



UNIVERSITE SULTAN MOULAY SLIMANE
Faculté des Sciences et Techniques
Béni-Mellal



Centre d'Etudes Doctorales « Sciences et Techniques »
Formation doctorale « Mathématiques et physique Appliquées »

THESE

Présentée par

Moha EL IDRISI

Pour l'obtention du grade du

Doctorat National

Spécialité : Physique atomique – Electrodynamique quantique

**Etude des effets relativistes sur le processus d'excitation de
l'atome d'hydrogène par l'impact des particules chargées
en présence du champ laser**

Soutenue le 05 Octobre 2013 devant la commission d'examen :

Président & Rapporteur	: Pr. M. Chabab	Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech.
Rapporteurs	: Pr. A. Adahchour	Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech.
	: Pr. M. Sahlaoui	Faculté des Sciences et Techniques, Beni-mellal.
Examineurs	: Pr. Y. Attaourti	Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech.
	: Pr. L. Oufni	Faculté des Sciences et Techniques, Beni mellal.
	: Pr. B. Manaut	Faculté Polydisciplinaire, Beni mellal.

Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Sciences et Techniques (LIRST)
Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane
Béni Mellal, Maroc.

Directeur de thèse : Pr B. MANAUT

Co-encadrant : Pr L. OUFNI

”

Etude des effets relativistes sur le processus
d'excitation de l'atome d'hydrogène par
l'impact des particules chargées en présence du
champ laser.

”

Moha El IDRISSI

Beni Mellal, le _____

Nom et prénom de l'auteur : Moha EL IDRISSE

Intitulé du travail :

" Etudes des effets relativistes sur le processus d'excitation de l'atome d'hydrogène par l'impact des particules chargées en présence du champ laser."

Nom et prénom du directeur de thèse : Bouzid MANAUT (FP Beni mellal)

Nom et prénom du co-encadrant : Lhoucine OUFNI (FST Beni mellal)

Ce travail de thèse a été réalisé en collaboration avec :

- Le laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, FST, Beni Mellal.
- Le laboratoire de Physique des Hautes Energies et Astrophysiques, (LPHEA), FSSM, Marrakech.

Les publications de la thèse sont :

1. Laser-Assisted Semi-Relativistic Excitation of Atomic Hydrogen by Electronic Impact. **S. Taj, B. Manaut, M. El Idrissi, and L. Oufni, Chin. J. Phys., 49, 1165-1177, (2011).**
2. Spin effects in laser-assisted semi-relativistic excitation of atomic hydrogen by electronic impact. **M. El Idrissi, S. Taj, B. Manaut, and L. Oufni, J. At. Mol. Sci., 4, 95-104, (2013).**

3. Electron's anomalous magnetic moment effects on the semi-relativistic excitation of atomic hydrogen by electronic. **M. El Idrissi, S. Taj, B. Manaut, and L. Oufni, Indian J Phys, DOI 10.1007/s12648-013-0392-3, REVIEW PAPER.**

Les collaborations scientifiques :

1. Relativistic elastic scattering of hydrogen atom by positron impact in a circularly polarized laser field.. **B. Manaut, S. Taj and M. El Idrissi, Can. J. Phys, 91 : 696-702, (2013).**
2. Muon's anomalous magnetic moment effects on laser assisted coulomb scattering process. **S. Taj, B. Manaut, M. El Idrissi, and L. Oufni, J. At. Mol. Sci, 4 ,18-29, (2013).**
3. Electron's anomalous magnetic moment effects on laser assisted ionization of atomic hydrogen by electronic impact. **S. Taj, B. Manaut, M. El Idrissi, Y. Attaourti, and L. Oufni, (Chin. J. Phys. Voir la lettre d'acceptation attachée).**
4. Heavy electron's anomalous magnetic moment effects on laser assisted Coulomb scattering process. **S. Taj, B. Manaut and M. El Idrissi, Afr. J. Math. Phy, 11, 27-39, (2012).**

Les communications dans des congrès nationaux et internationaux :

1. **M. El idrissi, B. Manaut, S. Taj, L. Oufni, Spin effects in laser-assisted semirelativistic excitation of atomic hydrogen by electronic impact, JSCU-1, 24-26 Avril 2012, Faculté Polydisciplinaires - Beni Mellal, Maroc.**
 2. **B. Manaut, S. Taj, M. El idrissi and L. Oufni, spin effects in laser-assisted semi relativistic excitation of atomic hydrogen by electronic impact, Congrès annuel, L'approche opératoirelle an mathématique, 26-28 Juin 2012, Faculté des Sciences - Kenitra, Maroc.**
 3. **M. El idrissi, S. Taj, B. Manaut and L. Oufni, Étude des processus d'excitation d'hydrogène atomique par impact électronique en présence d'un champ laser, 7RNJCP, 20-21 Décembre 2012, Faculté des Sciences Ben M'sik, Casa Blanca, Maroc.**
-

4. **M. El idrissi, S. Taj, B. Manaut and L. Oufni, Approximate calculation of the Differential Cross Section (DCS) by numerical integration** , SITACAM'13 2-4 May 2013, Faculté des Sciences et Techniques - Beni Mellal, Maroc.
 5. **M. El idrissi, S. Taj, B. Manaut and L. Oufni, spin effects in laser-assisted semi relativistic excitation of atomic hydrogen by electronic impact**, International Workshop, Max-planck Institut for the Physics Complex System, 14-20 Avril 2013, Dresten, Allemagne.
-

REMERCIEMENTS

La personne à qui je dois le plus, Monsieur le Professeur **MANAUT Bouzid**, directeur de thèse. Il a été un guide merveilleux : scientifique fourmillant d'idées, toujours prêt à commencer une nouvelle expérience, d'un enthousiasme à toute épreuve, c'est sûrement lui qui m'a communiqué cette fièvre de la recherche scientifique. Merci de m'avoir fait confiance, de m'avoir toujours soutenu et de m'avoir permis de devenir un chercheur indépendant.

Aussi son épouse Mme **TAJ Souad**, Professeur à la Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Sliman pour son soutien tout au long de la durée de cette thèse et pour ses encouragements et ses idées qui étaient précieuses. A travers vous Mme **TAJ**, un grand respect à la femme marocaine.

Je tiens également à remercier le Professeur de la Faculté des Sciences et Techniques de Beni-Mellal **OUFNI Lhoucine** pour l'honneur de son co-encadrement, j'exprime ma reconnaissance à sa gentillesse, son soutien et ses conseils pertinents.

Je remercie vivement aussi tous les Professeurs sans exception de la Faculté Polydisciplinaire et aussi ceux de la la Faculté des Sciences et Techniques pour leur intérêt et leur soutien.

J'adresse mes vifs remerciements aux membres du Laboratoire de Physique des Hautes Energies et Astrophysique (**LPHEA**) de la Faculté des Sciences Semlalia, Université Cadi Ayyad, Marrakech (**Y. Attaourti, Z. Benkhaldoun, M.Y El azhari, M. Chabab, R.**

Benbrik, A. Adahchour,...), c'est ce laboratoire qui nous a accueilli, et c'est dans ce dernier que nous appris les premières étapes de base de la recherche scientifique.

Je tiens à remercier également tous mes chers amis : **Lhadj A. Amhi** et son épouse **N. Rabha**, **M. Boukari**, **L. Roussafi**, **L. Zerdag**, **F. Mebrouk**, **S. Issam**, **S. Airou**, **A. Bakhti**, **A. Ghafry**, **A. Saddadi**, **A. Ouchlou....**

Enfin, j'adresse toute mon affection à ma famille, et en particulier ma chère mère **LHAJJA**, mes frères et ma femme **Hanane** pour leurs patience. Je cite très particulièrement mon frère **Lhousseine**.

Merci à toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Je vous aime.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	7
Introduction générale	13
1 Formalisme et théorie générale	23
1 Système d'unités et notations	23
2 La théorie des perturbations et approximation de Born	26
2.1 Élément de matrice de transition S_{fi}	28
2.2 Section efficace non polarisée, sommation sur les spins	31
2.3 Probabilité de transition et section efficace différentielle (SED)	32
3 Electron dans le champ d'une onde électromagnétique plane	33
3.1 Solutions de l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique (ondes de Dirac-Volkov)	34
3.2 Densité de courant qui correspond aux fonctions d'ondes de Volkov	36
3.3 Rayonnement d'un photon par un électron dans le champ d'une onde électromagnétique intense	37

4	Electron dans le champ d'une onde électromagnétique plane en tenant compte de son moment magnétique anomal MMA	43
2	Collisions non relativistes électron-atome d'hydrogène	49
1	Préliminaire	49
2	La diffusion des électrons rapides par l'atome d'hydrogène, calculs à la première approximation de Born	52
2.1	La collision élastique $1s - 1s$	53
2.2	Excitation inélastique $1s - 2s$	56
2.3	Excitation inélastique $1s - 2p$	58
3	Conclusion	61
3	Excitation inélastique semi-relativiste $1s_{1/2} - 2s_{1/2}$ de l'hydrogène atomique par impact électronique	65
1	Introduction	65
2	Théorie de la collision inélastique $1s_{1/2} \rightarrow 2s_{1/2}$ en absence du champ laser	67
3	Calcul de la partie intégrale	70
3.1	Intégration sur la variable \mathbf{r}_2	70
3.2	Intégration sur la variable \mathbf{r}_1	70
3.3	La partie spinorielle	71
4	Théorie de la collision inélastique $1s-2s$ en présence du champ laser	72
5	Résultats et discussion	74
5.1	Densités de probabilité des fonctions d'onde radiales	74
5.2	Absence du champ laser	74
5.3	Présence du champ laser	77
6	Calcul approché de la SED par intégration numérique	79

6.1	Méthodes de quadrature de Gauss	81
6.2	Exemples d'application	83
6.3	Calcul de la SED de l'excitation inélastique $1s_{1/2} - 2s_{1/2}$	83
6.4	Excitation inélastique $1s_{1/2} - 2s_{1/2}$ non relativiste	85
6.5	Excitation inélastique $1s_{1/2} - 2s_{1/2}$ relativiste	85
7	Conclusion	86
4	Excitation semi-relativiste de l'atome d'hydrogène par impact d'électrons polarisés en présence du champ laser	91
1	Introduction	91
2	Théorie de la collision	93
3	Discussion des résultats	98
4	Conclusion	101
5	L'effet du moment magnétique anomal de l'électron sur les collisions inélastique électron-atome d'hydrogène en présence du champ laser	105
1	Théorie de collision inélastique électron-atome d'hydrogène en absence de l'effet MMA	107
2	Théorie de la collision inélastique (1s-2s) e-H en présence de l'effet MMA	109
3	Résultats et discussion	111
3.1	Le régime non relativiste	112
3.2	Le régime relativiste	114
4	Conclusion	116
	Conclusion générale et perspectives	121

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'invention du laser en 1960 (Maiman [1]) a marqué le début d'une grande aventure scientifique et technologique. Les lasers sont maintenant utilisés quasiment partout dans notre vie quotidienne. Les physiciens, quelques années seulement après l'avènement de cette nouvelle invention, commençaient à expérimenter et focaliser ces lasers dans la matière afin de créer les premiers plasmas lasers. Un nouveau champ de recherche, dédié à l'étude de l'interaction d'ondes lumineuses intenses avec la matière était né : l'interaction laser-plasma. Jusqu'au milieu des années 80, la technologie laser permettait de délivrer des impulsions lumineuses de durée d'environ $1ns$ ($10^{-9}s$) pour des intensités d'environ $10^{15} W/cm^2$. A l'époque, la motivation principale des physiciens de l'interaction laser-plasma provenait d'un rêve fou : la production et le contrôle de l'énergie de fusion thermonucléaire, l'énergie des étoiles. Les études effectuées dans les années 70 et 80 portaient donc essentiellement sur ce problème : il s'agissait de coupler l'énergie laser à la matière afin de la comprimer et de la chauffer pour atteindre des conditions de température et de pression proches de celles du soleil (Nuckolls et al. [2] et Lindl [3]). Dans de telles conditions, les noyaux légers (hydrogène, hélium) seraient alors capables de fusionner tout en libérant une importante quantité d'énergie. La fin des années 80 a vu émerger une technique d'amplification laser permettant d'atteindre des régimes d'impulsions totalement nouveaux. Ainsi, ces laser CPA (Chirped-Pulse Amplification) [4], ou à dérive de fréquence, permettent aujourd'hui d'atteindre des intensités lumineuses cent mille fois plus importantes ($10^{20} W/cm^2$) et des durées d'impulsions de 10 femtosecondes ($10^{-14}s$).

Ce nouveau régime de fonctionnement femtoseconde a ouvert l'utilisation des lasers à de nombreux autres domaines scientifiques car ces lasers sont maintenant la source électromagnétique la plus courte qui existe. On peut donc les utiliser pour sonder la matière sur des échelles de temps très courtes. A haute intensité du champ laser, l'interaction avec la matière entre dans le régime relativiste, dans lequel l'électron, entraîné par le laser intense, se déplace avec une vitesse comparable à celle de la lumière, c . Techniquement, il faut résoudre l'équation de Dirac pour la dynamique relativiste.

L'électrodynamique quantique QED (Quantum Electrodynamics) est une théorie physique ayant pour but de concilier l'électromagnétisme avec la mécanique quantique en utilisant un formalisme Lagrangien relativiste. Selon cette théorie, les charges électriques interagissent par échange de photons. Fondée par Dirac dans les années 1930 avec l'invention de l'équation d'onde relativiste portant son nom, et mise au point dans les années 1950 par Feynman [5–7], Tomonaga [8] et Schwinger [9, 10], elle donne une formulation covariante complète à tous les ordres de la série de perturbation. Aussi la découverte expérimentale du moment magnétique anomal de l'électron [11, 12] et le déplacement de Lamb [13] a encouragé de nouveaux développements théoriques de l'QED dans la fin des années 1940. QED est une théorie qui occupe une place importante parmi les théories physiques utilisées dans le formalisme nécessaire pour obtenir les prédictions théoriques pour la compréhension des différents processus fondamentaux. Le succès de l'QED provient de l'accord quantitatif entre les calculs numériques et les résultats expérimentaux.

Parmi les preuves du succès de l'électrodynamique quantique, le calcul du moment magnétique anomal de l'électron qui provient des corrections radiatives (avec une précision de l'ordre de 10^{-12} [14, 15]), le décalage Lamb dans les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène [16]. Avec la théorie de l'QED, on a pu réaliser les calculs théoriques des processus de la diffusion de Moller [17] et celle de Bhabha [18] qui décrivent, respectivement, la diffusion électron-électron et la diffusion électron-positron. Pour un historique général du développement de cette première période voir Pais [19]. L'interaction d'un champ externe et un électron a d'abord été étudié par Thomson [20], en déterminant la solution pour l'orbite d'un électron non relativiste en mouvement dans le champ d'une onde électromagnétique monochromatique plane. Mais l'avènement de la théorie quantique relativiste présente des difficultés pour un

traitement rigoureux du champ externe. Les interactions avec chaque particule d'un champ externe quantifié mènent à des calculs complexes. Une approximation semi-classique traitant le champ externe classiquement et négligeant l'interaction photon-champ externe, s'est avérée nécessaire. De tels calculs ont mené à la solution de l'équation de Dirac pour un électron dans le champ externe classique. Ces solutions ont été trouvées pour un champ électrique constant et un champ magnétique croisé [21] et pour un champ d'onde électromagnétique plane [22]. Pour les champs externes pour lesquels l'équation de Dirac ne pouvait pas être résolue exactement, l'approximation de Born est nécessaire. L'approximation de Born consiste en un développement des éléments de la matrice de transition (de l'électrodynamique quantique) en puissances de la constante de couplage. La possibilité de la polarisation du vide en paire électron-positron observée expérimentalement en 1997 [23] est l'une des premières conséquences du champ externe en électrodynamique quantique.

Le mouvement des électrons dans un champ électromagnétique externe est parmi les problèmes fondamentaux du champ externe considéré à étudier. Plusieurs auteurs considèrent la solution de Volkov comme une somme infinie de contributions liées au nombre de photons du champ externe interagissant avec les électrons. D'autres auteurs ont étendu les travaux de Volkov. Sengupta [24] a résolu l'équation de Dirac pour un électron dans un champ externe composé de deux ondes électromagnétiques planes polarisées. Bagrov [25, 26] a trouvé la solution exacte de l'équation de Dirac-Volkov d'un électron relativiste interagissant avec un champ quantique et classique en mouvement dans la même direction. Fédorov [27] a proposé une méthode de construction d'un système orthonormal complet pour la fonction d'onde de l'électron dans le champ d'une onde électromagnétique monochromatique quantifiée. Une expérience au SLAC (Stanford Linear Accelerator Center, à Stanford, aux Etats-Unis) impliquant l'interaction d'un laser intense avec un faisceau d'électrons a montré clairement l'apparition de plusieurs photons du laser contribuant au processus [28]. Une série d'expériences similaires en Europe, sur l'interaction électron-laser ont été réalisées et montre un changement de masse de l'électron à cause de l'action du champ laser sur celui-ci [29, 30], plusieurs autres ont eu lieu au CERN au cours des dernières années, impliquant des processus de fermions dans des champs intenses dans des réseaux atomiques de cristaux [31]. Un bon accord a été trouvé avec les calculs théoriques des processus de l'QED dans les cristaux [32].

Schwinger [21] et Valatin [33] ont étudié le propagateur de l'électron dans un champ électromagnétique externe, ils ont tous les deux obtenu une représentation en temps propre. Schwinger a considéré le cas d'un champ électromagnétique constant alors que Reiss [34] a trouvé une expression exacte pour la fonction de Green de l'électron en présence d'une onde électromagnétique plane intense polarisée circulairement. Le résultat de Reiss a révélé que les électrons sous l'influence du champ externe gagnent un incrément de masse (l'électron acquiert une nouvelle masse que l'on appelle masse effective). Ritus [35] a obtenu une autre représentation pour le propagateur d'électrons dans le champ d'une onde électromagnétique plane en termes des fonctions de Dirac-Volkov.

L'étude théorique des collisions électron-atome en présence d'un champ laser est en général très complexe, car en plus des difficultés liées au traitement de la diffusion électron-atome sans champ laser, la présence du champ laser introduit de nouveaux paramètres tels que la fréquence du laser, l'intensité et la polarisation du champ laser qui peuvent influencer les collisions, et il faut aussi tenir compte de l'interaction électron-laser dans laquelle l'électron peut interagir fortement avec le champ laser et provoquer le processus de bremsstrahlung stimulé; l'interaction atome-laser peut modifier les états atomiques impliqués dans le processus de diffusion, en plus de l'interaction électron-atome. L'étude théorique des collisions électron-atome en présence d'un champ laser intense a connu une longue histoire. Depuis les années soixante, les différents aspects de la diffusion d'un électron non relativiste se déplaçant dans un champ laser et sous l'influence d'un potentiel externe a été pris en compte dans de nombreux articles scientifiques [36–42]. Plus tard, ces études ont été étendues aux collisions inélastiques assistées par le champ laser [43]. Plus récemment, une grande attention a été accordée aux processus impliquant des électrons relativistes dans des champs laser intenses y compris les collisions assistées par un champ laser entre les électrons relativistes et les cibles atomiques. Attaourti et al [44] ont étudié l'excitation relativiste de l'atome d'hydrogène par impact d'électrons relativistes en présence d'un champ laser polarisé circulairement. Dans toutes les études de ces collisions, la cible était considérée comme source d'un potentiel extérieur agissant sur les électrons et dont la structure interne n'est pas influencée par le processus de la collision, ce qui est le cas ici. Les deux phénomènes de collisions assistées et induites par le laser sont de nos jours observés dans les laboratoires. Spécialement Hohr et al [45, 46] ont réalisé une expérience

cinématique complète de l'atome d'Hélium par impact d'électron en présence d'un champ laser intense. L'un des plus simples processus de diffusion est celui de Mott qui a été traité par Szymanowski et *al* [47] en présence d'un champ laser polarisé circulairement, Manaut et *al* [48] ont traité le même processus avec un champ laser polarisé linéairement et introduisant le concept des électrons polarisés. Li et *al* [49] ont publié un article sur le même processus sans tenir compte de la polarisation des électrons.

Concernant notre travail de recherche, son objectif c'est d'étudier comment la présence d'un champ laser modifie les processus de l'QED et comment ils dépendent des paramètres comme l'amplitude, la fréquence, la polarisation et l'intensité du champ laser, ainsi on mentionne la présence des effets relativistes en utilisant le traitement relativiste de Dirac-Volkov. Le premier chapitre de notre travail est consacré à quelques généralités et notions utilisées pour calculer la section efficace différentielle des processus étudiés à la première approximation de Born dans le cadre de la théorie des perturbations. Ensuite, on cherche la solution de l'équation de Dirac-Volkov pour trouver la fonction d'onde de l'électron dans le champ d'une onde électromagnétique plane. On a abordé dans le second chapitre quelques cas de collision non relativiste de l'atome d'hydrogène en absence du champ laser. Dans le troisième chapitre on a étudié le processus de l'excitation semi-relativiste inélastique $1s_{1/2} - 2s_{1/2}$ de l'atome d'hydrogène décrit par les fonctions de Darwin, dont on étudiera l'effet de l'augmentation du nombre atomique Z et la vérification de la règle de somme et on a montré aussi l'importance de l'intégration numérique. Le même processus est traité dans le quatrième chapitre en tenant compte du concept du spin polarisé ainsi que l'habillage du faisceau électronique. Le degré de polarisation est l'objet d'une discussion et on a vérifié le résultat de l'excitation élastique relativiste des travaux antérieurs [48]. Le dernier chapitre traite le processus de la collision inélastique électron-atome d'hydrogène assisté par le champ laser polarisé circulairement en introduisant le moment magnétique anomal de l'électron. La corrélation entre l'anomalie de l'électron et l'habillage électronique donne de nouveaux résultats pour la section efficace différentielle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. H. Maiman, stimulated optical radiation in ruby. *Nature* **187**, 493 (1960).
- [2] J. Nuckolls, L. Wood, A. Thiessen and G. Zimmerman. *Nature* **239**, 139, (1972).
- [3] J. Lindl. *Phys. Plasmas* 2, no. **11**, 3933, (1995).
- [4] D. Strickland and G. Mourou, *Opt. Comm.* **56**, 219,(1985).
- [5] R. P. Feynman, Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics, *Phys.Rev*, **76**, 769, (1949).
- [6] R. P. Feynman, The Theory of Positrons, *Phys.Rev*, **76**, 749, (1949).
- [7] R. P. Feynman Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction, *Phys.Rev*, **80**, 440, (1950).
- [8] S. Tomonaga, On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields, *Progress of Theoretical Physics*, **1**, 27, (1946).
- [9] J. Schwinger, On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron, *Phys.Rev*, **73**, 416, (1948).
- [10] J. Schwinger, Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation, *Phys.Rev*, **74**, 1439, (1948).
- [11] P. Kusch and H. M. Foley, *Phys.Rev*, **72**, 1256, (1947).
- [12] P. Kusch and H. M. Foley, *Phys.Rev*, **73**(4), 412 (1948).

-
- [13] W. E. Lamb and R. C. Rutherford, *Phys.Rev*, **72**, 241 (1947).
- [14] B.Odom, D. Hanneke, B. D'Urso, G.Gabrielse, *Phys. Rev.Lett.*, **97**, 030801 (2006).
- [15] G. Gabrielse, D. Hanneke, T. Kinoshita, M. Nio and B. Odom, *Phys. Rev.Lett.*, **97**, 030802 (2006).
- [16] R. P. Feynman, Chapter 1. QED : The Strange Theory of Light and Matter. *Princeton University Press* p.6 (1985).
- [17] C. Moller, *Ann. Physik.*, **14**, 568 (1932).
- [18] H. J. Bhabha, *Proc. Roc. Soc.*, **152**, 559, (1935).
- [19] A. Pais, *Inward Bound : of matter and forces in the Physical World* Clarendon Press, Oxford, England (1986).
- [20] J. J. Thomson, *Conduction of Electricity through Gases*, **2** Cambridge University Press, Cambridge, England (1933).
- [21] J. Schwinger, *Phys. Rev*, **82**, 664 (1951).
- [22] D. M. Volkov, *Zeitschrift für Physik*, **94**, 250, (1935).
- [23] Levine, I., TOPAZ Collaboration. "Measurement of the Electromagnetic Coupling at Large Momentum Transfer". *Phys. Rev. Lett*, **78**, 424, (1997).
- [24] N. D. Sengupta, *Z. Phys*, 200 :13 (1967)
- [25] V. G. Bagrov et al, *Russian Physics Journal*, **17**(12), 1709, (1974)
- [26] V. G. Bagrov et al, *Russian Physics Journal*, **18**(7), 909, (1975).
- [27] M. V. Fedorov, *Sov. Phys JETP*,**41**, 601, (1975).
- [28] C. Bamber et al., *Phys. Rev. D*, **60**(9), 092004 (1999).
- [29] D.D. Meyerhofer et al., *Phys. Rev. Lett*, **74**, 2439 (1995).
- [30] D.D. Meyerhofer et al., *J. Opt. Soc. Am. B*, **13**, 113 (1996).
- [31] U.I. Uggerhoj, *Rev. Mod. Phys.*, **77**, 1131 (2005).
- [32] V.N. Baier, V.M. Katkov and V.M. Strakhovenko, *Phys. Lett.*, **95A**, 403, (1983).
- [33] J. Valatin, *J. Phys. Radium*, **12**, 607 (1951).
- [34] H. R. Reiss and J. L. Eberly, *Phys. Rev*, **151**, 1058, (1966).
-

-
- [35] V. I. Ritus, *Ann. Phys*, **69**, 555, (1972).
- [36] F. V. Bunkin and M. V. Fedorov, *Sov. Phys. JETP*, **22**, 844 (1966).
- [37] C. J. Joachain, in "Fundamentals of Laser Interactions," ed. by F. Ehlotzky (Springer-Verlag, Berlin, p. 37 (1985).
- [38] C. J. Joachain, *Laser Chem*, **11**, 273, (1991).
- [39] P. Francken and C. J. Joachain, *J. Opt. Soc. Am. B*, **7**, 554 (1990).
- [40] N. J. Mason, *Contemp. Phys.*, **30**, 449 (1989).
- [41] M.N. Kroll, K.M. Watson, *Phys. Rev, A* **8**, 804 (1973).
- [42] F. Ehlotzky, *Phys. Rep.*, **345**, 175 (2001).
- [43] F. Ehlotzky, A. Jaron, J.Z. Kaminski, *Phys. Rep*, **297**, 63 (1998).
- [44] Y. Attaourti et al, *Phys. Rev. A*, **69**, 63407 (2004); *Phys. Rev. A*, **70**, 023404 (2004).
- [45] C. Höhr, A. Dorn, B. Najjari, D. Fischer, C.D. Schröter, J. Ullrich, *Phys. Rev. Lett*, **94**, 153201 (2005).
- [46] C. Höhr, A. Dorn, B. Najjari, D. Fischer, C.D. Schröter, J. Ullrich, *Phys. Rev. Lett*, **94**, 153201 (2005).
- [47] C. Szymanowski et al, *Phys. Rev A*, **56**, 3846 (1997).
- [48] B. Manaut et al, *Phys. Rev. A*, **71**, 043401 (2005).
- [49] S. M. Li et al, *Phys. Rev. A*, **67**, 063409 (2003).
-

CHAPITRE 1

FORMALISME ET THÉORIE GÉNÉRALE

Lorsqu'une particule a une vitesse proche de celle de la lumière, il est nécessaire de décrire son mouvement en généralisant l'équation de Schrödinger non relativiste au domaine relativiste. Les méthodes employées pour cette généralisation doivent être consistantes avec les équations de transformation de Lorentz. On considère par la suite l'équation de Dirac décrivant les particules de spin demi-entier (les électrons et les positrons, les protons, etc.).

1 Système d'unités et notations

Pour simplifier les expressions des quantités physiques tout au long de ce travail, on va utiliser les unités atomiques (u.a). Ces unités réduisent la masse et la charge de l'électron ainsi que la constante de Planck et la constante de la force de Coulomb à l'unité :

$$\hbar = m_e = e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1, \quad (1.1)$$

où $-e$ est la charge de l'électron et m_e sa masse, \hbar la constante de Planck h divisée par 2π . Avec cette définition, on peut construire des quantités dont la valeur est égale à 1 et qui possèdent la dimension physique de grandeurs fondamentales. On obtient donc une unité atomique de la distance égale au rayon de Bohr a_0 ($a_0 = \hbar/m_e\alpha c$) qui est le rayon de la première orbite de

l'atome d'hydrogène et une unité atomique de l'énergie (énergie de Hartree, $E_H = \alpha^2 m_e c^2$), avec α est la constante de structure fine sans dimension définie par :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \sim \frac{1}{137.036} \quad (1.2)$$

ce qui donne pour la vitesse de la lumière c :

$$c \simeq 137.036 \text{ u.a.} \quad (1.3)$$

Ainsi l'unité atomique de mesure de l'énergie est : $1 \text{ u.a.} \simeq 27,2116 \text{ eV}$. De même on peut donner une unité atomique de l'intensité, du champ électrique et de la fréquence (la fréquence utilisée tout au long de ce travail est : $f = 0,043 \text{ u.a.} = 1,17 \text{ eV}$, qui correspond à la transition d'un laser Neodymium Nd) :

– Pour l'intensité :

$$I_A = \frac{E_H^2}{\hbar a_0^2} = 1 \text{ u.a.} \quad (1.4)$$

$$\simeq 3.5 \cdot 10^{16} \text{ W/cm}^2 \quad (1.5)$$

– Pour le champ électrique :

$$\varepsilon_A = \frac{E_H}{ea_0} = 1 \text{ u.a.} \quad (1.6)$$

$$\simeq 0.5 \cdot 10^9 \text{ V/cm} \quad (1.7)$$

– Et pour la fréquence :

$$f = \frac{E_H}{\hbar} \quad (1.8)$$

Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ utilisé est de la forme suivante :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

ainsi pour un quadri-vecteur contravariant $x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$, le quadri-vecteur covariant sera de la forme :

$$\begin{aligned} x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) \\ &= g_{\mu\nu} x^\nu \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= (x^0, -\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Le produit de Lorentz des quadri-vecteurs est exprimé par "." :

$$a.b = \sum_{\mu=0}^3 a^\mu b_\mu = a^0 b_0 - \mathbf{ab} \quad (1.11)$$

Les lettres en gras représentent le vecteur à trois dimensions (x, y, z) .

La dérivée partielle est écrite comme :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \nabla \right). \quad (1.12)$$

La notation slash de Feynman : $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$ où les γ^μ sont les matrices de Dirac représentées par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Les matrices γ satisfont la relation $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$. On peut utiliser la représentation de Dirac pour écrire ces matrices en fonction des matrices de Pauli σ^i comme :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

avec

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Les solutions de l'équation de Dirac pour un électron $(\not{p} - c)\psi(x) = 0$ sont données par une onde plane sous la forme suivante :

$$\psi(x) = \frac{u(p, s)}{\sqrt{EV}} e^{-ip \cdot x} \quad (1.17)$$

où p est la quadri-impulsion de l'électron. V est le volume de normalisation, c.à.d que la fonction d'onde est normalisée à 1 dans une boîte de volume V , $u(p, s)$ est le bispineur de Dirac satisfaisant la condition $u\bar{u} = 2c$.

2 La théorie des perturbations et approximation de Born

La plupart des problèmes de la mécanique quantique n'ont pas de solution analytique ; seuls quelques problèmes idéalisés possèdent une solution exacte de l'équation de Schrödinger. Il est dès lors indispensable de développer des méthodes d'approximation. La théorie des perturbations traite des situations dans lesquelles un système physique réel peut être décrit par une petite déviation d'un système idéal (solvable). Elle fournit des solutions analytiques approximatives pour de nombreux problèmes et permet l'interprétation des phénomènes physiques. Cette théorie consiste à donner une expression sous la forme d'un développement en séries de puissance d'un paramètre. En électrodynamique quantique, ce paramètre est la constante de couplage appelée la constante de structure fine notée α .

