



*Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques
Béni-Mellal
CED : Sciences et Techniques
FD : Mathématiques et Physique Appliquées*



THESE DE DOCTORAT NATIONAL

Présentée par

LOUARAYCHI Abdellatif

*Discipline : physique
Spécialité : Mécanique Energétique*

Thème :

**Etude Numérique et Analytique des Transferts
Thermiques par Convection Mixte dans des Fluides
Newtoniens et non-Newtoniens confinés**

Soutenue publiquement le 19 Novembre 2021 devant le jury composé de :

Pr. Jamaa BENGOURRAM : Faculté des Sciences et Techniques, Université
Sultan Moulay Slimane, Béni Mellal (Président)

Pr. M'Barek FEDDAOUI : Ecole Nationale des Sciences Appliquées, ENSA,
Université Ibn Zohr, Agadir (Rapporteur)

Pr. Ahmed BAHLAOUI : Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay
Slimane, Béni-Mellal (Rapporteur)

Pr. Soufiane BELHOUIDEG : Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan
Moulay Slimane, Béni-Mellal (Rapporteur)

Pr. Mourad KADDIRI : Faculté des Sciences et Techniques, Université Sultan
Moulay Slimane, Béni Mellal (Examineur)

Pr. Mohamed LAMSAADI : Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan
Moulay Slimane, Béni-Mellal (Directeur de Thèse)

DEDICACES

A l'âme de mon père et à ma mère

À mes frères et sœurs

À toute ma famille

À tous mes amis.

REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire, je souhaité adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué, de près ou de loin, à la réussite de ce travail.

*Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du Laboratoire de Modélisation des Ecoulements et des Transferts (LAMET) de la Faculté des Sciences et Techniques de Béni-Mellal, sous la direction du Professeur **M. LAMSAADI**, enseignant chercheur à la Faculté Polydisciplinaire de Béni Mellal. Sa disponibilité, sa rigueur scientifique, ses remarques objectives et constructives, son aide et ses qualités humaines, tout à fait hors du commun, sont des atouts qui m'ont permis de travailler avec joie et persévérance. Je saisis l'occasion pour lui exprimer toute ma profonde reconnaissance.*

*Le Professeur **M. NAÏMI** de la Faculté des Sciences et Techniques de Béni-Mellal a assuré la codirection d'un tel travail et m'a fait bénéficier de son expérience. Qu'ALLAH ait son âme.*

*Que professeur **H. EL HARFI**, enseignant-chercheur à la Faculté Polydisciplinaire de Béni Mellal, trouve ici l'expression de mes hauts respects et considérations pour les échanges scientifiques fructueux que j'ai eus avec lui.*

*Messieurs **S. BELHOUIDEG** et **A. BAHLAOUI**, Professeurs à la Faculté Polydisciplinaire de Béni Mellal, et **M. FEDDAOUI**, Professeur à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées, ENSA, Université Ibn Zohr, Agadir, ont rapporté sur ce travail et siégé parmi les membres du jury, malgré leurs préoccupations, qu'ils daignent trouver l'expression de ma considération et mes remerciements les plus sincères.*

*Je remercie également le Professeur **J. BENGOURRAM** de la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal qui a eu l'amabilité de bien vouloir présider le jury d'examen de cette thèse.*

*Mes remerciements les plus chaleureux vont également au professeur **M. KADDIRI**, enseignant chercheur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal, d'avoir accepté de faire partie du jury en tant qu'examineur et pour ses conseils encourageants.*

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à tous mes collègues du Centre de Recherche de la Faculté des Sciences et Techniques de Béni-Mellal pour leur solidarité et l'ambiance de travail qu'ils ont su créer et à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué dans la réalisation de ce travail.

AVANT PROPOS

- Nom et Prénom de l'auteur de la thèse : LOUARAYCHI Abdellatif
- Intitulé de la thèse : *Etude Numérique et Analytique des Transferts Thermiques par Convection Mixte dans des Fluides Newtoniens et non-Newtoniens confinés.*
- Nom et Prénom du directeur de la thèse : LAMSAADI Mohamed (Professeur à la Faculté Polydisciplinaire de Béni-Mellal)
- Lieu de réalisation du travail : Laboratoire de Modélisation des Ecoulements et des Transferts (LAMET), à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni-Mellal.

PUBLICATIONS

- **A. Louaraychi**, M. Lamsaadi, M. Naïmi, H. El Harfi, M. Kaddiri, A. Raji, M. Hasnaoui, Mixed Convection Heat Transfer Correlations in Shallow Rectangular Cavities with Single and Double-Lid Driven Boundaries, International Journal of Heat and Mass Transfer 132 (2019) 394–406.
- **A. Louaraychi**, M. Lamsaadi, H. El Harfi, M. Kaddiri and M. Naïmi determination of the parameters controlling mixed convection in double lid driven shallow rectangular cavity uniformly heated, International Journal of Engineering & Technology, 7 (4.32) (2018) 70-74.
DOI:10.14419/ijet.v7i4.32.23249
- **Abdellatif LOUARAYCHI**, Mohamed LAMSAADI, Mohamed NAÏMI, Hassan EL HARFI, Mourad KADDIRI, Étude de la convection mixte dans une cavité rectangulaire horizontale chauffée latéralement, Nature & Technology Journal. Vol. A : Fundamentals and Engineering Sciences, 17 (2017) 12-16.
- **A. LOUARAYCHI**, M. LAMSAADI, M. HASNAOUI, Combined convection heat transfer correlations of non-Newtonian power-law fluids confined in double-lid driven shallow rectangular enclosure, soumis pour publication dans Heat and Mass Transfer.

- K. BIHICHE, M. LAMSAADI, M. NAÏMI, H.ELHARFI, M. KADDIRI, A. LOUARAYCHI, Thermosolutal bifurcation phenomena in a rectangular enclosure filled with non –Newtonian fluids, Revue de l’Entrepreneuriat et de l’Innovation, Volume II N° 6, 2018.

COMMUNICATIONS

- Première congrès national en physique fondamentale et ses applications 2019 (1CNPF’19), 19-20 Avril 2019, Beni Mellal, Maroc
- Première rencontre sur la recherche et l’innovation, 10-11 Mai 2018, Beni Mellal, Maroc.
- International Conference on Communication, Management and Information Technology (ICCMIT 2018), 02-04 Avril 2018, Madrid, Espagne.
- International Congress of Environmental Engineering and Renewable Energy ICEERE 2017, 10-11 Mai 2017, El Jadida, Maroc.
- 13^{ème} Congrès de Mécanique organisé par l’université Moulay Ismail et la Société Marocaine des Sciences Mécaniques, 11-14 Avril 2017, Meknès, Maroc.
- Forum international sur les changements climatiques organisé par ATLAS COP le 18 &19 Octobre 2016, Beni Mellal, Maroc.
- Congrès international de thermique organisée par l’association marocaine de thermique le 19-20 Avril 2016, Meknès, Maroc.

Résumé :

La convection mixte dans une cavité rectangulaire, confinant des fluides Newtoniens et non-Newtoniens de type Ostwald-De Waele et chauffée à l'aide d'un flux de chaleur uniforme, est étudiée analytiquement et numériquement. Les paramètres de l'étude sont :

- le rapport de forme, $A = 24$, caractéristique géométrique ;
- l'indice de comportement, n , caractéristique rhéologique ;
- le nombre de Peclet, Pe , caractérisant la convection forcée ;
- le nombre de Rayleigh, Ra , caractérisant les effets thermo-gravitaires dans la convection naturelle.

Les effets de ces paramètres sur les caractéristiques d'écoulement et de transfert thermique sont analysés, pour le cas des fluides Newtoniens confinés dans une cavité doublement et simplement entraînée et pour le cas des fluides non Newtoniens confinés dans une cavité doublement entraînée. Dans la limite des variations des paramètres gouvernants dans leurs gammes considérées, les résultats analytiques et numériques sont en bon accord. D'autre part, les zones caractérisant la dominance des convections naturelle et forcée ainsi que la concurrence des deux phénomènes (convection mixte) sont délimitées. Dans tels cas étudiés, il a été trouvé que la transition d'un régime dominé à un autre dépend du rapport Ra/Pe^{2+n} . Ce dernier est le paramètre de la convection mixte qui est trouvé à être la clé pour délimiter les trois régimes d'écoulement convectif, où les limites de ces régimes s'avèrent fortement dépendantes des conditions aux limites cinématiques horizontales (cavité simplement ou doublement entraînée) et de l'indice de comportement. Enfin, les critères suivants :

$$0.01612 < \frac{Ra}{Pe^3} < 1156.2824$$

et

$$(0.4214 n - 0.0639)^{\frac{5}{4}+n} < \frac{Ra}{Pe^{2+n}} < (22.635 n - 1.7535)^{2+n}$$

sont établis pour définir le régime de convection mixte pour une cavité simplement entraînée confinant un fluide Newtonien et celle doublement entraînée confinant des fluides non Newtoniens, respectivement. En dehors des gammes ci-dessus, l'effet de la convection naturelle/(forcée) est dominant pour des valeurs supérieures/(inférieures) du paramètre Ra/Pe^{2+n} .

Mots clés : Convection mixte, Fluides non-Newtoniens, Cavité rectangulaire allongée, Ecoulement parallèle, Méthode des volumes finis, Transfert de chaleur.

Abstract:

Mixed convection inside a rectangular cavity, confining non-Newtonians Ostwald-de Waele's fluids and heated by uniform heat flux, is studied analytically and numerically. The studied parameters are:

- the aspect ratio, $A = 24$, as a geometrical characteristic ;
- the behavior index, n , as a rheological characteristic ;
- the Peclet number, Pe , characterizing forced convection ;
- the Rayleigh number, Ra , characterizing the thermogravitational effects within natural convection.

The effects of these parameters on the flow and heat transfer characteristics are analyzed, for the case of Newtonian fluids confined in a single and double-lid driven cavity and for the case of non-Newtonian fluids confined in a double-lid driven cavity. In the limit of variations of the governing parameters in their considered ranges, the analytical and numerical results are in good agreement. On other hand, the zones characterizing the dominance of natural and forced convections as well as when the two phenomena compete (mixed convection) are delineated. In such studied cases, it is found that the transition from one dominated regime to another depends on the ratio Ra/Pe^{2+n} . The latter is the parameter of mixed convection which is found to be the key for delineating the three convective flow regimes, where the limits of such regimes are found to be strongly dependent on the horizontal kinematic boundary conditions (single or double-lid driven cavity) and behavior index. Finally, the following criteria :

$$0.01612 < \frac{Ra}{Pe^3} < 1156.2824$$

and

$$(0.4214 n - 0.0639)^{\frac{5}{4}+n} < \frac{Ra}{Pe^{2+n}} < (22.635 n - 1.7535)^{2+n}$$

are established to define the mixed convection regime for single-lid driven cavity confining a Newtonian fluid and double-lid driven one confining non-Newtonian fluids, respectively. Outside the above ranges, the effect of natural/ (forced) convection is dominant for higher/ (lower) values of the parameter Ra/Pe^{2+n} .

Keywords: Mixed convection, Non-Newtonian fluids, Shallow rectangular cavity, Parallel flow, Finite volumes method, Heat transfer.

TABLE DES MATIERES

NOMENCLATURE

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE 1 : REVUE DE LA LITTERATURE.....	4
1.1. Introduction.....	4
1.2. Convection mixte.....	4
1.3. Contextes naturel et industriel.....	5
1.4. Travaux antérieurs sur la convection mixte dans des fluides Newtoniens.....	6
1.5. Travaux antérieurs sur la convection mixte dans des fluides non- Newtoniens.....	8
1.6. Conclusion.....	11
CHAPITRE 2:CHOIX D'UN MODELE RHEOLOGIQUE ET FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME	12
2.1. Choix d'un modèle rhéologique	12
2.1.1. Introduction.....	12
2.1.2. Principes de formulation d'une loi de comportement.....	12
2.1.2.1. <i>Principe du déterminisme ou de causalité.....</i>	12
2.1.2.2. <i>Principe de localisation spatiale.....</i>	12
2.1.2.3. <i>Principe d'indifférence matérielle.....</i>	12
2.1.2.4. <i>Principe d'homogénéité.....</i>	12
2.1.2.5. <i>Principe d'isotropie.....</i>	13
2.1.3. Formulation d'une loi de comportement : équation constitutive.....	13

2.1.4. Fluides non-Newtoniens à comportement indépendant du temps et sans mémoire (fluides visco-inélastiques).....	14
2.1.4.1. <i>Comportement pseudo-plastique ou rhéofluidifiant (shear-thinning).....</i>	15
2.1.4.1.1. <i>Description phénoménologique.....</i>	15
2.1.4.1.2. <i>Loi de comportement en cisaillement simple.....</i>	15
2.1.4.1.3. <i>Loi de comportement en cisaillement composé.....</i>	16
2.1.4.2. <i>Comportement dilatant ou rhéoépaississant (shear-thickening).....</i>	16
2.2. Formulation mathématique du problème	17
2.2.1. Introduction.....	17
2.2.2. Equations générales.....	17
2.2.3. Géométrie considérée.....	18
2.2.4. Conditions aux limites.....	19
2.2.4.1. <i>Conditions aux limites thermiques.....</i>	19
2.2.4.2. <i>Conditions aux limites cinématiques.....</i>	20
2.2.5. Hypothèses simplificatrices.....	20
2.2.6. Adimensionnalisation.....	21
2.2.6.1. <i>Equations gouvernantes adimensionnelles.....</i>	21
2.2.6.2. <i>Conditions aux limites.....</i>	22
2.2.7. Transferts de chaleur.....	23
2.3. Conclusion.....	24
CHAPITRE 3 : METHODES DE RESOLUTION.....	25
3.1. Approche numérique et procédure de résolution	25
3.1.1. Introduction.....	25
3.1.2. Discrétisation des équations gouvernantes : Méthode des volumes finis.....	26
3.1.3. Résolution des équations gouvernantes.....	29
3.1.3.1. <i>Algorithme SIMPLE (semi implicit-method for pressure-linked).....</i>	29
3.1.3.2. <i>Résumé de l'algorithme SIMPLE.....</i>	31

3.1.3.3. <i>Algorithme SIMPLER (SIMPLE-Revised)</i>	32
3.1.3.4. <i>Présentation matricielle des équations gouvernantes</i>	32
3.1.4. Traitement des conditions aux limites	33
3.1.4.1. <i>Frontière avec vitesse spécifiée</i>	33
3.1.4.2. <i>Frontière avec température spécifiée</i>	34
3.1.4.3. <i>Frontière avec flux spécifié</i>	34
3.2. Approche analytique	34
3.2.1. Introduction	34
3.2.2. Approximation de l'écoulement parallèle	35
3.2.2.1. <i>Equations gouvernantes approximées</i>	35
3.2.2.2. <i>Solution analytique : Cas d'un fluide Newtonien</i>	36
3.2.2.3. <i>Solution analytique : Cas d'un fluide non-Newtonien</i>	37
3.2.2.4. <i>Evaluation des constantes y_1, K et C</i>	40
3.2.2.5. <i>Cas particuliers : Convections naturelle et forcée pures</i>	44
3.2.3. Analyse d'échelle	46
3.3. Conclusion	47

CHAPITRE 4 : Corrélacion de Transfer de chaleur par convection mixte dans des cavités rectangulaires allongées entraînées et chauffées latéralement : Cas d'un fluide Newtonien	48
4.1. Introduction	48
4.2. Choix du maillage	48
4.3. Détermination de la valeur de A satisfaisant l'approximation du grand rapport d'aspect	49
4.4. Détermination des paramètres contrôlant la convection mixte	51
4.5. Structures dynamique et thermique	53
4.6. Vitesse horizontale et distribution de la température le long de la section centrale verticale	56
4.7. Taux de Transfer de chaleur	59
4.8. Conclusion	62

CHAPITRE 5 : Corrélation de Transfer de chaleur par convection mixte dans des cavités rectangulaires allongées entraînées et chauffées latéralement : cas des fluides non-Newtoniens	64
5.1. Introduction.....	64
5.2. Détermination des paramètres contrôlant la convection mixte.....	64
5.3. Structures dynamique et thermique.....	67
5.4. Vitesse horizontale et distribution de la température le long de la section centrale verticale.....	69
5.5. Intensité d'écoulement et taux de transfert de chaleur.....	73
5.6. Conclusion.....	76
 CONCLUSION GENERALE.....	 78
 REFERENCES.....	 80

