



UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE
Faculté des Sciences et Techniques
Béni Mellal



Centre des Études Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physiques Appliquées

THÈSE

Présentée par

Maarouf Nisrine

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Contribution à l'étude de Certaines Équations aux Dérivées Fractionnaires : Méthode de Symétries de Lie.

Soutenue le Samedi 12 Février 2022 à 10h devant la commission d'examen :

Pr Mohamed OUKESSOU	Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal	Président
Pr Abdelmajid EL HAJAJI	ENCG, Université Chouaib Doukkali, El jadida	Rapporteur
Pr Jalila EL GHORDAF	CRMEF, Béni Mellal	Examineur
Pr Brahim EL BOUKARI	Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal	Examineur
Pr Chakir ALLALOU	Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal	Invité
Pr Abdelaziz QAFFOU	EST, USMS, Béni Mellal	Invité
Pr Hicham MOUSSA	Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal	Invité
Pr Khalid HILAL	Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal	Encadrant

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse, le professeur '**Khalid HILAL**' pour sa patience, son soutien et ses conseils professionnels tout au long de ce projet de thèse. Sans ses encouragements et ses conseils, l'étude n'aurait pas été achevée. Je lui suis reconnaissante de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa rigueur intellectuelle, de son dynamisme, et de son efficacité certaine que je n'oublierai jamais. Soyez Monsieur assuré de mon attachement et de ma profonde gratitude, et je n'aurais pas pu avoir un meilleur professeur ou conseiller.

Je tiens également à adresser, du fond du cœur, mes plus sincères remerciements au Professeur **Said MELLIANI**, directeur du laboratoire de recherche "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique", pour son aide capitale, pour sa disponibilité, pour tout le temps qu'il a consacrée à nous orienter pour faire les bons choix et pour ses conseils qui ont été particulièrement utiles. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Professeur **Mohamed OUKESSOU** d'avoir accepté d'être président du jury.

Je remercie également les Professeurs **JALILA EL GHORDAF** et **Brahim EL BOUKARI** qui m'ont fait l'honneur d'étudier cette thèse et d'en être examinateurs.

Je remercie ensuite les professeurs **Mohamed OUKESSOU** et **Abdelmajid EL HAJAJI** qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir relire mon travail et pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Je remercie les professeurs **Chakir ALLALOU**, **Abdelaziz QAFFOU** et **Hicham MOUSSA** d'avoir accepté de faire partie du jury de thèse.

Je suis particulièrement redevable à ma mère, mon père et mon frère, qui m'ont aidée dans les moments difficiles et qui ont tant sacrifié beaucoup pour que j'arrive là où je suis. Le soutien et

l'amour d'eux pour leur motivation directe et indirecte et leur soutien pour compléter cette mission.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire de "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique", qui m'ont accueilli parmi eux. Nos rencontres, nos échanges ont été d'une précieuse assistance pour mon travail de recherche.

Enfin et surtout, je voudrais remercier mes amis pour m'avoir soutenu physiquement et spirituellement tout au long de ma carrière. Qu'Allah les récompense avec la meilleure des récompenses.

Table des matières

Introduction générale	12
1 Généralité	16
1. Historique des calculs fractionnaires	16
2. Outils mathématiques et fonctions spécifiques	17
2.1 La fonction Gamma	17
2.2 La fonction Mittag-Leffler	18
3. Les opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville	19
3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	20
3.2 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	20
4. La dérivation fractionnaire au sens de Caputo	22
4.1 Relation de la dérivée au sens de Caputo avec la dérivée au sens de Riemann-Liouville	23
5. Intégrations fractionnaires et dérivations fractionnaires de type Erdélyi-Kober	24
6. Laplacien fractionnaire	27
6.1 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	27
6.2 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo	29
7. Symétrie de Lie des équations différentielles	30
7.1 Concepts de bases	32
7.1.1 Groupe de transformations à un seul paramètre	33
7.1.2 Générateurs infinitésimaux et formules de prolongation	33
7.1.3 L'invariance	35

7.1.4	Algèbres de Lie et classification des sous-algèbres	36
7.2	Méthodologie	37
8.	Lois de conservation	38
8.1	Les opérateurs fondamentaux et leurs relations	38
2	Symétrie de Lie des équations différentielles partielles fractionnaires	41
1.	La procédure générale de la méthode de symétrie de Lie pour les équations différentielles fractionnaires	42
2.	Lois de conservation pour les équations différentielles partielles d'ordre fractionnaires	44
2.1	Théorème de Noether	45
2.2	Le nouveau théorème de conservation	46
3	Symétrie de Lie de l'équation 'Reguritized Long Wave' fractionnaire	49
1.	Introduction	49
2.	Symétrie de Lie de l'équation RLW d'ordre entier	50
2.1	Points de Lie de l'équation RLW d'ordre entier	50
2.2	Solutions invariantes de l'équation RLW d'ordre entier	54
3.	Symétrie de Lie de l'équation fractionnaire RLW	55
3.1	Réductions et solutions invariantes de l'équation fractionnaire RLW	56
3.2	La solution explicite de l'équation fractionnaire 'Regularized Long Wave'	59
3.3	Interprétation physique de la solution en série entière pour la solution (3.90)	60
4.	Conclusion	62
4	Symétrie de Lie de l'équation de Fokker-Planck bidimensionnelle fractionnaire	64
1.	Introduction	64
2.	Symétrie de Lie de l'équation de Fokker-Planck bidimensionnelle fractionnaire	65
3.	Lois de conservation de l'équation de Fokker-Planck bidimensionnelle fractionnaire	68
4.	Solutions explicites de l'équation (4.1) sous la forme de séries entières	72
5.	Conclusion	73
5	Conclusion	75
	Bibliographie	77

Liste des notations

\mathbb{N}	l'ensemble des entiers naturels
\mathbb{R}	l'ensemble des réels
\mathbb{C}	l'ensemble des nombres complexes
$AC^n([a, b])$	l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$
D_i	La dérivée totale
I_t^α	l'opérateur de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α
D_t^α	l'opérateur de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α
$\partial_t^\alpha u$	La dérivée partielle fractionnaire de Riemann-Liouville de u d'ordre α
$P_\xi^{\tau, \alpha} f$	l'opérateur de la dérivation fractionnaire au sens d'Erdelyi-Kober
$K_\xi^{\tau, \alpha} f$	l'opérateur de l'intégrale fractionnaire au sens d'Erdelyi-Kober
$E_\alpha(\cdot)$	la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre
$E_{\alpha, \beta}(\cdot)$	la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres
\mathcal{L} (resp. \mathcal{L}^{-1})	transformée de Laplace (resp. transformée de Laplace inverse)

Table des figures

3.1	Graphe 3D de l'équation (3.90) avec les valeurs des paramètres $c_0 = c_1 = 1$, $\alpha = 0.5$, $a = 2$, $b = 1$	60
3.2	Graphe 3D de l'équation (3.90) avec les valeurs des paramètres $c_0 = c_1 = 1$, $\alpha = 0.75$, $a = 2$, $b = 1$	61
3.3	Graphe 3D de l'équation (3.90) avec les valeurs des paramètres $c_0 = c_1 = 1$, $\alpha = 0.9$, $a = 2$, $b = 1$	61
3.4	Graphe 3D de l'équation (3.90) avec les valeurs des paramètres $c_0 = c_1 = 1$, $\alpha = 0.99$, $a = 2$, $b = 1$	62

*

Résumé

Le calcul fractionnaire est une branche des mathématiques qui étudie les propriétés des dérivées et des intégrales d'ordres non entiers (appelées dérivées et intégrales fractionnaires). L'histoire du calcul fractionnaire a commencé presque en même temps où le calcul classique a été établi. Bien que l'idée du calcul fractionnaire soit née il y a plus de 300 ans, de sérieux efforts ont été consacrés à son étude récemment, en raison du fait que de nombreux processus en physique et en ingénierie peuvent être modélisés plus précisément par des dérivées ou des intégrales fractionnaires que les dérivées ou les intégrales d'ordre entier traditionnelles. Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) sont une généralisation des équations différentielles d'ordre entier, étudiées par la théorie du calcul fractionnaire. La méthode de symétrie de Lie est une technique puissante pour résoudre les équations différentielles d'ordre entier et d'ordre fractionnaires pour fournir une variété de solutions exactes de manière systématique.

L'objectif de cette thèse est d'étendre l'approche de symétrie de Lie afin de l'appliquer à une classe plus large des équations différentielles partielles d'ordre fractionnaire qui modélisent de nombreux phénomènes physiques en science, ingénierie et finance. En outre, identifier les symétries des EDPs au dérivées fractionnaires afin d'obtenir des solutions exactes et de construire les lois de conservations, qui sont utiles pour étudier le comportement physique des équations différentielles en général.

Les recherches menées dans cette thèse sont liées à l'application de méthode de symétrie de Lie aux équations différentielles d'ordre fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, à savoir l'équation de Fokker-Planck (FP) fractionnaire bidimensionnelle et l'équation 'Reguritized Long Wave' d'ordre fractionnaire. Des lois de conservation sont obtenues pour ces équations en utilisant le nouveau théorème de conservation dédié par Ibragimov [39, 40].

Mots clés : Calcul fractionnaire, symétrie de Lie, lois de conservation, équation 'Reguritized Long Wave', équation de Fokker-Planck, opérateur d'Erdélyi-Kober, dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, méthode des séries entières.

Abstract

Fractional calculus is a branch of mathematics that studies the properties of derivatives and integrals of non-integer orders (called fractional derivatives and integrals). The history of fractional calculus began almost at the same time that classical calculus was established. Although the idea of fractional calculus originated more than 300 years ago, serious efforts have been devoted to its study recently, due to the fact that many processes in physics and engineering can be modeled more accurately by fractional derivatives or integrals than the traditional integer derivatives or integrals. Fractional differential equations (FDEs) are a generalization of the integer-order differential equations studied by fractional calculus theory. The Lie symmetry method is a powerful technique for solving integer and fractional order differential equations to provide a variety of exact solutions in a systematic way.

The objective of this thesis is to extend the Lie symmetry approach to a broader class of time fractional partial differential equations that model many physical phenomena in science, engineering and finance. Furthermore, to identify the symmetries of fractional derivative PDEs in order to obtain exact solutions and to construct conservation laws, which are useful for studying the physical behavior of differential equations in general. The research carried out in this thesis is related to the application of Lie symmetry methods to fractional order differential equations in the Riemann-Liouville sense, namely the two-dimensional fractional Fokker-Planck (FP) equation, the fractional order 'Reguritized Long Wave' equation. Conservation laws are obtained for these equations by using the new conservation theorem dedicated by Ibragimov [39, 40].

Keywords : Fractional calculus, Symmetry analysis, conservation Laws, Reguritized long wave equation, Fokker-Planck equation, Erdélyi-Kober operator, Riemann-Liouville fractional derivative, power series method.

Introduction générale

Au cours de la dernière décennie, le calcul fractionnaire est devenu un sujet très attrayant pour les mathématiciens et il a suscité un intérêt considérable en reconnaissant ses applications en analyse numérique et dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie [23, 24, 48, 57, 74]. Ces derniers temps, il est devenu le centre de nouveaux développements et de recherches les plus récentes dans de nombreux domaines de la science non-linéaire. Le calcul fractionnaire est en fait une généralisation de la différentiation et de l'intégration ordinaire à un ordre arbitraire (réel ou complexe). En utilisant les dérivées et les intégrales fractionnaires, on peut décrire plus précisément les systèmes dynamiques complexes dissipatifs et non-conservatifs et, par conséquent, étudier plus complètement leurs propriétés dynamiques et physiques.

Une équation différentielle fractionnaire (EDF) est une équation différentielle qui contient des dérivés fractionnaires. Elles sont largement utilisées aujourd'hui pour décrire divers effets et processus physiques dans des conditions naturelles. Par exemple, de telles équations sont utilisées pour modéliser la diffusion et la propagation des ondes dans un milieu à mémoire, le comportement héréditaire ou non local et divers effets dans des matériaux aux propriétés rhéologiques complexes. Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également l'une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt. De nombreuses publications sont consacrées à l'étude des propriétés des EDFs et à la construction de leurs solutions. L'étude détaillée et la formulation des principaux résultats et méthodes peuvent être trouvés dans les livres modernes [46, 62, 74, 77, 85].

Au cours des dernières décennies, les vastes applications des EDFs dans les divers domaines de la science et de l'ingénierie, en particulier la mécanique statistique, la théorie du contrôle, le transfert de chaleur, les problèmes dans les systèmes mécaniques et dynamiques, la synchronisation du chaos, la propagation des vagues, le traitement des images, l'écoulement des fluides, l'électrochimie, l'électromagnétisme, la viscosité, la science des matériaux et l'optique [46, 62, 72, 74, 77, 85] ont été reconnus.

Les solutions exactes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire sont rares et les

méthodes qui peuvent générer des familles de ces solutions sont difficiles à trouver. L'étude des solutions exactes des équations différentielles fractionnaires a non seulement fourni des informations sur les phénomènes, mais a également contribué à préciser certains des concepts et théories développés au cours des dernières décennies. Ces solutions fournissent plus d'informations sur les phénomènes sous divers aspects et, souvent avec plusieurs paramètres physiques importants, s'avèrent utiles pour discuter et examiner la sensibilité des phénomènes physiques qu'elles décrivent. Les solutions exactes sont également utiles pour concevoir et tester des algorithmes numériques. Quelques-unes des méthodes disponibles pour résoudre les EDFs sont la méthode de forme transformer de Laplace [68, 86], la méthode de transformation de Mellin [10], la méthode de série entière [41, 45], la méthode de calcul symbolique de Babenko [77], la méthode d'éléments finis [49], la méthode d'itération de variationnel [75], méthode de décomposition adomienne [87], méthode d'analyse homotopique [9], méthode de la perturbation homotopique [58], méthode du sous-espace invariant [69, 81].

La méthode de symétrie de Lie a été préconisée pour la première fois par le mathématicien norvégien Sophus Lie [4, 13], qui a fait de grands progrès dans les théories des groupes continus et des équations différentielles. C'est une approche efficace et largement employée pour résoudre les équations différentielles ordinaires (EDOs), les équations aux dérivées partielles (EDP) et les équations aux dérivées partielles fractionnaires (EDPF). Cette popularité est due à son utilité pour déterminer les solutions explicites et exactes à la fois des EDO et EDP, la linéarisation de certaines équations non linéaires, la réduction de l'ordre et des variables indépendantes, le calcul des lois de conservations, etc.

Dans l'étude du processus de résolution des équations différentielles, le concept des lois de conservation est fondamental et largement utilisé dans l'étude de la résolution des EDPs. De plus, elles véhiculent une grande quantité d'informations sur le système physique étudié. Les lois de conservation des équations différentielles sont des formulations mathématiques des lois physiques telles que la conservation de l'énergie et la conservation de la quantité de mouvement. Les lois de conservation jouent un rôle central, elles aident à l'intégration numérique des équations différentielles partielles [55] et à la théorie des transformations non classiques [63, 64]. Ces dernières années, les lois de conservation ont été utilisées pour construire des solutions exactes d'équations différentielles [79, 83]. Le théorème de Noether [65] nous donne une méthode sophistiquée et constructive pour obtenir des lois de conservation, il fournit en fait une formule explicite pour trouver une loi de conservation une fois qu'une symétrie de Noether correspondante à un lagrangien est connue pour une équation d'Euler-Lagrange. Cependant, il existe des équations différentielles, telles que les équations différentielles d'évolution scalaire, qui n'ont pas de Lagrangien. Dans de tels cas, plusieurs méthodes ont été développées par les chercheurs sur la construction des quantités conservées. La comparaison de plusieurs méthodes différentielles pour le calcul des lois de conservation est trouvée dans [66, 88].

La méthode des groupes de Lie est l'une des techniques mathématiques qui est applicable

à tous les types d'équations différentielles pour fournir une variété de solutions exactes de manière systématique [36, 97]. Un certain nombre d'excellents articles se sont concentrés sur l'analyse de symétrie pour les équations différentielles d'ordre entier [11, 13, 21, 22, 82, 92]. La théorie des symétrie de Lie est principalement utilisée pour la réductions de variables indépendantes, la construction de solutions invariantes et d'obtenir les lois de conservation. Cette théorie joue donc un rôle important et central dans les mathématiques géométriques. En revanche, les études de l'analyse de symétrie des équations différentielles d'ordre fractionnaires sont assez récentes. En 2007, Gazizov a généralisé la méthode des groupes de Lie pour étudier les groupes de transformation continue des équations différentielles fractionnaires et a proposé certaines formules de prolongation [31]. Certaines de ces études ont été faites en utilisant l'opérateur de Riemann-Liouville où les solutions explicites et exactes sont obtenues. Dans d'autres études utilisant l'opérateur de Riemann-Liouville, les EDPFs sont réduits à des EDFs avec l'opérateur fractionnaire d'Erdelyi-Kober. Certaines des propriétés des dérivées fractionnaires sont très différentes de celles des dérivées classiques; par conséquent, il existe une énorme motivation pour creuser dans le domaine de la recherche des symétries de Lie des équations différentielles fractionnaires. De nombreux articles ont été consacrés à la construction de symétries de Lie de différentes équations différentielles fractionnaires [1, 4, 11, 15, 21, 37, 56].

L'objectif principal et la motivation derrière l'étude proposée est de démontrer l'importance et l'efficacité des méthodes de groupes de symétrie dans la résolution des équations différentielles fractionnaires temporelles. En bref, un groupe de symétrie d'une équation différentielle partielle d'ordre fractionnaire est un groupe continu de transformations agissant sur l'espace des variables indépendantes et dépendantes qui laisse l'équation invariante. Ce groupe peut être déterminé algorithmiquement et ensuite les solutions de l'équation ou des équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire peuvent être trouvées en résolvant un système réduit d'équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire. La théorie et les applications des groupes de Lie peuvent être trouvées dans d'excellents papiers tels que ceux de Bluman et Cole [8], Olver [70], Ovsianikov [73] et Ibragimov [40].

Ce chapitre est conçu comme une introduction au calcul fractionnaire, la méthode de Lie classique et les lois de conservation. Le bref aperçu des extensions proposées de l'approche de symétrie de Lie est également mentionné dans ce chapitre. Les détails de la méthode développée et de ses diverses applications peuvent être trouvés dans les prochains chapitres .

Le travail présenté dans cette thèse se décompose de quatre chapitres comprenant diverses extensions et applications nouvelles de la méthode de symétrie de Lie.

Le premier chapitre présente l'histoire du calcul fractionnaire, les outils de base et quelques définitions des fonctions spéciales utiles tout au long de notre thèse telles que : la fonction gamma d'Euler, la fonction de Mittag-Leffler avec des exemples et quelques propriétés intéressantes. Aussi, les propriétés des opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville utilisés dans cette étude. Les principales caractéristiques, le contexte et la méthodologie de la méthode classique de Sophus Lie

sont également abordés dans ce chapitre.

Le chapitre 2 : est consacré à la présentation de la procédure générale de la méthode d'analyse de symétrie de Lie pour les équations différentielles fractionnaires au dérivées partielles et à l'extension de la méthode des groupes de Lie et des opérateurs de Noether pour le calcul des symétries de Lie et des vecteurs conservés des EDP fractionnaires. La classification complète des groupes de Lie est effectuée et le concept d'auto-adjonction non-linéaire est étendu aux EDP fractionnaires temporelles, en portant un intérêt très particulier aux récents travaux de Gazizov et al. [30, 31].

Le chapitre 3 : traite l'étude d'une équation non-linéaire fractionnaires pour son analyse de symétrie de Lie, à savoir l'équation 'Regularized Long-Wave' fractionnaire au sens de dérivée de Riemann-Liouville. Dans ce but, la méthode de symétrie est appliquées pour cette équation par la construction des prolongations requises. En utilisant les opérateurs de prolongation, les infinitésimaux de groupe pour cette équation non-linéaire fractionnaires sont calculés avec succès. Les solutions invariantes de groupe résultantes sont utilisées pour obtenir leurs réductions de symétrie en une équation différentielles ordinaires fractionnaire non-linéaire (EDOFN) en terme d'opérateurs fractionnaires d'Erdélyi-Kober, dont on étudie à nouveau ses solutions invariantes en utilisant la méthode des séries entières.

Le chapitre 4 : est dédié à l'application de la méthode de symétrie de Lie pour l'équation de Fokker-Planck (FP) fractionnaire bidimensionnelle dans le sens de la dérivée de Riemann-Liouville. Nous obtenons ses solutions explicites à l'aide de la méthode de séries entières. En outre, les lois de conservation pour cette équation différentielles partielles fractionnaires (EDPF) sont obtenues avec succès en utilisant le nouveau théorème de conservation d'Ibragimov.

Finalement nous terminons notre travail par une conclusion générale, où la validité et la fiabilité d'une telle recherche est mise en exergue, aussi nous proposons quelques perspectives sur le sujet.

1. Historique des calculs fractionnaires

L'origine du calcul fractionnaire est une lettre écrite au 17^{ème} siècle par L'Hopital [62]. Leibniz a inventé la notation $\frac{d^n y}{dx^n}$ pour la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction $y = f(x)$. Le 30 septembre 1695, une question a été soulevée par L'Hopital dans sa lettre à Leibniz sur la dérivée d'ordre $n = \frac{1}{2}$. Dans sa réponse, Leibniz répond qu'il s'agit là d'un paradoxe apparent, dont on tirera un jour des conséquences utiles [46, 62]. Depuis lors, de nombreux scientifiques ainsi que des mathématiciens ont prêté attention au calcul fractionnaire et ont contribué à son développement. Parmi ces auteurs, on peut citer J. L. Lagrange (1772) [51], P.S. Laplace (1812) [52], S. F. Lacroix (1819) [50], J. B. J. Fourier (1822) [29], J. Liouville (1832-1873) [53], G. F. B. Riemann (1847) [78], H. Letnikov (1868-1872) [54], [46, 62].