L'équation de Schrödinger est donnée par :

$$H\phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r}) \quad (1.18)$$

où H est l'hamiltonien donné par :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}). \quad (1.19)$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante :

$$[\nabla^2 + k^2]\phi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}). \quad (1.20)$$

Les solutions de cette équation peuvent être écrites sous la forme d'une équation intégrale ou l'équation de Lippmann-Schwinger [1] :

$$\phi_{k_i}(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \phi_{k_i}(\mathbf{r}') \quad (1.21)$$

où $\phi_0(\mathbf{r})$ est la solution de l'équation homogène : $(\nabla^2 + k^2)\phi_0(\mathbf{r}) = 0$, \mathbf{k}_i est le vecteur d'onde incident et $G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est la fonction de Green donnée par [2] :

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (1.22)$$

Dans le problème de diffusion que nous étudions, la fonction $\phi_0(\mathbf{r})$ est tout simplement l'onde plane incidente. On note cette fonction d'onde ψ_{k_i} normalisée telle que : $\psi_{k_i}(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} \mathbf{exp}(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$. On commence par cette dernière comme approximation à l'ordre zéro pour résoudre par itération l'équation (1.21) et on obtient :

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \psi_{k_i}(\mathbf{r}) \quad (1.23)$$

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \psi_{k_i}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi_{k_i}(\mathbf{r}')$$

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \psi_{k_i}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \phi_1(\mathbf{r}')$$

⋮

$$\phi_n(\mathbf{r}) = \psi_{k_i}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \phi_{n-1}(\mathbf{r}'). \quad (1.24)$$

On suppose que le potentiel d'interaction est réel et local. On considère la représentation de l'amplitude de diffusion :

$$f = -2\pi^2 \langle \phi_{k_f} | V | \psi_{k_i} \rangle. \quad (1.25)$$

Si on remplace la fonction d'onde exacte de diffusion ψ_{k_i} successivement dans l'équation (1.25) par les fonctions de la séquence (1.24), on obtient la séquence correspondante :

$$f_{B_1} = -2\pi^2 \langle \Phi_{k_f} | V | \phi_0 \rangle \quad (1.26)$$

$$f_{B_2} = -2\pi^2 \langle \Phi_{k_f} | V | \phi_1 \rangle$$

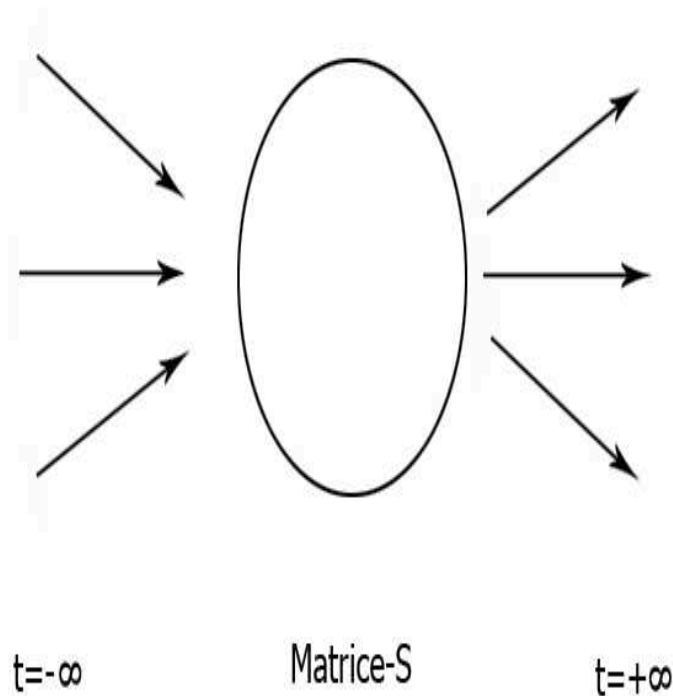
⋮

$$f_{B_n} = -2\pi^2 \langle \Phi_{k_f} | V | \phi_{n-1} \rangle. \quad (1.27)$$

Les quantités $f_{B_1}, f_{B_2}, \dots, f_{B_n}$ sont nommées respectivement la première approximation de Born, la seconde approximation de Born, \dots , la nième approximation de Born de l'amplitude de diffusion.

2.1 Élément de matrice de transition S_{fi}

On cherche la probabilité qu'un ensemble de particules, libres loin dans le passé, se diffusent en un autre ensemble de particules, libres loin dans l'avenir. La diffusion est due aux interactions. Pour ceci, il faut calculer la matrice-S montrée sur le schéma suivant :



on a :

$$H = H_0 + H_I,$$

où H_0 et H_I sont, respectivement, les hamiltoniens libres et avec interactions. Dans ce modèle, on a deux cas :

(i)- Absence d'interaction ($H_I = 0$) : à t_0 , on définit $\psi(t_0, \vec{x})$. Plus tard, au temps t ,

$$\psi(t, \vec{x})|_{H_I=0} = e^{iH_0(t-t_0)}\psi(t_0, \vec{x})e^{-iH_0(t-t_0)} \equiv \psi_I(t, \vec{x}) \quad (1.28)$$

$\psi_I(t, \vec{x})$ est le champ dans la représentation d'interactions. Il est connu, c'est simplement le champ libre au temps t .

(ii)- On rajoute les interactions :

$$\begin{aligned} \psi(t, \vec{x}) &= e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}\psi_I(t, \vec{x})e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \\ &\equiv U^+(t, t_0)\psi_I(t, \vec{x})U(t, t_0). \end{aligned} \quad (1.29)$$

L'opérateur d'évolution est :

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.30)$$

$U(t, t_0)$ satisfait à :

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}(H - H_0)e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.31)$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)}H_Ie^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.32)$$

$$= H_I(t)U(t, t_0). \quad (1.33)$$

La matrice S est définie comme étant $U(t, t_0)$. Donc il faut résoudre l'équation ci-dessus.

On a : $U(t_0, t_0) = U(t, t) = \mathbb{1}$. Compte tenu de cette condition initiale, l'équation différentielle du premier ordre (1.33) spécifie complètement l'opérateur U . Une définition équivalente est alors donnée par l'équation intégrale :

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt' H_I(t')U(t', t_0) \quad (1.34)$$

$$= \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \left[\mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t'')U(t'', t_0) \right] \quad (1.35)$$

$$= \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt' H_I(t')dt' + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t')H_I(t'')U(t'', t_0). \quad (1.36)$$

Par itérations successives, on trouve un développement en puissance de H_I :

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0) \quad (1.37)$$

avec

$$U^{(n)}(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n). \quad (1.38)$$

On introduit le produit chronologique de Dyson :

$$T[H_I(t_1), H_I(t_2), \dots, H_I(t_n)] = H_I(t_{i_1}) H_I(t_{i_2}) \dots H_I(t_{i_n}) \quad (1.39)$$

$$t_{i_1} > t_{i_2} \dots > t_{i_n}.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$U^{(n)}(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{[t_0, t]^n} dt_1 \dots dt_n T(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)). \quad (1.40)$$

En insérant l'équation (1.40) dans l'équation (1.37), on obtient la série de Dyson pour l'opérateur d'évolution :

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{[t_0, t]^n} dt_1 \dots dt_n T[H_I(t_1) \dots H_I(t_n)]. \quad (1.41)$$

Ce dernier résultat est souvent écrit sous forme symbolique :

$$U(t, t_0) = T \left[\exp \left(\frac{1}{i} \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right) \right]. \quad (1.42)$$

Les processus de collisions sont décrits par la matrice- S et les éléments de cette matrice peuvent être calculés à l'aide de la théorie des perturbations à tous les ordres en la constante de structure fine α . L'état du système en interaction avec le champ peut être spécifié $|\psi(t)\rangle$. L'évolution temporelle d'un tel état à partir d'un temps t_0 dans le passé peut être décrite à l'aide de l'opérateur unitaire $U(t, t_0)$ qui lui même évolue dans le temps :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (1.43)$$

L'hamiltonien et le lagrangien d'interaction sont reliés par la relation suivante :

$$H_I(t) = - \int L_I(x_\mu) d^3x. \quad (1.44)$$

Les équations (1.33) et (1.44) n'ont pas de solutions exactes. Cependant, une approximation peut être utilisée, puisque le couplage entre les champs de Maxwell et de Dirac est proportionnel à la constante de structure fine et ainsi ce couplage est faible.

L'élément de matrice- S est une amplitude de transition qui décrit l'évolution temporelle du système en interaction de l'état initial $|\psi_i(t_0)\rangle$ dans le passé à un état final $|\psi_f(t)\rangle$ dans le futur. Ainsi l'opérateur S est donné par :

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0) \quad (1.45)$$

En remplaçant l'expression de $U(t, t_0)$ dans l'équation (1.45), la solution itérative pour l'opérateur unitaire S ($S^+S = 1$) peut être écrite en terme du Lagrangien d'interaction :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \quad \text{où} \quad S^{(0)} = \mathbb{1} \quad (1.46)$$

tel que :

$$S^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n T[L_I(x_1)L_I(x_2)\dots L_I(x_n)]. \quad (1.47)$$

Un élément de la matrice- S s'écrit comme :

$$S_{fi} = \langle \psi_f(\infty) | S | \psi_i(-\infty) \rangle \quad (1.48)$$

est appelé la matrice de transition S_{fi} . La plupart des calculs de S se limitent au premier ordre de l'approximation de Born car non seulement la complexité des calculs qui croît avec les ordres perturbatifs supérieurs, mais des problèmes conceptuels importants surgissent aussi, que ce soit simplement le problème de la convergence de la série ou le fait que certains termes apportent une contribution infinie.

2.2 Section efficace non polarisée, sommation sur les spins

Le calcul de la section efficace différentielle de la transition de la particule d'un état initial $\psi_i(x)$ vers un état final $\psi_f(x)$ nécessite une connaissance de la polarisation de spin. Cependant, dans la plupart des cas ni la polarisation de la particule diffusé s_f , ni la polarisation de la particule initiale s_i ne sont connues. Par conséquent, les différents états possibles pour la polarisation initiale ont la même probabilité. Ainsi, la section efficace différentielle est obtenue en sommant sur les polarisations finales et en moyennant sur les polarisations initiales (la moyenne s'obtient en faisant la somme sur le spin et en divisant sur 2 pour chaque particule

avec spin dans l'état initial à cause des deux orientations possible du spin). Pour calculer les sommes sur les polarisations, on utilise une technique mathématique faisant intervenir des calculs de trace de matrices gamma γ [3].

Les états de spin sont exprimés par les bispineurs de Dirac $u(p, s)$. L'élément de matrice de transition peut s'écrire sous la forme :

$$S_{fi} \propto \bar{u}(p_f, s_f)\Gamma u(p_i, s_i) \quad (1.49)$$

où Γ est un opérateur qui dépend des matrices de Dirac γ (\propto signifie "proportionnel à"). La sommation sur les spins finaux et initiaux dans le carré de l'élément de matrice de transition s'écrit :

$$\begin{aligned} |S_{fi}|^2 &\propto \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}(p_f, s_f)\Gamma u(p_i, s_i)|^2 \quad (1.50) \\ &\propto \sum_{\alpha, \beta, \delta, \lambda} \sum_{s_i, s_f} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f)\Gamma_{\alpha\beta} u_\beta(p_i, s_i) \bar{u}_\delta(p_i, s_i) \bar{\Gamma}_{\delta\lambda} u_\lambda(p_f, s_f) \\ &\propto \sum_{\alpha, \beta, \delta, \lambda} \sum_{s_i, s_f} u_\lambda(p_f, s_f) \bar{u}_\alpha(p_f, s_f) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta(p_i, s_i) \bar{u}_\delta(p_i, s_i) \bar{\Gamma}_{\delta\lambda}. \end{aligned}$$

On utilise le produit du bispineur de Dirac :

$$\begin{aligned} \sum_{s_i} u_\beta(p_i, s_i) \bar{u}_\delta(p_i, s_i) &= (\not{p}_i c + c^2)_{\beta\delta} \quad (1.51) \\ \sum_{s_f} u_\lambda(p_f, s_f) \bar{u}_\alpha(p_f, s_f) &= (\not{p}_f c + c^2)_{\lambda\alpha} \end{aligned}$$

$$\sum_{s_i, s_f} |\bar{u}(p_f, s_f)\Gamma u(p_i, s_i)|^2 = \sum_{\alpha, \beta, \delta, \lambda} (\not{p}_f c + c^2)_{\lambda\alpha} \Gamma_{\alpha\beta} (\not{p}_i c + c^2)_{\beta\delta} \bar{\Gamma}_{\delta\lambda}. \quad (1.52)$$

Cette dernière expression revient à une sommation sur les termes diagonaux (trace) qui donne une fonction des produits scalaires des quadri-vecteurs intervenant dans le processus,

$$\sum_{s_i, s_f} |\bar{u}(p_f, s_f)\Gamma u(p_i, s_i)|^2 = Tr[(\not{p}_f c + c^2)\Gamma(\not{p}_i c + c^2)\bar{\Gamma}]. \quad (1.53)$$

2.3 Probabilité de transition et section efficace différentielle (SED)

La norme au carré de l'élément de matrice de transition $|S_{fi}|^2$ est la probabilité de transition de l'état i vers l'état f par unité de particule multipliée par le nombre des états finaux dont

l'impulsion est comprise entre \mathbf{p}_f et $\mathbf{p}_f + d\mathbf{p}_f$ donné par :

$$dN_f = \frac{V}{(2\pi)^3} d\mathbf{p}_f \quad (1.54)$$

ainsi, la probabilité de transition par particule est :

$$dW_{fi} = |S_{fi}|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} d\mathbf{p}_f \quad (1.55)$$

En effectuant l'intégration par rapport à la partie temporelle, on obtient la fonction delta δ telle que :

$$S_{fi} \propto 2\pi\delta(p_f^0 - p^0). \quad (1.56)$$

Le carré de la fonction delta est donné par [4, 5] :

$$[2\pi\delta(p_f^0 - p^0)]^2 = 2\pi T\delta(p^0 - p_f^0) \quad (1.57)$$

ce qui donne la probabilité de transition par particule et par unité de temps comme :

$$dR_{fi} = \frac{dW_{fi}}{T}. \quad (1.58)$$

Pour trouver la section efficace différentielle, on divise la probabilité de transition par particule et par unité de temps par le flux (le courant entrant) de particules incidentes donné par :

$$J_{inc}^a = c\bar{\psi}_i(x)\gamma^a\psi_i(x) \quad (1.59)$$

où l'indice a désigne la composante du vecteur courant dans la direction de la vitesse des particules incidentes. Ce qui permet d'écrire la section efficace différentielle sous la forme suivante :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{|S_{fi}|^2}{T|J_{inc}|} \frac{V}{(2\pi)^3} d\mathbf{p}_f. \quad (1.60)$$

3 Electron dans le champ d'une onde électromagnétique plane

L'électron en présence d'une onde électromagnétique plane admet des solutions : ces solutions peuvent être obtenues par des solutions numériques en utilisant la méthode de Hamilton-Jacobi ou par une solution analytique de l'équation de Dirac-Volkov [6]. L'équation de Dirac

couplée à une onde électromagnétique plane possède une solution analytique trouvée par Volkov. La condition est de considérer le faisceau laser comme une onde plane qui est un champ avec des propriétés de polarisation arbitraires mais avec une seule direction de propagation. La solution de Volkov est remarquable pour plusieurs raisons. Premièrement, les solutions analytiques de l'équation de Dirac sont exactes en particulier en présence de champ laser. Deuxièmement, cette solution introduit le champ électromagnétique dynamiquement à travers ses paramètres (intensité, fréquence et polarisation).

3.1 Solutions de l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique (ondes de Dirac-Volkov)

L'équation de Dirac pour un électron dans le champ d'une onde électromagnétique plane en unités atomiques ($\hbar = m_e = e = 1$) est :

$$\left\{ \left(\hat{p} - \frac{A}{c} \right)^2 - c^2 - \frac{i}{2c} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right\} \psi(x) = 0 \quad (1.61)$$

où le quadri-vecteur potentiel décrivant l'onde électromagnétique plane $A^\mu(\phi)$ dépend des coordonnées x^μ à travers la phase $\phi = k_\mu x^\mu = k \cdot x$, $\mu, \nu \in [1, 2, 3]$. Il satisfait également à la condition de Jauge de Lorentz : $\partial A = k \cdot \partial A / \partial \phi = 0$, où $k \cdot A = 0$. p^μ est le quadri-vecteur impulsion et $F_{\mu\nu}$ est le tenseur du champ électromagnétique donné par :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = k_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial \phi} - k_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial \phi} \quad (1.62)$$

et $\sigma^{\mu\nu}$ est donnée par $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Les matrices de Dirac γ anticommulent telles que $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} 1_4$ où $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

On calcule d'abord :

$$\begin{aligned} \left(p^\mu - \frac{A^\mu}{c} \right) \left(p_\mu - \frac{A_\mu}{c} \right) \psi &= p^\mu p_\mu \psi - \frac{1}{c} p^\mu (A_\mu \psi) - \frac{1}{c} A^\mu (p_\mu \psi) + \frac{A^\mu A_\mu}{c^2} \psi \\ &= p^2 \psi - \frac{1}{c} (p^\mu (A_\mu \psi) + A^\mu (p_\mu \psi)) + \frac{A^2}{c^2} \psi \end{aligned} \quad (1.63)$$

et en utilise le principe de correspondance $p_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu$, on trouve pour le premier terme :

$$\left(p^\mu - \frac{A^\mu}{c} \right) \left(p_\mu - \frac{A_\mu}{c} \right) \psi = -\partial^2 \psi - \frac{2i}{c} A^\mu (\partial_\mu \psi) + \frac{A^2}{c^2} \psi \quad (1.64)$$

Le deuxième terme est donné par :

$$\begin{aligned}
iF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi &= \frac{i}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi \\
&= \frac{i}{2}\left(k_\mu \frac{\partial^\nu A_\nu}{\partial\phi} - k_\nu \frac{\partial^\mu A_\mu}{\partial\phi}\right)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi \\
&= i(\not{k}\not{A}' - \not{A}'\not{k})\psi.
\end{aligned} \tag{1.65}$$

On évalue $\not{k}\not{A}' + \not{A}'\not{k}$:

$$\begin{aligned}
\not{k}\not{A}' + \not{A}'\not{k} &= 2(k.A') - \not{A}'\not{k} + \not{A}'\not{k} \\
&= 2(k.A') = 2\frac{\partial}{\partial\phi}(k.A).
\end{aligned} \tag{1.66}$$

On travaille dans la Jauge de Lorentz : $k^\mu.A_\mu = 0$ et donc le second terme devient :

$$iF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi = 2i\not{k}\not{A}'\psi. \tag{1.67}$$

En remplaçant les deux termes par leurs expressions dans l'équation de Dirac (1.61), on obtient :

$$[-\partial^\mu\partial_\mu - \frac{2i}{c}A^\mu\partial_\mu + \frac{1}{c^2}A^\mu A_\mu - c^2 - \frac{i}{c}\not{k}\not{A}']\psi = 0. \tag{1.68}$$

On pose la fonction d'onde sous la forme suivante : $\psi = e^{-ip.x}F(\phi)$ et on la remplace dans l'équation (1.68) ci-dessus, on trouve pour le premier et le deuxième terme :

$$-\partial^\mu\partial_\mu\psi = c^2e^{-ip.x}F(\phi) + 2i(p.k)e^{-ip.x}F'(\phi) \tag{1.69}$$

$$-\frac{2i}{c}A_\mu(\partial^\mu\psi) = -\frac{2}{c}(A_\mu p^\mu)e^{-ip.x}F(\phi) \tag{1.70}$$

ainsi l'équation (1.68) devient :

$$2i(k.p)F'(\phi) + \left\{-\frac{2}{c}(A.p) + \frac{A^2}{c^2} - \frac{i}{c}\not{k}\not{A}'\right\}F(\phi) = 0 \tag{1.71}$$

$$\frac{F'(\phi)}{F(\phi)} = \frac{i}{2(k.p)}\left\{\frac{A^2}{c^2} - \frac{2}{c}(A.p) - \frac{i}{c}\not{k}\not{A}'\right\} \tag{1.72}$$

donc on trouve $F(\phi)$ sous la forme suivante :

$$F(\phi) = \exp\left\{i\int_0^{k.x}\left[\frac{A^2}{2c^2(k.p)} - \frac{(A.p)}{c(k.p)}\right]d\phi + \frac{1}{2c(k.p)}\not{k}\not{A}'\right\} \tag{1.73}$$

d'une part, on multiplie par le facteur de normalisation $1/\sqrt{2p_0V}$ ce qui donne pour la fonction d'onde de Volkov $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \frac{u(p, s)}{\sqrt{2p_0V}} \exp \left\{ -ip \cdot x + i \int_0^{k \cdot x} \left[\frac{A^2}{2c^2(k \cdot p)} - \frac{(A \cdot p)}{c(k \cdot p)} \right] d\phi + \frac{1}{2c(k \cdot p)} \not{k} \not{A} \right\} \quad (1.74)$$

où $u(p, s)$ est le bispineur de Dirac normalisé selon : $\bar{u}(p, s)u(p, s) = 2c^2$. D'autre part, toutes les puissances de $\not{k} \not{A}$ supérieures à la première sont nulles car :

$$\not{k} \not{A} \not{k} \not{A} = -\not{k} A^2 \not{k} = -A^2 k^2 = 0 \quad (1.75)$$

car $k^2 = 0$ et donc : $\exp \left\{ \frac{1}{2c(k \cdot p)} \not{k} \not{A} \right\} = 1 + \frac{1}{2c(k \cdot p)} \not{k} \not{A}$.

Ceci permet de retenir juste les termes au premier ordre de l'exponentielle :

$$\psi(x) = \left[1 + \frac{1}{2c(k \cdot p)} \not{k} \not{A} \right] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2p_0V}} e^{is(x)} \quad (1.76)$$

avec $s(x)$ dans l'équation (1.76) ci-dessus prend la forme suivante :

$$s(x) = -p \cdot x - \int_0^{k \cdot x} d\phi \frac{1}{c(k \cdot p)} \left[(p \cdot A) - \frac{A^2}{2c} \right] \quad (1.77)$$

La solution de l'équation de Dirac correspondante au positron est obtenue en remplaçant le bispineur $u(p, s)$ par le bispineur anti-particule $v(p, s)$ et en prenant le moment négatif : $p \rightarrow -p$.

3.2 Densité de courant qui correspond aux fonctions d'ondes de Volkov

La densité de courant donnée par l'équation (1.59) peut s'écrire sous la formule suivante :

$$j^\mu = c \bar{\psi}_p(x) \gamma^\mu \psi_p(x) \quad (1.78)$$

avec

$$\bar{\psi}_p(x) = \gamma^0 \psi_p(x) = \frac{\bar{u}(p)}{\sqrt{2p_0}} \left[1 + \frac{1}{2c(k \cdot p)} \not{A} \not{k} \right] e^{-is(x)}. \quad (1.79)$$

On insère $\bar{\psi}_p(x)$ et $\psi_p(x)$ dans la formule de la densité de courant j^μ , on trouve après calculs :

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{1}{2p_0} \left\{ \bar{u}(p) \gamma^\mu u(p) + \frac{\bar{u}(p) (\gamma^\mu \not{k} \not{A} + \not{A} \not{k} \gamma^\mu) u(p)}{2c(k \cdot p)} + \frac{\bar{u}(p) \not{A} \not{k} \gamma^\mu \not{k} \not{A} u(p)}{4c^2(k \cdot p)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{p_0} \left\{ \left(p^\mu - \frac{A^\mu}{c} \right) + \left(\frac{(A \cdot p)}{c(k \cdot p)} - \frac{A^2}{2c^2(k \cdot p)} \right) k^\mu \right\}. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Si $A^\mu(\phi)$ est une fonction quasi-périodique et que sa valeur moyenne dans le temps est nulle $\overline{A^\mu} = 0$, on aura pour la valeur moyenne de la densité de courant la forme suivante :

$$\overline{j^\mu} = \frac{1}{p_0} \left[p^\mu - \frac{\overline{A^2}}{2c^2(k.p)} k^\mu \right]. \quad (1.81)$$

On pose

$$q^\mu = p^\mu - \frac{A^2}{2c^2(k.p)} k^\mu \quad (1.82)$$

avec q^μ est l'impulsion acquise par l'électron soumis à un champ externe qu'on appelle la "quasi-impulsion". Cette quantité satisfait à :

$$\begin{aligned} q^2 = q^\mu q_\mu &= \left(p^\mu - \frac{\overline{A^2}}{2c^2(k.p)} k^\mu \right) \left(p_\mu - \frac{\overline{A^2}}{2c^2(k.p)} k_\mu \right) \\ &= c^2 \left(1 - \frac{\overline{A^2}}{c^4} \right) = m_*^2 c^2 \end{aligned} \quad (1.83)$$

où m_* est nommée la **masse effective** de l'électron dans le champ externe trouvée premièrement par Sengupta [7, 8]. $q^\mu = (q^0, \mathbf{q})$ où $q^0 = Q/c$ est son énergie en présence d'une onde électromagnétique.

3.3 Rayonnement d'un photon par un électron dans le champ d'une onde électromagnétique intense

C'est la collision d'un électron et une onde électromagnétique tel que l'électron absorbe un nombre arbitraire n de photons du champ puis émet un seul photon d'énergie $\hbar\omega'$ dont la fréquence ω' est plus grande que celle du champ laser ω à savoir :

$$e^- + n\gamma \rightarrow e^- + \gamma \quad (1.84)$$

Les études théoriques concernant ces processus de collision peuvent se grouper en deux classes suivant que le champ est traité comme un ensemble de photons à l'aide de l'électrodynamique quantique [9] ou comme un champ électromagnétique classique [10, 13]. Toutefois, on peut montrer que ces deux descriptions sont équivalentes dans la mesure où le nombre de photons présents dans les modes du laser est élevé. Cette condition étant réalisée dans notre cas, on se limitera à une description classique du champ laser.

Le champ laser utilisé le long de ce travail est supposé être un champ externe classique. Ceci implique qu'une quantité arbitraire de l'énergie et de l'impulsion peut être absorbée ou émise dans le champ sans le modifier : c.à.d l'échange de photons entre l'électron et le champ laser n'agit pas sur ce dernier. On considère la polarisation circulaire du champ laser donnée par :

$$A^\mu = a_1^\mu \cos \phi + a_2^\mu \sin \phi \quad (1.85)$$

où les amplitudes a_1^μ et a_2^μ vérifient les relations suivantes :

$$a_1^2 = a_2^2 = a^2 \quad a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1 = 0 \quad (1.86)$$

ainsi

$$A^\mu A_\mu = A^2 = a_1^2 \cos^2 \phi + a_2^2 \sin^2 \phi + 2(a_1 \cdot a_2) \cos \phi \sin \phi = a^2. \quad (1.87)$$

L'équation de Dirac et sa solution pour un électron dans le champ d'une onde électromagnétique plane (ou un champ externe) ont été données dans la section précédente. On normalise la fonction d'onde $\psi_p(x)$ d'une particule dans le volume unité. Pour se faire, on doit la multiplier par $\sqrt{\frac{p_0}{q_0}}$. Dans l'équation (1.76), on remplace :

$$\frac{1}{\sqrt{2p_0}} \quad par \quad \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \sqrt{p_0/q_0} = \frac{1}{\sqrt{2q_0}}$$

et elle devient :

$$\psi_p(x) = \left[1 + \frac{\not{k} \not{A}}{2c(k.p)} \right] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2q_0}} e^{is(x)}. \quad (1.88)$$

D'après l'équation (1.77), on aura :

$$\int_0^{k \cdot x} \left[\frac{A \cdot p}{c(k.p)} - \frac{A^2}{2c^2(k.p)} \right] d\phi = \frac{a_1 \cdot p}{c(k.p)} \sin \phi - \frac{a_2 \cdot p}{c(k.p)} \cos \phi - \frac{a^2}{2c^2(k.p)} \phi \quad (1.89)$$

et donc

$$\begin{aligned} s(x) &= -p \cdot x - \frac{a_1 \cdot p}{c(k.p)} \sin \phi + \frac{a_2 \cdot p}{c(k.p)} \cos \phi + \frac{a^2}{2c^2(k.p)} (k \cdot x) \\ &= -(p^\mu - \frac{a^2}{2c^2(k.p)} k^\mu) \cdot x_\mu - \frac{a_1 \cdot p}{c(k.p)} \sin \phi + \frac{a_2 \cdot p}{c(k.p)} \cos \phi \\ &= -q \cdot x - \frac{a_1 \cdot p}{c(k.p)} \sin \phi + \frac{a_2 \cdot p}{c(k.p)} \cos \phi. \end{aligned} \quad (1.90)$$

L'électron incident et diffusé portent des quasi-impulsions q_i et q_f respectivement :

$$q_i^\mu = p^\mu - \frac{a^2}{2c^2(k.p)} k^\mu \quad , \quad q_f^\mu = p_f^\mu - \frac{a^2}{2c^2(k.p_f)} k^\mu. \quad (1.91)$$

Ainsi, la fonction d'onde normalisée de l'électron dans le champ d'une onde électromagnétique plane polarisée circulairement est donnée par :

$$\psi_p(x) = \left[1 + \frac{1}{c(k.p)} (k\phi_1 \cos \phi + k\phi_2 \sin \phi) \right] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2q_0}} \exp \left\{ -i(q.x + \frac{a_1.p}{c(k.p)} \sin \phi - \frac{a_2.p}{c(k.p)} \cos \phi) \right\}. \quad (1.92)$$

L'élément de matrice pour la transition d'un électron de l'état $\psi_p(x)$ vers l'état $\psi_{p_f}(x)$ avec émission d'un photon est donné par :

$$S_{fi} = -\frac{i}{c} \int \bar{\psi}_{p_f}(x) \not{A}^* \psi_p(x) d^4x \quad (1.93)$$

avec $\not{A}^* = \gamma^\mu A_\mu^*(k', \lambda')$ et $A(k', \lambda')$ est le quadri-potentiel du champ du photon donné par :

$$A_\mu(k', \lambda') = \sqrt{4\pi} \varepsilon_\mu(k', \lambda') \frac{e^{-ik'.x}}{\sqrt{2k'^0}} \quad (1.94)$$

avec k' est le quadri-impulsion du photon, ε_μ sa polarisation et $\lambda' = 1, 2$ sont les deux directions de polarisation. Le vecteur de polarisation ε_μ satisfait les relations $\varepsilon^2(k', 1) = \varepsilon^2(k', 2) = -1$ et $\varepsilon(k', 1) \cdot \varepsilon(k', 2) = 0$.