NOMENCLATURE

A	rapport de forme de la cavité, L'/H' , expression (2.30)
C	gradient horizontal de température adimensionnel, $(\partial T / \partial x)_{x=A/2}$
C_p	capacité calorifique massique à pression constante, J/(Kg K)
g	accélération gravitationnelle, m/s^2
\Rightarrow I	tenseur unité
H'	hauteur de la cavité, m
k	indice de consistance pour un fluide d'Ostwald-De Waele, $Pa s^n$
L'	longueur de la cavité, m
n	indice de comportement ou de structure pour un fluide d'Ostwald-De Waele
Nu	nombre de Nusselt local, expressions (2.32), (2.33).
\overline{Nu}	nombre de Nusselt moyen, expression (2.34)
Pe	nombre de Peclet, expression (2.31)
Pr	nombre de Prandtl généralisé, expression (2.25)
q'	densité de flux de chaleur constante W/m^2
Ra	nombre de Rayleigh généralisé, expression (2.26)
T	température adimensionnelle, $(T' - T'_c)/\Delta T^*$
T'_c	température de référence
(u, v)	composantes de vitesse adimensionnelles, $(u', v')/(\alpha/H')$
(x, y)	coordonnées adimensionnelles, $(x', y')/H'$

Lettres grecques

α	diffusivité thermique du fluide, m^2/s
β	coefficient d'expansion volumétrique thermique à pression constante, $1/K$
ΔT^*	température caractéristique, $q'H'/\lambda$, K
\Rightarrow $\dot{\gamma}$	tenseur des taux de cisaillement ou vitesses de déformation, s^{-1}
λ	conductivité thermique du fluide, $W/(m K)$
μ	viscosité dynamique Newtonienne, Pa s
μ_a	viscosité apparente adimensionnelle pour un fluide d'Ostwald-De Waele, expression (2.24)

$\overset{\Rightarrow}{\Sigma}$	tenseur des contraintes générales, Pa
$\overset{\Rightarrow}{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses, Pa
Ψ	fonction de courant adimensionnelle, Ψ'/α
ρ	masse volumique du fluide, Kg/m^3

Exposants

' variables dimensionnelles

Indices

cr valeur critique

c valeur relative au centre de la cavité $(x, y) = \left(\frac{A}{2}, \frac{1}{2}\right)$

max valeur maximale

p paroi

∞ valeur asymptotique

Symboles mathématiques

: produit dyadique

\otimes produit tensoriel

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Fabrication du verre.....	5
Figure 1.2 : Dynamique des lacs.....	5
Figure 2.1 : Modèle physique et système de coordonnées.....	19
Figure 3.1 : Volume de contrôle.....	26
Figure 3.2 : Grille décalée vers la droite pour u	30
Figure 3.3 : Grille décalée vers le haut pour v	30
Figure 3.4 : Vitesse aux frontières.....	34
Figure 3.5 : Limite de l'apparition de y_1 pour différentes valeurs de n	40
Figure 3.6 : Dépendance de y_1 de Ra et Pe pour $n = 0.6$	42
Figure 3.7 : Dépendance de y_1 de Ra et Pe pour $n = 1$	43
Figure 3.8 : Dépendance de y_1 de Ra et Pe pour $n = 1.4$	43
Figure 3.9 : Comparaison entre les solutions de l'équation (5.35)	45
Figure 4.1 : Évolution de \overline{Nu} avec A pour une cavité simplement entraînée : $Ra = 10^4$ et diverse valeurs de Pe .	50
Figure 4.2 : Évolution de \overline{Nu} avec A pour une cavité doublement entraînée : $Ra = 10^4$ et diverse valeurs de Pe .	50
Figure 4.3 : Diagramme caractérisant les différents régimes convectifs	52
Figure 4.4 : Lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour $A = 24$, $Ra = 10^4$ et différentes valeurs de Pe : (a) $Pe = 0,1$, (b) $Pe = 0,5$, (c) $Pe = 5$, (d) $Pe = 25$, (e) $Pe = 50$, (f) $Pe = 100$ et (g) $Pe = 150$: Cas d'une cavité simplement entraînée	54
Figure 4.5 : Lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour $A = 24$, $Ra = 10^4$ et différentes valeurs de Pe : (a) $Pe = 0,1$, (b) $Pe = 0,5$, (c) $Pe = 5$, (d) $Pe = 25$, (e) $Pe = 50$, (f) $Pe = 100$ et (g) $Pe = 150$: Cas d'une cavité doublement entraînée	54
Figure 4.6 : lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour la convection naturelle pure, $Ra = 10^4$.	55
Figure 4.7 : lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour la convection forcée pure dans une cavité simplement entraînée: (a) $Pe = 100$ et (b) $Pe = 150$.	55
Figure 4.8 : lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour la convection forcée pure dans une cavité doublement entraînée: (a) $Pe = 100$ et (b) $Pe = 150$.	56
Figure 4.9 : Profils horizontaux de vitesse (a) et de température (b) à mi-longueur de la cavité, le long de la coordonnée verticale dans une cavité simplement entraînée pour $Pe = 20$ et différentes valeurs de Ra .	57

Figure 4.10: Profils horizontaux de vitesse (a) et de température (b) à mi-longueur de la cavité, le long de la coordonnée verticale dans une cavité doublement entraînée pour $Pe = 20$ et différentes valeurs de Ra .	58
Figure 4.11: Evolution du nombre de Nusselt moyen avec Pe pour différentes valeurs de Ra Cavité simplement ou doublement entraînée	61
Figure 4.12 : Evolution du nombre de Nusselt moyen avec Ra pour différentes valeurs de Pe Cavité simplement ou doublement entraînée	62
Figure 5.1 : Diagramme caractérisant les différents régimes de convection pour différentes valeurs de n	65
Figure 5.2 : Lignes de courant (gauche) et isothermes (droite) pour $A = 24$, $Ra = 10^4$, $n = 0,6$ et différentes valeurs de Pe : (a) $Pe = 0,1$, (b) $Pe = 1$, (c) $Pe = 5$, (d) $Pe = 25$, (e) $Pe = 50$, (f) $Pe = 100$ et (g) $Pe = 150$.	68
Figure 5.3 : Lignes de courant (gauche) et isothermes (droite) pour $A = 24$, $Ra = 10^4$, $n = 1,0$ et différentes valeurs de Pe : (a) $Pe = 0,1$, (b) $Pe = 1$, (c) $Pe = 5$, (d) $Pe = 25$, (e) $Pe = 50$, (f) $Pe = 100$ et (g) $Pe = 150$	68
Figure 5.4 : Lignes d'écoulement (gauche) et isothermes (droite) pour $A = 24$, $Ra = 10^4$, $n = 1,4$ et différentes valeurs de Pe : (a) $Pe = 0,1$, (b) $Pe = 1$, (c) $Pe = 5$, (d) $Pe = 25$, (e) $Pe = 50$, (f) $Pe = 100$ et (g) $Pe = 150$.	69
Figure 5.5 : Profils horizontaux de vitesse (a) et de température (b) à mi-longueur de la cavité, le long de la coordonnée verticale pour $n=0.6$, $Pe=20$ et différentes valeurs de Ra .	70
Figure 5.6 : Profils horizontaux de vitesse (a) et de température (b) à mi-longueur de la cavité, le long de la coordonnée verticale pour $n=1$, $Pe=20$ et différentes valeurs de Ra .	71
Figure 5.7 : Profils horizontaux de vitesse (a) et de température (b) à mi-longueur de la cavité, le long de la coordonnée verticale pour $n=1.4$, $Pe=20$ et différentes valeurs de Ra .	72
Figure 5.8 : Évolution de l'intensité de l'écoulement (a) et du nombre de Nusselt moyen (b) avec Pe pour différentes valeurs de Ra et n	74
Figure 5.9 : Évolution de l'intensité de l'écoulement (a) et du nombre moyen de Nusselt (b) avec Ra pour différentes valeurs de Pe et n	75

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 : Identification de φ , Γ et S_φ	27
Tableau 3.2 : Expression de la fonction $A(\text{Pe}_i)$	29
Tableau 3.3. Dépendance de y_1 , A_n et B_n de n pour la convection naturelle pure.....	44
Tableau 4.1 : tests de convergence de \overline{Nu} pour $A=24$, $Ra=10^4$ et différentes valeurs de Pe pour une cavité simplement entraînée ($a=0$).....	48
Tableau 4.2 : tests de convergence de \overline{Nu} pour $A=24$, $Ra=10^4$ et différentes valeurs de Pe pour une cavité doublement entraînée ($a=1$).....	49
Tableau 4.3: valeurs de η_n et η_f	53
Tableau 4.4 : valeurs numériques de \overline{Nu} pour $A=24$, $Ra=10^4$ et différentes valeurs de Pe	60
Tableau 5.1: valeurs de η_n et η_f	66

INTRODUCTION GENERALE

L'énergie est actuellement un enjeu majeur pour notre civilisation. Le problème réside dans l'épuisement des ressources naturelles et l'augmentation de la pollution atmosphérique. Face à ces enjeux énergétiques et environnementaux, le défi technologique réside dans le développement de nouveaux processus pour une meilleure gestion de l'énergie, pour palier d'une part à l'épuisement des sources naturelles et d'autre part à l'utilisation croissante de systèmes sollicitant un apport d'énergie électrique comme les ordinateurs portables, téléphones portables, les véhicules électriques, etc. Les transferts de chaleur constituent la base de nombreux de ces processus industriels qui sont présents dans notre vie quotidienne. L'intensification de ces échanges et l'amélioration du rendement sont devenues aujourd'hui une problématique majeure dans le monde industriel.

Le transfert de chaleur dans les fluides Newtoniens confinés a suscité un très grand nombre de travaux au cours de dernières décennies. En revanche, peu de travaux concernent les fluides de comportement rhéologique non-Newtoniens dans les milieux confinés. Cette situation n'est pas due au manque d'applications pratiques puisque la majorité des fluides des industries sont pseudo-plastiques (dit aussi rhéofluidifiants, la viscosité diminue lorsque le gradient de vitesse augmente) ou dilatants (dit aussi rhéoépaississants, la viscosité augmente lorsque le taux de cisaillement augmente). Elle s'explique par la difficulté à appréhender physiquement les mouvements convectifs et à les modéliser mathématiquement. En effet, il est difficile de séparer l'influence des effets purement thermique de celle des effets rhéologique.

Bien que le transfert de chaleur peut se manifester sous différents modes (rayonnement, conduction ou convection), c'est ce dernier qui est le plus souvent visé dans des applications bien spécifiques telles que le refroidissement des composants électroniques, les radiateurs, les échangeurs de chaleurs, etc.

D'un point de vue scientifique, le modèle de la cavité entraînée (convection mixte) est attrayant car il combine convection forcée et naturelle, et il serait intéressant de l'aborder pour voir de près le comportement thermo-hydraulique de la situation, en présence des deux phénomènes susmentionnés. Aussi, une telle configuration géométrique présente-t-elle la particularité d'intervenir dans des applications industrielles à forts enjeux économiques (le refroidissement des composantes électroniques, les pertes de chaleur dans les collecteurs

solaires, la ventilation des locaux, transformation des aliments, production de verre flotté, thermo-hydraulique des réacteurs nucléaires, dynamique des lacs, croissance cristalline, technologies de lubrification, etc.).

La majorité des recherches concernant les cavités rectangulaires portaient sur les conditions aux limites de Dirichlet (température imposée sur les parois) ou sur la convection naturelle. La présente thèse est, donc, dédiée à l'étude de la convection mixte dans une enceinte rectangulaire allongée entraînée et remplie par des fluides Newtoniens et non-Newtoniens, dont le comportement rhéologique est de type Ostwald-De Waele. La cavité est soumise à des conditions aux limites thermiques de type Neumann (flux de chaleur uniforme imposé sur les parois verticales rigides) et dont les parois horizontales sont adiabatiques et mobiles avec une vitesse constante. Bien évidemment, et sans aucun doute, la configuration géométrique, les conditions aux limites cinématique et thermique et aussi les modèles rhéologiques adoptés peuvent avoir des retombées spécifiques sur la convection thermique en général et on peut s'attendre à des résultats nouveaux les distinguant de ce qui est plus ou moins bien connu dans le domaine. Les investigations portent essentiellement sur les effets des paramètres gouvernant le problème sur les champs dynamique et thermique ainsi que sur les transferts de chaleur conséquents.

En général, les écoulements des fluides sont régis par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires fortement couplées qui, dans la plupart des cas, font que la solution n'est possible que par voie numérique. Cependant, il existe certaines situations (très rares), liées aux conditions aux limites thermiques et cinématiques et à la nature du fluide, où des solutions analytiques sont possibles. Ces dernières sont importantes car, même si elles s'appliquent à des cas idéalisés, elles aident énormément à la compréhension des phénomènes impliqués dans ce type de problème. Par conséquent, des méthodes numériques et analytiques sont utilisées, dans cette investigation, pour résoudre les problèmes envisagés.

Ce mémoire de thèse comporte cinq chapitres. Le premier chapitre est consacré d'une part, à rappeler les notions fondamentales de la convection mixte en donnant quelques exemples de ses applications naturelles et industrielles. Et d'autre part, à une étude bibliographique des travaux antérieurs focalisés sur la convection mixte dans les fluides Newtoniens et les fluides non-Newtoniens.

Dans la première partie du deuxième chapitre, le comportement rhéologique des fluides non-Newtoniens (comme un cas général) a été décrit de façon succincte. L'accent a été mis principalement sur la loi de puissance. La seconde partie est dévouée à la formulation

mathématique des fameuses équations de Navier et Stokes régissant le phénomène de la convection mixte pour les fluides non-Newtoniens de type loi de puissance dans la géométrie considérée. Ainsi que les hypothèses simplificatrices et la description des conditions aux limites liées à la résolution du problème sont exposées.

La première partie du troisième chapitre est dédiée à la description de la méthode de modélisation et simulation utilisée dans ce travail. L'historique de développement de la méthode des volumes finis et les principes de base ainsi que les différentes approches et processus nécessaires utilisées dans cette méthode sont exposés. On présente par la suite l'algorithme SIMPLER comme la procédure numérique mise en jeu dans ce travail. Tandis que l'approximation d'écoulement parallèle, comme approche analytique, est détaillée dans la seconde partie du chapitre.

Les effets des paramètres de contrôle, la comparaison entre les résultats numériques et analytiques et des corrélations de transfert de chaleur par convection mixte, sont présentés dans les chapitres quatre (pour le cas d'une cavité simplement ou doublement entraînée et remplie d'un fluide Newtonien) et cinq (pour le cas d'une cavité doublement entraînée et remplie par des fluides non-Newtoniens).

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTERATURE

1.1. Introduction

Le terme convection est utilisé pour définir les mouvements dus à l'agitation thermique engendrant des différences de densités entre les molécules d'un fluide. Un fluide est le terme désignant un liquide ou un gaz : corps pur ou mélange dont les molécules ont assez de liberté pour se mouvoir les unes par rapport aux autres. Le phénomène de la convection est un processus physique de transmission de la chaleur qui s'appuie sur un milieu matériel avec un mouvement de matière. On distingue trois sortes de convection : naturelle, forcée et mixte. Ce phénomène a connu dans ces dernières années un accroissement notable des activités de recherche tant analytique que numérique dans différentes configurations géométriques.

Les résultats expérimentaux de la convection mixte et de transfert de chaleur dans les cavités sont très limités à cause de la difficulté à mener des mesures. La précision des résultats expérimentaux est limitée par les faibles vitesses et par le fait que l'écoulement et le transfert de chaleur dans une cavité fermée sont très sensibles aux conditions aux limites. En effet, il est difficile de maintenir des parois parfaitement adiabatiques dans une cavité fermée remplie par un fluide. Ces difficultés expliquent le nombre limité d'études expérimentales concernant la convection mixte dans les cavités fermées remplies par un fluide. Seuls le nombre de Nusselt moyen ou la variation temporelle de la température sont disponibles dans la littérature. Ces résultats ont été corrélés en fonction des nombres de Grashof ou de Rayleigh.