Lagrange a contribué au calcul fractionnaire par le développement de la loi des exposants en 1772 pour les opérateurs de dérivés d'ordre entier [51, 62]. La première étape a été franchie par Euler en 1738 qui a observé la dérivée $\frac{d^p(x^\alpha)}{dx^p}$ de x^α a une signification pour le non-entier p [25]. Le mathématicien français Lacroix est le premier auteur à avoir publié un papier mentionnant les dérivés fractionnaires [50, 62] en 1819. Il présente les dérivés fractionnaires comme une généralisation des dérivés d'ordre entier.

En 1823, Niels Henrik Abel [6] a été le premier auteur à appliquer les opérateurs fractionnaires et le calcul fractionnaire pour résoudre un problème intégral qui se pose dans la formulation du problème de la tautochrone. Le premier mathématicien à tenter de résoudre des équations différentielles ayant des opérateurs fractionnaires était Liouville [62]. Il publia trois longs mémoires en 1832 [53]. En 1847, Riemann a écrit un papier traitant d'une définition de l'opérateur fractionnaire, mais a été publié à titre posthume [78]. Oldham et Spanier [72] ont publié le 1^{er} papier entièrement consacré au calcul fractionnaire en 1974. Podlubny [77] a publié un livre traitant les EDF en 1999. Pour plus d'informations sur le développement du calcul fractionnaire au cours de ces deux siècles, le lecteur est prié de se référer aux Refs. [47, 62, 72]. De nos jours, un grand nombre de livres et d'articles de recherche sont consacrés au calcul fractionnaire et à ses applications [5, 46, 77, 85].

2. Outils mathématiques et fonctions spécifiques

2.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions les plus importantes du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler indiquée par $\Gamma(z)$. Elle a été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) dans son objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entières et même complexes. La fonction gamma est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

qui converge pour $R(z) > 0$ où $R(z)$ désigne la partie réelle de z . Dans cette thèse, seulement $z \in \mathbb{R}^+$ sont considérés. Les deux propriétés importantes :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{R}^+, \quad (1.1)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Note 1. La fonction gamma $\Gamma(z)$ est une fonction analytique pour tous les nombres complexes sauf les nombres entiers zéro et négatifs.

Note 2. La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

où nous supposons que $Re(z) > 0$.

Théorème 1.1 (Voir [62])

Soit $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, alors

1. $\Gamma(x) = \frac{x+1}{x}$, pour $x < 0$,
2. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$,
3. $\frac{d^n}{dx^n} \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^n dt$, pour $x > 0$,
4. $\Gamma(x) = x^{-1} \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}$,
5. $\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{-z} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) \right)$.

Définition 1.1

La fonction Gamma incomplète inférieur est définie par :

$$\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt. \quad (1.3)$$

La fonction Gamma incomplète supérieur est définie par :

$$\Gamma(s, x) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt. \quad (1.4)$$

La relation entre la fonction Gamma et la fonction Gamma incomplète est donnée par :

(a)

$$\begin{aligned} \gamma(s, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^s e^{-x} x^k}{s(s+1)\dots(s+k)} \\ &= x^s \Gamma(s) e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(s+k+1)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(s, x) = \Gamma(s). \quad (1.6)$$

(c)

$$\gamma(s, x) + \Gamma(s, x) = \Gamma(s). \quad (1.7)$$

Une autre fonction mathématique utile dans le calcul fractionnaire est la fonction Bêta. Pour $z, w \in \mathbb{R}$ tels que $R(z) > 0$, $R(w) > 0$, la fonction Bêta est définie par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt. \quad (1.8)$$

La relation entre la fonction Bêta d'Euler et Gamma d'Euler est donnée par :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (1.9)$$

2.2 La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle $E_{(\alpha)}$ qui tient son nom du mathématicien Gösta Mittag-Leffler, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 (voir [62]) est définie par le développement en série entière

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}.$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres, joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi en 1953-1954 et elle est donnée par la fonction suivante

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Exemple 1.1

$$\begin{aligned} E_{\alpha,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}, \\ E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \\ E_{1,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k + 1)!} = \frac{e^x - 1}{x}, \\ E_{1,3}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k + 3)} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{(k + 2)!} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

En général,

$$\begin{aligned} E_{1,p}(x) &= \frac{1}{x^{p-1}} \left[e^x - \sum_{k=0}^{p-2} \frac{x^k}{k!} \right], \\ E_{2,1}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!} = \cosh(x), \\ E_{2,2}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k + 2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k + 1)!} = \frac{\sinh(x)}{x}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

3. Les opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville

La correspondance entre Leibniz et L'Hopital a incité de nombreux mathématiciens et physiciens pour donner une définition aux dérivées fractionnaires. Au fil des années, de nombreux mathématiciens ont donné diverses définitions pour trouver des dérivées et des intégrales d'ordre non entier. Le fait intéressant est que les intégrales et dérivées fractionnaires ne sont pas une propriété locale. Les intégrales fractionnaires sont souvent considérées dans le sens de Riemann-Liouville, mais les dérivées fractionnaires ont été introduites de plusieurs manières différentes, comme les dérivées fractionnaires de Liouville, Riemann, Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Caputo, Miller-Ross [46, 62, 77]. La plus célèbre de ces définitions est celle qui appartient à Riemann et Liouville. Dans cette thèse, les dérivées et intégrales fractionnaires sont considérées au sens de Riemann-Liouville [46, 62, 77]. Les définitions de base des intégrales et des dérivées fractionnaires sont présentées dans cette section.

3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville est considérée pour un intervalle fini sur la ligne réelle. Les intégrales fractionnaires peuvent être vues comme une généralisation des intégrales ordinaires. L'intégrale d'ordre $n \in \mathbb{N}$ d'une fonction $f(x)$ continue sur la droite réelle peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} (I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad (n \in \mathbb{N}^*). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Définition 1.2

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle *intégrale de Riemann-Liouville* de f l'intégrale définie par la formule suivante :

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.13)$$

où $n-1 < \Re(\alpha) < n$ et $t > a$.

Exemple 1.2

L'intégrale au sens de Riemann-Liouville de $f(t) = (t-a)^\beta$. Soit $\beta > -1$,

$${}_a D_t^{-\alpha} ((t-a)^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \quad (1.14)$$

Proposition 1.1 (Voir [77])

Soient α et β deux nombres complexes et $f \in C^0([a, b])$, on a :

i)

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^\beta (I_a^\alpha f), \quad (\Re(\alpha) > 0) \quad (1.15)$$

ii))

$$\frac{d}{dt} (I_a^\alpha f(t)) = (I_a^{\alpha-1} f)(t), \quad (\Re(\alpha) > 1) \quad (1.16)$$

iii)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_a^\alpha f(t) = f(t), \quad (\Re(\alpha) > 0) \quad (1.17)$$

pour presque tout $x \in [a, b]$. Si de plus $f \in C([a, b])$, alors cette identité est vraie pour tout $x \in [a, b]$.

3.2 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est définie en utilisant la définition de l'intégrale fractionnaire. La dérivée fractionnaire d'une fonction $f(x)$ est donnée par :

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} (D_x^{-(n-\alpha)} f(x)), \quad n-1 < \alpha < n. \quad (1.18)$$

L'intégrale I_x^α est également notée $D_x^{-\alpha}$. L'opérateur D_x^α représente une dérivée si α est un nombre réel positif, et une intégrale si α est un nombre réel négatif. Par conséquent, les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'une fonction $f(x)$ d'ordre réel $\alpha > 0$ sont définies comme suit :

$$(D_x^\alpha f)(x) = \begin{cases} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, & \alpha = n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, & n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^n. \end{cases} \quad (1.19)$$

En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on a

$$(D_a^0 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

$$(D_a^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right) \int_a^x f(t) dt = \frac{d^m}{dx^m} f(x).$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.3

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction constante est donnée par :

$$D_t^\alpha C = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} C.$$

On voit que la dérivée d'une constante est non-nulle.

Exemple 1.4

La dérivée au sens de Riemann-Liouville de $f(t) = (t-a)^\beta$. Soit α non entier tel que $0 \leq n-1 < n$ et $\beta > -1$ alors on a :

$${}_a^R D_t^\alpha ((t-a)^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} (t-a)^{-\alpha+\beta}.$$

Définition 1.3 (Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche)

$$\forall t > a, {}_a^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.20)$$

Définition 1.4

$$\forall t > a, {}_a^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (1.21)$$

Proposition 1.2 (Voir [46, 62, 77])

Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha < n$, $n-1 \leq \beta < n$,

1. $D_x^\alpha (I_x^\alpha f(t)) = f(t)$,

$$2. D_\alpha^x x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)+1} x^{\gamma-\alpha},$$

3. **Linéarité :**

Soient $f(x), g(x)$ deux fonctions continues pour $x \geq a$,

$$D_\alpha^x (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D_\alpha^x f(x) + \mu D_\alpha^x g(x),$$

tel que λ, μ sont deux constantes.

4. **Règle de Leibniz**

$$D_x^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} (D_x^{\alpha-j} f)(x)g^j(x),$$

avec $g^j(x)$ est la dérivée entière d'ordre j et $\binom{\alpha}{j} = C_\alpha^j = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!}$.

5. Pour $\alpha > \beta > 0$ et $f \in L^1([a, b])$, on a

$$D_x^\alpha (I_x^\alpha f(z)) = f(z). \quad (1.22)$$

6. Si $\alpha \geq \beta > 0$ et la dérivée $D_x^{\alpha-\beta}$ existe, alors on a

$$D_x^\alpha (I_x^\beta f)(z) = (D_x^{\alpha-\beta} f)(x). \quad (1.23)$$

7. Si $f \in L^1([a, b])$ et $I^{n-\alpha} \in AC^n([a, b])$ avec $n = \Re(\alpha) + 1$

$$\left[I_a^\alpha (D_a^\beta f) \right] (x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \rightarrow a^+} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^j I_a^{n-\alpha} f \right] (x).$$

4. La dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Dans le domaine d'analyse fractionnaire la définition de R.L a joué un rôle crucial, qu'on le voit dans plusieurs applications en mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre non entiers). Cependant, elle nous amène à des conditions initiales non naturelles, car elles contiennent des valeurs limites de dérivées fractionnaires au sens de R.L au borne inférieure $t=a$, qui n'admettent pas d'interprétation physique adéquate. Cependant, les problèmes concrets physiques dans la théorie de viscoélasticité et des mécaniques du solide demandent une définition de la dérivée fractionnaire qui utilise des conditions initiales plus naturelles telles que : $f(a), f'(a), f''(a), \dots$. En 1967, Caputo a donné une solution à ce problème en proposant une vision modifiée de la définition de la dérivation fractionnaire qui est plus restrictive à celle de R.L et plus adaptée aux problèmes physiques. On va donner une définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo :

Définition 1.5

La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ d'une fonction f est donnée par :

$${}^C D_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \text{ avec } n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.24)$$

Exemple 1.5

Soit $f(t) = (t-a)^\eta$ avec $\eta > 0$, pour $(0 < \alpha < 1)$, utilisant le même changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha f(t) &= {}_a D_t^{-(1-\alpha)} f^{(1)}(t) \\ &= \eta {}_a D_t^{-(1-\alpha)} (t-a)^{\eta-1} \\ &= \frac{\eta}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} (\tau-a)^{\eta-1} d\tau \\ &= \frac{\eta}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha+\eta} \int_0^1 s^{\eta-1} (1-s)^{-\alpha} ds \\ &= \frac{\eta}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha+\eta} B(\eta, 1-\alpha). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Donc :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(1-\alpha+\eta)} (t-a)^{-\alpha+\eta}.$$

Définition 1.6 (Dérivée fractionnaire de Caputo à gauche)

$$\forall t > a, {}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (1.26)$$

Définition 1.7 (Dérivée fractionnaire de Caputo à droite)

$$\forall t < b, {}^C D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} (-1)^m \int_t^b (\tau-t)^{m-\beta-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (1.27)$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}^C D_t^\alpha f(t)$ et ${}^C D_t^\beta f(t)$ sont définies. Les opérateurs dont l'intégrale porte sur $[a, t]$ (respectivement $[t, b]$) seront qualifiés d'opérateurs passés (respectivement opérateurs futurs).

4.1 Relation de la dérivée au sens de Caputo avec la dérivée au sens de Riemann-Liouville

1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $m = [\alpha] + 1$. Si ${}^C D_t^\alpha$ et ${}^R D_t^\alpha$ existent, alors :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}, \quad (1.28)$$

on déduit que si $f^{(i)}(a) = 0$ pour tout $i = 0, 1, \dots, m-1$, on aura ${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha f(t)$.

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha \left(f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i \right). \quad (1.29)$$

2) Si $0 < \alpha < 1$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont définies respectivement par :

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \left({}^R D_t^{-(1-\alpha)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, \quad (1.30)$$

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^{-(1-\alpha)} \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, \quad (1.31)$$

et on a les propriétés suivantes :

Proposition 1.3 (Voir [62])

1)

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + {}^C D_t^\alpha f(t). \end{aligned} \quad (1.32)$$

2)

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha (f(t) - f(a)). \quad (1.33)$$

3) Si f est continue sur $[a, b]$, alors

$${}^C D_t^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t). \quad (1.34)$$

4) Si $f \in C_m[a, b]$, alors

$$I_a^\alpha {}^C D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i. \quad (1.35)$$

Alors, l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Caputo du même ordre, mais il n'est pas un inverse droit.

Remarque 1.1

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle, autrement dit :

$${}^C D_t^\alpha I_a^\alpha M = 0.$$

5. Intégrations fractionnaires et dérivations fractionnaires de type Erdélyi-Kober

Dans cette section on va présenter les définitions et certaines propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires de type Erdélyi-Kober et leurs cas particuliers (voir [31], [20] et [25]).

Définition 1.8

Soit (a, b) , $(-\infty \leq a \leq b < +\infty)$ est un intervalle borné du demi-axe \mathbb{R}^+ et soit $Re(\alpha) > 0$, $\sigma > 0$ et $\eta \in \mathbb{C}$. On considère les intégrales à gauche et à droite d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ est définie par :

$$(I_{a^+, \sigma, \eta}^\alpha f)(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma(\eta+1)-1} f(t) dt, \quad (0 \leq a < x < b \leq +\infty) \quad (1.36)$$

et

$$(I_{b^-, \sigma, \eta}^\alpha f)(x) = \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t^\sigma - x^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t) dt, \quad (0 \leq a < x < b \leq +\infty) \quad (1.37)$$

Lorsque, $a = -\infty$ et $b = +\infty$ on va utiliser les notations suivantes :

$$(I_{+, \sigma, \eta}^\alpha f)(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma(\eta+1)-1} f(t) dt, \quad (x > 0) \quad (1.38)$$

et

$$(I_{-, \sigma, \eta}^\alpha f)(x) = \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t^\sigma - x^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t) dt, \quad (x > 0) \quad (1.39)$$

Les intégrales (1.36) et (1.37), ainsi que (3.5) et (1.41) sont appelés les intégrales fractionnaires de type Erdelyi-Kober.

Si $\sigma = 2$, $a = 0$ et $b = \infty$, alors les intégrales (3.5) et (1.41) sont donnés par :

$$(I_{\eta, \alpha} f)(x) = I_{0^+, 2, \eta}^\alpha f(x) = \frac{2x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{2\eta+1} f(t) dt, \quad (x > 0) \quad (1.40)$$

et

$$(K_{\eta, \alpha}^\alpha f)(x) = I_{-, 2, \eta}^\alpha f(x) = \frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{\alpha-1} t^{1-2(\alpha+\eta)} f(t) dt, \quad (x > 0) \quad (1.41)$$

Ces opérateurs sont appelés les opérateurs Erdélyi-Kober.

Lemme 1.1

Soient $Re(\alpha) > 0$ et $1 \leq p < \infty$

a) Si $0 < a < b < \infty$ et $f \in L^p(a, b)$, alors,

$$(I_{a^+, \sigma, \eta}^\alpha I_{a^+, \sigma, \eta+\alpha}^\beta f)(x) = (I_{a^+, \sigma, \eta}^{\alpha+\beta} f)(x),$$

et

$$(I_{b^-, \sigma, \eta}^\alpha I_{b^-, \sigma, \eta+\alpha}^\beta f)(x) = (I_{b^-, \sigma, \eta}^{\alpha+\beta} f)(x).$$

b) Si $a = 0$, $b = \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, et $Re(\eta) > -1 + \frac{1}{p\sigma}$ alors,

$$(I_{0^+, \sigma, \eta}^\alpha I_{0^+, \sigma, \eta+\alpha}^\beta f)(x) = (I_{0^+, \sigma, \eta}^{\alpha+\beta} f)(x). \quad (1.42)$$

En particulier,

— Si $Re(\eta) > -1 + \frac{1}{2p}$, alors :

$$(I_{\eta, \alpha}^+ I_{\eta+\alpha, \beta}^+ f)(x) = (I_{\eta, \alpha+\beta}^+ f)(x).$$

— Si $Re(\eta) > -1 + \frac{1}{p}$, alors :

$$(I_{\eta,\alpha}^+ I_{\eta+\alpha,\beta}^+ f)(x) = (I_{\eta,\alpha+\beta}^+ f)(x). \quad (1.43)$$

c) Si $a = 0, b = +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, et $Re(\eta) > -\frac{1}{p\sigma}$ alors,

$$(I_{-\sigma,\eta}^\alpha I_{-\sigma,\eta+\alpha}^\beta f)(x) = (I_{-\sigma,\eta}^{\alpha+\beta} f)(x). \quad (1.44)$$

En particulier,

— Si $Re(\eta) > -\frac{1}{p\sigma}$, alors :

$$(K_{\eta,\alpha} K_{\eta+\alpha,\beta} f)(x) = (K_{\eta,\alpha+\beta} f)(x), \quad (1.45)$$

— Si $Re(\eta) > -\frac{1}{p}$, alors :

$$(K_{\eta,\alpha}^- K_{\eta+\alpha,\beta}^- f)(x) = (K_{\eta,\alpha+\beta}^- f)(x), \quad (1.46)$$

Lemme 1.2

Soient $R(\alpha) > 0$ et $0 \leq a < b \leq \infty$, alors les relations suivantes sont vérifiées pour les fonctions "suffisamment bon" $f(x)$ et $g(x)$:

$$\int_a^b x^{\sigma-1} f(x) (I_{a+,\sigma,\eta}^\alpha g)(x) dx = \int_a^b x^{\sigma-1} g(x) (I_{b-,\sigma,\eta}^\alpha f)(x) dx. \quad (1.47)$$

Si $a = 0, b = +\infty$

$$\int_0^{+\infty} x^{\sigma-1} f(x) (I_{0+,\sigma,\eta}^\alpha g)(x) dx = \int_0^{+\infty} x^{\sigma-1} g(x) (I_{0-,\sigma,\eta}^\alpha f)(x) dx. \quad (1.48)$$

En particulier,

$$\int_0^{+\infty} x f(x) (I_{\eta,\alpha} g)(x) dx = \int_0^{+\infty} x g(x) (K_{\eta,\alpha} f)(x) dx. \quad (1.49)$$

$$\int_0^{+\infty} x f(x) (I_{\eta,\alpha}^+ g)(x) dx = \int_0^{+\infty} x g(x) (K_{\eta,\alpha}^+ f)(x) dx. \quad (1.50)$$

Soient $Re(\alpha) \geq 0, (\alpha \neq 0), n = [Re(\alpha)] + 1, \sigma > 0$ et $\eta \in (\mathbb{C})$. Les dérivées fractionnaires de type Erdelyi-Kober, correspondant aux intégrales fractionnaires de type Erdelyi-Kober (1.36) et (1.37) sont définies par :

— Si $0 \leq a < x < b \leq \infty$

$$(D_{a+,\sigma,\eta}^\alpha y)(x) = x^{-\sigma\eta} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(n+\eta)} (I_{a+,\sigma,\eta+\alpha}^{n-\alpha} y)(x). \quad (1.51)$$

$$(D_{b-,\sigma,\eta}^\alpha y)(x) = x^{\sigma(\eta+\alpha)} \left(-\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(n-\eta-\alpha)} (I_{b-,\sigma,\eta+\alpha-n}^{n-\alpha} y)(x), \quad (1.52)$$

avec, $D = \frac{d}{dx}$.

— Lorsque $a = -\infty$ et $b = +\infty$, ces définitions sont données par :

$$(D_{+,\sigma,\eta}^\alpha y)(x) = x^{-\sigma\eta} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(n+\eta)} (I_{+,\sigma,\eta+\alpha}^{n-\alpha} y)(x), \quad (1.53)$$

$$(D_{-,\sigma,\eta}^\alpha y)(x) = x^{\sigma(\eta+\alpha)} \left(-\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(n-\eta-\alpha)} (I_{-,\sigma,\eta+\alpha-n}^{n-\alpha} y)(x), \quad (1.54)$$

— Lorsque $\sigma = 2$, les relation (1.51) (avec $a=0$) et (1.62) sont données par :

$$(D_{\eta,\alpha}^+ y)(x) = (D_{0+,2,\alpha}^\alpha y)(x) = x^{-2\eta} \left(\frac{1}{2x} D \right)^n x^{2(n+\eta)} (K_{\eta+\alpha,n-\alpha} y)(x), \quad (1.55)$$

$$(D_{\eta,\alpha}^- y)(x) = (D_{-,2,\alpha}^\alpha y)(x) = x^{2(\eta+n)} \left(-\frac{1}{2x} D \right)^n x^{2(n-\eta-\alpha)} (K_{\eta+\alpha-n,n-\alpha} y)(x), \quad (1.56)$$

— Lorsque $\sigma = 1$, les relation (1.51) (avec $a=0$) et (1.62) sont données par :

$$(\tilde{D}_{\eta,\alpha}^+ y)(x) = (D_{a+,1,\eta}^\alpha y)(x) = x^{-\eta} D^n x^{n+\eta} (I_{\eta+\alpha,n-\alpha} y)(x), \quad (1.57)$$

$$(\tilde{D}_{\eta,\alpha}^- y)(x) = (D_{-,1,\eta}^\alpha y)(x) = x^{\eta+\alpha} (-D^n) x^{n-\eta-\alpha} (K_{\eta+\alpha-n,n-\alpha} y)(x). \quad (1.58)$$

— Si on suppose que $\alpha = n \in \mathbb{R}$ dans (1.51) et (1.52), alors on obtient :

$$(D_{a+,\sigma,\eta}^\alpha y)(x) = (D_{+, \sigma, \eta}^\alpha y)(x) = x^{-\sigma\eta} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(n+\eta)} y(x), \quad (1.59)$$

$$(D_{b-,\sigma,\eta}^\alpha y)(x) = (D_{-, \sigma, \eta}^\alpha y)(x) = x^{\sigma(\eta+\alpha)} \left(-\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{-\sigma\eta} y(x). \quad (1.60)$$

En particulier, lorsque $\sigma = 2$, $a = 0$ et $b = +\infty$ on a :

$$(D_{\eta,n}^+ y)(x) = x^{-2\eta} \left(\frac{1}{2x} D \right)^n x^{2(n+\eta)} (K_{\eta+\alpha,n-\alpha} y)(x), \quad (1.61)$$

$$(D_{\eta,\alpha}^- y)(x) = x^{2(\eta+n)} \left(-\frac{1}{2x} D \right)^n x^{-2\eta} (K_{\eta+\alpha-n,n-\alpha} y)(x), \quad (1.62)$$

Les opérateurs de dérivations fractionnaires de type Erdelyi-Kober dans (1.51) et (1.52) fournissent des opérations inverses aux opérateurs de type Erdelyi-Kober (1.36) et (1.37). à gauche.