On remplace le quadri-potentiel du champ de photon et les fonctions d'onde de l'état initial et final de l'électron dans l'expression de l'élément de matrice, on trouve :

$$S_{fi} = -\frac{\sqrt{4\pi}i}{c} \int d^4x \frac{\bar{u}(p_f, s_f)}{\sqrt{2q_f^0}} \left[1 + \frac{1}{c(k.p')} (\phi_1 k \cos \phi + \phi_2 k \sin \phi) \right] \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(k', \lambda') \left[1 + \frac{1}{c(k.p)} (k\phi_1 \cos \phi + k\phi_2 \sin \phi) \right] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2q_0}} \frac{e^{ik'.x}}{\sqrt{2k'^0}} \exp \left\{ -i(q.x + \frac{a_1 p}{c(k.p)} \sin \phi - \frac{a_2 p}{c(k.p)} \cos \phi) \right\} \exp \left\{ -i(q_f.x + \frac{a_1 p_f}{c(k.p_f)} \sin \phi - \frac{a_2 p_f}{c(k.p_f)} \cos \phi) \right\}. \quad (1.95)$$

On pose

$$z = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad (1.96)$$

où z est l'argument des fonctions de Bessel ordinaires, avec :

$$\alpha_1 = \frac{1}{c} \left(\frac{a_1.p}{k.p} - \frac{a_1.p_f}{k.p_f} \right) \quad (1.97)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{c} \left(\frac{a_2 \cdot p}{k \cdot p} - \frac{a_2 \cdot p_f}{k \cdot p_f} \right) \quad (1.98)$$

et

$$\cos \phi_0 = \frac{\alpha_1}{z} \quad , \quad \sin \phi_0 = \frac{\alpha_2}{z} \quad (1.99)$$

donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \exp \{i(s(p) - s(p_f))\} &= \exp \{-i(\alpha_1 \sin \phi - \alpha_2 \cos \phi)\} e^{i(q_f - q)x} \\ &= \exp \{-iz \sin(\phi - \phi_0)\} e^{i(q_f - q)x}. \end{aligned} \quad (1.100)$$

On calcule la quantité : $\bar{u}(p_f, s_f) R(p_f) \gamma^\mu \varepsilon^* R(p) u(p, s)$ à l'aide du code REDUCE :

$$\bar{u}(p_f, s_f) R(p_f) \gamma^\mu \varepsilon^* R(p) u(p, s) = \bar{u}(p_f, s_f) [1 + c(p_f)(\phi_1 \not{k} \cos \phi + \phi_2 \not{k} \sin \phi)] \gamma^\mu \varepsilon^*(k', \lambda') \quad (1.101)$$

$$[1 + c(p)(\not{k} \phi_1 \cos \phi + \not{k} \phi_2 \sin \phi)] u(p, s)$$

avec

$$c(p_f) = \frac{1}{2c(k \cdot p_f)} \quad \text{et} \quad c(p) = \frac{1}{2c(k \cdot p)} \quad (1.102)$$

on trouve :

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_f, s_f) R(p_f) \gamma^\mu \varepsilon^* R(p) u(p, s) &= \bar{u}(p_f, s_f) \{ \not{\varepsilon}^* + [c(p) \not{\varepsilon}^* \not{k} \phi_1 + c(p_f) \phi_1 \not{k} \not{\varepsilon}^*] \cos \phi \\ &\quad + [c(p) \not{\varepsilon}^* \not{k} \phi_2 + c(p_f) \phi_2 \not{k} \not{\varepsilon}^*] \sin \phi \\ &\quad + c(p_f) c(p) \phi_1 \not{k} \not{\varepsilon}^* \not{k} \phi_1 \cos^2 \phi + c(p_f) c(p) \phi_2 \not{k} \not{\varepsilon}^* \not{k} \phi_2 \sin^2 \phi \\ &\quad + c(p_f) c(p) [\phi_2 \not{k} \not{\varepsilon}^* \not{k} \phi_1 + \phi_1 \not{k} \not{\varepsilon}^* \not{k} \phi_2] \sin \phi \cos \phi \} u(p, s). \end{aligned} \quad (1.103)$$

On pose

$$\begin{aligned} \alpha &= \phi_1 \not{k} \not{\varepsilon}^* \not{k} \phi_1 = \phi_1 [2(k \cdot \varepsilon^*) - \not{\varepsilon}^* \not{k}] \not{k} \phi_1 \\ &= 2(k \cdot \varepsilon^*) \phi_1 \not{k} \phi_1 = -2(k \cdot \varepsilon^*) a^2 \not{k} \end{aligned} \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \phi_2 \not{k} \not{\varepsilon}^* \not{k} \phi_2 = \phi_2 [2(k \cdot \varepsilon^*) - \not{\varepsilon}^* \not{k}] \not{k} \phi_2 \\ &= 2(k \cdot \varepsilon^*) \phi_2 \not{k} \phi_2 = -2(k \cdot \varepsilon^*) a^2 \not{k} = \alpha \end{aligned} \quad (1.105)$$

ce qui donne pour le troisième et le quatrième terme de l'équation (1.103) le résultat suivant :

$$\begin{aligned} c(p_f)c(p)\alpha \cos^2 \phi + c(p_f)c(p)\beta \sin^2 \phi &= c(p_f)c(p)\alpha \\ &= -2c(p_f)c(p)(k.\varepsilon^*)a^2k \end{aligned} \quad (1.106)$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \phi_1 k \not{\varepsilon}^* k \phi_2 = \phi_1 [2(k.\varepsilon^*) - \not{\varepsilon}^* k] k \phi_2 \\ &= 2(k.\varepsilon^*)\phi_1 k \phi_2 = -2(k.\varepsilon^*)\phi_2 k \phi_1. \end{aligned} \quad (1.107)$$

On prend aussi :

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \phi_2 k \not{\varepsilon}^* k \phi_1 = \phi_2 [2(k.\varepsilon^*) - \not{\varepsilon}^* k] k \phi_1 \\ &= 2(k.\varepsilon^*)\phi_2 k \phi_1 = 2(k.\varepsilon^*)\phi_2 k \phi_1 = -\delta_1. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Le cinquième terme de la même équation devient :

$$c(p_f)c(p)(\delta_1 + \delta_2) \sin \phi \cos \phi = 0. \quad (1.109)$$

Ainsi la quantité $\bar{u}(p_f, s_f)R(p_f)\gamma^\mu \varepsilon^* R(p)u(p, s)$ se simplifie à :

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_f, s_f)R(p_f)\not{\varepsilon}^* R(p)u(p, s) &= \bar{u}(p_f, s_f) \{ \not{\varepsilon}^* - 2c(p_f)c(p)(k.\varepsilon^*)a^2k \\ &\quad + [c(p)\varepsilon k \phi_1 + c(p_f)\phi_1 k \not{\varepsilon}^*] \cos \phi \\ &\quad + [c(p)\not{\varepsilon}^* k \phi_2 + c(p_f)\phi_2 k \not{\varepsilon}^*] \sin \phi \} u(p, s). \end{aligned} \quad (1.110)$$

Finalement, l'élément de matrice de transition devient :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -\frac{i}{c} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2q_f^0 2q^0 2k'^0}} \int d^4x e^{i(q_f+k'-q).x} e^{-iz \sin(\phi-\phi_0)} \\ &\quad \times \bar{u}(p_f, s_f) \{ \not{\varepsilon}^* - 2c(p_f)c(p)(k.\varepsilon^*)a^2k \\ &\quad + [c(p)\varepsilon k \phi_1 + c(p_f)\phi_1 k \not{\varepsilon}^*] \cos \phi \\ &\quad + [c(p)\not{\varepsilon}^* k \phi_2 + c(p_f)\phi_2 k \not{\varepsilon}^*] \sin \phi \} u(p, s). \end{aligned} \quad (1.111)$$

On introduit les relations bien connues liant les coefficients $B_n(z)$ et les fonctions de Bessel ordinaires telles que :

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{array} \right\} e^{-iz \sin(\phi-\phi_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} B_{0n}(z) \\ B_{1n}(z) \\ B_{2n}(z) \end{array} \right\} e^{-in\phi}, \quad (1.112)$$

avec

$$\begin{pmatrix} B_{0n}(z) \\ B_{1n}(z) \\ B_{2n}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_n(z)e^{in\phi_0} \\ (J_{n+1}(z)e^{i(n+1)\phi_0} + J_{n-1}(z)e^{i(n-1)\phi_0})/2 \\ (J_{n+1}(z)e^{i(n+1)\phi_0} - J_{n-1}(z)e^{i(n-1)\phi_0})/2i \end{pmatrix} \quad (1.113)$$

Ainsi l'élément de matrice de transition :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -\frac{i}{c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{4\pi}}{2q_f^0 2q_0 2k'^0} \int d^4x e^{i(q_f+k'-q-nk).x} |M_{fi}^{(n)}| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2q_f^0 2q_0 2k'^0} (2\pi)^4 \delta(q_f + k' - q - nk) |M_{fi}^{(n)}| \end{aligned} \quad (1.114)$$

avec

$$\begin{aligned} |M_{fi}^{(n)}| &= -\frac{\sqrt{4\pi}}{c} \bar{u}(p_f, s_f) \left\{ \left[\not{\epsilon}^* - \frac{(k \cdot \epsilon^*) a^2}{2c^2 (k \cdot p_f) (k \cdot p)} \not{k} \right] B_n(z) \right. \\ &\quad + \left[\frac{\not{\epsilon}^* \not{k} \not{\phi}_1}{2c(k \cdot p)} + \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}^*}{2c(k \cdot p_f)} \right] B_{1n}(z) \\ &\quad \left. + \left[\frac{\not{\epsilon}^* \not{k} \not{\phi}_2}{2c(k \cdot p)} + \frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}^*}{2c(k \cdot p_f)} \right] B_{2n}(z) \right\} u(p, s). \end{aligned} \quad (1.115)$$

L'élément de matrice de transition S_{fi} s'exprime par une somme infinie de termes sur le nombre de photons n échangés entre l'électron et le champ, chacun satisfaisant à la loi de conservation de l'énergie-impulsion :

$$q_f + k' = nk + q. \quad (1.116)$$

Dans le référentiel où l'électron est au repos c.à.d $\mathbf{q} = 0$, $q_0 = m_* c^2$:

$$q_f = nk + q - k' \quad (1.117)$$

$$q_f^2 = (nk + q - k')^2 \quad (1.118)$$

$$m_*^2 c^2 = (nk)^2 + q^2 + k'^2 - 2nk \cdot k' - 2q \cdot k' + 2nq \cdot k \quad (1.119)$$

on a $k^\mu \cdot k_\mu = k'^\mu \cdot k'_\mu = 0$, alors :

$$\omega' = \frac{n\omega}{1 + \frac{n\omega}{m_* c^2} (1 - \cos \theta)} \quad (1.120)$$

avec θ est l'angle entre \mathbf{k}' et \mathbf{k} . On dit que les fréquences ω' sont les harmoniques de la fréquence ω .

La probabilité de transition par particule dans un volume unité correspondant au processus d'émission de la $n^{ième}$ harmonique est :

$$dW_n = |M_{fi}^n|^2 \frac{1}{2\pi} \delta(q_f + k' - q - nk) \frac{d\mathbf{k}' d\mathbf{q}_f}{2q_f 2q 2k'^0}. \quad (1.121)$$

On évalue l'expression $|M_{fi}^{(n)}|^2$:

$$\frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} \sum_\lambda |M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{2\pi}{c^2} \sum_\lambda Tr \{ (\not{p}'c + c^2) \Gamma_n (\not{p}c + c^2) \bar{\Gamma}_n \} \quad (1.122)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &= \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 \\ &= \left[\not{\epsilon}^* - \frac{(k \cdot \epsilon^*) a^2}{2c^2 (k \cdot p') (k \cdot p)} \not{k} \right] B_n^*(z) + \left[\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}^*}{2c(k \cdot p)} + \frac{\not{\epsilon}^* \not{k} \not{\phi}_1}{2c(k \cdot p')} \right] B_{1n}^*(z) \\ &+ \left[\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}^*}{2c(k \cdot p)} + \frac{\not{\epsilon}^* \not{k} \not{\phi}_2}{2c(k \cdot p')} \right] B_{2n}^*(z). \end{aligned} \quad (1.123)$$

On utilise le code REDUCE pour calculer la partie spinorielle définie par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\lambda'} \sum_s \sum_{s'} |M_{fi}^{(n)}|^2 &= \frac{2\pi}{c^2} \sum_{\lambda'} Tr \{ (\not{p}_f c + c^2) \left(\left[\not{\epsilon}^* - \frac{(k \cdot \epsilon^*) a^2}{2c^2 (k \cdot p_f) (k \cdot p)} \not{k} \right] B_n(z) \right. \\ &\left. \left[\frac{\not{\epsilon}^* \not{k} \not{\phi}_1}{2c(k \cdot p)} + \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}^*}{2c(k \cdot p_f)} \right] B_{1n}(z) + \left[\frac{\not{\epsilon}^* \not{k} \not{\phi}_2}{2c(k \cdot p)} + \left[\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}^*}{2c(k \cdot p_f)} \right] B_{2n}(z) \right) (\not{p}c + c^2) \right. \\ &\left. \left(\left[\not{\epsilon}^* - \frac{(k \cdot \epsilon^*) a^2}{2c^2 (k \cdot p_f) (k \cdot p)} \not{k} \right] B_n^*(z) + \left[\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}^*}{2c(k \cdot p)} + \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}^*}{2c(k \cdot p)} + \frac{\not{\epsilon}^* \not{k} \not{\phi}_1}{2c(k \cdot p_f)} \right] B_{1n}^*(z) \right. \right. \\ &\left. \left. + \left[\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}^*}{2c(k \cdot p)} + \frac{\not{\epsilon}^* \not{k} \not{\phi}_2}{2c(k \cdot p_f)} \right] B_{2n}^*(z) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.124)$$

4 Electron dans le champ d'une onde électromagnétique plane en tenant compte de son moment magnétique anomal MMA

Dans cette section, on va chercher la fonction d'onde de l'électron en tenant compte du moment magnétique anomal. L'équation de Dirac au second ordre covariante d'un électron en présence d'un champ électromagnétique en introduisant la contribution de son moment

magnétique anomal est donnée par :

$$\left[\left(p - \frac{1}{c}A \right)^2 - c^2 - \frac{i}{2c}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + ia\left(\not{p} - \frac{\not{A}}{c} + c \right)F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \right] \psi(x) = 0 \quad (1.125)$$

où $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, γ^μ sont les matrices de Dirac et $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur du champ électromagnétique. A^μ est le quadri-vecteur potentiel, tandis que $a = \kappa/4$, κ est l'anomalie de l'électron. La notation slash de Feynman est utilisée tel que $\not{p} = p_0\gamma^0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}$ et $\not{A} = A_0\gamma^0 - \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\gamma}$. Le terme $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ provient du fait que l'électron a un spin demi entier, le terme multipliant a est dû à son moment magnétique anomal. Pour simplifier les calculs, on va suivre la même démarche que précédemment. On commence par $(p - \frac{1}{c}A)^2$ sachant que $p^\mu = i\partial_\mu$,

$$\begin{aligned} \left(p^\mu - \frac{A^\mu}{c} \right) \left(p_\mu - \frac{A_\mu}{c} \right) \psi &= p^\mu p_\mu \psi - \frac{1}{c} p^\mu (A_\mu \psi) - \frac{1}{c} A^\mu (p_\mu \psi) + \frac{A^\mu A_\mu}{c^2} \psi \\ &= p^2 \psi - \frac{1}{c} (p^\mu (A_\mu \psi) + A^\mu (p_\mu \psi)) + \frac{A^2}{c^2} \psi. \end{aligned} \quad (1.126)$$

On utilise le principe de correspondance $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$, on trouve pour le premier terme :

$$\left(p^\mu - \frac{A^\mu}{c} \right) \left(p_\mu - \frac{A_\mu}{c} \right) \psi = -\partial^2 \psi - \frac{2i}{c} A^\mu (\partial_\mu \psi) + \frac{A^2}{c^2} \psi. \quad (1.127)$$

Le deuxième terme de l'équation (1.125) est donné par :

$$\begin{aligned} iF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi &= \frac{i}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi \\ &= \frac{i}{2}\left(k_\mu \frac{\partial^\nu A_\nu}{\partial\phi} - k_\nu \frac{\partial^\mu A_\mu}{\partial\phi}\right)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi \\ &= i(k\cdot\not{A}' - \not{A}'k)\psi. \end{aligned} \quad (1.128)$$

On évalue $k\cdot\not{A}' + \not{A}'k$,

$$\begin{aligned} k\cdot\not{A}' + \not{A}'k &= 2(k\cdot A') - \not{A}'k + \not{A}'k \\ &= 2(k\cdot A') = 2\frac{\partial}{\partial\phi}(k\cdot A). \end{aligned} \quad (1.129)$$

On travaille dans la Jauge de Lorentz : $k^\mu A_\mu = 0$ et donc le second terme devient :

$$iF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi = 2i k\cdot\not{A}'\psi. \quad (1.130)$$

On remplace les deux termes par leurs expressions dans l'équation de Dirac et on obtient :

$$\left[-\partial^\mu \partial_\mu - \frac{2i}{c} A^\mu \partial_\mu + \frac{1}{c^2} A^\mu A_\mu - c^2 - \frac{i}{c} k\cdot\not{A}' + 2ia\left(\not{p} - \frac{\not{A}}{c} + c \right) k\cdot\not{A}' \right] \psi. \quad (1.131)$$

On pose la fonction d'onde sous la forme suivante $\psi = e^{-ip \cdot x} F(\phi)$, et on cherche la forme de $F(\phi)$. Pour cela, on a :

$$-\partial^\mu \partial_\mu \psi = c^2 e^{-ip \cdot x} F(\phi) + 2i(p \cdot k) e^{-ip \cdot x} F'(\phi) \quad (1.132)$$

$$-\frac{2i}{c} A_\mu (\partial^\mu \psi) = -\frac{2}{c} (A_\mu p^\mu) e^{-ip \cdot x} F(\phi). \quad (1.133)$$

On remplace la fonction d'onde et ses dérivées dans l'équation (1.131), avec $\partial F = k^\mu F(\phi)$, $\partial^2 F = k^\mu k_\mu F(\phi) = 0$ ("." dérivées par rapport à ϕ) et $p^2 = p^\mu p_\mu = m^2 c^2$, on trouve :

$$2i(k \cdot p) F'(\phi) + \left\{ -\frac{2}{c} (A \cdot p) + \frac{A^2}{c^2} - i \left[\frac{1}{c} - 2a \left(\not{p} - \frac{\not{A}}{c} + c \right) \right] \not{k} \not{A}' \right\} F(\phi) = 0 \quad (1.134)$$

$$\frac{F'(\phi)}{F(\phi)} = \frac{i}{2(k \cdot p)} \left\{ \frac{A^2}{c^2} - \frac{2}{c} (A \cdot p) - i \left[\frac{1}{c} - 2a \left(\not{p} - \frac{\not{A}}{c} + c \right) \right] \not{k} \not{A}' \right\} \quad (1.135)$$

et donc

$$F(\phi) = \exp \left\{ i \int_0^{k \cdot x} \left[\frac{A^2}{2c^2(k \cdot p)} - \frac{(A \cdot p)}{c(k \cdot p)} \right] d\phi + \frac{1}{2(k \cdot p)} \left[\frac{1}{c} - 2a \left(\not{p} - \frac{\not{A}}{c} + c \right) \right] \not{k} \not{A} \right\}. \quad (1.136)$$

Ce qui donne pour la fonction d'onde $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \exp \left\{ \frac{\not{k} \not{A}}{2c(k \cdot p)} - a \frac{\not{p} \not{k} \not{A}}{(k \cdot p)} + a \frac{\not{A} \not{k} \not{A}}{c(k \cdot p)} - \frac{ac}{(k \cdot p)} \not{k} \not{A} \right\} \quad (1.137)$$

$$\frac{u(p, s)}{\sqrt{2QV}} \exp \left\{ -ip \cdot x + i \int_0^{k \cdot x} \left[\frac{A^2}{2c^2(k \cdot p)} - \frac{(A \cdot p)}{c(k \cdot p)} \right] d\phi \right\}$$

on a $\not{A} \not{k} \not{A} = \not{A} (2(k \cdot A) - \not{A} \not{k}) = -A^2 \not{k}$ on trouve pour la fonction d'onde :

$$\psi(x) = \exp [-(\alpha \not{k} \not{A} + \beta \not{k} + \delta \not{p} \not{k} \not{A})] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2QV}} \exp \left\{ -i(p \cdot x) + i \int_0^{k \cdot x} \left[\frac{A^2}{2c^2(k \cdot p)} - \frac{(A \cdot p)}{c(k \cdot p)} \right] d\phi \right\} \quad (1.138)$$

avec

$$\alpha = \frac{ac}{(k \cdot p)} - \frac{1}{2c(k \cdot p)} \quad (1.139)$$

$$\beta = a \frac{A^2}{c(k \cdot p)} \quad (1.140)$$

$$\delta = \frac{a}{(k \cdot p)} \quad (1.141)$$

Dans l'approximation des champs faibles [14] (WFA), on ne retenant que les termes au premier ordre de l'exponentielle, donc :

$$\exp [-(\alpha \not{k} \not{A} + \beta \not{k} + \delta \not{p} \not{k} \not{A})] = 1 - (\alpha \not{k} \not{A} + \beta \not{k} + \delta \not{p} \not{k} \not{A}). \quad (1.142)$$

Finalement la fonction d'onde devient :

$$\psi(x) = [1 - (\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{A} + \beta \mathbf{k} + \delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{A})] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2VQ_0}} \exp[-iq \cdot x - i \int_0^{k \cdot x} \frac{(A \cdot p)}{c(k \cdot p)} d\phi]. \quad (1.143)$$

Cette expression diffère formellement de celle trouvée par Salamin [14] mais elles sont équivalentes. Notons que la quasi-impulsion q^μ reste indépendante de l'effet MMA et elle est donnée par :

$$q^\mu = p^\mu - \frac{A^2}{2c^2(k \cdot p)} k^\mu \quad (1.144)$$

ainsi que la masse effective m^* acquiert en présence de champ est donnée par :

$$m^* = \left(1 - \frac{\overline{A^2}}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.145)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. B. Lippmann and J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **79**, 469, (1950).
- [2] H. Mitter, Quantum Electrodynamics in laser fields, *Acta Phys. Austriaca Suppl*, **14**, (1975).
- [3] W. Greiner, J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, Fourth Edition, Springer, (2008).
- [4] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (Mac Graw Hill, New York, 1964).
- [5] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum field Theory* (Mac Graw Hill, New York, 1985).
- [6] D. M. Volkov, Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung, *Z. Phys.*, **94**, 250, (1935).
- [7] N. Sengupta, *Bull. Math. Soc. (Calcutta)*, **41**, 187, (1949).
- [8] N. Sengupta, *Bull. Math. Soc. (Calcutta)*, **44**, 175, (1952).
- [9] L. Rosenberg, *Phys. Rev. A* **22**, 2485, (1980).
- [10] N. M. Kroll and K.M. Weston, *Phys. Rev. A* **8**, 804 (1973).
- [11] M. H Mittleman, *Phys. Rev. A* **19**, 134 (1979).
- [12] M. H Mittleman, "Introduction to the Theory of Laser-atom interactions" (Plenum Press, New York, 1982).

- [13] S. Taj Thèse de Doctorat Nationale, "Etude théorique relativiste de l'ionisation de l'hydrogène atomique par impact d'électrons en l'absence et en présence du champ laser", (2006).
- [14] Y. I. Salamin, J. Phys. A **26**, 6067 (1993).
-

CHAPITRE 2

COLLISIONS NON RELATIVISTES ÉLECTRON-ATOME D'HYDROGÈNE

Dans ce chapitre, comme exemple d'un problème réel à trois corps, on donne un bref compte rendu des collisions électron-atome d'hydrogène. Tels processus ont été étudiés par de nombreuses méthodes théoriques [1]. On discute quelques cas qui s'avèrent particulièrement utiles, ils permettront d'établir des comparaisons dans la limite non relativiste qui correspond à l'énergie cinétique de l'électron qui est de l'ordre de 2700 eV.

1 Préliminaire

On établit d'abord quelques formules de base se rapportant à la diffusion électron-atome d'hydrogène. On note respectivement \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 les coordonnées de l'électron incident et celui de l'atome (voir la figure (2.1)) en tenant compte du fait que le proton a une masse infiniment grande. Par la suite on va négliger les interactions dépendantes du spin (sont très petites). Elles sont mesurées par rapport au centre de l'atome d'hydrogène. Ainsi, les spins des deux électrons vont influencer la diffusion seulement à travers le principe de Pauli et le spin du proton sera négligé.

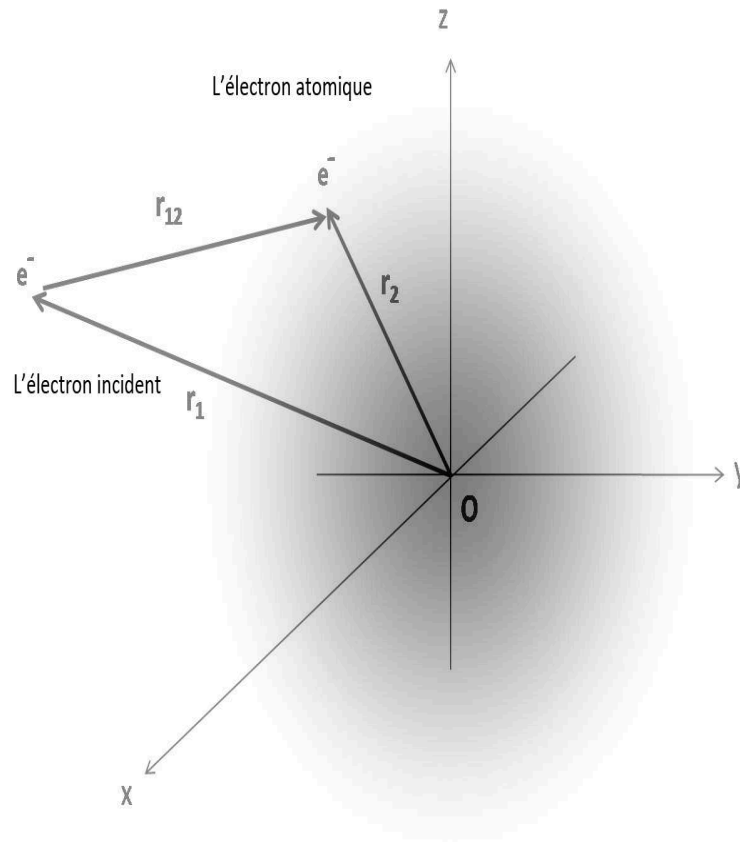


FIGURE 2.1 – Illustration des coordonnées respectivement \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 de l'électron incident et de l'électron atomique.

La fonction d'onde qui décrit l'atome d'hydrogène dans son état fondamental est donnée en unité atomique par :

$$\psi_0(r_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-r_2). \quad (2.1)$$

L'électron libre dans l'état initial, ayant le vecteur d'onde \mathbf{k}_i (on notera ce vecteur \mathbf{p}_i dans le cas relativiste) et le spin d'orientation ν_0 est décrit par la fonction d'onde :

$$\phi_{\mathbf{k}_i, \nu_0} = (2\pi)^{-3/2} \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_1) \chi_{\nu_0}(s_0) \quad (2.2)$$

où s_0 est la variable spin de l'électron incident.

Les vecteurs $\chi_{1/2}(s_0)$ et $\chi_{-1/2}(s_0)$ sont donnés par :

$$\chi_{1/2}(s_0) \equiv \alpha(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2}(s_0) \equiv \beta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Si on note $\chi_{\nu_1}(s_1)$ le vecteur propre spin de l'électron atomique, correspondant à l'orientation spin ν_1 , on aura l'onde non symétrique décrivant l'état initial,

$$\Phi_a = (2\pi)^{-3/2} \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_1) \psi_0(r_2) \chi_{\nu_0}(s_0) \chi_{\nu_1}(s_1). \quad (2.4)$$

L'énergie correspondante est donnée par :

$$E_a = \hbar^2 k_i^2 / 2m + w_0, \quad w_0 = -e^2 / 2a_0.$$

En unité atomique, cette énergie devient :

$$E_a = \frac{1}{2} k_i^2 + w_0, \quad w_0 = -\frac{1}{2}. \quad (2.5)$$

Par exemple, si les deux électrons sont initialement dans l'état "spin up", on a :

$$\Phi_a = (2\pi)^{-3/2} \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_1) \psi_0(r_2) \alpha(0) \alpha(1).$$

Le potentiel d'interaction dans la canal initial (direct) est donné par :

$$V_i = \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_1}, \quad \text{avec } r_{12} = |r_1 - r_2|. \quad (2.6)$$

Pour le cas d'une collision élastique, l'état final du système est :

$$\Phi_b = (2\pi)^{-3/2} \exp(i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_2) \chi_{\nu'_0}(s_0) \chi_{\nu'_1}(s_1). \quad (2.7)$$

La conservation de l'énergie impose :

$$E_b = \frac{1}{2} k_f^2 + w_0; \quad k_f = k_i, \quad w_0 = -\frac{1}{2}.$$

Pour une excitation directe vers l'état $|\mathbf{n}\rangle$, on a :

$$\Phi_b = (2\pi)^{-3/2} \exp(i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}_1) \psi_n(\mathbf{r}_2) \chi_{\nu'_0}(s_0) \chi_{\nu'_1}(s_1) \quad (2.8)$$

avec la relation de conservation d'énergie :

$$E_b = \frac{1}{2} k_f^2 + w_n = \frac{1}{2} k_i^2 + w_0.$$

Le potentiel d'interaction dans le cas de l'échange de l'électron (mais ce n'est pas l'objectif de ce travail) devient :

$$V_e = \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_2}, \quad \text{avec } r_{12} = |r_1 - r_2| \quad (2.9)$$

On note que les deux états donnés dans les équations (2.7) ou (2.8) sont les états propres de l'hamiltonien :

$$H = -\frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{r}_1}^2 - \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{r}_2}^2 - \frac{1}{r_2}. \quad (2.10)$$

2 La diffusion des électrons rapides par l'atome d'hydrogène, calculs à la première approximation de Born

On s'intéresse maintenant aux calculs de quelques sections efficaces typiques de la diffusion électrons-atome d'hydrogène dans le cas où les électrons incidents ont une énergie cinétique importante par rapport à l'énergie de liaison de l'électron cible. Exprimée en unités atomiques, cette condition signifie que :

$$\mathbf{k}_i^2 \gg 1 \quad (2.11)$$

Par exemple, quand $k_i = 3$, l'énergie cinétique de l'électron incident est donnée par $\mathbf{k}_i^2/2 = 4,5$ u.a¹, qui est environ 120 eV (paramètre relativiste $\gamma \simeq 1.0063$). Lorsque la condition (2.11) est satisfaite, les effets d'échange d'électron sont relativement faible.

Dans cette section, on calcule les sections efficaces différentielles et totales pour les processus de diffusion élastique et inélastique en négligeant les effets d'échange. L'élément direct de matrice de transition \widehat{T}_{ba}^d (première approximation de Born), qui correspond à une collision où l'atome d'hydrogène initialement dans l'état $|0\rangle$, transité vers l'état $|n\rangle$, est donné par :

$$\widehat{T}_{ba}^d = \langle (2\pi)^{-3/2} \exp(i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}_1) \psi_n(\mathbf{r}_2) | \mathbf{V}_d | \psi_a^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle \quad (2.12)$$

avec

$$V_d = \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_1}$$

1. unité atomique

et

$$\psi_a^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \simeq \Phi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_1) \psi_0(r_2).$$

et $\psi_n(\mathbf{r}_2)$ est la fonction d'onde de l'état final $|n\rangle$.

L'élément de matrice de transition \widehat{T}_{ba}^d devient :

$$\widehat{T}_{ba}^d(Born) = (2\pi)^{-3} \int \exp(i\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_1) \psi_n^*(\mathbf{r}_2) \left[\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_1} \right] \psi_0(r_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (2.13)$$

avec $\mathbf{\Delta}$ est le moment de transfert d'impulsion exprimé en unité atomique par :

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f. \quad (2.14)$$

En introduisant la quantité :

$$A_{n0}(\mathbf{r}_1) = \left\langle n \left| \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_1} \right| 0 \right\rangle \quad (2.15)$$

l'élément de transition sera :

$$\widehat{T}_{ba}^d(Born) = (2\pi)^{-3} \int \exp(i\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_1) A_{n0}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \quad (2.16)$$

après avoir calculé la quantité A_{n0} , l'élément de matrice sera ensuite calculé en utilisant l'intégrale de Fourier. Ceci permet d'obtenir la matrice de transition directe de Born.

Une méthode alternative consiste à calculer premièrement l'intégrale dépendante de \mathbf{r}_1 dans l'équation (2.13) par utilisation de l'intégrale de Bethe [2] :

$$\int \frac{\exp(i\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_1)}{r_{12}} d\mathbf{r}_1 = \frac{4\pi}{\Delta^2} \exp(i\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_2). \quad (2.17)$$

L'intégrale sur la variable \mathbf{r}_2 , impliquant les fonctions d'onde d'états liés, sera ensuite calculée.

On illustre ce formalisme sur quelques processus typiques ; à savoir :

2.1 La collision élastique $1s - 1s$

Dans ce cas, l'élément $A_{00}(\mathbf{r}_1)$ est donné par :

$$\begin{aligned} A_{00}(\mathbf{r}_1) &= \mathbf{V}_{st}(r_1) \\ &= \left\langle 0 \left| \frac{1}{\mathbf{r}_{12}} - \frac{1}{\mathbf{r}_1} \right| 0 \right\rangle \end{aligned} \quad (2.18)$$

En explicitant la fonction d'onde $\psi_0(\mathbf{r}_2)$, on trouve :

$$A_{00}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{\pi} \int \exp(-2r_2) \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_1} \right) d\mathbf{r}_2. \quad (2.19)$$

Ensuite, on développe la quantité r_{12}^{-1} en harmoniques sphériques comme suit :

$$\frac{1}{r_{12}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(r_{<})^l}{(r_{>})^{l+1}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}_2) \quad (2.20)$$

où $r_{>}$ est le plus grand de r_1 ou r_2 et $r_{<}$ le plus petit des deux. Du fait que la fonction $\exp(-2r_2)$ dans l'équation (2.19) ne dépend pas des variables angulaires \mathbf{r}_2 , on peut effectuer des intégrations angulaires. On garde seulement le premier terme de l'équation (2.20) correspondant à $l = m = 0$. Après les calculs, le résultat obtenu correspondant au potentiel statique est donné par :

$$\mathbf{V}_{st}(r_1) = -(1 + 1/r_1) \exp(-2r_1), \quad (2.21)$$

ce potentiel statique est réel et de forme simple, il ne contient pas d'éléments importants de la collision. (par exemple il ne tient pas compte la polarisation de l'atome dû au présence de l'électron incident). Il est aussi intéressant de noter que pour des petites valeurs de \mathbf{r}_1 que ce potentiel se réduit à $-1/r_1$, qui est l'action entre l'électron incident et le proton [3].

