\varepsilon\left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{\beta-2}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla v dx + \int_\Omega |u_\varepsilon|^{\beta-2}u_\varepsilon v dx\right) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

et

$$N < \alpha \leq p(u_\varepsilon(x)) \leq \beta < \infty \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega.$$

Ensuite, nous choisissons $v = u_\varepsilon$ comme fonction test dans (2.2.22) pour obtenir

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} + |u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)}\right) dx + \varepsilon\left(\|\nabla u_\varepsilon\|_\beta^\beta + \|u_\varepsilon\|_\beta^\beta\right) = \langle f, u_\varepsilon\rangle. \tag{2.2.23}$$

D'après (1.1.4), nous déduisons que

$$\|u\|_{q(\cdot)} \leq (\rho_{q(\cdot)}(u)+1)^{\frac{1}{q_-}} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^{q(x)} dx + 1\right)^{\frac{1}{q_-}}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^\alpha dx &\leq C\||\nabla u_\varepsilon|^\alpha\|_{\frac{p(u_\varepsilon)}{\alpha}} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)}dx + 1\right)^{\frac{1}{\left(\frac{p(u_\varepsilon)}{\alpha}\right)_-}} \\ &\leq C\left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)}dx + 1\right),\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

où $C = C(\alpha, \beta, \Omega)$. Par conséquent

$$\langle f, u_\varepsilon\rangle \leq \|f\|_{-1,\alpha'}\|\nabla u_\varepsilon\|_\alpha \leq C\|f\|_{-1,\alpha'}\left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)}dx + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.2.25}$$

En adoptant les formules (2.2.23), (2.2.25) et en appliquant l'inégalité de Young, on obtient

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} + |u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)}\right) dx + \varepsilon\left(\|\nabla u_\varepsilon\|_\beta^\beta + \|u_\varepsilon\|_\beta^\beta\right) \leq C. \tag{2.2.26}$$

A partir de (2.2.24) et (2.2.25), nous pouvons déduire l'estimation suivante

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\alpha} \leq C, \tag{2.2.27}$$

où C est une constante positive sans dépendance de ε.

Nous considérons maintenant une suite $\{\varepsilon_n\}$ de nombres réels positifs. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit u_{ε_n} la solution du problème (2.2.7) associé à ε_n. Puisque l'injection $W_0^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, alors après avoir passé à une sous suite si nécessaire, pour tout $u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ nous avons

$$u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{2.2.28}$$

$$\nabla u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{dans} \quad L^\alpha(\Omega)^N, \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{2.2.29}$$

$$u_{\varepsilon_n} \to u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

$$u_{\varepsilon_n} \to u \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega, \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.2.30}$$

Les contraintes sur l'intervalle des exposants dans (2.2.5) impliquent que u est Hölder-continue, alors d'après la condition (2.2.6), $p(u)$ est aussi Hölder-continue.
La convergence (2.2.30) implique que

$$p(u_{\varepsilon_n}) \to p(u) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega, \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.2.31}$$

Clairement, la chaîne d'inégalités suivante est satisfaite

$$N < \alpha \leq p(u_{\varepsilon_n}) \leq \beta < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega. \tag{2.2.32}$$

En adoptant (2.2.26) écrite pour la suite u_{ε_n}, nous pouvons appliquer le Lemme 1.3.1 pour conclure que

$$u \in W_0^{1,p(u)}(\Omega). \tag{2.2.33}$$

D'après la théorie des opérateurs monotones, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(|\nabla u_{\varepsilon_n}|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla u_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n|\nabla u_{\varepsilon_n}|^{\beta-2}\nabla u_{\varepsilon_n}\right) \cdot \nabla(u_{\varepsilon_n} - v)dx \\
&+ \int_\Omega \left(|u_{\varepsilon_n}|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}u_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n|u_{\varepsilon_n}|^{\beta-2}u\right)(u_{\varepsilon_n} - v)dx \\
&-\Big(\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla v + \varepsilon_n|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right) \cdot \nabla(u_{\varepsilon_n} - v)dx \\
&+ \int_\Omega \left(|v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}v + \varepsilon_n|v|^{\beta-2}v\right)(u_{\varepsilon_n} - v)dx\Big) \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

En remplaçant u_ε par u_{ε_n} et en choisissant $u_{\varepsilon_n} - v$ comme fonction test dans (2.2.22), on peut réduire (2.2.34) sous la forme

$$\begin{aligned}
\langle f, u_{\varepsilon_n} - v\rangle &- \Big(\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla v + \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right) \cdot \nabla(u_{\varepsilon_n} - v)dx \\
&+ \int_\Omega \left(|v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}v + \varepsilon|v|^{\beta-2}v\right)(u_{\varepsilon_n} - v)dx\Big) \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.2.35}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$. En utilisant (2.2.31) et le théorème de convergence de Lebesgue, on obtient

$$|\nabla v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla v \to |\nabla v|^{p(u)-2}\nabla v \quad \text{dans} \quad L^{\alpha'}(\Omega)^d, \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{2.2.36}$$

et

$$|v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}v \to |v|^{p(u)-2}v \quad \text{dans} \quad L^{\alpha}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.2.37}$$

Nous prenons la limite quand n tend vers l'infini dans (2.2.35), et nous utilisons (2.2.27), (2.2.28), (2.2.36) et (2.2.37), nous obtenons

$$\langle f, u - v\rangle - \Big(\int_\Omega |\nabla v|^{p(u)-2}\nabla v \cdot \nabla(u - v)dx + \int_\Omega |v|^{p(u)-2}v(u - v)dx\Big) \geq 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.2.38}$$

Selon les hypothèses (2.2.5) et (2.2.6), la fonction $p(u)$ est Hölder-continue ce qui implique que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p(u)}(\Omega)$. Ainsi, (2.2.37) reste vrai pour tout $v \in W_0^{1,p(u)}(\Omega)$.
On peut donc prendre $v = u \pm \delta y$, où $y \in W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ et $\delta > 0$, comme étant une fonction test dans (2.2.37) on obtient

$$\pm\left(\langle f, y\rangle - \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u \cdot \nabla y dx + \int_\Omega |u|^{p(u)-2} u y dx\right)\right) \geq 0. \tag{2.2.39}$$

Cela implique que,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u \cdot \nabla y dx + \int_\Omega |u|^{p(u)-2} u y dx = \langle f, y\rangle \quad \forall y \in W_0^{1,p(u)}(\Omega). \tag{2.2.40}$$

Finalement, le problème local (2.2.1) admet une solution faible (Voir la Définition 2.2.1).

2.2.3 L'existence pour le problème non local

Parallèlement au problème (2.2.1), nous considérons, dans cette partie, sa version non locale (2.2.3). Nous prouvons l'existence de solution faible en utilisant l'astuce de Minty ainsi que la technique de Zhikov (Voir [88]) pour passer à la limite dans la suite de problèmes $p(u_n)$-Laplacien.
Tout d'abord, nous supposons que la fonction p satisfait les conditions (2.2.2). Nous désignons par b une application de $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$b \text{ est continue}, \;\; b \text{ est borné}. \tag{2.2.41}$$

Le théorème suivant nécessite la définition révisée suivante d'une solution faible.

Définition 2.2.4 *On dit qu'une fonction u est une solution faible du problème (2.2.3) si*

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p(b(u))}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p(b(u))-2} u v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p(b(u))}(\Omega)\,, \end{cases} \tag{2.2.42}$$

où $\langle \cdot,\cdot\rangle$ désigne le crochet de dualité entre $\left(W_0^{1,p(b(u))}(\Omega)\right)'$ et $W_0^{1,p(b(u))}(\Omega)$.

Puisque $p(b(u))$ est un nombre réel et non pas une fonction, donc les espaces de Sobolev concernés sont les espaces de Sobolev classiques.

Théorème 2.2.5 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un domaine borné et supposons que (2.2.2) et (2.2.41) sont satisfaites. Si*

$$f \in W^{-1,\gamma'}(\Omega) \quad pour \quad \gamma < \alpha,$$

alors le problème (2.2.3) admet au moins une solution faible au sens de la Définition 2.2.4.

Pour prouver le Théorème 2.2.5, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.6 *Pour $n \in \mathbb{N}$, soit u_n la solution de problème*

$$\begin{cases} u_n \in W_0^{1,p_n}(\Omega)\ , \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_n-2}\nabla u_n \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u_n|^{p_n-2}u_n v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p_n}(\Omega)\ , \end{cases} \tag{2.2.43}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne ici le crochet de dualité entre $\left(W_0^{1,p_n}(\Omega)\right)'$ et $W_0^{1,p_n}(\Omega)$.
Supposons que

$$p_n \to p, \quad \textit{quand} \quad n \to \infty, \text{où} \quad p \in (1,\ \infty), \tag{2.2.44}$$

$$f \in W^{-1,q'}(\Omega) \quad \textit{pour tout} \quad q < p. \tag{2.2.45}$$

Alors

$$u_n \to u \quad \text{in} \quad W_0^{1,q}(\Omega), \quad \textit{quand} \quad n \to \infty, \tag{2.2.46}$$

où u est la solution de problème

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega)\ , \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p-2}u v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)\ . \end{cases} \tag{2.2.47}$$

Preuve de Lemme 2.2.6: La preuve du Lemme 2.2.6 est divisée en deux étapes.

Étape 1: Convergence faible

En tenant compte de $p_n \to p$, quand $n \to \infty$, et $q < p$, on peut supposer que

$$p + 1 > p_n > q \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.48}$$

Nous choisissons $v = u_n$ comme fonction test dans (2.2.43) pour obtenir

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_n} dx + \int_\Omega |u_n|^{p_n} dx \le \|f\|_{-1,q'} \|\nabla u_n\|_q. \tag{2.2.49}$$

D'après (2.2.48) et l'inégalité de Hölder, nous déduisons que

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_q &\le C\|\nabla u_n\|_{p_n} \\ &\le C\|u_n\|_{1,p_n}, \end{aligned} \tag{2.2.50}$$

où $C = C(p, q, \Omega)$ est une constante positive. Par conséquent,

$$\|u_n\|_{1,p_n} \le C, \tag{2.2.51}$$

où $C = C(p, q, \Omega, f)$ est une constante positive. En combinant (2.2.50) avec (2.2.51), on obtient

$$\|\nabla u_n\|_q \leq C, \tag{2.2.52}$$

où C est une constante positive sans n-dépendance. En passant à une sous suite (si nécessaire) notée encore u_n, pour un certain $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ nous déduisons que

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \quad \text{dans} \quad L^q(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.2.53}$$

Sur cette base, les convergences dans (2.2.44), (2.2.48), (2.2.51) et (2.2.53) conduisent à conclure que (Lemme 1.3.1)

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p_n} dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^p dx,$$

et donc

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.2.54}$$

Nous remarquons que la deuxième ligne dans (2.2.43) est équivalente à

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_n-2}\nabla u_n \cdot \nabla(v - u_n)dx + \int_\Omega |u_n|^{p_n-2}u_n(v - u_n)dx \geq \langle f, v - u_n\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p_n}(\Omega),$$

en appliquant le lemme de Minty, on aura

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p_n-2}\nabla v \cdot \nabla(v - u_n)dx + \int_\Omega |v|^{p_n-2}v(v - u_n)dx \geq \langle f, v - u_n\rangle \; \forall v \in W_0^{1,p_n}(\Omega). \tag{2.2.55}$$

Nous choisissons $v \in C_0^\infty(\Omega)$, alors nous pouvons prendre la limite quand n tend vers l'infini dans la formule (2.2.55), et utiliser (2.2.44) et (2.2.53), donc nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla(v - u)dx + \int_\Omega |v|^{p-2}v(v - u)dx \geq \langle f, v - u\rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.2.56}$$

Puisque $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, nous déduisons (2.2.56) également pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Maintenant, en choisissant $v = u \pm \delta y$, où $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\delta > 0$, nous passons à la limite quand δ tend vers zéro, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla y dx + \int_\Omega |u|^{p-2}uy dx = \langle f, y\rangle \quad \forall y \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

Enfin, il suffit de rappeler que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour conclure que nous sommes arrivés à une solution du problème (2.2.47).

Étape 2: Convergence forte

Dans cette étape, nous allons montrer que la convergence (2.2.53) est forte. Tout d'abord, on prend $v = u_n$ dans (2.2.43) et on utilise (2.2.53) pour passer à la limite quand $n \to \infty$, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_n} dx + \int_\Omega |u_n|^{p_n} dx = \langle f, v\rangle \to \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega |u|^p dx = \langle f, v\rangle \tag{2.2.57}$$

Tout d'abord, nous considérons le cas où

$$p_n \geq p \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \leq \Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_n} dx\Big)^{\frac{p}{p_n}} |\Omega|^{1-\frac{p}{p_n}}.$$

Ainsi par (2.2.57), nous déduisons que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^p dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx,$$

ce qui implique (du fait que $\|\nabla u_n\|_p \to \|\nabla u\|_p$, quand $n \to \infty$)

$$u_n \to u \quad \text{fortement} \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.2.58}$$

Puisque $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W_0^{1,q}(\Omega)$, nous concluons que

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,q}(\Omega), \quad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

Maintenant, nous considérons le cas où

$$q < p_n < p \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.2.59}$$

nous posons

$$A_n := \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p_n-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_n-2}\nabla u\right)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx + \int_\Omega \left(|u_n|^{p_n-2}u_n - |u|^{p_n-2}u\right)\cdot(u_n - u)dx. \tag{2.2.60}$$

Par la théorie des opérateurs monotones, nous avons $A_n \geq 0$, la formulation (2.2.43) implique que (2.2.60) se réduit à la forme

$$A_n = \langle f,\ u_n - u\rangle - \int_\Omega |\nabla u|^{p_n-2}\nabla u \cdot \nabla(u_n - u)dx - \int_\Omega |u|^{p_n-2}u(u_n - u)dx.$$

D'après (2.2.45) et la convergence dans (2.2.53), nous avons

$$\langle f, u_n - u\rangle \to 0, \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.2.61}$$

Comme $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alors

$$||\nabla u|^{p_n-2}\nabla u| \leq \max\{1,\ |\nabla u|^{p-1}\} \in L^{p'}(\Omega), \tag{2.2.62}$$

$$||u|^{p_n-2}u| \leq \max\{1,\ |u|^{p-1}\} \in L^{p}(\Omega). \tag{2.2.63}$$

Alors, nous pouvons conclure que

$$A_n \to 0, \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2.2.64}$$

Nous considérons tout d'abord le cas où $p_n \geq 2$:

En appliquant le Lemme 1.3.3 dans (2.2.60), nous obtenons

$$A_n \geq \frac{1}{2^{p_n-1}}\left(\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^{p_n}dx + \int_\Omega |u_n-u|^{p_n}dx\right). \tag{2.2.65}$$

Nous appliquons l'inégalité de Hölder (vu que $p_n > q$)

$$\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^{q}dx + \int_\Omega |u_n-u|^{q}dx \leq \left[\left(\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^{p_n}dx\right)^{\frac{q}{p_n}} + \left(\int_\Omega |u_n-u|^{p_n}dx\right)^{\frac{q}{p_n}}\right] \times |\Omega|^{1-\frac{q}{p_n}}.$$

Donc, à partir de (2.2.64) et (2.2.65) nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^{q}dx + \int_\Omega |u_n-u|^{q}dx \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Par conséquent,

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,q}(\Omega), \quad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

Maintenant, nous supposons que $p_n < 2$:

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^{p_n}\,dx + \int_\Omega |u_n-u|^{p_n}\,dx \\
&= \int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^{p_n}\left(|\nabla u_n|+|\nabla u|\right)^{\frac{(p_n-2)p_n}{2}}\left(|\nabla u_n|+|\nabla u|\right)^{\frac{(2-p_n)p_n}{2}}dx \\
&+ \int_\Omega |u_n-u|^{p_n}\left(|u_n|+|u|\right)^{\frac{(p_n-2)p_n}{2}}\left(|u_n|+|u|\right)^{\frac{(2-p_n)p_n}{2}}dx \\
&\leq \left[\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^{2}\left(|\nabla u_n|+|\nabla u|\right)^{p_n-2}dx\right]^{\frac{p_n}{2}}\left[\int_\Omega \left(|\nabla u_n|+|\nabla u|\right)^{p_n}dx\right]^{1-\frac{p_n}{2}} \\
&+ \left[\int_\Omega |u_n-u|^{2}\left(|u_n|+|u|\right)^{p_n-2}dx\right]^{\frac{p_n}{2}}\left[\int_\Omega \left(|u_n|+|u|\right)^{p_n}dx\right]^{1-\frac{p_n}{2}}
\end{aligned} \tag{2.2.66}$$

D'après le Lemme 1.3.3, on pourrait déduire que

$$A_n \geq C(p_n)\left(\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^{2}\left(|\nabla u_n|+|\nabla u|\right)^{p_n-2}dx + \int_\Omega |u_n-u|^{2}\left(|u_n|+|u|\right)^{p_n-2}dx\right) \tag{2.2.67}$$

Puisque $\|u_n\|_{1,p_n} \leq C$, alors d'après (2.2.64), (2.2.66) et (2.2.67) nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla (u_n - u)|^{p_n}\, dx + \int_\Omega |u_n - u|^{p_n}\, dx \to 0, \quad \text{quand } n \to \infty$$

Par conséquent,

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,q}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Preuve de Théorème 2.2.5:

Pour tout $\delta > \gamma$ nous avons, $f \in (W_0^{1,\gamma}(\Omega))' \subset (W_0^{1,\delta}(\Omega))'$. Par conséquent, pour chaque $\mu \in \mathbb{R}$, le problème $p(\mu)$-Laplacien suivant admet une solution unique u_μ,

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p(\mu)}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(\mu)-2}\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p(\mu)-2} u v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p(\mu)}(\Omega)\,. \end{cases} \tag{2.2.68}$$

Le choix de la fonction test u_μ dans (2.2.68) implique que

$$\int_\Omega |\nabla u_\mu|^{p(\mu)} dx + \int_\Omega |u_\mu|^{p(\mu)} dx \leq \|f\|_{-1,\alpha'} \|\nabla u_\mu\|_\alpha. \tag{2.2.69}$$

Maintenant, en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|u_\mu\|_{1,\alpha} \leq \|u_\mu\|_{1,p(\mu)} |\Omega|^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p(\mu)}}. \tag{2.2.70}$$

D'après l'inégalité (2.2.69), il s'ensuit que

$$\|u_\mu\|_{1,p(\mu)}^{p(\mu)-1} \leq \|f\|_{-1,\alpha'} |\Omega|^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p(\mu)}}. \tag{2.2.71}$$

En combinant (2.2.70) et (2.2.71), et en utilisant (2.2.2), on aura

$$\|u_\mu\|_{1,\alpha} \leq \|f\|_{-1,\alpha'}^{\frac{1}{p(\mu)-1}} |\mu|^{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p(\mu)}\right)\frac{p(\mu)}{p(\mu)-1}} \leq \max_{p \in [\alpha,\beta]} \|f\|_{1,\alpha'}^{\frac{1}{p-1}} |\Omega|^{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}\right)\frac{p}{p-1}}. \tag{2.2.72}$$

Par conséquent,

$$\|u_\mu\|_{1,\alpha} \leq C. \tag{2.2.73}$$

L'inégalité (2.2.73) et le fait que b est une application bornée, impliquent qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$b(u_\mu) \in [-K,\ K] \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, nous introduisons l'application $H : [-K,\ K] \to [-K,\ K]$ définie par $H(\mu) = b(u_\mu)$. On sait que la continuité de H est nécessaire pour obtenir un point fixe de H.

Supposons que $\mu_n \to \mu$ quand $n \to \infty$, puisque p est continue, donc $p(\mu_n) \to p(\mu)$. Après, on applique le Lemme 2.2.6, de sorte qu'en considérant $p(\mu_n)$ au lieu de p_n, on déduit que

$$u_{\mu_n} \longrightarrow u_\mu \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Nous utilisons le fait que b est continue pour déduire que $b(u_{\mu_n}) \to b(u_\mu)$, quand n tend vers l'infini, ce qui implique que H est continue. Ceci établit l'existence du point fixe μ_0 et d'une solution faible u_{μ_0} du problème (2.2.42).

Chapter 3

Étude de solutions entropiques des problèmes elliptiques locaux

Contents

3.1 Solutions entropiques pour certains problèmes elliptiques associés à l'opérateur $p(u)$-Laplacien généralisé

Dans cette partie, nous étudions l'existence de solutions entropiques pour certaines équations elliptiques généralisées avec des exposants p qui peuvent dépendre de la solution inconnue u. Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\text{div}(|\nabla u - \Theta(u)|^{p(u)-2}(\nabla u - \Theta(u))) = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, f est une fonction intégrable $f \in L^1(\Omega)$, $p : \mathbb{R} \to [p_-, p_+]$ est une fonction réelle continue, $1 < p_- \leq p_+ < +\infty$ et $p'(z) = \frac{p(z)}{p(z)-1}$ est l'exposant conjugué de $p(z)$, avec

$$p_- := \operatorname*{ess\,inf}_{z\in\mathbb{R}} p(z) \text{ et } p_+ := \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{R}} p(z).$$

Le problème (3.1.1) modélise plusieurs phénomènes naturels qui apparaissent dans le domaine de l'océanographie, des écoulements de fluides turbulents, du chauffage par induction et des problèmes électrochimiques. Nous citons par exemple le modèle parabolique suivant :

- L'écoulement des fluides à travers les milieux poreux : ce modèle est régi par l'équation suivante,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \operatorname{div}\left(|\nabla\varphi(\theta) - K(\theta)e|^{p-2}(\nabla\varphi(\theta) - K(\theta)e)\right) = 0,$$

où θ est la teneur volumétrique en humidité, $K(\theta)$ la conductivité hydraulique, $\varphi(\theta)$ le potentiel hydrostatique et e le vecteur unitaire dans la direction verticale.