6. Laplacien fractionnaire

6.1 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

La transformation de Laplace est utilisée pour résoudre les équations différentielles [77], l'avantage de la transformation de Laplace est que la plupart des opérations courantes sur la fonction $f(t)$, telle que la dérivation (classique ou fractionnaire) ou un décalage sur la variable t , ont une traduction plus simple par la transformée $\mathcal{L}(f)(s)$.

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction $h(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$:

$$D_t^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t). \quad (1.63)$$

La transformée de Laplace de la fonction $h(t) = t^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$H(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}; s\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}. \quad (1.64)$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t); s\} = s^{-\alpha} F(s). \quad (1.65)$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$; posons

$$D_t^\alpha f(t) = h^n(t), \quad (1.66)$$

ce qui entraîne

$$h(t) = D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad n-1 \leq \alpha < n. \quad (1.67)$$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduite à :

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha H(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k h^{(n-k-1)}(0), \quad (1.68)$$

avec,

$$H(s) = s^{-(n-\alpha)} F(s). \quad (1.69)$$

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, on a :

$$h^{(n-k-1)}(t) = \frac{dt^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} D_t^{-(n-\alpha)} f(t) = D_t^{\alpha-k-1} f(t). \quad (1.70)$$

En remplaçant Eq.(1.69) et Eq.(1.70) dans Eq.(1.68), nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville,

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0}, \quad n-1 \leq \alpha < n. \quad (1.71)$$

L'application pratique de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, est limitée par l'absence d'une interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = 0$: En particulier, si $n = 1$ et $n = 2$, on a respectivement

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - D_t^{\alpha-1} f(0), \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (1.72)$$

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - D_t^{\alpha-1} f(0) - s D_t^{\alpha-2} f(0), \quad 1 \leq \alpha < 2. \quad (1.73)$$

Le tableau suivant donne un bref résumé de quelques transformées de Laplace utiles. a et b sont deux réels constants ($a \neq b$) et $\alpha, \beta > 0$ arbitraires.

$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\}$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-at}$
$\frac{1}{(s)^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha - a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha - a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at^\alpha)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$

Tableau 1.1. Transformée de Laplace de quelques fonctions

6.2 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

Soient $f \in C^\infty[a, +\infty[$, $n-1 \leq \alpha < n$ et $a \leq 0$.

Cas $\alpha = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[{}^C D_t^\alpha f\right](s) &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} \int_r^{+\infty} e^{-st} (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) dt d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} u^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) du d\tau \\
&= \left(\int_0^{+\infty} e^{-su} \frac{u^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} du \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau \right) \\
&= \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right](s) \mathcal{L}\left[f^{(n)} \right](s) \\
&= s^{\alpha-n} \mathcal{L}\left[f^{(n)} \right](s).
\end{aligned} \tag{1.74}$$

Puisque $\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$, alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[{}^C D_t^\alpha f\right](s) &= s^{\alpha-n} \left[s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s^{n-\alpha} f^{(n-1)}(0) \right] \\ &= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - s^{\alpha-1} f(0) - s^{\alpha-2} f'(0) - \dots - s^{\alpha-n} f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Cas général :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[{}^C D_t^\alpha f\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\ &\quad + \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^0 (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\ &= s^{\alpha-n} \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) + \int_a^0 \left(\int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{(t-\tau)^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} dt \right) f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= s^{\alpha-n} \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) + \int_0^{+\infty} \mathcal{L}\left[\frac{(t-\tau)^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right](s) f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= s^{\alpha-n} \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) + s^{\alpha-n} \int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Une intégration par parties, nous donne :

$$\begin{aligned} \int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau &= \int_a^0 s e^{-s\tau} f^{(n-1)}(\tau) d\tau + \left[e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) \right]_a^0 \\ &= s \int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n-1)}(\tau) d\tau + f^{(n-1)}(0) - e^{-as} f^{(n-1)}(a). \end{aligned} \quad (1.77)$$

En intégrant encore une fois par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau &= s^2 \int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n-2)}(\tau) d\tau + \left[s f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0) \right]_a^0 \\ &\quad + e^{-sa} \left[s f^{(n-2)}(a) + f^{(n-1)}(a) \right]. \end{aligned} \quad (1.78)$$

ce que l'on généralise par parties :

$$\int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau = s^n \int_a^0 e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + \left[s^{(n-1)} f(0) + \dots + f^{(n-1)}(0) \right] - e^{-as} \left[s^{n-1} f(a) + \dots + f^{(n-1)}(a) \right]. \quad (1.79)$$

Une combinaison de (1.78) et (1.79), en simplifiant les termes en $f^{(k)}(0)$, on obtient finalement

$$\mathcal{L}\left[{}^C D_t^\alpha f\right](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - e^{-as} \left[s^{\alpha-1} f(a) + s^{\alpha-2} f'(a) + \dots + s^{\alpha-n} f^{(n-1)}(a) \right]. \quad (1.80)$$

7. Symétrie de Lie des équations différentielles

La méthode de symétrie de Lie est une technique extrêmement populaire pour résoudre les équations différentielles non linéaires. En général, les équations différentielles non linéaires sont

très difficiles à résoudre. Par conséquent, l'obtention de solutions exactes d'équations différentielles non-linéaires a toujours été un concept intéressant et stimulant dans divers domaines de recherche. La méthode de symétrie a été largement appliquée pour traiter de nombreuses équations différentielles non-linéaires et linéaires. Les travaux pionniers sur l'analyse de symétrie de Lie (également appelée méthode classique de Lie) ont été réalisés par le mathématicien norvégien Sophus Lie, entre 1872 et 1899.



Figure 1.1 Marius Sophus Lie (1842,1899)

Marius Sophus Lie a dévoué pratiquement toute sa vie à la théorie des groupes continus, maintenant connus sous le nom de groupes de Lie, et leurs relations avec les équations différentielles. Il a aussi, entre autre, analysé en profondeur la relation entre les algèbres et les groupes de Lie et posé le problème de la classification de tous les groupes et les algèbres simples de Lie. Malgré son importance dans les phénomènes non linéaires, la théorie de Lie est restée inexplorée pendant de nombreuses années. Par la suite, la théorie des groupes de Lie a été développée par Ovsianikov [73] en 1960. Depuis, Ibragimov [38], Olver [70], Bluman [11, 12, 14, 16], Cantwell [21], et de nombreux autres chercheurs ont contribué au développement et aux applications de la théorie des groupes de Lie [35, 76].

Une symétrie d'un objet est une transformation laissant cet objet invariant. Le groupe de symétrie d'une équation différentielle est un groupe de transformations qui transforme toute solution en une autre solution. Par conséquent, le groupe de symétrie est utile pour obtenir de nouvelles solutions à partir de solutions connues. Les groupes de Lie de transformations sont caractérisés par des générateurs infinitésimaux. Lie a donné un algorithme pour trouver tous les générateurs infinitésimaux des transformations ponctuelles et, plus généralement, des transformations

de contact admises par une équation différentielle donnée. De manière significative, pour une équation différentielle donnée, les applications de base des groupes de Lie des transformations ne nécessitent que la connaissance des transformations infinies admises. Les symétries de Lie admises par les équations différentielles peuvent être utilisées pour réduire le nombre de variables indépendantes dans le cas des EDPs et réduire leur ordre dans le cas des EDOs. Évidemment, il est plus facile de résoudre les équations différentielles réduites.

La méthode de symétrie de Lie a été développée pour la construction de diverses techniques d'étude des équations différentielles. Certaines de ces généralisations sont la méthode non classique de Bluman et Cole [16], les symétries d'ordre supérieur d'Olver [70], les symétries non locales [71], etc. Après la guerre, les scientifiques ont posé de plus en plus des problèmes non-linéaires et ils ont alors réalisé que la théorie de Lie était la seule méthode systématique qui permettait d'analyser les équations non-linéaires. Conjointement, les physiciens travaillant sur la dynamique des fluides ont fortement commencé à apprécier l'importance centrale des symétries. Plusieurs publications ont paru sur le sujet depuis celles de Lie.

Le but de cette section sera d'établir le formalisme qui permet de trouver le groupe de symétries d'une équation différentielle quelconque, présenter les définitions de base et la méthodologie de la méthode classique de Lie pour les équations différentielles d'ordre entier. Cela se résume à chercher un groupe de transformations locales qui permet de transformer des solutions d'une équation en d'autres solutions, groupe qui agit sur l'espace des variables dépendantes et indépendantes de notre équation. Dans la suite, on va développer la méthode de symétrie pour l'étude des équations différentielles fractionnaires.

7.1 Concepts de bases

Afin de simplifier les notations, nous allons considérer une équation différentielle partielle d'ordre k avec $n \in \mathbb{N}$ variables indépendantes $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $m \in \mathbb{N}$ variables dépendantes $u = (u_1, \dots, u_m)$ comme suit :

$$F(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0, \quad (1.81)$$

avec $u_{(1)}$ est l'ensemble des nm dérivées de premier ordre de u , il est données comme suit :

$$u_{(1)} = \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1}, \frac{\partial u^1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u^1}{\partial x_n}, \frac{\partial u^2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u^2}{\partial x_n}, \frac{\partial u^m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u^m}{\partial x_n} \right). \quad (1.82)$$

avec $x_i, u^j \in \mathbb{R}$ pour tout i, j .

En général, pour $k \leq 2$, $u_{(k)}$ désigne l'ensemble de toutes les dérivées d'ordre k de u données par

$$u_{(k)} = \frac{\partial^k u^i}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}, \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, m \text{ et } j_1, \dots, j_k = 1, \dots, n. \quad (1.83)$$

Avant de discuter la méthodologie de symétrie de Lie, les définitions de base et les caractéristiques principales de la théorie des groupes de Lie sont présentées par [11, 35, 70].

7.1.1 Groupe de transformations à un seul paramètre

Définition 1.9 (Groupe (voir [11, 70]))

Un ensemble non vide G avec une loi de composition $*$ entre ses éléments forme un groupe à condition que les axiomes suivants soient vérifiés :

- Pour tout $z_1, z_2 \in G$, $z_1 * z_2$ doit être un élément de G .
- (Associativité) : Pour tout élément $z_1, z_2, z_3 \in G$, $z_1 * (z_2 * z_3) = (z_1 * z_2) * z_3$.
- (Existence de l'identité) : Il existe un unique élément d'identité $e \in G$ pour tout $z \in G$, tel que $z * e = z = e * z$.
- (Existence de l'inverse) : Pour tout $z \in G$, il existe un unique élément inverse $z^{-1} \in G$ tel que $z * z^{-1} = e = z^{-1} * z$.

Définition 1.10 (Groupe de transformations de Lie à un paramètre(voir [14]))

Considérons un ensemble G des transformations suivantes :

$$\Gamma_\varepsilon : \hat{x}_i = f^i(x, u; \varepsilon), \quad \hat{u}^j = g^j(x, u; \varepsilon); \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.84)$$

où ε est un paramètre réel continu dans un voisinage $S \subset \mathbb{R}$.

Sans perte de généralité, $\varepsilon = 0$ correspond à l'élément neutre e . f^i, g^j sont infiniment différentiables par rapport aux variables réelles x et à une fonction analytique de ε . L'ensemble G définit un groupe de Lie à un paramètre de transformations dans \mathbb{R}^{n+m} avec une loi de composition $\phi : S \times S \rightarrow S$ et une fonction analytique des paramètres dans S si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Soient $\Gamma_\varepsilon, \Gamma_{\varepsilon'} \in G$ et $\varepsilon, \varepsilon' \in S$,

$$\Gamma_\varepsilon \Gamma_{\varepsilon'} = \Gamma_{\varepsilon''}, \quad \text{avec } \varepsilon'' = \phi(\varepsilon, \varepsilon') \in S \quad (1.85)$$

2. **L'existence d'identité** : Il existe une identité unique $\Gamma_0 \in G$ définie pour $0 \in S$ et $\phi(\varepsilon, 0) = \varepsilon = \phi(0, \varepsilon)$ tel que

$$\Gamma_\varepsilon \Gamma_0 = \Gamma_\varepsilon = \Gamma_0 \Gamma_\varepsilon. \quad (1.86)$$

3. **L'existence de l'inverse** : Pour tout $\Gamma_\varepsilon \in G$, il existe un unique inverse $\Gamma_{\varepsilon^{-1}} = \Gamma_\varepsilon^{-1} \in G$ pour $\varepsilon^{-1} \in S$ tel que :

$$\Gamma_\varepsilon \Gamma_{\varepsilon^{-1}} = \Gamma_0 = \Gamma_{\varepsilon^{-1}} \Gamma_\varepsilon, \quad (1.87)$$

avec $\phi(\varepsilon, \varepsilon^{-1}) = 0 = \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon)$.

7.1.2 Générateurs infinitésimaux et formules de prolongation

Nous savons que l'algèbre de Lie est couverte par des champs de vecteurs. Par conséquent, puisque nous voulons trouver le groupe de transformations qui transforment les solutions en d'autres solutions, nous pouvons utiliser les champs de vecteurs, appelés générateurs infinitésimaux, pour trouver les groupes de transformations à un paramètre. Maintenant, nous devons

nous concentrer sur la façon pour laquelle nous pouvons calculer explicitement les groupes de transformations à partir d'un générateur infinitésimal.

Considérons un groupe de Lie de transformations à un paramètre :

$$\Gamma_\varepsilon : \hat{x}_i = f^i(x, u; \varepsilon), \quad \hat{u}^j = g^j(x, u; \varepsilon); \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.88)$$

avec ε est le paramètre du groupe S avec l'identité $\varepsilon = 0$ et la loi de composition ϕ . Au voisinage de $\varepsilon = 0$, on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= x_i + \varepsilon(\xi^i(x, u)) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{u}^i &= u^i + \varepsilon(\eta^i(x, u)) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{u}_{i_1}^j &= u_{i_1}^j + \varepsilon(\eta_{i_1}^j(x, u, u_1)) + O(\varepsilon^2), \\ &\vdots \\ \hat{u}_{i_1 i_2 \dots i_k}^j &= u_{i_1 i_2 \dots i_k}^j + \varepsilon(\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^j(x, u, u_1, u_2, \dots, u_{(k)})) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (1.89)$$

avec $i_p = 1, 2, \dots, n, p = 1, 2, \dots, n$ et $u_{i_1}^j = \frac{\partial u^j}{\partial x_{i_1}}, u_{i_1, i_2}^j = \frac{\partial^2 u^j}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots$

$\xi^i(x, u), \eta^j(x, u)$ sont appelés les infinitésimaux du groupe définie par

$$\begin{aligned} \xi^i(x, u) &= \left. \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial f^i(x, u; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \\ \eta^j(x, u) &= \left. \frac{\partial \hat{u}^j}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial g^j(x, u; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \end{aligned} \quad (1.90)$$

également appelées formules de prolongation définies comme suit :

$$\begin{aligned} \eta_i^j &= D_i(\eta^j) - u_i^j D_i(\xi^p), \\ &\vdots \\ \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^j &= D_{i_k}(\eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^j) - u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^j D_{i_k}(\xi^p), \end{aligned} \quad (1.91)$$

où D_i désigne les opérateurs de dérivation totale, définis par

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^j \frac{\partial}{\partial u^j} + u_{i1}^j \frac{\partial}{\partial u_{i1}^j} + \dots \quad (1.92)$$

Les transformations Eq.(1.89) au premier ordre sont les suivantes :

$$\hat{x}^i = x_i + \varepsilon \left(\left. \frac{\partial f^i(x, u; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right), \quad \hat{u}^j = u^j + \varepsilon \left(\left. \frac{\partial g^j(x, u; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right). \quad (1.93)$$

Les transformations Eq.(1.93) sont appelées les transformations infinitésimales associées au générateur infinitésimal de la forme suivante :

$$X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j}. \quad (1.94)$$

On obtient l'algèbre de Lie de notre groupe de symétries de l'équation (1.81) en appliquant la $n^{\text{ième}}$ prolongation du champ de vecteurs X sur (1.81) afin de l'évaluer sur l'ensemble des solutions de notre équation différentielle de départ, où n représente l'ordre le plus élevé. L'algorithme s'écrit comme suit

$$Pr^{(n)} X(\Delta)|_{\Delta=0} = 0, \quad (1.95)$$

avec

$$\Delta := D_t^\alpha - F(x, t, u, u_t, u_{xt}, u_{xxt}, \dots).$$

Cette dernière condition nous permet d'extraire un système d'équations différentielles linéaires d'ordre n pour les coefficients ξ , τ , η , les coefficients qui dépendent uniquement de x et de u . On voit facilement que la condition Eq.(1.95) contient les dérivées de u . En mettant à zéro tous les coefficients de ces dérivées, on obtient de nouvelles équations que nous appelons des équations déterminantes.

Théorème 1.2 (Premier théorème fondamental de Lie)

La construction du groupe de Lie de transformations (1.89) est équivalente à la résolution de l'équation de Lie :

$$\frac{d\hat{x}_i}{d\varepsilon} = \xi^i(\hat{x}, \hat{u}), \quad \frac{\partial \hat{u}^j}{\partial \varepsilon} = \eta^j(\hat{x}, \hat{u}), \quad (1.96)$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\hat{x}_i|_{\varepsilon=0} = x_i, \quad \hat{u}^j|_{\varepsilon=0} = u^j. \quad (1.97)$$

Le premier théorème fondamental de Lie prouve que l'information essentielle pour la caractérisation d'un groupe de Lie de transformations à un paramètre se trouve dans les transformations infinitésimales. Par conséquent, le groupe de Lie des transformations est équivalent à ses générateurs infinitésimaux (également appelés champs vectoriels).

Définition 1.11

Le générateur infinitésimal $X^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) pour un groupe de Lie de transformations à un seul paramètre Eq.(1.88) est défini comme suit :

$$X^{(k)} = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{k \geq 1} \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^j(x, u, \dots, u^{(k)}) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^j}. \quad (1.98)$$

7.1.3 L'invariance

Définition 1.12 (Une fonction invariante)

Une fonction infiniment différentiable $F(x, u)$ est une fonction invariante du groupe de Lie de transformations (1.89) si et seulement si la condition suivante est remplie :

$$F(\hat{x}, \hat{u}) = F(x, u). \quad (1.99)$$

La fonction $F(x, u)$ est appelée fonction invariante sous le groupe de transformations (1.89).

Théorème 1.3

Une fonction $F(x, u)$ est invariante sous un groupe de Lie de transformations (1.89) si et seulement si [14] :

$$XF(x, u) = 0, \quad (1.100)$$

où X est le générateur infinitésimal associé au groupe de transformations (1.89) donné par (1.94).

Définition 1.13 (Critère d'invariance infinitésimale pour les équations différentielles)

Le groupe de Lie des transformations (1.89) avec le générateur (1.94) est admis par l'équation (1.81) si et seulement si $X^{(k)}$ laisse l'Eq.(1.81) invariante, c'est-à-dire que la condition suivante doit être vérifiée [14] :

$$X^{(k)}F(x, u, u_1, \dots, u_{(k)}) = 0, \text{ lorsque } F(x, u, u_1, \dots, u_{(k)}) = 0. \quad (1.101)$$

La condition (1.101) est appelée le critère d'invariance infinitésimale pour l'équation différentielle (1.81).

Théorème 1.4 (Solution invariante)

La fonction $u = \theta(x)$ avec des composantes $u^j = \theta^j(x)$, $j = 1, \dots, m$, est une solution invariante de l'équation (1.81) admettant le groupe de transformations (1.89) avec le générateur (1.94) si et seulement si les deux axiomes suivants sont vérifiés [14] :

1. $u = \theta(x)$ satisfait l'équation (1.81).
2. $u^j = \theta^j(x)$ est une surface invariante de (1.94) pour tout j .