On calcul maintenant l'élément de matrice de transition de la collision $1s - 1s$,

$$\hat{T}_{el}^d(Born) = -(2\pi)^{-3} \int \exp(i\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_1) \exp(-2r_1) \left(1 + \frac{1}{\mathbf{r}_1} \right) d\mathbf{r}_1. \quad (2.22)$$

Les intégrales angulaires sont calculées en exprimant l'onde plane $\exp(i\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_1)$ en polynômes de Legendre ou en harmoniques sphériques comme suit :

$$\exp(i\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_1) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(\Delta r_1) P_l \left(\frac{\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_1}{\Delta r_1} \right) \quad (2.23)$$

ou bien sous la forme :

$$\exp(i\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_1) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} i^l j_l(\Delta r_1) Y_{lm}(\hat{\mathbf{\Delta}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}_1) \quad (2.24)$$

donc :

$$\hat{T}_{el}^d(Born) = -(2\pi)^{-3} 4\pi \int_0^{+\infty} dr_1 r_1^2 j_0(\Delta r_1) \exp(-2r_1) \left(1 + \frac{1}{r_1} \right) \quad (2.25)$$

avec $j_0(x) = \sin(x)/x$, l'intégrale est finalement facile à calculer et l'élément de matrice de transition devient :

$$\widehat{T}_{el}^d(Born) = -(2\pi^2)^{-1} \left[\frac{\Delta^2 + 8}{(\Delta^2 + 4)^2} \right]. \quad (2.26)$$

Pour une collision élastique, on a $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = k$ et le module du vecteur Δ est $\Delta = 2k \sin \frac{1}{2}\theta$, avec θ est l'angle de diffusion entre les vecteurs d'ondes \mathbf{k}_i et \mathbf{k}_f .

Finalement la section efficace différentielle (SED) sans échange d'électron pour la première approximation de Born est donnée par :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{el(1s,1s)} = (2\pi)^4 |\widehat{T}_{el}^d(Born)|^2 = 4 \frac{(\Delta^2 + 8)^2}{(\Delta^2 + 4)^4} \quad (2.27)$$

ou

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{el(1s,1s)} = \frac{(k^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta + 2)^2}{4(k^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta + 1)^4}. \quad (2.28)$$

La section efficace totale (de Born) correspondante σ_{tot}^{el} est donnée par :

$$\sigma_{tot}^{el} = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{el}. \quad (2.29)$$

On obtient facilement la forme analytique suivante :

$$\sigma_{tot}^{el} = \pi \frac{7k^4 + 18k^2 + 12}{3(1 + k^2)^3}. \quad (2.30)$$

Lorsque k prend de très grande valeurs, la section efficace totale devient :

$$\sigma_{tot}^{el} \simeq \frac{7\pi}{3} \frac{1}{k^2}. \quad (2.31)$$

En fonction de l'énergie cinétique de l'électron incident, σ_{tot}^{el} peut s'écrire :

$$\sigma_{tot}^{el} \sim A E_e^{-1} \quad (2.32)$$

avec A est une constante et $E_e = \frac{1}{2}k^2$ (est l'énergie cinétique de l'électron incident (en u.a)). la SED de l'équation (2.27) est illustrée dans la figure (2.2) sur laquelle on montre que le logarithme de la SED décroît lorsque l'énergie passe de 100 eV à 400 eV au-delà de l'angle $\theta = 2.5^\circ$ tandis que cette propriété s'inverse pour les petits angles $[0^\circ, 2.5^\circ]$. La section efficace totale (2.30) est illustrée sur la figure (2.3).

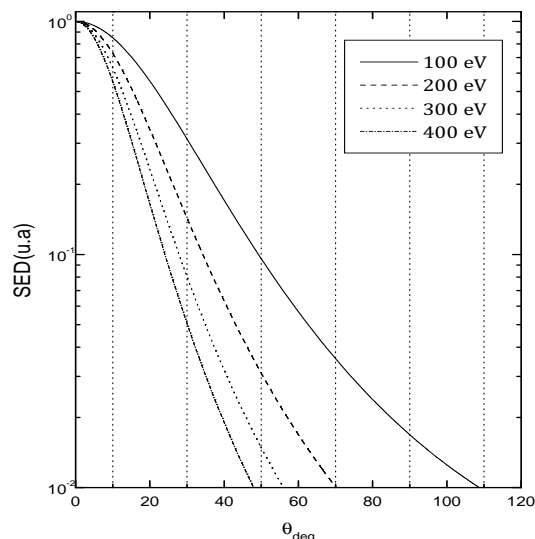


FIGURE 2.2 – Variation du logarithme décimal de la SED $1s - 1s$ (première approximation de Born) en fonction de l'angle de diffusion pour différentes valeurs de l'énergie de l'électron incident [3].

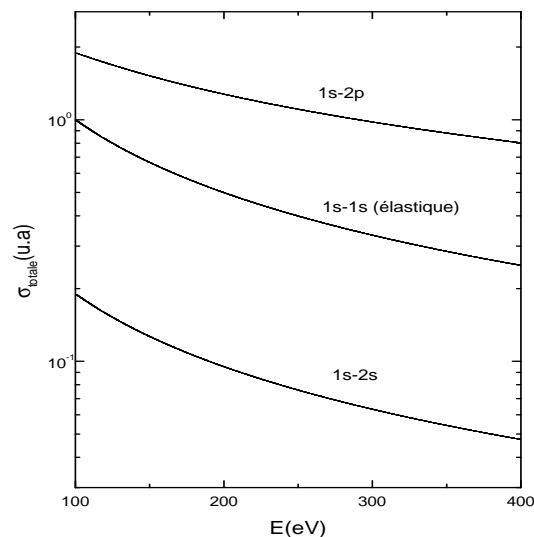


FIGURE 2.3 – Les SEDs totale (sans échange) de la première approximation de Born pour les collisions $1s-1s$ (élastique), $1s-2s$ et $1s-2p$ (inélastique) en fonction de l'énergie de l'électron incident [3].

2.2 Excitation inélastique $1s - 2s$

Maintenant, on évalue la quantité :

$$A_{2s,1s}(\mathbf{r}_1) = \left\langle 2s \left| \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_1} \right| 1s \right\rangle$$

où la fonction d'onde de l'état $2s$ est donnée par :

$$\psi_{2s}(r_2) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}(2 - r_2) \exp\left(-\frac{1}{2}r_2\right). \quad (2.33)$$

A cause de l'orthogonalité des fonctions $\psi_{1s}(r_2)$ et $\psi_{2s}(r_2)$, le terme $\langle 2s | 1/r_1 | 1s \rangle$ est nul. Après substitution, l'amplitude de transition devient :

$$A_{2s,1s}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \int \exp\left(-\frac{3}{2}r_2\right)(2 - r_2) \frac{1}{r_{12}} d\mathbf{r}_2. \quad (2.34)$$

Cette intégrale est évaluée en exprimant r_{12}^{-1} en harmoniques sphériques, avec le résultat :

$$A_{2s,1s}(r_1) = \frac{4}{9\sqrt{2}} \exp(-\frac{3}{2}r_1)(r_1 + \frac{2}{3})$$

on obtient :

$$\widehat{T}_{2s,1s}^d(Born) = (2\pi)^{-3} \frac{4}{9\sqrt{2}} \int \exp(i\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_1) \exp(-\frac{3}{2}r_1)(r_1 + \frac{2}{3}) d\mathbf{r}_1 \quad (2.35)$$

$$= (2\pi)^{-3} \frac{16\pi\sqrt{2}}{(\Delta^2 + \frac{9}{4})^3}. \quad (2.36)$$

Après calculs, on aura l'expression suivante de la section efficace différentielle :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{2s,1s} = \frac{k_f}{k_i} \frac{128}{(\Delta^2 + \frac{9}{4})^6}. \quad (2.37)$$

Les normes des impulsions k_i et k_f sont reliées par la relation de conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}k_i^2 + w_{1s} = \frac{1}{2}k_f^2 + w_{2s}$$

où w_{1s} et w_{2s} sont respectivement les énergies de l'atome d'hydrogène dans les états $1s$ et $2s$.

Soit en unité atomique :

$$\frac{1}{2}k_i^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}k_f^2 - \frac{1}{8}$$

donc :

$$k_f = (k_i^2 - \frac{3}{4})^{1/2}.$$

Soit θ l'angle de diffusion entre les vecteurs \mathbf{k}_i et \mathbf{k}_f , le moment de transfert d'impulsion est donné par :

$$\Delta = (k_i^2 + k_f^2 - 2k_i k_f \cos \theta)^{1/2}.$$

L'élément de matrice de transition (2.36) décroît en fonction de Δ^{-6} pour des grandes valeurs du moment de transfert Δ , c-à-d beaucoup plus rapide que le cas de la collision élastique $1s-1s$ qui varie en Δ^{-2} . Cependant, on peut montrer que la partie imaginaire de l'approximation de Born au second terme correspondant à la transition $1s-2s$ se comporte comme $k^{-1}\Delta^{-2}$ pour k et Δ grandes [3], de sorte que le second terme domine la diffusion aux énergies élevées (la condition (2.11)) et les transferts de quantité de mouvement élevées.

De la même façon que précédemment, la section efficace totale est donnée par :

$$\sigma_{tot}^{2s,1s} \simeq \frac{128\pi}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \frac{1}{k_i^2}. \quad (2.38)$$

On observe aussi que la section efficace totale varie en E_e^{-1} pour des grandes valeurs de E_e . En comparant $\sigma_{tot}^{1s,1s}$ et $\sigma_{tot}^{2s,1s}$, on voit que la variation asymptotique de cette dernière est environ cinq fois celle de la collision élastique.

La figure (2.4) montre la variation du logarithme de la SED $1s-2s$ en fonction de l'énergie. On remarque que la SED décroît lorsque l'énergie passe de 100 eV à 400 eV. La section efficace totale donnée par l'équation (2.38) est aussi illustrée sur la figure (2.3).

2.3 Excitation inélastique $1s-2p$

Bien que le calcul de la section efficace différentielle d'excitation $1s-2p$ peut être effectué comme précédemment en évaluant d'abord $A_{2p,1s}$, puis $\widehat{T}_{2p,1s}^d(Born)$, on va appliquer ici une autre méthode dans laquelle l'intégration se fait premièrement sur la variable r_1 puis sur la variable r_2 . L'élément de matrice de transition de l'équation (2.13) devient dans ce cas :

$$\widehat{T}_{2p,1s}^d(Born) = (2\pi)^{-3} \int \exp(i\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_1) \psi_{2p}^*(\mathbf{r}_2) \frac{1}{r_{12}} \psi_{1s}(r_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (2.39)$$

On note que le terme r_1^{-1} dans l'intégrale (2.13) ne contribue pas à cause de l'orthogonalité des fonctions d'onde ψ_{2p} et ψ_{1s} . En utilisant l'intégrale de Bethe de l'équation (2.17), on trouve :

$$\widehat{T}_{2p,1s}^d(Born) = \frac{1}{2\pi^2 \Delta^2} \int \psi_{2p}^*(\mathbf{r}_2) \exp(i\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_2) \psi_{1s}(r_2) d\mathbf{r}_2. \quad (2.40)$$

D'une manière générale, pour toute transition inélastique menant de l'état initial à l'état final de l'atome d'hydrogène, on aura l'expression suivante :

$$\widehat{T}_{n,0}^d(Born) = \frac{1}{2\pi^2 \Delta^2} \int \psi_n^*(\mathbf{r}_2) \exp(i\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{r}_2) \psi_0(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2. \quad (2.41)$$

On calcul dans le cadre de la première approximation de Born l'intégrale (2.40) en choisissant l'axe de quantification le long du moment du transfert d'impulsion Δ (en prenant l'axe des z selon k_i et compte tenu de la symétrie cylindrique (pas de dépendance en φ)). L'état excité est $2p(m=0)$ (aussi nommé $2p_0$ ou $2p_z$), sa fonction d'onde est donnée par :

$$\psi_{2p_z}(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{2^{3/2}\sqrt{3}} r_2 \exp(-\frac{1}{2}r_2) Y_{1,0}(\hat{\mathbf{r}}_2)$$

avec,

$$Y_{1,0}(\hat{\mathbf{r}}_2) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta_2.$$

En évaluant l'intégrale de l'équation (2.41), l'élément de matrice de transition (2.40) devient :

$$\widehat{T}_{2p,1s}^d(Born) = (2\pi)^{-3} \frac{24\pi\sqrt{2}}{\Delta(\Delta^2 + \frac{9}{4})^3} i. \quad (2.42)$$

On remarque que cette expression est purement imaginaire. La section efficace différentielle dans le cadre de la première approximation de Born correspondante est finalement donnée par :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{2p,1s} = \frac{k_f}{k_i} \frac{288}{\Delta^2(\Delta^2 + \frac{9}{4})^6} \quad (2.43)$$

avec

$$k_f = (k_i^2 - \frac{3}{4})^{1/2}.$$

A cause de la présence du terme Δ^{-2} , la section efficace présente un pic important pour des faibles angles par rapport aux collisions élastique $1s - 1s$ ou inélastique $1s - 2s$. Pour les transferts de grandes quantité de mouvement, on note que l'élément de matrice de transition de la première approximation de Born (2.42) chute en Δ^{-7} , c'est à dire beaucoup plus rapide que le cas de la transition élastique. La figure (2.5) montre la variation du logarithme décimal de la SED $1s - 2p$ en fonction de l'angle de diffusion pour différentes valeurs de l'énergie de l'électron incident.

Cependant, on peut prouver que le second terme d'approximation de Born correspondant à l'excitation $1s - 2p$ gouverne la collision aux énergies élevées et aux grandes valeurs du moment de transfert d'impulsion. Cette dominance du second terme comme il est le cas de l'excitation $1s - 2s$ est une caractéristique à des hautes énergies des collisions inélastiques électron-atome se passant aux grandes valeurs du moment de transfert d'impulsion.

On aborde maintenant le calcul de la section efficace totale, cette dernière est donnée par :

$$\sigma_{tot}^{2p,1s} = 2\pi \frac{128}{k_i^2} \int_{k_i - k_f}^{k_i + k_f} d\Delta \frac{1}{\Delta(\Delta^2 + \frac{9}{4})^6}. \quad (2.44)$$

L'intégrale de l'équation (2.44) présente une singularité à $\Delta = 0$, par conséquent, on utilise une technique de calcul pour l'enlever en introduisant un nombre d'onde \bar{k} . Après calcul, on obtient :

$$\sigma_{tot}^{2p,1s} \simeq 576\pi \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \frac{\log k_i}{k_i^2}. \quad (2.45)$$

En fonction de l'énergie de l'électron incident $E_e = k_i^2/2$, elle est donnée par :

$$\sigma_{tot}^{2p,1s} \simeq 144\pi \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \frac{\log E_e}{E_e}. \quad (2.46)$$

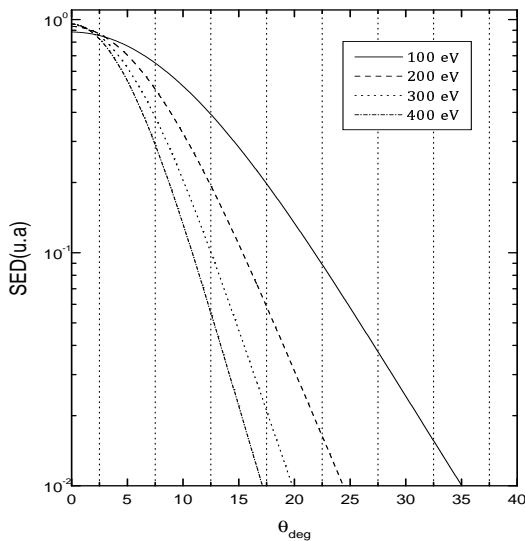


FIGURE 2.4 – Variation du logarithme décimal de la SED $1s - 2s$ (première approximation de Born) en fonction de l'angle de diffusion pour différentes valeurs de l'énergie de l'électron incident [3].

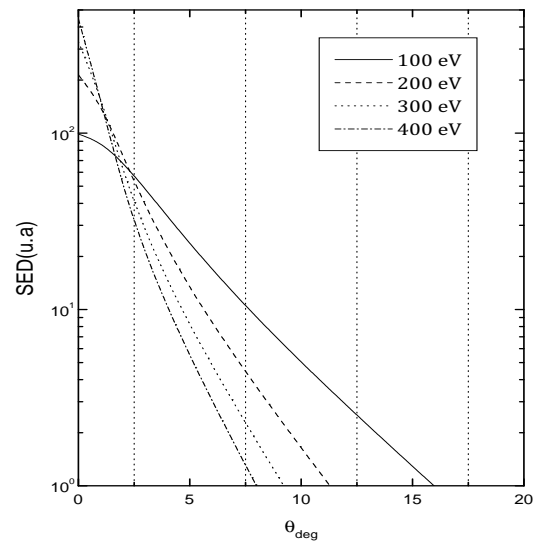


FIGURE 2.5 – Variation du logarithme décimal de la SED $1s - 2p$ (première approximation de Born) en fonction de l'angle de diffusion pour différentes valeurs de l'énergie de l'électron incident [3].

La quantité de l'équation (2.46) est souvent désignée comme la section efficace de Born-Bethe [4, 5]. Finalement, dans la figure (2.3) on trace les trois sections efficaces totale des processus $1s - 1s$, $1s - 2s$ et $1s - 2p$. Cette figure montre que la section efficace totale est inversement proportionnelle à l'énergie et que la section efficace totale du processus $1s - 1s$ surestime celle du processus $1s - 2s$ alors qu'elle sous-estime celle du processus $1s - 2p$.

3 Conclusion

On note que, contrairement aux sections efficaces des collisions élastique $1s - 1s$ et inélastique $1s - 2s$ qui diminuent comme E_e^{-1} à haute énergies, la section efficace totale à haute énergie de l'excitation $1s - 2p$ (qui est une transition optiquement autorisé) se comporte comme $(\log E_e)/E_e$, c'est à dire diminue moins rapidement avec l'augmentation de l'énergie que les transitions interdites $1s - 1s$ et $1s - 2s$ (voir figure (2.3)). Ce résultat est en fait plus général : les transitions optiquement permises dominent la section efficace totale pour les collisions électron-atome aux énergies élevées. On note aussi que le second terme d'approximation de Born gouverne les collisions inélastiques à hautes énergies et aux larges moments de transferts d'impulsion.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. F. Mott and H. S. W Massey, *The Theory of Atomic Colisions*(3rd ed, Oxford) Chapter 16 and 17, (1965).
- [2] F. W .Jr Byron and C. J. Joachain. Phys. Rep. **179**, 211 (1989).
- [3] J. Joachain Charles, Quantum Collision Theory, North-Holland, (1987).
- [4] H. A. Bethe, Ann. Physik **5**, 325, (1930).
- [5] H. A. Bethe, in Handbuch der Physik, eds. H. Greiner and K. Scheel (Springer, Berlin) Vol. **24**/1, (1933).

CHAPITRE 3

EXCITATION INÉLASTIQUE SEMI-RELATIVISTE

$1S_{1/2} - 2S_{1/2}$ DE L'HYDROGÈNE ATOMIQUE PAR IMPACT ÉLECTRONIQUE

1 Introduction

Dès que les propriétés de la lumière ont pu être parfaitement contrôlées, elle est devenue l'un des outils privilégiés de l'étude de la dynamique électronique des atomes. L'étude des collisions électron-atome en présence d'un champ laser a attiré beaucoup d'attention ces dernières années, non seulement en raison de l'importance de ces processus dans les domaines appliqués (telles que le chauffage du plasma), mais aussi en raison de leur intérêt dans la théorie des collisions atomiques fondamentales.

Le domaine quantique relativiste de la physique atomique et subatomique des lasers est récemment devenu un nouveau domaine de recherche et constitue un nouveau champ d'étude systématique théorique et expérimentale. En particulier, l'étude des processus de la diffusion électron-atome assistés par laser devient un sujet de plus en plus important. Ces processus sont d'un intérêt fondamental et primordial, par exemple dans le chauffage des plasmas laser et des lasers à gaz de grande puissance. Ces études permettent de comprendre de nombreux aspects

en physique des plasmas et en astrophysique. Le développement de ces études a également été fortement motivé par la nécessité des données expérimentales pour tester et développer des théories appropriées de la diffusion, et de fournir un outil pour obtenir des informations détaillées sur la structure des atomes et des molécules cibles. La plupart des travaux sont théoriques, et il y'a très peu de travaux expérimentaux à l'heure actuelle. On cite les expériences réalisées de diffusion assistée par laser élastique [1] et inélastique [2–5], dans lesquelles il y'a échange d'un ou plusieurs photons entre l'électron-cible et le champ laser. Les processus d'excitation ont été largement étudiés dans la littérature par plusieurs auteurs [6–9]. Les premières études théoriques sur la diffusion inélastique ont été inspirées des travaux ultérieurs [10–12], dans lesquelles l'interaction entre l'électron et le champ peut être traitée en utilisant exactement les ondes de Volkov [13]. Une autre étude analytique de l'excitation relativiste $1s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ de l'atome d'hydrogène par impact électronique en présence du champ laser a été l'objet d'une étude [14]. Voir aussi la travail effectué par Alfred et al [15] qui résume un ensemble des collisions relativistes laser-atome en présence du champ laser. En absence du champ laser, de nombreux auteurs ont étudié ces processus en utilisant des outils numériques. Parmi ces auteurs, Kisielius *et al.* [16], ont étudié la matrice-R avec des approximations non relativiste et relativiste pour les ions hydrogéoïdes tels que He^+ , Fe^{25+} et U^{91+} , où le cas des transitions $1s \rightarrow 2s$ et $1s \rightarrow 2p$ ont été envisagées. Andersen *et al.* [17] ont appliqué l'approche semi-relativiste (Breit Pauli R-matrice) pour le calcul de l'excitation par impact électronique de la transition résonante $^2s_{1/2} \rightarrow ^2p_{1/2,3/2}^o$ dans les atomes alcalins lourds. Payne *et al.* [18] ont étudié l'excitation par impact électronique de la transition résonante $5s \rightarrow 5p$ du rubidium en utilisant l'approche semi-relativiste (Breit Pauli R-matrice). Y. Attaourti, B. Manaut *et al.* [19] ont présenté un modèle théorique semi-relativiste de l'ionisation relativiste exacte $1s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ de l'hydrogène atomique par impact électronique en présence d'un champ laser. Ils ont constaté qu'une simple analogie formelle lie les expressions analytiques de la section efficace différentielle (SED) en l'absence et en présence d'un champ laser. L'objectif de ce chapitre est d'étudier théoriquement un processus semi-relativiste et de montrer que le formalisme non relativiste devient inapplicable pour décrire des particules animées d'une énergie cinétique élevée. Avant de présenter les résultats de ce chapitre, et pour des raisons pédagogiques, on commence par les résultats les plus fondamentaux en utilisant les unités

atomiques ($(\hbar = m_e = e = 1)$, où m_e est la masse de l'électron au repos) qui seront utilisés tout au long de ce travail. La présentation de ce chapitre est comme suit : Le formalisme théorique et mathématique nécessaire sont donnés dans les premières sections, la discussion des résultats dans la section 5. On présente quelques méthodes de calcul de la valeur approchée d'une intégrale et son application pour le calcul numérique de la section efficace différentielle dans la section 6 et on finit par une conclusion.

2 Théorie de la collision inélastique $1s_{1/2} \rightarrow 2s_{1/2}$ en absence du champ laser

Dans cette section, on calcul l'expression analytique exacte de la Section Efficace Différentielle (SED) de spin non polarisé de l'excitation semi-relativiste de l'hydrogène atomique par impact électroniques. L'élément de matrice de transition S_{fi} dans le canal direct (effets d'échange sont négligés) est donné par :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int dt \langle \psi_{p_f}(x_1) \phi_f(x_2) | V_d | \psi_{p_i}(x_1) \phi_i(x_2) \rangle \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\mathbf{r}_1 \bar{\psi}_{p_f}(t, \mathbf{r}_1) \gamma^0 \psi_{p_i}(t, \mathbf{r}_1) \langle \phi_f(x_2) | V_d | \phi_i(x_2) \rangle \end{aligned} \quad (3.1)$$

où

$$V_d = \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_1} \quad (3.2)$$

est le potentiel d'interaction exprimé dans le canal direct, \mathbf{r}_1 sont les coordonnées des électrons incidents et diffusés, \mathbf{r}_2 sont ceux de l'électron atomique, $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ et $r_1 = |\mathbf{r}_1|$. La fonction d'onde $\psi_{p_i}(x_1)$ (respectivement $\psi_{p_f}(x_1)$) en représentation-q, $\psi_{p_i}(x_1) = \psi_p(t, \mathbf{r}_1) = u(p, s) \exp(-ip \cdot x) / \sqrt{2EV}$ est la fonction d'onde de l'électron incident (respectivement diffusé), décrit par le bispineur de Dirac libre et normalisée dans le volume V et $\phi_{i,f}(x_2) = \phi_{i,f}(t, \mathbf{r}_2)$ est la fonction d'onde semi-relativiste de l'atome d'hydrogène. Les indices i et f labellent respectivement l'état initial et final. La fonction d'onde semi-relativiste de l'atome d'hydrogène utilisée ici est la fonction d'onde de Darwin pour les états liés [20] et $\mathcal{E}_b(1s_{1/2})$, est l'énergie de liaison de l'état fondamental de l'hydrogène atomique. La fonction d'onde de ce dernier est

définie comme suit :

$$\phi_i(t, \mathbf{r}_2) = \exp(-i\mathcal{E}_b(1s_{1/2})t)\varphi_{1s}^{(\pm)}(\mathbf{r}_2) \quad (3.3)$$

où

$$\varphi_{1s}^{(\pm)}(\mathbf{r}_2) = \left(\mathbf{1}_4 - \frac{i}{2c}\alpha \cdot \nabla_{(2)}\right)u^{(\pm)}\varphi_0(\mathbf{r}_2) \quad (3.4)$$

est la fonction d'onde semi-relativiste des états liés, en très bonne approximation au premier ordre en Z/c aux fonctions d'onde relativistes exactes dans les corrections relativistes, avec φ_0 ¹ la fonction hydrogénoïde de l'état lié non relativiste. Les spineurs $u^{(\pm)}$ sont tels que $u^{(+)} = (1, 0, 0, 0)^T$ et $u^{(-)} = (0, 1, 0, 0)^T$ représentent les spineurs de base à quatre composantes pour une particule au repos de spin-up et de spin-down, respectivement. La matrice opérateur différentiel $\alpha \cdot \nabla$ est donnée par :

$$\alpha \cdot \nabla = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_z & \partial_x - i\partial_y \\ 0 & 0 & \partial_x + i\partial_y & -\partial_z \\ \partial_z & \partial_x - i\partial_y & 0 & 0 \\ \partial_x + i\partial_y & -\partial_z & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Pour le spin-up, on a :

$$\varphi_{1s}^{(+)}(\mathbf{r}_2) = N_{D_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{i}{2cr_2}z \\ \frac{i}{2cr_2}(x + iy) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-r_2} \quad (3.6)$$

et pour le spin-down,

$$\varphi_{1s}^{(-)}(\mathbf{r}_2) = N_{D_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{i}{2cr_2}(x - iy) \\ -\frac{i}{2cr_2}z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-r_2} \quad (3.7)$$

où

$$N_{D_1} = 2c/\sqrt{4c^2 + 1} \quad (3.8)$$

1. $\varphi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-r)$

est une constante de normalisation petite mais très proche de 1. Notons que la fonction $\phi_f(t, \mathbf{r}_2)$ dans l'équation (3.1) est la fonction d'onde de Darwin pour les états liés [20], qui est aussi exacte en même ordre en Z/c dans les corrections relativistes. Ceci est exprimé en $\phi_f(t, \mathbf{r}_2) = \exp(-i\mathcal{E}_b(2s_{1/2})t)\varphi_{2s}^{(\pm)}(\mathbf{r}_2)$ avec $\mathcal{E}_b(2s_{1/2})$ est l'énergie de liaison de l'état $2s_{1/2}$ pour l'atome d'hydrogène et on a :

$$\varphi_{2s}^{(+)}(\mathbf{r}_2) = N_{D_2} \begin{pmatrix} 2 - r_2 \\ 0 \\ \frac{i(4-r_2)}{4cr_2} z \\ \frac{(4-r_2)}{4cr_2} (-y + ix) \end{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-r_2} \quad (3.9)$$

pour le spin-up, et

$$\varphi_{2s}^{(-)}(\mathbf{r}_2) = N_{D_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - r_2 \\ \frac{4-r_2}{4cr_2} (y + ix) \\ i \frac{(r_2-4)}{4cr_2} z \end{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-r_2} \quad (3.10)$$

pour le spin-down.

L'élément de matrice de transition dans le canal direct S_{fi} dans l'équation (3.1) devient :

$$S_{fi} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \bar{\psi}_{p_f}(t, \mathbf{r}_1) \gamma^0 \psi_{p_i}(t, \mathbf{r}_1) \phi_f^\dagger(t, r_2) \phi_i(t, r_2) V_d \quad (3.11)$$

cet amplitude de transition devient après calcul :

$$S_{fi} = -i \frac{\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i)}{2V \sqrt{E_f E_i}} 2\pi H_{inel}(\Delta) \delta(E_f + \mathcal{E}(2s_{1/2}) - E_i - \mathcal{E}(1s_{1/2})) \quad (3.12)$$

où $\Delta = |p_i - p_f|$ est le moment de transfert d'impulsion et γ^0 est la matrice de Dirac. En utilisant les techniques standards de l'électrodynamique quantique (QED) (voir chapitre 1), on obtient pour la SED de spin non polarisé (SED non polarisée en spin) :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} \frac{1}{(4\pi c^2)^2} \left(\frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2 \right) |H_{inel}(\Delta)|^2. \quad (3.13)$$

3 Calcul de la partie intégrale

La forme analytique de la fonction $H_{inel}(\Delta)$ est tout simplement trouvée après avoir effectué le calcul des différentes intégrales, elle a pour expression :

$$H_{inel}(\Delta) = \int_0^{+\infty} d\mathbf{r}_1 e^{i\Delta\mathbf{r}_1} I(r_1). \quad (3.14)$$

3.1 Intégration sur la variable \mathbf{r}_2

La quantité $I(r_1)$ est facilement calculée, sa forme explicite est :

$$I(r_1) = \int_0^{+\infty} d\mathbf{r}_2 \phi_{2s}^\dagger(\mathbf{r}_2) \left[\frac{1}{r_{12}} - \frac{Z}{r_1} \right] \phi_{1s}(\mathbf{r}_2) \quad (3.15)$$

On développe la quantité r_{12}^{-1} en harmoniques sphériques :

$$\frac{1}{r_{12}} = 4\pi \sum_{lm} \frac{Y_{lm}(\hat{r}_1) Y_{lm}^*(\hat{r}_2)}{2l+1} \frac{(r_<)^l}{(r_>)^{l+1}} \quad (3.16)$$

où $r_>$ est le plus grand des r_1 et r_2 , et $r_<$ le plus petit. Les coordonnées angulaire des vecteurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 sont : $\hat{r}_1 = (\theta_1, \varphi_1)$ and $\hat{r}_2 = (\theta_2, \varphi_2)$. On utilise aussi l'intégrale ci-dessous donnée par [21],

$$\int_x^{+\infty} du u^m e^{-\alpha u} = \frac{m!}{\alpha^{m+1}} e^{-\alpha x} \sum_{\mu=0}^m \frac{\alpha^\mu x^\mu}{\mu!}. \quad Re(\alpha) > 0 \quad (3.17)$$

Après quelques calculs analytiques, on trouve l'expression de $I(\mathbf{r}_1)$:

$$I(r_1) = \frac{6}{27} \left(\frac{1}{c^2} - 4 \right) + \frac{4}{27c^2} \frac{1}{r_1} - \frac{4}{9} \left(1 + \frac{1}{8c^2} \right) r_1. \quad (3.18)$$

3.2 Intégration sur la variable \mathbf{r}_1

L'intégration sur \mathbf{r}_1 aboutit à la formule suivante :

$$H_{inel}(\Delta) = \int_0^{+\infty} d\mathbf{r}_1 e^{i\Delta\mathbf{r}_1} I(r_1) = -\frac{4\pi}{\sqrt{2}} (I_1 + I_2 + I_3) \quad (3.19)$$

les intégrales angulaires sont évaluées en explicitant l'onde plane $e^{i\Delta\mathbf{r}_1}$ en harmoniques sphériques comme :

$$e^{i\Delta\mathbf{r}_1} = \sum_{lm} 4\pi i^l j_l(\Delta r_1) Y_{lm}(\hat{\Delta}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}_1) \quad (3.20)$$

avec $\mathbf{\Delta} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$ est le moment de transfert d'impulsion relativiste et $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ sont les coordonnées angulaires du vecteur $\mathbf{\Delta}$. Finalement, après un long calcul, on trouve les expressions de I_1 , I_2 et I_3 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{4}{27c^2} \int_0^{+\infty} r_1 e^{-\frac{3}{2}r_1} j_0(\Delta r_1) dr_1 = \frac{4}{27c^2} \frac{1}{((3/2)^2 + \Delta^2)} \\ I_2 &= \frac{6}{27} \left(\frac{1}{c^2} - 4 \right) \int_0^{+\infty} r_1^2 e^{-\frac{3}{2}r_1} j_0(\Delta r_1) dr_1 = \frac{2}{27} \left(\frac{1}{c^2} - 4 \right) \frac{3}{((3/2)^2 + \Delta^2)^2} \\ I_3 &= -\frac{4}{9} \left(1 + \frac{1}{8c^2} \right) \int_0^{+\infty} r_1^3 e^{-\frac{3}{2}r_1} j_0(\Delta r_1) dr_1 = \frac{8}{9} \left(1 + \frac{1}{8c^2} \right) \frac{\Delta^2 - 27/4}{((3/2)^2 + \Delta^2)^3} \end{aligned} \quad (3.21)$$

avec $j_0(\Delta r_1)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.