Dans les cas classiques, lorsque $p(u) = p(x)$ ou $p(u) = p$ de nombreux auteurs ont étudié le problème (3.1.1) en prouvant l'existence et l'unicité de plusieurs types de solutions, et par différentes approches ([1, 59, 19, 21]).

La nouveauté de ce travail est d'étudier certains problèmes impliquant l'opérateur p-Laplacien généralisé dans le cas où les exposants variables p dépendent de la solution inconnue u. La motivation pour étudier ce type de problèmes repose sur le fait que, dans la réalité, les mesures de certaines quantités physiques ne sont pas faites de manière ponctuelle mais à travers des moyennes locales. Ce type de problèmes apparaît dans les applications de certaines techniques numériques pour la méthode de restauration d'images par variation totale qui ont été utilisées dans certains problèmes de traitement mathématique des images et de la vision par ordinateur [29, 30, 79]. Türola, J. dans [79] ont présenté plusieurs exemples numériques suggérant que la prise en compte des exposants $p = p(u)$ préserve les bords et réduit le bruit des images restaurées u. Un exemple numérique suggérant une réduction du bruit des images restaurées u lorsque l'exposant du terme de régularisation est $p = p(|\nabla u|)$ est présenté dans [29]. Dans le cas où $\Theta = 0$, M. Chipot et H. B. de Oliveira [38] ont prouvé l'existence de solutions faibles pour un problème $p(u)$-Laplacien, les preuves d'existence de [38] sont basées sur le théorème du point fixe de Schauder. Andreianov et al. [18], ont étudié le problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) + u = f & \text{dans } \Omega, \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

S. Ouaro et N. Sawadogo dans [72] et [73] ont considéré le problème aux limites de Fourier non linéaire suivant

$$\begin{cases} b(u) - \operatorname{div} a(x, u, \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ a(x, u, \nabla u)\cdot\eta + \lambda u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les résultats d'existence et d'unicité des solutions entropiques et faibles sont établis par une

méthode d'approximation et des suites convergentes en terme de mesure de Young.
Pour établir l'existence de notre problème, nous montrons d'abord que le problèmes approximé admet une suite de solutions faibles en appliquant la méthode variationnelle combinée à un type spécial d'opérateurs. Ensuite, nous prouverons que la suite de solutions faibles converge vers une certaine fonction u et en utilisant des estimations a priori, nous montrerons que cette fonction u est une solution entropique du problème elliptique (3.1.1).

3.1.1 Résultats principaux

Dans cette partie, nous prouvons l'existence de solutions entropiques du problème (3.1.1).
Tout d'abord, nous énonçons les hypothèses suivantes :
(H_1) $f \in L^1(\Omega)$.
(H_2) $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue telle que $\Theta(0) = 0$ et $|\Theta(x) - \Theta(y)| \leq \lambda|x - y|$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, où λ est une constante positive telle que $\lambda < \dfrac{1}{2C_0}$, et C_0 est la constante donnée par l'inégalité de Poincaré.
Nous définissons l'ensemble où nous allons chercher les solutions au problème (3.1.1) comme suit

$$W_0^{1,p(u)}(\Omega) := \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \int_\Omega |\nabla u|^{p(u)} dx < \infty \right\}.$$

Nous donnons maintenant une définition des solutions entropiques du problème elliptique (3.1.1).

Définition 3.1.1 *Une fonction mesurable u avec $T_k(u) \in W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ est dite solution entropique du problème (3.1.1), si*

$$\int_\Omega \Phi\left(\nabla u - \Theta(u)\right) \nabla T_k(u - \varphi) dx \leqslant \int_\Omega f T_k(u - \varphi) dx, \tag{3.1.2}$$

pour toute $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ et pour chaque $k > 0$, avec

$$\Phi\left(\xi\right) = |\xi|^{p(u)-2}\xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Théorème 3.1.2 *Si (H_1) et (H_2) sont satisfaites. Alors, le problème (3.1.1) admet au moins une solution entropique au sens du Définition 3.1.1.*

La preuve du Théorème 3.1.2 est divisée en plusieurs étapes.
Étape 1: Le problème approximatif.
Soit f_n une suite de fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ fortement convergente vers f dans L^1 telle que $\|f_n\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$.

Nous considérons le problème suivant

$$(\mathcal{P}_n)\begin{cases} -\operatorname{div}(\Phi\left(\nabla u_n - \Theta(u_n)\right)) = f_n \text{ dans } \Omega \\ \\ u_n = 0 \qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$\Phi\left(\xi\right) = |\xi|^{p(u_n)-2}\xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Nous définissons l'opérateur A par

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \Phi(\nabla u - \Theta(u))\nabla v dx, \quad \text{avec} \quad u, v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega).$$

Nous allons prouver que A est coercif. D'après le Lemme 1.3.4, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &= \int_\Omega \Phi(\nabla u - \Theta(u))\nabla u dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u - \Theta(u)|^{p(u)-2}(\nabla u - \Theta(u))\nabla u dx \\ &\geq \int_\Omega^1 \frac{1}{p(u)}|\nabla u - \Theta(u)|^{p(u)} dx - \int_\Omega \frac{1}{p(u)}|\Theta(u)|^{p(u)} dx.\end{aligned}$$

Puisque

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}\left(|a|^p + |b|^p\right),$$

nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u|^{p(u)} &= \frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u - \Theta(u) + \Theta(u)|^{p(u)} \\ &\leq |\nabla u - \Theta(u)|^{p(u)} + |\Theta(u)|^{p(u)},\end{aligned}$$

alors

$$\frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u|^{p(u)} - |\Theta(u)|^{p(u)} \leq |\nabla u - \Theta(u)|^{p(u)}.$$

Alors, d'après l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(u)}\left[\frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u|^{p(u)} - |\Theta(u)|^{p(u)}\right] dx - \int_\Omega \frac{1}{p(u)}|\Theta(u)|^{p(u)} dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(u)}\frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u|^{p(u)} dx - \int_\Omega \frac{2}{p(u)}|\Theta(u)|^{p(u)} dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(u)}\frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u|^{p(u)} dx - \int_\Omega \frac{2}{p(u)}\lambda^{p(u)}|u|^{p(u)} dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p_+}\frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u|^{p(u)} dx - \int_\Omega \frac{2\lambda^{p(u)}}{p_-}C_0^{p(u)}|\nabla u|^{p(u)} dx.\end{aligned}$$

Donc, le choix de la constante λ dans (H_2) implique que

$$\langle Au, u\rangle \geq \left(\frac{1}{p_+}\frac{1}{2^{p_+-1}} - \frac{1}{p_-}\frac{1}{2^{p_--1}}\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(u)} dx.$$

Par conséquent,

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}} \longrightarrow \infty \quad \text{quand} \quad \|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} \to \infty. \tag{3.1.3}$$

On constate que l'opérateur A est coercif. De plus, que l'opérateur A est borné et hémi-continu. Alors, le problème $(\mathcal{P}_n)$ admet au moins une solution faible $u_n \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ dans le sens suivant

$$\int_\Omega |\nabla u_n - \Theta(u_n)|^{p(u_n)-2} (\nabla u_n - \Theta(u_n))) \cdot \nabla\varphi dx = \int_\Omega f_n \varphi dx, \tag{3.1.4}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

Notre objectif est de prouver qu'une sous-suite de ces solutions approximatives $\{u_n\}$ converge vers une fonction mesurable u, qui est une solution entropique de problème (3.1.1).

Étape 2 : Estimation a priori.

Lemme 3.1.3 $(\nabla T_k(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est borné dans* $L^{p_-}(\Omega)$.

Preuve. En prenant $\varphi = T_k(u_n)$ comme fonction test dans (3.1.4), on obtient

$$\int_\Omega \Phi\left(\nabla u_n - \Theta(u_n)\right) \nabla T_k(u_n) dx \leqslant k\|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

De la même manière que la preuve de la coercivité, on obtient

$$\rho_{1,p(u_n)}(T_k(u_n)) \leqslant Ck.$$

Par conséquent,

$$\|T_k(u_n)\|_{W_0^{1,p(u_n)}} \leqslant 1 + (Ck)^{\frac{1}{p_-}},$$

on en déduit que pour tout $k > 0$, la suite $(T_k(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $W_0^{1,p(u_n(\cdot))}(\Omega)$ et aussi dans $W_0^{1,p_-}(\Omega)$. Ensuite, pour une sous-suite toujours notée $T_k(u_n)$, on peut supposer que pour tout $k > 0$, $T_k(u_n)$ converge faiblement vers v_k dans $W_0^{1,p_-}(\Omega)$ et aussi $T_k(u_n)$ converge fortement vers v_k dans $L^{p_-}(\Omega)$.

Lemme 3.1.4 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure vers une certaine fonction mesurable* u.

Preuve. Tout d'abord, nous prouvons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en mesure. Pour tout $\delta > 0$ fixe, et tout entier positif $k > 0$, nous savons que

$$\text{meas}\{|u_n - u_m| > \delta\} \leq \text{meas}\{|u_n| > k\} + \text{meas}\{|u_m| > k\} + \text{meas}\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \delta\}.$$

En choisissant $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (3.1.4), on obtient

$$\rho_{1,p(u_n)}(T_k(u_n)) \leqslant k\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leqslant k\|f\|_{L^1(\Omega)}. \tag{3.1.5}$$

Il s'ensuit que

$$\int_{\{|u_n|>k\}} k^{p(u_n)} dx \leqslant k\|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Par conséquent,

$$meas\{|u_n| > k\} \leqslant k^{1-p_-}\|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $k = k(\varepsilon)$ tel que

$$meas\{|u_n| > k\} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad meas\{|u_m| > k\} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque $\{T_k(u_n)\}$ converge fortement dans $L^{p_-}(\Omega)$, alors c'est une suite de Cauchy. Ainsi

$$meas\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \delta\} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

pour tout $n, m \geqslant n_0(\delta, \varepsilon)$.
Enfin, nous obtenons

$$meas\{|u_n - u_m| > \delta\} \leqslant \varepsilon,$$

pour tout $n, m \geqslant n_0(\delta, \varepsilon)$.
D'où,

$$\limsup_{n,m\to\infty} meas\{|u_n - u_m| > \delta\} = 0,$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en mesure et alors converge presque partout vers une fonction mesurable u.

$$u_n \to u \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{3.1.6}$$

Par conséquent,

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \text{ dans } W_0^{1,p_-}(\Omega),$$

$$T_k(u_n) \longrightarrow T_k(u) \text{ dans } L^{p_-}(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega.$$

Lemme 3.1.5 $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ∇u *presque partout dans* Ω.

Preuve. Nous prouvons d'abord que $\{\nabla u_n\}$ est une suite de Cauchy en mesure. Soient δ, h, ε des nombres réels positifs, nous avons évidemment

$$\begin{aligned}\{x \in \Omega : |\nabla u_n - \nabla u_m| > \delta\} \subset \{x \in \Omega : |\nabla u_n| > h\} \cup \{x \in \Omega : |\nabla u_m| > h\} \\ \cup \{x \in \Omega : |u_n - u_m| > 1\} \cup E,\end{aligned}$$

où

$$E := \{x \in \Omega : |\nabla u_n| \leqslant h, |\nabla u_m| \leqslant h, |u_n - u_m| \leqslant 1, |\nabla u_n - \nabla u_m| > \delta\}.$$

Pour $k>0$, on peut écrire

$$\{x\in\Omega:|\nabla u_n|\geqslant h\}\subset\{x\in\Omega:|u_n|\geqslant k\}\cup\{x\in\Omega:|\nabla T_k(u_n)|\geqslant h\},$$

puis en suivant la même méthode que dans le Lemme 3.1.4, on obtient pour k suffisamment grand,

$$\text{meas}\{\{x\in\Omega:|\nabla u_n|>h\}\cup\{x\in\Omega:|\nabla u_m|>h\}\cup\{x\in\Omega:|u_n-u_m|>1\}\}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous remarquons que l'application

$$\mathcal{G}:(s,t,\xi_1,\xi_2)\mapsto(\Phi(\xi_1-\Theta(s))-\Phi(\xi_2-\Theta(t)))(\xi_1-\xi_2)$$

est continue et que l'ensemble

$$\mathcal{H}:=\left\{(s,t,\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N,|s|\leq h,|t|\leq h,|\xi_1|\leq h,|\xi_2|\leq h,|\xi_1-\xi_2|>\delta\right\}$$

est compact et

$$(\Phi(\xi_1-\Theta(s))-\Phi(\xi_2-\Theta(t)))(\xi_1-\xi_2)>0,\quad\forall\xi_1\neq\xi_2.$$

Alors, l'application $\mathcal{G}$ atteint son minimum sur $\mathcal{H}$. Par conséquent, il existe une fonction $\beta(h,\delta)>0$ à valeur réelle telle que

$$\begin{aligned}\beta(h,\delta)\text{meas}(E)\leq&\int_E\Big[|\nabla u_n-\Theta(u_n)|^{p(u_n)-2}(\nabla u_n-\Theta(u_n))\\&-|\nabla u_m-\Theta(u_m)|^{p(u_n)-2}(\nabla u_m-\Theta(u_m))\Big][\nabla u_n-\nabla u_m]\,dx,\\=&\int_E\Big[|\nabla u_m-\Theta(u_m)|^{p(u_m)-2}(\nabla u_m-\Theta(u_m))\\&-|\nabla u_m-\Theta(u_m)|^{p(u_n)-2}(\nabla u_m-\Theta(u_m))\Big][\nabla u_n-\nabla u_m]\,dx\\&+\int_E\Big[|\nabla u_n-\Theta(u_n)|^{p(u_n)-2}(\nabla u_n-\Theta(u_n))\\&-|\nabla u_m-\Theta(u_m)|^{p(u_m)-2}(\nabla u_m-\Theta(u_m))\Big][\nabla u_n-\nabla u_m]\,dx.\end{aligned}$$

Nous prenons $T_1(u_n-u_m)$ comme fonction test dans (3.1.4) pour obtenir

$$\begin{aligned}\beta(h,\delta)\text{meas}(E)\leqslant&\int_E\Big[|\nabla u_m-\Theta(u_m)|^{p(u_m)-2}(\nabla u_m-\Theta(u_m))\\-|\nabla u_m-\Theta(u_m)|^{p(u_n)-2}&(\nabla u_m-\Theta(u_m))\Big][\nabla u_n-\nabla u_m]\,dx+\int_E[f_n-f_m]\,T_1(u_n-u_m)\,dx.\end{aligned}$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe η prenant des valeurs entre $p(u_n)$ et $p(u_m)$ tel que

$$\begin{aligned}\beta(h,\delta)\text{meas}(E)\leqslant&\|f_n-f_m\|_{L^1(\Omega)}\\&+\int_E|\nabla u_m-\Theta(u_m)|^{\eta-1}|\log|\nabla u_m-\Theta(u_m)||\cdot|\nabla u_n-\nabla u_m|\cdot|p(u_m)-p(u_n)|\,dx.\end{aligned}$$

En employant le Lemme 1.3.5, (H_2), le fait que $h \gg 1$ et la définition de E, on obtient

$$\beta(h,\delta)meas\,(E) \leqslant$$
$$2^{p^+}h^{p^+}\left(1+\lambda^{\eta-1}\right)\log\left((1+\lambda)h\right)\cdot\int_\Omega |p\,(u_m)-p\,(u_n)|\,dx + \|f_n-f_m\|_{L^1(\Omega)} := \alpha_{n,m}.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons

$$\text{meas}\,(E) \leqslant \frac{\alpha_{n,m}}{\beta(h,\delta)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

pour tout $n, m \geqslant N_2(\varepsilon,\delta)$. Par conséquent, en combinant les résultats précédents, on obtient

$$\text{meas}\,\{x\in\Omega : |\nabla u_n - \nabla u_m| > \delta\} \leqslant \varepsilon, \qquad \text{pour tout } n,m \geqslant \max\{N_1, N_2\}.$$

Par conséquent, $\{\nabla u_n\}$ est une suite de Cauchy en mesure. Alors, nous pouvons choisir une sous-suite (notée encore u_n) telle que

$$\nabla u_n \to v \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Ainsi, en utilisant la Proposition 1.1.10 et le fait que $\nabla T_k\,(u_n) \rightharpoonup \nabla T_k(u)$ dans $(L^{p_-}(\Omega))^N$, nous déduisons que v coïncide avec le gradient faible de u presque partout. Par conséquent, nous avons

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{3.1.7}$$

Étape 3 : Passage à la limite.

Nous choisissons $T_k\,(u_n-\phi)$ comme fonction test dans (3.1.4) pour $\phi \in C_0^1(\Omega)$. Alors,

$$\int_\Omega |\nabla u_n - \Theta(u_n)|^{p(u_n)-2}\,(\nabla u_n - \Theta(u_n))\cdot\nabla T_k\,(u_n-\phi)\,dx = \int_\Omega f_n T_k\,(u_n-\phi)\,dx. \tag{3.1.8}$$

Nous concentrons maintenant notre attention sur le côté gauche de (3.1.8). Nous remarquons que, si $L = k + \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u_n - \Theta(u_n)|^{p(u_n)-2}\,(\nabla u_n - \Theta(u_n))\cdot\nabla T_k\,(u_n-\phi)\,dx\\
&=\int_\Omega |\nabla T_L\,(u_n) - \Theta(T_L\,(u_n))|^{p(u_n)-2}\,(\nabla T_L\,(u_n) - \Theta(T_L\,(u_n)))\cdot\nabla T_k\,(T_L\,(u_n)-\phi)\,dx\\
&=\int_\Omega |\nabla T_L\,(u_n) - \Theta(T_L\,(u_n))|^{p(u_n)-2}\,(\nabla T_L\,(u_n) - \Theta(T_L\,(u_n)))\cdot\nabla T_L\,(u_n)\,\chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}}dx\\
&\quad-\int_\Omega |\nabla T_L\,(u_n) - \Theta(T_L\,(u_n))|^{p(u_n)-2}\,(\nabla T_L\,(u_n) - \Theta(T_L\,(u_n)))\cdot\nabla\varphi\chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}}dx.
\end{aligned}\tag{3.1.9}$$

D'après l'égalité (3.1.8), nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big[|\nabla T_L\,(u_n) - \Theta(T_L\,(u_n))|^{p(u_n)-2}\,(\nabla T_L\,(u_n) - \Theta(T_L\,(u_n)))\cdot\nabla T_L\,(u_n)\\
&\qquad+\frac{1}{p_-}|\Theta(T_L\,(u_n)\,|^\gamma\Big]\cdot\chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}}dx\\
&\quad-\int_\Omega |\nabla T_L\,(u_n) - \Theta(T_L\,(u_n))|^{p(u_n)-2}\,(\nabla T_L\,(u_n) - \Theta(T_L\,(u_n)))\cdot\nabla\varphi\chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}}dx\\
&\quad=\int_\Omega f_n T_k\,(u_n-\phi)\,dx + \int_\Omega \frac{1}{p_-}|\Theta(T_L\,(u_n)\,|^\gamma\chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}}dx,
\end{aligned}\tag{3.1.10}$$

où

$$\gamma = \begin{cases} p_+ & \text{si} \quad |\Theta(T_L(u_n)| \leq 1, \\ p_- & \text{si} \quad |\Theta(T_L(u_n)| > 1. \end{cases}$$

Vu que $\{\nabla T_L(u_n)\}$ est borné dans $\left(L^{p'(u_n)}(\Omega)\right)^N \subset \left(L^{p'_+}(\Omega)\right)^N$, alors d'après l'hypothèse (H_3), la suite $\{\Theta(T_L(u_n)\}$ est aussi bornée dans $\left(L^{p(u_n)}(\Omega)\right)^N \subset \left(L^{p_-}(\Omega)\right)^N$, ce qui implique que $\left\{|\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2}(\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n)))\right\}$ est borné dans $\left(L^{p'(u_n)}(\Omega)\right)^N \subset \left(L^{p'_+}(\Omega)\right)^N$.

Puisque $u_n \to u$ p.p. dans Ω et $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω, il s'ensuit que

$$\Theta(T_L(u_n)) \longrightarrow \Theta(T_L(u)) \text{ p.p. dans } \Omega \tag{3.1.11}$$

et

$$\nabla T_L(u_n) \longrightarrow \nabla T_L(u) \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{3.1.12}$$

D'où,

$$\begin{aligned} &|\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2}(\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))) \\ &\quad \rightharpoonup |\nabla T_L(u) - \Theta(T_L(u))|^{p(u)-2}(\nabla T_L(u) - \Theta(T_L(u))) \quad \text{dans } \left(L^{p'_+}(\Omega)\right)^N. \end{aligned}$$

Comme $\phi \in C_0^1(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2}(\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))) \cdot \nabla\varphi\chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}} dx \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla T_L(u) - \Theta(T_L(u))|^{p(u)-2}(\nabla T_L(u) - \Theta(T_L(u))) \cdot \nabla\varphi\chi_{\{|T_L(u)-\phi|\leqslant k\}} dx. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

D'après (3.1.11) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\int_\Omega \frac{1}{p_-}|\Theta(T_L(u_n)|^\gamma \chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}} dx \to \int_\Omega \frac{1}{p_-}|\Theta(T_L(u)|^\gamma \chi_{\{|T_L(u)-\phi|\leqslant k\}} dx.$$

D'autre part, en utilisant le Lemme 1.3.4, nous avons

$$\begin{aligned} &\Bigg[|\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2}(\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))) \cdot \nabla T_L(u_n) \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{p_-}|\Theta(T_L(u_n)|^\gamma\Bigg]\chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}} \geqslant 0 \text{ p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Bigg[& |\nabla T_L(u) - \Theta(T_L(u))|^{p(u)-2}(\nabla T_L(u) - \Theta(T_L(u)))\cdot \nabla T_L(u) \\ & + \frac{1}{p_-}|\Theta(T_L(u)|^\gamma\Bigg]\chi_{\{|T_L(u)-\phi|\leqslant k\}} dx \\ \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \Bigg[& |\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2}(\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n)))\cdot \nabla T_L(u_n) \\ & + \frac{1}{p_-}|\Theta(T_L(u_n)|^\gamma\Bigg]\chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}} dx.\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Maintenant, nous considérons le premier terme du côté droit de (3.1.10). Puisque $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n T_k(u_n - \phi)\,dx = \int_\Omega f T_k(u-\phi)\,dx. \tag{3.1.15}$$

Enfin, en combinant les résultats précédents, on peut passer à la limite dans l'égalité (3.1.10) lorsque $n \to \infty$, donc on conclure que u est une solution entropique du problème (3.1.1).