La deuxième condition implique que $X(u^j - \theta^j) = 0$ lorsque $u = \theta(x)$. Par conséquent, on obtient ce qui suit :

$$\xi^i(x, \theta(x)) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \eta^i(x, \theta(x)). \quad (1.102)$$

Ces conditions sont appelées les conditions de surface invariantes pour les solutions invariantes de l'équation (1.81). Les conditions de surface invariantes (1.102) peuvent être résolues en résolvant les équations caractéristiques associées suivantes :

$$\frac{dx_1}{\xi^1(x, u)} = \frac{dx_2}{\xi^2(x, u)} = \dots = \frac{dx_n}{\xi^n(x, u)} = \frac{du^1}{\eta^1(x, u)} = \frac{du^2}{\eta^2(x, u)} = \dots = \frac{du^m}{\eta^m(x, u)}. \quad (1.103)$$

7.1.4 Algèbres de Lie et classification des sous-algèbres

Définition 1.14 (Crochets de Lie)

Considérons un groupe de transformations à r -paramètres avec des générateurs infinitésimaux

X_k , $k = 1, 2, \dots, r$, alors le crochet de Lie (également appelé commutateur) de deux générateurs quelconques V_1, V_2 est un générateur infinitésimal qui satisfait :

$$[V_1, V_2] = V_1 V_2 - V_2 V_1. \quad (1.104)$$

Définition 1.15 (Algèbre de Lie)

Une algèbre de Lie G est un espace vectoriel sur un corps (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) avec une opération binaire donnée par :

$$[.,.]: G \times G \longrightarrow G \quad (1.105)$$

satisfaisant les axiomes suivants

1. **Bilinéarité :**

$$[c_1 X_1 + c_2 X_2, X_3] = c_1 [X_1, X_3] + c_2 [X_2, X_3], \quad [X_1, c_2 X_2 + c_3 X_3] = c_2 [X_1, X_2] + c_3 [X_1, X_3], \quad (1.106)$$

pour les constantes $c_1, c_2, c_3 \in (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

2. **Antisymétrie :**

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]. \quad (1.107)$$

3. **Identité de Jacobi :**

$$[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0. \quad (1.108)$$

7.2 Méthodologie

La procédure générale pour l'analyse de symétrie de Lie d'une équation différentielle est la suivante :

1. On considère le groupe de Lie à un paramètre des transformations (1.88) qui laisse l'équation (1.81) invariante.
2. Obtenir le critère d'invariance pour l'équation considérée (1.81).
3. Substituer les prolongements et égaliser les coefficients des diverses dérivées partielles des variables dépendantes à zéro, ce qui donne un système surdéterminé d'équations différentielles linéaires des infinitésimaux ξ_i, η_j . Ce système est appelé l'ensemble des équations déterminantes.
4. Intégrer les équations déterminantes pour obtenir les infinitésimaux ξ_i, η_j impliquant certaines constantes arbitraires ou fonctions arbitraires.
5. Résoudre les équations caractéristiques correspondantes obtenues à partir des champs de vecteurs associés pour trouver les variables dépendantes u en fonction de nouvelles $n - 1$ variables indépendantes.
6. Transformer l'équation (1.81) en une equation réduite de nouvelles variables.

8. Lois de conservation

8.1 Les opérateurs fondamentaux et leurs relations

Le concept de lois de conservation joue un rôle primordial dans l'étude des équations différentielles. Les lois de conservation des équations différentielles sont la formulation mathématique des lois physiques telles que la conservation de l'énergie et la conservation de la quantité de mouvement. Une loi de conservation d'une équation de la forme (1.81) est un n-tuples (C_1, C_2, \dots, C_n) satisfaisant l'expression de divergence suivante :

$$\sum_{i=1}^n D_i C^i(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0. \quad (1.109)$$

La loi (1.109) est appelée une loi de conservation locale à condition que C_i soit libre de termes intégraux.

Les composantes C_i sont appelées les vecteurs conservés de la loi de conservation, et la dérivée d'ordre supérieur de vecteurs conservés C_i est appelée l'ordre d'une loi de conservation. Pour $u(x, t)$, la loi de conservation est la suivante :

$$D_t(C^t) + D_x(C^x) = 0, \quad (1.110)$$

le vecteur C_t correspondant à la variable temporelle t est appelé densité conservée.

Il existe de nombreuses approches pour construire des lois de conservation pour les équations différentielles. En 1918, Emmy Noether [67] a prouvé un théorème sur l'application des symétries continues pour prouver l'existence et le calcul des lois de conservation. Le théorème de Noether est une procédure systématique pour déterminer les lois de conservation des EDP ayant une fonction lagrangienne. Il existe quelques méthodes pour trouver des lois de conservation qui ne dépendent pas de la connaissance du Lagrangien. Anco et Bluman [8] ont développé une méthode directe pour déterminer les lois de conservation des EDP. Kara et Mahomed [95] ont donné une technique pour obtenir des lois de conservation en utilisant des Lagrangiens partiels. Ibragimov [38] a proposé une formule utilisant les symétries dans laquelle l'EDP et l'équation adjointe sont considérées comme un système. Dans ce travail, la méthode d'Ibragimov est utilisée pour construire les lois de conservation. Récemment, de nombreux articles de recherche sont consacrés au calcul des lois de conservation pour les équations différentielles [1, 3, 13]. Pour plus de détails sur les méthodes et les applications des lois de conservation, le lecteur intéressé est prié de se référer à Refs. [12, 39, 40, 70, 91].

Malgré l'importance des lois de conservation pour l'étude de l'intégrabilité, des propriétés intercalaires, et pour prouver l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles [39, 70], les lois de conservation pour les EDPs d'ordre fractionnaire ne sont pas largement discutées. Récemment, les opérateurs de Noether généralisés fractionnaires [96] pour les EDPs fractionnaires

temporelles n'ayant pas de Lagrangiens ont été proposés afin de trouver leurs lois de conservation en utilisant le nouveau théorème de conservation [40]. Les lois de conservation des EDPs d'ordre fractionnaire ne sont discutées que dans quelques articles [97–101].

Symétrie de Lie des équations différentielles partielles fractionnaires

Dans cette thèse, nous traitons la méthode de groupes de Lie agissant sur l'espace des variables indépendantes et dépendantes des équations différentielles fractionnaires. Cette méthode a été introduite à l'origine par Sophue Lie [70], il a établi que l'ordre d'une équation différentielle ordinaire peut être réduit si elle est invariante sous un groupe de symétrie à un paramètre et pour une équation différentielle partielle, l'invariance sous un groupe continu de transformations conduit directement à la superposition des solutions en termes de transformations. L'analyse des symétries n'est pas seulement qu'une simple procédure permettant de trouver des solutions, les symétries apportent également des moyens systématiques pour une compréhension approfondie des phénomènes physiques et de leurs équations associées. Enfin, la théorie des groupes de Lie est un outil essentiel dans la résolution et l'analyse des équations non-linéaires. Lorsque les symétries d'une équation sont connues, toutes les autres techniques de résolution d'équations différentielles, comme l'analyse numérique, peuvent être appliquées plus efficacement.

Gazizov et al. [30, 31] sont les premiers à entreprendre des études rigoureuses sur les symétries admises par des équations différentielles d'ordre fractionnaires liées à : Riemann-Liouville et Dérivée de Caputo [35]. Pour plus de détails sur la méthode du groupe de Lie, divers théorèmes, leurs preuves et d'autres concepts, nous renvoyons le lecteur à Olver [36], Bluman et Cole [16], [1, 33, 56, 97].

Le chapitre précédent visait à expliquer et illustrer en détails la méthode développée par Lie afin de trouver des symétries d'équations différentielles d'ordre entier. Dans toute la suite de ce chapitre, nous introduirons tout d'abord les concepts pertinents du groupe de Lie de transformations, puis nous fournirons une description algorithmique des techniques qui sont appliquées dans les prochains chapitres pour chercher les groupe de symétries d'une classe d'équations différentielles d'ordre fractionnaires, ce qui nous amène à obtenir nos principaux résultats de ce travail.

1. La procédure générale de la méthode de symétrie de Lie pour les équations différentielles fractionnaires

Dans cette section, nous présentons de brefs détails de la symétrie de Lie pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires (EDPF) de la forme suivante

$$D_t^\alpha u = F(x, t, u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, u_{xxt}, \dots), \quad \alpha > 0. \quad (2.1)$$

Supposons que l'équation Eq.(2.1) est invariante sous une transformation continue à un paramètre ε , la construction du groupe de symétrie est équivalente à la détermination de ses transformations infinitésimales :

$$\hat{x} = x + \varepsilon \xi(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$\hat{t} = t + \varepsilon \tau(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$\hat{u} = u + \varepsilon \eta(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$D_t^\alpha \hat{u} = D_t^\alpha u + \varepsilon \eta_\alpha^0(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \eta^x(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial^2 \hat{x} \partial \hat{t}} = \frac{\partial u}{\partial^2 x \partial t} + \varepsilon \eta^{xxt}(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

⋮

où $\varepsilon \ll 1$ est un paramètre de groupe et ξ , η et τ sont les infinitésimaux des transformations (3.3) pour les variables dépendantes et indépendantes. Les expressions explicites de η^x , η^{xxt} sont données par

$$\begin{aligned} \eta^x &= D_x(\eta) - u_x D_x(\xi) - u_t D_x(\tau), \\ \eta^t &= D_t(\eta) - u_x D_t(\xi) - u_t D_t(\tau), \\ \eta^{xt} &= D_x(\eta^t) - u_{xt} D_x(\xi) - u_{tt} D_x(\tau), \\ \eta^{xx} &= D_x(\eta^{xx}) - u_{xxx} D_x(\xi) - u_{xxy} D_x(\xi) - u_{xxt} D_x(\tau), \\ \eta^{xxt} &= D_x(\eta^{xt}) - u_{xxx} D_x(\xi) - u_{xxt} D_x(\tau), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3)$$

où D_x et D_t sont les dérivées totales par rapport à x et t respectivement, qui sont définies comme suit :

$$D_{x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \dots, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.4)$$

avec $u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$, $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ etc.

Le générateur infinitésimal X est représenté par l'expression suivante :

$$X = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (2.5)$$

Selon [30], le générateur infinitésimal X satisfait la condition d'invariance suivante de l'équation (2.1) :

$$Pr^{(n)} X(\Delta) |_{\Delta=0} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

avec

$$\Delta := D_t^\alpha u - F(x, t, u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, u_{xtt} \dots). \quad (2.7)$$

Puisque la limite inférieure de l'intégrale de RL est fixée, alors la structure de la dérivée de Riemann-Liouville doit être invariante sous les transformations (3.3). La condition d'invariance donne

$$\tau(x, t, u) |_{t=0} = 0. \quad (2.8)$$

La α -ème infinitésimale prolongé liée à la dérivée temporelle fractionnaire de Riemann-Liouville (voir [30, 31]) peut s'écrire comme suit :

$$\eta_\alpha^0 = D_t^\alpha(\eta) + \xi D_t^\alpha(u_x) - D_t^\alpha(\xi u_x) + D_t^\alpha(D_t(\tau)u) - D_t^{\alpha+1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1}(u), \quad (2.9)$$

où l'opérateur de dérivée fractionnaire totale est désigné par D_t^α .

Ici, pour rendre l'équation (2.9) plus générale, la règle de Leibnitz généralisée a été présentée [62] et peut s'écrire comme suit :

$$D_t^\alpha((f(t)g(t))) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n}(f(t)) D_t^n g(t), \quad \alpha > 0, \quad (2.10)$$

avec

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n-\alpha)(-1)^{n-1} \alpha}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+1)}.$$

Maintenant, en utilisant la règle de Leibnitz comme présentée ci-dessous, nous obtenons

$$\eta_\alpha^0 = D_t^\alpha(\eta) - \alpha D_t(\tau) D_t^\alpha u - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) D_t^{\alpha-n} u_x - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} D_t^n(\tau) D_t^{\alpha-n}(u). \quad (2.11)$$

Alors, la règle de la chaîne pour la fonction composée [70] peut s'écrire comme suit

$$\frac{d^n \phi(h(t))}{dt^n} = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^k \binom{\alpha}{n} \frac{1}{k!} [-h(t)]^r \frac{d^n}{dt^n} [(h(t))^{k-r}] \frac{d^k \phi(h)}{dh^k}. \quad (2.12)$$

En appliquant cette règle et la règle de Leibnitz généralisée avec $f(t) = 1$, on a

$$D_t^\alpha(\eta) = \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha} + \eta_u \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^n} D_t^{\alpha-n}(u) + \mu, \quad (2.13)$$

où

$$\mu = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n \sum_{k=2}^m \sum_{r=0}^{k-1} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{m} \binom{k}{r} \frac{1}{k!} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} (-u)^r \frac{\partial^m}{\partial t^m} (u^{k-r}) \frac{\partial^{n-m+k} \eta}{\partial x^{n-m} \partial u^k}.$$

Par conséquent, la α -ème infinitésimale prolongée donnée dans (2.11) devient,

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha}^0 &= \frac{\partial^{\alpha} \eta}{\partial t^{\alpha}} + (\eta_u - \alpha D_t(\tau)) \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} - u \frac{\partial^{\alpha} \eta_u}{\partial t^{\alpha}} + \mu + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{n} \frac{\partial^n \eta_u}{\partial t^n} - \binom{\alpha}{n+1} D_x^{n+1}(\tau) \right] D_t^{\alpha-n}(u) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) D_t^{\alpha-n}(u_x). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Théorème 2.1 ([70])

Une solution $u = \theta(x, t)$ de l'Eq.(2.1) est une solution invariante si et seulement si

(i) $u = \theta(x, t)$ est une surface invariante, autrement dit,

$$X\theta = 0 \iff (\xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \zeta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u})\theta = 0.$$

(ii) $u = \theta(x, t)$ est une solution de l'EDPF (2.1).

Remarque 2.1

Dans l'expression (2.14), les expressions μ_i deviennent nulles si les η_i sont linéaires par rapport aux variables dépendantes u^r .

2. Lois de conservation pour les équations différentielles partielles d'ordre fractionnaires

Considérons une équations différentielles partielles de n variables indépendantes $x^i, i = (1, 2, \dots, n)$ et N variables dépendantes $u^{\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, N$ données par l'équation (1.81).

Définition 2.1 (Opérateur d'Euler-Lagrange)

L'opérateur d'Euler-Lagrange, pour chaque α est désigné par

$$\frac{\delta}{\delta u^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + \sum_{s \geq 1} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^{\alpha}}, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (2.15)$$

Définition 2.2 (Lagrangien)

S'il existe une fonction $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(s)}), s \neq p$, avec p l'ordre de l'équation (1.81), tel que

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^{\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (2.16)$$

alors \mathcal{L} est appelé un Lagrangien de l'équation (1.81). L'équation (2.16) est connue sous le nom de l'équation d'Euler-Lagrange.

Définition 2.3 (Opérateur de Lie-Backlund)

L'opérateur de Lie-Backlund est donné par

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad \xi^i, \eta^\alpha \in \mathcal{A}, \quad (2.17)$$

où \mathcal{A} est l'espace des fonctions différentielles. L'opérateur (2.17) est une forme abrégée de la somme formelle infinie

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s \geq 1} \xi_{i_1 \dots i_s}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^\alpha}, \quad (2.18)$$

où les coefficients supplémentaires sont déterminés d'une manière unique en utilisant les formules de prolongation

$$\xi_i^\alpha = D_i(W^\alpha) + \xi^j u_{ij}^\alpha, \quad \xi_{i_1 \dots i_s}^\alpha = D_{i_1 \dots i_s}(W^\alpha) + \xi^j u_{i_1 \dots i_s j}^\alpha, \quad s > 1, \quad (2.19)$$

avec W^α est la fonction caractéristique de Lie donnée par

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^i u_j^\alpha. \quad (2.20)$$

On peut écrire l'opérateur de Lie-Backlund (2.18) sous la forme caractéristique suivante

$$X = \xi_i D_i + W^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s \geq 1} D_{i_1 \dots i_s}(W^\alpha) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^\alpha}. \quad (2.21)$$

2.1 Théorème de Noether

Le théorème de Noether est l'un des théorèmes les plus importants et les plus beaux de la physique qui exprime le principe général relatif aux groupes de symétries et les lois de conservation.

Définition 2.4 (opérateur de Noether)

Les opérateurs de Noether associés à un opérateur de symétrie Lie-Backlund X sont donnés par

$$\mathcal{N}^i = \xi_i + W^\alpha \frac{\delta}{\delta u_i^\alpha} + \sum_{s \geq 1} D_{i_1 \dots i_s}(W^\alpha) \frac{\delta}{\delta u_{i_1 \dots i_s}^\alpha}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (2.22)$$

où les opérateurs d'Euler-Lagrange par rapport aux dérivées de u sont obtenus en remplaçant u par les dérivées correspondantes. Par exemple,

$$\frac{\delta}{\delta u_i^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \sum_{s \geq 1} (-1)^s D_{i_1 \dots i_s}(W^\alpha) \frac{\delta}{\delta u_{i_1 \dots i_s}^\alpha}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (2.23)$$

et les opérateurs d'Euler-Lagrange, Lie-Backlund et Noether sont reliés par l'opérateur d'identité :

$$X + D_i(\xi^i) = W^\alpha \frac{\delta}{\delta u^\alpha} + D_i \mathcal{N}^i. \quad (2.24)$$

Définition 2.5 (Symétrie de Noether)

Un opérateur Lie-Backlund X de la forme (2.17) est appelée une symétrie de Noether correspondant à un Lagrangien $\mathcal{L} \in \mathcal{A}$, s'il existe un vecteur $B^i = (B_1, \dots, B_n)$, $B^i \in \mathcal{A}$ tel que

$$X(\mathcal{L}) + \mathcal{L} D_i(\xi^i) = D_i(B^i). \quad (2.25)$$

Si $B_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), alors X est appelée une symétrie de Noether stricte correspondant à un lagrangien $\mathcal{L} \in \mathcal{A}$.

Théorème 2.2 (Théorème de Noether)

Pour tout générateur de symétrie de Noether X associé à un lagrangien $\mathcal{L} \in \mathcal{A}$ donné, il correspond un vecteur

$C = (C_1, \dots, C_n)$, $C_i \in \mathcal{A}$, donné par

$$C^i = \mathcal{N}^i(\mathcal{L}) - B^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.26)$$

qui est un vecteur conservé des équations différentielles d'Euler-Lagrange (2.16).

Dans l'approche de Noether, nous trouvons le lagrangien \mathcal{L} et l'équation (2.25) a été utilisée pour déterminer les symétries de Noether. Ensuite, l'équation (2.26) donnera les vecteurs conservés de Noether correspondants.

2.2 Le nouveau théorème de conservation

Un nouveau théorème de conservation prôné par Ibragimov [40] fournit la procédure pour calculer les vecteurs conservés associés à toutes les symétries des équations différentielles partielles (1.81).

Définition 2.6 (Équations adjointes)

Considérons l'équation différentielle partielle d'ordre k donné par (1.81), soit

$$F_\alpha^*(x, u, v, \dots, v_p, u_p) = \frac{\delta(v^\beta F_\beta)}{\delta u^\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (2.27)$$

où $v = (v_1, \dots, v_m)$ sont de nouvelles variables dépendantes, $v = v(x)$ et définissons l'équation adjointe au Eq.(1.81) par

$$F_\alpha^*(x, u, v, \dots, v_p, u_p) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (2.28)$$

Théorème 2.3

Toute équation différentielle partielle (1.81) d'équation adjointe (2.28) a un Lagrangien

$$\mathcal{L} = v^\beta F_\beta^*(x, u, v, \dots, v_p, u_p). \quad (2.29)$$

Théorème 2.4 (théorème d'Ibragimov)

Toute symétrie infinitésimale (point de Lie, Lie- Backlund) donnée par (2.17) de l'équation (1.81) conduit à une loi de conservation $D_i(C^i) = 0$ pour l'équation (1.81) et (2.28). Les composantes des vecteurs conservées sont données par la formule

$$C^t = \tau \mathcal{L} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k D_t^{\alpha-1-k}(W) D_t^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 D_t^\alpha u} - (-1)^n J(W, D_t^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 D_t^\alpha u}), \quad (2.30)$$

où $J(\cdot)$ est défini par

$$J(f, g) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \int_t^T \frac{f(\tau, x, y) g(\theta, x, y)}{(\theta - \tau)^{\alpha+1-n}} d\theta d\tau. \quad (2.31)$$

Et les autres composants C^i sont définis comme

$$C^i = \xi^i \mathcal{N} + W^\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha} - D_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha} \right) + D_j D_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} \right) - \dots \right] - D_j (W^\alpha) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha} - D_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} \right) + \dots \right] + D_j D_k (W^\alpha) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha} - \dots \right], \quad (2.32)$$

où W^α est la fonction caractéristique de Lie donnée par (2.20) et \mathcal{L} est le lagrangien formel (2.29) (Voir [38, 40]).

Symétrie de Lie de l'équation 'Reguritized Long Wave' fractionnaire

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'application de la méthode classique du groupe de Lie à l'une des plus célèbres familles d'équations d'évolution différentielles non-linéaires apparaissant en physique qui est 'Reguritized Long Wave' (RLW) d'ordre fractionnaire :

$$D_t^\alpha u + u_x - \frac{a}{2} u u_x - b u_{xxt} = 0, \quad (3.1)$$

où D_t^α est la dérivée fractionnaire d'ordre $0 < \alpha \leq 1$, a et b sont des constantes arbitraires.

L'équation 'RLW' appartient à une classe d'équations d'évolution non linéaires qui fournissent de bons modèles pour prédire une variété de phénomènes physiques. L'équation a été introduite par Peregrine [76] pour décrire le comportement du développement d'un alésage ondulé. L'équation 'RLW' joue un rôle important dans l'étude des ondes dispersives non linéaires en raison de sa description d'un grand nombre de phénomènes physiques importants, tels que les ondes d'eau peu profonde et les ondes de plasma acoustique ionique. Dans une autre étude Benjamine et al. [20] ont utilisé l'équation 'RLW' pour expliquer une grande classe de problèmes du monde réel au lieu de l'équation fameuse KdV. Elle a été étudiée par de nombreux chercheurs tels que El-Danaf et al. [26], Soltanalizadeh et Yildirim [80], Hossieni et al. [34], etc. La version fractionnaire de ce modèle a notamment été étudiée par [7, 42, 43, 93].