Il est clair que la situation est différente du cas où la collision est élastique, puisqu'on n'a pas trouvé de singularité dans le cas où $\mathbf{\Delta} \rightarrow 0$.

3.3 La partie spinorielle

La partie spinorielle est simplement donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2 &= \text{Tr} \{ \gamma^0 (\not{p}_i c + c^2) \gamma^0 (\not{p}_f c + c^2) \} \\ &= 2c^2 \left[\frac{2E_f E_i}{c^2} - (p_i \cdot p_f) + c^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pour vérifier la validité et la consistance de nos calculs semi-relativistes, on doit retrouver les mêmes résultats dans la limite non relativiste ($\gamma \rightarrow 1$), situation dans laquelle la section efficace différentielle non relativiste est donnée par l'équation (2.37) :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \frac{|\mathbf{k}_f|}{|\mathbf{k}_i|} \frac{128}{(|\mathbf{\Delta}_{nr}|^2 + \frac{9}{4})^6} \quad (3.23)$$

avec $|\mathbf{\Delta}_{nr}| = |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f|$ est le transfert d'impulsion non relativiste et $\mathbf{k}_f = (|\mathbf{k}_i|^2 - 3/4)^{1/2}$ traduit la relation de conservation d'énergie.

4 Théorie de la collision inélastique 1s-2s en présence du champ laser

L'équation de Dirac pour un électron dans un champ extérieur est (en système d'unités atomiques) :

$$\left[\left(p - \frac{1}{c} A \right)^2 - c^2 - \frac{i}{2c} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \psi(x) = 0, \quad (3.24)$$

où $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ est le tenseur relié aux matrices de Dirac γ^μ , $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur du champ électromagnétique et A^μ est le quadri-vecteur potentiel. L'équation ci-dessus admet une solution exacte (onde de Volkov [13]), elle est donnée par :

$$\psi(x) = \left(1 + \frac{kA}{2c(kp)} \right) \frac{u(p, s)}{\sqrt{2VQ_0}} \exp \left[-i(qx) - i \int_0^{kx} \frac{(Ap)}{c(kp)} d\phi \right]. \quad (3.25)$$

$u(p, s)$ représente le bispineur à quatre composantes de Dirac normalisé selon $\bar{u}(p, s)u(p, s) = 2c^2$.

Dans ce cas, la section efficace différentielle (SED) non polarisée est donnée par :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\sigma}^{(s)}}{d\Omega_f}, \quad (3.26)$$

avec

$$\frac{d\bar{\sigma}^{(s)}}{d\Omega_f} = \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|} \frac{1}{(4\pi c^2)^2} \left(\frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(s)}|^2 \right) |H_{inel}(\Delta_s)|^2 \Bigg|_{Q_f=Q_i+s\omega+E_{1s1/2}-E_{2s1/2}}. \quad (3.27)$$

Dans ce cas, la partie spinorielle qui contient toute l'information sur le spin et sur les effets du champ laser peut être calculée en utilisant REDUCE [22] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |M_{fi}^{(s)}|^2 &= \frac{1}{2} \mathbf{Tr} \{ (\not{p}_f c + c^2) \Lambda^{(s)} (\not{p}_i c + c^2) \bar{\Lambda}^{(s)} \}, \\ &= \left(2 \{ J_s^2(z) \mathcal{A} + (J_{s+1}^2(z) + J_{s-1}^2(z)) \mathcal{B} + (J_{s+1}(z) J_{s-1}(z)) \mathcal{C} \right. \\ &\quad \left. + J_s(z) (J_{s-1}(z) + J_{s+1}(z)) \mathcal{D} \} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Les quatre coefficients \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= c^4 - (q_f \cdot q_i) c^2 + 2Q_f Q_i - \frac{a^2}{2} \left(\frac{(k \cdot q_f)}{(k \cdot q_i)} + \frac{(k \cdot q_i)}{(k \cdot q_f)} \right) + \frac{a^2 \omega^2}{c^2 (k \cdot q_f) (k \cdot q_i)} ((q_f \cdot q_i) - c^2) + \\ &\quad \frac{(a^2)^2 \omega^2}{c^4 (k \cdot q_f) (k \cdot q_i)} + \frac{a^2 \omega}{c^2} (Q_f - Q_i) \left(\frac{1}{(k \cdot q_i)} - \frac{1}{(k \cdot q_f)} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\mathcal{B} = -\frac{(a^2)^2\omega^2}{2c^4(k.q_f)(k.q_i)} + \frac{\omega^2}{2c^2} \left(\frac{(a_1.q_f)(a_1.q_i)}{(k.q_f)(k.q_i)} + \frac{(a_2.q_f)(a_2.q_i)}{(k.q_f)(k.q_i)} \right) - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \left(\frac{(k.q_f)}{(k.q_i)} + \frac{(k.q_i)}{(k.q_f)} \right) - \frac{a^2\omega^2}{2c^2(k.q_f)(k.q_i)} ((q_f.q_i) - c^2) + \frac{a^2\omega}{2c^2} (Q_f - Q_i) \left(\frac{1}{(k.q_f)} - \frac{1}{(k.q_i)} \right) \quad (3.30)$$

$$\mathcal{C} = \frac{\omega^2}{c^2(k.q_f)(k.q_i)} \left(\cos(2\phi_0) \{ (a_1.q_f)(a_1.q_i) - (a_2.q_f)(a_2.q_i) \} + \sin(2\phi_0) \{ (a_1.q_f)(a_2.q_i) + (a_1.q_i)(a_2.q_f) \} \right) \quad (3.31)$$

$$\mathcal{D} = \frac{c}{2} \left((\dot{A}.q_i) + (\dot{A}.q_f) \right) - \frac{c}{2} \left(\frac{(k.q_f)}{(k.q_i)} (\dot{A}.q_i) + \frac{(k.q_i)}{(k.q_f)} (\dot{A}.q_f) \right) + \frac{\omega}{c} \left(\frac{Q_i(\dot{A}.q_f)}{(k.q_f)} + \frac{Q_f(\dot{A}.q_i)}{(k.q_i)} \right) \quad (3.32)$$

avec $\dot{A} = a_1 \cos(\phi_0) + a_2 \sin(\phi_0)$. L'opérateur $\Lambda^{(s)}$ est donné par :

$$\Lambda^{(s)} = C_0 B_{0s}(z) + C_1 B_{1s} + C_2 B_{2s}. \quad (3.33)$$

Les trois coefficients C_0 , C_1 et C_2 sont :

$$\begin{aligned} C_0 &= \gamma^0 - 2\frac{\omega}{c} c(p_i) c(p_f) a^2 \not{k} \\ C_1 &= c(p_i) \gamma^0 \not{k} \not{\phi}_1 + c(p_f) \not{\phi}_1 \not{k} \gamma^0 \\ C_2 &= c(p_i) \gamma^0 \not{k} \not{\phi}_2 + c(p_f) \not{\phi}_2 \not{k} \gamma^0. \end{aligned}$$

Les relations impliquant les fonctions de Bessel ordinaires sont :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} e^{-iz \sin(\phi - \phi_0)} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} B_{0s} \\ B_{1s} \\ B_{2s} \end{pmatrix} e^{-is\phi}, \quad (3.34)$$

En inspectant l'équation (3.28), on note que cette expression dépend du champ laser via le quadri-potentiel A (dans l'argument des fonctions de Bessel) et aussi présent dans les coefficients multipliant les différents produits des fonctions de Bessel. Quant à la partie intégrale, il suffit de remplacer $H_{inel}(\Delta)$ par $H_{inel}(\Delta_s)$, avec $\Delta_s = \mathbf{q}_f - \mathbf{q}_i - s\mathbf{k}$ est le transfert d'impulsion en présence du champ laser.

5 Résultats et discussion

Pour présenter nos résultats, on va examiner séparément deux cas : celui correspondant au régime non relativiste ($\gamma \simeq 1$) et celui lié au régime relativiste ($\gamma \simeq 2$). Avant de commencer la discussion des résultats obtenus, il est utile de rappeler la signification de certaines abréviations qui apparaissent dans cette section. La NRDCS (Non-Relativistic Differential Cross Section) correspond à la section efficace différentielle non relativiste (SED Non Relativiste), où les ondes planes non relativistes sont utilisées pour décrire les électrons incidents et diffusés. La SRDCS (Semi-Relativistic Differential Cross Section) représente la section efficace différentielle semi-relativiste (SED Semi-Relativiste).

5.1 Densités de probabilité des fonctions d'onde radiales

On commence notre interprétation des résultats numériques par l'étude des densités de probabilité des fonctions d'onde radiales de Darwin et de Dirac en fonction du numéro atomique Z . Dans l'approximation $Z\alpha \ll 1$, l'utilisation de la fonction de Darwin n'a aucune influence sur les résultats au moins au premier ordre de la théorie des perturbations. Notre premier objectif est de ne pas étudier le comportement des ions hydrogénoïdes, mais d'étudier le processus de l'hydrogène atomique. Ainsi, le traitement semi-relativiste lorsque Z augmente et dépasse $Z = 20$, commence effectivement à générer des erreurs importantes. Par souci d'illustration, on donne dans la figure (3.1), le comportement de la densité de probabilité pour les fonctions d'onde radiales de Darwin, ainsi que celle des fonctions d'onde exactes relativistes de Dirac pour différentes valeurs de Z . On voit qu'il y'a des divergences à partir de $Z = 10$ et celles-ci deviennent plus prononcées lorsque $Z = 20$.

5.2 Absence du champ laser

Les résultats de la section efficace différentielle semi-relativiste obtenus pour la transition $1s \rightarrow 2s$ de l'hydrogène atomique par impact électronique, sont montrés dans les figures (3.2) et (3.3). Malheureusement, dans ce régime, il n'y a pas de modèles théoriques et de données expérimentales pour la comparaison comme dans le cas du régime non relativiste. Dans une

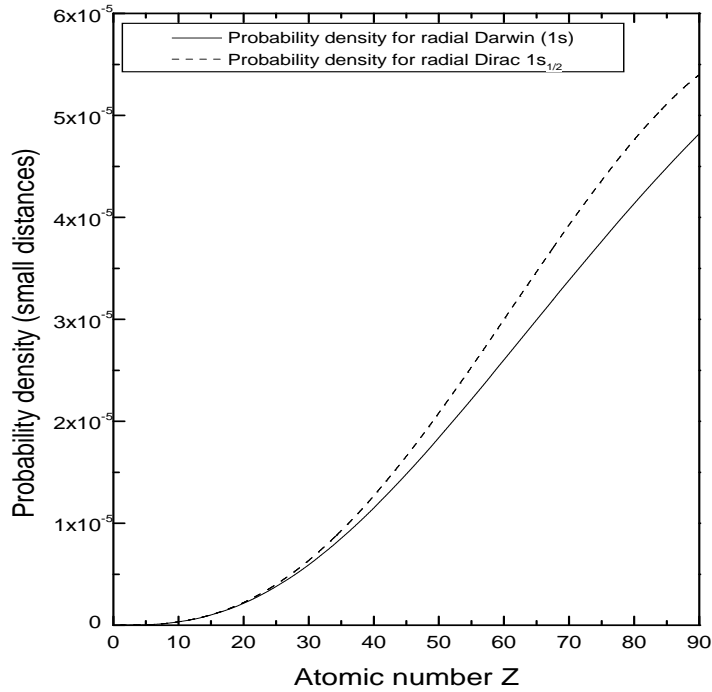


FIGURE 3.1 – Comportement de la fonction radiale de Darwin comparée à la fonction d’onde radiale exacte relativiste de Dirac pour les petites distances et par rapport au numéro atomique Z .

telle situation, il ressort des figures (3.2) et (3.3) que, dans la limite des hautes énergies cinétiques, les effets des termes supplémentaires de spin et de la relativité commencent à être perceptibles et que le formalisme non relativiste n’est plus applicable. Aussi un pic au voisinage de $\theta_f = 0^\circ$ est clairement observé. Ici, l’étude a été menée avec γ comme un paramètre relativiste et θ comme l’angle de diffusion. En unité atomique, l’énergie cinétique est liée à γ par la relation suivante : $E_k = c^2(\gamma - 1)$. On donne dans la figure (3.4) l’évolution de ces deux modèles (SRDCS, NRDCS) par rapport à l’angle de diffusion θ . Il apparaît clairement qu’il n’y a pas de différence entre ces deux modèles dans ce régime.

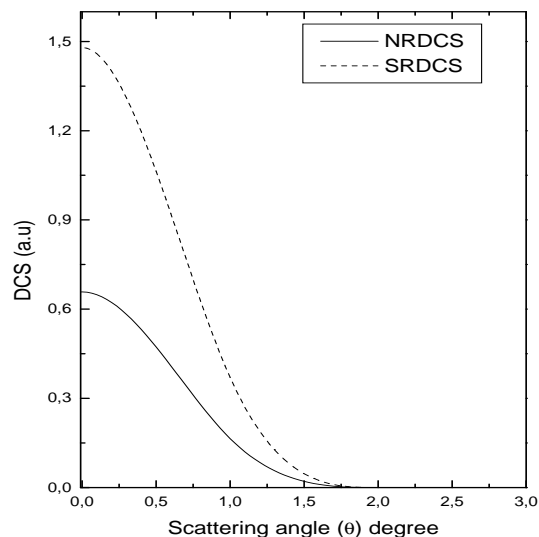


FIGURE 3.2 – NRDCS représente la SED non relativiste et SRDCS représente la SED semi-relativiste pour un paramètre relativiste ($\gamma = 1.5$) en fonction de l'angle de diffusion θ .

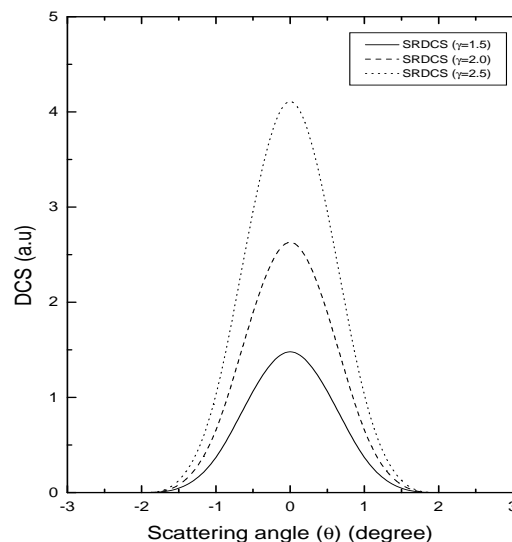


FIGURE 3.3 – L'approche semi-relativiste pour différentes valeurs du paramètre relativiste ($\gamma = 1.5$, $\gamma = 2$, $\gamma = 2.5$) en fonction de l'angle de diffusion θ .

La figure (3.5) montre la variation de la SRDCS par rapport à θ pour diverses énergies. Il est clair à partir de cette figure, qu'approximativement dans l'intervalle $[-5, 5]$, la SRDCS augmente avec γ , mais diminue ailleurs.

La figure (3.6) est un plot à trois dimensions de la section efficace différentielle semi-relativiste. Cette figure montre clairement que dans cette géométrie le pic central est toujours localisé autour de l'angle $\theta = 0^\circ$ et que la SED diminue avec γ , c'est à dire avec l'énergie cinétique de l'électron incident. La figure (3.7) présente la dépendance angulaire observée et calculée de la section efficace différentielle de la diffusion inélastique $1s - 2s$ du processus $e^- - H$ à une énergie cinétique de l'électron incident égale à 200 eV . Les deux approches semi-relativiste et non-relativiste sont identiques et sont en bon accord avec les données expérimentales fournies par J. F. Williams [23].

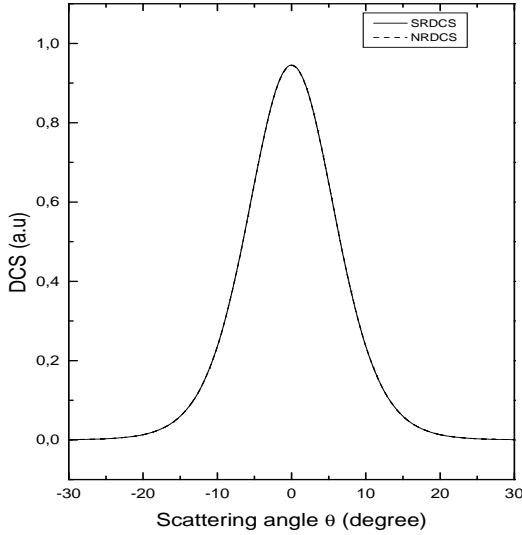


FIGURE 3.4 – Les deux SEDs, non relativiste et semi-relativiste pour un paramètre relativiste $\gamma = 1.00053$ en fonction de l'angle de diffusion θ .

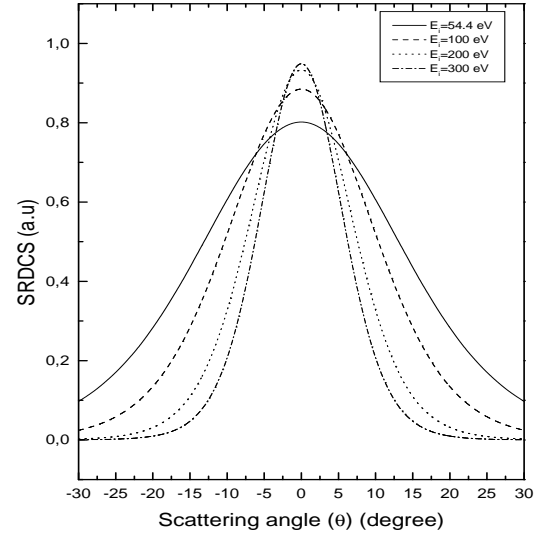


FIGURE 3.5 – L'approche semi-relativiste en fonction de l'angle de diffusion θ , et pour différentes énergies (54.4 eV , 100 eV , 200 eV et 300 eV).

5.3 Présence du champ laser

Pour la description de la géométrie de diffusion, on travaille dans le système de coordonnées pour lequel $\mathbf{k} \parallel \hat{e}_z$, ceci signifie que la direction de propagation du champ laser est suivant l'axe Oz . Les coordonnées angulaires non habillées de l'électron incident sont $\theta_i = 90^\circ$, $\phi_i = 45^\circ$. Pour l'électron diffusé, le vecteur \mathbf{p}_f est tel que $\mathbf{p}_f \in (\hat{e}_y, \hat{e}_z)$, et ses coordonnées angulaires sont telles que $-180^\circ \leq \theta_f \leq 180^\circ$ et $\phi_f = 45^\circ$. Lorsqu'on prend l'intensité du champ égale à zéro ($\epsilon = 0\text{ u.a.}$), les trois courbes (SRDCS avec laser, SRDCS sans laser et DCS non relativiste) se confondent, ce qui constitue la première consistance de notre approche, ceci est montrée dans la figure (3.8). La figure (3.9) montre la variation des SEDs en présence et en absence du champ laser en fonction de l'angle final θ_f (différente de l'angle de diffusion), différentes valeurs ont été prise pour voir la variation du SED vis à vis du nombre de photons échangés ($\pm 50, \pm 45, \pm 40, \pm 30, \pm 20, \pm 10$) et montre que, à ± 50 la SRDCS (avec laser) est presque proche de la SRDCS (sans laser). La figure (3.10) montre l'enveloppe de la SED semi-

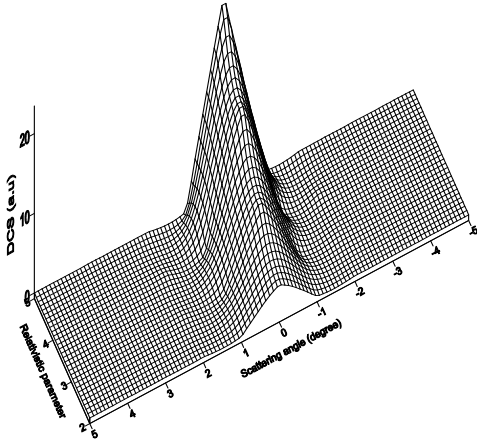


FIGURE 3.6 – Un plot à trois dimensions de la SED semi-relativiste en fonction du paramètre relativiste γ d'un côté et de l'angle de diffusion θ de l'autre côté.

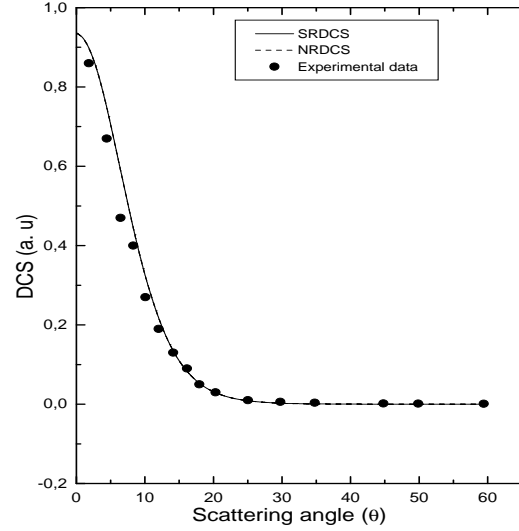


FIGURE 3.7 – Les SEDs semi-relativiste et non relativiste du processus de diffusion $1s-2s$ pour une énergie égale à 200 eV . Les points expérimentaux sont de J. F. Williams (1981).

relativiste dans le régime non relativiste ($\gamma = 1.00053$ et $\epsilon = 0.05 \text{ u.a.}$) pour un nombre de photons échangé 100 lors de la diffusion. Les "cut-off" sont donc de $s \simeq -50$ photons pour la partie négative de l'enveloppe et aussi de $s \simeq 50$ pour la partie positive. La convergence atteinte dans ce cas ± 50 est la vérification de la fameuse règle de somme qui a été montré par Bunkin et Fedorov [24], ainsi que par Kroll et Watson [25]. Pour un échange de ± 10 photons, on a plusieurs ordres de grandeur en raison de la différence entre les deux approches. Les figures (3.9) et (3.10) montrent correctement la corrélation dans le nombre de photons échangés qui atteint cette règle. La figure (3.11) montre clairement que pour le régime relativiste ($\gamma = 2,0$ et $\epsilon = 0,05 \text{ u.a.}$) et pour la géométrie ($\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $\theta_f = 45^\circ$, et $\phi_f = 45^\circ$), les valeurs du "cut-off" ont été modifiées et elles sont devenues $s = -13986$ pour la partie négative de l'enveloppe et $s = 13912$ pour la partie positive. Dans ce régime, lorsque le nombre de photons échangés augmente, la convergence des deux SRDCSs (avec et sans laser) sera atteint à approximativement ± 13945 , mais du fait qu'on a pas d'ordinateur de grande vitesse de

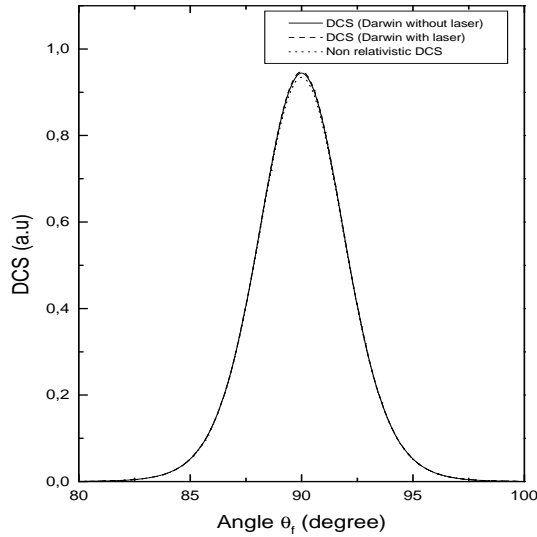


FIGURE 3.8 – La variation des différentes SEDs (SEDSR en présence et absence du champ laser et SED non relativiste) en fonction de l'angle θ_f , pour l'intensité du champ $\epsilon = 0 \text{ u.a}$ et le paramètre relativiste $\gamma = 1.00053$.

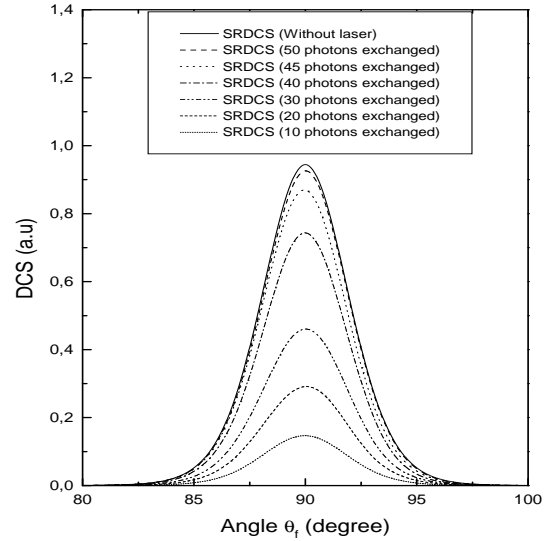


FIGURE 3.9 – La variation de la SED sans champ et différentes SEDs en présence du champ laser en fonction de l'angle θ_f pour différentes valeurs du nombre de photons échangés ($\pm 50, \pm 45, \pm 40, \pm 30, \pm 20, \pm 10$).

fréquence, on ne peut pas sommer sur un très grand nombre de photons. Il n'est pas donc possible de donner la figure qui illustre cette situation.

6 Calcul approché de la SED par intégration numérique

Pour le calcul de la SED, on s'intéresse aux calculs de deux parties essentielles, à savoir une partie spinorielle (somme et moyenne sur le spin) et une autre intégrable. La première est facilement déterminée par le logiciel de calculs symboliques REDUCE [22], quant-à la deuxième, on doit calculer explicitement une intégrale analytique. Ce calcul analytique n'est pas toujours facile à faire, surtout lorsqu'il s'agit des fonctions dont la primitive n'est pas connue.

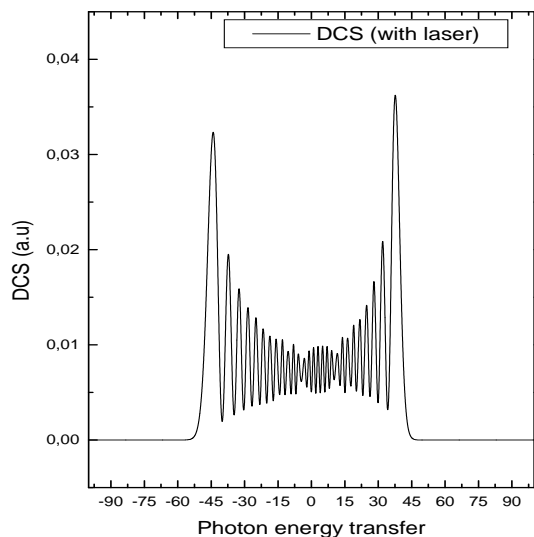


FIGURE 3.10 – Enveloppe de la SED semi-relativiste dans le régime non relativiste ($\gamma = 1.00053$ et $\epsilon = 0.05 \text{ u.a.}$) pour un nombre de photons échangé ± 100 .

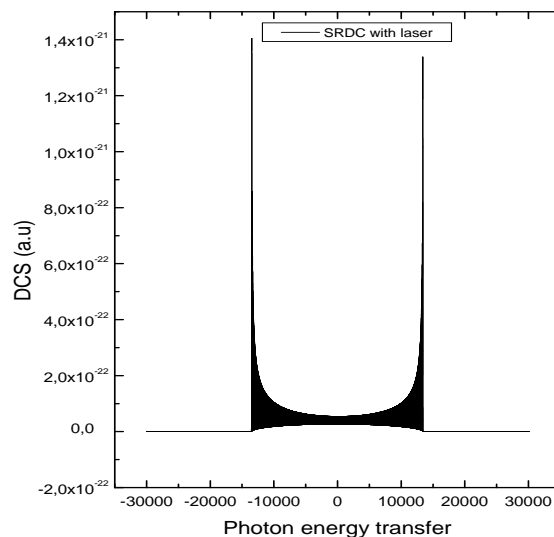


FIGURE 3.11 – Enveloppe de la SED semi-relativiste dans le régime relativiste ($\gamma = 2.0$ et $\epsilon = 0.05 \text{ u.a.}$) pour un nombre de photons échangé ± 3000 .

En effet, on se propose de calculer numériquement la SED de spin non polarisé donnée par l'équation (3.13) :

$$\frac{d\bar{\sigma}^{(s)}}{d\Omega_f} = \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|} \frac{1}{(4\pi c^2)^2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(s)}|^2 \right)}_{(1)} \underbrace{|H_{el,inel}(\Delta_s)|^2}_{(2)} \Bigg|_{Q_f=Q_i+s\omega+E_i-E_f} \quad (3.35)$$

La première partie (1) de l'équation ci-dessus est la partie spinorielle, et la deuxième partie (2), est la fonction du transfert d'impulsion $H_{el,inel}(\Delta_s)$ qui est une intégrale à déterminer numériquement et qui est l'objectif de cette section. D'habitude elle prend la forme suivante :

$$H_{el,inel}(\Delta) = \int_a^b g(r, \Delta).dr \quad (3.36)$$

où $[a, b]$ est une intervalle de \mathbb{R} et g est une fonction intégrable sur $[a, b]$. On se contente d'utiliser les méthodes de Quadrature de Gauss pour calculer numériquement ce type d'intégrale.

6.1 Méthodes de quadrature de Gauss

Dans le domaine mathématique de l'analyse numérique, les méthodes de quadrature sont des approximations de la valeur numérique d'une intégrale. En général, on remplace le calcul de l'intégrale par une somme pondérée prise en un certains nombres de points du domaine d'intégration (voir calcul numérique d'une intégrale pour plus d'informations). La méthode de quadrature de Gauss, du nom de Carl Friedrich Gauss, est une méthode de quadrature exacte pour un polynôme de degré $2n - 1$ avec n points pris sur le domaine d'intégration. Si ce dernier est (a, b) , les méthodes sont de la forme :

$$I = \int_a^b f(x)\bar{w}(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (3.37)$$

où $\bar{w} ((a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+)$ est une fonction de pondération, qui peut assurer l'intégrabilité de f . Les \bar{w}_i sont appelés les coefficients de quadrature (ou poids). Les points x_i , ou noeuds, sont réels, distincts, uniques et sont les racines de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\bar{w}(x)dx$. Les poids et les noeuds sont choisis de façon à obtenir des degrés d'exactitude les plus grands possibles. Les formules de Gauss jouent un rôle fondamental dans la méthode des éléments finis.

6.1.1 Principe général

On souhaite évaluer numériquement l'intégrale :

$$I = \int_a^b f(x)\bar{w}(x)dx. \quad (3.38)$$

Le domaine d'intégration (a, b) couvre plusieurs cas :

- intervalles bornés : comme $[a, b]$, $[a, b[$, etc.
- demi-droite réelle : $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$,
- la droite réelle tout entière : \mathbb{R} .