3.2 Problèmes elliptiques non linéaires associé à l'opérateur $p(u)$-Laplacien généralisé avec des conditions aux limites de Fourier

3.2.1 Motivation

L'objectif de cette section est d'étudier l'existence de solutions entropiques pour certains problèmes à exposant variable avec des exposants p qui peuvent dépendre de la solution inconnue u d'une manière locale. Plus précisément, nous étudions le problème non linéaire de Fourier suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u - \Theta(u)|^{p(u)-2}(\nabla u - \Theta(u))) + |u|^{p(u)-2}u + \alpha(u) = f \text{ dans } \Omega \\ \\ (|\nabla u - \Theta(u)|^{p(u)-2}(\nabla u - \Theta(u))).\eta + \lambda u = g \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ avec une frontière Lipschitzienne $\partial\Omega$, $\lambda > 0$, η est le vecteur normal unitaire extérieur sur $\partial\Omega$, α, Θ sont des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^N$, $f \in L^1(\Omega)$, $g \in L^1(\partial\Omega)$ et $p : \mathbb{R} \to [p_-, p_+]$ est une fonction continue réelle telle que, $1 < p_- \leq p_+ < +\infty$ and $p'(z) = \frac{p(z)}{p(z)-1}$ est l'exposant conjugué de $p(z)$, avec

$$p_- := \operatorname*{ess\,inf}_{z\in\mathbb{R}} p(z) \text{ et } p_+ := \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{R}} p(z).$$

L'intérêt pour les formes générales de problèmes différentiels, dont l'opérateur principal est de type $p(u)$-Laplacien généralisé, a fortement augmenté au cours des dernières décennies. La raison principale est que ce type d'opérateur non linéaire apparaît naturellement dans l'étude de plusieurs phénomènes qui apparaissent dans le domaine de l'océanographie, des écoulements fluides turbulents, du chauffage par induction et des problèmes électrochimiques.

Nous distinguons le cas des exposants constants p (à savoir les équations isotropes) et le cas des exposants variables $p(x)$ (à savoir les équations anisotropes). Les auteurs ont développé les résultats existants dans les cadres abstraits des espaces de Lebesgue et de Sobolev avec et sans exposants variables, à savoir $L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega), L^{p(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction générale, le passage du cadre de l'exposant constant au cadre de l'exposant variable nécessite une attention particulière aux cas spéciaux, et donc que certains problèmes difficiles restent ouverts (pour plus de détails, nous nous référons à [18] et [38], ainsi qu'à leurs références). De nombreux auteurs ont étudié le problème (3.2.1) lorsque $p(u) = p(x)$ ou $p(u) = p$ en prouvant l'existence et l'unicité de plusieurs types de solutions, et par différentes approches ([59, 19, 21]). Ici, nous considérons une condition au limite de Fourier qui apporte quelques difficultés pour traiter le terme à la limite. Pour étudier l'existence de solutions faibles pour le problème non linéaire aux limites de Fourier (3.2.1), nous montrons d'abord que le problème approché admet une suite de solutions faibles en appliquant la méthode variationnelle combinée à un type spécial d'opérateurs. Dans un deuxième temps, nous prouverons que la suite de solutions faibles converge vers une certaine fonction u et en utilisant certaines estimations a priori, nous montrerons que cette fonction u est une solution entropique du problème elliptique (3.2.1).

3.2.2 Résultats principaux

Nous supposons les hypothèses suivantes :

(H_0) α est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\alpha(x).x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(H_1) $f \in L^1(\Omega)$ et $g \in L^1(\partial\Omega)$.

(H_2) $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue telle que $\Theta(0) = 0$ et $|\Theta(x)-\Theta(y)| \leq \lambda|x-y|$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, où λ est une constante positive telle que $\lambda < \dfrac{1}{2C_0}$, et C_0 est la constante donnée par l'inégalité de Poincaré.

Nous donnons maintenant une définition des solutions entropiques pour le problème elliptique (3.2.1).

Définition 3.2.1 *Une fonction mesurable* u *avec* $u \in \mathcal{T}_{tr}^{1,p(u(\cdot))}(\Omega)$ *est dite solution entropique du problème* (3.2.1)*, si* $|u|^{p(u)-2}u \in L^1(\Omega)$, $\alpha(u) \in L^1(\Omega)$, $u \in L^1(\partial\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega \Phi\left(\nabla u - \Theta(u)\right)\nabla T_k(u-\varphi)dx + \int_\Omega |u|^{p(u)-2}uT_k(u-\varphi)dx + \int_\Omega \alpha(u)T_k(u-\varphi)dx$$
$$+\lambda\int_{\partial\Omega} uT_k(u-\varphi)d\sigma \leqslant \int_\Omega fT_k(u-\varphi)dx + \int_{\partial\Omega} gT_k(u-\varphi)d\sigma, \tag{3.2.2}$$

pour tout $\varphi \in W^{1,p(u(\cdot))}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *et pour chaque* $k > 0$*, avec*

$$\Phi\left(\xi\right) = |\xi|^{p(u)-2}\xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Théorème 3.2.2 *Supposons que* (H_0)*-*(H_2) *sont satisfaites. Alors il existe au moins une solution entropique du problème* (3.2.1) *au sens de la Définition 3.2.1.*

La preuve du Théorème 3.2.2 est divisée en quelques étapes.

Étape 1: Le problème approché.

Nous considérons le problème approché suivant

$$(\mathcal{P}_n)\begin{cases} -\mathrm{div}(\Phi\left(\nabla u_n - \Theta(u_n)\right)) + |u_n|^{p(u_n)-2}u_n + T_n(\alpha(u_n)) - \varepsilon\Delta_{p_+} + \varepsilon|u_n|^{p_+-2}u_n = T_n(f) \text{ dans } \Omega \\ \\ \left(\Phi\left(\nabla u_n - \Theta(u_n)\right) + \varepsilon|\nabla u_n|^{p_+-2}\nabla u_n\right).\eta + \lambda T_n(u_n) = T_n(g) \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$\Phi\left(\xi\right) = |\xi|^{p(u_n)-2}\xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Nous définissons l'espace réflexif suivant

$$E = W^{1,p_+}(\Omega) \times L^{p_+}(\partial\Omega).$$

Soit

$$X_0 = \{(u,v) \in E : \quad v = \tau(u)\}.$$

Dans la suite, nous identifierons un élément $(u,v) \in X_0$ avec son représentant $u \in W^{1,p_+}(\Omega)$ (puisque $W^{1,p_+}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_+}(\partial\Omega)\big)$.

Nous définissons l'opérateur A_n, pour tout $u, v \in X_0$, par

$$\langle A_n u, v\rangle = \langle Au, v\rangle + \int_\Omega T_n(\alpha(u))v dx + \lambda\int_{\partial\Omega} T_n(u)v d\sigma + \varepsilon\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p_+-2}\nabla u\nabla v + |u|^{p_+-2}uv\right]dx,$$

où

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \Phi(\nabla u - \Theta(u))\nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p(u)-2}uv dx.$$

Assertion 1. L'opérateur A_n est coercif.

D'après le Lemme 1.3.4, on obtient

$$\begin{aligned}\langle Au,u\rangle &= \int_\Omega \Phi(\nabla u-\Theta(u))\nabla u dx+\int_\Omega |u|^{p(u)}dx\\ &= \int_\Omega |\nabla u-\Theta(u)|^{p(u)-2}(\nabla u-\Theta(u))\nabla u dx+\int_\Omega |u|^{p(u)}dx\\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(u)}|\nabla u-\Theta(u)|^{p(u)}dx-\int_\Omega \frac{1}{p(u)}|\Theta(u)|^{p(u)}dx+\int_\Omega |u|^{p(u)}dx.\end{aligned}$$

Puisque,

$$(a+b)^p\leq 2^{p-1}\left(|a|^p+|b|^p\right),$$

nous avons,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u|^{p(u)} &= \frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u-\Theta(u)+\Theta(u)|^{p(u)}\\ &\leq |\nabla u-\Theta(u)|^{p(u)}+|\Theta(u)|^{p(u)},\end{aligned}$$

alors,

$$\frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u|^{p(u)}-|\Theta(u)|^{p(u)}\leq |\nabla u-\Theta(u)|^{p(u)}.$$

Donc, d'après l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}\langle Au,u\rangle &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(u)}\left[\frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u|^{p(u)}-|\Theta(u)|^{p(u)}\right]dx-\int_\Omega \frac{1}{p(u)}|\Theta(u)|^{p(u)}dx+\int_\Omega |u|^{p(u)}dx\\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(u)}\frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u|^{p(u)}dx-\int_\Omega \frac{2}{p(u)}|\Theta(u)|^{p(u)}dx\\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(u)}\frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u|^{p(u)}dx-\int_\Omega \frac{2}{p(u)}\lambda^{p(u)}|u|^{p(u)}dx\\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p_+}\frac{1}{2^{p_+-1}}|\nabla u|^{p(u)}dx+\int_\Omega \left(1-\frac{2}{p_-}\lambda^{p(u)}\right)|u|^{p(u)}dx.\end{aligned}$$

Le choix de la constante λ dans (H_2) assure l'existence d'une constante positive M_0 telle que

$$\langle Au,u\rangle \geq \min\{\frac{1}{p_+}\frac{1}{2^{p_+-1}},M_0\}\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(u)}dx+\int_\Omega |u|^{p(u)}dx\right). \tag{3.2.3}$$

D'autre part, nous avons

$$\int_\Omega T_n(\alpha(u))u dx+\lambda\int_{\partial\Omega} T_n(u)u d\sigma\geq 0. \tag{3.2.4}$$

D'après (3.2.3) et (3.2.4), on obtient

$$\begin{aligned}\langle A_n u,u\rangle &\geq \varepsilon\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p_+}+|u|^{p_+}\right]dx\\ &\geq \varepsilon\|\nabla u\|^{p_+}_{W^{1,p_+}}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{\langle A_n u,u\rangle}{\|u\|_{W^{1,p_+}(\Omega)}}\longrightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad \|u\|_{W^{1,p_+}(\Omega)}\to +\infty. \tag{3.2.5}$$

Nous déduisons que l'opérateur A_n est coercif.

Assertion 2. L'opérateur A_n est de type (M).

Soit $(u_k)_k$ une suite dans X_0 telle que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u \ \text{ in } \ X_0 \\ A_n u_k \rightharpoonup \chi \ \text{ in } X_0' \\ \limsup\limits_{k\to+\infty} \langle A_n u_k, u_k\rangle \leq \langle \chi, u\rangle. \end{cases}$$

Nous montrerons que $\chi = A_n u$.

Puisque

$$T_n(\alpha(u_k))u_k \geq 0 \ \text{ et } \ \lambda T_n(u_k)u_k \geq 0,$$

d'après le Lemme de Fatou, nous déduisons que

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\int_\Omega T_n\left(\alpha\left(u_k\right)\right) u_k dx + \lambda \int_{\partial\Omega} T_n\left(u_k\right) u_k d\sigma\right) \geq \int_\Omega T_n(\alpha(u))u dx + \lambda \int_{\partial\Omega} T_n(u) u d\sigma.$$

D'autre part, grâce au théorème du convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty}&\left(\int_\Omega T_n\left(b\left(u_k\right)\right) v dx + \lambda \int_{\partial\Omega} T_n\left(u_k\right) v d\sigma + \varepsilon \int_\Omega \left[|u_k|^{p_+-2} u_k v + |\nabla u_k|^{p_+-2} \nabla u_k \nabla v\right] dx\right) \\ &= \int_\Omega T_n(b(u)) v dx + \lambda \int_{\partial\Omega} T_n(u) v d\sigma + \varepsilon \int_\Omega \left[|u|^{p_+-2} u v + |\nabla u|^{p_+-2}\nabla u \nabla v\right] dx, \end{aligned}$$

pour tout $v \in X_0$. Par conséquent, pour k suffisamment grand,

$$\begin{aligned} &T_n\left(b\left(u_k\right)\right) + \lambda T_n\left(u_k\right) + \varepsilon\left[|u_k|^{p_+-2} u_k + |\nabla u_k|^{p_+-2} \nabla u_k\right] \\ &\qquad \rightharpoonup T_n(b(u)) + \lambda T_n(u) + \varepsilon\left[|u|^{p_+-2} u + |\nabla u|^{p_+-2}\nabla u\right] \ \text{ dans } X_0'. \end{aligned}$$

D'où,

$$Au_k \rightharpoonup \chi - \left(T_n(b(u)) + \lambda T_n(u) + \varepsilon\left[|u|^{p_+-2}u + |\nabla u|^{p_+-2}\nabla u\right]\right) \ \text{ dans } X_0', \ \text{ quand } k \to +\infty.$$

Comme l'opérateur A est de type (M), on a donc immédiatement

$$Au = \chi - \left(T_n(b(u)) + \lambda T_n(u) + \varepsilon\left[|u|^{p_+-2}u + |\nabla u|^{p_+-2}\nabla u\right]\right).$$

Par conséquent, nous concluons que $A_n u = \chi$.

De plus, l'opérateur A_n est borné et hémi-continu. Par conséquent, A_n est surjectif. Ainsi, pour tout $F_n = \langle T_n(f), T_n(g)\rangle \subset E' \subset X_0'$, on peut déduire l'existence d'une solution $u_n \in X_0$ du problème

$$\langle A_n u, v\rangle = \langle F_n u, v\rangle \text{ pour tout } v \in X_0.$$

C'est-à-dire

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n - \Theta(u_n)|^{p(u_n)-2} (\nabla u_n - \Theta(u_n)))\nabla v dx + \int_{\Omega} |u|^{p(u_n)-2} u_n v dx + \int_{\Omega} T_n(\alpha(u_n))\, v dx$$
$$+\lambda \int_{\partial\Omega} T_n(u_n)\, v d\sigma + \varepsilon \int_{\Omega} \left[|u_n|^{p_+-2} u_n v + |\nabla u_n|^{p_+-2} \nabla u_n \nabla v \right] dx = \int_{\Omega} T_n(f) v dx + \int_{\partial\Omega} T_n(g) v d\sigma. \tag{3.2.6}$$

Notre objectif est de prouver qu'une sous-suite de ces solutions approximatives $\{u_n\}$ converge vers une fonction mesurable u.

Étape 2: estimation a priori.

Lemme 3.2.3 $(\nabla T_k(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est borné dans* $L^{p_-}(\Omega)$.

Preuve. En prenant $\varphi = T_k(u_n)$ comme fonction test dans (3.2.6), on obtient

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\nabla u_n - \Theta(u_n)\right) \nabla T_k(u_n) dx + \int_{\Omega} |u|^{p(u_n)-2} u_n T_k(u_n) dx + \int_{\Omega} T_n(\alpha(u_n))\, T_k(u_n) dx$$
$$+\lambda \int_{\partial\Omega} T_n(u_n)\, T_k(u_n) d\sigma + \varepsilon \int_{\Omega} \left[|u|^{p_+-2} u T_k(u_n) + |\nabla u|^{p_+-2} \nabla u \nabla T_k(u_n) \right] dx$$
$$= \int_{\Omega} T_n(f) T_k(u_n) dx + \int_{\partial\Omega} T_n(g) T_k(u_n) d\sigma.$$

Puisque le troisième, quatrième et cinquième terme du côté gauche de l'égalité ci-dessus sont positifs, alors

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\nabla u_n - \Theta(u_n)\right) \nabla T_k(u_n) dx + \int_{\Omega} |u|^{p(u_n)-2} u_n T_k(u_n) dx \leq k \left(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)} \right). \tag{3.2.7}$$

Nous avons,

$$\int_{\Omega} |u_n|^{p(u_n)-2} u_n T_k(u_n) dx \geq \int_{\{|u_n|\leq k\}} |T_k(u_n)|^{p(u_n)} dx + \int_{\{|u_n|>k\}} k^{p(u_n)} dx$$
$$\leq \int_{\Omega} |T_k(u_n)|^{p(u_n)} dx.$$

En utilisant (3.2.7), on obtient

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\nabla T_k(u_n) - \Theta(u_n)\right) \nabla T_k(u_n) dx + \int_{\Omega} |T_k(u_n)|^{p(u_n)} dx \leq k \left(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)} \right). \tag{3.2.8}$$

En suivant la même procédure de la coercivité, on montre que

$$\rho_{1,p(u_n)}(T_k(u_n)) \leqslant Ck.$$

Il s'ensuit que,

$$\|T_k(u_n)\|_{1,p(u_n)} \leqslant 1 + (Ck)^{\frac{1}{p_-}}.$$

Alors, pour tout $k > 0$, la suite $(T_k(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $W^{1,p(u_n(\cdot))}(\Omega)$ et dans $W^{1,p_-}(\Omega)$. En passant à une sous-suite toujours notée $T_k(u_n)$, on peut supposer que pour tout $k > 0$, $T_k(u_n)$ converge faiblement vers v_k dans $W^{1,p_-}(\Omega)$ et aussi $T_k(u_n)$ converge fortement vers v_k dans $L^{p_-}(\Omega)$.

Lemme 3.2.4 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure vers une fonction mesurable* u.

Preuve. Nous prouvons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Pour tout $\delta > 0$ fixe, et tout entier positif $k > 0$, on sait que

$$\text{meas}\{|u_n - u_m| > \delta\} \leq \text{meas}\{|u_n| > k\} + \text{meas}\{|u_m| > k\} + \text{meas}\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \delta\}.$$

En choisissant $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (3.2.6), on obtient

$$\rho_{1,p(u_n)}(T_k(u_n)) \leqslant k\left(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}\right). \tag{3.2.9}$$

Il s'ensuit que

$$\int_{\{|u_n|>k\}} k^{p(u_n)}dx \leqslant k\left(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}\right).$$

Par conséquent,

$$\text{meas}\{|u_n| > k\} \leqslant k^{1-p_-}\left(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}\right).$$

D'où,

$$\text{meas}\{|u_n| > k\} \to 0 \text{ quand } k \to +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $k = k(\varepsilon)$ tel que

$$\text{meas}\{|u_n| > k\} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{and} \quad \text{meas}\{|u_m| > k\} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque $\{T_k(u_n)\}$ converge fortement dans $L^{p_-}(\Omega)$, alors c'est une suite de Cauchy. Ainsi

$$\text{meas}\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \delta\} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

pour tout $n, m \geqslant n_0(\delta, \varepsilon)$.
Enfin, nous obtenons

$$\text{meas}\{|u_n - u_m| > \delta\} \leqslant \varepsilon,$$

pour tout $n, m \geqslant n_0(\delta, \varepsilon)$.
Par conséquent,

$$\limsup_{n,m\to\infty} \text{meas}\{|u_n - u_m| > \delta\} = 0,$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en mesure et alors converge presque partout vers une fonction mesurable u.

$$u_n \to u \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega. \tag{3.2.10}$$

Par conséquent,

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \text{ dans } W_0^{1,p_-}(\Omega),$$

$$T_k(u_n) \longrightarrow T_k(u) \text{ dans } L^{p_-}(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega.$$

Lemme 3.2.5 u_n *converge presque partout dans* $\partial\Omega$ *vers une certaine fonction* v.

Preuve. Nous avons

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ dans } W^{1,p_-}(\Omega) \text{ et } W^{1,p_-}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_-}(\partial\Omega),$$

alors

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ dans } L^{p_-}(\partial\Omega) \text{ et p.p. sur } \partial\Omega,$$

donc

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ dans } L^1(\partial\Omega) \text{ et p.p. dans } \partial\Omega.$$

Par conséquent, il existe $A \subset \partial\Omega$ tel que $T_k(u_n) \to T_k(u)$ sur $\partial\Omega\backslash A$ avec $\mu(A) = 0$, où μ est une mesure d'aire sur $\partial\Omega$.
Pour chaque $k > 0$, soit $A_k = \{x \in \partial\Omega : \ |T_k(u)| < k\}$ et $B = \partial\Omega\backslash \bigcup\limits_{k>0} A_k$. En utilisant le lemme de Fatou, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |T_k(u)|\, d\sigma &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\partial\Omega} |T_k(u_n)|\, d\sigma \\ &\leq \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}}{\lambda}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mu(B) = \frac{1}{k}\int_B |T_k(u)|\, d\sigma &\leq \frac{1}{k}\int_{\partial\Omega} |T_k(u)|\, d\sigma \\ &\leq \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}}{k\lambda}.\end{aligned}$$

On obtient $\mu(B) = 0$, lorsque k tend vers ∞. Définissons maintenant la fonction v sur $\partial\Omega$ par

$$v(x) = T_k(u(x)), \quad x \in A_k.$$

Si on prend $x \in \partial\Omega\backslash(E \cup F)$, alors il existe $k > 0$ tel que $x \in E_k$ et nous avons

$$u_n(x) - v(x) = (u_n(x) - T_k(u_n(x))) + (T_k(u_n(x)) - T_k(u(x))).$$

Puisque $x \in E_k$, alors $|T_k(u(x))| < k$ et donc $|T_k(u_n(x))| < k$, on déduit que $|u_n(x)| < k$. Par conséquent,

$$u_n(x) - v(x) = T_k(u_n(x)) - T_k(u(x)) \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Ce qui signifie que u_n converge vers v p.p. sur $\partial\Omega$, pour tout $x \in E_k$, $T_k(u(x)) = u(x)$. Donc, $v = u$ p.p. sur $\partial\Omega$. Par conséquent,

$$u_n \to u \text{ p.p. sur } \partial\Omega.$$

Lemme 3.2.6 $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ∇u *presque partout dans* Ω.