1.2. Convection mixte

La convection est dite mixte lorsque les deux types (convection naturelle et convection forcée) sont mis en jeu. Il y a une cause externe au mouvement du fluide mais insuffisante pour que la poussée d'Archimède puisse être négligeable. Le flux transféré est toujours très inférieur à la somme des flux transférés par convection forcée et par convection naturelle. Comme exemple d'application, on peut citer les échangeurs de chaleur destinés au chauffage ou au refroidissement des fluides. La convection mixte peut être aidée (favorable) lorsque les effets de la convection naturelle et de la convection forcée sont dans la même direction. Elle est dite contrariée (ou défavorable) quand ces derniers sont de sens opposés. Pour caractériser la convection mixte, on utilise le nombre de Richardson modifié, $Ri = Gr/Re^n$ (appelé aussi

paramètre de convection mixte, où n dépend des caractéristiques géométriques et des conditions physiques), qui compare les importances relatives des convections naturelle et forcée. Dès lors, trois situations peuvent être envisagées : quand $Ri \gg 1$, c'est la convection naturelle qui domine, quand $Ri \ll 1$, c'est celle forcée qui l'emporte et quand $Ri = 1$, les deux rivalisent.

1.3. Contextes naturel et industriel

Il existe une réelle demande dans le monde industriel pour développer de nouvelles stratégies permettant d'améliorer le comportement thermique des fluides utilisés. La convection mixte dans des milieux confinés est rencontrée dans beaucoup d'applications naturelles et industrielles comme le refroidissement des composants électroniques, le refroidissement des réacteurs nucléaires (Y. Zvirin, 1981), la ventilation des locaux, les chaudières à énergie solaire (H. Tabor, 1984), les échangeurs de chaleur compacts (M. G. parent et al, 1990), thermosiphons (M. Bernier et al, 1992), fabrication de verre flotté, figure 1, (L.A.B. Pilkington, 1969), dynamique des lacs, figure 2, (J. Imberger et al, 1982), technologies de lubrification (R.K. Tiwari, 2007), transformation des aliments, hydraulique thermique des réacteurs nucléaires (F.J.K. Ideriah, 1980), croissance cristalline, etc.

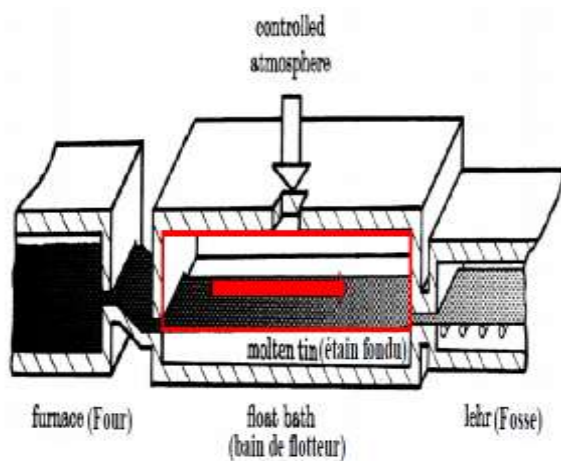


Figure 1.1 : Fabrication du verre

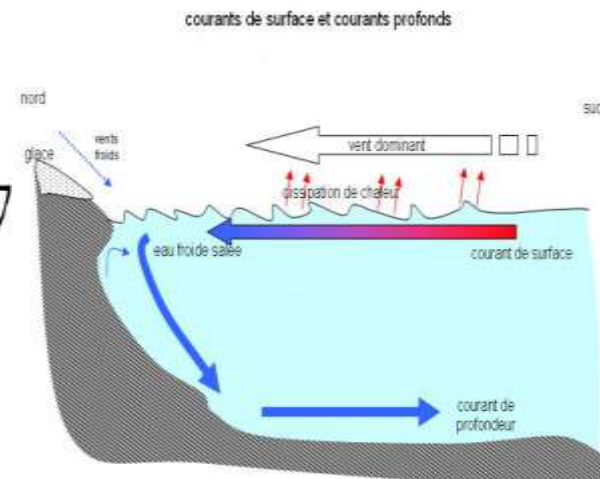


Figure 2.2 : Dynamique des lacs

Ces nombreux domaines d'application justifient notre choix de ce thème et aussi la grande attention qui été lui accordé par la communauté scientifique. D'autre part, la compréhension des phénomènes physiques inhérents à l'interaction de la convection naturelle et forcée constitue en soi un objectif très important.

Après avoir défini le phénomène convectif et son rôle crucial aussi bien dans la nature que dans la pratique industrielle, on propose une revue bibliographique de quelques travaux antérieurs relatifs aux fluides Newtoniens et aux autres non-Newtoniens.

1.4. Travaux antérieurs sur la convection mixte dans les fluides Newtoniens

La plupart des travaux concernant des fluides Newtoniens sont réalisés dans des cavités carrées. Ceux-ci peuvent être classés en deux types en fonction du nombre des parois mobiles. Dans le premier type, une seule paroi horizontale (T. Basak et al, 2009, S. Sivasankaran et al, 2010, V. Sivakumar et al, 2010, M.A. Taher et al, 2013, K. Yapici et al, 2015, K.M. Khanafer et al, 2007) ou verticale (A.K. Hussein et al, 2010) est en mouvement uniforme (T. Basak et al, 2009, S. Sivasankaran et al, 2010, V. Sivakumar et al, 2010, M.A. Taher et al, 2013, K. Yapici et al, 2015, A.K. Hussein et al, 2010) ou en mouvement non-uniforme (K.M. Khanafer et al, 2007, H.T. Rossby, 1998) dans son plan, tandis que les parois horizontales ou verticales sont différentiellement chauffées par une température constante (V. Sivakumar et al, 2010, M.A. Taher et al, 2013, K. Yapici et al, 2015, K.M. Khanafer et al, 2007, A.K. Hussein et al, 2010) ou par une température variable (T. Basak et al, 2009, S. Sivasankaran et al, 2010). Dans le second type, les deux parois horizontales (A.J. Chamkha et al, 2012, M.A. Ismael et al, 2014, M.A. Sheremet et al, 2014) ou verticales (H.F. Oztop et al, 2004, R.K. Tiwari et al, 2007) sont en mouvement avec une vitesse uniforme dans leurs plans et sont maintenues à des températures constantes et différentes, tandis que les autres parois sont adiabatiques. Dans les travaux cités précédemment, la convection mixte a été analysée numériquement pour différentes valeurs de Pr , Re et Ri ou Gr . Ces études ont été étendues à des cavités cubiques (N. Ouertatani et al, 2009, Nasreddine Benkacem et al, 2015) et à des cavités carrées inclinées simplement (E. Abu-Nada et al, 2010, V. Sivakumar et al, 2014, N.A. Bakar et al, 2017) et doublement (M. Alinia et al, 2011, M.R. Heydari et al, 2014) entraînées.

En revanche, peu d'intérêt a été accordé aux cavités rectangulaires, comme dans le cas présent, qui peuvent révéler des résultats différents de ce qui a été rapporté dans l'étude menée dans le passé par D.E. Cormack et al (1974) et dans le travail de M. Lamsaadi et al (2006), où toutes les parois sont immobiles. En effet, ces auteurs ont observé un parallélisme des écoulements et une stratification thermique, à partir d'une valeur critique du rapport de forme. Toutefois, l'effet du nombre de Prandtl s'est révélé négligeable en raison de la forte domination de la diffusion de l'énergie cinétique sur la diffusion thermique. En revanche, dans l'étude de A. Karimipour et al. (2013), le paramètre Pr semble affecter de façon notable le

transfert de chaleur par convection mixte dans une cavité rectangulaire inclinée à parois mobiles, dont les parois transversales sont isolées thermiquement, tandis que celles longitudinales sont considérées comme isothermes. En plus des travaux analytiques et numériques, des recherches expérimentales ont été menées. À cet égard, il est intéressant de rapporter à l'étude de H.T. Rossby (1965), où il a été constaté qu'une distribution linéaire de la température générera une seule cellule convective de structure asymétrique marquée.

Par ailleurs, la majorité des recherches sur les cavités rectangulaires ont été menées avec des conditions aux limites de Dirichlet pour la température. Il convient ici de mentionner un travail de Y.S. Prasad et al (2007), où la convection mixte à l'intérieur d'une cavité rectangulaire a été étudiée numériquement à l'aide de la méthode des volumes finis pour $Re = 100$, $Gr = 0, \pm 10^4$ et $\pm 10^6$, $A = 0.5, 1$ et 2 ($A = \text{hauteur/largeur}$) et $Pr = 1$. Les deux parois verticales sont maintenues à une température froide, $T = 0$. Dans un cas, la paroi supérieure est maintenue à une température chaude, $T = 1$, et celle inférieure est soumise à une température froide, $T = 0$. Dans l'autre cas, la paroi supérieure est maintenue à une température froide, $T = 0$, et celle inférieure est soumise à une température chaude, $T = 1$. Ces auteurs ont observé une forte convection pour $Gr < 0$ lorsque $|Gr|$ augmente, pour $A = 0.5$ et 1 . Cependant, pour $A = 2$, l'écoulement subit une bifurcation de Hopf pour $Gr \leq -10^5$ et l'écoulement ne reste plus stable et devient transitoire. Pour cette valeur de Gr , les auteurs ont obtenu une oscillation périodique de l'énergie cinétique totale, qui ne reste pas périodique lorsque Gr tend vers -10^6 . Pour ce type de configuration et de conditions aux limites imposées par ces auteurs, des comportements intéressants de l'écoulement et des champs thermiques avec une inclinaison croissante ont été observés par M.A.R. Sharif (2007), dans le cas de cavités entraînées peu profondes et inclinées, avec un couvercle supérieur chaud en mouvement et un fond refroidi. Par conséquent, pour $A = 10$ (largeur/hauteur) et $Pr = 6$, le nombre de Nusselt local au niveau du couvercle mobile chauffé commence par une valeur élevée et diminue rapidement et de façon monotone jusqu'à une petite valeur vers le côté droit. Cependant, au niveau de la paroi froide, ce paramètre présente un comportement oscillatoire près du côté droit en raison de la présence d'une bulle de séparation à la surface froide à cet endroit. Dans cette étude, il a été conclu que le nombre moyen de Nusselt augmente légèrement avec l'inclinaison de la cavité pour une convection forcée dominante ($Ri = 0.1$), alors qu'il augmente beaucoup plus rapidement avec cette inclinaison lorsque la domination revient à la convection naturelle ($Ri = 10$).

1.5. Travaux antérieurs sur la convection mixte dans les fluides non-Newtoniens

Une revue ciblée, approfondie et critique des travaux réalisés sur la convection mixte dans les fluides non-Newtoniens montre que le présent travail n'a pas été publié auparavant. Nous en citons quelques-uns à titre d'exemple.

L'étude de G.H.R. Kefyati (2017) a été consacrée au nano-fluides à l'intérieur d'une cavité carrée entraînée par la paroi supérieure en utilisant le modèle mathématique de Buongiorno. Le schéma de la méthode de Lattice Boltzmann à différences finies (FDLBM) est utilisé pour obtenir des simulations numériques. Il a été constaté que l'augmentation de l'indice de comportement provoque une augmentation du transfert de chaleur et de masse pour un nombre de Richardson $Ri = 0.001$ et $Ri = 0.01$ et une diminution de ces derniers pour $Ri = 1$. Aussi l'augmentation du nombre de Richardson cause une chute du transfert de chaleur et de masse pour différentes valeurs de l'indice de comportement. Il a aussi observé que l'effet de l'indice de comportement sur le transfert de chaleur et de masse augmente avec la diminution du nombre de Richardson. Aussi que, l'influence de l'indice de comportement sur le transfert de chaleur diminue avec l'augmentation du nombre de rapport de flottabilité et que cet indice a presque le même effet pour différents nombres de Lewis.

Une investigation numérique par la méthode des volumes finis dans une enceinte carrée doublement entraînée, avec un bloc triangulaire chauffé, a été publiée par Manvi Manchanda et al (2018). L'étude a prouvé que le nombre de Richardson a un effet négatif sur les structures de l'écoulement du fluide et de température à l'intérieur de la cavité pour un indice de comportement $n = 0.2$. Avec l'augmentation du blocage, la structure de l'écoulement semble être plus structurée, ayant un effet d'amortissement sur la bifurcation de l'écoulement. Le taux de transfert de chaleur s'améliore en augmentant le comportement d'amincissement par cisaillement pour le blocage $0.1H$. Pour $Ri = 1$, avec l'augmentation du nombre de Reynolds par cinq fois, le taux de transfert de chaleur augmente par trois fois. En ce qui concerne l'indice de comportement, il a été observé que l'augmentation de cet indice provoque une diminution graduelle des valeurs du nombre de Nusselt pour un nombre de Richardson $Ri = 10$ et que l'effet de cet indice sur la cinématique de convection est de nature similaire à celui discuté pour le blocage $0.1H$

Krunal M. Gangawane et al. (2020) ont analysé numériquement, par CFD (Commercial-ANSYS FLUENT 15), l'écoulement et le transfert de chaleur dans une enceinte semi-circulaire dont la paroi supérieure est en mouvement. L'étude a été réalisée pour une gamme des paramètres gouvernants, tels que le nombre de Richardson $0.1 \leq Ri \leq 10$, le

nombre de Prandtl modifié ($1 \leq Pr \leq 100$) et l'indice de loi de puissance non newtonien ($0.5 \leq n \leq 1.5$). Dans le cadre de cette étude, une explication comparative de l'utilisation d'un blocage adiabatique de différentes sections transversales sur les structures dynamiques et thermiques, a été fournie. Le taux de transfert de chaleur se détériore de près de 50% pour une cavité avec des blocs circulaires et carrés, tandis que le bloc triangulaire montre une réduction moyenne de 20% du taux de transfert de chaleur par convection. D'autre part, l'augmentation de l'indice de comportement (de $n = 0.5$ à 1.5) limite le mouvement du fluide initié par la paroi mobile. De plus, cet indice a un effet significatif sur les caractéristiques de l'écoulement à un faible nombre de Richardson.

Jinhu Zhao et al (2017) ont caractérisé la relation constitutive de la viscosité par le modèle de Carreau-Yasuda. L'étude est faite numériquement dans une cavité carrée par la méthode des volumes finis. Ils ont démontré que l'augmentation de l'indice de comportement (n) et l'indice de loi de puissance de la température (m) ont des effets opposés sur la chute de pression et le nombre de Nusselt. C'est-à-dire qu'avec l'augmentation de l'indice de comportement (n), la chute de pression diminue d'abord presque linéairement puis augmente, tandis que le nombre de Nusselt augmente. Par contre avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance de la température (m), la chute de pression augmente et le nombre de Nusselt diminue. Ils ont observé aussi que la température diminue avec l'augmentation de l'indice de comportement (n), mais augmente avec l'indice de loi de puissance de la température (m) et que le nombre de Nusselt moyen augmente lorsque les paramètres du modèle de Carreau-Yasuda augmentent et diminue avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance de la température (m) par un gradient de température décroissant.

Dans une autre étude numérique réalisée par Hussein M. Jassim et al. (2020), les nanoparticules Al_2O_3 sont mises en jeu dans différentes formes géométriques exposées à un champ magnétique. La méthode des éléments finis Galerkin avec l'approche résiduelle pondérée a été utilisée pour résoudre les équations gouvernantes non dimensionnelles. Ils ont trouvé que le champ magnétique a un impact négatif sur l'amélioration du flux de convection forcée à l'intérieur de la cavité. Le nombre de Nusselt moyen augmente en fonction de l'évolution de la valeur de l'indice de comportement indépendamment de la géométrie de la paroi chauffante. La structure d'écoulement peut être contrôlée par la force des champs magnétiques et la géométrie de la forme de la paroi chaude ainsi que le type de nanofluide qui peut être défini par l'indice de comportement et la fraction volumique solide.