Le domaine d'intégration et la fonction de pondération déterminent le type de la quadrature de Gauss. Le tableau (3.1) résume les situations les plus communes. Une fois le type de quadrature choisi, la formule à n points s'écrit :

$$I = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i). \quad (3.39)$$

Domaine d'intégration (a, b)	Fonction de pondération \bar{w}	Famille de polynômes orthogonaux
$[-1, 1]$	1	Legendre
$]-1, 1[$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \alpha, \beta > -1$	Jacobi
$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Tchebychev (premier type)
$]-1, 1[$	$\sqrt{1-x^2}$	Tchebychev (second type)
\mathbb{R}_+	$\exp(-x)$	Laguerre
\mathbb{R}	$\exp(-x^2)$	Hermite

TABLE 3.1 – Principales configurations de quadrature de Gauss

Les noeuds sont déterminés comme les n racines du n ème polynôme orthogonal associé à la formule de quadrature (polynômes de Legendre (Laguerre, Hermite respectivement) pour la formule de Gauss-Legendre (Laguerre, Hermite), etc.).

On définit l'erreur comme $\mathbf{E}(\mathbf{f}) = |\mathbf{I} - \mathbf{I}(\mathbf{f})|$. **Le degré d'exactitude** d'une formule de quadrature est le degré le plus élevé de la famille des polynômes annulant $E(f)$. On a le résultat suivant : une formule à n points admet un degré d'exactitude de $2n - 1$.

6.1.2 Méthode de Gauss-Laguerre

Cette formule est associée au poids $\bar{w}(x) = \exp(-x)$ sur $]0, +\infty[$. Les n noeuds sont les n^{eme} racines du polynôme de Laguerre L_n , et les coefficients sont :

$$w_i = \frac{1}{(n+1)L'_n(x_i)L_{n+1}(x_i)}. \quad (3.40)$$

Maintenant, pour intégrer une fonction f , sur \mathbb{R}_+ , il faut remarquer que :

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{f(x)}{\bar{w}(x)}\bar{w}(x)dx.$$

Il reste alors à appliquer la formule de quadrature à la fonction $g(x) = f(x)/\bar{w}(x)$.

6.1.3 Méthode de Gauss-Hermite

Sur \mathbb{R} , la formule de Gauss-Hermite est caractérisée par la pondération $\bar{w}(x) = \exp(-x^2)$. Pour une formule à n points, les x_i sont calculés comme les n racines du n^{eme} polynôme

d'Hermite H_n ; quant aux pondérations, elles sont obtenues à partir de :

$$w_i = \frac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{[H'_n(x_i)]^2} \quad (3.41)$$

Concernant l'intégration de f sur \mathbb{R} , il suffit d'appliquer la formule de quadrature à la fonction $f(x).e^{x^2}$.

6.2 Exemples d'application

Les paramètres de la géométrie utilisés sont $\theta_i = 90^\circ$, $\phi_i = \phi_f = 45^\circ$ et θ_f varie entre 0° et 180° . On va discuter les deux cas en présence du champ laser, le cas non relativiste et relativiste et on compare les résultats analytiques obtenus à ceux obtenus numériquement pour le cas de l'excitation $1s - 2s$.

6.3 Calcul de la SED de l'excitation inélastique $1s_{1/2} - 2s_{1/2}$

Dans ce cas, $H_{inel}(\Delta)$ est donné par l'équation précédente (3.19) :

$$H_{inel}(\Delta) = \int_0^{+\infty} e^{i\Delta r_1} I(r_1) dr_1 \quad (3.42)$$

$$= \int_0^{+\infty} r_1^2 j_0(\Delta r_1) I(r_1) dr_1 \quad (3.43)$$

avec

$$I(r_1) = \frac{6}{27} \left(\frac{1}{c^2} - 4 \right) + \frac{4}{27c^2} \frac{1}{r_1} - \frac{4}{9} \left(1 + \frac{1}{8c^2} \right) r_1 \quad (3.44)$$

et

$$j_0(\Delta r_1) = \frac{\sin(\Delta r_1)}{\Delta r_1}. \quad (3.45)$$

Le domaine d'intégration (a, b) dans ce cas est $[0, +\infty[$, donc on applique la quadrature de Gauss-Laguerre, et on va comparer les résultats numériques aux résultats analytiques puisque cette intégrale est déjà calculée précédemment, sa formule est (3.19), et elle a pour expression :

$$H_{inel}(\Delta) = -\frac{4\pi}{\sqrt{2}} (I_1 + I_2 + I_3)$$

où

$$I_1 = \frac{4}{27c^2} \frac{1}{((3/2)^2 + \Delta^2)}$$

$$I_2 = \frac{2}{27} \left(\frac{1}{c^2} - 4 \right) \frac{3}{((3/2)^2 + \Delta^2)^2}$$

$$I_3 = \frac{8}{9} \left(1 + \frac{1}{8c^2} \right) \frac{\Delta^2 - 27/4}{((3/2)^2 + \Delta^2)^3}$$

La valeur numérique est donnée par :

$$H_{incl}(\Delta) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i).$$

A l'aide d'un programme informatique, on peut faire afficher les poids et les racines des polynômes de Laguerre, par exemple ceux d'un polynôme de degré 12 figurent sur le tableau (3.2) ci-dessous :

Degré	Racines x	Poids w
12	0.611 757484 515 13	0.377 759 275 873 127
	0.115 722 117358 02	0.264 731 371 055 443
	2.833 751 337 743 36	0.090 449 222 211 682
	1.512 610 269 776 45	0.244 082 011 319 895
	6.844 525 453 118 77	0.002 663 973 541 842
	4.599 227 639 418 09	0.020 102 381 154 650
	13.006 054 993 319 3	0.000 008 365 055 857
	9.621 316 842 445 915	0.000 203 231 592 668
	22.151 090 379 373	0.000 000 001 342 391
	17.116 855 187466	0.000 000 166 849 388
	37.099 121 044 461	0.000 000 000 000 001
	8.487 967 251 005	0.000 000 000 003 062

TABLE 3.2 – Racines et poids associés des polynômes de Laguerre

Remarque importante :

On note que la méthode donne d'excellents résultats. Toutefois il convient de se méfier des intégrales de type :

$$I = \int_0^{\infty} \exp(-x) \cos(mx) dx = \frac{1}{m^2 + 1}$$

qu'il faut examiner soigneusement. En effet, si m est assez grand, $\cos(mx)$ peut être assez mal représentée par un polynôme de Laguerre de degré peu élevé. D'autres cas bien sûr peuvent présenter des dangers analogues liés au nombre de points où la fonction s'annule.

6.4 Excitation inélastique $1s_{1/2} - 2s_{1/2}$ non relativiste

Dans le cas de l'excitation inélastique $1s - 2s$ non relativiste ($\gamma = 1.0053$), les figures (3.12) et (3.13) montrent un accord parfait entre les deux approches analytiques et numériques. On peut conclure que l'on peut interpoler la fonction *sin* par des polynômes de Laguerre même de degré élevée sans aucun risque. Par contre la fonction *cos* présente des risques pour des degrés élevés (voir la remarque précédente). Pour tracer la figure (3.14), dans notre programme informatique, on a fait appel à une sous-routine informatique de Bessel de première espèce d'ordre 0, et on voit une petite différence par rapport à la SED non relativiste au voisinage de $\theta_f \in [83^\circ, 87^\circ]$ et $\theta_f \in [93^\circ, 97^\circ]$ mais c'est presque la même que les figures (3.12) et (3.13).

6.5 Excitation inélastique $1s_{1/2} - 2s_{1/2}$ relativiste

Dans le cas relativiste ($\gamma = 1.53$), on peut dire la même chose que dans le cas non relativiste d'après les figures (3.15) et (3.16). Sur ces dernières, la SED relativiste avec et sans champ laser surestime la SED non relativiste. Finalement, l'intégration numérique a donnée d'excellents résultats pour ce type de fonctions et on aurait pu l'utiliser sans faire de calculs analytiques qui étaient trop longs.

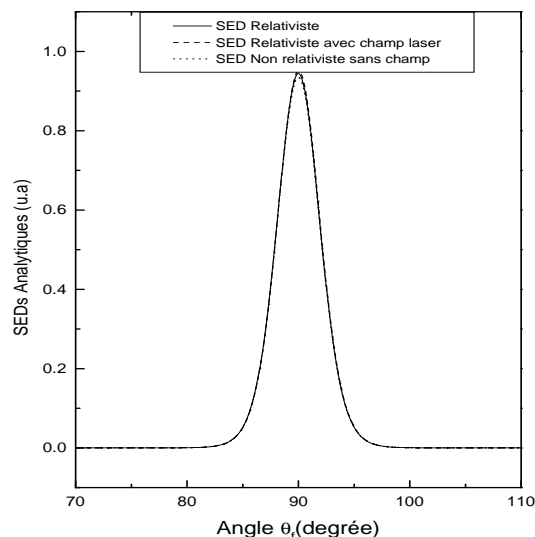


FIGURE 3.12 – Différentes SEDs **Analytiques** en fonction de l'angle θ_f , pour une intensité du champ $\epsilon = 0.05 u.a$ et le paramètre relativiste $\gamma = 1.0053$.

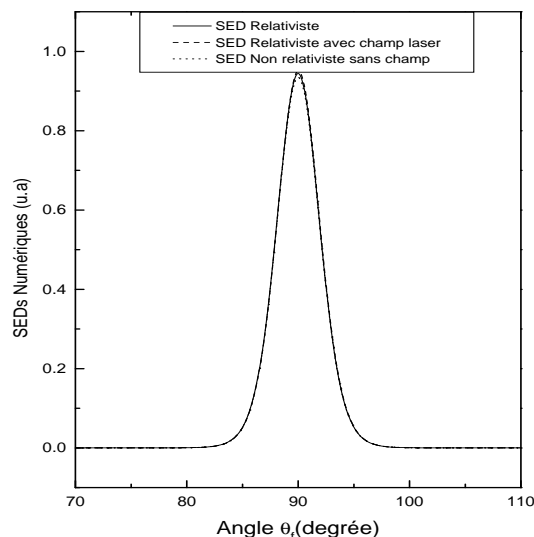


FIGURE 3.13 – Différentes SEDs **Numériques** en fonction de l'angle θ_f , pour une intensité du champ $\epsilon = 0.05 u.a$ et le paramètre relativiste $\gamma = 1.0053$.

7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les résultats de l'excitation inélastique semi-relativiste de l'hydrogène atomique par impact électronique. A travers ce travail, on a montré que l'étude du processus $1s \rightarrow 2s$ en utilisant les fonctions de Darwin dans l'approximation $Z\alpha \ll 1$ peut être suffisante pour décrire le problème relativiste du processus. Les calculs en utilisant les fonction hydrogénoïdes exacte relativiste du même processus sont en cours et ils sont nécessaires pour vérifier le régime de validité et l'utilisation des fonctions de Darwin.

On a aussi utilisé la quadrature de Gauss-Laguerre pour calculer numériquement la partie intégrale. Ceci permet d'éviter les calculs analytiques qui sont longs et parfois complexes. Les résultats numériques obtenus sont en bon accord avec ceux analytiques. Les bornes d'intégrales que l'on rencontre souvent lors des calculs des sections efficaces différentielles sont de type

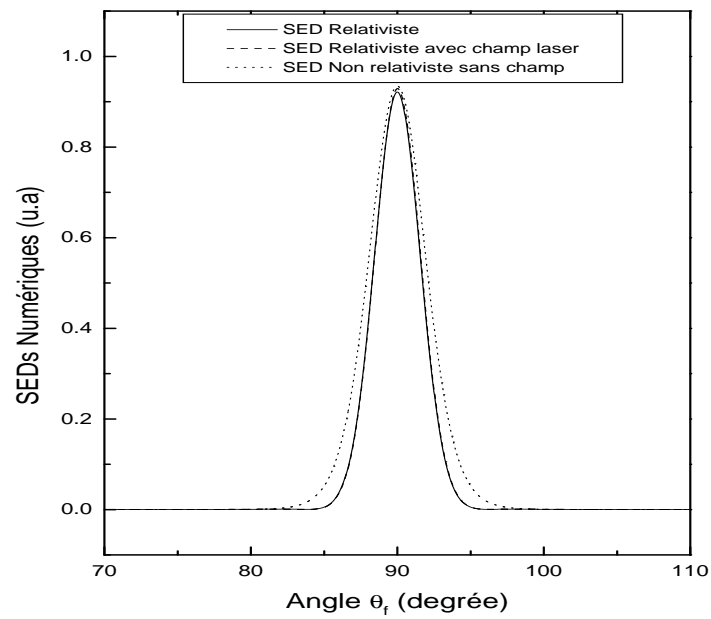


FIGURE 3.14 – Différentes SEDs **Numériques** en fonction de l'angle θ_f , pour une intensité du champ $\epsilon = 0.05 \text{ u.a}$ et le paramètre relativiste $\gamma = 1.0053$, avec une subroutine de **Bessel** de première espèce d'ordre 0.

$[0, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$ et les primitives des fonctions à intégrer sont parfois inconnues, donc ces méthodes de quadrature de Gauss une fois maîtrisées peuvent simplifier les calculs.

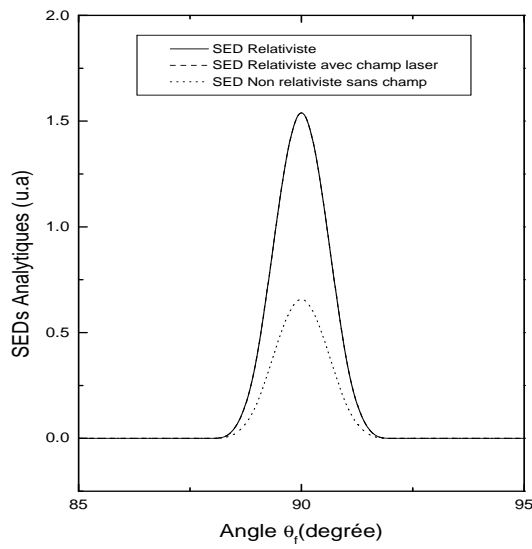


FIGURE 3.15 – Différentes SEDs **Analytiques** en fonction de l'angle θ_f , pour une intensité du champ $\epsilon = 0.05 \text{ u.a}$ et le paramètre relativiste $\gamma = 1.53$.

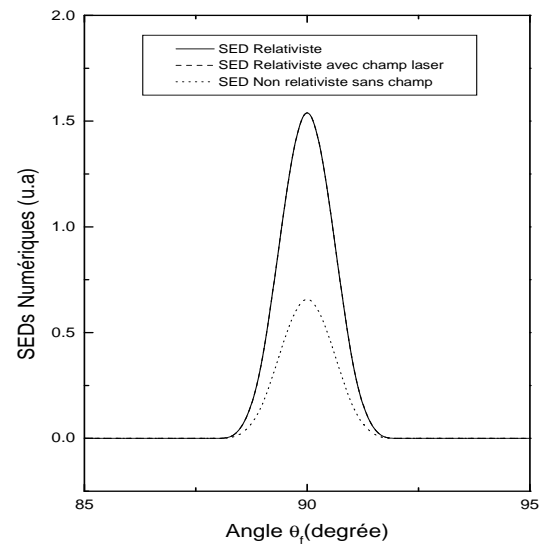


FIGURE 3.16 – Différentes SEDs **Numériques** en fonction de l'angle θ_f , pour une intensité du champ $\epsilon = 0.05 \text{ u.a}$ et le paramètre relativiste $\gamma = 1.53$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Weingartshofer, J. K. Holmes, J. Sabbagh, and S. I. Chu, *J. Phys. B* **16**, 1805 (1983) ; see also B. Wallbank and J. K. Holmes, *J. Phys. B* **27**, 1221 (1994).
- [2] M. A. Khaboo, D. Roundy, and F. Rugamas, *Phys. Rev. A* **54**, 4004 (1996).
- [3] S. Luan, R. Hippler, and H. O. Lutz, *J. Phys. B* **24**, 3241 (1991).
- [4] N. J. Mason and W. R. Newell, *J. Phys. B* **22**, 777 (1989).
- [5] B. Wallbank, J. K. Holmes, and A. Weingartshofer, *Phys. Rev. A* **40**, 5461 (1989); *J. Phys. B* **23**, 2997 (1990).
- [6] N. K. Rahman and F. H. M. Faisal, *J. Phys. B* **11**, 2003 (1978).
- [7] S. Jetzke, F. H. M. Faisal, R. Hippler, and O. H. Lutz, *Z. Phys. A* **315**, 271 (1984).
- [8] S. Jetzke, J. Broad, and A. Maquet, *J. Phys. B* **20**, 2887 (1987).
- [9] R. S. Pundir and K. C. Mathur, *Z. Phys. D* **1**, 385 (1986).
- [10] F. W. Byron, Jr., P. Francken, and C. J. Joachain, *J. Phys. B* **20**, 5487 (1987).
- [11] F. W. Byron, Jr. and C. J. Joachain, *Phys. Rev. A* **35**, 1590 (1987).
- [12] P. Francken, Y. Attaourti, and C. J. Joachain, *Phys. Rev. A* **38**, 1785 (1988).
- [13] D. M. Volkov, *Z. Phys* **94**, 250 (1935).
- [14] Y. Attaourti, B. Manaut, and A. Makhoute, *Phys. Rev. A* **69**, 063407 (2004).
- [15] Alfred Maquet, Richard Taueb, and Valrie Vniard, *Springer Series in Optical Sciences*, Volume 134, 477-496, (2008).

- [16] R. Kisielius, K. A. Berrington, and P. H. Norrington, *J. Phys. B*, **28**, 2459-2471, (1995).
 - [17] N. Andersen and K. Bartschat, *J. Phys. B*, **35** 4507-4525 (2002).
 - [18] D. Payne, Benjamin Krueger and Klaus Bartschat *J. Phys. B*, **38** 3349-3357 (2005).
 - [19] Y. Attaourti, S. taj and B. Manaut, *Phys. Rev. A* **71**, 062705 (2005).
 - [20] J. Eichler and W. E. Meyerhof, *Relativistic Atomic Collisions*, (Academic Press, 1995).
 - [21] L. S. Gradstein and I. M. Rizik, *Tables of Integrals, Sutures, Sets and Their Products*. (Moscow, Nauka, 1971).
 - [22] A. G. Grozin, *Using REDUCE in High Energy Physics* (Cambridge University, Cambridge, England, 1997).
 - [23] J. F. Williams, *J. Phys. B* **14**, 1197 (1981).
 - [24] F. V. Bunkin and M. V. Fedorov, *Sov. Phys., JETP* **22**, 284 (1966).
 - [25] N. M. Kroll and K. N. Watson, *Phys. Rev. A* **8**, 804 (1973).
-

CHAPITRE 4

EXCITATION SEMI-RELATIVISTE DE L'ATOME D'HYDROGÈNE PAR IMPACT D'ÉLECTRONS POLARISÉS EN PRÉSENCE DU CHAMP LASER

1 Introduction

De nouvelles perspectives pour la compréhension de l'excitation semi-relativiste de l'hydrogène atomique par impact électronique ont été rendues possibles en combinant l'utilisation de faisceaux d'électrons polarisés et du champ laser intense. Dans ce chapitre, on traitera la théorie de la diffusion des électrons relativistes assistée par laser avec un accent particulier sur les effets de spin. Différentes configurations de spin seront discutées également. Le rôle du champ laser dans cette collision est d'une importance majeure et révèle de nouvelles informations sur la dynamique de la collision. Les études théoriques modernes de ces collisions assistées par le champ laser ont montré que le besoin de données expérimentales est d'une importance primordiale afin d'évaluer la précision de nos calculs. Vue l'absence des modèles expérimentaux, le seul modèle avec lequel on fait les comparaisons est celui du cas non relativiste.

Le spin n'est pas seulement un ingrédient indispensable en physique atomique, mais aussi responsable de nombreux phénomènes observés en physique du solide. En plus de l'utilisation

des électrons polarisés dans des études de physique atomique, il y'a eu de nombreuses études sur la diffusion des électrons polarisés et d'émission d'électrons polarisés de solides ferromagnétiques au cours de la dernière décennie. En 1975, le but de la source d'électrons polarisés en spin était de décrire comment cet effet, qui avait été découvert dans les expériences de photoémission à spin polarisé par Pierce *et al* à l'EPF-Zurich [1], pourrait être utilisé pour fournir un canon à électrons compacts à spin polarisés. Par la suite, un travail expérimental a été réalisé pour produire des faisceaux d'électrons dans lesquelles le spin a une orientation préférentielle. Ils ont été appelés faisceaux d'électrons polarisés [2] par analogie avec la lumière polarisée, dans laquelle les vecteurs du champ ont une orientation préférentielle. Il y'a plusieurs raisons pour l'intérêt porté aux électrons polarisés : une raison importante c'est que, dans des expériences de physique on exige de définir aussi exactement que possible les états initiaux et/ou finaux des systèmes considérés.

Depuis les années 1960, les lasers sont devenus un équipement de laboratoire utilisés dans le monde entier, et aussi de grands effets de polarisation à faible énergie de diffusion des électrons ont été constatés. Des études expérimentales et théoriques de l'interaction laser-matière ont été témoins de progrès continu [3–6]. En vertu de l'état d'avancement de plus en plus de la disponibilité des lasers plus puissants et accordables, de tels procédés sont aujourd'hui observés dans les laboratoires [7–10]. La plupart des études expérimentales et théoriques des collisions électron-atome assistées par laser ont été limitées au régime non relativiste et aux champs de basse fréquence, où il a été déjà reconnu que, en conséquence générale de la divergence infrarouge de l'QED, un grand nombre de photons peut être échangés entre le champ et le système projectile-cible. Une extension du traitement de première approximation de Born non relativiste [11] pour le domaine relativiste a été officiellement dérivée pour les électrons non polarisés [12]. Il y'a eu également des études théoriques de la diffusion relativiste dans des domaines multi-modes [13]. Dans le présent chapitre, on étend les résultats précédents [14] pour le cas d'excitation inélastique $1s - 2s$ assistée par le laser de l'hydrogène atomique par les électrons polarisés. Par conséquent, on va présenter les résultats les plus fondamentaux en utilisant le système d'unités atomiques (u.a) dans lequel on a ($\hbar = m_e = e = 1$), où m_e est la masse de l'électron au repos. L'organisation de ce chapitre est comme suit : d'abord

on présente le formalisme nécessaire du processus, puis on discute les résultats obtenus et on termine avec une conclusion.

2 Théorie de la collision

L'élément de matrice de transition correspondant à l'excitation inélastique semi-relativiste de l'atome d'hydrogène de l'état initial i vers l'état final f par impact électronique en présence du champ laser est :

$$S_{fi} = -i \int dt \langle \psi_{qf}(\mathbf{r}_1) \phi_f(\mathbf{r}_2) | V_d | \psi_{qi}(\mathbf{r}_1) \phi_i(\mathbf{r}_2) \rangle \quad (4.1)$$

où $V_d = 1/r_{12} - Z/r_1$ est le potentiel d'interaction. \mathbf{r}_1 sont les coordonnées de l'électron incident et \mathbf{r}_2 correspondent à ceux de l'électron de l'hydrogène atomique, $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ et $r_1 = |\mathbf{r}_1|$.

La solution de l'équation de Dirac pour un électron d'impulsion p^μ en présence d'une onde électromagnétique plane a été trouvée explicitement [15]. Pour le cas d'un champ de polarisation circulaire se propageant le long de la direction Oz , la solution est donnée par :

$$\psi_q(x) = \left(1 + \frac{kA}{2c(kq)} \right) \frac{u(p, s)}{\sqrt{2VQ_0}} \exp \left[-i(qx) - i \int_0^{kx} \frac{(Ap)}{c(kq)} d\phi \right]. \quad (4.2)$$

où $u(p, s)$ représente le bispineur de Dirac de l'électron libre en absence du champ satisfaisant la condition de normalisation $\bar{u}u = u^\dagger \gamma^0 u = 2c^2$. Notons que les notations slash de Feynman sont utilisées, et V est le volume de normalisation. La signification physique de $q^\mu = (Q/c, \mathbf{q})$ est qu'il s'agit de la moyenne du quadri-impulsion habillée de la particule en présence du champ laser ayant le potentiel vecteur $A^\mu = (0, a_1 \cos(kx), a_2 \sin(kx), 0)$ avec le quadri-vecteur k^μ tel que : $q^\mu = p^\mu - k^\mu [A^2/2(kp)c^2]$.

Lors de cette diffusion inélastique, non seulement l'état de l'électron incident (respectivement diffusé) change mais aussi celui de l'électron atomique. On va tenir compte de la direction du spin de l'électron incident. Différentes configurations apparaissent avec les orientations du spin de l'électron. Le tableau (4.1) illustre les différents scénarios possibles :

1	$e^{(\uparrow)} + H^{(\uparrow)}(1s)$	\longrightarrow	$e^{(\uparrow)} + H^{(\uparrow)}(2s)$
2	$e^{(\downarrow)} + H^{(\uparrow)}(1s)$	\longrightarrow	$e^{(\uparrow)} + H^{(\uparrow)}(2s)$
3	$e^{(\uparrow)} + H^{(\uparrow)}(1s)$	\longrightarrow	$e^{(\downarrow)} + H^{(\uparrow)}(2s)$
4	$e^{(\uparrow)} + H^{(\downarrow)}(1s)$	\longrightarrow	$e^{(\downarrow)} + H^{(\downarrow)}(2s)$
5	$e^{(\downarrow)} + H^{(\downarrow)}(1s)$	\longrightarrow	$e^{(\uparrow)} + H^{(\downarrow)}(2s)$
6	$e^{(\downarrow)} + H^{(\downarrow)}(1s)$	\longrightarrow	$e^{(\downarrow)} + H^{(\downarrow)}(2s)$
\vdots	\vdots		\vdots

TABLE 4.1 – Différentes configurations possible de polarisation du spin

Dans le tableau (4.1), les flèches vers le haut ou vers le bas indiquent la direction de la polarisation du spin de l'électron incident (diffusé) et celui de l'atome d'hydrogène (noté H) par rapport à une direction bien définie.

Durant l'interaction, le produit des fonctions dont le spin non-flip reste le même,

$$\varphi_{2s}^{\dagger(\uparrow)}(\mathbf{r}_2)\varphi_{1s}^{(\uparrow)}(\mathbf{r}_2) = \varphi_{2s}^{\dagger(\downarrow)}(\mathbf{r}_2)\varphi_{1s}^{(\downarrow)}(\mathbf{r}_2) \quad (4.3)$$

alors qu'il devient nul dans le cas du spin flip. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_{2s}^{\dagger(\uparrow)}(\mathbf{r}_2)\varphi_{1s}^{(\downarrow)}(\mathbf{r}_2) &= \left(2 - r_2, \quad 0, \quad \frac{-i(4-r_2)}{4r_2c}z, \quad \frac{(4-r_2)}{4r_2c}(-y - ix) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{i}{2cr_2}(x - iy) \\ -\frac{i}{2cr_2}z \end{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-2r_2} \\ &= \varphi_{2s}^{\dagger(\downarrow)}(\mathbf{r}_2)\varphi_{1s}^{(\uparrow)}(\mathbf{r}_2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

avec $\varphi_{2s}(\mathbf{r}_2)$ et $\varphi_{1s}(\mathbf{r}_2)$ sont respectivement les fonctions d'onde de l'atome d'hydrogène correspondant aux états $2s$ et $1s$. Dans ce cas, la probabilité pour que l'électron lié change l'orientation du spin lors de la transition de l'état initial $1s$ vers l'état final $2s$ est nulle. Donc le nombre de scénarios ci-dessus possible sera réduit.

Pour introduire la polarisation du spin de l'électron incident, on doit utiliser un formalisme qui en tient compte. L'électron libre avec un vecteur quadri-impulsion p et un spin s est décrit

par le spineur libre $u(p, s)$. Le quadri-vecteur du spin s^μ est donné par :

$$s^\mu = \frac{1}{c}(|\mathbf{p}|, \frac{E}{c}\hat{p}) \quad (4.5)$$

où $\hat{p} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ est le vecteur unité qui définit la direction du vecteur \mathbf{p} . On donne quelques propriétés dont on aura besoin plus tard. Particulièrement, on a :

$$s^\mu \cdot s_\mu = -1 \quad (4.6)$$

qui est la relation de normalisation du quadri-vecteur s^μ . La relation :

$$p \cdot s = p^\mu \cdot s_\mu = 0 \quad (4.7)$$

est l'orthogonalité entre p et s . On introduit l'opérateur de projection du spin :

$$\hat{\Sigma}(s) \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{s}) \quad (4.8)$$

où $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. La matrice γ^5 joue un rôle spécial dans la théorie de Dirac. Cette matrice permet de construire des projecteurs de chiralité dans l'espace des spineurs. En effet, on a :

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5), \quad \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

On vérifie facilement que ce sont des projecteurs en remarquant que $P_\pm^+ = P_\pm$, $P_\pm^2 = P_\pm$, $P_\pm \cdot P_\mp = 0$ et $P_+ + P_- = \mathbf{1}$.

Rappelons, les opérateurs de projection du spin possèdent les propriétés suivantes :

$$\hat{\Sigma}(s)u(p, +s) = u(p, +s) \quad , \quad \hat{\Sigma}(s)u(p, -s) = 0 \quad (4.10)$$

Ce formalisme peut être appliqué aux états d'hélicité où la direction de spin est le long de la direction de l'impulsion \mathbf{p} ,

$$S'_\lambda = \lambda \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \lambda = \pm 1 \quad (4.11)$$

ainsi la définition du quadri-vecteur spin devient :

$$S^\mu_\lambda = \frac{\lambda}{c}(|\mathbf{p}|, \frac{E}{c}\hat{p}) \quad (4.12)$$

Le point de départ de notre calcul est la SED assistée par laser de l'excitation de l'hydrogène atomique par un électron avec une impulsion initiale p_i bien définie et de spin s_i . Si le spin final s_f est également mesuré, la SED polarisée est la suivante :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f}(\lambda_i, \lambda_f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f}(\lambda_i, \lambda_f), \quad (4.13)$$

avec

$$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f}(\lambda_i, \lambda_f) = \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|} \frac{1}{(4\pi c^2)^2} \left| \bar{u}(p_f, s_f) \Lambda^{(n)} u(p_i, s_i) \right|^2 \left| H_{inel}(\Delta_s) \right|^2 \Bigg|_{Q_f=Q_i+n\omega+E_{1s1/2}-E_{2s1/2}}. \quad (4.14)$$

La quantité $H_{inel}(\Delta_s)$ qui représente la partie intégrable en présence du champ laser est donnée par l'équation (3.19) du chapitre précédent et explicitement détaillée dans [16]. En utilisant le code du programme REDUCE [17], la partie spinorielle obtenue après des calculs fastidieux s'écrit :

$$\begin{aligned} \left| \bar{u}(p_f, s_f) \Lambda^{(n)} u(p_i, s_i) \right|^2 &= \mathbf{Tr} \left\{ \Gamma_n \frac{(1 + \lambda_i \gamma_5 \not{p}_i)}{2} (c\not{p}_i + c^2) \bar{\Gamma}_n \frac{(1 + \lambda_f \gamma_5 \not{p}_f)}{2} (c\not{p}_f + c^2) \right\} \\ &= \left\{ J_n^2(z) \mathcal{A} + (J_{n+1}^2(z) + J_{n-1}^2(z)) \mathcal{B} + (J_{n+1}(z) J_{n-1}(z)) \mathcal{C} \right. \\ &\quad \left. + J_n(z) (J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)) \mathcal{D} \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

où $\bar{\Gamma}_n = \gamma^0 \Gamma_n^\dagger \gamma^0$ et Γ_n est aussi explicitement détaillé dans [18]. La notion d'électrons polarisés est introduite dans l'équation (4.15) via les coefficients $\lambda_{i,f} = \pm 1$ correspondants à l'électron de spin non flip ou de spin flip.