Preuve. Nous prouvons d'abord que $\{\nabla u_n\}$ est une suite de Cauchy en mesure. Soient δ, h et ε des nombres réels positifs, nous avons évidemment

$$\{x \in \Omega : |\nabla u_n - \nabla u_m| > \delta\} \subset \{x \in \Omega : |\nabla u_n| > h\} \cup \{x \in \Omega : |\nabla u_m| > h\} \cup \{x \in \Omega : |u_n - u_m| > 1\} \cup E,$$

où

$$E := \{x \in \Omega : |\nabla u_n| \leqslant h, |\nabla u_m| \leqslant h, |u_n - u_m| \leqslant 1, |\nabla u_n - \nabla u_m| > \delta\}.$$

Pour tout $k > 0$, on peut écrire

$$\{x \in \Omega : |\nabla u_n| \geqslant h\} \subset \{x \in \Omega : |u_n| \geqslant k\} \cup \{x \in \Omega : |\nabla T_k(u_n)| \geqslant h\},$$

en utilisant la même démarche que dans le Lemme 3.2.4 on obtient, pour k suffisamment grand,

$$\operatorname{meas}\{\{x \in \Omega : |\nabla u_n| > h\} \cup \{x \in \Omega : |\nabla u_m| > h\} \cup \{x \in \Omega : |u_n - u_m| > 1\}\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notons que l'application

$$\mathcal{G} : (s, t, \xi_1, \xi_2) \mapsto (\Phi(\xi_1 - \Theta(s)) - \Phi(\xi_2 - \Theta(t)))(\xi_1 - \xi_2)$$

est continue, l'ensemble

$$\mathcal{H} := \left\{(s, t, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, |s| \leq h, |t| \leq h, |\xi_1| \leq h, |\xi_2| \leq h, |\xi_1 - \xi_2| > \delta\right\}$$

est compact et

$$(\Phi(\xi_1 - \Theta(s)) - \Phi(\xi_2 - \Theta(t)))(\xi_1 - \xi_2) > 0, \quad \forall \xi_1 \neq \xi_2.$$

Alors, l'application $\mathcal{G}$ atteint son minimum sur $\mathcal{H}$. Par conséquent, il existe une fonction

$\beta(h,\delta) > 0$ à valeur réelle telle que

$$\begin{aligned}\beta(h,\delta)\mathrm{meas}(E) \leq & \int_E \Big[|\nabla u_n - \Theta(u_n)|^{p(u_n)-2}(\nabla u_n - \Theta(u_n)) \\ & - |\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{p(u_n)-2}(\nabla u_m - \Theta(u_m)) \Big] [\nabla u_n - \nabla u_m]\, dx, \\ = & \int_E \Big[|\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{p(u_m)-2}(\nabla u_m - \Theta(u_m)) \\ & - |\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{p(u_n)-2}(\nabla u_m - \Theta(u_m)) \Big] [\nabla u_n - \nabla u_m]\, dx \\ & + \int_E \Big[|\nabla u_n - \Theta(u_n)|^{p(u_n)-2}(\nabla u_n - \Theta(u_n)) \\ & - |\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{p(u_m)-2}(\nabla u_m - \Theta(u_m)) \Big] [\nabla u_n - \nabla u_m]\, dx.\end{aligned}$$

Nous prenons $T_\nu(u_n - u_m)$ comme fonction test dans (3.2.6), on aura

$$\begin{aligned}&\beta(h,\delta)\mathrm{meas}(E) \leqslant \\ &\int_E \Big[|\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{p(u_m)-2}(\nabla u_m - \Theta(u_m)) - |\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{p(u_n)-2}(\nabla u_m - \Theta(u_m)) \Big] [\nabla u_n - \nabla u_m]\, dx \\ &- \int_\Omega \left(|u_n|^{p(u_n)-2}u_n - |u_m|^{p(u_m)-2}u_m \right) T_\nu(u_n - u_m)\, dx - \int_\Omega (T_n(\alpha(u_n)) - T_m(\alpha(u_m)))\, T_\nu(u_n - u_m)\, dx \\ &-\lambda \int_{\partial\Omega} (T_n(u_n) - T_m(u_m))\, T_\nu(u_n - u_m)\, dx - \varepsilon \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p_+-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p_+-2}\nabla u_m \right) \nabla T_\nu(u_n - u_m)\, dx \\ &+ \int_\Omega [T_n(f) - T_m(f)]\, T_\nu(u_n - u_m)\, dx + \int_{\partial\Omega} [T_n(g) - T_m(g)]\, T_\nu(u_n - u_m)\, dx,\end{aligned}$$

dû au fait que $\|T_n(\alpha(u_n))\|_{L^1(\Omega)} + \lambda \|T_n(u_n)\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\beta(h,\delta)\mathrm{meas}(E) \leqslant & \int_E \Big[|\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{p(u_m)-2}(\nabla u_m - \Theta(u_m)) \\ & - |\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{p(u_n)-2}(\nabla u_m - \Theta(u_m)) \Big] [\nabla u_n - \nabla u_m]\, dx \\ & - \int_\Omega \left(|u_n|^{p(u_n)-2}u_n - |u_m|^{p(u_m)-2}u_m \right) T_\nu(u_n - u_m)\, dx + \nu \left(2\|f\|_{L^1(\Omega)} + 2\|g\|_{L^1(\partial\Omega)} \right) \\ & + \nu \|T_n(f) - T_m(f)\|_{L^1(\Omega)} + \nu \|T_n(g) - T_m(g)\|_{L^1(\partial\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe η prenant des valeurs entre $p(u_n)$ et $p(u_m)$ tel que

$$\begin{aligned}&\int_E \Big[|\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{p(u_m)-2}(\nabla u_m - \Theta(u_m)) - |\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{p(u_n)-2}(\nabla u_m - \Theta(u_m)) \Big] [\nabla u_n - \nabla u_m]\, dx \\ &\leqslant \int_E |\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{\eta-1} \left|\log|\nabla u_m - \Theta(u_m)|\right| \cdot |\nabla u_n - \nabla u_m| \cdot |p(u_m) - p(u_n)|\, dx.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.3.5, l'hypothèse (H_2) et le fait que $h \gg 1$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_E \Big[|\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{p(u_m)-2}(\nabla u_m - \Theta(u_m)) - |\nabla u_m - \Theta(u_m)|^{p(u_n)-2}(\nabla u_m - \Theta(u_m)) \Big] [\nabla u_n - \nabla u_m]\, dx \\ &\leqslant 2^{p^+} h^{p^+} \left(1 + \lambda^{\eta-1} \right) \log((1+\lambda)h) \cdot \int_\Omega |p(u_m) - p(u_n)|\, dx.\end{aligned}$$

Par conséquent, selon l'inégalité (3.2.11) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons

$$\operatorname{meas}(E) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

pour tout $n, m \geqslant N_2(\varepsilon, \delta)$. En combinant les résultats précédents, on obtient

$$\operatorname{meas}\{x \in \Omega : |\nabla u_n - \nabla u_m| > \delta\} \leqslant \varepsilon, \quad \text{pour tout } n, m \geqslant \max\{N_1, N_2\},$$

donc $\{\nabla u_n\}$ est une suite de Cauchy en mesure. Nous pouvons alors extraire une sous-suite (que nous noterons la suite originale) telle que

$$\nabla u_n \to v \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Ainsi, en utilisant la Proposition 1.1.10 et le fait que $\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u)$ dans $(L^{p_-}(\Omega))^N$, nous déduisons que v coïncide avec le gradient faible de u presque partout. Par conséquent,

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{3.2.12}$$

Étape 3: Passage à la limite.

Puisque la suite $(\nabla T_k(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $\nabla T_k(u)$, alors d'après le Lemme 1.3.7, nous obtenons

$$\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u) \quad \text{dans } \left(L^1(\Omega)\right)^N. \tag{3.2.13}$$

Par conséquent, en utilisant le Lemme 3.2.4, le Lemme 3.2.5 et la convergence (3.2.13) nous obtenons $u \in \mathcal{T}_{tr}^{1,p(u(\cdot))}(\Omega)$.

Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, puisque $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans l'espace $W^{1,p_+}(\Omega)$ et $T_k(u_n - \phi) \in L^\infty(\partial\Omega)$, alors nous pouvons choisir $T_k(u_n - \phi)$ comme fonction test dans (3.2.6) pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Phi(\nabla u_n - \Theta(u_n)) \nabla T_k(u_n - \phi)\, dx + \int_\Omega |u|^{p(u_n)-2} u_n T_k(u_n - \phi)\, dx + \int_\Omega T_n(\alpha(u_n))\, T_k(u_n - \phi)\, dx \\
&+\lambda \int_{\partial\Omega} T_n(u_n)\, T_k(u_n - \phi)\, d\sigma + \varepsilon \int_\Omega \left[|u_n|^{p_+-2} u_n T_k(u_n - \phi) + |\nabla u_n|^{p_+-2} \nabla u_n \nabla T_k(u_n - \phi)\right] dx \\
&= \int_\Omega T_n(f) T_k(u_n - \phi)\, dx + \int_{\partial\Omega} T_n(g) T_k(u_n - \phi)\, d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Concernant le premier terme du côté gauche de (3.2.14), si on prend $L = k + \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$, on aura

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u_n - \Theta(u_n)|^{p(u_n)-2} (\nabla u_n - \Theta(u_n)) \cdot \nabla T_k(u_n - \phi)\, dx \\
&= \int_\Omega |\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2} (\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))) \cdot \nabla T_k(T_L(u_n) - \phi)\, dx \\
&= \int_\Omega |\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2} (\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))) \cdot \nabla T_L(u_n)\, \chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}} dx \\
&\quad - \int_\Omega |\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2} (\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))) \cdot \nabla \varphi \chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}} dx.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

D'après l'égalité (3.2.14), nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[|\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2} (\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))) \cdot \nabla T_L(u_n) + \frac{1}{p_-} |\Theta(T_L(u_n)|^\gamma \right] \chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}} dx \\
&\quad - \int_\Omega |\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2} (\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))) \cdot \nabla \varphi \chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}} dx \\
&\quad + \int_\Omega |u|^{p(u_n)-2} u_n T_k(u_n - \phi)\, dx + \int_\Omega T_n(\alpha(u_n)) T_k(u_n - \phi)\, dx + \lambda \int_{\partial\Omega} T_n(u_n) T_k(u_n - \phi)\, d\sigma \\
&\quad + \varepsilon \int_\Omega \left[|u_n|^{p_+-2} u_n T_k(u_n - \phi) + |\nabla u_n|^{p_+-2} \nabla u_n \nabla T_k(u_n - \phi) \right] dx \\
&= \int_\Omega f_n T_k(u_n - \phi)\, dx + \int_{\partial\Omega} T_n(g) T_k(u_n - \phi)\, d\sigma + \int_\Omega \frac{1}{p_-} |\Theta(T_L(u_n)|^\gamma \chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}} dx, \quad (3.2.16)
\end{aligned}$$

où

$$\gamma = \begin{cases} p_+ & \text{if} \quad |\Theta(T_L(u_n)| \leq 1, \\ p_- & \text{if} \quad |\Theta(T_L(u_n)| > 1. \end{cases}$$

Puisque $\{\nabla T_L(u_n)\}$ est borné dans $\left(L^{p'(u_n)}(\Omega)\right)^N \subset \left(L^{p'_+}(\Omega)\right)^N$, alors d'après l'hypothèse (H_3) la suite $\{\Theta(T_L(u_n)\}$ est aussi borné dans $\left(L^{p(u_n)}(\Omega)\right)^N \subset (L^{p_-}(\Omega))^N$, ce qui implique que $\left\{|\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2} (\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n)))\right\}$ est borné dans $\left(L^{p'(u_n)}(\Omega)\right)^N \subset \left(L^{p'_+}(\Omega)\right)^N$.

Dû au fait que $u_n \to u$ p.p. dans Ω et $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω, on a

$$\Theta(T_L(u_n)) \longrightarrow \Theta(T_L(u)) \text{ p.p. dans } \Omega \qquad (3.2.17)$$

et

$$\nabla T_L(u_n) \longrightarrow \nabla T_L(u) \text{ p.p. dans } \Omega. \qquad (3.2.18)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&|\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2} (\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))) \\
&\quad \rightharpoonup |\nabla T_L(u) - \Theta(T_L(u))|^{p(u)-2} (\nabla T_L(u) - \Theta(T_L(u))) \quad \text{dans } \left(L^{p'_+}(\Omega)\right)^N.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2} (\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))) \cdot \nabla \varphi \chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}} dx \\
&\longrightarrow \int_\Omega |\nabla T_L(u) - \Theta(T_L(u))|^{p(u)-2} (\nabla T_L(u) - \Theta(T_L(u))) \cdot \nabla \varphi \chi_{\{|T_L(u)-\phi|\leqslant k\}} dx, \quad \text{quand } n \to \infty.
\end{aligned} \qquad (3.2.19)$$

On utilise la convergence (3.2.17) et on applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$\int_\Omega \frac{1}{p_-} |\Theta(T_L(u_n)|^\gamma \chi_{\{|T_L(u_n)-\phi|\leqslant k\}} dx \to \int_\Omega \frac{1}{p_-} |\Theta(T_L(u)|^\gamma \chi_{\{|T_L(u)-\phi|\leqslant k\}} dx.$$

D'autre part, d'après le Lemme 1.3.4, nous avons

$$\left[|\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2} (\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))) \cdot \nabla T_L(u_n) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{p_-} |\Theta(T_L(u_n))|^\gamma \right] \chi_{\{|T_L(u_n)-\phi| \leqslant k\}} \geqslant 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

En appliquant le lemme de Fatou, on obtient

$$\int_\Omega \left[|\nabla T_L(u) - \Theta(T_L(u))|^{p(u)-2} (\nabla T_L(u) - \Theta(T_L(u))) \cdot \nabla T_L(u) + \frac{1}{p_-} |\Theta(T_L(u))|^\gamma \right] \chi_{\{|T_L(u)-\phi| \leqslant k\}} dx$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left[|\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))|^{p(u_n)-2} (\nabla T_L(u_n) - \Theta(T_L(u_n))) \cdot \nabla T_L(u_n) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{p_-} |\Theta(T_L(u_n))|^\gamma \right] \chi_{\{|T_L(u_n)-\phi| \leqslant k\}} dx. \quad (3.2.20)$$

Pour le cinquième terme du côté gauche de (3.2.16), nous prouvons que

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon \int_\Omega \left[|\nabla u_n|^{p_+-2} \nabla u_n \nabla T_k(u_n - \phi) + |u_n|^{p_+-2} u_n T_k(u_n - \phi) \right] dx \geq 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0. \quad (3.2.21)$$

On pose $l = k + \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$, on aura

$$\varepsilon \int_\Omega |\nabla u_n|^{p_+-2} \nabla u_n \nabla T_k(u_n - \phi) dx = \varepsilon \int_{\{|u_n-\phi|<k\}} |\nabla T_l(u_n)|^{p_+-2} \nabla T_l(u_n) \nabla (T_l(u_n) - \phi) dx$$
$$= \varepsilon \int_{\{|u_n-\phi|<k\}} |\nabla T_l(u_n)|^{p_+} dx - \varepsilon \int_{\{|u_n-\phi|<k\}} |\nabla T_l(u_n)|^{p_+-2} \nabla T_l(u_n) \nabla \phi dx$$
$$\geq -\varepsilon \int_{\{|u_n-\varphi|<k\}} |\nabla T_l(u_n)|^{p_+-2} \nabla T_l(u_n) \nabla \phi dx. \quad (3.2.22)$$

On prend $v = T_l(u_n)$ dans la formulation (3.2.6), on déduit que

$$\varepsilon \int_\Omega \left[|\nabla u_n|^{p_+-2} \nabla u_n \nabla T_l(u_n) + |u_n|^{p_+-2} u_n T_l(u_n) \right] dx \leq l \left(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)} \right),$$

d'où

$$\varepsilon \int_\Omega |\nabla T_l(u_n)|^{p_+} dx \leq l \left(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)} \right),$$

ce qui implique que la suite $\varepsilon \nabla T_l(u_n)$ est uniformément bornée dans $L^{p_+}(\Omega)$. D'après le Lemme 3.2.6, $\nabla T_l(u_n)$ converge vers $\nabla T_l(u)$ p.p. dans Ω. Donc, d'après le théorème de Vitali, $\varepsilon \nabla T_l(u_n)$ converge vers $\varepsilon \nabla T_l(u)$ dans $L^{p_+}(\Omega)$. Ainsi, $\varepsilon |\nabla T_l(u_n)|^{p_+-2} \nabla T_l(u_n) \chi_{\{|u_n-\phi|<k\}}$ converge vers $\varepsilon |\nabla T_l(u)|^{p_+-2} \nabla T_l(u) \chi_{\{|u-\phi|<k\}}$ dans $L^{p'_+}(\Omega)$. En utilisant (3.2.22), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_n|^{p_+-2} \nabla u_n \nabla T_k(u_n - \phi) dx \geq -\varepsilon \int_{\{|u-\phi|<k\}} |\nabla T_l(u)|^{p_+-2} \nabla T_l(u) \nabla \varphi dx.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_n|^{p_+-2}\nabla u_n \nabla T_k(u_n-\phi)\,dx \geq 0, \text{ quand } \varepsilon \to 0. \tag{3.2.23}$$

Maintenant, nous prouvons que

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon \int_\Omega |u_n|^{p_+-2}u_n T_k(u_n-\phi)\,dx \geq 0, \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_n|^{p_+-2}u_n T_k(u_n-\phi)\,dx &= \int_\Omega \left(|u_n|^{p_+-2}u_n - |\phi|^{p_+-2}\phi\right) T_k(u_n-\phi)\,dx \\ &\quad + \int_\Omega |\phi|^{p_+-2}\phi T_k(u_n-\phi)\,dx \\ &\geq \int_\Omega |\phi|^{p_+-2}\phi T_k(u_n-\phi)\,dx,\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

puisque $\left(|u_n|^{p_+-2}u_n - |\phi|^{p_+-2}\phi\right) T_k(u_n-\phi)$ est positif. De plus, $T_k(u_n-\phi)$ converge faiblement* vers $T_k(u-\phi)$ dans $L^\infty(\Omega)$ et $|\phi|^{p_+-2}\phi \in L^{p'_+}(\Omega)$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\phi|^{p_+-2}\phi T_k(u_n-\phi)\,dx = \int_\Omega |\varphi|^{p_+-2}\varphi T_k(u-\varphi)dx. \tag{3.2.25}$$

En combinant (3.2.24) et (3.2.25), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon \int_\Omega |u_n|^{p_+-2}u_n T_k(u_n-\phi)\,dx \geq 0, \text{ quand } \varepsilon \to 0. \tag{3.2.26}$$

À partir des inégalités (3.2.23) et (3.2.26), on déduit (3.2.21).
Maintenant, nous considérons le premier terme du côté droit de (3.2.16), puisque $T_n(f) \to f$ dans $L^1(\Omega)$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega T_n(f) T_k(u_n-\phi)\,dx = \int_\Omega f T_k(u-\phi)\,dx. \tag{3.2.27}$$

Enfin, en utilisant les résultats ci-dessus, nous pouvons passer à la limite lorsque $n \to \infty$ dans l'égalité (3.2.16) pour conclure que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u - \Theta(u)|^{p(u)-2}(\nabla u - \Theta(u))\nabla T_k(u-\phi)dx + \int_\Omega |u|^{p(u)-2}uT_k(u-\phi)dx + \int_\Omega \alpha(u)T_k(u-\phi)dx \\ &\qquad + \lambda\int_{\partial\Omega} uT_k(u-\phi)d\sigma \leqslant \int_\Omega fT_k(u-\phi)dx + \int_{\partial\Omega} gT_k(u-\phi)d\sigma,\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.
Puisque $p(u(\cdot))$ vérifie la condition log-Hölder, $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans l'espace $W^{1,p(u(\cdot))}(\Omega)$. De plus, $W^{1,p(u(\cdot))}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p_-}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, or $p(u(\cdot)) \geq p_- > N$ et Ω est un ouvert borné du frontière Lipschitzienne $\partial\Omega$, Alors l'inégalité (3.2.28) est vraie pour tout $\phi \in W^{1,p(u(\cdot))}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Par conséquent, u est une solution entropique du problème (3.2.1).

Chapter 4

Étude des problèmes associés à un opérateur de type (p, q)-Laplacien

Contents

4.1 Solutions entropiques d'un problème $(p(b(u)), q(b(u)))$-Laplacien non local

Nous étudions l'existence de solutions entropiques pour certains problèmes à exposant variable avec des exposants p, q qui peuvent dépendre de la solution inconnue u. Nous considérons un problème de Dirichlet non local de la forme suivante :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u) - \mathrm{div}(|\nabla u|^{q(b(u))-2}\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$, f est une fonction donnée, $p, q : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ sont des fonctions réelles et $b : W_0^{1,\alpha}(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Par $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, on entend l'espace de Dirichlet-Sobolev d'exposant constant α satisfaisant $1 < \alpha < +\infty$ (c'est-à-dire que $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,\alpha}(\Omega)$). Pour souligner le degré de généralité dans la définition des exposants p, q, nous rappelons deux exemples typiques de la fonction b de la forme suivante :

$$b(u) = \|\nabla u\|_{L^{\alpha}(\Omega)}, \quad b(u) = \|u\|_{L^{s}(\Omega)}, s \leq \alpha^{*},$$

En particulier, nous pouvons lier $b(\cdot)$ à deux définitions de normes qui sont pertinentes d'un point de vue mathématique. Ici, α^{*} désigne l'exposant critique de Sobolev de α.