De nombreuses méthodes ont été proposées pour résoudre les équations non linéaires, et la méthode de symétrie de Lie reste parmi les méthode puissante pour résoudre ce genre d'équations à la fois dans le cadre classique et dans le cadre fractionnaire. L'application des symétries de Lie est l'une des techniques les plus efficaces pour résoudre les équations différentielles partielles non-linéaire, seuls quelques chercheurs ont appliqué la méthode du groupe Lie sur les équations différentielles fractionnaires, ce qui nous a motiver d'appliquer la méthode de symétrie de Lie sur l'équation fractionnaire 'RLW'.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : La section 2 s'intéresse à l'application de la

méthode de Lie pour le modèle RLW d'ordre entier afin d'obtenir ses solutions invariantes. Les infinitésimaux du groupe de transformations qui laisse l'équation 'RLW' invariante sont obtenus dans la section 3. La sous-section 3.1 est entièrement consacrée à la détermination des formes réduites des équations différentielles ordinaires (ODEs) et de leurs solutions exactes. La sous-section 3.2 présente la construction les solutions analytiques explicites en séries entières. Certaines graphes représentatifs des solutions obtenues sont présentées dans la section 3.3. Enfin, une brève conclusion est donnée dans la section finale.

2. Symétrie de Lie de l'équation RLW d'ordre entier

2.1 Points de Lie de l'équation RLW d'ordre entier

L'équation 'Reguritized Long Wave' à coefficients non constants est définie par :

$$u_t + f(t)u_x + g(t)uu_x + h(t)u_{xxt} = 0, \quad (3.2)$$

Considérons le groupe de Lie de transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \varepsilon\xi(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{t} &= t + \varepsilon\tau(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{u} &= u + \varepsilon\eta(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $\varepsilon \in \mathbb{R}$ est un paramètre de groupe et ξ , η et τ sont les infinitésimaux des transformations (3.3) pour les variables dépendantes et indépendantes.

D'après la théorie de Lie, l'opérateur infinitésimal suivant caractérise le groupe de Lie à un seul paramètre :

$$X = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.4)$$

Les coefficients du générateur infinitésimal (3.4), à savoir ξ , τ et η remplissent les equations déterminantes suivantes :

$$\tau_u = 0, \quad \xi_u = 0, \quad (3.5)$$

$$\eta_{uu} = 0, \quad \tau_x = 0, \quad (3.6)$$

$$\xi_t = 0, 2\eta_{xu} - \xi_{xx} = 0, \quad (3.7)$$

$$u^q f(t)\eta_x + g(t)u_{xx} + \eta_t + h(t)\eta_{txx} = 0, \quad (3.8)$$

$$\tau g_t + (\tau_t - 2\xi_x)g(t) - g(t)h(t)\eta_{xxu} + h(t)\eta_{tu} = 0, \quad (3.9)$$

$$\tau h(t) - 2h(t)\xi_x^2 - h(t)^2\eta_{xxu} = 0, \quad (3.10)$$

$$u^q \tau f_t + (qu^{q-1} \eta + u^q \tau_t - u^q \xi_x^2) f(t) + (2\eta_{xu} - \xi_{xx}^2) g(t) - u^q f(t) h(t) \eta_{xxu} + 2h(t) \eta_{txu} = 0. \quad (3.11)$$

Nous exigeons que les éléments arbitraires soient non nuls, donc la manipulation des Eqs (3.5) - (3.11) donne les formes suivantes des coefficients de générateur infinitésimal :

$$\xi = c_1 x + c_3, \quad \tau = \tau(t), \quad \eta = (c_3 + \frac{1}{2} c_2) u + c_4, \quad (3.12)$$

où c_1 , c_2 , c_3 et c_4 sont des constantes arbitraires. Lors de la substitution de l'Eq.(3.12) en Eqs. (3.5) - (3.11) nous obtenons les relations suivantes :

$$2c_2 h(t) + \tau_t h_t = 0, \quad (3.13)$$

$$\tau_t (f_t + u g_t) + f(t) (\tau_t - c_2) + g(t) \left[c_4 + u \left(c_1 - \frac{1}{2} c_2 + \tau_t \right) \right] = 0. \quad (3.14)$$

Supposons que $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$ sont des fonctions lisses arbitraires, à partir d'Eqs.(3.13) et (3.14) nous avons

$$\tau = 0, \quad \tau_t - c_2 = 0, \quad c_4 + u \left(c_1 - \frac{1}{2} c_2 + \tau_t \right) = 0. \quad (3.15)$$

Selon (3.15) les coefficients de générateur infinitésimal (3.12) deviennent $\xi = 0$, $\xi_3 = 0$ et $\eta = 0$. En analysant la classification des Éqs. (3.13) et (3.14), nous divisons l'éq. (3.14) en mettant à zéro les diverses puissances des dérivées de u . Ainsi, en obtient le système suivant :

$$2c_2 h(t) - \tau_t h_t = 0, \quad (3.16)$$

$$\left(c_1 - \frac{1}{2} c_2 + \tau_t \right) g(t) + \tau(t) g_t = 0, \quad (3.17)$$

$$\left(c_1 - \frac{1}{2} c_2 + \tau_t \right) g(t) + \tau(t) g_t = 0, \quad (3.18)$$

$$c_4 g(t) + (\tau_t - c_2) f(t) + \tau(t) f_t = 0, \quad (3.19)$$

puisque $g(t) \neq 0$, nous devons avoir $\tau \neq 0$ de sorte que nous obtenions la prolongation de l'algèbre de Lie. Ainsi, l'éq. (4.27) est réécrit comme suit :

$$\frac{g_t}{g} = \frac{c_1 - \frac{1}{2} c_2 + \tau_t}{\tau} = k, \quad (\text{où } k \text{ est une constante}). \quad (3.20)$$

Nous étudions l'équation (3.20) pour deux cas : $k \neq 0$ et $k = 0$. **cas 1 : $k \neq 0$** La solution de l'Eq. (3.20) est donnée par :

$$g(t) = g_0, \quad \tau(t) = \frac{c_2 - 2c_1}{2k} + c_5 e^{-kt}, \quad (3.21)$$

où $g_0 \neq 0$ et c_5 sont des constantes arbitraires.

Afin de préciser les formes des autres éléments arbitraires (3.20) est substitué dans les Éq. (3.17) et (3.19). Si $c_1 \neq 0$, alors $h(t)$ et $f(t)$ prendre les formes suivantes :

$$h(t) = h_0 [e^{kt} (\alpha - 2) + 2k\gamma]^{\frac{4\alpha}{\alpha-2}}, \quad (3.22)$$

$$f(t) = \frac{e^{kt}[f_0(\alpha+2)(e^{kt}(\alpha-2)+2k\gamma)^{\frac{(\alpha+2)}{(\alpha-2)}}2\beta g_0]}{\alpha+2}, \quad \alpha \neq -2, 2, \quad (3.23)$$

où $\alpha = \frac{c_2}{c_1}, \beta = \frac{c_4}{c_1}, \gamma = \frac{c_5}{c_1}$ et $h_0 \neq 0, f_0 \neq 0$ sont des constantes arbitraires. Les coefficients de générateur infinitésimal (3.12) deviennent :

$$\tau = \frac{c_1(\alpha-2)}{2k} + c_1\gamma e^{-kt}, \quad \xi = \alpha c_1 x + c_3, \quad \eta = \frac{1}{2}[2\beta + (\alpha+2)u]c_1. \quad (3.24)$$

Puisque ∂_x est le générateur admis, sans perte de généralité, on suppose que $c_3 = 0$. Par conséquent, le générateur infinitésimal associé

$$X_2 = [2(k\gamma e^{-kt} - 1) + \alpha]\partial_t + 2\alpha kx\partial_x + k[2\beta + (\alpha+2)u]\partial_u. \quad (3.25)$$

On suppose que $\alpha = -2$, alors on a :

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0(k\gamma - 2e^{kt})^2, \\ f(t) &= e^{kt}f_0 + \frac{1}{2}e^{kt}\beta \ln(k\gamma - 2e^{kt})g_0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ainsi,

$$X_2 = (k\gamma e^{-kt} - 2)\partial_t - 2kx\partial_x + k\beta\partial_u. \quad (3.27)$$

Ensuite, on suppose que $\alpha = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 e^{\frac{4e^{kt}}{k\gamma}}, \quad \gamma \neq 0, \\ f(t) &= e^{kt + \frac{2e^{kt}}{k\gamma}}f_0 + \frac{1}{2}e^{kt}\beta g_0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Le générateur infinitésimal associé :

$$X_2 = \gamma e^{-kt}\partial_t + 2x\partial_x + (\beta + 2u)\partial_u. \quad (3.29)$$

On suppose que $c_1 = 0$, d'après (3.21), on obtient $\tau(t) = c_5 e^{-kt} + c_2/2k$. Alors pour $c_2 \neq 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0(e^{kt} + 2k\mu)^4, \\ f(t) &= e^{kt}[2\lambda g_0 - (e^{kt} + 2k\mu)f_0], \end{aligned} \quad (3.30)$$

où $\lambda = \frac{c_4}{c_2}$ et $\mu = \frac{c_5}{c_2}$ sont des constantes arbitraires. Alors le générateur infinitésimal associé :

$$X_2 = 1 + 2\mu k e^{-kt}\partial_t + 2kx\partial_x + k(2\lambda + u)\partial_u. \quad (3.31)$$

Pour $c_2 = 0$, on obtient

$$h(t) = h_0, \quad (3.32)$$

$$f(t) = f_0 e^{kt} - \frac{e^{2kt}\nu g_0}{k}, \quad (3.33)$$

où $\nu = \frac{4}{5}$ est une constante arbitraire. Alors le générateur infinitésimal associé :

$$X_2 = e^{-kt}\partial_t + \nu\partial_u. \quad (3.34)$$

Cas 2 : $k = 0$. Résolvons le problème (4.29), on a :

$$g(t) = g_0, \quad \tau(t) = c_6 + \frac{1}{2}t(c_2 - 2c_1), \quad (3.35)$$

où $g_0 \neq 0$ et c_6 sont des constantes arbitraires. Supposons que $c_1 \neq 0$, alors $h(t)$ et $f(t)$ prennent les formes

$$h(t) = \bar{h}_0 [(\alpha - 2)t + 2\rho]^{\frac{4\alpha}{\alpha-2}}, \quad (3.36)$$

$$f(t) = \frac{\bar{h}_0(\alpha + 2)[(\alpha - 2)t + 2\rho]^{\frac{\alpha+2}{\alpha-2}} + 2\beta\bar{g}_0}{\alpha + 2}, \quad \alpha \neq -2.2, \quad (3.37)$$

où $\rho c_6/c_1$ et $\bar{h}_0 \neq 0$, $\bar{f}_0 \neq 0$ sont des constantes arbitraires. Alors le générateur infinitésimal associé :

$$X_2 = [(\alpha - 2)t + 2\rho]\partial_t + 2\alpha x\partial_x + [2\beta + (\alpha + 2)u]\partial_u. \quad (3.38)$$

Soit $\alpha = -2$, alors on obtient

$$h(t) = \bar{h}_0(2t - \rho)^2, \quad (3.39)$$

$$f(t) = \bar{f}_0 + \frac{1}{2}\beta\bar{g}_0 \ln(2t - \rho). \quad (3.40)$$

Par conséquent, le générateur infinitésimal associé :

$$X_2 = (\rho - 2t)\partial_t - 2x\partial_x + \beta\partial_u. \quad (3.41)$$

Deuxièmement, soit $\alpha = 2$. Par suite :

$$h(t) = \bar{h}_0 e^{4t/\rho}, \quad \rho \neq 0, \quad (3.42)$$

$$f(t) = \bar{f}_0 e^{2t/\rho} + \frac{1}{2}\beta\bar{g}_0. \quad (3.43)$$

Par conséquent, le générateur infinitésimal associé :

$$X_2 = \rho\partial_t + 2x\partial_x + (\beta + 2u)\partial_u. \quad (3.44)$$

Si $c_1 = 0$, d'après (3.35) on a $\tau(t) = c_6 + c_2 t/2$. Alors on a les formes suivants de $f(t)$ et $h(t)$:

$$h(t) = \bar{h}_0(t + 2m)^4, \quad (3.45)$$

$$f(t) = \bar{f}_0(t + 2m) + 2\lambda\bar{g}_0, \quad (3.46)$$

où : $m = c_6/c_2$, ($c_2 \neq 0$) une constante arbitraire. Le générateur infinitésimal associée :

$$X_2 = (t + 2m)\partial_t + 2x\partial_x + (u + 2\lambda)\partial_u. \quad (3.47)$$

Pour $c_2 = 0$ on obtient les formes de $f(t)$ et $h(t)$:

$$h(t) = \bar{h}_0, \quad (3.48)$$

$$f(t) = \bar{f}_0 - t\omega\bar{g}_0, \quad (3.49)$$

où : $\omega = c_4/c_6$, ($c_6 \neq 0$) une constante arbitraire. Le générateur infinitésimal associée :

$$X_2 = \partial_t + \omega\partial_u. \quad (3.50)$$

2.2 Solutions invariantes de l'équation RLW d'ordre entier

la recherche de solutions invariantes revient à chercher des solutions invariantes sous la combinaison linéaire $k_1 X_1 + k_2 X_2$, où k_1 et k_2 sont des constantes. C'est-à-dire, nous considérons les cas : X_1 et cX_1 pour $c = k_1/k_2$, ($K_2 \neq 0$). Toutefois, pour obtenir des solutions non triviales, seul le cas $cX_1 + X_2$ est traité. Maintenant, avec un exemple interprétatif, nous construisons les solutions exactes de type onde de l'équation avec les paramètres donnés par l'Eqs. (3.48) et (3.49). Dans ce cas, la combinaison linéaire $cX_1 + X_2$ est :

$$\partial_t + c\partial_x + \omega\partial_u, \quad (3.51)$$

où c représente la vitesse de la vague.

Si $c \neq 0$, alors l'équation caractéristique pour (48) donne la solution invariante

$$u(t, x) = \omega + tF(z), \quad (3.52)$$

où $z = x - ct$ La substitution de l'Eq(3.52) dans l'équation RLW conduit à l'équation réduite :

$$\omega + [\bar{g}_0 F(z) + \bar{f}_0 - c]F'(z) - \bar{h}_0 c F'''(z) = 0. \quad (3.53)$$

Intégrons l'éq. (3.53) par rapport à z donne :

$$\omega z + \left[\frac{\bar{g}_0}{2} F(z) + \bar{f}_0 - c\right]F(z) - \bar{h}_0 c F''(z) = C_1, \quad (3.54)$$

où C_1 est une constante d'intégration. On intègre l'Eq. (3.54) par rapport à F :

$$C_2 + (\omega z - C_1)F - \left(\frac{c - \bar{f}_0}{2}\right)F^2 + \frac{\bar{g}_0}{6}F^3 = h_0 c F^2, \quad (3.55)$$

où C_2 est une constante.

Ainsi, on obtient la solution implicite de l'Eq. (3.53) de la forme :

$$C_3 + \int \frac{dF}{\sqrt{\frac{1}{h_0 c} \left[C_2 + (\omega z - c\omega t - C_1)F - \left(\frac{c - \bar{f}_0}{2}\right)F^2 + \frac{\bar{g}_0}{6}F^3 \right]}} = x - ct, \quad (3.56)$$

où C_3 est une constante arbitraire.

Ensuite, on suppose que $c = 0$, la solution invariante est de la forme (3.52) avec $z = x$. L'équation réduite est donnée par :

$$\omega[\bar{g}_0 F_x + \bar{f}_0]F'(x) = 0. \quad (3.57)$$

Résolvons l'Eq(3.57), on obtient :

$$F(x) = \frac{-\bar{f}_0 + \sqrt{\bar{f}_0^2 - 2\bar{g}_0\omega x + 2F_0\bar{g}_0}}{\bar{g}_0}, \quad (3.58)$$

où F_0 est une constante arbitraire.

Par conséquent, la solution exacte est donnée par :

$$u(x, t) = \omega t + \frac{-\bar{f}_0 + \sqrt{\bar{f}_0^2 - 2\bar{g}_0\omega x + 2F_0\bar{g}_0}}{\bar{g}_0}. \quad (3.59)$$

3. Symétrie de Lie de l'équation fractionnaire RLW

Nous complétons cette section à la lumière des références [15, 30, 31, 56]. Nous utilisons la symétrie de Lie afin de construire la solution exacte pour l'équation fractionnaire temporelle non-linéaire (3.1) et pour la réduire à une EDFO. Supposons que l'équation (3.1) soit invariante sous le groupe de transformations (3.3), nous obtenons l'équation transformée suivante

$$D_t^\alpha \hat{u} + \hat{u}_x - \frac{a}{2} \hat{u} \hat{u}_x - b \hat{u}_{xxt} = 0. \quad (3.60)$$

En utilisant les équations de transformation (2.3) dans Eq. (3.60), nous obtenons l'équation déterminante suivante

$$\eta_\alpha^0 - (1 - \frac{a}{2} u) \eta^x - \frac{a}{2} \eta u_x - b \eta^{xxt} = 0, \quad (3.61)$$

telle que $u = u(x, t)$ satisfait Eq.(3.1).

En substituant les expressions η_α^0 données dans l'Eq.(2.14) et l'Eq.(2.3) dans l'Eq.(3.61) on obtient

$$\begin{aligned} & D_t^\alpha(\eta) + (\eta_u - \alpha D_t(\tau)) D_t^\alpha u - u D_t^\alpha \eta_u + \mu + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) D_t^{\alpha-n} u_x \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{n} D_t^n(\eta_u) - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) \right] D_t^{\alpha-n}(u) \\ & + (1 - \frac{a}{2} u) (\eta_x + u_x (\eta_u - \xi_x) - u_x^2 \xi_u - u_t \tau_x - u_t u_x \tau_u) - \frac{a}{2} \eta u_x \\ & - b (\eta_{xxt} + u_x (2\eta_{xtu} - \xi_{txx}) + u_{xx} (\eta_{tu} - 2\xi_{tx}) + u_x^2 (\eta_{tuu} - 2\xi_{txu}) \\ & + u_{txx} (\eta_u - \tau_t - \xi_x - \tau_x) + u_{tx} (2\eta_{ux} - 2\tau_{tx} - \xi_{xx}) + u_x u_{tx} (2\eta_{uu} - 4\xi_{ux} - 2\tau_{tu}) \\ & + u_t (\eta_{uux} - \tau_{txx}) + u_x u_t (2\eta_{uux} - 2\tau_{txu} - \xi_{uux}) + u_{xx} u_t (\eta_{uu} - 2\xi_{ux} - \tau_{tu}) \\ & + u_x^2 u_t (\eta_{uuu} - 2\xi_{uux} - \tau_{tuu}) - 3u_x u_{xx} \xi_{tu} - u_x^3 \xi_{tuu} - \xi_u u_{xxx} u_t - 3u_{xx} u_{tx} \xi_u \\ & - 3u_x u_{xx} u_t \xi_{uu} - u_x u_{txx} (2\xi_u + \tau_u) - 3u_x^2 u_{tx} \xi_{uu} - u_x^3 u_t \xi_{uuu} - u_{tx}^2 \tau_u - 2u_t u_{txx} \tau_u \\ & - 4u_t u_{tx} \tau_{ux} - 4u_x u_t u_{tx} \tau_{uu} - u_t^2 \tau_{uux} - u_x u_t^2 (2\tau_{uux} + \tau_{uuu}) - \tau_{uu} u_{xx} u_t^2 \\ & - \tau_x u_{xtt} - 2\tau_{ux} u_x u_{tt} - u_{ttx} u_x \tau_u - u_{tt} u_{xx} \tau_u - u_x^2 u_{tt} \tau_{uu} - u_{xxx} u_x \xi_u + u_{tt} \tau_{xx} \\ & - u_{xxx} (\xi_x + u_x \xi_u) - u_{xxt} (\tau_x + u_x \tau_u) = 0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

on pose tous les coefficients de diverses dérivées de u égaux à zéro, on obtient le système surdéterminé d'équations linéaires suivant

$$\begin{aligned}
\xi_u = \tau_u = \tau_x &= 0, \\
\xi_{uu} = \tau_{uu} = \tau_{xx} = \eta_{uu} &= 0, \\
\eta_{ut} - 2\xi_{xt} &= 0, \\
2\xi_x + (1 - \alpha)\tau_t &= 0, \\
D_t^n(\xi) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\
\frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha} - u \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} + (1 - \frac{au}{2})\eta_x - b\eta_{xxt} &= 0, \\
\binom{\alpha}{n} \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) &= 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\
(\frac{a}{2}u - 1)\xi_x - \frac{a}{2}\eta + \alpha(1 - \frac{au}{2})\tau_t &= 0.
\end{aligned}$$

En résolvant le système précédent, nous obtenons la forme explicite suivante des infinitésimaux :

$$\xi = -\frac{C_1 a(\alpha - 1)}{\alpha + 1}x + C_3, \quad \eta = C_1(au - 2), \quad \tau = -\frac{2aC_1}{\alpha + 1}t + C_2, \quad (3.63)$$

avec C_1, C_2 et C_3 sont des constantes arbitraires. Alors l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales de l'Eq.(3.1) est donnée par

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.64)$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.65)$$

$$X_3 = -\frac{a(\alpha - 1)}{\alpha + 1}x \frac{\partial}{\partial x} + (au - 2) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{2a}{\alpha + 1}t \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.66)$$

Alors, le générateur infinitésimal de l'Eq.(3.1) peut être écrit comme suit

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3.$$

3.1 Réductions et solutions invariantes de l'équation fractionnaire RLW

Dans cette sous-section, nous utiliserons les équations caractéristiques des champs de vecteurs obtenues dans les équations (3.64), (3.65) et (3.66) pour obtenir les équations de réduction.

Cas 1 :

L'équation caractéristique du générateur infinitésimal (3.64), est exprimée symboliquement de la manière suivante :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{0}. \quad (3.67)$$

En résolvant l'équation caractéristique ci-dessus, nous obtenons la solution triviale.