Toufik Benmalek et al. (2019) se sont intéressés au fluide de Bingham contenu dans une forme géométrique carrée chauffée par le bas et refroidie par les autres cotés. L'étude est faite numériquement par la méthode des volumes finis. Les résultats indiquent que l'augmentation de la limite d'élasticité diminue le transfert de chaleur et l'écoulement devient plus plat. Ils ont remarqué aussi que le nombre de Nusselt est élevé dans le cas d'un fluide newtonien (nombre de Bingham $Bn = 0$) tandis que des grands nombres de Bingham (fluide non-Newtonien) affaiblissent l'écoulement du fluide et diminuent le transfert de chaleur. Aussi que le transport convectif est dominant lorsque le nombre de Richardson augmente, ce qui entraîne une augmentation du transfert de chaleur dans la cavité pour les fluides Newtoniens et non-Newtoniens.

Saeed Nazari et al. (2019) ont réalisé une simulation numérique par la méthode des volumes finis de la convection mixte à l'intérieur d'une cavité poreuse. L'enceinte est remplie par nanofluides non-Newtoniens eau/ Al_2O_3 et ses deux parois verticales sont mobiles. Les résultats indiquent que les variations de la fraction volumique des nanoparticules, refroidissant le nanofluide, et la pénétrabilité de la direction du fluide (nombre de Darcy) sont des facteurs importants qui influencent le comportement des lignes de courant. Pour un nombre de Richardson, $Ri = 100$, en raison de la similitude de l'écoulement avec le mécanisme de convection naturelle et de la réduction de la quantité de mouvement du fluide causée par la vitesse inférieure du couvercle, les effets du nombre de Darcy sur les profils des lignes de courant sont plus faibles.

Chuo-Jeng Huang et al. (2019) ont étudié numériquement les effets de transfert de chaleur et de masse sur la convection mixte des fluides non-Newtoniens sur un coin vertical (avec un demi-angle Ω) en présence d'effets Soret/Dufour et de génération de chaleur interne. La solution numérique des équations différentielles partielles couplées pour diverses valeurs de différents paramètres est résolue en utilisant le schéma implicite de différences finies appelé méthode de la boîte de Keller (KBM) de Cebeci et Bradshaw. L'étude a montré que l'augmentation de l'exposant de la génération de chaleur interne, λ , renforce la force de flottabilité, ce qui augmente à la fois le nombre de Nusselt local et le nombre de Sherwood local. Aussi que pour $0 \leq \chi < 1$ (χ est le paramètre de convection combinée), les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux diminuent lorsque l'indice de comportement (n) augmente. De plus, les valeurs du nombre de Nusselt local et du nombre de Sherwood local à $\chi = 1$ (convection forcée pure) sont indépendantes de la variation de l'indice de loi de puissance (n).

En présence d'un champ magnétique aligné sur une feuille stratifiée inclinée qui se rétrécit ou s'étire dans un milieu poreux non Darcien, l'écoulement bidimensionnel de la couche limite d'un fluide de Maxwell à convection mixte est analysé par Muhammad Bilal et al. (2020). Le problème est abordé numériquement par la méthode de tir. Les résultats montrent que l'angle d'inclinaison élevé du champ magnétique renforce le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt. Les auteurs ont aussi observé que lorsque l'angle aligné (angle d'inclinaison de la feuille) augmente, la vitesse du fluide diminue. Aussi que lorsque le paramètre de convection mixte δ augmente, le profil de température diminue

1.6. Conclusion

Dans ce chapitre, une revue de la littérature des différents travaux clarifie un ensemble de phénomènes physiques observés dans la convection mixte des fluides Newtoniens et non-Newtoniens est présentée. Au vu des études mentionnées et d'autres non évoquées dans ce chapitre, il paraît que la plupart des travaux effectués sont des investigations numériques et ont concerné des cavités carrées. À notre connaissance, aucun travail n'a été cité dans la littérature spécialisée concernant la convection mixte dans des fluides Newtoniens et non-Newtoniens confinés dans une cavité rectangulaire allongée et soumise à des conditions aux limites de type Neumann. Pour cette raison, ce problème sera traité analytiquement et numériquement dans le présent travail.

CHAPITRE 2

CHOIX D'UN MODELE RHEOLOGIQUE ET FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

2.1. Choix d'un modèle rhéologique

2.1.1. Introduction

D'un point de vue physique, les lois traduisant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont valables pour un milieu continu quelconque, liquide, solide ou gazeux. Si ces équations suffisaient à déterminer le mouvement du milieu, cela impliquerait que, soumis à des efforts identiques, des milieux continus liquides, solides ou gazeux subiraient les mêmes mouvements, ce qui est trivialement faux. Il en résulte, donc, que les lois de conservation, dont le caractère est universel, sont insuffisantes pour étudier les mouvements des milieux continus. On doit les compléter par des lois dites de comportement, spécifiques à chaque type de milieu. Celles-ci résultent en général d'observations empiriques et doivent satisfaire certains grands principes.

2.1.2. Principes de formulation d'une loi de comportement

2.1.2.1. Principe du déterminisme ou de causalité

En l'absence de liaisons internes, le tenseur des contraintes dans un milieu est déterminé par l'histoire de son mouvement. Par contre, lorsque les liaisons internes existent, le tenseur des contraintes est la somme d'un tenseur associé à l'histoire du mouvement et d'un tenseur associé aux efforts dus aux liaisons internes.

2.1.2.2. Principe de localisation spatiale

L'état du milieu en un point donné, à l'instant t , ne dépend que du comportement des particules situées dans un voisinage immédiat de ce point.

2.1.2.3. Principe d'indifférence matérielle

La loi de comportement (relation entre contraintes et déformations) doit être indépendante du référentiel choisi pour la représenter.

2.1.2.4. Principe d'homogénéité

La loi de comportement de la matière, qui vise à modéliser le comportement du fluide, prend la même forme en tout point d'un milieu homogène.

2.1.2.5. Principe d'isotropie

Dans un milieu isotrope, un changement de repère laisse inchangée la loi de comportement.

2.1.3. Formulation d'une loi de comportement : équation constitutive

Le comportement Newtonien est le cas particulier le plus simple du comportement visqueux. Ce comportement est tel que le tenseur des contraintes générales, $\vec{\Sigma}$, ne dépend que du tenseur des taux de déformation, $\vec{\dot{\gamma}}$

Les principes généraux sur les lois de comportement exigent que $\vec{\Sigma}$ soit une fonction isotrope de $\vec{\dot{\gamma}}$, ce qui implique :

$$\vec{\Sigma} = \alpha_0(I_1, I_2, I_3) \vec{1} + \alpha_1(I_1, I_2, I_3) \vec{\dot{\gamma}} + \alpha_2(I_1, I_2, I_3) \vec{\dot{\gamma}}^2 \quad (2.1)$$

où α_0, α_1 et α_2 sont des fonctions scalaires des trois invariants principaux de $\vec{\dot{\gamma}}$:

$$I_1 = \text{tr} \vec{\dot{\gamma}}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left((\text{tr} \vec{\dot{\gamma}})^2 - \text{tr} (\vec{\dot{\gamma}}^2) \right) \quad \text{et} \quad I_3 = \det \vec{\dot{\gamma}} \quad (2.2)$$

Pour un fluide parfait, la seule contrainte qui règne est la pression et on a :

$$\vec{\Sigma} = -p \vec{1} \quad (2.3)$$

Pour un fluide réel incompressible $I_1 = 0$ et on a :

$$\vec{\Sigma} = -p \vec{1} + \vec{\tau} \quad (2.4)$$

où

$$\vec{\tau} = \alpha_1(I_2, I_3) \vec{\dot{\gamma}}^2 + \alpha_2(I_2, I_3) \vec{\dot{\gamma}}^3 \quad (2.5)$$

est le tenseur des contraintes visqueuses, dont l'expression définit ainsi la loi de comportement du fluide.

La relation (2.5) constitue l'équation d'un fluide de Reiner-Rivlin. Les quantités α_1 et α_2 qui y interviennent ne sont plus fonctions que des deux derniers invariants du tenseur des taux de déformation et doivent obligatoirement respecter la condition thermodynamique traduisant la positivité de la dissipation mécanique :

$$\emptyset = -2\alpha_1(I_2, I_3)I_2 + 3\alpha_2(I_2, I_3)I_3 \geq 0 \quad (2.6)$$

Il est à remarquer que, dans l'équation (2.5), la quantité α_2 est responsable de la présence de contraintes normales (termes diagonaux non nuls du déviateur du tenseur des contraintes).

Or l'existence de fluides réels, suivant le modèle de Reiner-Rivlin, pour lesquels α_2 serait non nulle, n'a pas pu être mise en évidence expérimentalement. En fait, il semblerait que la présence de contraintes normales soit caractéristique de fluides possédant une mémoire de la déformation qu'ils ont subie. C'est pourquoi dans des domaines variés, les rhéologues ont été conduits à développer des modèles de fluides "avec mémoire", susceptibles de rendre compte de l'élasticité du milieu. Néanmoins, le modèle de Reiner-Rivlin est intéressant pour les raisons suivantes :

- il est mathématiquement simple : il convient pour interpréter le comportement de la plupart des fluides ne présentant pas d'élasticité ;
- il fournit, de façon certes imprécise, des informations qualitatives sur le comportement des fluides dotés de mémoire.

Ces raisons font que ce modèle est très utilisé en mécanique des fluides.

2.1.4. Fluides non-Newtoniens à comportement indépendant du temps et sans effet mémoire (fluides visco-inélastiques)

Pour ces fluides, appelés encore fluides Newtoniens généralisés, la relation (2.5) devient :

$$\vec{\tau} = \alpha_1(I_2) \vec{\dot{\gamma}} = 2\mu'_a(I_2) \vec{\dot{\gamma}} \quad (2.7)$$

Dans l'équation (2.7) la fonction μ'_a représente la viscosité apparente du fluide qui, dans le cas d'un fluide Newtonien, ne dépend que de la température et éventuellement de la pression.

Rappelons ici que, $I_3 = 0$ pour une grande classe d'écoulements incluant les écoulements plans et viscométriques. Dans le cas où ce paramètre serait non nul, il est difficile d'en tenir compte en raison de l'absence d'écoulements simples permettant de tester son influence.

Pour un écoulement de cisaillement simple, l'équation (2.7) se réduit à

$$\tau = \mu'_a(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad (2.8)$$

où τ et $\dot{\gamma}$ sont respectivement, la contrainte et le taux de cisaillement.

Il existe deux catégories de fluides "à comportement indépendant du temps": les fluides à contrainte critique tels que les fluides viscoplastiques, et ceux sans contrainte critique tels que les fluides pseudo-plastiques et ceux dilatants. C'est à cette dernière classe de fluides qu'on s'est intéressé.

2.1.4.1. *Comportement pseudo-plastique ou rhéofluidifiant (shear-thinning)*

2.1.4.1.1. *Description phénoménologique*

Il est expérimentalement connu que bon nombre de fluides présentent une viscosité apparente qui décroît avec le taux de cisaillement (pseudo-plasticité). Ce type de comportement, de loin le plus fréquent, concerne les dispersions de particules asymétriques, les polymères de longue chaîne en solution dans l'eau ou à l'état fondu, les pâtes à papier, les colles, les ciments, la mayonnaise, le savon, les suspensions de détergent, le napalm, certaines peintures... Son interprétation moléculaire la plus simple consiste à admettre que les molécules ou unités structurelles s'alignent progressivement dans le sens de l'écoulement au fur et à mesure que la vitesse de cisaillement augmente, favorisant ainsi l'écoulement des différentes couches du liquide. Une autre interprétation moléculaire consiste à envisager une modification de structure du liquide (déstructuration par rupture de liaisons ou défloculation de particules) en fonction de la vitesse de cisaillement (Midoux, 1993).

Aucune équation mathématique ne peut prétendre décrire rigoureusement le comportement rhéofluidifiant le plus général. Parmi les nombreuses formules proposées dans la littérature, on présente ci-après l'une des plus utilisées.

2.1.4.1.2. *Loi de comportement en cisaillement simple*

La modélisation la plus courante du comportement pseudo-plastique est la loi de puissance (également connu sous le nom d'Ostwald – de Waele, ou modèle à deux paramètres) proposée par Ostwald-De Waele (1925) qui s'écrit en cisaillement simple comme suit:

$$\tau = \mu'_a(\dot{\gamma})\dot{\gamma} = k(\dot{\gamma})^{n-1}\dot{\gamma} \quad (2.9)$$

où k est souvent appelé l'indice de consistance et n l'indice de structure ou de comportement ($0 < n < 1$), pour un fluide pseudo-plastique). Pour $n = 1$, on retrouve la loi de comportement d'un fluide Newtonien de viscosité $\mu'_a = k = \mu$.

Le défaut de cette modélisation provient du fait qu'elle fait tendre la viscosité vers l'infini lorsque $\dot{\gamma}$ tend vers 0 et vice-versa, alors que, pour la plupart des corps fluidifiants, la viscosité atteint deux paliers Newtoniens à faible et fort taux de cisaillement, dits première et deuxième régions Newtoniennes. Les rhéologues ont été alors amenés à préconiser des lois plus complexes faisant intervenir plus de deux paramètres, parmi lesquels on retrouve communément μ_0 , viscosité à faible vitesse de cisaillement, et μ_∞ , viscosité à forte vitesse de cisaillement. Dans le livre de Couarraze et Grossiord (1991), les plus intéressantes et les plus

utilisées de ces lois sont regroupées selon le nombre de paramètres qu'elles comportent, en soulignant leurs avantages et leurs limites.

Chaque modèle a ses avantages et ses inconvénients, mais reposant sur la simplicité et capable de décrire la large gamme de fluides, le modèle de loi de puissance non Newtonien ou le modèle d'Ostwald de Waele a reçu une énorme popularité.

2.1.4.1.3. Loi de comportement en cisaillement composé

Dans le cas du comportement des liquides, compte tenu de l'extrême importance pratique des écoulements par cisaillement, nous pouvons définir un taux de cisaillement généralisé

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \vec{\gamma} : \vec{\gamma}} = \sqrt{2 \sum_{ij} \dot{\gamma}_{ij}^2} = \sqrt{-4I_2} \quad (2.10)$$

qui permet de formuler la loi (2.9) en 3-D pour obtenir

$$\vec{\tau} = 2\mu'_a(\dot{\gamma}) \vec{\gamma} = 2k(\dot{\gamma})^{n-1} \vec{\gamma} \quad (2.11)$$

ou encore en termes de convention d'Einstein

$$\tau_{ij} = 2\mu'_a(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{ij} = 2k(\dot{\gamma})^{n-1} \dot{\gamma}_{ij} \quad (2.12)$$

où $\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2}(V'_{ij} + V'_{ji})$ sont les composantes du tenseur des taux de déformation, déterminées à partir de celles de la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse (Agassant et al. 1989). D'autres lois peuvent être généralisées de la même manière.

2.1.4.2. Comportement dilatant ou rhéoépaississant (*shear-thickening*)

Ce type de comportement, beaucoup moins fréquent que le comportement pseudo-plastique, est caractérisé par une augmentation de la viscosité apparente avec la vitesse de cisaillement. Il est spécifique de dispersions très concentrées comme les solutions d'amidon, les sables mouillés compactés, certaines huiles polymériques...

L'origine microscopique d'un tel comportement est diverse, parfois même mal élucidée (Couarraze et Grossiord, 1991). Dans le cas des liquides dilatants, constitués de "particules" imbriquées et emboîtées (dispersions très concentrées, sables compacts...), l'interprétation du caractère dilatant est relativement simple : le volume libre entre les particules est minimal au repos et il est occupé par la phase continue. Chaque particule est ainsi enrobée d'une pellicule de "solvant" qui joue le rôle de lubrifiant. Au fur et à mesure que la vitesse de cisaillement croît, le liquide gonfle (organisation plus lâche des particules qui sont moins bien imbriquées),

si bien que la phase continue n'est plus capable de combler les vides interparticulaires et assurer une bonne lubrification.

Le comportement dilatant est susceptible d'être décrit par les mêmes relations mathématiques que le comportement pseudo-plastique. La grande diversité des lois rhéologiques existantes est cependant rarement mise à profit dans l'étude de liquides présentant un tel caractère qui sont, en général, approchés par une loi de puissance simple où l'exposant n est supérieure à 1, traduisant ainsi l'écart avec le comportement Newtonien pour lequel ce paramètre vaut 1.