Dans ces dernières années, l'existence, l'unicité et la régularité des solutions des problèmes $(p(x), q(x))$-Laplacien ont été étudiées dans de nombreux travaux ([80, 82, 83]). La raison pour laquelle cet intérêt augmente c'est le rôle crucial de cet opérateur dans la modélisation de divers phénomènes physiques et la dynamique des sciences de la vie. Pour quelques références, on note les travaux de Ružička [77], Shi et al [78] et Zhang et Rădulescu [84] (fluide électrorhéologique). D'autres applications pour modéliser les milieux poreux et les écoulements visqueux, peuvent être trouvées dans Antontsev et Shmarev [16], où les auteurs considèrent diverses équations d'évolutions et discutent l'existence, l'unicité, la localisation et le comportement asymptotique des solutions sous des conditions de croissance appropriées. Le cas où les exposants variables dépendent de la solution inconnue u, n'a été traité que dans quelques travaux dans la littérature; voir, par exemple, le travail récent de K. S. Albalawi et al. [13]. Cette situation est pertinente dans le contexte des méthodes variationnelles de débruitage d'images, où certaines approches numériques estiment les orientations des structures de l'image à partir des données et, par conséquent, elles utilisent cette information pour construire une fonction d'énergie à minimiser. La performance de ce processus de minimisation bénéficie de l'utilisation explicite de la dépendance u ou de la dépendance ∇u, pour la régularisation de l'image (voir Türola [79] et ses références).

4.1.1 Résultats principaux

Cette section est consacrée à l'existence de la solution entropique du problème (4.1.1). Afin d'introduire la notion de solution entropique du problème (4.1.1), on définit l'ensemble suivant

$$W_0^{1,p(b(u))}(\Omega) := \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(b(u))} dx < \infty \right\}.$$

Si $1 < p(b(u)) < +\infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, cet ensemble est un espace de Banach de norme $\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$, ce qui est équivalent à $\|\nabla u\|_{L^{p(b(u))}(\Omega)}$ dans le cas de $p(b(u)) \in C(\overline{\Omega})$. Si, pour une constante $\alpha, p \geq \alpha > 1, p$ et b sont continues, alors $W_0^{1,p(b(u))}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ alors, il est séparable et réflexif. Dans ce qui suit, $W^{-1,\alpha'}(\Omega) = W_0^{1,\alpha}(\Omega)^{*}$, avec $1 < \alpha < +\infty$, désigne comme d'habitude l'espace dual de $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. De la même manière, nous définissons $W_0^{1,q(b(u))}(\Omega)$. Avant de prouver le théorème d'existence, nous imposons quelques restrictions aux exposants et supposons que $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ sont des fonctions réelles satisfaisant les conditions suivantes :

$$p, q \quad \text{sont continues} \quad \text{et} \quad 1 < \alpha \leq q < p \leq \beta < \infty, \tag{4.1.2}$$

pour certaines constantes α et β. Par rapport à la constante α, nous définissons le domaine $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ de la fonction réelle $b(\cdot)$, et nous imposons en outre que :

$$b \quad \text{est continue}\,, \quad b \quad \text{est bornée} \tag{4.1.3}$$

Maintenant, nous introduisons une définition des solutions entropiques pour le problème elliptique (4.1.1).

Définition 4.1.1 *Une fonction mesurable* u *avec* $T_k(u) \in W_0^{1,p(b(u))}(\Omega)$ *est dite solution entropique de problème* (4.1.1), *si*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u \cdot \nabla T_k(u-\varphi)dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q(b(u))-2}\nabla u \cdot \nabla T_k(u-\varphi)dx \leqslant \int_\Omega fT_k(u-\varphi)dx, \tag{4.1.4}$$

pour tout $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ *et pour tout* $k > 0$.

Il est techniquement utile d'étendre la définition ci-dessus de la solution entropique à des fonctions de troncature plus générales que T_k. Nous introduisons la classe $\mathcal{T}$ de fonctions satisfaisant :

$$T(0) = 0 \text{ et } T(-t) = -T(t), T'(t) \geqslant 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$
$$T'(t) = 0 \text{ pour tout } t \text{ assez grand et } T''(t) \leqslant 0, t \geqslant 0.$$

Lemme 4.1.2 *La condition d'entropie* (4.1.4) *est équivalente à la condition suivante*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u\cdot\nabla T(u-\varphi)dx+\int_\Omega |\nabla u|^{q(b(u))-2}\nabla u\cdot\nabla T(u-\varphi)dx \leqslant \int_\Omega fT(u-\varphi)dx, \tag{4.1.5}$$

pour toute $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ *et pour chaque* $T \in \mathcal{T}$.

Remarque 4.1.3 *La preuve du Lemme 4.1.2 est similaire au celle de Lemme* 3.2 *dans [27].*

Nous remarquons que les quantités $p(b(u))$ et $q(b(u))$ se réduisent à des nombres réels et non à des fonctions. Par conséquent, nous pouvons traiter les espaces de Sobolev à exposant variable de la Définition 4.1.1 comme des espaces de Sobolev à exposant constant.

Théorème 4.1.4 *Supposons que* (4.1.2) *et* (4.1.3) *sont valables et que* $f \in L^1(\Omega)$. *Alors il existe au moins une solution entropique du problème* (4.1.1) *au sens de la Définition 4.1.1.*

La preuve du Théorème (4.1.4) est divisée en quelques étapes.

Étape 1: Le problème approximatif.

Nous considérons le problème approché suivant

$$(\mathcal{P}_n)\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u_n|^{p(b(u_n))-2}\nabla u_n) - \operatorname{div}(|\nabla u_n|^{q(b(u_n))-2}\nabla u_n) = f_n \text{ dans } \Omega \\ \\ u_n = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où f_n est une suite de fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ fortement convergentes vers f dans L^1 telles que $\|f_n\|_{L^1} \leq 2\|f\|_{L^1}$.

En employant les arguments du Théorème 2.3.2 de [82], nous obtenons le résultat suivant. Ensuite, en se basant sur ce résultat, nous pouvons obtenir l'existence de solutions approximatives de (4.1.1) lorsque $f \in L^1(\Omega)$..

Théorème 4.1.5 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geqslant 2$, un domaine borné avec une frontière Lipschitzienne $\partial\Omega$. Supposons que* (4.1.2) *est vérifiée ainsi que*

$$f \in W^{-1,\alpha'}(\Omega).$$

Alors le problème $(\mathcal{P}_n)$ admet au moins une solution faible $u_n \in W_0^{1,p(u_n)}(\Omega)$ dans le sens suivant

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(b(u_n))-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^{q(b(u_n))-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi dx = \int_\Omega f_n\varphi dx, \qquad (4.1.6)$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p(b(u_n))}(\Omega)$.

Notre objectif est de prouver qu'une sous-suite de ces solutions approximatives $\{u_n\}$ converge vers une fonction mesurable u, qui est une solution entropique de (4.1.1).

Étape 2 : Estimation a priori.

Proposition 4.1.6 *Si u est une solution entropique de problème* (4.1.1)*, alors il existe une constante positive C telle que pour tout $k > 1$*

$$\text{meas}\{|u| > k\} \leqslant \frac{C(A+1)^{\alpha^*/\alpha}}{k^{\alpha^*(1-1/\alpha)}},$$

où α^* est l'exposant critique de l'injection de Sobolev par rapport à α.

Preuve. En choisissant $\varphi = 0$ comme fonction test dans (4.1.4), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{p(b(u))}\, dx + \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{q(b(u))}\, dx \\ &= \int_{\{|u|\leqslant k\}} |\nabla u|^{p(b(u))} dx + \int_{\{|u|\leqslant k\}} |\nabla u|^{q(b(u))} dx \leqslant k\|f\|_{L^1(\Omega)},\end{aligned}$$

ce qui implique que pour tout $k > 1$,

$$\frac{1}{k}\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^{p(b(u))}\, dx \leqslant A := \|f\|_{L^1(\Omega)}, \tag{4.1.7}$$

et

$$\frac{1}{k}\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^{q(b(u))}\, dx \leqslant A := \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Puisque

$$W_0^{1,p(b(u))}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha^*}(\Omega).$$

Alors pour chaque $k > 1$

$$\begin{aligned}\|T_k(u)\|_{L^{\alpha^*}(\Omega)} &\leqslant C\, \|\nabla T_k(u)\|_{L^{p(b(u))}(\Omega)}\\ &\leqslant C\left(\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^{p(b(u))}\, dx\right)^{\delta} \leqslant C(Ak)^{\delta},\end{aligned}$$

où

$$\delta = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{if } \|\nabla T_k(u)\|_{L^{p(b(u))}(\Omega)} \geqslant 1\\ \\ \frac{1}{\beta} & \text{if } \|\nabla T_k(u)\|_{L^{p(b(u))}(\Omega)} \leqslant 1.\end{cases}$$

En notant que $\{|u| \geqslant k\} = \{|T_k(u)| \geqslant k\}$, on a

$$\text{meas}\{|u| > k\} \leqslant \left(\frac{\|T_k(u)\|_{L^{\alpha^*}(\Omega)}}{k}\right)^{\alpha^*} \leqslant \frac{CA^{\delta\alpha^*}}{k^{\alpha^*(1-\delta)}} \leqslant \frac{C(A+1)^{\alpha^*/\alpha}}{k^{\alpha^*(1-1/\alpha)}}.$$

Ceci complète la preuve.

Étape 3 : La convergence en mesure de $\{u_n\}$.

Pour tout $\epsilon > 0$ et tout entier positif k, on a

$$meas\{|u_n - u_m| > \epsilon\} \leq meas\{|u_n| > k\} + meas\{|u_m| > k\} + meas\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \epsilon\}.$$

En choisissant $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (4.1.6), on obtient

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^{p(b(u_n))}\, dx + \int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^{q(b(u_n))}\, dx \leqslant k\, \|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leqslant 2k\|f\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.1.8}$$

D'après (4.1.8) et l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^{\alpha}\, dx &\leqslant C\left(\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^{p(b(u_n))}\, dx\right)^{\frac{\alpha}{p(b(u_n))}}\\ &\leqslant C\left(\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^{p(b(u_n))}\, dx + 1\right) \leqslant C.\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Nous déduisons que $\{T_k(u_n)\}$ est convergent dans $L^q(\Omega)$ avec $q \in [1, \alpha^*)$. Il découle de la Proposition 4.1.6 que

$$\limsup_{n,m\to\infty} \text{meas}\{|u_n - u_m| > \epsilon\} \leqslant C\left(\|f\|_{L^1(\Omega)}\right) k^{-\tilde{\alpha}},$$

où $\tilde{\alpha} = \alpha^*(1 - 1/\alpha) > 0$.
Puisque k est arbitraire, nous prouvons que

$$\limsup_{n,m\to\infty} \text{meas}\{|u_n - u_m| > \epsilon\} = 0,$$

ce qui implique la convergence en mesure de $\{u_n\}$. Alors il existe une sous suite (toujours notée u_n) dans Ω telle que

$$u_n \to u \quad \text{p.p. dans } \ \Omega. \tag{4.1.10}$$

Étape 4 : La convergence presque partout de $\{\nabla u_n\}$ dans Ω.
Nous prouvons d'abord que $\{\nabla u_n\}$ est une suite de Cauchy. Soit $\delta > 0$, et on définit

$$E_1 := \{x \in \Omega : |\nabla u_n| > h\} \cup \{x \in \Omega : |\nabla u_m| > h\},$$
$$E_2 := \{x \in \Omega : |u_n - u_m| > 1\}$$

et

$$E_3 := \{x \in \Omega : |\nabla u_n| \leqslant h, |\nabla u_m| \leqslant h, |u_n - u_m| \leqslant 1, |\nabla u_n - \nabla u_m| > \delta\},$$

où h sera choisi plus tard. Évidemment, nous avons

$$\{x \in \Omega : |\nabla u_n - \nabla u_m| > \delta\} \subset E_1 \cup E_2 \cup E_3.$$

Nous pouvons extraire une sous suite toujours dénoté par la suite originale telle que

$$\nabla T_k(u_n) \to \eta_k \quad \text{ dans } \ (L^\alpha(\Omega))^N.$$

D'après (4.1.10), on déduit que $\eta_k = \nabla T_k(u)$ p.p. dans Ω. De plus, d'après le Lemme 1.3.1, on sait que $\nabla T_k(u) \in \left(L^{p(\cdot)}(\Omega)\right)^N$ et

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(b(u_n))} \, dx \geqslant \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{p(b(u))} \, dx.$$

Pour $k > 0$,, nous avons

$$\{x \in \Omega : |\nabla u_n| \geqslant h\} \subset \{x \in \Omega : |u_n| \geqslant k\} \cup \{x \in \Omega : |\nabla T_k(u_n)| \geqslant h\}.$$

Ainsi, d'après (4.1.9) et la Proposition 4.1.6, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\text{meas}\{x \in \Omega : |\nabla u_n| \geqslant h\} \leqslant \frac{C}{k^{\alpha^*(1-1/\alpha)}} + \frac{C}{h^\alpha}.$$

En choisissant $k = Ch^{\alpha/(\alpha^*(1-1/\alpha))}$, nous déduisons que

$$\text{meas}\{x \in \Omega : |\nabla u_n| \geqslant h\} \leqslant \frac{C}{h^\alpha}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Nous pouvons choisir $h = h(\varepsilon)$ suffisamment grand pour que

$$\operatorname{meas}(E_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 0. \tag{4.1.11}$$

D'autre part, puisque $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy en mesure. Alors il existe $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\operatorname{meas}(E_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{pour tous } n, m \geqslant N_1(\varepsilon). \tag{4.1.12}$$

Remarquons que, pour tout $q > 1$ et pour tout $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^N$ avec $|\xi|, |\zeta| \leqslant h$, $|\xi - \zeta| \geqslant \delta$, il existe une fonction à valeur réelle $m(h, \delta) > 0$ telle que

$$\left(|\xi|^{q-2}\xi - |\zeta|^{q-2}\zeta\right) \cdot (\xi - \zeta) \geqslant m(h, \delta) > 0.$$

En prenant $T_1(u_n - u_m)$ comme fonction test dans l'équation d'approximation (4.1.6) et en intégrant sur E_3, on obtient

$$\begin{aligned}
& m(h,\delta) \operatorname{meas}(E_3) \\
& \leqslant \int_{E_3} \left[|\nabla u_n|^{p(b(u_n))-2} \nabla u_n - |\nabla u_m|^{p(b(u_n))-2} \nabla u_m\right] \cdot (\nabla u_n - \nabla u_m)\, dx \\
& \qquad + \int_{E_3} \left[|\nabla u_n|^{q(b(u_n))-2} \nabla u_n - |\nabla u_m|^{q(b(u_n))-2} \nabla u_m\right] \cdot (\nabla u_n - \nabla u_m)\, dx \\
& = \int_{E_3} \left[|\nabla u_m|^{p(b(u_m))-2} \nabla u_m - |\nabla u_m|^{p(b(u_n))-2} \nabla u_m\right] \cdot (\nabla u_n - \nabla u_m)\, dx \\
& \qquad + \int_{E_3} \left[|\nabla u_m|^{q(b(u_m))-2} \nabla u_m - |\nabla u_m|^{q(b(u_n))-2} \nabla u_m\right] \cdot (\nabla u_n - \nabla u_m)\, dx \\
& \qquad\qquad + \int_{E_3} [f_n - f_m]\, T_1(u_n - u_m)\, dx \\
& \leqslant \int_{E_3} |\nabla u_m|^{\eta-1} |\log|\nabla u_m|| \cdot |\nabla u_n - \nabla u_m| \cdot |p(b(u_m)) - p(b(u_n))|\, dx \\
& \qquad + \int_{E_3} |\nabla u_m|^{\rho-1} |\log|\nabla u_m|| \cdot |\nabla u_n - \nabla u_m| \cdot |q(b(u_m)) - q(b(u_n))|\, dx \\
& \qquad\qquad + \|f_n - f_m\|_{L^1(\Omega)} \\
& \leqslant 2h^\beta \log h \cdot \int_\Omega \left(|p(b(u_m)) - p(b(u_n))| + |q(b(u_m)) - q(b(u_n))|\right) dx + \|f_n - f_m\|_{L^1(\Omega)} := \alpha_{n,m}.
\end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé le fait que $h \gg 1$, la relation (4.1.2), la définition de E_3 et le théorème des valeurs intermédiaires avec η et ρ prenant des valeurs entre $p(b(u_m))$ et $p(b(u_n))$ et entre $q(b(u_m))$ et $q(b(u_n))$ respectivement, dans les deux dernières inégalités. En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons

$$\operatorname{meas}(E_3) \leqslant \frac{\alpha_{n,m}}{m(h,\delta)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

pour tout $n, m \geqslant N_2(\varepsilon, \delta)$. En combinant les estimations ci-dessus, on obtient

$$\operatorname{meas}\{x \in \Omega : |\nabla u_n - \nabla u_m| > \delta\} \leqslant \varepsilon, \qquad \text{pour tous } n, m \geqslant \max\{N_1, N_2\},$$

donc $\{\nabla u_n\}$ est une suite de Cauchy. Nous pouvons alors choisir une sous suite (que nous dénotons par la suite originale) telle que

$$\nabla u_n \to v \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

D'après la Proposition 1.1.10 et le fait que $\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u)$ dans $(L^{\alpha}(\Omega))^N$, nous déduisons que v coïncide avec le gradient faible de u presque partout. Par conséquent, nous avons

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{4.1.13}$$

Étape 5 : Passage à la limite.

Afin de prouver (4.1.5), nous prenons $T \in \mathcal{T}$ borné par $s_0 > 0$ tel que $T'(s) = 0$, pour tout $s \geqslant s_0$. Nous choisissons maintenant $T(u_n - \phi)$ comme fonction test dans (4.1.6) pour $\phi \in C_0^1(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(b(u_n))-2}\nabla u_n \cdot \nabla T(u_n - \phi)\,dx \\ &+ \int_\Omega |\nabla u_n|^{q(b(u_n))-2}\nabla u_n \cdot \nabla T(u_n - \phi)\,dx = \int_\Omega f_n T(u_n - \phi)\,dx. \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Pour le premier terme du côté gauche de (4.1.14), nous avons

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(b(u_n))-2}\nabla u_n \cdot \nabla T(u_n - \phi)\,dx &= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(b(u_n))} T'(u_n - \phi)\,dx \\ &- \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(b(u_n))-2}\nabla u_n T'(u_n - \phi)\cdot \nabla\phi dx. \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

D'après (4.1.10), (4.1.13) et le Lemme de Fatou, nous déduisons

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))} T'(u-\phi)dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(b(u_n))} T'(u_n - \phi)\,dx. \tag{4.1.16}$$

Nous concentrons maintenant notre attention sur le deuxième terme du côté droit de (4.1.15). Nous remarquons que, si $L = s_0 + \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$

$$\left| |\nabla u_n|^{p(b(u_n))-2}\nabla u_n T'(u_n - \phi) \right| \leqslant C\,|\nabla T_L(u_n)|^{p(b(u_n))-1}.$$

En utilisant (4.1.8), nous avons $\left\{ |\nabla u_n|^{p(b(u_n))-2}\nabla u_n T'(u_n - \phi) \right\}$ est borné dans $\left(L^{p'(b(u_n))}(\Omega)\right)^N \subset \left(L^{\beta'}(\Omega)\right)^N$.

Puisque $u_n \to u$ p.p. dans Ω et $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω, nous avons

$$|\nabla u_n|^{p(b(u_n))-2}\nabla u_n T'(u_n - \phi) \to |\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u T'(u-\phi) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

ce qui implique que

$$|\nabla u_n|^{p(b(u_n))-2}\nabla u_n T'(u_n - \phi) \rightharpoonup |\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u T'(u-\phi) \quad \text{dans } \left(L^{\beta'}(\Omega)\right)^N.$$

Puisque $\phi \in C_0^1(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(b(u_n))-2} \nabla u_n T'(u_n - \phi) \cdot \nabla \phi dx \\ \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))-2} \nabla u T'(u - \phi) \cdot \nabla \phi dx, \quad \text{quand } n \to \infty.\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

En combinant (4.1.15), (4.1.16) et (4.1.17), nous déduisons

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))-2} \nabla u \nabla T(u - \phi) dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(b(u_n))-2} \nabla u_n \nabla T(u_n - \phi) dx. \tag{4.1.18}$$

De la même manière, nous montrons que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{q(b(u))-2} \nabla u \nabla T(u - \phi) dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{q(b(u_n))-2} \nabla u_n \nabla T(u_n - \phi) dx. \tag{4.1.19}$$

Maintenant, nous considérons le côté droit de (4.1.14), puisque $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n T(u_n - \phi) dx = \int_\Omega f T(u - \phi) dx. \tag{4.1.20}$$

En utilisant (4.1.14), (4.1.18), (4.1.19) et (4.1.20) on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^{p(b(u))-2} \nabla u \cdot \nabla T(u - \phi) dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q(b(u))-2} \nabla u \cdot \nabla T(u - \phi) dx \\ \leqslant \int_\Omega f T(u - \phi) dx,\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

pour $T \in \mathcal{T}$ et $\phi \in C_0^1(\Omega)$. Par conséquent, à partir du Lemme 4.1.2 nous complétons la preuve de l'existence de solutions entropiques.