Cas 2 :

L'équation caractéristique du générateur infinitésimal (3.65), est exprimée symboliquement de la manière suivante

$$\frac{dx}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}. \quad (3.68)$$

En résolvant l'équation caractéristique ci-dessus, nous obtenons la solution triviale.

Cas 3 :

L'équation caractéristique du générateur infinitésimal (3.66), elle s'exprime comme suit

$$\frac{dx}{a \frac{(1-\alpha)}{\alpha+1} x} = \frac{dt}{\frac{-2at}{\alpha+1}} = \frac{du}{au-2}. \quad (3.69)$$

En résolvant l'équation caractéristique ci-dessus, nous obtenons

$$z = xt^{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad (3.70)$$

avec la solution invariante :

$$t^{\frac{(\alpha+1)}{2}} (au-2) = f(z). \quad (3.71)$$

Par conséquent, nous obtenons

$$u(t, x) = \frac{1}{a} t^{\frac{-(\alpha+1)}{2}} f(z) + \frac{2}{a} = h(z) + \frac{2}{a}, \quad (3.72)$$

où $h(z) = \frac{1}{a} t^{\frac{-(\alpha+1)}{2}} f(z)$.

Alors, l'équation fractionnaire RLW (3.1) est réduite à une EDOF non-linéaire avec une nouvelle variable indépendante z . Ainsi, on peut obtenir le théorème suivant.

Théorème 3.1

La transformation (3.72) réduit l'équation (3.1) à l'équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre fractionnaire suivante

$$\left(P_{\frac{\alpha-1}{2}}^{\frac{1-3\alpha}{2}, \alpha} f \right)(z) + 2 \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{1}{2} f f_z + b \frac{(3\alpha-1)}{2} f_{zz} = 0, \quad (3.73)$$

avec l'opérateur fractionnaire d'Erdélyi-Kober [30, 103]

$$\left(P_{\xi}^{\tau, \alpha} f \right)(z) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\tau + j - \frac{1}{\xi} z \frac{d}{dz} \right) \left(K_{\xi}^{\tau+\alpha, n-\alpha} f \right)(z), \quad z > 0, \quad \xi > 0, \quad \alpha > 0 \quad (3.74)$$

$$n = \begin{cases} [\alpha] + 1, & \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha, & \alpha \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où

$$\left(K_{\xi}^{\tau, \alpha} f\right)(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\infty} (\nu-1)^{\alpha-1} \nu^{-(\tau+\alpha)} f(z\nu^{\frac{1}{\xi}}) d\nu, & \alpha > 0; \\ f(z), & \alpha = 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

est l'opérateur intégrale fractionnaire d'Erdélyi-Kober.

Preuve. Soit, $n-1 < \alpha < n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville devient

$$D_t^{\alpha} h(z) = \frac{1}{a} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} s^{-\frac{(\alpha+1)}{2}} f(xs^{\frac{1-\alpha}{2}}) \right] ds. \quad (3.76)$$

Soit $\nu = \frac{t}{s}$, alors $ds = \frac{-1}{s^2} d\nu$. L'équation (3.76) est écrite comme suit

$$\frac{\partial^n h(z)}{\partial t^n} = \frac{1}{a} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[t^{n-\frac{(3\alpha+1)}{2}} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^{\infty} \nu^{-(n-\alpha+\frac{1-\alpha}{2})} (\nu-1)^{n-\alpha-1} f(z\nu^{\frac{2}{1-\alpha}}) \right] d\nu. \quad (3.77)$$

D'après la définition de l'opérateur intégral fractionnaire d'Erdélyi-Kober (3.74), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n h(z)}{\partial t^n} &= \frac{1}{a} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[t^{n-\frac{(3\alpha+1)}{2}} \left(K_{\frac{2}{1-\alpha}}^{\frac{1-\alpha}{2}, n-\alpha} f \right)(z) \right] \\ &= \frac{1}{a} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(t^{n-\frac{(3\alpha+1)}{2}} \left(K_{\frac{2}{1-\alpha}}^{\frac{1-\alpha}{2}, n-\alpha} f \right)(z) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.78)$$

En répétant la même procédure pour $n-1$ fois, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n h(z)}{\partial t^n} &= \frac{1}{a} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[t^{n-\frac{(3\alpha+1)}{2}-1} \left(n - \frac{(3\alpha+1)}{2} - \frac{\alpha-1}{2} z \frac{d}{dz} \right) \left(K_{\frac{2}{1-\alpha}}^{\frac{1-\alpha}{2}+1, n-\alpha} f \right)(z) \right] \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{a} t^{-\frac{3\alpha-1}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} \left(j - \frac{(3\alpha+1)}{2} + 1 - \frac{\alpha-1}{2} z \frac{d}{dz} \right) \left(K_{\frac{2}{1-\alpha}}^{\frac{1-\alpha}{2}+1, n-\alpha} f \right)(z). \end{aligned} \quad (3.79)$$

En utilisant l'équation (3.74), nous avons

$$D_t^{\alpha} h(z) = \frac{1}{a} t^{-\frac{3\alpha-1}{2}} \left(P_{\frac{2}{\alpha-1}}^{\frac{1-3\alpha}{2}, \alpha} f \right)(z). \quad (3.80)$$

Selon l'équation (3.78), nous avons

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha} u(x, t) &= D_t^{\alpha} h(z) + D_t^{\alpha} \left(\frac{2}{a} \right) \\ &= \frac{1}{a} t^{-\frac{3\alpha-1}{2}} \left(P_{\frac{2}{\alpha-1}}^{\frac{1-3\alpha}{2}, \alpha} f \right)(z) + \frac{2}{a} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Par conséquent, l'équation RLW fractionnaire (3.1) se réduit à une équation différentielle ordinaire d'ordre fractionnaire avec une nouvelle variable indépendante

$$\left(P_{\frac{2}{\alpha-1}}^{\frac{1-3\alpha}{2}, \alpha} f \right)(z) + 2 \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{1}{2} f f_z + b \frac{(3\alpha-1)}{2} f_{zz} = 0. \quad (3.82)$$

La preuve du théorème est complète.

3.2 La solution explicite de l'équation fractionnaire 'Regularized Long Wave'

Dans cette sous-section, nous étudions les solutions analytiques exactes de l'équation (3.1) par la méthode des séries entières (Voir [37]). Supposons que

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n, \quad (3.83)$$

$$f'(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}\xi^n, \quad (3.84)$$

$$f''(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}\xi^n.$$

En substituant (3.83) et (3.84) dans (3.82), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{3-\alpha}{2} + \frac{n(\alpha-1)}{2})}{\Gamma(\frac{3(1-\alpha)}{2} + \frac{n(n-1)}{2})} c_n \xi^n - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}\xi^n \right) + \frac{b(3\alpha-1)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}\xi^n \\ & + 2 \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(1-\alpha)} = 0. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{3-\alpha}{3} + \frac{n(\alpha-1)}{2})}{\Gamma(\frac{3(1-\alpha)}{2} + \frac{n(n-1)}{2})} c_n \xi^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (n-k+1)c_k c_{n-k+1} \xi^n + \frac{b(3\alpha-1)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}\xi^n \\ & + 2 \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(1-\alpha)} = 0. \end{aligned} \quad (3.86)$$

En comparant les coefficients de l'équation (3.86), lorsque $n = 0$, nous avons

$$c_2 = \frac{1}{b(3\alpha-1)} \left(\frac{1}{2} c_0 c_1 - \frac{\Gamma(\frac{3-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{3(1-\alpha)}{2})} c_0 - 2 \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(1-\alpha)} \right). \quad (3.87)$$

Lorsque $n \geq 1$, on obtient

$$c_{n+2} = \frac{-2}{b(3\alpha-1)(n+1)(n+2)} \left(\frac{\Gamma(\frac{3-\alpha}{2} + \frac{n(\alpha-1)}{2})}{\Gamma(\frac{3-3\alpha}{2} + \frac{n(\alpha-1)}{2})} c_n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (n-k+1)c_k c_{n-k+1} + 2 \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(1-\alpha)} \right). \quad (3.88)$$

Alors, la solution explicite de l'équation (3.82) peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} f(\xi) &= c_0 + c_1 \xi + \frac{1}{b(3\alpha-1)} \left(\frac{1}{2} c_0 c_1 - \frac{\Gamma(\frac{3-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{3(1-\alpha)}{2})} c_0 - 2 \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) \xi^2 - \frac{2}{b(3\alpha-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ & \times \left(\frac{\Gamma(\frac{3-\alpha}{2} + \frac{n(\alpha-1)}{2})}{\Gamma(\frac{3(1-\alpha)}{2} + \frac{n(\alpha-1)}{2})} c_n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (n-k+1)c_k c_{n-k+1} + 2 \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) \xi^{n+2}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Par conséquent, la solution exacte en séries entières pour l'équation (3.82) sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{1}{a} t^{-\frac{(\alpha+1)}{2}} c_0 + \frac{1}{a} x t^{-\alpha} c_1 + \frac{1}{ab(3\alpha-1)} \left[\frac{1}{2} c_0 c_1 - \frac{\Gamma(\frac{3-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{3(1-\alpha)}{2})} c_0 - 2 \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] x^2 t^{\frac{1-3\alpha}{2}} \\
 & - \frac{2}{ab(3\alpha-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\frac{\Gamma(\frac{3-\alpha}{2} + \frac{n(\alpha-1)}{2})}{\Gamma(\frac{3(1-\alpha)}{2} + \frac{n(\alpha-1)}{2})} c_n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (n-k+1) c_k c_{n-k+1} \right. \\
 & \left. + 2 \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] t^{\frac{n(1-\alpha)-3\alpha+1}{2}} x^{n+2}. \quad (3.90)
 \end{aligned}$$

3.3 Interprétation physique de la solution en série entière pour la solution (3.90)

Afin d'avoir une vision claire des propriétés physiques de la solution obtenu et de nous aider à l'analyser, les graphiques tridimensionnels de la solution Eq.(3.90), sont tracés dans les figures 1-4 en utilisant des valeurs de paramètres appropriées.

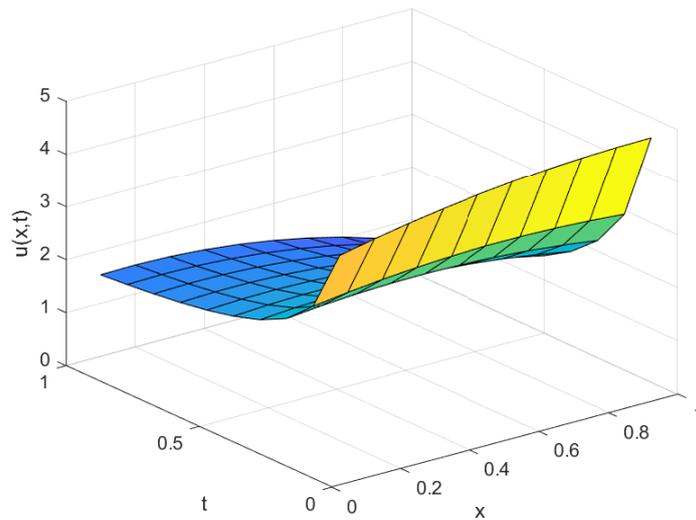


FIGURE 3.1 – Graphe 3D de l'équation (3.90) avec les valeurs des paramètres $c_0 = c_1 = 1$, $\alpha = 0.5$, $a = 2$, $b = 1$

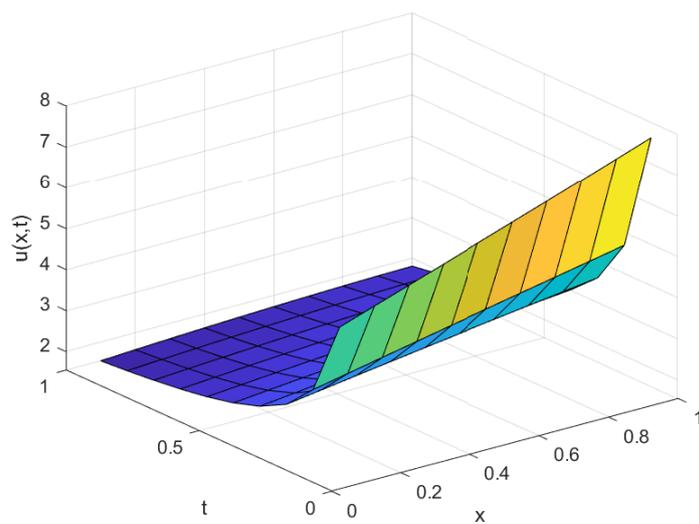


FIGURE 3.2 – Graphe 3D de l'équation (3.90) avec les valeurs des paramètres $c_0 = c_1 = 1$, $\alpha = 0.75$, $a = 2$, $b = 1$

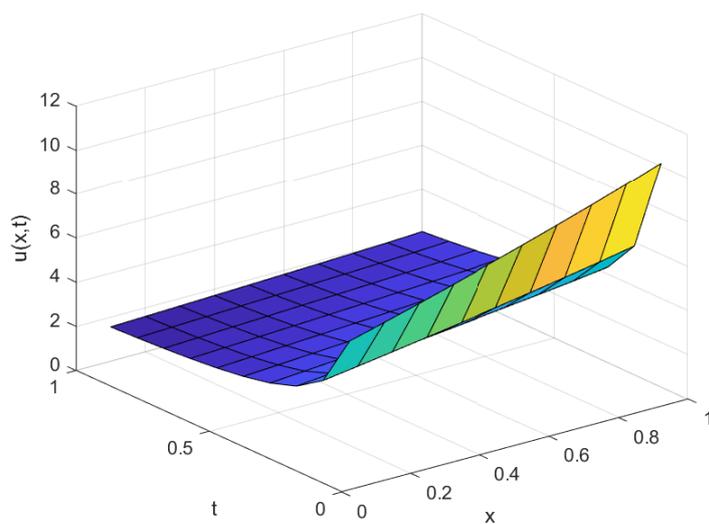


FIGURE 3.3 – Graphe 3D de l'équation (3.90) avec les valeurs des paramètres $c_0 = c_1 = 1$, $\alpha = 0.9$, $a = 2$, $b = 1$

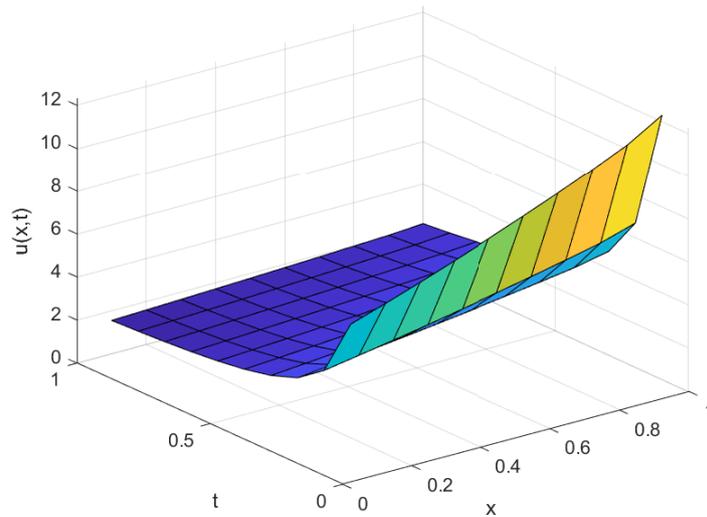


FIGURE 3.4 – Graphe 3D de l'équation (3.90) avec les valeurs des paramètres $c_0 = c_1 = 1$, $\alpha = 0.99$, $a = 2$, $b = 1$

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré l'équation non-linéaire RLW d'ordre fractionnaire, qui décrit la formation et le développement d'un trou ondulé par une onde longue en eau peu profonde [2]. La même étude porte sur la transition et l'interaction entre l'eau calme et une onde uniforme. Les symétries de Lie ont été appliquées à l'étude de l'équation RLW fractionnaire au sens de la dérivée de Riemann-Liouville, nous avons déduit les champs de vecteurs correspondants, ce qui nous a aidé à construire les réductions de l'équation fractionnaire RLW. En outre, nous avons construit un nouvel ensemble de solutions analytiques via la méthode des séries entières. Enfin, pour introduire une meilleure compréhension de la dynamique de ces solutions, nous avons fourni leur analyse graphique. La méthode peut être appliquée à diverses autres équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre fractionnaire.

Symétrie de Lie de l'équation de Fokker-Planck bidimensionnelle fractionnaire

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le modèle bidimensionnel fractionnaire de Fokker-Planck suivant

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = -\frac{a^2 x^2}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \frac{b^2 y^2}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y^2} - kabxy \frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} - rx \frac{\partial u}{\partial x} - ry \frac{\partial u}{\partial y} + ru. \quad (4.1)$$

Il est bien connu que les processus de diffusion markoviens peuvent être décrits par l'équation de Fokker-Planck. L'équation de Fokker-Planck est une équation différentielle partielle pour décrire la densité de probabilité et la probabilité de transition de ces processus stochastiques. Elle joue un rôle important en théorie du contrôle, en mécanique des fluides, en astrophysique et en quantique [59]. De plus, elle a été appliquée dans divers domaines des sciences naturelles tels que l'optique quantique, la physique des solides, la physique chimique, la biologie théorique et la théorie des circuits.

En physique, les équations de Fokker-Planck sont utilisées pour la modélisation de la dynamique complexe, par exemple, en mécanique quantique, en astrophysique, en physique statistique et sont appliquées au problème de la biophysique du repliement des protéines [60]. En mathématiques financières, les équations de Fokker-Planck sont appliquées par exemple pour expliquer le comportement des rendements des marchés des changes à différentes échelles de temps [84].

L'équation de Fokker-Planck représente à l'échelle macroscopique le mouvement Brownien avec un champ de force extérieur. Ce modèle de Fokker-Planck classique lui aussi est inadapté pour représenter la diffusion anormale. De nombreux chercheurs ont résolu l'équation de Fokker-Planck en utilisant diverses méthodes puissantes, pour plus de détails, voir [84, 102]. Pour décrire le transport anormal avec un champ de force extérieure, Metzler et Klafter [61] après Zaslavsky [94], ont introduit une version fractionnaire de l'équation de Fokker-Planck.

Les dérivées fractionnaires décrites ici sont au sens de Riemann-Liouville [21] d'ordre α ($\alpha > 0$), qui est défini par

$$D^\alpha u(t, x) = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{\partial^m u}{\partial t^m}, & \alpha = m \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} u(\tau, x) d\tau, & m-1 < \alpha < m, \quad m \in \mathbb{N}^*, \end{cases} \quad (4.2)$$

où $\Gamma(z)$ est la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

La motivation principale de ce chapitre [56] est d'utiliser la méthode de symétrie de Lie pour obtenir les générateurs infinitésimaux, les solutions invariantes de groupe de Lie pour l'équation de Fokker-Planck bidimensionnelle fractionnaire (EFPF), et pour construire les lois de conservation données par Ibragimov [40]. Par conséquent, les nouveaux vecteurs conservés ont été obtenus en utilisant le nouveau théorème de conservation. En se basant sur la méthode des séries entières [91], les solutions explicites aux séries entières de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire bidimensionnelle ont été obtenus.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 4.2, en employant la méthode proposée, les symétries de Lie de l'équation (4.1) sont obtenues, en utilisant les variables de similarité, les équations réduites sont obtenues, en résolvant certaines d'entre elles, puis les solutions de l'Eq.(4.1) sont déduites. Dans la section 4.3, on obtient les lois de conservation de l'équation (4.1). La section 4.4 est consacrée à la construction des solutions explicites en séries entières. Une Conclusion et une discussion sont données dans la section finale.

2. Symétrie de Lie de l'équation de Fokker-Planck bidimensionnelle fractionnaire

Dans cette section, la méthode de symétrie de Lie a été appliquée pour obtenir les générateurs infinitésimaux de l'équation de Fokker-Planck bidimensionnelle d'ordre fractionnaire (4.1). En utilisant la troisième prolongation [30,31], l'équation déterminante pour Eq.(4.1) a été obtenue comme suit

$$\begin{aligned} \eta_\alpha^\alpha + \frac{a^2 x^2}{2} \eta^{xx} + a^2 x \xi u_{xx} + \frac{b^2}{2} y^2 \eta^{yy} + b^2 \varphi y u_{yy} + kabx y \eta^{xy} + kab(x\varphi + y\xi) u_{xy} \\ + rx \eta^x + r \xi u_x + r y \eta^y + r y u_y - r u = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

En substituant les expressions η_α^0 données dans l'Eq.(2.3) et l'Eq.(2.14) dans l'Eq.(4.3), et en mettant à zéro les diverses puissances des dérivées de u , on obtient un système surdéterminé d'équations linéaires, en résolvant ce système, on obtient les infinitésimaux suivants

$$\begin{aligned}
\eta(x, y, u, t) &= (C_1 \ln(x) + C_2 \ln(y) + C_3)u + f(x, y, t), \\
\tau(x, y, u, t) &= -\frac{abk(C_1 + C_3)}{\alpha r}t + C_4, \\
\xi(x, y, u, t) &= \left(-\frac{C_1 abk \ln(x)}{r} + C_6\right)x, \\
\varphi(x, y, u, t) &= \left(-\frac{C_3 abk \ln(y)}{r} + C_5\right)y,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

où C_i , $i = 1, \dots, 6$ sont des constantes arbitraires. Ainsi, les champs vectoriels associés de l'Eq.(4.1) sont donnés par

$$\begin{aligned}
X_1 &= y \frac{\partial}{\partial y}, \\
X_2 &= x \frac{\partial}{\partial x}, \\
X_3 &= \ln(x) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{4a^2 t}{\alpha(a^2 - 2r)} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2a^2 \ln(x)}{a^2 - 2r} x \frac{\partial}{\partial x}, \\
X_\infty &= f(x, y, t) \frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Cas 1 : For $X_1 = \frac{\partial}{\partial y}$, l'équation caractéristique est donnée par

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{0} = \frac{du}{0} = \frac{dt}{0}. \tag{4.6}$$

En résolvant l'équation caractéristique ci-dessus, nous obtenons la solution $u = f(x, t)$. En la substituant dans l'équation (4.1), nous obtenons l'équation de Fokker-Planck ordinaire fractionnaire réduite suivante :

$$D_t^\alpha f(x, t) = -\frac{b^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - r x \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + r f(x, t). \tag{4.7}$$

En utilisant la méthode de symétrie, nous obtenons les infinitésimaux suivants

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \ln(x) M_2 u + M_1 u + f(x, t), \\
\tau_1 &= \frac{4M_2 a^2 t}{\alpha(a^2 - 2r)} + M_3, \\
\xi_1 &= \left(\frac{4M_2 a^2 t}{\alpha(a^2 - 2r)} + M_4\right)x,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

où M_i , $i = 1, \dots, 4$ sont des constantes arbitraires. Alors l'algèbre de Lie des infinitésimaux de l'Eq.(4.7) est donnée par

$$\begin{aligned}
X_{11} &= x \frac{\partial}{\partial x}, \\
X_{12} &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\
X_{13} &= \ln(x) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{2a^2 \ln(x)}{a^2 - 2r} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{4a^2 t}{\alpha(a^2 - 2r)} t \frac{\partial}{\partial t}, \\
X_\infty &= f(x, t) \frac{\partial}{\partial u},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Cas 1.1 : L'équation caractéristique pour le générateur infinitésimal X_{11} , peut être exprimée symboliquement comme suit

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{0}. \quad (4.10)$$

En résolvant l'équation caractéristique ci-dessus, nous obtenons la solution $u = f(t)$. En la substituant dans l'équation (4.7), nous obtenons l'équation ordinaire fractionnaire réduite :

$$D_t^\alpha f = r f, \quad (4.11)$$

ce qui précède peut être résolu par la méthode de transformation de Laplace

$$\mathcal{L}(D_t^\alpha f) = r \mathcal{L}(f), \quad (4.12)$$

puisque, la transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville définie par la forme suivante

$$\mathcal{L}\{D_x^\alpha f(x), s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-k-1} f(0_+), \quad (4.13)$$

alors,

$$\mathcal{L}(D_t^\alpha f) = s^\alpha \mathcal{L}(f) - s^{\alpha-1}. \quad (4.14)$$

D'après l'équation (4.13), nous avons

$$\mathcal{L}(f) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - r}, \quad (4.15)$$

en utilisant la transformée de Laplace inverse, on obtient

$$f(t) = E_{\alpha,1}(r t^\alpha), \quad (4.16)$$

où

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

est la fonction de Mittag-Leffler.