2.2. Formulation mathématique du problème

2.2.1. Introduction

Dans cette partie sont présentées les équations générales utilisées pour simuler l'écoulement et le transfert de chaleur par convection mixte dans des fluides non-Newtoniens, de types Ostwald-De Waele. Ces fluides remplissent entièrement une enceinte rectangulaire allongée dont les parois horizontales sont adiabatiques et mobiles avec une vitesse constante, tandis que celles verticales sont immobiles et chauffées par une densité de flux de chaleur uniforme.

Après avoir précisé les hypothèses simplificatrices et les conditions aux limites associées au problème, ces équations sont écrites, en termes de variables primitives, sous forme adimensionnelle dans un système de coordonnées cartésiennes compte tenu de l'aspect rectangulaire de la forme géométrique étudiée.

2.2.2. Equations générales

Les équations qui régissent la convection et qui sont les fameuses équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie peuvent s'écrire respectivement sous les formes suivantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + \text{div}(\rho \vec{V}') = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{V}')}{\partial t'} + \text{div}(\rho \vec{V}' \otimes \vec{V}' - \vec{\Sigma}) = \rho \vec{f} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial(\rho c_p T')}{\partial t'} + \text{div}(\rho c_p T' \vec{V}' + \vec{q}) = \beta T' \frac{dp'}{dt'} + \vec{\tau} : \overline{\text{grad}} V' \quad (2.15)$$

où c_p est la chaleur massique à pression constante et \vec{f} la résultante des forces de volume appliquées à l'unité de masse du fluide. La masse volumique, ρ , la pression, p' , la température, T' et la vitesse, \vec{V}' , sont les variables principales. Pour la fermeture du système, il faut établir des liaisons définissant le tenseur des contraintes générales, $\vec{\Sigma}$, celui des contraintes visqueuses, $\vec{\tau}$, et le vecteur densité de flux de chaleur, \vec{q} , en fonction de ces variables.

Pour un fluide matériellement simple, les tenseurs $\vec{\Sigma}$ et $\vec{\tau}$ sont respectivement donnés par les relations (2.4) et (2.7) et \vec{q} est exprimé à l'aide de la loi de Fourier :

$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T' \quad (2.16)$$

dans laquelle λ est la conductivité thermique du fluide.

Ces équations, écrites sous forme intrinsèque, sont compactes et traduisent le phénomène physique qu'elles modélisent. Mais pour obtenir une forme pratique (calculable) des opérateurs tels que la divergence et le produit tensoriel, il faut se donner une base de projection convenablement adaptée à la géométrie choisie.

2.2.3. Géométrie considérée

La géométrie, qui a suscité notre intérêt, est une cavité rectangulaire (de longueur L' et de hauteur H' , $H' \ll L'$), fermée, horizontale et chauffée latéralement à l'aide d'une densité de flux de chaleur uniforme (Figure 2.1), alors que les parois horizontales sont isolées thermiquement.

Dans ce problème, on suppose que les deux parois horizontales sont mobiles avec une même vitesse constante u_0 dans des sens opposés ($a = 1$: cavité doublement entraînée) ou seulement la paroi horizontale supérieure est en mouvement uniforme, u_0 , dans la direction d'application du flux de chaleur ($a = 0$: cavité simplement entraînée), tandis que les autres parois sont immobiles.

Cette configuration est l'une des plus étudiées, tant expérimentalement que théoriquement et/ou numériquement, pour sa simplicité. Aussi, présente-t-elle l'avantage de satisfaire raisonnablement l'approximation bidimensionnelle de l'écoulement réel lorsque le rapport d'aspect latéral est supérieur à l'unité.

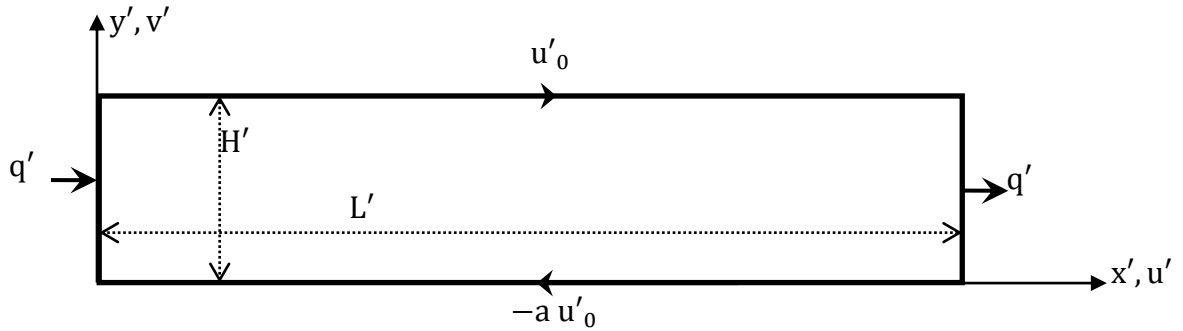


Figure 2.1 : Modèle physique et système de coordonnées

2.2.4. Conditions aux limites

Les conditions aux frontières associées au problème considéré dans cette thèse sont de deux natures :

2.2.4.1. Conditions aux limites thermiques

Sur ses deux parois verticales, la cavité est chauffée par une densité de flux de chaleur uniforme, tandis que celles horizontales sont adiabatiques. Ainsi, ces conditions aux limites thermiques se traduisent en termes de loi de Fourier par :

$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial T'}{\partial x'} = q' \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = L' \\ -\lambda \frac{\partial T'}{\partial y'} = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = H' \end{cases} \quad (2.17)$$

Expérimentalement, la paroi supérieure est d'habitude mince et hautement thermiquement conductrice par rapport au fluide qui l'affleure, ce qui garantit une température à peu près uniforme sur les frontières. Cependant, si l'épaisseur est importante ou la conductivité thermique est faible, on devra s'attendre automatiquement à une distorsion de l'uniformité de la température, puisqu'il y aura apparition d'un gradient de température horizontal. Celui-ci augmente avec l'épaisseur de la paroi ou quand un matériau mauvais conducteur de chaleur est utilisé (Otero et al. 2002). Ce type de conditions aux limites ne peut convenir pour modéliser le problème de convection, en particulier lorsque le nombre de Nusselt, traduisant le transfert de chaleur, est du même ordre de grandeur, d'un point de vue valeur, que le rapport de la conductivité thermique de la paroi à celle du fluide. Ces considérations justifient donc le choix de conditions de flux imposés aux frontières, qui sont plus réalistes.

2.2.4.2. Conditions aux limites cinématiques

Dans les cavités fermées, l'écoulement de convection mixte est induit à la fois par la force flottabilité, produite par un gradient thermique dû à la différence de température entre les parois chauffées, et celle de cisaillement, causée par le mouvement des parois, qui sont de grandeurs comparables.

Le présent travail traite un tel phénomène dans une cavité rectangulaire horizontale doublement (les deux parois horizontales sont mobiles) et simplement (la seule paroi horizontale supérieure est mobile) entraînée, dont les parois horizontales sont en mouvement avec une vitesse constante, u'_0 . Ceux-ci se traduisent par les conditions aux limites cinématiques suivantes :

$$\begin{cases} u' = v' = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = L' \\ u' + au'_0 = v' = 0 \text{ pour } y = 0 \\ u' - u'_0 = v' = 0 \text{ pour } y = H' \end{cases} \quad (2.18)$$

ou a est un paramètre qui peut être égal à 1 (cas d'une cavité doublement entraînée) ou 0 (cas d'une cavité simplement entraînée).

2.2.5. Hypothèses simplificatrices

Les phénomènes convectifs sont gouvernés par les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. La complexité de ces fameuses équations nécessite l'adoption d'hypothèses simplificatrices raisonnables. Dans le présent travail, les suppositions adoptées, pour résoudre ce système d'équations, sont celles généralement admises dans la littérature spécialisée, à savoir :

- Le vecteur \vec{f} dans l'équation (2.14) se résume à la seule contribution de la pesanteur \vec{g} ;
- Les vitesses du fluide sont modérées pour considérer le régime d'écoulement comme laminaire ;
- Le fluide en écoulement est incompressible. Dans le domaine des pressions avoisinant celle de l'atmosphère, les liquides constituent une très bonne approximation des milieux incompressibles, dans la mesure où $\partial\rho / (\partial p') \approx 0$. Il convient donc de négliger le terme $\beta T' dp' / dt'$ de l'équation (2.15), qui représente en fait le travail adiabatique réversible et dans lequel $\beta = -(1/\rho)(\partial\rho / \partial T')_{p'}$ désigne le coefficient d'expansion thermique à pression constante ;

□ Le fluide est à comportement rhéologique non-Newtonien pouvant être décrit par la relation constitutive (2.12), dont le choix est justifié dans la partie précédente ;

□ La production de chaleur due aux frottements visqueux (dissipation visqueuse), $\Rightarrow \tau : gradV$, dans l'équation (2.15) est négligeable. Ceci reste valable tant que la viscosité des produits non-Newtoniens considérés est relativement faible ;

□ Les propriétés physiques du fluide sont supposées indépendantes de la température à l'exception de la masse volumique dans le terme de poussée d'Archimède qui obéit à l'approximation de Boussinesq, dont la dérivation systématique des équations de la dynamique des fluides compressibles est assez fastidieuse et requière le classement prudent de plusieurs processus limitatifs (Gray et Giorgini, 1976) ;

□ La troisième dimension de la cavité est supposée assez large de sorte que le problème puisse être ramené à deux dimensions. Ceci est généralement relativement satisfait et peut donner un aperçu sur les écoulements tridimensionnels, plus compliqués (Siginer et Valenzuela-Rendon, 2000).

2.2.6. Adimensionnalisation

Pour adimensionnaliser les équations (2.13-2.18), les variables réduites suivantes sont introduites :

$$(x, y) = \frac{(x', y')}{H'}, (u, v) = \frac{(u', v')}{\frac{\alpha}{H'}}, T = \frac{T' - T'_c}{\Delta T^*}, \quad \Delta T^* = \frac{q' H'}{\lambda} \text{ et } t = \frac{t'}{\frac{H'^2}{\alpha}} \quad (2.19)$$

où H' est un facteur d'échelle pour la longueur, T'_c une température de référence, ΔT^* un facteur d'échelle pour la température, q' la densité surfacique de flux de chaleur et α et λ , respectivement, la diffusivité et la conductivité thermiques du fluide.

2.2.6.1. Equations gouvernantes adimensionnelles

Sur la base de ce qui vient de précéder, les équations gouvernantes adimensionnelles, en formulation de variables primitives (u, v, p, T) s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Pr \left[\mu_a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu_a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \left[\mu_a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu_a}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2.22)$$

+Ra Pr T

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.23)$$

où, compte tenu des équations (2.9) et (2.11), la viscosité apparente adimensionnelle, μ_a , a pour expression :

$$\mu_a = \left[2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.24)$$

De cette adimensionnalisation découlent deux groupements fondamentaux adimensionnels, appelés nombres de Prandtl et de Rayleigh généralisés. Ils sont donnés respectivement par :

$$\text{Pr} = \frac{(k/\rho)H'^{2-2n}}{\alpha^{2-n}} \quad (2.25)$$

et

$$\text{Ra} = \frac{g\beta H'^{2n+n} q'}{(k/\rho)\alpha^n \lambda} \quad (2.26)$$

Ra mesure, en fait, l'importance relative de la poussée d'Archimède qui provoque le mouvement du fluide par rapport aux forces visqueuses et à la conduction thermique qui tendent à supprimer ce mouvement. Quant à Pr, il compare les effets des diffusions de la quantité de mouvement et de la chaleur.

Pour $n = 1$, Pr et Ra recouvrent leur expressions Newtoniennes pourvue que l'indice de consistance (k) soit remplacée par la viscosité Newtonienne (μ).

La fonction de courant, Ψ , est liée aux composantes du vecteur vitesse par les relations suivantes :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ (avec } \Psi = 0 \text{ sur tous les bords)} \quad (2.27)$$

2.2.6.2. Conditions aux limites

Avec les variables réduites (2.7), précédemment adoptées, les conditions aux limites, adimensionnelles associées au problème, sont :

$$u = v = \Psi = \frac{\partial T}{\partial x} + 1 = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = A \quad (2.28)$$

et

$$\begin{cases} u + aPe = v = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 & \text{pour } y = 0 \\ u - Pe = v = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 & \text{pour } y = 1 \end{cases} \quad (2.29)$$

Des équations (2.28) et (2.29) découlent deux autres paramètres fondamentaux adimensionnels, appelés rapport d'aspect de la cavité et nombre de Peclet. Ils sont donnés respectivement par :

$$A = \frac{L'}{H'} \quad (2.30)$$

et

$$Pe = \frac{u'_0 H}{\alpha} \quad (2.31)$$

2.2.7. Transfert de chaleur

Dans le domaine de l'ingénierie, la connaissance des quantités de chaleur, échangées ou transférées, est d'un intérêt évident pour le dimensionnement des systèmes sièges d'échanges thermiques. Le groupement adimensionnel traduisant ces échanges est le nombre de Nusselt, Nu, qui n'est autre que le rapport du flux thermique convectif à celui conductif pur. Cette définition s'appuie sur la conductivité thermique du fluide de base, ce qui semble logique puisque, selon Corcione (2010), ce groupement adimensionnel, qui devrait décrire les performances thermiques de la cavité, devrait varier de la même manière que le coefficient d'échange de chaleur par convection, h, et vice-versa.

On définit le nombre de Nusselt, mesurant le transfert de chaleur local dans la direction horizontale, comme suit :

$$Nu(y) = \frac{q'}{\left(\frac{\lambda \Delta T'}{L'}\right)} = \frac{A}{\Delta T(y)} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta T(y)}{A}\right)} \quad (2.32)$$

où $\Delta T(y) = T(0, y) - T(A, y)$ représente la différence de température adimensionnelle locale entre les deux parois verticales d'équations $x = 0$ et $x = A$.

Cependant, la définition (2.32) présente l'inconvénient d'introduire des imprécisions dans les valeurs de Nu, liées aux effets de bord. Pour, donc, améliorer la précision, Nu est calculée, comme suggéré par Lamsaadi et al. (2006), sur la base d'une différence de température entre deux sections verticales infiniment voisines (distantes de δx) et symétriques par rapport à la section centrale, d'équation $x = A/2$, soit par analogie avec l'équation (2.32)

$$\text{Nu}(y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta x / \delta T = \lim_{\delta \rightarrow 0} 1 / (\delta T / \delta x) = - \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\frac{A}{2}}} \quad (2.33)$$

Le transfert de chaleur global dans la direction horizontale, est représenté par le nombre de Nusselt moyen défini par :

$$\overline{\text{Nu}} = \int_0^1 \text{Nu}(y) dy \quad (2.34)$$

2.3. Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, le comportement rhéologique des fluides matériellement simples a été décrit de façon succincte, en rappelant l'essentiel. L'accent a été mis principalement sur la loi de puissance qui, bien qu'elle s'écarte de la réalité expérimentale à faibles et à fortes vitesses de déformation, elle demeure très utilisée en raison des nombreux avantages qu'elle offre et qui se manifestent particulièrement en termes d'approximations et de résolutions, ce qui justifie son utilisation dans cette étude.

Dans la seconde partie, les équations gouvernant le problème et les conditions aux limites associées sont présentées sous leurs formes dimensionnelles et adimensionnelles. Aussi, les différentes hypothèses simplificatrices ont été mises en évidence.

CHAPITRE 3

METHODES DE RESOLUTION

3.1. Approche numérique et procédure de résolution

3.1.1. Introduction

Bien que les équations aux dérivées partielles qui régissent les phénomènes convectifs soient établies depuis longtemps, elles restent difficiles à résoudre, malgré le temps et les efforts fournis, en raison de leurs non linéarité et couplage, qui font que leur solution analytique soit généralement impossible, sauf dans quelques cas particuliers, très rares (écoulement parallèle étudié par la suite). Dans l'analyse des écoulements et des transferts, la piste expérimentale est moins suivie, en dépit des informations pertinentes qu'elle peut procurer, en raison du coût élevé du matériel expérimental et les difficultés de réalisation liées au contrôle des différents paramètres. L'issue numérique reste plus convoitée puisqu'elle est plus efficace, compte tenu de la capacité et rapidité des moyens de calcul dont on dispose actuellement. La complexité de la résolution numérique des problèmes de transfert de chaleur et d'écoulement de fluide est reflétée par la complexité des équations qui gouvernent les phénomènes physiques. Ces équations différentielles doivent être discrétisées pour les transformer en un système d'équations algébriques, mais il n'empêche pas que des approches prudentes sont nécessaires.