4.2 Existence de solutions faibles pour une classe de problèmes $(p(u), q(u))$-Laplacien

L'étude des équations aux dérivées partielles impliquant le (p, q)-Laplacien a généralisé plusieurs types de problèmes non seulement en physique, mais aussi en biophysique, en physique des plasmas, et dans l'étude des réactions chimiques. Ces problèmes apparaissent, par exemple, dans un système général de réaction-diffusion :

$$u_t = -\operatorname{div}\left[\left(a_p|\nabla u|^{p-2} + b_q|\nabla u|^{q-2}\right)\nabla u\right] + f(x, u),$$

où $a_p, b_q \in \mathbb{R}^+$ sont des constantes positives, la fonction u décrit généralement la concentration, le terme $\operatorname{div}\left[\left(a_p|\nabla u|^{p-2} + b_q|\nabla u|^{q-2}\right)\nabla u\right]$ correspond à la diffusion avec le coefficient $D(u) = a_p|\nabla u|^{p-2} + b_q|\nabla u|^{q-2}$, and $f(x, u)$ est le terme de réaction lié aux processus de source et de perte. En général, le terme de réaction $f(x, u)$ a une forme polynomiale par rapport à

la concentration u.
En raison de l'importance de ce type de problèmes, de nombreux auteurs ont étudié l'existence et l'unicité de leurs différents types de solutions : [15, 26, 81].

Notre intérêt principal dans ce travail est d'étendre ces résultats au cas où p, q peuvent dépendre à la fois de la variable d'espace x et de sur la solution inconnue u. Nous considérons le cas où la dépendance de p, q par rapport à u est une quantité locale. Plus précisément, nous étudions le problème suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) - \mathrm{div}(|\nabla u|^{q(u)-2}\nabla u) + |u|^{p(u)-2}u + |u|^{q(u)-2}u = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^{N\geq 2}$ avec $\partial\Omega$ Lipschitz-continu, f est une fonction donnée et p, q sont les fonctions d'exposant non linéaires $p, q : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ tel que

$$p, q \text{ sont continues et } \quad 1 < \alpha \leq q \leq p \leq \beta < \infty \quad \text{pour certaines constantes } \alpha, \beta. \tag{4.2.2}$$

Nous nous sommes inspirés des travaux de C. Allalou, K. Hilal et S. Ait Temghart dans [14] et des travaux de M. Chipot et H. B. de Oliveira dans [38], où les auteurs ont prouvé l'existence d'un $p(u)$-problème, les preuves d'existence de [14] et [38] sont basées sur le théorème du point fixe de Schauder.

4.2.1 Résultats d'existence

Dans cette partie, nous prouvons l'existence de solutions faibles pour le problème de Dirichlet (4.2.1). Tout d'abord, nous définissons l'espace suivant : pour tout $u \in \mathbb{R}$ tel que $1 < p(u) < \infty$

$$W_0^{1,p(u)}(\Omega) := \{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \int_\Omega |\nabla u|^{p(u)} dx < \infty\}.$$

C'est un espace de Banach pour la norme $\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$ qui est équivalente à $\|\nabla u\|_{p(u)}$ lorsque $p(u) \in C(\overline{\Omega})$. Puisque p est continu, alors du fait que $1 < \alpha \leq p$, $W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ est séparable et réflexif.

Ensuite, pour chaque $\varepsilon > 0$, nous considérons le problème auxiliaire suivant (à savoir, le problème régularisé)

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) - \mathrm{div}(|\nabla u|^{q(u)-2}\nabla u) + |u|^{p(u)-2}u + |u|^{q(u)-2}u \\ \qquad\qquad + \varepsilon\left(|u|^{\beta-2}u - \mathrm{div}(|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u)\right) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où les fonctions d'exposant p, q sont continues et satisfont

$$N < \alpha \leq p(u), q(u) \leq \beta < +\infty \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{4.2.3}$$

Proposition 4.2.1 *Supposons que* $f \in W_0^{-1,\alpha}(\Omega)$ *et* p, q *satisfont* (4.2.3). *Alors, pour chaque* $\varepsilon > 0$, *le problème* $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ *admet une solution faible* u_ε, *c'est à dire que*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{q(u_\varepsilon)-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)-2} u_\varepsilon v dx + \int_\Omega |u_\varepsilon|^{q(u_\varepsilon)-2} u_\varepsilon v dx \\ + \varepsilon \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{\beta-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u_\varepsilon|^{\beta-2} u_\varepsilon v dx \right) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega), \quad (4.2.4)\end{aligned}$$

où $\langle \cdot,\cdot\rangle$ *désigne le crochet de dualité entre* $(W_0^{1,\alpha}(\Omega))'$ *et* $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$.

Preuve. Soit $z \in L^2(\Omega)$, alors

$$N < \alpha \leq p(z(x)), q(z(x)) \leq \beta < \infty \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega. \quad (4.2.5)$$

Nous rappelons que $f \in W^{-1,\alpha'}(\Omega) \subset W^{-1,\beta'}(\Omega)$. Maintenant, nous nous concentrons sur l'opérateur $T_\varepsilon : W_0^{1,\beta}(\Omega) \to W^{-1,\beta'}(\Omega)$ défini par

$$\begin{aligned}\langle T_\varepsilon(u), v\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(z)-2}\nabla u \cdot \nabla v + |\nabla u|^{q(z)-2}\nabla u \cdot \nabla v\right) dx + \int_\Omega \left(|u|^{p(z)-2}uv + |u|^{q(z)-2}uv\right) dx \\ + \varepsilon \left[\int_\Omega \left(|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u \cdot \nabla v dx + |u|^{\beta-2}uv\right) dx \right],\end{aligned}$$

pour tout $u, v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$. Nous pouvons établir que :

(1) T_ε est continue, bornée et strictement monotone ;

(2) T_ε est coercif.

D'après (1) et (2), l'opérateur T_ε est continu, strictement monotone, et coercif. Il s'ensuit que T_ε est un opérateur surjectif strictement monotone (voir [74, Corollaire 2.8.7, p. 135]). Alors, il existe une solution unique $u_z \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_z|^{p(z)-2}\nabla u_z \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |\nabla u_z|^{q(z)-2}\nabla u_z \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u_z|^{p(z)-2} u_z v dx + \int_\Omega |u_z|^{q(z)-2} u_z v dx \\ \left(\int_\Omega |\nabla u_z|^{\beta-2}\nabla u_z \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u_z|^{\beta-2} u_z v dx \right) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \quad (4.2.6)\end{aligned}$$

Nous prenons $v = u_z$ dans (4.2.6), alors on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(|\nabla u_z|^{p(z)} + |\nabla u_z|^{q(z)}\right) dx + \int_\Omega \left(|u_z|^{p(z)} + |u_z|^{q(z)}\right) dx + \varepsilon \left(\int_\Omega |u_z|^\beta dx + \int_\Omega |\nabla u_z|^\beta dx \right) \\ \leq \|f\|_{-1,\alpha'} \|\nabla u_z\|_\alpha \\ \leq C\|\nabla u_z\|_\beta,\end{aligned}$$

où $C = C(\alpha, \beta, \Omega, f)$, et $\|\cdot\|_{-1,\alpha'}$ la norme d'opérateur associée à la norme $\|\nabla \cdot\|_\alpha$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\varepsilon\|u_z\|_{1,\beta}^\beta &\leq C\|\nabla u_z\|_\beta \\
&\leq C\|u_z\|_{1,\beta}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|u_z\|_{1,\beta} \leq C, \tag{4.2.7}$$

où $C = C(\alpha, \beta, \Omega, \varepsilon, f)$ est une constante positive sans dépendance de z. Du fait que $\beta > N \geq 2$, on peut déduire que

$$\|u_z\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \tag{4.2.8}$$

Ensuite, nous introduisons l'application $T : B \to B$ définie par $T(z) = u_z$, sur l'ensemble $B := \left\{v \in L^2(\Omega) : \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\right\}$. L'injection compacte $W_0^{1,\beta}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ implique que $T(B)$ est relativement compact dans B. En faisant appel au théorème du point fixe de Schauder, on sait que la continuité de T est requise pour obtenir un point fixe de T.
En supposant que nous travaillons sur une suite $\{z_n\}$ dans $L^2(\Omega)$ satisfaisant

$$z_n \to z \text{ dans } L^2(\Omega) \quad \text{quand} \quad n \to \infty, \tag{4.2.9}$$

nous désignons par u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la solution de (4.2.6) relative à $z := z_n$. Par conséquent, l'inégalité dans (4.2.7) conduit à

$$\|u_n\|_{1,\beta} \leq C, \quad \text{pour une certaine constante qui ne dépend pas de } n.$$

En passant à une sous suite si nécessaire (dénotée encore $\{u_n\}$), pour un certain $u \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ nous obtenons

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\beta}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty, \tag{4.2.10}$$

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{4.2.11}$$

Nous revenons à la (4.2.6), de sorte qu'en considérant (u_n, z_n) au lieu de (u, z), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(z_n)-2}\nabla u_n + |\nabla u_n|^{q(z_n)-2}\nabla u_n + \varepsilon|\nabla u_n|^{\beta-2}\nabla u_n\right) \cdot \nabla v dx \\
&\quad + \int_\Omega \left(|u_n|^{p(z_n)-2}u_n + |u_n|^{q(z_n)-2}u_n + \varepsilon|u_n|^{\beta-2}u_n\right) v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega).
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

La monotonicité de l'opérateur du coté gauche de (4.2.12) implique

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(z_n)-2}\nabla u_n + |\nabla u_n|^{q(z_n)-2}\nabla u_n + \varepsilon|\nabla u_n|^{\beta-2}\nabla u_n\right)\cdot\nabla(u_n - v)dx \\
&\qquad + \int_\Omega \left(|u_n|^{p(z_n)-2}u_n + |u_n|^{q(z_n)-2}u_n + \varepsilon|u_n|^{\beta-2}u_n\right)(u_n - v)dx \\
&\qquad - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(z_n)-2}\nabla v + |\nabla v|^{q(z_n)-2}\nabla v + \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u_n - v)dx \\
&\qquad - \int_\Omega \left(|v|^{p(z_n)-2}v + |v|^{q(z_n)-2}v + \varepsilon|v|^{\beta-2}v\right)(u_n - v)dx \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \qquad (4.2.13)
\end{aligned}$$

En considérant (4.2.12) avec $v = u_n - v$ comme fonction de test, nous utilisons (4.2.13) pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\langle f, u_n - v\rangle - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(z_n)-2}\nabla v + |\nabla v|^{q(z_n)-2}\nabla v + \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u_n - v)dx \\
&\qquad - \int_\Omega \left(|v|^{p(z_n)-2}v + |v|^{q(z_n)-2}v + \varepsilon|v|^{\beta-2}v\right)(u_n - v)dx \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \qquad (4.2.14)
\end{aligned}$$

La convergence en (4.2.9) implique

$$z_n \to z \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega, \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Puisque p est une fonction continue, nous pouvons appliquer le théorème de Lebesgue, donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left[|\nabla v|^{p(z_n)-2} + |\nabla v|^{q(z_n)-2}\right]\nabla v = \left[|\nabla v|^{p(z)-2} + |\nabla v|^{q(z)-2}\right]\nabla v, \qquad (4.2.15)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(|v|^{p(z_n)-2} + |v|^{q(z_n)-2}\right)v = \left(|v|^{p(z)-2} + |v|^{q(z)-2}\right)v, \qquad (4.2.16)$$

pour tout $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$. Enfin, par la convergence faible dans la (4.2.10) et en utilisant la (4.2.15) et la (4.2.16), nous pouvons passer à la limite dans la (4.2.14) pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\langle f, u - v\rangle - \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(z)-2}\nabla v + |\nabla v|^{q(z)-2}\nabla v + \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u - v)dx \\
&\qquad - \int_\Omega \left(|v|^{p(z)-2}v + |v|^{q(z)-2}v + \varepsilon|v|^{\beta-2}v\right)(u - v)dx \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \qquad (4.2.17)
\end{aligned}$$

Ensuite, en choisissant $v = u \pm \delta y$, où $y \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ et $\delta > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\pm\Bigg[\langle f, y\rangle - \int_\Omega \Big(|\nabla(u\pm\delta y)|^{p(z)-2}\nabla(u\pm\delta y) + |\nabla(u\pm\delta y)|^{q(z)-2}\nabla(u\pm\delta y) \\
&\qquad + \varepsilon|\nabla(u\pm\delta y)|^{\beta-2}\nabla(u\pm\delta y)\Big)\cdot\nabla y dx - \int_\Omega \Big(|u\pm\delta y|^{p(z)-2}(u\pm\delta y) \\
&\qquad + |u\pm\delta y|^{q(z)-2}(u\pm\delta y) + \varepsilon|v|^{\beta-2}(u\pm\delta y)\Big)y dx\Bigg] \geq 0. \qquad (4.2.18)
\end{aligned}$$

Nous passons à la limite lorsque δ devient nul dans (4.2.18), et déduisons que

$$\int_\Omega \left(|\nabla(u)|^{p(z)-2}\nabla u + |\nabla(u)|^{q(z)-2}\nabla u + \varepsilon|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u\right)\cdot\nabla y\,dx \\ + \int_\Omega \left(|u|^{p(z)-2}u + |u|^{q(z)-2}u + \varepsilon|v|^{\beta-2}u\right) y\,dx = \langle f, y\rangle \quad \forall y \in W_0^{1,\beta}(\Omega).$$

Par conséquent $u = u_z$. Au de (4.2.11) et par la convergence forte dans (4.2.11), nous concluons que

$$u_{z_n} \to u_z \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

Il s'ensuit que T est continu, et cela établit l'existence du point fixe qui est la solution faible exacte de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

Nous introduisons la définition révisée suivante avant d'énoncer le résultat principal.

Définition 4.2.2 *Supposons que* p *et* q *vérifient* (4.2.2) *et*

$$f \in W^{-1,\alpha'}(\Omega). \tag{4.2.19}$$

Une fonction $u \in W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ *est dite solution faible de problème* (4.2.1), *si*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u\cdot\nabla v dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q(u)-2}\nabla u\cdot\nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p(u)-2}uv dx \\ + \int_\Omega |u|^{q(u)-2}uv dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p(u)}(\Omega),$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *est le crochet de dualité du couple* $\left((W_0^{1,p(u)}(\Omega))', W_0^{1,p(u)}(\Omega)\right)$.

Théorème 4.2.3 *Supposons que* (4.2.19) *est vérifiée, et que*

$$N < \alpha \le q(u) \le p(u) \le \beta < +\infty \tag{4.2.20}$$

et

$$p, q : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty) \textit{ sont des fonctions Lipschitziennes}. \tag{4.2.21}$$

Alors il existe au moins une solution faible du problème (4.2.1) *au sens de la Définition* 4.2.2.

Preuve. D'après la Proposition 4.2.1, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $u_\varepsilon \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)-2}\nabla u_\varepsilon\nabla v dx + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{q(u_\varepsilon)-2}\nabla u_\varepsilon\nabla v dx + \int_\Omega |u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)-2}u_\varepsilon v dx + \int_\Omega |u_\varepsilon|^{q(u_\varepsilon)-2}u_\varepsilon v dx \\ + \varepsilon\left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{\beta-2}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla v dx + \int_\Omega |u_\varepsilon|^{\beta-2}u_\varepsilon v dx\right) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega) \tag{4.2.22}$$

et

$$N < \alpha \le p(u_\varepsilon(x)) \le \beta < \infty \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega.$$

Ensuite, nous choisissons $v = u_\varepsilon$ comme fonction test dans (4.2.22) pour obtenir

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} + |u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)}\right) dx + \varepsilon \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_\beta^\beta + \|u_\varepsilon\|_\beta^\beta\right) = \langle f, u_\varepsilon \rangle. \tag{4.2.23}$$

En utilisant (1.1.4), nous obtenons que

$$\|u_\varepsilon\|_{p(u_\varepsilon)} \leq \left(\rho_{p(u_\varepsilon)}(u_\varepsilon) + 1\right)^{\frac{1}{p^-(u_\varepsilon)}} = \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} dx + 1\right)^{\frac{1}{p^-(u_\varepsilon)}}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^\alpha dx \leq C \| |\nabla u_\varepsilon|^\alpha \|_{\frac{p(u_\varepsilon)}{\alpha}} &\leq C \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} dx + 1\right)^{\frac{1}{\left(\frac{p(u_\varepsilon)}{\alpha}\right)^-}} \\ &\leq C \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} dx + 1\right), \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

où $C = C(\alpha, \beta, \Omega)$. Par conséquent,

$$\langle f, u_\varepsilon \rangle \leq \|f\|_{-1,\alpha'} \|\nabla u_\varepsilon\|_\alpha \leq C \|f\|_{-1,\alpha'} \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} dx + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{4.2.25}$$

A partir des formules (4.2.23), (4.2.25) et en employant l'inégalité de Young, on obtient

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} + |u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)}\right) dx + \int_\Omega \left(|\nabla u_\varepsilon|^{q(u_\varepsilon)} + |u_\varepsilon|^{q(u_\varepsilon)}\right) dx + \varepsilon \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_\beta^\beta + \|u_\varepsilon\|_\beta^\beta\right) \leq C. \tag{4.2.26}$$

En combinat (4.2.24) et (4.2.25), nous pouvons déduire l'estimation suivante

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\alpha} \leq C, \tag{4.2.27}$$

où C est une constante positive ne dépend pas de ε.

Nous considérons maintenant une suite $\{\varepsilon_n\}$ de nombres réels positifs. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit u_{ε_n} la solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ associé à ε_n. Puisque $W_0^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, alors après avoir passé à une sous-suite si nécessaire, pour tout $u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ nous avons

$$u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{4.2.28}$$

$$\nabla u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{dans} \quad L^\alpha(\Omega)^N, \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{4.2.29}$$

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_n} &\to u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty \\ u_{\varepsilon_n} &\to u \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega, \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

Les contraintes sur l'intervalle des exposants dans (4.2.20) impliquent que u est Hölder-continue, alors d'après la condition (4.2.21), la même conclusion vaut pour $p(u)$ et $q(u)$.

D'après (4.2.30), nous déduisons que

$$\lim_{n\to\infty} p(u_{\varepsilon_n}) = p(u), \quad \lim_{n\to\infty} q(u_{\varepsilon_n}) = q(u) \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{4.2.31}$$

La chaîne d'inégalités suivante est satisfaite

$$N < \alpha \leq q(u_{\varepsilon_n}) \leq p(u_{\varepsilon_n}) \leq \beta < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{for} \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega. \tag{4.2.32}$$

En utilisant (4.2.26) écrite pour u_{ε_n}, ainsi que (4.2.29), (4.2.31) et (4.2.32), nous concluons que

$$u \in W_0^{1,p(u)}(\Omega), \tag{4.2.33}$$

et donc

$$u \in W_0^{1,q(u)}(\Omega). \tag{4.2.34}$$

D'après la théorie des opérateurs monotones, nous avons

$$\begin{aligned}\int_\Omega &\left(|\nabla u_{\varepsilon_n}|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla u_{\varepsilon_n} + |\nabla u_{\varepsilon_n}|^{q(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla u_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n|\nabla u_{\varepsilon_n}|^{\beta-2}\nabla u_{\varepsilon_n}\right)\nabla(u_{\varepsilon_n} - v)dx \\ &+ \int_\Omega \left(|u_{\varepsilon_n}|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}u_{\varepsilon_n} + |u_{\varepsilon_n}|^{q(u_{\varepsilon_n})-2}u_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n|u_{\varepsilon_n}|^{\beta-2}u\right)(u_{\varepsilon_n} - v)dx \\ &- \Bigg(\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla v + |\nabla v|^{q(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla v + \varepsilon_n|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\nabla(u_{\varepsilon_n} - v)dx \\ &+ \int_\Omega \left(|v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}v + |v|^{q(u_{\varepsilon_n})-2}v + \varepsilon_n|v|^{\beta-2}v\right)(u_{\varepsilon_n} - v)dx\Bigg) \geq 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega).\end{aligned} \tag{4.2.35}$$

En remplaçant u_ε par u_{ε_n} et en choisissant $u_{\varepsilon_n} - v$ comme fonction de test dans (4.2.22), on peut réduire (4.2.35) à la forme

$$\begin{aligned}\langle f, u_{\varepsilon_n} - v\rangle - \Bigg(&\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla v + |\nabla v|^{q(u_{\varepsilon_n})-2}\nabla v + \varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u_{\varepsilon_n} - v)dx \\ &+ \int_\Omega \left(|v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2}v + |v|^{q(u_{\varepsilon_n})-2}v + \varepsilon|v|^{\beta-2}v\right)(u_{\varepsilon_n} - v)dx\Bigg) \geq 0,\end{aligned} \tag{4.2.36}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Selon les convergences dans (4.2.31), on peut appliquer le théorème de convergence de Lebesgue, on aura

$$\lim_{n\to+\infty}\left[|\nabla v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2} + |\nabla v|^{q(u_{\varepsilon_n})-2}\right]\nabla v = \left[|\nabla v|^{p(u)-2} + |\nabla v|^{q(u)-2}\right]\nabla v, \tag{4.2.37}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(|v|^{p(u_{\varepsilon_n})-2} + |v|^{q(u_{\varepsilon_n})-2}\right)v = \left(|v|^{p(u)-2} + |v|^{q(u)-2}\right)v. \tag{4.2.38}$$

Nous prenons la limite quand n tend vers l'infini dans (4.2.36), et en utilisant (4.2.27), (4.2.28), (4.2.37) et (4.2.38), on obtient

$$\langle f, u-v\rangle - \left[\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(u)-2} + |\nabla v|^{q(u)-2}\right)\nabla v\cdot\nabla(u-v)dx + \int_\Omega \left(|v|^{p(u)-2} + |v|^{q(u)-2}\right)v(u-v)dx\right] \geq 0, \tag{4.2.39}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$. D'après les hypothèses (4.2.20) et (4.2.21), les fonctions $p(u)$ et $q(u)$ sont Hölder-continues, ce qui implique que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p(u)}(\Omega)$. Par conséquent, (4.2.39) est également vrai pour tout $v \in W_0^{1,p(u)}(\Omega)$. On peut donc prendre $v = u \pm \delta y$, où $y \in W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ et $\delta > 0$, comme fonction test dans (4.2.39) on obtient

$$\pm\left[\langle f, y\rangle - \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(u)-2} + |\nabla u|^{q(u)-2}\right)\nabla u\cdot\nabla y\,dx + \int_\Omega \left(|u|^{p(u)-2} + |u|^{q(u)-2}\right) u y\,dx\right)\right] \geq 0. \tag{4.2.40}$$

Cela implique que,

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(u)-2} + |\nabla u|^{q(u)-2}\right)\nabla u\cdot\nabla y\,dx + \int_\Omega \left(|u|^{p(u)-2} + |u|^{q(u)-2}\right) u y\,dx = \langle f, y\rangle, \tag{4.2.41}$$

$\forall y \in W_0^{1,p(u)}(\Omega)$. Enfin, nous sommes arrivés à une solution pour notre problème local. (Voir la Définition 4.2.2).