Cas 1.2 : Pour $X_{11} + \gamma X_{12}$, la transformation de similitude correspondant à ce générateur peut être dérivée en résolvant l'équation caractéristique associée

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} = \frac{dt}{t}, \quad (4.17)$$

qui prend la forme suivante

$$u = x^\gamma g(t), \quad (4.18)$$

en le remplaçant dans l'équation (4.7), on obtient l'EDFO réduite suivante :

$$D_t^\alpha (g(t)) = \left(-\frac{b^2}{2} \alpha(\alpha-1) - r(\alpha-1) \right) g(t), \quad (4.19)$$

en utilisant la transformée de Laplace, nous obtenons la solution suivante

$$g(t) = E_{\alpha,1} \left(\left(\frac{b^2}{2} \alpha(\alpha-1) + r(\alpha-1) \right) t^\alpha \right). \quad (4.20)$$

3. Lois de conservation de l'équation de Fokker-Planck bidimensionnelle fractionnaire

Dans cette section, les lois de conservation de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire bidimensionnelle ont été étudiées en utilisant le nouveau théorème de conservation [40]. Les vecteurs conservés C_t, C_x, C_y ont été obtenus et ils satisfont l'équation de conservation suivante :

$$D_t(C^t) + D_x(C^x) + D_y(C^y) = 0. \quad (4.21)$$

Le Lagrangien de l'équation (4.1) est écrit comme suit :

$$L = \omega(x, y, t) \left[\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{a^2 x^2}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{b^2 y^2}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + kabxy \frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} + rx \frac{\partial u}{\partial x} + ry \frac{\partial u}{\partial y} - ru \right], \quad (4.22)$$

où $\omega(x, y, t)$ est la nouvelle variable dépendante. D'après la définition du lagrangien, l'intégrale d'action de l'équation (4.22) est donnée par

$$\int_0^T \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_y} L(x, y, t, \omega, u, D_t^\alpha u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) dx dy dt. \quad (4.23)$$

L'opérateur d'Euler-Lagrange est défini comme suit

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + (D_t^\alpha u)^* \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} - D_y \frac{\partial}{\partial u_y} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + D_x D_y \frac{\partial}{\partial u_{xy}}. \quad (4.24)$$

L'opérateur adjoint $(D_t^\alpha)^*$ est défini par

$$(D_t^\alpha)^* = (-1)^n R_T^{n-\alpha} (D_t^n) = {}^C D_T^\alpha, \quad (4.25)$$

où $R_T^{n-\alpha}$ est l'opérateur droit d'intégration fractionnaire d'ordre $(n - \alpha)$ qui est défini par

$$R_T^{n-\alpha} f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^T (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(x, \tau) d\tau. \quad (4.26)$$

Ainsi, l'équation adjointe de l'Eq.(4.1) comme l'équation d'Euler-Lagrange, donnée par

$$\frac{\delta L}{\delta u} = 0. \quad (4.27)$$

Pour le cas de trois variables indépendantes x, y, t et d'une variable dépendante $u(x, y, t)$, on obtient

$$\bar{X} + D_t(\tau)I + D_x(\xi)I + D_y(\zeta)I = W \frac{\delta}{\delta u} + D_t(C^t)I + D_x(C^x)I + D_y(C^y)I, \quad (4.28)$$

où I est l'opérateur d'identité et $\frac{\delta}{\delta u}$ est désigné comme l'opérateur d'Euler-Lagrange. Ainsi, \bar{X} se présente comme suit

$$\bar{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta \frac{\partial}{\partial y} + \eta_\alpha^0 \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^y \frac{\partial}{\partial u_y} + \eta^{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \eta^{xy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}}, \quad (4.29)$$

et la fonction caractéristique de Lie W est donnée par

$$W = \eta - \tau u_t - \xi u_x - \zeta u_y. \quad (4.30)$$

En utilisant les symétries de Lie V_1, V_2, V_3 , on a

$$W_1 = -xu_x, \quad W_2 = -u_t, \quad W_3 = -yu_y, \quad W_4 = uln(x) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{abk}{\alpha r} t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{abk}{r} x ln(x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.31)$$

$$W_5 = uln(y) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{abk}{\alpha r} t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{abk}{r} y ln(y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad W_6 = u, \quad W_\infty = f(x, y, t). \quad (4.32)$$

En se basant sur les généralisations fractionnaires des opérateurs de Noether, la composante du vecteur conservé est présentée comme suit :

$$C^t = \tau L + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k D_t^{\alpha-1-k}(W) D_t^k \frac{\partial L}{\partial_0 D_t^\alpha u} - (-1)^n J(W, D_t^k \frac{\partial L}{\partial_0 D_t^\alpha u}), \quad (4.33)$$

où $J(\cdot)$ est défini par

$$J(f, g) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \int_t^T \frac{f(\tau, x, y) g(\theta, x, y)}{(\theta - \tau)^{\alpha+1-n}} d\theta d\tau. \quad (4.34)$$

Et les autres composantes C^i sont définies comme suit

$$\begin{aligned} C^i = & \xi^i L + W_\theta \left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\theta} - D_j \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\theta} \right) + D_j D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\theta} \right) - \dots \right] \\ & + D_j (W_\theta) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\theta} - D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\theta} \right) + \dots \right] + D_j D_k (W_\theta) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\theta} - \dots \right) + \dots, \end{aligned} \quad (4.35)$$

où $\xi^1 = \xi$, $\xi^2 = \zeta$, $\theta = 1, 2$. En utilisant les équations (4.33) et (4.35), nous obtenons les composantes suivantes des vecteurs conservés :

Cas 1 : Pour $W_1 = -xu_x$, on a

$$\begin{aligned} C^t = & \tau L + {}_0 D_t^{\alpha-1}(W_1) D_t^k \frac{\partial L}{\partial_0 D_t^\alpha u} + J(W_1, D_t^k \frac{\partial L}{\partial_0 D_t^\alpha u}) \\ = & w(x, y, t) D_t^{\alpha-1}(-xu_x) + J(-xu_x, w_t), \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} C^x = & \xi L + W_1 \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_x(W_1) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) + D_y(W_1) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right) \\ = & -u_x \left(wrx^2 - \frac{a^2 x^3}{2} w_x - kabx^2 w - kabx^2 y w_y - \frac{a^2 x^2}{2} w \right) - u_{xx} w \frac{a^2 x^3}{2} - u_{xy} kabx^2 y w, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} C^y = & \xi L + W_1 \left[\frac{\partial L}{\partial u_y} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right] + D_y(W_1) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right] + D_x(W_1) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right) \\ = & -u_x \left[rxyw - kabxyw - kabx^2 y w_x - b^2 wxy - \frac{b^2 xy^2}{2} w_y \right] - u_{xy} x \frac{b^2 y^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Cas 2 : Pour $W_2 = -u_t$, on a

$$\begin{aligned} C^t &= \tau L + {}_0D_t^{\alpha-1}(W_2)D_t^k \frac{\partial L}{\partial {}_0D_t^\alpha u} + J\left(W_2, D_t \frac{\partial L}{\partial {}_0D_t^\alpha u}\right) \\ &= w(x, y, t)D_t^{\alpha-1}(-u_t) + J(-u_t, w_t), \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} C^x &= \xi L + W_2 \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_x(W_2) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) + D_y(W_2) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right) \\ &= -u_t \left(rxw - \frac{a^2 x^2}{2} w_x - a^2 xw - kabxyw_y - kabxw \right) - u_{xt} w \frac{a^2 x^2}{2} - u_{yt} kabxyw, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} C^y &= \xi L + W_2 \left[\frac{\partial L}{\partial u_y} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right] + D_x(W_2) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_y(W_2) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right) \\ &= -u_t \left[ryw - kabxyw_x - kabyw - \frac{b^2 y^2}{2} w_y - b^2 yw \right] - u_{xt} kabxyw - u_{yt} \frac{b^2 y^2}{2} w. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Cas 3 : Pour $W_2 = -yu^y$, on a

$$\begin{aligned} C^t &= \tau L + {}_0D_t^{\alpha-1}(W_3)D_t^k \frac{\partial L}{\partial {}_0D_t^\alpha u} + J\left(W_3, D_t \frac{\partial L}{\partial {}_0D_t^\alpha u}\right) \\ &= -yw(x, y, t)D_t^{\alpha-1}(u_y) - J(yu_y, w_t), \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} C^x &= \xi L + W_3 \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_x(W_3) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) + D_y(W_3) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right) \\ &= -u_y \left(rxyw - \frac{a^2 x^2}{2} yw_x - a^2 xyw - kabxy^2 w_y - kabxyw \right) - u_{xy} yw \frac{a^2 x^2}{2} - u_{yy} kabxy^2 w, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} C^y &= \xi L + W_3 \left[\frac{\partial L}{\partial u_y} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right] + D_x(W_3) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_y(W_3) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right) \\ &= -u_y \left[ry^2 w - kabxy^2 w - kabxy^2 w_x - \frac{b^2 y^3}{2} w_y - b^2 y^2 w \right] - u_{xt} kabxy^2 w - u_{yy} \frac{b^2 y^3}{2} w. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Cas 4 : Pour $W_4 = uln(x) + \frac{kab}{\alpha r} tu_t + \frac{kab}{r} xln(x)u_x$, on a

$$\begin{aligned} C^t &= \tau L + {}_0D_t^{\alpha-1}(W_4)D_t^k \frac{\partial L}{\partial {}_0D_t^\alpha u} + J\left(W_4, D_t \frac{\partial L}{\partial {}_0D_t^\alpha u}\right) \\ &= w(x, y, t)D_t^{\alpha-1} \left(-uln(x) + \frac{kab}{\alpha r} tu_t + \frac{kab}{r} xln(x)u_x \right) - J \left(-uln(x) + \frac{kab}{\alpha r} tu_t + \frac{kab}{r} xln(x), w_t \right), \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} C^x &= \xi L + W_4 \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_x(W_4) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) + D_y(W_4) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right) \\ &= \left(-uln(x) + \frac{kab}{\alpha r} tu_t + \frac{kab}{r} xln(x) \right) \left(rxw - \frac{a^2 x^2}{2} w_x - a^2 xw - kabxyw_y - kabxw \right) \\ &\quad + \left(\frac{u}{x} + (ln(x) + 1) \frac{kab}{r} u_x + \frac{kab}{\alpha r} tu_{xt} + \frac{kab}{r} xln(x)u_{xx} \right) \frac{a^2 x^2}{2} w + \frac{ka^2 b^2}{\alpha r} k^2 xytwu_{ty} \\ &\quad + \frac{ka^2 b^2}{r} kx^2 yln(x)u_{xy}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
C^y &= \xi L + W_4 \left[\frac{\partial L}{\partial u_y} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right] + D_x(W_4) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_y(W_4) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right) \\
&= \left(u \ln(x) + \frac{kab}{\alpha r} t u_t + \frac{kab}{r} x \ln(x) u_x \right) \left[r y w - k a b y w - k a b x y w_x - \frac{b^2 y^2}{2} w_y - b^2 y w \right] \\
&+ \left(\frac{u}{x} + (\ln(x) + 1) \frac{kab}{r} u_x + \frac{kab}{\alpha r} t u_{xt} + \frac{kab}{r} x \ln(x) u_{xx} \right) k a b x y w + \frac{k a^2 b^3}{2 \alpha r} k t y^2 w u_{ty} \\
&+ \frac{k a b^3}{2 r} k w x y^2 \ln(x) u_{xy}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Cas 5 : Pour $W_5 = u \ln(y) + \frac{kab}{\alpha r} t u_t + \frac{kab}{r} y \ln(y) u_y$, on a

$$\begin{aligned}
C^t &= \tau L + {}_0 D_t^{\alpha-1}(W_5) D_t^k \frac{\partial L}{\partial {}_0 D_t^\alpha u} + J \left(W_5, D_t \frac{\partial L}{\partial {}_0 D_t^\alpha u} \right) \\
&= w(x, y, t) D_t^{\alpha-1} \left(u \ln(y) + \frac{kab}{\alpha r} t u_t + \frac{kab}{r} y \ln(y) u_y \right) - J \left(u \ln(y) + \frac{kab}{\alpha r} t u_t + \frac{kab}{r} y \ln(y) u_y, w_t \right),
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
C^x &= \xi L + W_4 \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_x(W_5) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) + D_y(W_5) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right) \\
&= \left(u \ln(y) + \frac{kab}{\alpha r} t u_t + \frac{kab}{r} y \ln(y) u_y \right) \left(r x w - \frac{a^2 x^2}{2} w_x - a^2 x w - k a b x y w_y - k a b x w \right) \\
&+ \left(\frac{u}{y} + (\ln(y) + 1) \frac{kab}{r} u_y + \frac{kab}{\alpha r} t u_{yt} + \frac{kab}{r} y \ln(y) u_{yy} \right) k x y a b w + \frac{kab}{\alpha r} t u_{xt} \\
&+ \frac{k a^3 b}{2 r} k x^2 y \ln(y) w u_{xy},
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
C^y &= \xi L + W_5 \left[\frac{\partial L}{\partial u_y} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right] + D_x(W_5) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_y(W_5) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right) \\
&= \left(u \ln(y) + \frac{kab}{\alpha r} t u_t + \frac{kab}{r} y \ln(y) u_y \right) \left[r y w - k a b y w - k a b x y w_x - \frac{b^2 y^2}{2} w_y - b^2 y w \right] \\
&+ \left(\frac{u}{y} + (\ln(y) + 1) \frac{kab}{r} u_y + \frac{kab}{\alpha r} t u_{yt} + \frac{kab}{r} y \ln(y) u_{yy} \right) \frac{b^2 y^2}{2} w + \frac{k^2 a^2 b^2}{\alpha r} k t x y w u_{xt}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Cas 6 : Pour $W_6 = u$, on a

$$\begin{aligned}
C^t &= \tau L + {}_0 D_t^{\alpha-1}(W_6) D_t^k \frac{\partial L}{\partial {}_0 D_t^\alpha u} + J \left(W_6, D_t \frac{\partial L}{\partial {}_0 D_t^\alpha u} \right) \\
&= w(x, y, t) D_t^{\alpha-1}(u) - J(u, w_t),
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
C^x &= \xi L + W_6 \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_x(W_6) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) + D_y(W_6) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right) \\
&= u \left(r x w - \frac{a^2 x^2}{2} w_x - a^2 x w - k a b x y w_y - k a b x w \right) + \frac{a^2 x^2}{2} w u_x + k a b x y w u_y,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
C^y &= \xi L + W_6 \left[\frac{\partial L}{\partial u_y} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right] + D_x(W_6) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_y(W_6) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right) \\
&= u \left[r y w - k a b y w - k a b x y w_x - \frac{b^2 y^2}{2} w_y - b^2 y w \right] + \frac{b^2 y^2}{\alpha r} w u_y + k a b x y w u_x.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Cas 7 : Pour $W_\infty = f(x, y, t)$, on a

$$\begin{aligned} C_\infty^t &= \tau L + {}_0D_t^{\alpha-1}(f(x, y, t))D_t^k \frac{\partial L}{\partial {}_0D_t^\alpha u} + J\left(f(x, y, t), D_t \frac{\partial L}{\partial {}_0D_t^\alpha u}\right) \\ &= w(x, y, t)D_t^{\alpha-1}(f(x, y, t)) - J(f(x, y, t), w_t), \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} C_\infty^x &= \xi L + W_\infty \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_x(W_\infty) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) + D_y(W_\infty) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right) \\ &= f(x, y, t) \left(rxw - \frac{a^2 x^2}{2} w_x - a^2 xw - kabxyw_y - kabxw \right) + \frac{a^2 x^2}{2} w f_x(x, y, t) + kabxyw f_y(x, y, t), \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} C_\infty^y &= \xi L + W_\infty \left[\frac{\partial L}{\partial u_y} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right] + D_x(W_\infty) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right] + D_y(W_\infty) \left(\frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right) \\ &= f(x, y, t) \left[ryw - kabyw - kabxyw_x - \frac{b^2 y^2}{2} w_y - b^2 yw \right] + \frac{b^2 y^2}{\alpha r} w f_y(x, y, t) + f_x(x, y, t) kabxyw. \end{aligned} \quad (4.56)$$

4. Solutions explicites de l'équation (4.1) sous la forme de séries entières

Dans cette section, en se basant sur la méthode des séries entières [28, 89–91], les solutions analytiques exactes sont une sorte de solutions exactes en série entières de l'Eq.(4.1). Nous commençons à effectuer une transformation importante :

$$u(x, y, t) = u(w), \quad w = my + \rho x - \frac{\epsilon t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (4.57)$$

où m, k, α , et $\epsilon \neq 0$ sont des constantes arbitraires. L'équation de Fokker-Planck fractionnaire (4.1) est réduite à l'EDO suivante

$$(-\epsilon + rx\rho + rym)u' + \left(\frac{a^2 x^2}{2} \rho^2 + \frac{by^2}{2} m^2 + \rho abk mxy \right) u'' - ru = 0, \quad (4.58)$$

Nous supposons que la solution de l'équation (4.1) est de la forme suivante

$$u(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \xi^n, \quad (4.59)$$

où σ_n sont des constantes à déterminer ultérieurement. D'après l'équation (4.59), on obtient

$$\begin{aligned} u'(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \sigma_{n+1} \xi^n, \\ u''(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \sigma_{n+2} \xi^n. \end{aligned} \quad (4.60)$$

En substituant (4.59) et (4.60) dans (4.58), on obtient

$$(-\epsilon + rx\rho + rym) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_{n+1}\xi^n + \left(\frac{a^2x^2}{2}\rho^2 + \frac{by^2}{2}m^2 + \rho abkmy \right) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\sigma_{n+2}\xi^n - r \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \xi^n = 0. \quad (4.61)$$

En observant les coefficients de l'équation (4.61), lorsque $n = 0$, on a

$$(-\epsilon + rx\rho + rym)\sigma_1 + 2\left(\frac{a^2x^2}{2}\rho^2 + \frac{by^2}{2}m^2 + \rho abkmy \right)\sigma_2 - r\sigma_0 = 0, \quad (4.62)$$

en comparant les coefficients de σ , on obtient

$$\sigma_2 = \frac{(\epsilon - rx\rho - rym)\sigma_1 + r\sigma_0}{ax^2\rho^2 + bm^2y^2 + 2\rho abkmy}. \quad (4.63)$$

Lorsque $n \geq 1$, on a

$$\sigma_{n+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{(\epsilon - rx\rho - rym)(n+1)\sigma_{n+1} + r\sigma_n}{ax^2\rho^2 + bm^2y^2 + 2\rho abkmy}. \quad (4.64)$$

La solution en séries entières pour l'équation (4.1) est réécrite comme suit

$$u(x, y, t) = a_0 + a_1 \left(kx + my - \frac{\epsilon t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) + \frac{(\epsilon - rxk - rym)\sigma_1 + r\sigma_0}{ax^2k^2 + by^2m^2 + 2\rho xyabkm} \left(kx + my - \frac{\epsilon t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{2(\epsilon - rxk - rym)(n+1)\sigma_{n+1} + r\sigma_n}{ax^2k^2 + by^2m^2 + 2kabxykm} \left(kx + my - \frac{\epsilon t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^{n+2}. \quad (4.65)$$

5. Conclusion

Dans ce chapitre, les propriétés d'invariance de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire à deux dimensions avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville ont été étudiées avec succès. Ensuite, la méthode des séries entières a été appliquée pour obtenir une solution explicite pour l'équation de Fokker-Planck fractionnaire bidimensionnelle. Pour obtenir de nouvelles composantes de vecteurs conservés, un nouveau théorème des lois de conservation a été employé avec le lagrangien, ce qui nous permet de construire des lois de conservation pour l'équation de Fokker-Planck bidimensionnelle fractionnaire. Nos résultats montrent que l'approche de l'analyse des groupes de Lie et la méthode des séries entières fournissent des outils mathématiques puissants pour étudier d'autres EDPF dans différents domaines des mathématiques appliquées. De plus, nous montrons que l'analyse proposée est très efficace pour construire les lois de conservation de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire temporelle bidimensionnelle.