Plusieurs méthodes de discrétisation sont disponibles dans la littérature. On peut citer à titre d'exemple :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode de Lattice Boltzmann
- La méthode des volumes finis.

Dans notre cas, pour la résolution numérique du système d'équations aux dérivées partielles et leurs conditions aux limites associées, nous avons utilisé la méthode des volumes finis développée par Patankar (1980) et l'algorithme SIMPLER. Cette méthode est très utilisée dans la solution numérique des problèmes de transfert thermique et elle est à l'origine de nombreux codes de simulation numérique: FLUENT, STAR-CD, CFX, FINE-TURBO, PHONEICS à cause des avantages qu'elle offre en termes de stabilité numérique, vis-à-vis des paramètres gouvernants de convergence et de conservation des flux sur chaque volume élémentaire.

3.1.2. Discrétisation des équations gouvernantes : Méthode des volumes finis

Cette méthode qui permet de transformer un problème exact et continu en un problème approché et discret, a été utilisée avec succès par plusieurs chercheurs. Elle est décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar. Le domaine de calcul dans cette méthode est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés volumes de contrôle. La méthode des volumes finis (appelée aussi méthode de volume de contrôle) consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles de type parabolique, décrites au chapitre précédent, sur chaque volume de contrôle. Chacun de ces derniers englobe un nœud dit "nœud principal". Dans le cas bidimensionnel, ces volumes sont de taille $\Delta x \times \Delta y$ (figure 3.1). Les variables physiques recherchées sont supposées constantes dans chaque volume de contrôle.

En utilisant la variable généralisée φ , pour désigner u , v ou T , les équations de quantité de mouvement et d'énergie peuvent s'écrire, sous la forme :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Gamma \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + S_\varphi \quad (3.1)$$

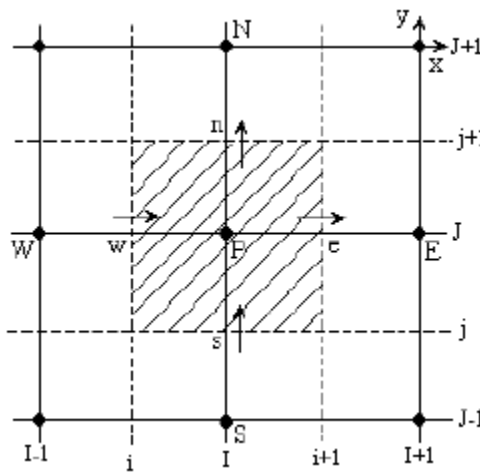


Figure 3.1 : Volume de contrôle

En multipliant l'équation de continuité (2.20) par φ et en l'additionnant, membre à membre, à (3.1), il vient, sous forme conservative,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u\varphi}{\partial x} + \frac{\partial v\varphi}{\partial y} = \Gamma \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + S_\varphi \quad (3.2)$$

où Γ est un paramètre de diffusion et S_φ est un terme source, pouvant être identifiés à partir du tableau 3.1.

Equations	φ	Γ	S_φ
(2.20)	1	0	0
(2.21)	u	$\text{Pr}\mu_a$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr}\left[2\frac{\partial\mu_a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\mu_a}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$
(2.22)	v	$\text{Pr}\mu_a$	$-\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr}\left[2\frac{\partial\mu_a}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\mu_a}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \text{RaT}\right]$
(2.23)	T	1	0

Tableau 3.1 : Identification de φ , Γ et S_φ

D'autre part, en introduisant les variables $J_x = u\varphi - \Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $J_y = v\varphi - \Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial y}$,

L'équation (3.2) peut être arrangée comme suit :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S_\varphi \quad (3.3)$$

J_x et J_y expriment, respectivement, les flux totales (différence entre le flux convectif et diffusif) dans les directions x et y.

L'intégration de l'équation (3.3) sur le volume de contrôle défini dans la figure 3.1, donne :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial\varphi}{\partial t} dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial J_x}{\partial x} dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial J_y}{\partial y} dx dy = \int_s^n \int_w^e S_\varphi dx dy \quad (3.4)$$

Soient J_e , J_w , J_s et J_n les valeurs respectives, à l'instant t, du flux total sur les faces est, e, ouest, w, sud, s et nord, n, du volume de contrôle. Désignons, respectivement, par φ_p et φ_p^0 les valeurs de φ au point P aux instants actuel t et précédent t- Δt . Pour pouvoir calculer les différents termes de l'équation (3.4), il faut supposer que :

- à l'instant t, φ est constante à travers le volume de contrôle ;
- pour x donné (voire y donné) le flux est uniforme le long de la face correspondante.

Donc, l'équation (3.4) devient :

$$\frac{\varphi_p - \varphi_p^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y + J_e - J_w + J_n - J_s = \bar{S}_\varphi \Delta x \Delta y \quad (3.5)$$

où

$$J_e = J_x)_e \Delta y, \quad J_w = J_x)_w \Delta y, \quad J_n = J_y)_n \Delta x \text{ et } J_s = J_y)_s \Delta x$$

D'autre part, pour forcer la convergence, la valeur moyenne du terme source \bar{S}_φ , au point P à l'instant t, est souvent linéarisée. Soit donc :

$$\bar{S}_\varphi = S_c + S_p \varphi_p \quad (3.6)$$

Dans cette approche, S_p , qui est le coefficient de pondération de φ_p , doit être négatif afin d'assurer la stabilité numérique de la solution et accélérer la convergence (Patankar, 1980). Alors que le terme source S_c ne dépend pas de φ_p .

L'utilisation des mêmes hypothèses, l'intégration de l'équation de continuité dans le volume de contrôle conduit à :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = (u_e - u_w) \Delta y + (v_n - v_s) \Delta x = 0 \quad (3.7)$$

Posant $F_e = u_e \Delta y$, $F_w = u_w \Delta y$, $F_n = v_n \Delta x$ et $F_s = v_s \Delta x$, qui ne sont autres que les débits adimensionnels à travers les faces du volume de contrôle :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (3.8)$$

Puis, en retranchant, membre à membre, l'équation (3.8) multipliée par φ_p de l'équation (3.5) on a

$$(S_c + S_p \varphi_p) \Delta x \Delta y = \frac{\varphi_p - \varphi_p^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y + (J_e - F_e \varphi_p) - (J_w - F_w \varphi_p) + (J_n - F_n \varphi_p) - (J_s - F_s \varphi_p) \quad (3.9)$$

D'après Patankar (1980), la discrétisation des termes diffusifs et convectifs permet de les exprimer, en fonction des valeurs de φ_p aux nœuds P, W, E, S et N, par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} J_e - F_e \varphi_p &= a_e (\varphi_P - \varphi_E), \quad J_w - F_w \varphi_p = a_w (\varphi_E - \varphi_P), \\ J_n - F_n \varphi_p &= a_n (\varphi_P - \varphi_N) \text{ et } J_s - F_s \varphi_p = a_s (\varphi_S - \varphi_P) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ces relations traduisent le fait que la valeur du flux global à la frontière (i) est une moyenne pondérée des grandeurs qui se situent en amont et en aval de la frontière en question.

Les coefficients de discrétisation $a_i (i = e, w, n, s)$ incorporent les flux convectifs et diffusifs, et doivent surtout être tous positifs, d'après la deuxième règle de base de Patankar (1980) pour la méthode des volumes finis. Cependant, les relations (3.10) peuvent violer une telle règle en créant des coefficients négatifs. Pour dépasser ceci, les coefficients de discrétisation $a_i (i = e, w, n, s)$ des relations (3.10) sont donnés en fonction du nombre de Peclet, Pe . Soient :

$$\begin{aligned}
a_e &= D_e A(|Pe_e|) + \max(-F_e, 0), \quad a_w = D_w A(|Pe_w|) + \max(+F_w, 0), \\
a_n &= D_n A(|Pe_n|) + \max(-F_n, 0) \quad \text{et} \quad a_s = D_s A(|Pe_s|) + \max(+F_s, 0)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

où D_i et Pe_i sont respectivement les conductances et les nombres de Peclet locaux, dont les expressions sont comme suit :

$$D_e = \left(\frac{\Gamma}{\delta x}\right)_e \Delta y, \quad D_n = \left(\frac{\Gamma}{\delta y}\right)_n \Delta x, \quad D_w = \left(\frac{\Gamma}{\delta x}\right)_w \Delta y, \quad D_s = \left(\frac{\Gamma}{\delta y}\right)_s \Delta x \quad \text{et} \quad Pe_i = \frac{F_i}{D_i} \tag{3.12}$$

Pour ce qui est de la fonction $A(|Pe_i|)$, le tableau 3.2 en précise l'expression pour les schémas les plus utilisés dans la discrétisation des termes convectifs.

Schéma	$A(Pe_i)$
Centré	$1 - 0.5 Pe_i $
Décentré amont (Upwind)	1
Hybride	$A(Pe_i) = \sup(0, 1 - 0.1 Pe_i)$
En loi de puissance	$A(Pe_i) = \sup(0, 1 - 0.1 Pe_i ^5)$
Exponentiel	$A(Pe_i) = Pe_i / (\exp(Pe_i) - 1)$

Tableau 3.2 : Expression de la fonction $A(|Pe_i|)$

Dans notre cas, nous avons adopté pour le schéma numérique en loi de puissance pour les raisons suivantes :

- Bonne approximation polynomiale de la solution exacte ;
- Bonne stabilité et meilleure précision, comparativement aux autres schémas ;
- Utilisation fréquente par la communauté scientifique.

En fin, la forme discrétisée définitive associée à l'équation aux dérivées partielles (3.3) est la suivante :

$$a_p \varphi_p = a_e \varphi_e + a_w \varphi_w + a_n \varphi_n + a_s \varphi_s + b \tag{3.13}$$

avec

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s - S_p \Delta x \Delta y - \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad \text{et} \quad b = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \varphi_p^0 + S_c \Delta x \Delta y \tag{3.14}$$

3.1.3. Résolution des équations gouvernantes

3.1.3.1. Algorithme SIMPLE (Semi Implicit-Method for Pressure-Linked Equations)

L'algorithme SIMPLE est une procédure numérique largement utilisée pour résoudre les fameuses équations de Navier-Stokes, développé par Patankar (1980), discrétisées au

même nœud, peut donner lieu à un profil oscillatoire de pression (problème du damier), différent de celui réel, ce qui nécessite l'emploi d'un :

- Maillage principal (figure 3.1) pour les grandeurs scalaires, comme la pression et de la température ;

- Maillage décalé pour les grandeurs vectorielles, comme la vitesse, vers la droite pour la composante u (figure 3.2) et vers le haut pour la composante v (figure 3.3).

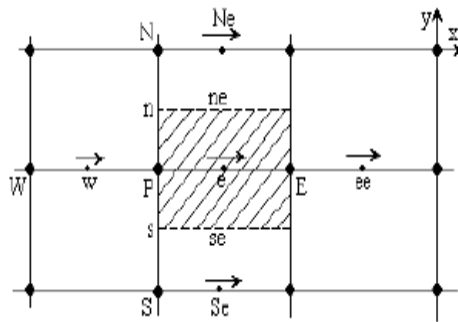


Figure 3.2 : Grille décalée vers la droite pour u

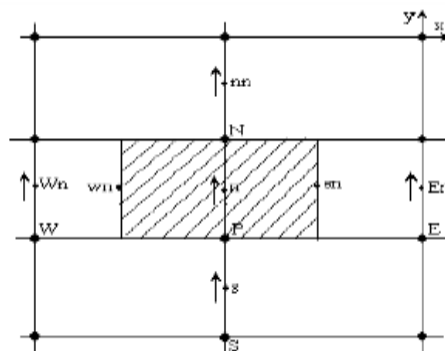


Figure 3.3 : Grille décalée vers le haut pour v

L'intégration des équations de quantité de mouvement se fait sur les volumes de contrôle du maillage décalé.

Par ailleurs, en remplaçant ϕ par u et v, dans l'équation (3.3), et en intégrant sur les volumes de contrôle des figures 3.2 et 3.3, il vient :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (P_P - P_E) A_e \quad \text{et} \quad a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (P_P - P_N) A_n + b_T \quad (3.15)$$

le système obtenu ne peut être résolu que si la pression est connue ou estimée. C'est cette pression est connue, le champ de vitesse, obtenu après la résolution des relations (3.15), satisfiera l'équation de continuité. Comme cette pression n'est pas connue et qu'il n'y pas d'équation caractéristique combinée à des conditions aux limites appropriées pour la déterminer, il est nécessaire de renforcer une procédure pour dépasser cette difficulté. Pour ce faire, le professeur Brian Spalding et son élève Suhas Patankar (1972) ont proposé

l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit-Method for Pressure-Linked Equations). Celui-ci consiste à estimer un champ de pression p^* qui permet de déterminer un champ de vitesse (u^*, v^*) ne vérifiant pas, en général, l'équation de continuité. Alors la nécessité de corriger la pression itérativement jusqu'à satisfaction de cette équation.

Soient p^* et T^* les champs initiaux de pression et de température, et (u^*, v^*) les champs de vitesse résultant des équations de la quantité de mouvement suivantes :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_P^* - P_E^*) A_e \text{ et } a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_P^* - P_N^*) A_n + b_{T^*} \quad (3.16)$$

(u^*, v^*) ne satisfait pas l'équation de continuité et il faut corriger les vitesses et la pression comme suit :

$$p = p^* + p', u = u^* + u' \text{ et } v = v^* + v' \quad (3.17)$$

où p' , u' et v' sont les corrections adoptées.

Si on remplace (3.17) dans (3.16), en tenant compte de (3.15), conduit à :

$$a_e u_e' = \sum a_{nb} u_{nb}' + (p_P' - p_E') A_e \text{ et } a_n v_n' = \sum a_{nb} v_{nb}' + (p_P' - p_N') A_n \quad (3.18)$$

et l'élimination des termes $\sum a_{nb} u_{nb}'$ et $\sum a_{nb} v_{nb}'$ dans (3.18) donne

$$u_e' = d_e (p_P' - p_E') \text{ et } v_n' = d_n (p_P' - p_N') \quad (3.19)$$

où

$$d_e = A_e / a_e \text{ et } d_n = A_n / a_n \quad (3.20)$$

En fin, les vitesses corrigées deviennent

$$u_e = u_e^* + d_e (p_P' - p_E') \text{ et } v_n = v_n^* + d_n (p_P' - p_N') \quad (3.21)$$

D'autre part, pour ce qui est de la pression, l'injection de (3.21) dans (3.7) permet d'aboutir à l'équation de correction suivante :

$$a_P p_P' = a_E p_E' + a_W p_W' + a_N p_N' + a_S p_S' + b_{P'} \quad (3.22)$$

où

$$a_E = d_e \Delta y, a_W = d_W \Delta y, a_N = d_n \Delta x \text{ et } a_S = d_s \Delta x \quad (3.23)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (3.24)$$

$$b_{P'} = (u_w^* - u_e^*) \Delta y + (v_s^* - v_n^*) \Delta x \quad (3.25)$$

3.1.3.2. Résumé de l'algorithme SIMPLE

Les étapes de base de la mise à jour de la solution sont les suivantes:

1. préciser des champs initiaux de pression et de température, p^* et T^* ;
2. résoudre l'équation (3.16) pour obtenir (u^*, v^*) ;
3. résoudre l'équation (3.22) pour obtenir p' ;
4. utiliser les relations (3.17) pour avoir p ;
5. remplacer la valeur de p dans l'équation (3.16) pour avoir (u, v) ;
6. résoudre l'équation (3.13) pour avoir T ;
7. utiliser p , remplacer T^* par T et retourner à l'étape (2) ;

Répéter les calculs jusqu'à convergence de toutes les variables. Celle-ci est considérée acquise lorsque $\sum_{i,j} |\varphi^{k+1}(i,j) - \varphi^k(i,j)| / |\varphi^k(i,j)| < \varepsilon$ où ε est un paramètre de précision des calculs.

3.1.3.3. *Algorithme SIMPLER (SIMPLE-Revised)*

Dans la version révisée de l'algorithme SIMPLE, seule la correction de la pression p' est utilisée pour corriger la vitesse.