Remarque 4.2.4 *Le résultat principal ci-dessus reste vrai si nous relâchons l'hypothèse* $q(u) \leq p(u)$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}$. *Nous remplaçons* (4.2.20) *par la condition* $N < \alpha \leq q(u), p(u) \leq \beta < +\infty$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}$. *Alors le problème* (4.2.1) *admet au moins une solution faible* $u \in W_0^{1,p(u)}(\Omega) \cap W_0^{1,q(u)}(\Omega)$.

4.3 Existence de solutions faibles pour un problème $(p(b(u)), q(b(u)$ Laplacien parabolique

Notre intérêt principal dans cette section est d'établir quelques réponses positives aux questions principales posées par Chipot et de Oliveira dans [38]. Nous étendons les résultats obtenus au cas d'un problème parabolique. En particulier, nous étudions le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u) - \operatorname{div}(|\nabla u|^{q(b(u))-2}\nabla u) = f \text{ dans } \Omega_T = \Omega\times(0,T) \\ \\ u = 0 \qquad\qquad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega\times(0,T), \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad\qquad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $T > 0$, f, u_0 sont des données et $p, q : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ sont des fonctions réelles telles que

$$p, q \quad \text{sont continues} \quad \text{et} \quad 1 < \alpha < q, p \leq \beta < \infty, \tag{4.3.2}$$

pour certaines constantes α, β. Nous désignons par b une application de $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$b \text{ est continue et bornée,} \tag{4.3.3}$$

c'est-à-dire que b envoie des ensembles bornés de $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ dans des ensembles bornés de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, un exemple approprié pour l'application b dans (4.3.3) peut être choisis comme suit

$$b(u) = \|\nabla u\|_{L^{\alpha}(\Omega)}.$$

Dans le cas classique des équations aux dérivées partielles impliquant l'opérateur (p, q)-laplacien ou l'opérateur $(p(x), q(x))$-laplacien, de nombreux auteurs ont étudié l'existence et l'unicité de leurs différents types de solutions [15, 26, 81].

Ce type de problèmes a été introduit pour la première fois par Chipot et de Oliveira dans [38]. La version elliptique du problème (4.3.1) avec des quantités locales p, q a été étudiée par L. Yanru dans [82], il a obtenu l'existence de solutions faibles au moyen d'une technique de perturbation singulière et du théorème du point fixe de Schauder.

Habituellement, la motivation pour étudier des problèmes non locaux repose sur le fait physique qu'en réalité les mesures de certaines grandeurs ne sont pas faites ponctuellement mais à travers des moyennes locales. La difficulté principale dans l'analyse de ce type de problèmes réside dans le fait que leurs formulations faibles ne peuvent pas être écrites sous forme des égalités en termes de dualité dans des espaces de Banach fixes. Pour des caractéristiques et des résultats plus intéressants, nous nous référons à [18, 38, 72, 82] et à leurs références.

4.3.1 Résultats principaux

Dans cette partie, nous donnons une définition raisonnable des solutions faibles et prouvons l'existence de solutions faibles du problème (4.3.1). Nous introduisons les espace fonctionnels suivants

$$X(\Omega_T) := \left\{u \in L^{\infty}\left(0, T; L^2(\Omega)\right) : |\nabla u| \in L^{p(b(u))}(\Omega_T), u(\cdot, t) \in V_t(\Omega) \text{ p.p. } t \in (0, T)\right\},$$

où

$$V_t(\Omega) := \left\{u \in L^2(\Omega) \cap W_0^{1,\alpha}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(b(u(\cdot,t)))}(\Omega)\right\}.$$

De même, nous définissons $Y(\Omega_T)$, associé à la fonction d'exposant non linéaire $q(b(u))$. Nous désignons leurs espaces duaux par $X(\Omega_T)^*$ et $Y(\Omega_T)^*$ respectivement.

Maintenant, nous donnons une définition des solutions faibles pour le problème parabolique (4.3.1).

Définition 4.3.1 *Une fonction* $u \in X(\Omega_T) \cap Y(\Omega_T) \cap C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$ *est dit une solution faible de problème* (4.3.1) *si pour tout* $\varphi \in C^1\left(\overline{\Omega}_T\right)$ *avec* $\varphi(\cdot, T) = 0$, *nous avons*

$$-\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx + \int_0^T\int_\Omega \left[-u\varphi_t + |\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi + |\nabla u|^{q(b(u))-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\right] dxdt$$
$$= \int_0^T\int_\Omega f\varphi dxdt. \tag{4.3.4}$$

Théorème 4.3.2 *Supposons que* (4.3.2) *et* (4.3.3) *soient vérifies avec* $\alpha > 2N/(N+2)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ *et* $f \in L^{\alpha'}(\Omega_T)$. *Alors le problème* (4.3.1) *admet au moins une solution faible au sens de la Définition 4.3.1.*

Preuve du Théorème 4.3.2.

Soit N_0 un entier positif. Notons $h = T/N_0$. Nous considérons le problème discret suivant

$$\begin{cases} \frac{u_k - u_{k-1}}{h} - \operatorname{div}\left(|\nabla u_k|^{p(b(u_k))-2}\nabla u_k\right) - \operatorname{div}\left(|\nabla u_k|^{q(b(u_k))-2}\nabla u_k\right) = [f]_h\left((k-1)h\right), & x \in \Omega, \\ u_k|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_0, \end{cases} \tag{4.3.5}$$

où $[f]_h$ est la moyenne de Steklov de f définie comme suit

$$[f]_h(x,t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(x,\tau)d\tau \in L^{\alpha'}(\Omega).$$

Pour $k = 1$, on considère le problème

$$\begin{cases} \frac{u-u_0}{h} - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u\right) - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{q(b(u))-2}\nabla u\right) = [f]_h(0), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.3.6}$$

Posons

$$W = W_0^{1,p(b(u))}(\Omega) \cap W_0^{1,q(b(u))}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Tout d'abord, nous montrons que le problème (4.3.6) admet une solution faible $u_1 \in W$.

Étape 1 : Approximation

Pour chaque $\varepsilon > 0$ nous considérons le problème auxiliaire suivant

$$\begin{cases} \frac{u-u_0}{h} - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u\right) - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{q(b(u))-2}\nabla u\right) - \varepsilon \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u\right) = [f]_h(0), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4.3.7}$$

où

$$\frac{2N}{N+2} < \alpha < q(b(u)), p(b(u)) \leqslant \beta < \infty \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Lemme 4.3.3 *Pour chaque $\varepsilon > 0$, le problème (4.3.7) admet une une solution faible u_ε.*

Preuve de Lemme 4.3.3. Soit $\omega \in L^2(\Omega)$. Nous avons

$$\frac{2N}{N+2} < \alpha < q(b(w)) \leqslant p(b(w)), \beta < \infty \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

En remarquant que $[f]_h(0) \in L^{\alpha'}(\Omega) \subset W^{-1,\alpha'}(\Omega) \subset W^{-1,\beta'}(\Omega)$, alors d'après la théorie usuelle des opérateurs monotones, il existe une solution unique $u_w \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{u_w - u_0}{h} v dx + \int_\Omega |\nabla u_w|^{p(b(w))-2} \nabla u_w \cdot \nabla v dx \\ + \int_\Omega |\nabla u_w|^{q(b(w))-2} \nabla u_w \cdot \nabla v dx + \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_w|^{\beta-2} \nabla u_w \cdot \nabla v dx = \int_\Omega [f]_h(0) v dx, \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

pour tout $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$.
En prenant $v = u_w$ dans (4.3.8), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h}\int_\Omega u_w^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_w|^{p(b(w))} dx + \int_\Omega |\nabla u_w|^{q(b(w))} dx \\ + \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_w|^\beta dx \leqslant \frac{1}{2h}\int_\Omega u_0^2 dx + C \|\nabla u_w\|_{L^\beta(\Omega)},\end{aligned}$$

où $C = C(\alpha, \beta, \Omega, [f]_h(0))$ est une constante positive. Alors, en utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\|u_w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_w\|_{L^\beta(\Omega)} \leqslant C, \quad (4.3.9)$$

où $C = C(\alpha, \beta, \Omega, [f]_h(0), \varepsilon, h, N)$ est une constante positive. D'où

$$\|u_w\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C.$$

Considérons maintenant l'application suivante

$$T \ni w \to u_w \in T,$$

où $T := \{v \in L^2(\Omega) \; : \; \|v\|_2 \leqslant C\}$. Tout d'abord, nous prouvons que cette application est continue, puis par le théorème du point fixe de Schauder, elle aura un point fixe. Nous supposons que w_n est une suite dans $L^2(\Omega)$ telle que

$$w_n \to w \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \quad (4.3.10)$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit u_n la solution du problème (4.3.7) associé à $w = w_n$. D'après (4.3.9), nous avons

$$\|\nabla u_n\|_\beta \leq C,$$

où C est une constante positive qui ne dépend pas de n. Il s'ensuit que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\beta}(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty, \tag{4.3.11}$$

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{4.3.12}$$

A partir de la formulation (4.3.8), nous avons

$$\int_\Omega \frac{u_n - u_0}{h} v dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(b(w_n))-2} \nabla u_n \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^{q(b(w_n))-2} \nabla u_n \cdot \nabla v dx$$
$$+\varepsilon \int_\Omega |\nabla u_n|^{\beta-2} \nabla u_n \cdot \nabla v dx = \int_\Omega [f]_h(0) v dx, \ \forall v \in W_0^{1,\beta}(\Omega). \tag{4.3.13}$$

En faisant appel au monotonicité, on aura

$$\int_\Omega \frac{(u_n - v)^2}{h} dx + \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(b(w_n))-2} \nabla u_n + |\nabla u_n|^{q(b(w_n))-2} \nabla u_n + \varepsilon |\nabla u_n|^{\beta-2} \nabla u_n \right) \cdot \nabla (u_n - v)\, dx$$
$$- \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(b(w_n))-2} \nabla v + |\nabla v|^{q(b(w_n))-2} \nabla v + \varepsilon |\nabla v|^{\beta-2} \nabla v \right) \cdot \nabla (u_n - v)\, dx \geqslant 0, \tag{4.3.14}$$

pour tout $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$. Nous prenons $u_n - v$ comme fonction test dans (4.3.13) et selon (4.3.14), on obtient

$$\int_\Omega \frac{u_0 - v}{h} (u_n - v)\, dx + \int_\Omega [f]_h(0) (u_n - v)\, dx$$
$$- \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(b(w_n))-2} \nabla v + |\nabla v|^{q(b(w_n))-2} \nabla v + \varepsilon |\nabla v|^{\beta-2} \nabla v \right) \cdot \nabla (u_n - v)\, dx \geqslant 0,$$

pour tout $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$. D'après (4.3.10), nous pouvons supposer que pour une certaine sous suite

$$w_n \to w \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

En employant les hypothèses sur p, q et le théorème de convergence de Lebesgue, nous avons pour tout $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$

$$|\nabla v|^{p(b(w_n))-2} \nabla v \to |\nabla v|^{p(b(w))-2} \nabla v \quad \text{fortement dans} \quad L^{\beta'}(\Omega)^d, \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$
$$|\nabla v|^{q(b(w_n))-2} \nabla v \to |\nabla v|^{q(b(w))-2} \nabla v \quad \text{fortement dans} \quad L^{\beta'}(\Omega)^d, \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{4.3.15}$$

En utilisant (4.3.12), (4.3.1) et (4.3.15) nous obtenons

$$\int_\Omega \frac{u_0 - v}{h} (u - v)\, dx + \int_\Omega [f]_h(0) (u - v)\, dx$$
$$- \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(b(w))-2} \nabla v + |\nabla v|^{q(b(w))-2} \nabla v + \varepsilon |\nabla v|^{\beta-2} \nabla v \right) \cdot \nabla (u - v)\, dx \geqslant 0,$$

pour tout $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$. On prend $v = u \pm \theta z$ dans (4.3.1), avec $z \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ et $\theta > 0$, on obtient

$$\pm \left[\int_\Omega \frac{u_0 - (u \mp \delta z)}{h} z dx + \int_\Omega [f]_h(0) z dx - \int_\Omega \left(|\nabla (u \mp \delta z)|^{p(b(w))-2} \nabla (u \mp \delta z) \right.\right.$$
$$\left.\left. + |\nabla (u \mp \delta z)|^{q(b(w))-2} \nabla (u \mp \delta z) + \varepsilon |\nabla (u \mp \delta z)|^{\beta-2} \nabla (u \mp \delta z) \right) \cdot \nabla z dx \right] \geqslant 0.$$

En faisant θ tend vers zero, on obtient

$$\int_\Omega \frac{u-u_0}{h} z dx + \int_\Omega |\nabla u|^{p(b(w))-2} \nabla u \cdot \nabla z dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q(b(w))-2} \nabla u \cdot \nabla z dx$$
$$+\varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^{\beta-2} \nabla u \cdot \nabla z dx = \int_\Omega [f]_h(0) z dx, \quad \forall z \in W_0^{1,\beta}(\Omega).$$

Ce qui implique que $u = u_w$. D'après l'unicité de la limite on obtient

$$u_n \to u_w \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega), \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

ce qui prouve la continuité de l'application considérée. Par le théorème du point fixe de Schauder, cette application admet un point fixe, ce qui conclut la preuve du Lemme 4.3.3.

Étape 2 : Passage à la limite en tant que $\varepsilon \to 0$

D'après le Lemme 4.3.3, on peut obtenir que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $u_\varepsilon \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \frac{u_\varepsilon - u_0}{h} v dx + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(b(u_\varepsilon))-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{q(b(u_\varepsilon))-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx$$
$$+\varepsilon \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{\beta-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx = \int_\Omega [f]_h(0) v dx, \tag{4.3.16}$$

pour tout $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$.

En prenant $v = u_\varepsilon$ dans (4.3.16), on obtient

$$\frac{1}{2h} \int_\Omega u_\varepsilon^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(b(u_\varepsilon))} dx + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{q(b(u_\varepsilon))} dx + \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{\beta} dx$$
$$\leqslant \frac{1}{2h} \int_\Omega u_0^2 dx + \int_\Omega [f]_h(0) u_\varepsilon dx.$$

Nous concluons alors que

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(b(u_\varepsilon))} dx + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{q(b(u_\varepsilon))} dx + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u_\varepsilon\|^{\beta}_{L^\beta(\Omega)} \leqslant C,$$

et

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\alpha(\Omega)} \leqslant C,$$

où C est une constante positive ne dépend pas de ε.

Grâce à l'injection compacte $W_0^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (en raison du fait que $\alpha > 2N/(N+2)$), on aura

$$\begin{aligned}
&u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } W_0^{1,\alpha}(\Omega),\\
&\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u \quad \text{dans } (L^\alpha(\Omega))^N,\\
&u_\varepsilon \to u \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega),\\
&u_\varepsilon \to u \quad \text{p.p. dans } \Omega,
\end{aligned}$$
$$p(b(u_\varepsilon)) \to p(b(u)) \quad \text{p.p. dans } \Omega, \qquad q(b(u_\varepsilon)) \to q(b(u)) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Par l'application du Lemme 1.3.2, on obtient

$$u \in W_0^{1,p(b(u))}(\Omega) \text{ et } u \in W_0^{1,q(b(u))}(\Omega).$$

Par conséquent,

$$u \in W_0^{1,p(b(u))}(\Omega) \cap W_0^{1,q(b(u))}(\Omega).$$

En suivant le même astuce de monotonicité dans [38], nous pouvons établir que (4.3.6) admet une solution faible $u_1(x)$ dans W..

De la même manière, nous montrons que (4.3.5) admet des solutions faibles u_k pour $k = 2, \ldots, N_0$. Cela signifie que, pour chaque $\varphi \in W$, nous avons

$$\int_\Omega \frac{u_k - u_{k-1}}{h}\varphi dx + \int_\Omega |\nabla u_k|^{p(b(u_k))-2}\nabla u_k \cdot \nabla\varphi dx + \int_\Omega |\nabla u_k|^{q(b(u_k))-2}\nabla u_k \cdot \nabla\varphi dx$$
$$= \int_\Omega [f]_h\left((k-1)h\right)\varphi dx. \tag{4.3.17}$$

Pour tout $h = T/N_0$, on définit $u_h(x,t)$ par

$$u_h(x,t) = \begin{cases} u_0(x), & t = 0, \\ u_1(x), & 0 < t \leqslant h, \\ \vdots & \vdots \\ u_j(x), & (j-1)h < t \leqslant jh, \\ \vdots & \vdots \\ u_{N_0}(x), & (N_0 - 1)\,h < t \leqslant N_0 h = T. \end{cases}$$

En prenant $\varphi = u_k$ dans (4.3.17), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega u_k^2 dx + h\int_\Omega |\nabla u_k|^{p(b(u_k))}\,dx + h\int_\Omega |\nabla u_k|^{q(b(u_k))}\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega u_{k-1}^2 dx + h\,\|[f]_h((k-1)h)\|_{L^{\alpha'}(\Omega)} \cdot \|u_k\|_{L^\alpha(\Omega)} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega u_{k-1}^2 dx + Ch\,\|[f]_h((k-1)h)\|_{L^{\alpha'}(\Omega)} \cdot \|\nabla u_k\|_{L^\alpha(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_k|^\alpha\,dx &\leqslant C\,\||\nabla u_k|^\alpha\|_{L^{(p(b(u_k))/\alpha}(\Omega)} \\ &\leqslant C\left(\int_\Omega |\nabla u_k|^{p(b(u_k))}\,dx + 1\right). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young, on déduit que

$$\|[f]_h((k-1)h)\|_{L^{\alpha'}(\Omega)} \cdot \|\nabla u_k\|_{L^\alpha(\Omega)} \leqslant \varepsilon\int_\Omega |\nabla u_k|^{p(b(u_k))}\,dx + C.$$

A partir de (4.3.18), on obtient

$$\int_\Omega u_k^2 dx + h\int_\Omega |\nabla u_k|^{p(b(u_k))}\, dx + h\int_\Omega |\nabla u_k|^{q(b(u_k))}\, dx \leqslant \int_\Omega u_{k-1}^2 dx + Ch. \tag{4.3.19}$$

On additionne les inégalités dans (4.3.19), on déduit que

$$\int_\Omega u_h^2(x,t)dx + \int_0^T\int_\Omega |\nabla u_h(x,t)|^{p(b(u_h))}\, dxdt + \int_0^T\int_\Omega |\nabla u_h(x,t)|^{q(b(u_h))}\, dxdt \leqslant \int_\Omega u_0^2 dx + CT.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\|u_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla u_h\|_{L^{p(b(u_h))}(\Omega_T)} + \|u_h\|_{L^\alpha\left(0,T;W_0^{1,p(b(u_h))}(\Omega)\right)} \\ &+ \|\nabla u_h\|_{L^{q(b(u_h))}(\Omega_T)} + \|u_h\|_{L^\alpha\left(0,T;W_0^{1,q(b(u_h))}(\Omega)\right)} \leqslant C. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons pour une certaine sous suite encore notée u_h et certains u

$$\begin{aligned} &u_h \longrightarrow u \quad \text{faiblement-* dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ &u_h \longrightarrow u \quad \text{dans } L^\alpha\left(0,T;W_0^{1,\alpha}(\Omega)\right), \\ &|\nabla u_h|^{p(b(u_h))-2}\nabla u_h \longrightarrow \xi \quad \text{dans } \left(L^{\alpha'}(\Omega_T)\right)^N, \\ &|\nabla u_h|^{q(b(u_h))-2}\nabla u_h \longrightarrow \chi \quad \text{dans } \left(L^{\alpha'}(\Omega_T)\right)^N. \end{aligned}$$

Lemme 4.3.4 u *est une solution faible de problème* (4.3.1).

Preuve de Lemme4.3.4.