Conclusion

L'étude des équations différentielles fractionnaires par la méthode de symétrie de Lie joue un rôle important dans les phénomènes non linéaires. L'efficacité de divers types des équations différentielles fractionnaires dans la modélisation de divers phénomènes scientifiques a été une grande motivation pour mener à bien le travail de cette thèse. Les apparitions récentes des équations différentielles partielles fractionnaire dans l'étude de divers processus en science et en ingénierie et également les nombreuses limitations posées par les modèles de dérivés d'ordre entier, ont été les raisons principales pour lesquelles l'étude présentée dans la thèse intitulée "Contribution à l'étude de Certaines Équations aux Dérivées Fractionnaires : Méthode de Symétries de Lie". L'étude des symétries et des solutions exactes des équations différentielles partielles fractionnaires à une grande importance théorique et pratique.

Cette thèse vise principalement à développer la méthode de symétrie de Lie pour étudier une grande variété d'équations différentielles fractionnaires avec des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. A savoir, l'équation de Fokker-Planck fractionnaire bidimensionnelle temporelle, et l'équation RLW fractionnaire temporelle. Cette thèse ne consiste pas seulement de diverses extensions de l'approche de symétrie de Lie, mais présente également un certain nombre d'exemples pour sa démonstration. La technique pour trouver les lois de conservation pour les équations d'ordres fractionnaires a également été présentée dans cette thèse.

La première extension de la méthode de symétrie de Lie a été proposée dans les chapitre 3 et 4 pour les deux équations fractionnaires. A savoir, l'équation fractionnaire bidimensionnelle de Fokker-Planck et l'équation RLW d'ordre fractionnaire. Nous avons effectué une classification par groupe de Lie, nous avons appliqué la méthode des séries entières pour obtenir des solutions explicite pour ces deux équations. Pour ce faire, nous avons d'abord déterminé les transformations d'équivalence, ensuite, ces transformations ont été utilisées pour le redimensionnement de certaines fonctions arbitraires dans l'équation originale, ce qui a permis de simplifier l'équation originale en une équation équivalente ordinaire d'ordre fractionnaire au sens d'Erdelyi-Kober (EK) que l'en peut résoudre grâce a la méthode des séries entières. On a étudié également l'équation fractionnaire de Fokker-Planck bidimensionnelle pour déterminer ses solutions exactes et ses conser-

vations de lois. Dans ce but, la technique pour trouver les vecteurs conservés a été développée en présentant les formules de Noether. Pour ce faire, Pour obtenir de nouvelles composantes de vecteurs conservés, un nouveau théorème des lois de conservation a été employé avec le Lagrangien, ce qui nous a permis de construire des lois de conservation pour l'équation de Fokker-Planck bidimensionnelle fractionnaire. Nos résultats montrent que l'approche de l'analyse des groupes de Lie et la méthode des séries entière fournissent des outils mathématiques puissants pour étudier d'autres équations différentielles partielles fractionnaires dans différents domaines des mathématiques appliquées.

En bref, nous pouvons dire que le travail dans cette thèse est consacré à l'étude d'une gamme d'applications des groupes de symétrie continue à des équations différentielles partielles aux dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. Enfin, il convient de mentionner que malgré l'accent mis sur les solutions exactes, il était parfois difficile de trouver des symétries pour les équations différentielles fractionnaires, car les symétries des équations différentielles d'ordre entier peuvent être obtenues par certains logiciels mathématiques. En gardant à l'esprit cette limitation, il serait vraiment intéressant si un tel logiciel pouvait être développé.

Nous montrons que l'analyse proposée est très efficace pour construire les lois de conservation du modèle de Fokker-Planck fractionnaire temporelle bidimensionnelle. De plus, nous pouvons utiliser l'analyse de symétrie pour l'équation de Fokker-Planck fractionnaire spatio-temporelle. Aussi, Il y a quelques extensions possibles de l'analyse de symétrie et les lois de conservation de l'équation fractionnaire RLW spatio-temporelle sont en cours et seront discutée dans les travaux futurs. Ce qui constituera un sujet de travail précieux pour l'avenir.

Bibliographie

- [1] S. C. Anco, , E. D. Avdonina, , A. Gainetdinova, L. R. Galiakberova, N. H. Ibragimov, and T. Wolf, (2016), Symmetries and conservation laws of the generalized Krichever–Novikov equation, *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 49(10) : 105201.
- [2] M. A. Abdulwahhab, (2015), Nonlinear self-adjointness and conservation laws of the (3+1)-dimensional Burgers equation, *Wave Motion* 57 : 34–43.
- [3] A. R. Adem, and B. Muatjetjeja, (2015), Conservation laws and exact solutions for a 2D Zakharov–Kuznetsov equation, *Applied Mathematics Letters* 48 : 109–117.
- [4] A. Akbulut, F. Taşcan, (2017). Lie symmetries, symmetry reductions and conservation laws of time fractional modified Korteweg–de Vries (mkdv) equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 100, 1-6.
- [5] O. P. Aggarwal, (2000), A general solution of the fourth order fractional diffusion wave equation, *Fractional Calculus and Applied Analysis* 3(1) : 1–12.
- [6] N. H. Abel, (1881), *Solution de quelques problemes a l'aide d'intégrales définites*, *Oeuvres Complètes*, Vol. 1, Grondahl, Christiania, Norway, pp. 16–18.
- [7] H. Aminikhah, A. H. Refahi Sheikhan, and H. Rezazadeh, Sub-equation method for the fractional regularized long-wave equations with conformable fractional derivatives. *Scientia Iranica*, vol. 23, no. 3, pp. 1048-1054, 2016.
- [8] S. C. Anco, and G. Bluman, (1997), Direct construction of conservation laws from field equations, *Physical Review Letters* 78(15) : 2869.
- [9] T. Bakkyaraj, and R. Sahadevan, (2014). On solutions of two coupled fractional time derivative Hirota equations, *Nonlinear Dynamics* 77(4) : 1309–1322.
- [10] S. Butera, and M. Di Paola, (2014), Fractional differential equations solved by using Mellin transform, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 19(7) : 2220–2227.
- [11] G. W. Bluman, and S. Kumei, (2013), *Symmetries and Differential Equations*, Vol. 81, Springer Science and Business Media, New York, USA.

-
- [12] Bluman, G. W., Cheviakov, A. F. and Anco, S. C. (2010), *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Vol. 168, Springer, New York, USA.
- [13] E. Buhe, G. Bluman, and A. H. Kara, (2016), Conservation laws for some systems of nonlinear PDEs via the symmetry/adjoint symmetry pair method, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 436(1) : 94–103.
- [14] Bluman, G. W. and Anco, S. C. (2002), *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*, Vol. 154, Springer, New York, USA.
- [15] E. Buckwar, and Y. Luchko, (1998), Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 227(1) : 81–97.
- [16] G. W. Bluman, and J. D. Cole, (1969), The general similarity solution of the heat equation, *Journal of Mathematics and Mechanics* 18(11) : 1025–1042.
- [17] M. Bouaouid, M. Hannabou, and K. Hilal, " Nonlocal conformable-fractional differential equations with a measure of noncompactness in Banach spaces", *Journal of Mathematics*, vol. 2020, 2020.
- [18] M. Bouaouid, K. Hilal, S. Melliani, Nonlocal telegraph equation in frame of the conformable time-fractional derivative. *Adv. Math. Phys.*, 2019.
- [19] M. Bouaouid, K. Hilal and S. Melliani, Existence of mild solutions for conformable fractional differential equations with non local conditions, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2019.
- [20] T. B. Benjamin, J. L. Bona and J. J. Mahony, (1972), Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 272(1220), 47-78.
- [21] B. J. Cantwell, (2002), *Introduction to Symmetry Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [22] M.L. R. de la Rosa, Gandarias, M.S. Bruzon, Symmetries and conservation laws of a fifth-order KdV equation with time-dependent coefficients and linear damping, *Nonlinear Dynam.* 84 (2016) 135-141.
- [23] L. Debnath, (2003), Recent applications of fractional calculus to science and engineering, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2003(54) : 3413–3442.
- [24] J. F. Douglas, (1997), Some applications of fractional calculus to polymer science, *Advances in Chemical Physics*, Vol. 102, Wiley- Interscience, New York, USA, pp. 121–192.
- [25] L. Euler, (1738). *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebrae dari nequeunt. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 36-57.
- [26] T. S. El-Danaf, M. A. Ramadan, F. E. Abd Alaal, (2005). The use of adomian decomposition method for solving the regularized long-wave equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 26(3), 747-757.
-

-
- [27] L. Feng, S. F. Tian, X. B. Wang, and T. T. Zhang, (2016), Lie symmetry analysis, conservation laws and exact power series solutions for time-fractional Fordy–Gibbons equation, *Communications in Theoretical Physics* 66(3) : 321–329.
- [28] L.L. Feng, S.F. Tian, X.B. Wang, T.T. Zhang : Lie Symmetry Analysis, Conservation Laws and Exact Power Series Solutions for Time-Fractional Fordy-Gibbons Equation. *Communications in Theoretical Physics* 66 (3) (2016) 321.
- [29] J. B. J. Fourier, (1822), *Théorie analytique de la chaleur, Œuvres de Fourier, Vol. 1, Chez Firmin Didot, Paris, France.*
- [30] R. K. Gazizov, , A. A. Kasatkin, and S. Y. Lukashchuk, (2009), Symmetry properties of fractional diffusion equations, *Physica Scripta* 2009(T136) : 014016.
- [31] R. K. Gazizov, A. A. Kasatkin, and S. Y. Lukashchuk, (2007), Continuous transformation groups of fractional differential equations, *Vestnik USATU* 9(21) : 125–135.
- [32] M. Hannabou, K. Hilal, and A. Kajouni, " Existence results of hybrid fractional sequential integro-differential equations", *Eng. Math. Lett.*, 2020, Article-ID.
- [33] Q. Huang, and S. Shen, (2015), Lie symmetries and group classification of a class of time fractional evolution systems, *Journal of Mathematical Physics* 56(12) : 123504.
- [34] M. M. Hosseini, H. Ghaneai, S. T. Mohyud-Din, M. Usman, (2016). Tri-prong scheme for regularized long wave equation. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 20, 68-77.
- [35] P. E. Hydon, (2000), *Symmetry Methods for Differential Equations : A Beginner's Guide, Vol. 22, Cambridge University Press, Cambridge, UK.*
- [36] R. Hirota, and J. Satsuma, (1981), Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation, *Physics Letters A* 85(8-9) : 407–408.
- [37] M. Inc, A. Yusuf, Al Aliyu, D. Baleanu. Time-fractional Cahn-Allen and time-fractional Klein-Gordon equations, lie symmetry analysis, explicit solutions and convergence analysis. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol.493, pp. 94-106, 2018.
- [38] N. H. Ibragimov, (2013), *Transformation Groups and Lie Algebras, World Scientific, London, UK.*
- [39] N. H. Ibragimov, and E. D. Avdonina, (2013), Nonlinear self-adjointness, conservation laws, and the construction of solutions of partial differential equations using conservation laws, *Russian Mathematical Surveys* 68(5) : 889–922.
- [40] N. H. Ibragimov, (2007), A new conservation theorem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 333(1) : 311–328.
- [41] H. M. Jaradat, S. Al-Shara, Q. J. A. Khan, M. Alquran, and Al-Khaled, K. (2016), Analytical solution of time-fractional Drinfeld-Sokolov-Wilson system using residual power series method, *IAENG International Journal of Applied Mathematics* 46(1) : 64–70.
-

-
- [42] D. Kumar, J. Singh, and D. Baleanu, Analysis of regularized long-wave equation associated with a new fractional operator with Mittag-Leffler type kernel. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 492, pp. 155-167, 2018.
- [43] D. Kumar, J. Singh, D. Baleanu, (2017). A new analysis for fractional model of regularized long-wave equation arising in ion acoustic plasma waves. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(15), 5642-5653.
- [44] S. Kumar, Q. Zhou, A. H. Bhrawy, E. Zerrad, A. Biswas, and Belic, M. (2016), Optical solitons in birefringent fibers by Lie symmetry analysis, *Romanian Reports in Physics* 68(1) : 341–352.
- [45] A. Kumar, , S. Kumar, and M. Singh, (2016), Residual power series method for fractional Sharma-Tasso-Oleiver equation, *Communications in Numerical Analysis* 2016(1) : 1–10.
- [46] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, (2006), *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands.
- [47] V. Kiryakova, (1994), *Generalized Fractional Calculus and Applications*, Longman Group, Harlow, UK.
- [48] C. Li, and F. Zeng, (2015), *Numerical Methods for Fractional Calculus*, Vol. 24, CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, USA.
- [49] Y. Liu, Z. Fang, H. Li, and S. He, (2014), A mixed finite element method for a time-fractional fourth-order partial differential equation, *Applied Mathematics and Computation* 243 : 703–717.
- [50] S. F. Lacroix, (1819), *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, 2nd edition, Courcier, Paris, France.
- [51] J. L. Lagrange, (1849), *Sur un nouvelle espèce de calcul relatif a la différentiation et a l'intégration des quantifies variables*, Œuvres de Lagrange, Vol. 3, Gauthier- Villars, Paris, France, pp. 441–476.
- [52] P. S. Laplace, (1820), *Théorie Analytique des Probabilités*, Vol. 7, Courcier, Paris, France.
- [53] J. Liouville, (1832), *Mémoire sur l'intégration de l'équation $(mx^2 + nx + p)\frac{d^2y}{dx^2} + (qx + r)dy/dx + sy = 0$ a l'aide des différentielles a indices quelconques*, *Journal de l'Ecole Polytechnique* 13 : 163–186.
- [54] A. V. Letnikov, (1872), *An explanation of fundamental notions of the theory of differentiation of fractional order*, *Matematicheskii Sbornik* 6 : 413–445.
- [55] R. J. LeVeque, , R. J. Leveque, (1992). *Numerical methods for conservation laws* (Vol. 132). Basel : Birkhäuser.
- [56] Maarouf, N., Hilal, K. (2021). *Invariant Analysis, Analytical Solutions, and Conservation Laws for Two-Dimensional Time Fractional Fokker-Planck Equation*. *Journal of Function Spaces*, 2021.
- [57] R. Magin, *Fractional Calculus in Bioengineering*, Begell House Publishers, 2004.
-

-
- [58] S. Momani, and Z. Odibat, (2007), Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order, *Physics Letters A* 365(5) : 345–350.
- [59] C. Montagnon, A closed solution to the Fokker–Planck equation applied to forecasting. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 420, p. 14-22, 2015.
- [60] Chris Montagnon, A closed solution to the Fokker-Planck equation applied to forecasting, *Physica A*, 420(2015), 14-22.
- [61] R. Metzler and J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion : a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, 339(1) :1–77, 2000.
- [62] K. S. Miller, and B. Ross, (1993), *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York, USA.
- [63] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov, On an extension of the module of invertible transformations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 295 (1987) 288-291.
- [64] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov, Extension of the module of invertible transformations and classification of integrable systems, *Commun. Math. Phys.* 115 (1988) 1-19.
- [65] E. Noether, (1972). Invariante variationsprobleme. *Nachr. vd Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1918 : 235–257, 1918. See also CH Kimberling. *Amer. Math. Monthly*, 79, 136-149.
- [66] R. Naz, F.M. Mahomed, D.P. Mason, Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics, *Appl. Math. Comput.* 25 (2008) 212-230.
- [67] E. Noether, (1971), Invariante variations probleme, *Transport Theory and Statistical Physics* 1 : 186–207.
- [68] N. Ozalp, and O. O. Mizrak, (2017), Fractional Laplace transform method in the framework of the CTIT transformation, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 317 : 90–99.
- [69] A. Ouhadan, and E. H. El Kinani, (2015), Invariant subspace method and fractional modified Kuramoto-Sivashinsky equation, *arXiv :1503.08789*.
- [70] P. J. Olver, (1993), *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, USA.
- [71] P. J. Olver, (1986), *Applications of Lie Groups to Differential Equations.*, Springer-Verlag, New York, USA.
- [72] K. B. Oldham, and J. Spanier, (1974), *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, USA.
- [73] L. V. Ovsiannikov, (1982), *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, New York, USA.
- [74] V. Pandey, (2016), *Physical and Geometrical Interpretation of Fractional Derivatives in Viscoelasticity and Transport Phenomena*, PhD thesis, University of Oslo, Oslo, Norway.
-

-
- [75] A. Prakash, M. Kumar, and K. K. Sharma, (2015), Numerical method for solving fractional coupled Burgers equations, *Applied Mathematics and Computation* 260 : 314–320.
- [76] Peregrine DH. Long waves on a beach. *J Fluid Mech* 1967;27, 815–27.
- [77] I. Podlubny, (1999), *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Deigo, USA.
- [78] B. Riemann, (1876), Versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentia-tion, *Gesammelte Werke* 62 : 331–334.
- [79] A. Sjoberg, (2007). Double reduction of PDEs from the association of symmetries with conser-vation laws with applications. *Applied Mathematics and Computation*, 184(2), 608-616.
- [80] B. Soltanalizadeh, A. Yildirim, (2012), Application of differential transformation method for numerical computation of Regularized Long Wave equation. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 67(3-4), 160-166.
- [81] R. Sahadevan and T. Bakkyaraj, (2015), Invariant subspace method and exact solutions of cer-tain nonlinear time fractional partial differential equations, *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 18(1), 146–162.
- [82] Srinath Vadlamani, 2001 : Study of Lie Symmetries of the Vaidya Equations".
- [83] A. Sjoberg, (2009). On double reductions from symmetries and conservation laws. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 10(6), 3472-3477.
- [84] A.P. Smirnov, A.B. Shmelev and E.Ya. Sheinin, Analysis of Fokker-Planck approach for foreign exchange market statistics study, *Physica A*, 344(2004), 203-206.
- [85] V. E. Tarasov, (2011), *Fractional Dynamics : Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Higher Education Press, Beijing, China.
- [86] A. S. Vatsala, and B. Sambandham, (2016), Laplace transform method for sequential Caputo fractional differential equations., *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA)*. 7(2), 341–349.
- [87] Q. Wang, (2006), Numerical solutions for fractional KdV–Burgers equation by Adomian de-composition method, *Applied Mathematics and Computation* 182(2) : 1048–1055.
- [88] T. Wolf, A comparison of four approaches to the calculation of conservation laws, *Euro. Jnl of Applied Mathematics*, 13, (2002), 129-152.
- [89] X. B. Wang, , S. F. Tian, C. Y. Qin, T. T. Zhang, (2016), Lie symmetry analysis, conservation laws and exact solutions of the generalized time fractional Burgers equation. *EPL (Europhysics Letters)*, 114(2), 20003.
- [90] X.B. Wang, S.F. Tian, Ch.Y. Qin, T.T. Zhang : Lie symmetry analysis, conservation laws and analytical solutions of a time-fractional generalized KdV-type equation. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*. 24 (4), (2017) 516-530.
- [91] X.B. Wang, S.F. Tian, Lie symmetry analysis, conservation laws and analytical solutions of the time-fractional thin-film equation. *Computational and Applied Mathematics*, (2018), 1(13).
-

-
- [92] S. Yang, C. Hua, Lie symmetry reductions and exact solutions of a coupled KdV-Burgers equation, *Appl. Math. Comput.* 234 (2014) 579-583.
- [93] L. Zada, R. Nawaz, (2019, July). Solution of time-fractional order RLW equation using optimal homotopy asymptotic method. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2116, No. 1, p. 300005). AIP Publishing LLC.
- [94] G. M. Zaslavsky, M. Edelman, B. A. Niyazov, (1997), Self-similarity, renormalization, and phase space nonuniformity of Hamiltonian chaotic dynamics. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 7(1), 159-181.
- [95] A. H. Kara, and F. M. Mahomed, (2006), Noether-type symmetries and conservation laws via partial Lagrangians, *Nonlinear Dynamics* 45(3) : 367–383.
- [96] S. Y. Lukashchuk, and A. V. Makunin, (2015), Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term, *Applied Mathematics and Computation* 257, 335–343.
- [97] L. Feng, S. F. Tian, , X. B. Wang, and T. T. Zhang, (2016), Lie symmetry analysis, conservation laws and exact power series solutions for time-fractional Fordy–Gibbons equation, *Communications in Theoretical Physics* 66(3), 321–329
- [98] R. K. Gazizov, N. H. Ibragimov, and S. Y. Lukashchuk, (2015), Nonlinear self-adjointness, conservation laws and exact solutions of time-fractional Kompaneets equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 23(1) : 153–163.
- [99] W. Rui, and X. Zhang, (2015), Invariant analysis and conservation laws for the time fractional foam drainage equation, *The European Physical Journal Plus* 130(10) : 1–7.
- [100] G. Wang, A. H. Kara, and K. Fakhar, (2015), Symmetry analysis and conservation laws for the class of time-fractional nonlinear dispersive equation, *Nonlinear Dynamics* 82(1-2) : 281–287.
- [101] E. Yasar, Y. Yildirim, and C. M. Khalique, (2016), Lie symmetry analysis, conservation laws and exact solutions of the seventh-order time fractional Sawada–Kotera– Ito equation, *Results in Physics* 6, 322–328.
- [102] P. Kumar, and S. Narayanan. "Solution of Fokker-Planck equation by finite element and finite difference methods for nonlinear systems." *Sadhana*, vol. 31, no 4, pp 445-461, 2006.
- [103] Kober, Hermann, (1940). On fractional integrals and derivatives, *The quarterly journal of mathematics*, (1), 193-211.