La nouveauté de l'algorithme SIMPLER par rapport à SIMPLE réside dans le fait que la déduction de l'équation de la pression (3.22) ne fait intervenir aucune simplification. Dans l'algorithme SIMPLE, la déduction de l'équation de correction de la pression (3.22) passe par l'annulation des termes $\sum a_{nb} u'_{nb}$ et $\sum a_{nb} v'_{nb}$. Ensuite, le champ de pression de l'algorithme SIMPLER est plus proche de la réalité que celui de l'algorithme SIMPLE puisqu'en général l'estimation d'un champ de vitesse initial est plus facile que celle d'un champ de pression. Noter, ici, que l'algorithme SIMPLER ne nécessite pas de champ de pression initial. La pression est directement générée à partir de l'initialisation du champ de vitesse.

Enfin, ajouter qu'une itération suivant l'algorithme SIMPLER nécessite environ 30% de temps plus que celle de l'algorithme SIMPLE, mais cet effort est largement compensé par la réduction concernant en nombre d'itérations nécessaires pour la convergence.

3.1.3.4. *Présentation matricielle des équations gouvernantes*

Sous forme matricielles les équations gouvernantes se présentent comme suit :

$$a_p(i,j)\varphi_p(i,j) = a_e(i,j)\varphi_e(i+1,j) + a_w(i,j)\varphi_w(i-1,j) \\ + a_n(i,j)\varphi_n(i,j+1) + a_s(i,j)\varphi_s(i,j-1) + B(i,j) \quad (3.26)$$

ou sous forme :

$$[A][\varphi] = [B] \quad (3.27)$$

avec :

- [A] est une matrice rectangulaire de taille $(N_I - 2) \times (N_J - 2)$;
- $[\varphi]$ est le vecteur des inconnues $\varphi(i, j)$;
- [B] est le vecteur source.

à ces derniers il faut ajouter les conditions aux limites pour compléter le système.

3.1.4. Traitement des conditions aux limites

Deux types de conditions aux limites peuvent être rencontrés dans les problèmes de convection :

- Celles de type Dirichlet, où la fonction est spécifiée aux frontières ;
- Celles de type Neumann où le taux de variation de la fonction est imposé aux frontières.

Selon le cas rencontré, l'équation linéarité prend une forme plus ou moins simple. Voici le développement, en différences finies, des conditions aux limites que nous nous sommes imposées.

3.1.4.1. Frontière avec vitesse spécifiée

Avec un maillage décalé, la frontière physique du système se superpose au volume de contrôle sur un côté et la coupe sur le côté perpendiculaire (figure 3.4).

Dans le second cas, la vitesse, qui est automatiquement donnée, $u_p = 0$ et on a

$$a_{np} = 0 \text{ et } a_p = 1 \quad (3.28)$$

Dans le premier cas, il faut définir un volume de contrôle supplémentaire où doit être spécifiée une vitesse opposée à celle qui se situe immédiatement à l'intérieur du domaine, soit :

$$u_f = \frac{u_s + u_p}{2} \quad (3.29)$$

ce qui donne, par identification,

$$a_p = 1, a_s = -1, a_n = a_w = a_e = 0 \text{ et } b_f = 2u_f \quad (3.30)$$

Même développement peut être appliqué pour la vitesse v lorsque celle-ci est spécifiée sur la frontière.

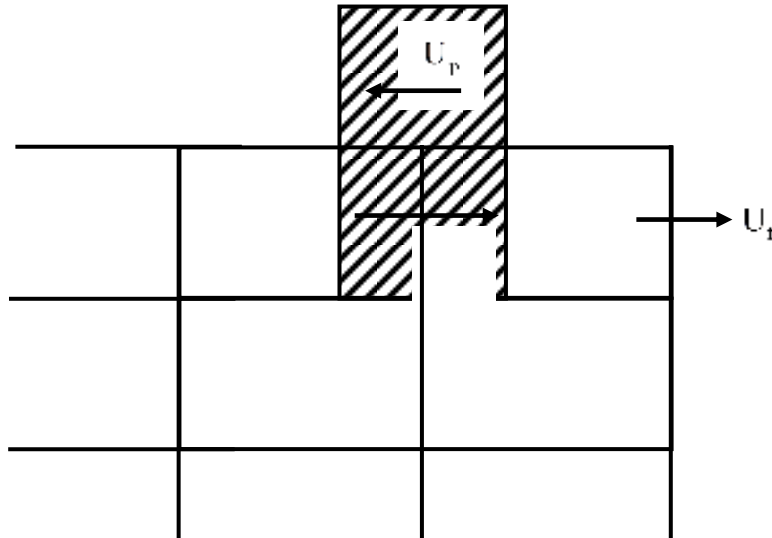


Figure 3.4 : Vitesse aux frontières

3.1.4.2. Frontière avec température spécifiée

Les conditions aux frontières où la température est spécifiée se calculent de la même façon que la vitesse lorsque celle-ci ne coïncide pas avec la frontière physique du système. On a alors :

$$T_f = \frac{T_s + T_p}{2} \quad (3.31)$$

Il s'ensuit

$$a_p = 1, a_s = -1, a_n = a_w = a_e = 0 \text{ et } b_f = 2T_f \quad (3.32)$$

3.4.3. Frontière avec flux spécifiée

Les conditions de frontières à flux spécifié se calculent de la façon suivante :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_f = 1 \text{ donne } \frac{T_w - T_p}{\delta x} = 1 \quad (3.33)$$

Il en résulte :

$$a_p = 1, a_w = 1, a_n = a_s = a_e = 0 \text{ et } b_T = \delta x \quad (3.34)$$

3.2. Approche analytique

3.2.1. Introduction

Les équations de base, présentées dans la partie de formulation mathématique (chapitre 2), qui régissent l'écoulement convectif et le transfert thermique consistent en un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires et fortement couplées. La résolution d'un tel système, de manière analytique, est extrêmement compliquée même voire impossible, surtout dans le cas de la convection mixte dans les fluides non-Newtoniens confinés. Cependant, il

existe des situations particulières, dépendant des conditions aux limites thermiques et cinématiques, la nature du fluide et du rapport d'aspect, pour lesquels ces équations se simplifient considérablement pour donner lieu à une solution analytique approximée du problème. Celle-ci, bien qu'elle s'applique à des cas rarement rencontrés dans la pratique, elle permet de donner un aperçu général et une description qualitative des phénomènes thermoconvectifs observés, tout en permettant, grâce à sa flexibilité et à sa manipulation aisée, une compréhension rapide de ceux-ci.

En outre, cette solution analytique, lorsqu'elle existe, constitue, à titre de validation, une référence incontestablement fiable pour le code numérique élaboré.

3.2.2. Approximation de l'écoulement parallèle

Ce concept suppose que lorsqu'une cavité présente un grand rapport de forme (longueur/hauteur), l'écoulement engendré devient parallèle à l'axe horizontal et thermiquement stratifié loin des bords. Ceci permet de négliger la composante de la vitesse perpendiculaire à ces parois. Lorsque la cavité présente un grand rapport de forme $L' \gg H'$, les lignes de courant, au centre de la cavité, deviennent parallèles à l'axe des x . Autrement dit, la fonction de courant, Ψ , devient une fonction de l'ordonnée y seulement. On peut écrire alors que:

$$u(x, y) = u(y), v(x, y) = 0, \Psi(x, y) = \Psi(y) \quad (3.35)$$

$$T(x, y) = C(x - A/2) + \theta(y) \quad (3.36)$$

ou $C = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=A/2}$ est le gradient de température constant et inconnu, dans la direction horizontale.

3.2.2.1. Equations gouvernantes approximées

Sur la base des simplifications ci-dessus, les équations non dimensionnelles (2.20)-(2.23) du chapitre 2, se simplifient pour devenir

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[\left| \frac{du(y)}{dy} \right|^{n-1} \frac{du(y)}{dy} \right] = Ra C \quad (3.37)$$

$$\frac{d^2 \theta(y)}{dy^2} = C u(y) \quad (3.38)$$

Les conditions aux limites associées à (2.28) et (2.29) sont alors :

$$u + aPe = \frac{d\theta}{dy} = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } u - Pe = \frac{d\theta}{dy} = 0 \text{ pour } y = 1 \quad (3.39)$$

auxquelles s'ajoute la condition de l'écoulement de retour qui traduit la conservation de la matière

$$\int_0^1 u(y)dy = 0 \quad (3.40)$$

et la condition de température moyenne :

$$\int_0^1 \theta(y)dy = 0 \quad (3.41)$$

3.2.2.2. Solution analytique : Cas d'un fluide Newtonien

Dans le cas d'un fluide Newtonien ($n = 1$), les solutions des équations (3.37) et (3.38), satisfaisant les conditions (3.39)-(3.41), pour une cavité simplement entraînée (la seule paroi horizontale supérieure est mobile : $a = 0$) et pour celle doublement entraînée (les deux parois horizontales sont mobiles : $a = 1$), sont généralisées sous la forme suivante :

$$u(y) = \frac{RaC}{12}(2y^3 - 3y^2 + y) + Pe[(3y^2 - 2y) - a(3y^2 - 4y + 1)] \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \theta(y) = & \frac{RaC^2}{1440}(12y^5 - 30y^4 + 20y^3 - 1) \\ & + \frac{PeC}{60}[(15y^4 - 20y^3 + 2) - a(15y^4 - 40y^3 + 30y^2 - 3)] \end{aligned} \quad (3.43)$$

L'expression de la fonction de courant, $\Psi(y)$, peut être déduite en intégrant l'équation (2.27), en tenant compte des conditions aux limites correspondantes et de l'équation (3.42), ce qui donne :

$$\Psi(y) = \frac{RaC}{24}(y^4 - 2y^3 + y^2) + Pe[(y^3 - y^2) - a(y^3 - 2y^2 + y)] \quad (3.44)$$

Dans ce cas, la constante C est déterminée tout en se basant sur l'équation $-C + \int_0^1 u(y)\theta(y) = 1$, déduite de la condition (3.61) décrite dans le paragraphe 3.2.2.4 suivant, qui, lorsqu'elle est substituée aux équations (3.42) et (3.43), donne l'équation transcendante suivante :

$$\frac{Ra^2 C^3}{362880} + \frac{RaPe}{3360} (a + 1)C^2 + \left[\frac{Pe}{210} (2 + 3a + 2a^2) + 1 \right] C = 0 \quad (3.45)$$

la solution de cette équation par la méthode de Newton-Raphson, pour a , Pe et Ra connus, conduit à la constante C .

3.2.2.3. Solution analytique : Cas d'un fluide non-Newtonien

Dans le cas d'un fluide non Newtonien, la solution analytique des équations (3.37) et (3.38) n'est possible que pour le cas d'une cavité doublement entraînée ($a = 1$) où le problème est de nature centro-symétrique qui simplifie considérablement une telle solution. Ainsi, l'intégration des équations (3.37) et (3.38), couplée aux conditions (3.49) et (3.41) et à l'équation (2.27), conduit aux expressions analytiques de la vitesse, de la fonction de courant et de la température. Cependant, une telle opération est difficile à réaliser en raison de la nature particulière des équations gouvernantes et nécessite donc un traitement numérique spécial. En raison du comportement rhéologique non linéaire du fluide et du changement de signe du/dy , induit par l'écoulement de retour, les expressions des vitesses sont différentes selon que $0 \leq y \leq y_1$, $y_1 \leq y \leq y_2$ ou $y_2 \leq y \leq 1$, où y_1 et $y_2 = 1 - y_1$ (symétrie centrale de l'écoulement) sont les valeurs pour lesquelles le gradient de vitesse s'annule ($du/dy = 0$).

En utilisant le fait que l'écoulement est symétrique par rapport à la ligne centrale horizontale passant par le centre de la cavité ($x = \frac{A}{2}, y = \frac{1}{2}$), le seul demi-plan ($0 \leq y \leq \frac{1}{2}$) doit être considéré pour traiter analytiquement le problème, tout en tenant compte des conditions de symétrie suivantes :

$$u\left(y = \frac{1}{2}\right) = \theta\left(y = \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (3.46)$$

traduisant la nature centro-symétrique du problème.

Pour simplifier les expressions de la vitesse, de la fonction de courant et de la température, la fonction $f(y) = (y^2 - y + y_1 - y_1^2)/2$ est introduite. Cette fonction satisfait non seulement les conditions aux limites sur les parois horizontales du système mais aussi l'équation de continuité (3.40).

Ainsi, $u(y)$, $\Psi(y)$ et $\theta(y)$ seront exprimées comme suit :

Pour $0 \leq y \leq y_1$:

$$u(y) = (Ra C)^{\frac{1}{n}} \int_y^0 [-f(y)]^{\frac{1}{n}} dy - Pe \quad (3.47)$$

$$\Psi(y) = (Ra C)^{\frac{1}{n}} F_1(y) - Pe y \quad (3.48)$$

$$\theta(y) = \text{Ra}^{\frac{1}{n}} \text{C}^{\frac{1}{n}+1} \int_0^y F_1(y) dy - \frac{\text{PeC}}{2} y^2 + \theta(0) \quad (3.49)$$

Pour $y_1 \leq y \leq \frac{1}{2}$:

$$u(y) = (\text{Ra C})^{\frac{1}{n}} \left[\int_{y_1}^y [f(y)]^{\frac{1}{n}} dy + \int_{y_1}^0 [-f(y)]^{\frac{1}{n}} dy \right] - \text{Pe} \quad (3.50)$$

$$\Psi(y) = (\text{Ra C})^{\frac{1}{n}} F_2(y) - \text{Pe } y \quad (3.51)$$

$$\theta(y) = \text{Ra}^{\frac{1}{n}} \text{C}^{\frac{1}{n}+1} \left[\int_{y_1}^y F_2(y) dy + \int_0^{y_1} F_1(y) dy \right] - \frac{\text{PeC}}{2} y^2 + \theta(0) \quad (3.52)$$

où, $F_1(y)$, $F_2(y)$ et $\theta(0)$ sont donnés par :

$$F_1(y) = \int_0^y \left[\int_y^0 [-f(y)]^{\frac{1}{n}} dy \right] dy \quad (3.53)$$

$$F_2(y) = \int_{y_1}^y \left[\int_{y_1}^y [f(y)]^{\frac{1}{n}} dy \right] dy + \int_0^{y_1} \left[\int_y^0 [-f(y)]^{\frac{1}{n}} dy \right] dy + (y - y_1) \int_{y_1}^0 [-f(y)]^{\frac{1}{n}} dy \quad (3.54)$$

$$\theta(0) = \frac{\text{PeC}}{8} - \text{Ra}^{\frac{1}{n}} \text{C}^{\frac{1}{n}+1} \left[\int_{y_1}^{\frac{1}{2}} F_2(y) dy + \int_0^{y_1} F_1(y) dy \right] \quad (3.55)$$

De plus, on note que, pour un indice de comportement, n , donné, y_1 dépend des nombres de Rayleigh, Ra , et de Peclet, Pe , et ces derniers paramètres semblent affecter la forme du profil de vitesse. Théoriquement, il a été constaté que lorsque $\text{Ra} < \text{Ra}_{\text{cr}}$, la valeur y_1 est négative, ce qui est inacceptable puisque $0 \leq y_1 \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, lorsque $\text{Ra} \leq \text{Ra}_{\text{cr}}$ (c'est-à-dire lorsque la convection forcée est prédominante), le profil de vitesse ne présente pas un extrema dans le demi-plan $(0 \leq y \leq \frac{1}{2})$ et les expressions de $u(y)$, $\Psi(y)$ et $\theta(y)$ sont réduites et exprimées sous les nouvelles formes suivantes :

$$u(y) = (\text{Ra C})^{\frac{1}{n}} \int_0^y \left[\frac{1}{2} (y^2 - y + K) \right]^{\frac{1}{n}} dy - \text{Pe} \quad (3.56)$$

$$\Psi(y) = (\text{Ra} C)^{\frac{1}{n}} F_4(y) - \text{Pe} y \quad (3.57)$$

$$\theta(y) = \text{Ra}^{\frac{1}{n}} C^{\frac{1}{n}+1} \left[\int_0^y F_4(y) dy - \int_0^{\frac{1}{2}} F_4(y) dy \right] + \frac{\text{Pe} C}{8} [1 - 4y^2] \quad (3.58)$$

ou $F_4(y) = \int_0^y \left[\int_0^y \left[\frac{1}{2}(y^2 - y + K) \right]^{\frac{1}{n}} dy \right] dy$ et K est une constante négative inconnue.