Pour chaque $k \in \{1,2,\ldots,N_0\}$, on prend $\varphi(x,kh)$ comme fonction test dans (4.3.17) $\varphi \in C^1\left(\overline{\Omega}_T\right)$, $\varphi(\cdot,T)=0$ et $\varphi(x,t)|_\Gamma = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\int_\Omega u_k(x)\varphi(x,kh)dx - \frac{1}{h}\int_\Omega u_{k-1}(x)\varphi(x,kh)dx - \int_\Omega \left(|\nabla u_k|^{p(b(u_k))-2}\nabla u_k\right)(x)\cdot\nabla\varphi(x,kh)dx \\ - \int_\Omega \left(|\nabla u_k|^{q(b(u_k))-2}\nabla u_k\right)(x)\cdot\nabla\varphi(x,kh)dx = \int_\Omega [f]_h((k-1)h)\varphi(x,kh)dx. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de $u_h(x,t)$ et le fait que $\varphi(\cdot,N_0h)=0$, on obtient

$$\begin{aligned} &h\sum_{k=1}^{N_0-1}\int_\Omega u_h(x,kh)\frac{\varphi(x,kh)-\varphi(x,(k+1)h)}{h}dx - \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,h)dx \\ &-h\sum_{k=1}^{N_0}\int_\Omega \left(|\nabla u_h|^{p(b(u_h))-2}\nabla u_h + |\nabla u_h|^{q(b(u_h))-2}\nabla u_h\right)(x,kh)\cdot\nabla\varphi(x,kh)dx \\ &= h\sum_{k=1}^{N_0}\int_\Omega [f]_h((k-1)h)\varphi(x,kh)dx. \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Puisque $C^1\left(\overline{\Omega}_T\right)$, alors

$$\begin{aligned}
&h\sum_{k=1}^{N_0}\int_\Omega\left(|\nabla u_h|^{p(b(u_h))-2}\nabla u_h+|\nabla u_h|^{q(b(u_h))-2}\nabla u_h\right)(x,kh)\cdot\nabla\varphi(x,kh)dx\\
&=\int_0^T\int_\Omega\left(|\nabla u_h|^{p(b(u_h))-2}\nabla u_h+|\nabla u_h|^{q(b(u_h))-2}\nabla u_h\right)(x,\tau)\cdot\nabla\varphi(x,\tau)dxd\tau\\
&+\sum_{k=1}^{N_0}\int_{(k-1)h}^{kh}\int_\Omega\left(|\nabla u_h|^{p(b(u_h))-2}\nabla u_h\right)(x,\tau)\cdot(\nabla\varphi(x,kh)-\nabla\varphi(x,\tau))dxd\tau\\
&+\sum_{k=1}^{N_0}\int_{(k-1)h}^{kh}\int_\Omega\left(|\nabla u_h|^{q(b(u_h))-2}\nabla u_h\right)(x,\tau)\cdot(\nabla\varphi(x,kh)-\nabla\varphi(x,\tau))dxd\tau\\
&\longrightarrow\int_0^T\int_\Omega\xi\cdot\nabla\varphi(x,\tau)dxd\tau+\int_0^T\int_\Omega\chi\cdot\nabla\varphi(x,\tau)dxd\tau,\quad\text{quand } h\to 0.
\end{aligned}$$

D'après (4.3.20), nous déduisons que

$$-\int_0^T\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial t}dx\,d\tau-\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx-\int_0^T\int_\Omega\xi\cdot\nabla\varphi dxd\tau-\int_0^T\int_\Omega\chi\cdot\nabla\varphi dxd\tau=\int_0^T\int_\Omega f\varphi dxd\tau.$$

En utilisant la méthode de monotonicité (voir [38, 82]), on montre que $\xi=|\nabla u|^{p(b(u))-2}\nabla u$ p.p. dans Ω_T et $\chi=|\nabla u|^{q(b(u))-2}\nabla u$ p.p. dans Ω_T. En appliquant le Lemme 1.3.2, on peut montrer que $\nabla u\in\left(L^{p(b(u))}(\Omega_T)\right)^N$ et $\nabla u\in\left(L^{q(b(u))}(\Omega_T)\right)^N$.
En choisissant $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_T)$, on obtient

$$-\int_0^T\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial t}dxd\tau=\int_0^T\int_\Omega\xi\cdot\nabla\varphi dxd\tau+\int_0^T\int_\Omega\chi\cdot\nabla\varphi dxd\tau+\int_0^T\int_\Omega f\varphi dxd\tau,$$

donc $u_t\in X(\Omega_T)^*$ et $u_t\in Y(\Omega_T)^*$. Puisque $u\in X(\Omega_T)\cap Y(\Omega_T)$ on peut déduire que $u\in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ (voir [44, 63]). Alors u est une solution faible du problème (4.3.1) au sens de la Définition 4.3.1.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail on s'intéresse aux problèmes locaux et non locaux des équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique ou parabolique avec conditions aux limites de Dirichlet ou Fourier. Où, après rappel des éléments nécessaires sur les espaces de Sobolev à exposant variable et les opérateurs monotones, on a pu établir ces résultats :

1. L'existence des solutions faibles dans l'espace $W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ de deux problèmes de réaction-diffusion avec des conditions aux limites de Dirichlet pour des équations elliptiques appliquants un opérateur p-Laplacien avec des exposants qui peuvent dépendre de la solution inconnue u. Les résultats ont été obtenus à l'aide d'une perturbation combinée avec le théorème de point fixe de Schauder ainsi que la technique de Zhikov pour le passage à la limite. Nous avons traité également leurs versions non locaux.

2. L'existence de solutions entropiques pour des équations elliptiques associées à l'opérateur $p(u)$-Laplacien généralisé avec des conditions aux limites de Dirichlet ou des conditions aux limites de Fourier. Ces deux problèmes modélise plusieurs phénomènes naturels qui apparaissent dans divers domaines à savoir l'écoulement des fluides à travers les milieux poreux.

3. L'étude de l'existence des solutions faibles ou entropiques des problèmes elliptiques et paraboliques impliquants un tel opérateur joue un rôle crucial dans la modélisation de divers phénomènes physiques, c'est l'opérateur (p, q)-Laplacien de type local ou non local.

Il est important de noter une autre fois qu'il n'existe pas encore, pour les problèmes non locaux une théorie générale analogue à celle des problèmes classiques.

Ceci est dû à la relative nouveauté de cette thématique d'une part et à la complexité des questions qu'elle soulève d'autre part. Chaque problème nécessite alors un traitement spécifique, ce qui souligne l'actualité du sujet abordé dans cette thèse.

On signale que beaucoup de problèmes intéressants pour mieux enrichir cette étude restent ouverts, on cite ici quelques uns :

- L'étude de la question d'unicité de solutions pour les problèmes locaux et non locaux.

Cette question semble très délicate et importante, et elle mérite d'être étudiée.

- On peut aussi penser à étendre nos résultats aux cas des problèmes paraboliques et hyperboliques de type local et non local avec d'autres conditions aux limites en revisitant nos estimations.

Bibliography

[1] A. Abassi, A. El Hachimi, A. Jamea, Entropy solutions to nonlinear Neumann problems with L^1-data, Int. J. Math. Statist 2 (2008): 4-17.

[2] A. Abbassi, C. Allalou, A. Kassidi, (2019). Existence of Entropy Solutions for Anisotropic Elliptic Nonlinear Problem in Weighted Sobolev Space. In The International Congress of the Moroccan Society of Applied Mathematics. Springer, Cham, pp. 102-122.

[3] A. Abbassi, C. Allalou, A. Kassidi, (2021). Anisotropic Elliptic Nonlinear Obstacle Problem with Weighted Variable Exponent. J. Math. Study, 54(4), 337-356.

[4] A. Abbassi, C. Allalou, S. A. Temghart, (2022). Check for updates Entropy Solution of Nonlinear Elliptic $p(u)$-Laplacian Problem. Recent Advances in Fuzzy Sets Theory, Fractional Calculus, Dynamic Systems and Optimization, 476, 368.

[5] R.A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, Pure and Applied Mathematics, New York-London, vol. 65, 1975.

[6] S. Ait Temghart, A. Kassidi, C. Allalou, A. Abbassi (2021). On an elliptic equation of Kirchhoff type problem via topological degree. Nonlinear Studies, 28(4).

[7] S. Ait Temghart, C. Allalou, K. Hilal, (2022). Existence results of some $p(u)$-Laplacian systems. International Journal of Nonlinear Analysis and Applications 13.2 (2022): 3073-3082.

[8] S. Ait Temghart, C. Allalou, K. Hilal, Stanislas Ouaro. Entropy solutions for some elliptic problems involving the generalized $p(u)$-Laplacian operator. Miskolc Mathematical Notes. **To appear**.

[9] S. Ait Temghart, C. Allalou, K. Hilal. Nonlinear elliptic problems involving the generalized $p(u)$-Laplacian operator with Fourier boundary condition. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, (3s.)v. 2023 (41):1-16. 10.5269/bspm.62948.

[10] S. Ait Temghart, C. Allalou, A. Abbassi. Existence results for a class of local and non-local nonlinear elliptic problems. CUBO, A Mathematical Journal. **To appear**.

[11] Said Ait Temghart, Hasnae El Hammar, Chakir Allalou, Khalid Hilal. Existence of weak solutions for a class of $(p(u), q(u))$-Laplacian problem. Nonlinear Dynamics and Systems Theory. **to appear**.

[12] Y. Akdim, C. Allalou, N. El Gorch, M. Mekkour, (2019). Obstacle problem for nonlinear $p(x)$-parabolic inequalities. In AIP Conference Proceeding, Vol. 2074, No. 1, p.020018, AIP Publishing LLC.

[13] Albalawi, Kholoud Saad, Mona Bin-Asfour, and Francesca Vetro. "Remarks on Nonlocal Dirichlet Problems." Mathematics 10.9 (2022): 1546.

[14] C. Allalou, K. Hilal, S. Ait Temghart, Existence of weak solutions for some local and nonlocal p-Laplacian problem. Journal of Elliptic and Parabolic Equations, 1-19 (2022), https://doi.org/10.1007/s41808-021-00143-8.

[15] M. J. Alves, B. A. Ronaldo and H. M. Olımpio, Existence result for a class of quasilinear elliptic equations with (p, q)-Laplacian and vanishing potentials. Illinois Journal of Mathematics 59.3 (2015): 545-575.

[16] S. Antontsev, S. Shmarev, Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions. Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up, Atlantis Press, Paris (2015).

[17] S.N. Antontsev, J.F. Rodrigues, On stationary thermo-rheological viscous flows, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. 52 (1) 19-36 (2006).

[18] B. Andreianov, M. Bendahmane, S. Ouaro, Structural stability for variable exponent elliptic problems. II. The $p(u)$-Laplacian and coupled problems, Nonlinear Anal. 72(12), 4649-4660 (2010).

[19] E. Azroul, M. B. Benboubker, S. Ouaro, Entropy solutions for nonlinear nonhomogeneous Neumann problems involving the generalized $p(x)$-Laplace operator, J. Appl. Anal. Comput 3.2 (2013): 105-121.

[20] E. Azroul, M. B. Benboubker, H. Hjiaj, C. Yazough, (2016). Existence of solutions for a class of obstacle problems with L^1-data and without sign condition. Afrika Matematika, 27(5), 795-813.

[21] E. Azroul, F. Balaadich, Generalized $p(x)$-elliptic system with nonlinear physical data, Journal of Applied Analysis and Computation 10.5 (2020): 1995-2007.

[22] J.M. Ball, A version of the fundamental theorem for Young measures. In: PDEs and Continuum Models of Phase Transitions (Nice, 1988). Lecture Notes in Phys, vol. 344(1989), 207-215.

[23] S. Barile; G.M. Figueiredo, Existence of least energy positive, negative and nodal solutions for a class of p, q-problems with potentials vanishing at infinity. J. Math. Anal. Appl. 2015, 427, 1205–1233.

[24] P. Baroni; M. Colombo; G. Mingione, Harnack inequalities for double phase functionals. Nonlinear Anal. 2015, 121, 206-222.

[25] P. Baroni; M. Colombo; G. Mingione, Regularity for general functionals with double phase. Calc. Var. Partial Differ. Equs. 2018, 57, 62.

[26] F. Behboudi and A. Razani, Two weak solutions for a singular (p, q)-Laplacian problem. Filomat 33.11, 3399-3407 (2019).

[27] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, & J. L. Vázquez, (1995). An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 22(2), 241-273.

[28] O. Benslimane, A. Aberqi, & J. Bennouna, (2021). Existence and uniqueness of entropy solution of a nonlinear elliptic equation in anisotropic Sobolev–Orlicz space. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2, 70(3), 1579-1608.

[29] P. Blomgren, T. Chan, P. Mulet, C. Wong, Total variation image restoration: Numerical methods and extensions, In: Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing, vol. 3. IEEE Computer Society Press, Piscataway, 384-387 (1997).

[30] E. Bollt, R. Chartrand, S. Esedoglu, P. Schultz, K. Vixie, *Graduated, adaptive image denoising: local compromise between total-variation and isotropic diffusion*, Adv. Comput. Math. 31, 61-85 (2007).

[31] A. Bouzelmate and A. Gmira, Existence and Asymptotic Behavior of Unbounded Positive Solutions of a Nonlinear Degenerate Elliptic Equation. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 21 (1) 27–55 (2021).

[32] H. Brezis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Mathematics Studies, North-Holland, 1973.

[33] H. Brezis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Masson, 1993.

[34] V. Calogero, The Existence of Solutions for Local Dirichlet $(r(u), s(u))$-Problems, Mathematics 10.2 (2022): 237.

[35] P. Cembranos, J. Mendoza, Banach Spaces of Vectors-Valued Functions, Lectures Notes in Mathematics 1676, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[36] M. Cencelj; V.D. Radulescu; Repovš, D.D. Double phase problems with variable growth. Nonlinear Anal. 2018, 177, 270–287.

[37] M. Chipot, Elliptic Equations: An Introductory Course. Birkhäuser, Basel (2009).

[38] M. Chipot, H. B. de Oliveira: Some Results On The $p(u)$-Laplacian Problem, Mathematische Annalen (2019).

[39] M. Chipot and J.F. Rodrigues, On a class of non linear nonlocal elliptic problems, M2AN 26, 3 ,p. 447–468 (1992).

[40] M. Chipot, B. Lovat, Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic and parabolic problems, Dyn. Contin. Discr. Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 8(1) 35–51 (2001).

[41] Y. Chen, S. Levine, M. Rao, Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, SIAM J. Appl. Math. 66 1383–1406 (2006).

[42] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza: Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, Heidelberg (2013).

[43] A. Dall'Aglio, Approximated solutions of equations with L^1 data. Application to the H-convergence of quasi-linear equations, Ann. Math. Pura Appl.(4) 170(1996), 207-240.

[44] L. Diening, P. Nägele, M. Ruzicka, *Monotone operator theory for unsteady problems in variable exponent spaces*. Complex Variables and Elliptic Equations, 57(11), 1209-1231 (2012).

[45] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästo, M. Ruzicka: Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Springer, Heidelberg (2011).

[46] J. Dieudonné, Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym V, Canadian J. Math. 3(1951), 129-139.

[47] G. Dolzmann, N. Hungerühler, S. Muller, Nonlinear elliptic systems with measure-valued right hand side, Math. Z. 226(1997), 545-574.

[48] J. Droniou, Quelques résultats sur les espaces de Sobolev, http ://wwwgm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-03/gm3-03.pdf.

[49] J. Droniou, Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles, http ://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-02/gm3-02.pdf.

[50] Hasnae El Hammar, Said Ait Temghart, Chakir Allalou, Said Melliani (2022). Existence results of quasilinear elliptic systems via Young measures. International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, doi: 10.22075/ijnaa.2022.26962.3463.

[51] D. Edmunds, J. Rakosnik, Sobolev embeddings with variable exponent, 267-293, DOI:10.4064sm-143-3-267-293.

[52] M. Elmassoudi, A. Aberqi, & J. Bennouna, (2020). Existence of entropy solutions in Musielak Orlicz spaces via a sequence of penalized equations. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 38(6), 203-238.

[53] M. Elmassoudi, A. Aberqi, & J. Bennouna, (2017). Nonlinear parabolic problem with lower order terms in Musielak–Orlicz spaces. ASTES J, 2(5), 109-123.

[54] LC. Evans, Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations. Am. Math. Soc., New York 1990.

[55] X. L Fan, D. Zhao, the generalised Orlicz-Sobolev space $W^{k,p(x)}(\Omega)$, J. Gansu Educ, College 12(1),pp. 1-6 (1998).

[56] X.L. Fan and D. Zhao, On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k;p(x)}$, J. Math. Anal. Appl., 263 (2001), 424–446.

[57] R. Glowinski, Marrocco, R.: Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. RAIRO Ana. Numer. 9(R-2), 41-76 (1975).

[58] N. Hungerbühler, Young measures and nonlinear PDEs, Habilitationsschrift ETH Zurich, (2001).

[59] A. Jamea, A. Sabri, H. T. Alaoui, Entropy solution for nonlinear degenerate elliptic problem with Dirichlet-type boundary condition in weighted Sobolev spaces, Le Matematiche 76.1 (2021): 109-131.

[60] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Mathématiques & Applications, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[61] O. Kovacik, J. Rakonsik, On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$ Czechoslovak Math J. 41(116), pp. 592–618 (1991).

[62] J.L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, vol. 1 et 2, 1968.

[63] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod (1969).

[64] P. Marcellini, On the definition and the lower semicontinuity of certain quasiconvex integrals. In Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non Linéaire; Elsevier Masson: Paris, France, 1986; Volume 3, pp. 391–409.

[65] P. Marcellini, Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p, q-growth conditions. J. Differ. Equas. 1991, 90, 1-30.

[66] N. G. Meyers, and J Serrin, *H=W*, Proc. Nat. Acad. Sci USA 51 (1964): 1055-1056.

[67] C.B.Jr. Morrey, Multiple Integrals in the Calculus of Variations, SpringerVerlag, New york, 1966.

[68] F. Murat, Equations elliptiques non linéaires avec second membre L^1 ou mesure, Actes du 26ème Congrès National d'Analyse Numérique, Les Karellis, France, 1994, A12-A24.

[69] F. Murat, Soluciones renormalizadas de EDP elipticas no lineales, Cours à l'Université de Séville, Publication 93023, Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris VI, 1993.

[70] J. Nečas, Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques, Masson et Cie, Paris, 1967.

[71] S. Ouaro and N. Sawadogo, Structural stability for nonlinear Neumann boundary $p(u)$-Laplacian problem, Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. 39 81–117 (2019).

[72] N. Ouaro, N. Sawadogo, *Nonlinear elliptic* $p(u)$*-Laplacian problem with Fourier boundary condition*, CUBO A Mathematical, Vol.22, No 01, 85-124 (2020).

[73] N. Ouaro, N. Sawadogo, Structural stability for nonlinear $p(u)$-Laplacian problem with Fourier boundary condition, Gulf Journal of Mathematics 11.1 (2021): 1-37.

[74] N. S. Papageorgiou, V. D. Rădulescu and D. D. Repovš, Nonlinear analysis-theory and methods. Springer, 2019.

[75] V.D. Radulescu, Isotropic and anisotropic double-phase problems: Old and new. Opusc. Math. 2019, 39, 259–279.

[76] V.D. Radulescu; D.D. Repovš, Partial Differential Equations with Variable Exponents, Variational Methods and Qualitative Analysis; Chapman and Hall/CRC: London, UK, 2015.

[77] M. Ruzicka, Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory, Lecture Notes in Math., vol. 1748, Springer, Berlin, 2000.

[78] X. Shi; V. Radulescu; D. Repovš; Q. Zhang, Multiple solutions of double phase problems with variable exponent. Adv. Calc. Var. 2020, 13, 385–401.

[79] J. Türola, Image denoising using directional adaptive variable exponents model, J. Math. Imaging. Vis. 57, 56-74 (2017).

[80] M. Xiang, B. Zhang, V. Rdulescu, (2020). Superlinear Schrödinger-Krirchhoff Type Problems Involving the Fractional p-Laplacian and Critical Exponent. Advances in Nonlinear Analysis, 9, 690-709.

[81] Z. Yang and H. Yin, A class of (p, q)-Laplacian type equation with concave-convex nonlinearities in bounded domain, J. Math. Anal. Appl. 382 (2011), no. 2, 843-855.

[82] L. Yanru, (2021). On a class of $(p(u), q(u))$-Laplacian problem. Pure Mathematics, 11(4): 586-598.

[83] B.L. Zhang, A. Fiscella, S.H. Liang, (2019). Infinitely Many Solutions for Critical Degenerate Kirchhoff Type Equations Involving the Fractional p-Laplacian. Applied Mathematics and Optimization, 80, 63-80.

[84] Q. Zhang; V. Radulescu, Double phase anisotropic variational problems and combined effects of reaction and absorption terms. J. Math. Pures Appl. 2018, 118, 159–203.

[85] C. Zhang, X. Zhang, Some further results on the nonlocal $p-$Laplacian type problems, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 151(3), 953-970 (2021).

[86] D. Zhao, W.J. Qiang and X.L. Fan, On generalizerd Orlicz spaces $L^{p(x)}(\Omega)$, J. Gansu Sci., 8 (1996), No. 2, 1–74.

[87] V.V. Zhikov: Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory (Russian). Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 504(4), 675-710 (1986). English translation in Mah. USSR Izvestiya 29 (1987) 33-66.

[88] V. V. E. Zhikov, On the technique for passing to the limit in nonlinear elliptic equations. Functional Analysis and Its Applications, 43(2), 96-112, (2009).

[89] V.V. Zhikov, On passage to the limit in nonlinear elliptic equations, Dokl. Math. 77 (3) 383-387 (2008).

[90] V.V. Zhikov, On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions. J. Math. Sci. (N. Y.) 2011, 173, 463–570.

[91] V.V. Zhikov, Solvability of the three-dimensional termistor problem, Trudy Mat. Inst. Steklov 261 (2008) 101-114 (in Russian); Engl. transl. in Proc. Steklov Inst. Math. 261 1-14 (2008).