Avant de présenter nos résultats analytiques, on tient à souligner que le code REDUCE que nous avons écrit pour l'obtention des quatre coefficients \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} a donné de très longues expressions analytiques qui étaient difficiles d'intégrer dans ce travail. Ainsi, nous préférons ne donner ci-dessous, par exemple, que le coefficient \mathcal{A} multipliant le carré de la fonction de Bessel $J_n^2(z)$, il est donné par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = & \frac{1}{(2(k.p_f)^2(k.p_i)^2c^8)} \left[2(k.p_f)^2(k.p_i)^2\lambda_f\lambda_i|\mathbf{p}_f|^2|\mathbf{p}_i|^2c^8 \cos(\theta_{if}) - 2(k.p_f)^2(k.p_i)^2\lambda_f\lambda_i|\mathbf{p}_f|^2 \right. \\
& \times c^6 \cos(\theta_{if})E_i^2 + 2(k.p_f)^2(k.p_i)^2\lambda_f\lambda_i|\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i|c^{10} - 2(k.p_f)^2(k.p_i)^2\lambda_f\lambda_i|\mathbf{p}_i|^2c^6 \cos(\theta_{if})E_f^2 + \\
& 2(k.p_f)^2(k.p_i)^2\lambda_f\lambda_i c^8 \cos(\theta_{if})E_fE_i + 2(k.p_f)^2(k.p_i)^2\lambda_f\lambda_i c^4 \cos(\theta_{if})E_f^2E_i^2 + 2(k.p_f)^2(k.p_i)^2 \\
& \times |\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i|c^{10} \cos(\theta_{if}) + 2(k.p_f)^2(k.p_i)^2c^{12} + 2(k.p_f)^2(k.p_i)^2c^8 E_fE_i + 2(k.p_f)^2(k.p_i)\lambda_f\lambda_i|a| \\
& \times |\mathbf{p}_i|^2c^4 \cos(\theta_{if})E_f\omega - 2(k.p_f)^2(k.p_i)\lambda_f\lambda_i|a|c^2 \cos(\theta_{if})E_fE_i^2\omega - 2(k.p_f)^2(k.p_i)|a|c^6 E_i\omega + \\
& 2(k.p_f)(k.p_i)^2\lambda_f\lambda_i|a||\mathbf{p}_f|^2c^4 \cos(\theta_{if})E_i\omega - 2(k.p_f)(k.p_i)^2\lambda_f\lambda_i|a|c^2 \cos(\theta_{if})E_f^2E_i\omega - 2(k.p_f) \\
& \times (k.p_i)^2|a|c^6 E_f\omega - 2(k.p_f)(k.p_i)(k.s_f)\lambda_f\lambda_i|a||\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i|^2c^6 \cos(\theta_{if})\omega + 2(k.p_f)(k.p_i)(k.s_f) \\
& \times \lambda_f\lambda_i|a||\mathbf{p}_f|c^4 \cos(\theta_{if})E_i^2\omega - 2(k.p_f)(k.p_i)(k.s_f)\lambda_f\lambda_i|a||\mathbf{p}_i|c^8\omega - 2(k.p_f)(k.p_i)(k.s_i)\lambda_f\lambda_i \\
& \times |a||\mathbf{p}_f|^2|\mathbf{p}_i|c^6 \cos(\theta_{if})\omega - 2(k.p_f)(k.p_i)(k.s_i)\lambda_f\lambda_i|a||\mathbf{p}_f|c^8\omega + 2(k.p_f)(k.p_i)(k.s_i)\lambda_f\lambda_i|a| \\
& \times |\mathbf{p}_i|c^4 \cos(\theta_{if})E_f^2\omega - (k.p_f)(k.p_i)\lambda_f\lambda_i a^2 |\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i|c^2\omega a^2 + k.p_f)(k.p_i)\lambda_f\lambda_i a^2 \cos(\theta_{if})E_fE_i\omega^2 \\
& + 2(k.p_f)(k.p_i)\lambda_f\lambda_i|a||\mathbf{p}_f|^2|\mathbf{p}_i|^2c^4 \cos(\theta_{if})\omega^2 - 2(k.p_f)(k.p_i)\lambda_f\lambda_i|a||\mathbf{p}_f|^2c^2 \cos(\theta_{if})E_i^2\omega^2 + \\
& 2(k.p_f)(k.p_i)\lambda_f\lambda_i|a||\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i|c^6\omega^2 - 2(k.p_f)(k.p_i)\lambda_f\lambda_i|a||\mathbf{p}_i|^2c^2 \cos(\theta_{if})E_f^2\omega^2 - 2(k.p_f)(k.p_i) \\
& \times \lambda_f\lambda_i|a|c^4 \cos(\theta_{if})E_fE_i\omega^2 + 2(k.p_f)(k.p_i)\lambda_f\lambda_i|a| \cos(\theta_{if})E_f^2E_i^2\omega^2 + (k.p_f)(k.p_i)a^2c^4\omega^2 \\
& - 2(k.p_f)(k.p_i)|a||\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i|c^6 \cos(\theta_{if})\omega^2 - 2(k.p_f)(k.p_i)|a|c^8\omega^2 + 2(k.p_f)(k.p_i)|a|c^4 E_fE_i\omega^2 \\
& + (k.p_f)(k.s_i)\lambda_f\lambda_i a^2 |\mathbf{p}_f|c^2 E_i\omega^2 - (k.p_f)(k.s_i)\lambda_f\lambda_i a^2 |\mathbf{p}_i|c^2 \cos(\theta_{if})E_f\omega^2 - (k.p_i)(k.s_f)\lambda_f\lambda_i \\
& \times a^2 |\mathbf{p}_f|c^2 \cos(\theta_{if})E_i\omega^2 + (k.p_i)(k.s_f)\lambda_f\lambda_i a^2 |\mathbf{p}_i|c^2 E_f\omega^2 + (k.s_f)(k.s_i)\lambda_f\lambda_i a^2 |\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i|c^4 \cos(\theta_{if}) \\
& \times \omega^2 + (k.s_f)(k.s_i)\lambda_f\lambda_i a^2 c^6\omega^2 - (k.s_f)(k.s_i)\lambda_f\lambda_i a^2 c^2 E_fE_i\omega^2 \left. \right].
\end{aligned}$$

A ce stade, on note que si $\lambda_i\lambda_f = 1$ pendant le processus de diffusion, ce qui signifie physiquement qu'il ne se produit pas d'hélicité flip, mais si $\lambda_i\lambda_f = -1$, cela signifie qu'une hélicité flip a eu lieu. En l'absence du champ laser ($\epsilon = 0$ u.a), ce coefficient se réduit à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = & \frac{1}{c^4} \left[\lambda_f\lambda_i|\mathbf{p}_f|^2|\mathbf{p}_i|^2c^4 \cos(\theta_{if}) - \lambda_f\lambda_i|\mathbf{p}_f|^2c^2 \cos(\theta_{if})E_i^2 + \lambda_f\lambda_i|\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i|c^6 - \lambda_f\lambda_i|\mathbf{p}_i|^2c^2 \cos(\theta_{if}) \right. \\
& \times E_f^2 + \lambda_f\lambda_i c^4 \cos(\theta_{if})E_fE_i + \lambda_f\lambda_i \cos(\theta_{if})E_f^2E_i^2 + |\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i|c^6 \cos(\theta_{if}) + c^8 + c^4 E_fE_i \left. \right].
\end{aligned}$$

On note qu'en absence du champ laser, les équations (4.13) et (4.14) se réduisent à l'expression de la section efficace différentielle polarisée bien connue (au première approximation de Born) d'excitation inélastique de l'hydrogène atomique par impact électronique.

3 Discussion des résultats

Les DCSs (Differential Cross Section en anglais) sur les figures seront nommées SEDs dans cette discussion, $d\sigma^{(n)}/d\Omega_f$ de spin polarisé assistées par le champ laser sont calculées pour l'excitation semi-relativiste d'hydrogène atomique par impact électronique, où n désigne le nombre de photons absorbés ou émis. En vue d'une comparaison qualitative avec les travaux antérieurs [14], la cinématique et les paramètres géométriques sont choisis en fonction de celles utilisées dans la même référence [14]. La direction du champ laser est choisi parallèle à l'axe Oz . Les résultats de la correspondante section efficace différentielle non polarisée $d\bar{\sigma}^{(n)}/d\Omega_f$ sont également présentés afin de faire des comparaisons.

En tenant compte de l'équation (4.15) ci-dessus et si la condition mathématique ($\lambda_i = \lambda_f = 0$) est utilisée, la partie spinorielle prend la forme suivante :

$$|\bar{u}(p_f, s_f)\Lambda^{(n)}u(p_i, s_i)|^2 = \frac{1}{4}\mathbf{Tr}\{\Gamma_n(c\hat{p}_i + c^2)\bar{\Gamma}_n(c\hat{p}_f + c^2)\}. \quad (4.16)$$

En comparaison avec la partie spinorielle non polarisée, on trouve :

$$\frac{1}{2}\sum_{s_i s_f} |\bar{u}(p_f, s_f)\Lambda^{(n)}u(p_i, s_i)|^2 = \frac{1}{2}\mathbf{Tr}\{\Gamma_n(c\hat{p}_i + c^2)\bar{\Gamma}_n(c\hat{p}_f + c^2)\}. \quad (4.17)$$

On note qu'à partir des équations (4.13), (4.14), (4.16) et (4.17) que la SED de spin non polarisé est égale à deux fois la SED de spin polarisé, mais seulement avec la condition ($\lambda_i = \lambda_f = 0$),

$$\frac{d\bar{\sigma}^{(n)}}{d\Omega_f} = 2 \times \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f}(\lambda_i = 0, \lambda_f = 0), \quad (4.18)$$

Cette équation représente notre premier test de cohérence. Les résultats numériques sont présentés dans la figure (4.1), où on a tracé les deux SEDs (2 fois la SED polarisée avec ($\lambda_i = \lambda_f = 0$) et la SED de spin non polarisé) en faisant varier l'angle de diffusion θ_f de l'électron. Comme on le constate sur cette figure, on a deux courbes indiscernables. Le résultat le plus important comme second test de cohérence est la somme de SED polarisée (spin flip) et SED polarisée (spin non flip) donne toujours la SED de spin non polarisé comme cela est montré dans la figure (4.2). La figure (4.3) montre les différentes SEDs de spin polarisé et non polarisé par rapport au paramètre relativiste γ . Il ressort de cette figure que l'énergie cinétique de l'électron incident a un effet important dans l'orientation du spin. Dans une grande partie

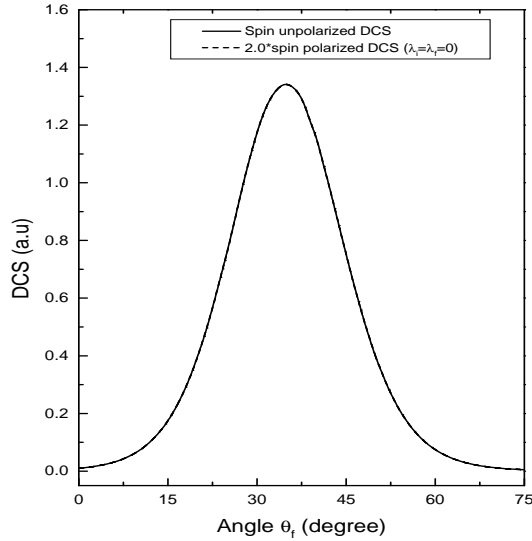


FIGURE 4.1 – Les différentes SEDs (SED non polarisée, SED de Spin polarisé) avec ($\lambda_i = \lambda_f = 0$) à l'échelle de 10^{-9} en fonction de l'angle θ_f . Le paramètre relativiste $\gamma = 1.0053$, l'intensité du champ électrique $\epsilon = 0.05 u.a.$, les paramètres de la géométrie sont $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $\phi_f = 45^\circ$ et le nombre de photons échangés $n = \pm 100$.

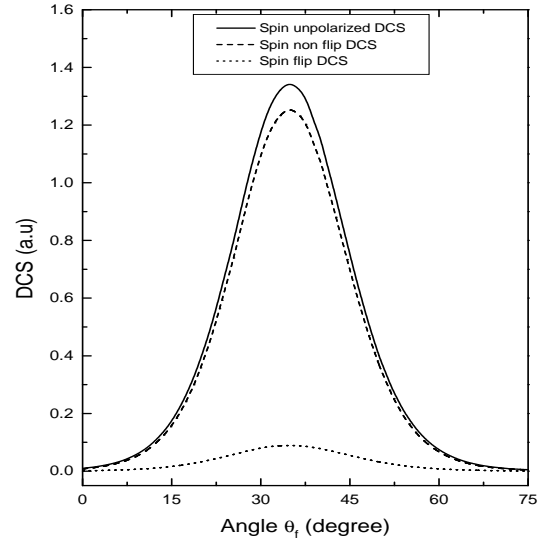


FIGURE 4.2 – Différentes SEDs (non polarisée, de Spin flip et de Spin non flip) à l'échelle de 10^{-9} en fonction de l'angle θ_f . Le paramètre relativiste $\gamma = 1.0053$, l'intensité du champ électrique $\epsilon = 0.05 u.a.$, les paramètres de la géométrie sont $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $\phi_f = 45^\circ$ et le nombre de photons échangés $n = \pm 100$.

de la gamme à haute énergie, la SED polarisé en spin (spin non flip) est approximativement égale à la SED de spin non polarisé et la SED polarisée en spin (spin flip) est égale à zéro. La signification physique de ce résultat est que : à haute énergie, la probabilité que l'électron incident change le sens de rotation (spin) est égale à zéro. Afin de clarifier la situation dans laquelle on a apparemment le chevauchement des courbes pour les trois approches de la figure (4.3), on donne dans la figure (4.4) la variation des trois SEDs (polarisés en spin (spin flip et spin non flip) et la SED de spin non polarisé) en fonction du paramètre relativiste. Comme il est remarqué, les SEDs de spin polarisé (spin non flip) et de spin non polarisé se chevauchent mais la SED de spin polarisé (spin flip) converge vers zéro.

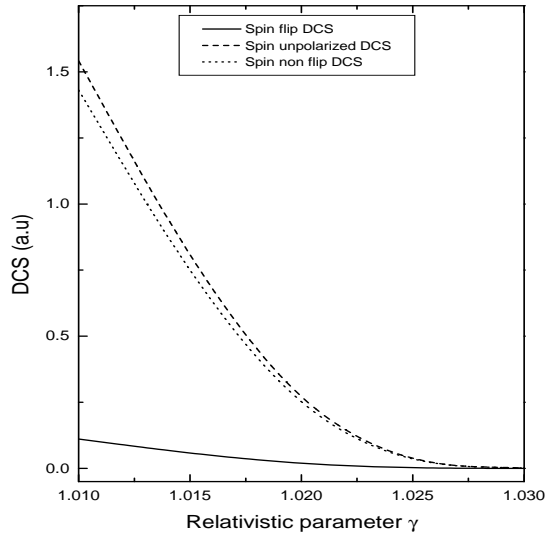


FIGURE 4.3 – Différentes SEDs (non polarisée, Spin flip et Spin non flip) à l'échelle de 10^{-13} en fonction du paramètre relativiste γ . Les paramètres de la géométrie sont $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $\phi_f = 45^\circ$ et $\theta_f = 45^\circ$, l'intensité du champ électrique $\epsilon = 0.5 u.a$ et le nombre de photons échangé $n = \pm 50$.

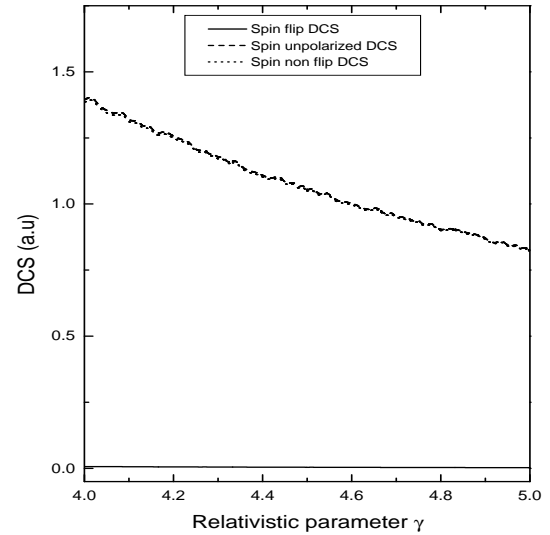


FIGURE 4.4 – Différentes SEDs (non polarisée, Spin flip et Spin non flip) à l'échelle de 10^{-22} en fonction du paramètre relativiste γ . Les paramètres de la géométrie sont $\theta_i = 45^\circ$, $\phi_i = 0^\circ$, $\phi_f = 45^\circ$ et $\theta_f = 45^\circ$, l'intensité du champ électrique $\epsilon = 0.5 u.a$ et le nombre de photons échangé $n = \pm 50$.

Notre intérêt principal est d'étudier le degré de polarisation de l'électron après l'événement. Cette quantité est définie comme suit :

$$P = \frac{\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f}(\text{spin non flip}) - \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f}(\text{spin flip})}{\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f}(\text{spin non flip}) + \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f}(\text{spin flip})}, \quad (4.19)$$

La figure (4.5) montre le degré de polarisation, qui est lié par l'équation (4.19) au rapport des SEDs polarisées. C'est un schéma tridimensionnel donné en fonction de l'angle θ_f et le paramètre relativiste γ . La première observation qui peut être faite concerne la forme du degré de polarisation qui est fortement modifié avec le paramètre relativiste γ . Un comportement intéressant émerge avec l'augmentation de γ , notamment pour $\theta_f = 0^\circ$, où le degré de polarisation effectue un comportement de type plateau. Ceci est dû au fait que la SED polarisé

en spin est très sensible à la variation du paramètre relativiste γ et cela doit rester vrai pour le cas en présence du champ laser. Ce comportement est cohérent avec les résultats présentés dans les figures (4.3) et (4.4).

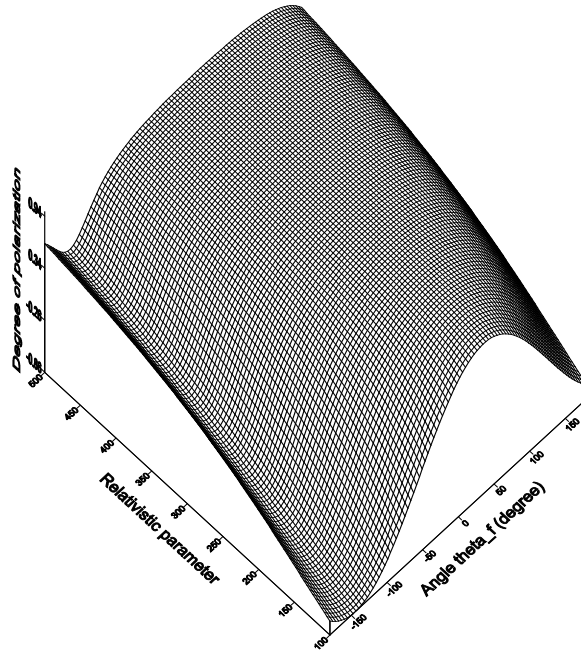


FIGURE 4.5 – Le comportement du degré de polarisation P en fonction de l'angle θ_f variant de -180° à 180° et le paramètre relativiste γ à l'échelle 10^{-2} en absence du champ laser.

4 Conclusion

On a étudié l'excitation inélastique assistée par laser de l'hydrogène atomique par électrons polarisés. On a montré dans les simulations numériques que les deux tests de consistance à savoir la somme de la section efficace différentielle (spin-flip) et la section efficace différentielle (spin-non flip) donne toujours la section efficace différentielle de spin non polarisé indépendamment du nombre de photons échangés et aussi que, dans la limite non relativiste, les deux SEDs de spin non polarisé (non relativiste et relativiste) conduisent aux résultats très proches. On a montré également l'influence de l'orientation de la polarisation de spin des électrons entrants et

diffusés par rapport à l'orientation de la polarisation du spin de l'électron lié. Ces effets de spin dépendent fortement de l'énergie de l'électron entrant. Finalement, on a observé que dans la transition de l'état $1s$ vers l'état $2s$, la probabilité pour que l'électron change son spin est nulle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.T. Pierce, F. Meier, and P. Zürcher, Appl. Phys. Lett. **26**, 670 (1975).
- [2] J. Kessler, Polarized Electrons, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1985).
- [3] A. Weingartshofer , E. M. Clarke, J. K. Holmes , and C. Jung , Phys. Rev. A . **19** , 2371, (1979).
- [4] N. J. Mason and W. R. Newell , J. Phys. B., **20** , 1357 , (1987) .
- [5] N. J. Mason and W. R. Newell , J. Phys. B., **22** , 777 , (1989).
- [6] B. WallBank , J. K. Holmes , A. Weingartshofer, J. Phys. B., **23** , 2997 (1990).
- [7] S. Luan, R. Hippler , and H. O. Lutz , J. Phys. B., **24** , 3241 (1991) .
- [8] B. WallBank , J. K. Holmes , S. Maclsaac and A. Weingartshofer J. Phys. B. , **25** , 1265 , (1992).
- [9] B. WallBank , J. K. Holmes , J. Phys. B., **27** , 1221 (1994).
- [10] B. WallBank , J. K. Holmes , J. Phys. B., **27** , 5405 (1994).
- [11] F.V. Bunkin, M.V. Fedorov, 1965, Zh. Eksp. Teor. Fiz., 49, 1215 [1966, Sov. Phys. JETP, 22, 844].
- [12] M.M. Denisov, M.V, Fedorov, 1967, Zh. Eksp. Teor. Fiz., 53, 1340 [1968, Sov. Phys. JETP, 26 779].
- [13] S.P. Roshchupkin, 1996, Zh. Eksp. Teor. Fiz., 109, 337 [1996, JETP, 82, 177]; Zhou, F. and Rosenberg, L., 1992, Phys. Rev. A, **45**, 7818.

- [14] S. Taj, B. Manaut, M. El Idrissi and L. Oufni, *Chin. Journal of Phys.* **49**, 1164-1177, (2011)
 - [15] D. M. Volkov, *Z. Phys* **94**, 250 (1935).
 - [16] S. Taj, B. Manaut and L. Oufni, *Acta Physica Polonica A*, **119**, 769-773 (2011)
 - [17] A. G. Grozin, *Using REDUCE in High Energy Physics* (Cambridge University, Cambridge, England,1997).
 - [18] Y. Attaourti and B. Manaut, *Phys. Rev. A* **68**, 067401 (2003).
-

CHAPITRE 5

L'EFFET DU MOMENT MAGNÉTIQUE ANOMAL DE L'ÉLECTRON SUR LES COLLISIONS INÉLASTIQUE ÉLECTRON-ATOME D'HYDROGÈNE EN PRÉSENCE DU CHAMP LASER

Introduction

L'étude des processus relativistes de la physique atomique nécessite une connaissance approfondie du formalisme de l'électrodynamique quantique (QED). Des tests de précision du formalisme QED exigent l'inclusion appropriée des effets d'ordre supérieur et la connaissance des paramètres d'entrée très précis. L'un des paramètres d'entrée de base est le moment magnétique anomal, c'est une quantité fondamentale en physique, elle est due à la valeur du moment magnétique trouvée par la théorie de Dirac. Cette quantité diffère de la valeur observée par une petite fraction. La différence est nommée le moment magnétique anomal (MMA) noté a et défini par : $a = (g - 2)/2$, g est le facteur de Landé. La contribution d'une boucle au moment magnétique anomal de l'électron est trouvée en calculant la fonction du vertex. Le résultat du calcul [1] à une boucle est :

$$a = \frac{\alpha}{2\pi} \simeq 0.0011614$$

où α est la constante de structure fine. Ce résultat a été trouvé pour la première fois par Schwinger [2] en 1948. La valeur expérimentale récente a été obtenue par Gabrielse [3] :

$$a = 0.001159652180(73)$$

L'état actuel des prédictions de l'électrodynamique quantique pour l'anomalie de l'électron a été remarquablement passé en revue par Remiddi [4]. Il est maintenant évident que l'ensemble du formalisme de la théorie quantique de collision non relativiste [5] doit être révisé afin d'étendre les résultats connus non relativistes au domaine relativiste. De nombreuses études théoriques de collision électron-atome assistée par laser ont été principalement menées dans le régime non relativiste [6]. Plusieurs autres études théoriques pour les processus $1s - 2s$ ont été confinées soit à la première approximation de Born [7] ou aux ondes partielles d'ordre zéro [8, 9]. Notre objectif dans ce chapitre est de mettre en évidence des processus assistés par laser qui intègrent l'anomalie de l'électron. Le processus qu'on étudie dans ce chapitre est la collision inélastique assistée par le laser d'un électron de Dirac-Volkov avec un atome d'hydrogène. En dessus de l'intensité seuil d'ionisation qui est de l'ordre de $\sim 10^{16} \text{ W/cm}^2$, l'électron acquiert une énergie pondéromotrice qui s'ajoute à son énergie cinétique. Ainsi, le canal du processus de la photoionisation est plus favorable. De plus, pour des intensités de l'ordre de $\sim 10^{16} \text{ W/cm}^2$, l'énergie cinétique transférée au système atomique par le champ est de l'ordre de la masse au repos de l'électron. Par conséquent, l'interaction laser-atome nécessite un traitement relativiste. On ne considère que l'habillage électronique relativiste et l'anomalie de l'électron. Certains résultats sont nouveaux et surprenants compte tenu de la faible valeur de a . La première section est consacrée au calcul de la section efficace différentielle du processus de la collision inélastique électron-atome d'hydrogène en présence du champ laser, la section 2 est consacrée au formalisme théorique qui décrit l'électron dans le champ d'une onde électromagnétique plane en tenant compte de son moment magnétique anomal. Dans la section 3, on présente et on discute les résultats obtenus dans les régimes non relativiste et relativiste. On termine par une conclusion dans la section 4.

1 Théorie de collision inélastique électron-atome d'hydrogène en absence de l'effet MMA

L'équation du second ordre de Dirac pour un électron dans un champ extérieur est (en système d'unité atomique) :

$$\left[\left(p - \frac{1}{c} A \right)^2 - c^2 - \frac{i}{2c} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \psi(x) = 0, \quad (5.1)$$

où $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ est le tenseur relié aux matrices de Dirac γ^μ , $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur du champ électromagnétique et A^μ est le quadri-vecteur potentiel. L'équation ci-dessus admet une solution exacte (onde de Volkov) [10], elle est donnée par :

$$\psi(x) = \left(1 + \frac{kA}{2c(kp)} \right) \frac{u(p, s)}{\sqrt{2VQ_0}} \exp \left[-i(qx) - i \int_0^{kx} \frac{(Ap)}{c(kp)} d\phi \right]. \quad (5.2)$$

$u(p, s)$ représente le bispineur à quatre composantes normalisé selon $\bar{u}u = 2c^2$. On calcul maintenant l'élément de matrice de transition S_{fi} correspondant au processus de transition de l'état i vers l'état f en présence du champ laser, il est donné par :

$$S_{fi} = -i \int dt \langle \bar{\psi}_{q_f}(\mathbf{r}_1) \phi_f(\mathbf{r}_2) | V_d | \psi_{q_i}(\mathbf{r}_1) \phi_i(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (5.3)$$

Le potentiel d'interaction est donné par :

$$V_d = \frac{1}{\mathbf{r}_{12}} - \frac{Z}{\mathbf{r}_1}, \quad (5.4)$$

$\mathbf{r}_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$; \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 sont respectivement les coordonnées de l'électron incident et de l'électron atomique. En utilisant les techniques standards du EQD, on a :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\sigma}^{(s)}}{d\Omega_f}, \quad (5.5)$$

avec

$$\frac{d\bar{\sigma}^{(s)}}{d\Omega_f} = \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|} \frac{1}{(4\pi c^2)^2} \left(\frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(s)}|^2 \right) \left| H_{inel}(\Delta_s) \right|^2 \Bigg|_{Q_f=Q_i+s\omega+E_{1s1/2}-E_{2s1/2}} \quad (5.6)$$

est la section efficace différentielle correspondante à un échange de $\pm s$ photons. La partie spinorielle $\frac{1}{2} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |M_{fi}^{(s)}|^2$ contient toute l'information sur le spin et sur les effets du champ

laser et peut être calculée en utilisant REDUCE [11] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |M_{fi}^{(s)}|^2 &= \frac{1}{2} \mathbf{Tr} \{ (\not{p}_f c + c^2) \Lambda^{(s)} (\not{p}_i c + c^2) \bar{\Lambda}^{(s)} \}, \\ &= \left(2 \{ J_s^2(z) \mathcal{A} + (J_{s+1}^2(z) + J_{s-1}^2(z)) \mathcal{B} + (J_{s+1}(z) J_{s-1}(z)) \mathcal{C} \right. \\ &\quad \left. + J_s(z) (J_{s-1}(z) + J_{s+1}(z)) \mathcal{D} \} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Les quatre coefficients \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} sont donnés par les équations (3.29), (3.30), (3.31) et (3.32) du chapitre 3 et pour plus de détails analytique voir [12]. L'opérateur $\Lambda^{(s)}$ est donné par :

$$\Lambda^{(s)} = C_0 B_{0s}(z) + C_1 B_{1s} + C_2 B_{2s}. \quad (5.8)$$

Les trois coefficients C_0 , C_1 et C_2 sont donnés par :

$$\begin{aligned} C_0 &= \gamma^0 - 2 \frac{\omega}{c} c(p_i) c(p_f) a^2 k \\ C_1 &= c(p_i) \gamma^0 k \phi_1 + c(p_f) \phi_1 k \gamma^0 \\ C_2 &= c(p_i) \gamma^0 k \phi_2 + c(p_f) \phi_2 k \gamma^0. \end{aligned}$$

On introduit maintenant les relations impliquant les fonctions de Bessel ordinaire :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} e^{-iz \sin(\phi - \phi_0)} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} B_{0s} \\ B_{1s} \\ B_{2s} \end{pmatrix} e^{-is\phi}, \quad (5.9)$$

avec

$$\begin{pmatrix} B_{0s} \\ B_{1s} \\ B_{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_s(z) e^{is\phi_0} \\ (J_{s+1}(z) e^{i(s+1)\phi_0} + J_{s-1}(z) e^{i(s-1)\phi_0}) / 2 \\ (J_{s+1}(z) e^{i(s+1)\phi_0} - J_{s-1}(z) e^{i(s-1)\phi_0}) / 2i \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Après de longs calculs analytiques [13], on trouve pour la partie intégrale $H_{inel}(\Delta_s)$ la formule suivante :

$$H_{inel}(\Delta_s) = -\frac{4\pi}{\sqrt{2}} [I_1(s) + I_2(s) + I_3(s)], \quad (5.11)$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1(s) &= \frac{4}{27c^2} \frac{1}{((3/2)^2 + |\Delta_s|^2)} \\
I_2(s) &= \frac{2}{27} \left(\frac{1}{c^2} - 4 \right) \frac{3}{((3/2)^2 + |\Delta_s|^2)^2} \\
I_3(s) &= \frac{8}{9} \left(1 + \frac{1}{8c^2} \right) \frac{|\Delta_s|^2 - 27/4}{((3/2)^2 + |\Delta_s|^2)^3}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

où $|\Delta_s| = |\mathbf{q}_f - \mathbf{q}_i - s\mathbf{k}|$ est le moment du transfert d'impulsion en présence du champ laser.

2 Théorie de la collision inélastique (1s-2s) e-H en présence de l'effet MMA

Dans l'approximation du champ faible, l'interaction électron-atome d'hydrogène assistée par le champ laser est prise en compte en utilisant exactement les fonctions d'onde de Salamin [14] définies précédemment :

$$\Psi(x) = [1 - (\alpha \not{k} A + \beta \not{k} + \delta \not{p} k A)] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2VQ_0}} \exp \left[-i(qx) - i \int_0^{kx} \frac{(Ap)}{c(kp)} d\phi \right], \tag{5.13}$$

avec

$$\alpha = \left(\frac{\kappa c}{2} - \frac{1}{c} \right) / 2(k.p) \quad ; \quad \beta = \frac{\kappa A^2}{4c(k.p)} \quad ; \quad \delta = \frac{\kappa}{4(k.p)} \tag{5.14}$$

Ces fonctions représentent la solution exacte de l'équation du second ordre de Dirac en tenant compte du moment magnétique anomal et en présence d'un champ extérieur :

$$\left[\left(p - \frac{1}{c} A \right)^2 - c^2 - \frac{i}{2c} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + ia \left(\not{p} - \frac{A}{c} + c \right) F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \psi(x) = 0, \tag{5.15}$$

avec $a = \kappa/4$, et κ est l'anomal de l'électron. Le terme $F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$ vient du fait que l'électron a un spin demi entier, et le terme multipliant a est due à l'effet MMA.

On procède maintenant au calcul de l'élément de matrice de transition S_{fi} ($i \rightarrow f$) contenant l'effet du MMA de l'électron :

$$S_{fi} = -i \int dt \langle \bar{\Psi}_{q_f}(\mathbf{r}_1) \phi_f(\mathbf{r}_2) | V_d | \Psi_{q_i}(\mathbf{r}_1) \phi_i(\mathbf{r}_2) \rangle \tag{5.16}$$

Si nous remplaçons toutes les fonctions d'ondes et le potentiel d'interaction V_d dans S_{fi} , et en utilisant les règles de calcul standard de l'QED, on trouve l'expression de la SED en présence de l'effet MMA :

$$\frac{d\bar{\sigma}^{(AMM)}}{d\Omega_f} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|} \frac{1}{(4\pi c^2)^2} \left(\frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(AMM)}|^2 \right) |H_{inel}(\Delta_s)|^2 \Bigg|_{Q_f=Q_i+s\omega+E_{1s1/2}-E_{2s1/2}} \quad (5.17)$$

La nouveauté qui est importante dans les différentes étapes de calcul est contenue dans la partie spinorielle :

$$\frac{1}{2} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |M_{fi}^{(AMM)}|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{Tr} \{ (\not{p}_f c + c^2) \Lambda_s^{(AMM)} (\not{p}_i c + c^2) \bar{\Lambda}_s^{(AMM)} \}, \quad (5.18)$$

avec

$$\Lambda_s^{(AMM)} = C_0 B_{0s}(z) + C_1 B_{1s} + C_2 B_{2s} + C_3 B_{3s} + C_4 B_{4s}. \quad (5.19)$$

Les coefficients C_0 , C_1 , C_2 , C_3 et C_4 , contiennent toute l'information sur l'effet MMA de l'électron et l'interaction spin-champ laser, et sont obtenus en utilisant REDUCE [11] comme suit :

$$\begin{aligned} C_0 = & [2(2\phi_1 \not{k} \not{p}_i a_1 . p_f \delta_f \delta_i \omega - 2\phi_1 \not{k} \not{p}_f a_1 . p_i \delta_f \delta_i \omega + 2\phi_1 \not{k} \gamma_0 a_1 . p_i k . p_f c \delta_f \delta_i - 2\phi_1 \not{k} \gamma_0 a_1 . p_f k . p_i c \delta_f \delta_i \\ & - 2\phi_1 \not{k} a_1 . p_i \alpha_f \delta_i \omega + 2\phi_1 \not{k} a_1 . p_f \alpha_i \delta_f \omega + 2\phi_2 \not{k} \not{p}_i a_2 . p_f \delta_f \delta_i \omega - 2\phi_2 \not{k} \not{p}_f a_2 . p_i \delta_f \delta_i \omega + 2\phi_2 \not{k} \gamma_0 a_2 \\ & . p_i k . p_f c \delta_f \delta_i - 2\phi_2 \not{k} \gamma_0 a_2 . p_f k . p_i c \delta_f \delta_i - 2\phi_2 \not{k} a_2 . p_i \alpha_f \delta_i \omega + 2\phi_2 \not{k} a_2 . p_f \alpha_i \delta_f \omega - 2\phi_2 \not{k} \alpha_f A^2 \delta_i \omega \\ & + 2\phi_2 \not{k} \not{p}_f A^2 \delta_f \delta_i \omega - 2\phi_2 \not{k} \not{p}_f \gamma_0 k . p_i A^2 c \delta_f \delta_i + 2\phi_2 \not{k} \not{p}_f \alpha_i A^2 \delta_f \omega - 2\phi_2 \gamma_0 \not{p}_i k . p_f A^2 c \delta_f \delta_i + 2\phi_2 \gamma_0 k . p_i \\ & \alpha_f A^2 c \delta_i - 2\phi_2 \gamma_0 k . p_f \alpha_i A^2 c \delta_f - \not{k} \gamma_0 \beta_f c - 2\phi_2 \alpha_f \alpha_i A^2 \omega + 2\phi_2 \beta_f \beta_i \omega - \gamma_0 \not{k} \beta_i c + \gamma_0 c)] / (2c) \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} C_1 = & [2(-\phi_1 \not{k} \not{p}_f \gamma_0 c \delta_f + 2\phi_1 \not{k} \not{p}_f \beta_i \delta_f \omega - 2\phi_1 \not{k} \gamma_0 k . p_f \beta_i c \delta_f - \phi_1 \not{k} \gamma_0 \alpha_f c + 2\phi_1 \not{k} \alpha_f \beta_i \omega \\ & + 2\phi_1 \not{k} \alpha_i \beta_f \omega - 2\phi_1 \not{k} \not{p}_i \beta_f \delta_i \omega + 2\phi_1 \gamma_0 \not{p}_i k . p_i \beta_f c \delta_i - \gamma_0 \not{k} \phi_1 \alpha_i c - \gamma_0 \not{p}_i \not{k} \phi_1 c \delta_i)] / (2c) \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} C_2 = & [2(-\phi_2 \not{k} \not{p}_f \gamma_0 c \delta_f + 2\phi_2 \not{k} \not{p}_f \beta_i \delta_f \omega - 2\phi_2 \not{k} \gamma_0 k . p_f \beta_i c \delta_f - \phi_2 \not{k} \gamma_0 \alpha_f c + 2\phi_2 \not{k} \alpha_f \beta_i \omega \\ & + 2\phi_2 \not{k} \alpha_i \beta_f \omega - 2\phi_2 \not{k} \not{p}_i \beta_f \delta_i \omega + 2\phi_2 \gamma_0 \not{p}_i k . p_i \beta_f c \delta_i - \gamma_0 \not{k} \phi_2 \alpha_i c - \gamma_0 \not{p}_i \not{k} \phi_2 c \delta_i)] / (2c) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
 C_3 = & [4\phi_1 k p_i a_1 . p_f \delta_f \delta_i \omega - \phi_1 k p_f a_1 . p_i \delta_f \delta_i \omega + \phi_1 k \gamma_0 a_1 . p_i c k . p_f \delta_f \delta_i - \phi_1 k \gamma_0 a_1 . p_f k . p_i c \delta_f \delta_i \\
 & - \phi_1 k a_1 . p_i \alpha_f \delta_i \omega + \phi_1 k a_1 . p_f \alpha_i \delta_f \omega - \phi_2 k p_i a_2 . p_f \delta_f \delta_i \omega + \phi_2 k p_f a_2 . p_i \delta_f \delta_i \omega - \phi_2 k \gamma_0 \\
 & a_2 . p_i k . p_f c \delta_f \delta_i + \phi_2 k \gamma_0 a_2 . p_f k . p_i c \delta_f \delta_i + \phi_2 k a_2 . p_i \alpha_f \delta_i \omega - \phi_2 k a_2 . p_f \alpha_i \delta_f \omega] / (2c)
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
 C_4 = & [4(\phi_1 k p_i a_2 . p_f \delta_f \delta_i \omega - \phi_1 k p_f a_2 . p_i \delta_f \delta_i \omega + \phi_1 k \gamma_0 a_2 . p_i k . p_f c \delta_f \delta_i - \phi_1 k \gamma_0 a_2 . p_f k . p_i c \delta_f \delta_i \\
 & - \phi_1 k a_2 . p_i \alpha_f \delta_i \omega + \phi_1 k a_2 . p_f \alpha_i \delta_f \omega + \phi_2 k p_i a_1 . p_f \delta_f \delta_i \omega - \phi_2 k p_f a_1 . p_i \delta_f \delta_i \omega + \phi_2 k \gamma_0 a_1 \\
 & . p_i c k . p_f \delta_f \delta_i - \phi_2 k \gamma_0 a_1 . p_f k . p_i c \delta_f \delta_i - \phi_2 k a_1 . p_i \alpha_f \delta_i \omega + \phi_2 k a_1 . p_f \alpha_i \delta_f \omega)] / (2c)
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Ici, les termes B_{0s} , B_{1s} , B_{2s} , B_{3s} et B_{4s} introduisant les fonctions de Bessel ordinaires sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{0s} \\ B_{1s} \\ B_{2s} \\ B_{3s} \\ B_{4s} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} J_s(z) e^{is\phi_0} \\ (J_{s+1}(z) e^{i(s+1)\phi_0} + J_{s-1}(z) e^{i(s-1)\phi_0}) / 2 \\ (J_{s+1}(z) e^{i(s+1)\phi_0} - J_{s-1}(z) e^{i(s-1)\phi_0}) / 2i \\ (J_{s+2}(z) e^{i(s+2)\phi_0} + J_{s-2}(z) e^{i(s-2)\phi_0}) / 2 \\ (J_{s+2}(z) e^{i(s+2)\phi_0} - J_{s-2}(z) e^{i(s-2)\phi_0}) / 2i \end{array} \right\} \tag{5.25}$$

3 Résultats et discussion

Pour tester cette nouvelle approche, on a utilisé les résultats théoriques non relativistes. Dans ce cas, l'énergie de l'électron incident est approximativement égale à 2700 eV. On souligne, cependant, que notre approche peut être appliqué directement aux électrons rapides dans les lasers intenses où les effets relativistes deviennent plus forts et encore dominants. Le champ laser est supposé comme une onde plane monochromatique polarisée circulairement, et elle s'applique d'une manière adiabatique (activé et désactivé) à $t \rightarrow -\infty$ et à $t \rightarrow +\infty$ respectivement. Son quadri-potentiel est donné par :

$$A^\mu(x) = |a|(e_1^\mu \cos(\varphi) + e_2^\mu \sin(\varphi)) \tag{5.26}$$

dans l'équation (5.26), $|a|$ est l'amplitude du potentiel, e_j^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$, $j = 1, 2$) sont les quadri-vecteurs polarisation et $\varphi = k^\mu x_\mu$ est la phase, où $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ est le quadri-vecteur

d'onde du champ laser vérifiant ($e_j^\mu k_\mu = 0$), ayant la fréquence ω , $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ et $x^\mu = (ct; \mathbf{x})$ sont les coordonnées espace-temps.

Par la suite, pour analyser les résultats numériques des sections efficaces différentielles pour un champ d'onde électromagnétique plane polarisée circulairement, on fixe la direction du champ laser selon l'axe Oz et on prend la charge nucléaire atomique $Z = 1$. Quant à la fréquence du champ de rayonnement, on considère $\omega = 1,17$ eV, qui correspond à un laser Neodymium : laser YAG.

3.1 Le régime non relativiste

On a calculé les SEDs assistées par laser de l'excitation inélastique $1s - 2s$ de l'hydrogène atomique par impact électronique à des énergies d'électrons intermédiaires pour les angles fixes $\theta_i = 90^\circ$, $\phi_i = \phi_f = 45^\circ$. Avant de commencer la discussion, il convient de mentionner quelques abréviations : DCS représente la section efficace différentielle (SED), SRDCS représente la section efficace différentielle semi-relativiste (SEDSR) et NRDCS représente la section efficace différentielle non relativiste (SEDNR).

La figure (5.1) présente les résultats des SEDs suivantes (SEDSR avec MMA, SEDSR sans MMA, SEDSR sans laser et SEDNR sans laser) où le paramètre relativiste est $\gamma = 1,0053$, ce qui correspond à une énergie cinétique de l'électron $E_i = 2700$ eV. On a calculé ces résultats en annulant les valeurs de l'anomalie de l'électron a et de l'intensité du champ laser ε dans notre programme informatique. La caractéristique principale des résultats des SEDs obtenues, qui illustre la première vérification de la consistance de notre nouveau formalisme, est que les quatre courbes sont confondues. La figure (5.2) montre la dépendance des SEDs avec et sans effets MMA de l'intensité du champ laser. Lorsque l'intensité du champ électrique est augmentée de $\varepsilon = 0.0$ u.a à $\varepsilon = 0.25$ u.a, on observe une différence très remarquable entre les deux SEDs qui atteint environ 1.6 ordre de magnitude. Cette figure montre clairement que les effets MMA de l'électron sont fortement dépendante de l'intensité du champ électrique ε . La figure (5.3) illustre la différence entre les deux approches lorsque on varie l'angle θ_f . De même que pour la dépendance observée en fonction de l'intensité du champ électrique, et pour la valeur de $\varepsilon = 0.25$ u.a, le rapport de différence atteint environ 1.47 ordre de magnitude au

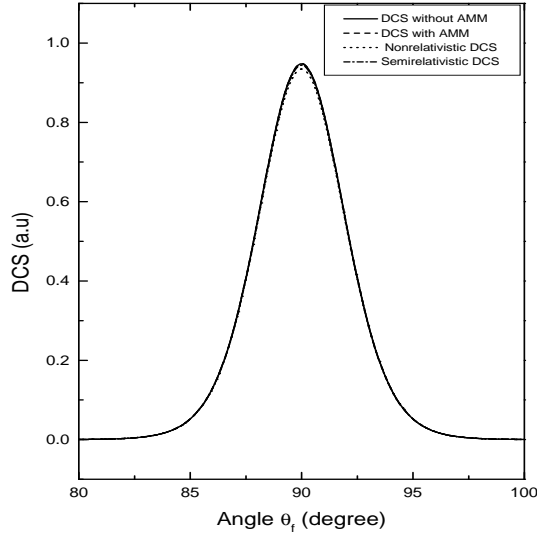


FIGURE 5.1 – Comparaison entre SEDSR avec MMA ($a = 0$ et $\varepsilon = 0.0 \text{ u.a.}$), SEDSR sans MMA ($\varepsilon = 0.0 \text{ u.a.}$), SEDSR laser et SEDNR pour le paramètre relativiste $\gamma = 1.0053$. Les paramètres de la géométrie sont $\theta_i = 90^\circ$, $\phi_i = \phi_f = 45^\circ$ et $0^\circ \leq \theta_f \leq 180^\circ$.

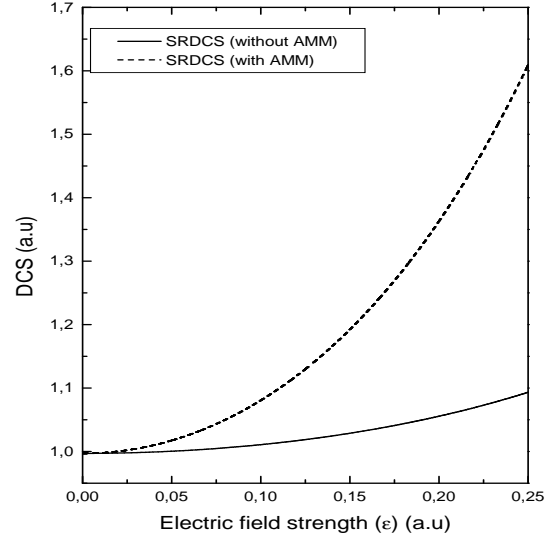


FIGURE 5.2 – Les deux SEDs (avec et sans MMA) en fonction de l'intensité du champ ε pour le paramètre relativiste $\gamma = 1.0053$. Les paramètres de la géométrie sont $\theta_i = \theta_f = 90^\circ$, $\phi_i = \phi_f = 45^\circ$ et le nombre de photons échangés ± 100 .

voisinage de $\theta_f = 90^\circ$. La figure (5.4) montre les mesures prises par Williams *et al* [15] limitées aux électrons avec une énergie cinétique incidente $E_i = 100 \text{ eV}$. En général, on remarque un très bon accord entre les deux modèles théoriques à savoir (SEDSR) et (SEDNR). Cet accord peut conduire à la conclusion suivante : c'est que, l'approximation des fonctions d'onde de Darwin est justifiée dans le régime non relativiste. La différence légèrement observée entre les modèles théoriques et les données expérimentales est significative pour les petits et grands angles de diffusion. Afin de minimiser cette différence à plus basses énergies, il est nécessaire d'ajouter des corrections d'ordre supérieur et les effets de Coulomb afin d'obtenir un accord satisfaisant entre la théorie et l'expérience.

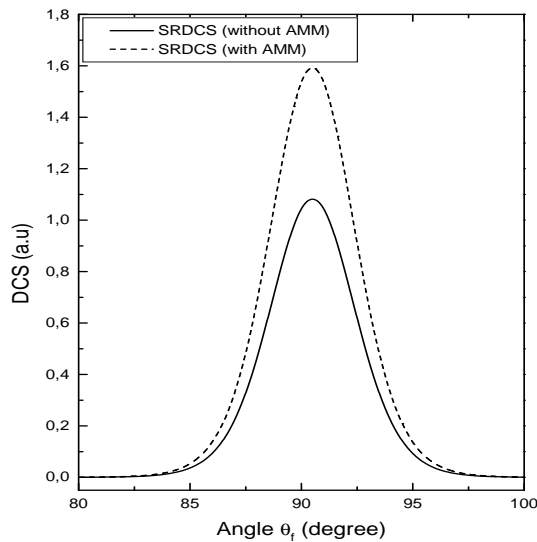


FIGURE 5.3 – La variation des deux SEDs (avec et sans moment magnétique anomal MMA) en fonction de l'angle θ_f , l'intensité du champ électrique $\varepsilon = 0.25 \text{ u.a}$ pour le paramètre relativiste $\gamma = 1.0053$ et la géométrie $\theta_i = 90^\circ$, $\phi_i = \phi_f = 45^\circ$ et $0^\circ \leq \theta_f \leq 180^\circ$ et le nombre de photons échangés est ± 100 .

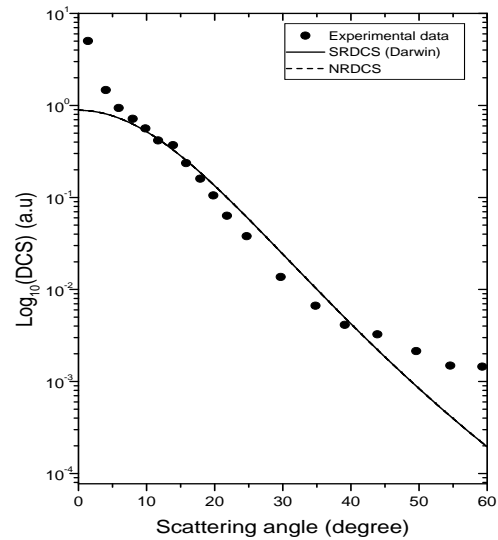


FIGURE 5.4 – La variation logarithmique des SEDs $1s - 2s$ de la collision $e^- - H$ à une énergie 100 eV . En pointillé ce sont les valeurs observées par Williams(1981), en continue représente l'approximation semi-relativiste, et la ligne pointillée représente la SED non relativiste.

3.2 Le régime relativiste

Pour une diffusion à des hautes énergies et des hautes intensités du champ laser (au dessous de 0.25 a.u.), les deux approches de la SEDSR (avec et sans MMA), montrent un comportement qualitativement différent dont l'amplitude augmente très rapidement. Afin d'illustrer la très forte dépendance des SEDs avec l'effet du moment magnétique anomal (MMA) de l'intensité du champ laser et de l'énergie cinétique de l'électron incident, on présente dans la figure (5.5) les deux SEDs avec et sans MMA. On observe que, par rapport au cas représenté dans le régime non relativiste, la valeur de la section efficace différentielle a augmenté à peu près d'un ordre de 2.5 fois en gardant les mêmes paramètres de la géométrie. On remarque que les deux figures (5.3) et (5.5) présentent un pic autour de $\theta_f = 90^\circ$. La figure (5.6) montre d'une

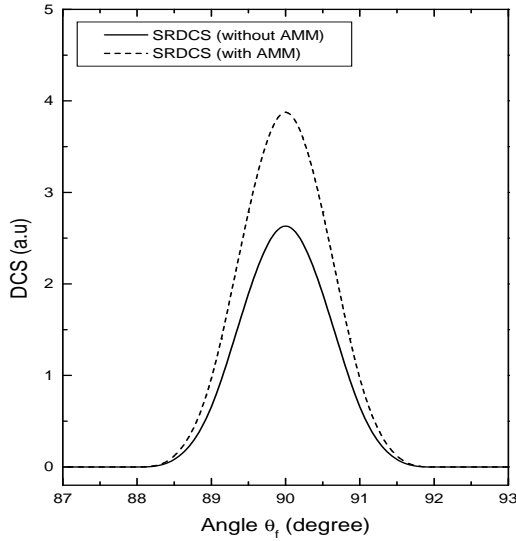


FIGURE 5.5 – Les deux SEDs (avec et sans MMA) en fonction de l'angle θ_f . L'intensité du champ laser $\varepsilon = 0.25 \text{ u.a.}$ Le paramètre relativiste $\gamma = 2.0$ et les paramètres de la géométrie sont $\theta_i = 90^\circ$, $\phi_i = \phi_f = 45^\circ$, $0^\circ \leq \theta_f \leq 180^\circ$ et le nombre de photons échangés est ± 100 .

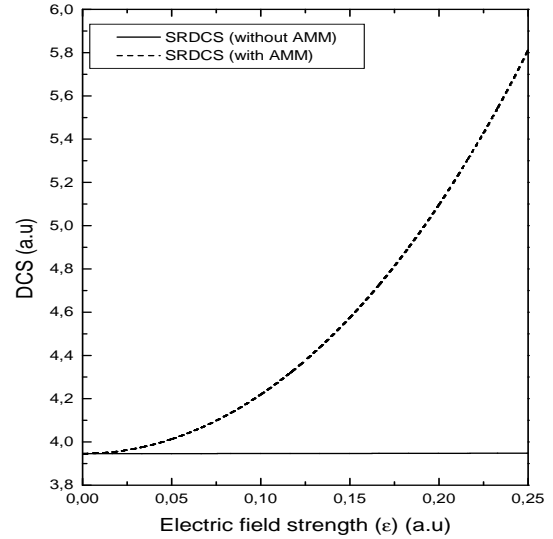


FIGURE 5.6 – Les deux SEDs (avec et sans MMA) en fonction de l'intensité du champ laser ε . Le paramètre relativiste $\gamma = 2.0$ et les paramètres de la géométrie sont $\theta_i = 90^\circ$, $\phi_i = \phi_f = 45^\circ$, $0^\circ \leq \theta_f \leq 180^\circ$ et le nombre de photons échangés est ± 100 .

part que, dans le cas du régime relativiste, il est bien connu que l'effet MMA de l'électron est important, même pour des intensités élevées. Non seulement cela est expliqué dans ce cas, mais aussi dans le cas du régime non relativiste (voir la figure (5.2)). D'autre part, les SEDs avec des effets MMA de l'électron dépendent de l'énergie cinétique initiale et aussi de l'intensité du champ laser. L'effet MMA de l'électron agit sur les deux états de l'électron (incident et diffusé). Egalement, il varie avec l'intensité du champ laser. En comparant les figures (5.2) et (5.6), on constate que l'augmentation de la section efficace différentielle dans le régime relativiste devient très importante pour les intensités du champ laser élevées. La figure (5.7) montre la dépendance des SEDs de la fréquence. A basse fréquence, une différence significative apparaît alors que cette différence diminue pour des fréquences élevées.

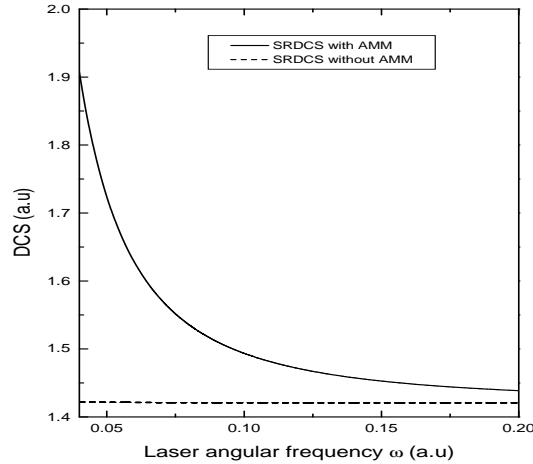


FIGURE 5.7 – Les deux SEDs (avec et sans MMA) en fonction de la fréquence angulaire ω , l'intensité du champ laser $\varepsilon = 0.2 u.a.$, le paramètre relativiste $\gamma = 1.2$, les paramètres de la géométrie $\theta_i = \theta_f = 90^\circ$, $\phi_i = \phi_f = 45^\circ$ et le nombre de photons échangés est ± 100 .

4 Conclusion

Dans ce travail, on a présenté de nouveaux résultats concernant les effets du moment magnétique anomal de l'électron sur le processus de collision inélastique électron-atome d'hydrogène assistée par le champ laser. On a utilisé la valeur expérimentale récente de l'anomalie a trouvée par Gabrielse [3] et on a considéré l'habillage électronique. En utilisant la fonction d'onde de Dirac-Volkov qui incorpore cette anomalie [14] et les fonctions d'onde de Darwin, on a trouvé l'expression analytique de la SED correspondante lorsque la condition $Z\alpha \ll 1$ est vérifiée. La partie intégrée sur les coordonnées spatiales trouvée dans des travaux précédents [13] reste la même pour l'étude de ce processus. Les divers coefficients intervenant dans l'expression de S_{f_i} ont été obtenus en utilisant le code REDUCE [11]. On a la même analogie formelle entre la SED sans et avec anomalie. Cependant, la partie spinorielle incorporant cette dernière dépend fortement de l'anomalie de l'électron et de l'intensité du champ électrique. Pour le régime non relativiste, l'addition du MMA de l'électron est visible mais reste petite. En augmentant l'intensité du champ électrique aux valeurs modérées, cet effet devient plus prononcé. On a également vérifié que les corrections radiatives minimisent la différence entre

le modèle théorique et expérimentale et leur introduction y compris l'effet MMA donne des résultats précis. Dans le régime relativiste, le comportement dynamique de la SED montre que la corrélation entre les termes provenant de l'anomalie de l'électron et de l'intensité du champ électrique est plus prononcée même s'il y a une augmentation globale de la SED sans anomalie et de la SED avec anomalie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books Publishing, Reading, MA, 1995).
- [2] J. Schwinger, Phys. Rev. **73**, 416, (1948).
- [3] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse, Phys.Rev.Lett. **100**, 120801, (2008).
- [4] E. Remiddi, Status of QED Predictions of the electron anomaly,INFN, Sezione di Bologna, Frascati, 7 April, (2008).
- [5] F. V. Bunkin and M. V. Fedorov, Sov. Phys. JETP **22**, 844 (1966); N. M. Kroll and K. M. Watson, Phys. Rev. A **8**, 804, (1973).
- [6] C. J. Joachain, *Quantum Collision Theory*, 3rd ed. (Elsevier, New York, 1983).
- [7] D. R. Bates and D. Miskelly, Phys. Soc. A, **70**, 539, (1957).
- [8] G. A. Erskine and H. S. W. Massey, Proc. Roy. Soc. A, **69**, 422, (1952).
- [9] H. S. W. Massey and B. L. Moiseiwitsch, Proc. Roy. Soc. A, **66**, 406, (1953).
- [10] D. M. Volkov, Z. Phys **94**, 250, (1935).
- [11] A. G. Grozin, Using REDUCE in High Energy Physics (Cambridge University, Cambridge, England, 1997).
- [12] Y. Attaourti and B. Manaut, Phys. Rev. A **68**, 067401, (2003).
- [13] S. Taj, B. Manaut, M. El Idrissi, and L. Oufni, Chin. J. Phys., **49**, 1165, (2011).

[14] Y. I. Salamin, J. Phys. A **26**, 6067, (1993).

[15] J. F. Williams, J. Phys. B **14**, 1197, (1981).

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Ce travail concernant l'excitation de l'atome d'hydrogène par impact électronique a pour but d'étudier les propriétés principales d'un processus de collision assisté par le champ laser. C'est un exemple de problèmes réels d'une structure atomique de trois corps : un noyau et deux électrons. On s'est intéressé plus particulièrement aux processus de collision élastique et inélastique sans échange. Ce sont les processus de l'électrodynamique quantique (QED) traités au premier ordre de la théorie des perturbations (première approximation de Born). On s'attend à ce que les effets relativistes jouent un rôle important. On a commencé avec quelques notions relativistes et les techniques de calcul de la section efficace différentielle relativiste et non relativiste. On a présenté l'équation de Dirac qui décrit les particules fermioniques de spin $1/2$, on a également présenté la fonction d'onde de Dirac-Volkov qui décrit l'électron dans le champ d'une onde électromagnétique dans le domaine relativiste et aussi en tenant compte de l'effet du moment magnétique anomal. Un chapitre est consacré aux collisions non relativistes de l'atome d'hydrogène par impact électronique, qui reste toujours une référence de comparaison puisque l'atome d'hydrogène est le seul atome dont les fonctions d'onde sont exactes. Particulièrement, on a trouvé que les transitions autorisées $1s - 2p$ dominent la section efficace totale pour les collisions électron-atome aux énergies élevées, et que le second terme d'approximation de Born gouverne les collisions inélastiques à hautes énergies et aux larges moments de transferts d'impulsion. Les effets relativistes commencent à se manifester avec l'augmentation de l'intensité du champ laser et du paramètre relativiste γ lié à l'énergie

cinétique par $E = c^2(\gamma - 1)$. Dans ce cas, le formalisme non relativiste n'est plus valable, et l'atome d'hydrogène est décrit par les fonctions de Darwin dans l'approximation $Z\alpha \ll 1$. Les calculs en utilisant les fonctions hydrogénoïdes exactes relativiste du même processus sont en cours et ils sont nécessaires pour vérifier la validité du régime et l'utilisation des fonctions de Darwin. On note que le traitement semi-relativiste lorsque Z augmente et dépasse $Z = 10$, commence à générer des erreurs importantes. Un traitement complet de Dirac-Volkov qui tient compte du caractère fermionique et relativiste de l'électron est nécessaire dans ce régime. Les contributions qui résultent du couplage entre le spin et le champ, deviennent dominantes à haute intensité du champ. Les effets du spin et du champ interviennent via la partie spinorielle. Pour des hautes intensités du champ et des projectiles plus rapides, les contributions des termes dépendant du spin augmentent d'une manière significative la section efficace différentielle. La polarisation du champ est circulaire, ce qui introduit les fonctions de Bessel ordinaires. Ces dernières influencent aussi la SED à travers la phase du champ. En effet, on intègre sur un nombre de photons échangés lors de l'excitation, la règle de somme montrée par Bunkin et Fedorov est vérifiée lorsque ce nombre devient important. Elle est atteinte dans le cas de ce processus pour un nombre de photons échangés ± 13945 . On a aussi étudié le processus d'excitation inélastique $1s - 2s$ pour les électrons polarisés en présence du champ laser. Cette étude a donné lieu à deux résultats intéressants (vérifiée dans le domaine relativiste par Attaourtit, Manaut et al), le premier montre que la somme de la SED de spin-flip et la SED de spin non flip donne toujours la SED de spin non-polarisé indépendamment du nombre de photons échangés. Le second résultat montre que la probabilité pour que l'électron change son spin est égale à zéro.

On a aussi présenté quelques méthodes de calcul de la valeur approchée d'une intégrale. On a essayé de décrire et d'expliquer certaines techniques d'approximation lorsque le calcul d'une intégrale est difficile ou impossible. Ces méthodes et d'une façon plus générale, les simulations numériques ont connu un formidable essor grâce à la croissance de la puissance des ordinateurs qui prennent de plus en plus d'importance dans la recherche scientifique. Il y'a même des situations où les simulations numériques remplacent l'expérimentation car une fois bien maîtrisées, elles sont moins chères, plus rapides, plus flexibles : elles permettent par exemple d'accéder à des informations difficilement mesurables ou de réaliser un très grand

nombre d'essais. Ces méthodes sont utilisées dans la plupart des domaines de la science et il est donc très important d'en avoir un aperçu pour le calcul approché des intégrales mais aussi des dérivées, de l'interpolation polynomiale, des équations différentielles, etc.

La fin de cette étude porte sur la même excitation inélastique mais en tenant compte de l'effet du moment magnétique anomal. On a utilisé la valeur expérimentale récente de l'anomalie a trouvée par Gabrielse et on a considéré l'habillage électronique. Il y'a une sorte d'analogie entre la SED sans et avec anomalie. Dans le régime non relativiste, on a observé l'existence d'un pic au voisinage de $\theta_f = 90^\circ$, l'effet MMA incorporé dans la partie spinorielle est visible mais reste faible. Cet effet devient important dans le régime relativiste avec l'augmentation de l'intensité du champ. Le pic centrale est disparu et une différence apparente entre la SED sans MMA et la SED avec MMA.

Les calculs semi-relativistes de $1s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}$ sont en cours, ils vont apporter beaucoup plus de résultats sur ce processus d'excitation inélastique. Une perspective possible de cette étude consiste à étudier les collisions inélastiques relativistes $1s_{1/2} \rightarrow 2s_{1/2}$ et aussi $1s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}$ en utilisant les fonctions relativistes exactes de l'atome d'hydrogène en absence et en présence du champ laser. Ceci permettra par la suite d'étudier des atomes hydrogéoïdes.