Le début de l'écoulement, Ra_{cr} , dû à la flottabilité et qui entraîne de tels extrema (minimum ou maximum au niveau du profil de la composante horizontale de la vitesse, $u(y)$), peut être exprimée comme suit

$$\text{Ra}_{\text{cr}} = \left(\frac{\text{Pe}}{D} \right)^n \left[\text{Pe}^2 \left(\frac{4}{D} \int_0^{\frac{1}{2}} F_3(y) y dy - \frac{2}{D^2} \int_0^{\frac{1}{2}} (F_3(y))^2 dy - \frac{1}{12} \right) - 1 \right] \quad (3.59)$$

avec $D = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2}(y^2 - y) \right]^{\frac{1}{n}} dy$ et $F_3(y) = \int_0^y \left[\int_0^y \left[\frac{1}{2}(y^2 - y) \right]^{\frac{1}{n}} dy \right] dy$.

La figure (3.5) représente l'évolution de Ra_{cr} correspondant au début de l'écoulement sous l'effet des forces de flottabilité, qui donne lieu à l'existence de y_1 entre 0 et 1/2, en fonction de Pe , pour différentes valeurs de n . Comme on peut le voir, Ra_{cr} augmente à la fois avec Pe et n , ce qui signifie que l'augmentation de ces derniers paramètres retarde le début de l'écoulement dû à la flottabilité et s'oppose ensuite à l'effet correspondant.

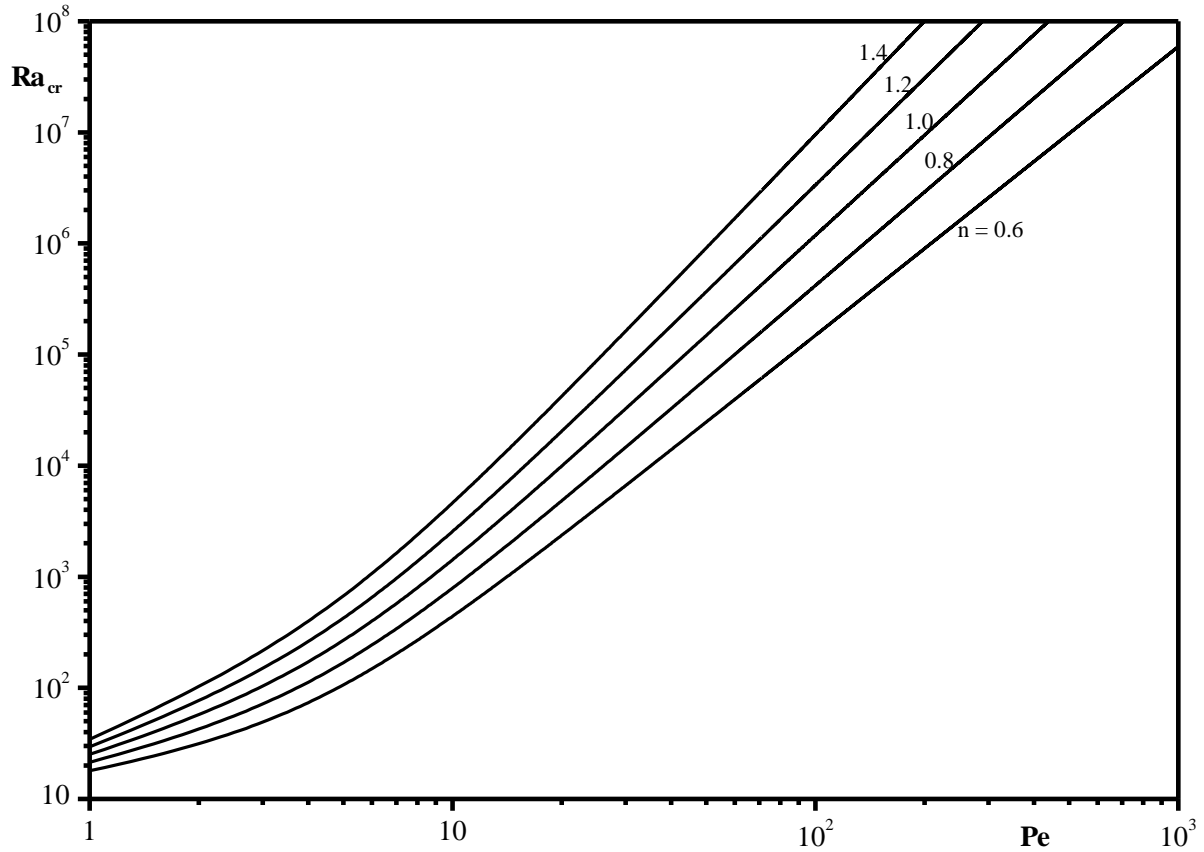


Figure 3.5 : Limite de l'apparition de y_1 pour différentes valeurs de n .

3.2.2.4. Evaluation des constantes y_1 , K et C

Rappelons que l'approximation d'écoulement parallèle n'est valable que dans la région centrale de la cavité. Cependant, l'écoulement dans les régions d'extrémité est beaucoup plus compliqué et ne peut pas être approximé d'une manière aussi simple. Pour cette raison, la condition aux limites thermique dans la direction x Eq. (2.28) ne peut pas être reproduite exactement avec cette approximation. Néanmoins, une condition de flux d'énergie équivalente peut être imposée dans cette direction (Bejan 1983) :

$$-\int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} dy + \int_0^1 uT dy = -\int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0 \text{ ou } A} dy \quad (3.60)$$

En appliquant les conditions aux limites (2.28) et l'équation (3.36) dans la région de l'écoulement parallèle et en tenant compte de la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe horizontal passant par le centre de la cavité, l'équation (3.60) devient:

$$-C + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} u(y)\theta(y) dy = 1 \quad (3.61)$$

qui, compte tenu des équations (2.27), (3.38), (3.39) et (3.46), peut être réécrite de la manière suivante :

$$2C \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(y)^2 dy + C + 1 = 0 \quad (3.62)$$

En substituant les expressions de la fonction de courant, $\Psi(y)$, dans l'équation (3.62) et en intégrant, nous obtenons l'équation transcendante suivante :

$$2C^{\frac{2}{n+1}} Ra^{\frac{2}{n}} A_n - 4PeC^{\frac{1}{n+1}} Ra^{\frac{1}{n}} B_n + \frac{C Pe^2}{12} + C + 1 = 0 \quad (3.63)$$

ou A_n et B_n sont des coefficients qui dépendent de n et de (y_1 ou K) et sont exprimés comme suit :

Pour $Ra > Ra_{cr}$:

$$A_n = \int_0^{y_1} F_1(y)^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 F_2(y)^2 dy \quad \text{et} \quad B_n = \int_0^{y_1} F_1(y) y dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 F_2(y) y dy \quad (3.64)$$

Pour $Ra \leq Ra_{cr}$:

$$A_n = \int_0^{\frac{1}{2}} F_4(y)^2 dy \quad \text{et} \quad B_n = \int_0^{\frac{1}{2}} F_4(y) y dy \quad (3.65)$$

Afin de compléter la solution de l'équation (3.63), la condition hydrodynamique (3.46) doit être vérifiée puisque C et (y_1 ou K) sont tous les deux inconnus. Ainsi, en tenant compte des équations (3.46), (3.50) et (3.56), on obtient la relation suivante :

$$RaC = \left(\frac{Pe}{E_n} \right)^n \quad (3.66)$$

avec $E_n = \int_{y_1}^{\frac{1}{2}} [f(y)]^{\frac{1}{n}} dy + \int_{y_1}^0 [-f(y)]^{\frac{1}{n}} dy$ et $E_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} (y^2 - y + K) \right]^{\frac{1}{n}} dy$ pour $Ra > Ra_{cr}$ et $Ra \leq Ra_{cr}$, respectivement.

L'insertion de l'équation (3.66) dans l'équation (3.63), conduit à l'équation transcendante suivante :

$$2 \left(\frac{Pe}{E_n} \right)^{n+2} [A_n - 2E_n B_n] + \left(\frac{Pe}{E_n} \right)^n \left[\frac{Pe^2}{12} + 1 \right] + Ra = 0 \quad (3.67)$$

La solution de l'équation (3.67), en utilisant une combinaison de la méthode itérative de dichotomie et de la méthode d'intégration de Gauss-Legendre, pour n , Pe et Ra donnés, conduit à y_1 (pour $Ra > Ra_{cr}$) et K (pour $Ra \leq Ra_{cr}$). Une fois les valeurs de y_1 et K sont obtenues, le gradient de température constant, C , dans la direction horizontale peut être obtenu à partir de l'équation (3.66). Pour information, les valeurs de y_1 sont présentées dans les figures (3.6-3.8), en fonction de Ra , pour différentes valeurs de n et Pe . Ces figures montrent que y_1 est une fonction croissante/ (décroissante) de n et $Ra/ (Pe)$, ce qui signifie que la vitesse maximale s'éloigne/ (se rapproche) de la paroi inférieure en augmentant n ou $Ra/ (Pe)$. Pour un couple donné ($n, Pe \neq 0$), lorsque $Ra \rightarrow Ra_{cr}$, $y_1 \rightarrow 0$, tandis que $Ra \rightarrow \infty$, y_1 tend vers une valeur asymptotique qui ne dépend que de n et correspond à un transfert de chaleur par convection naturelle pure ($Pe = 0$).

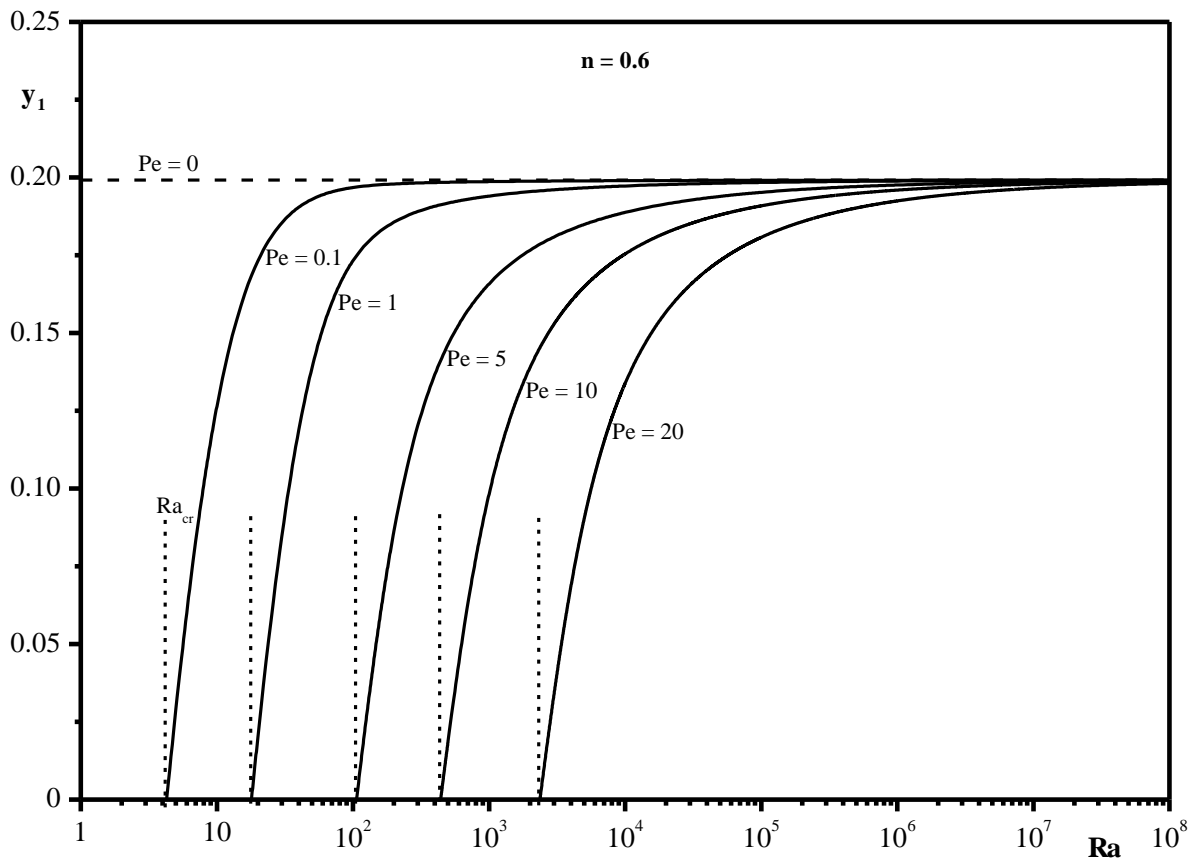


Figure 3.6 : Dépendance de y_1 de Ra et Pe pour $n = 0.6$

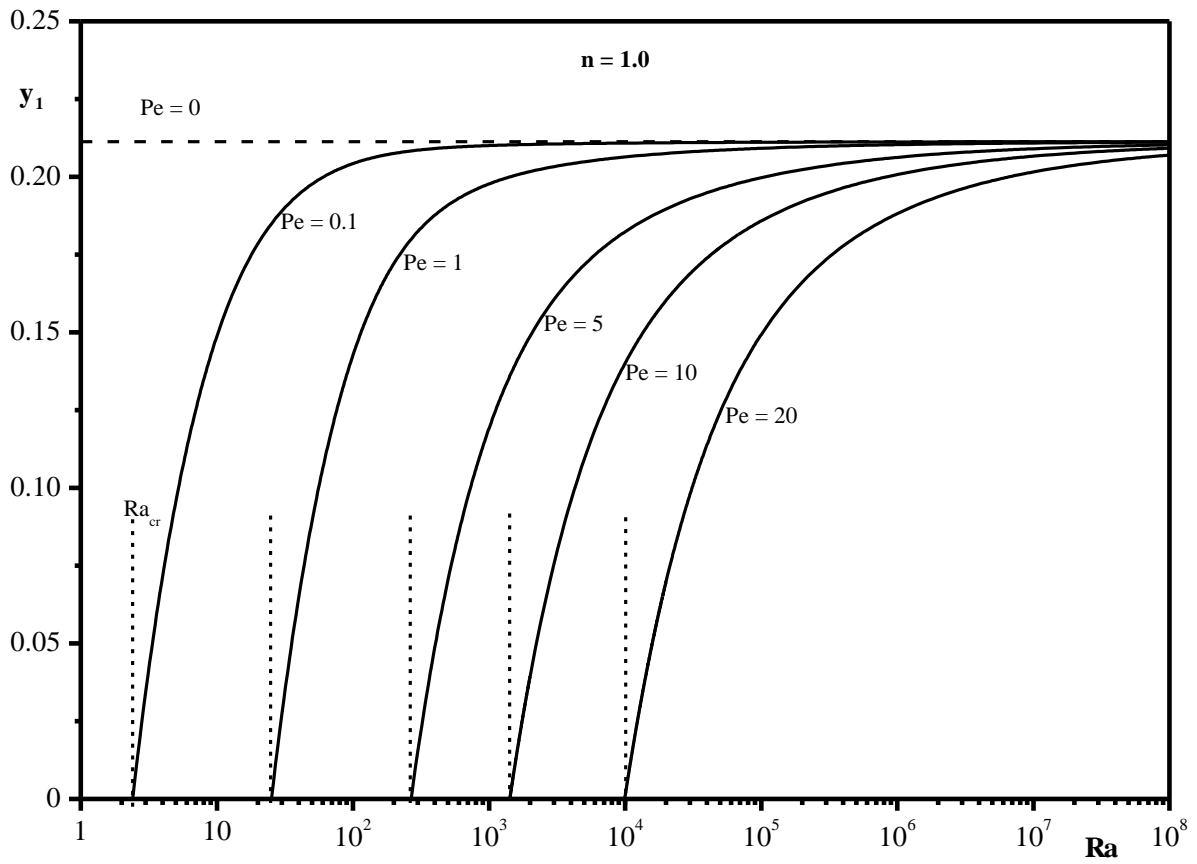


Figure 3.7 : Dépendance de y_1 de Ra et Pe pour $n = 1$

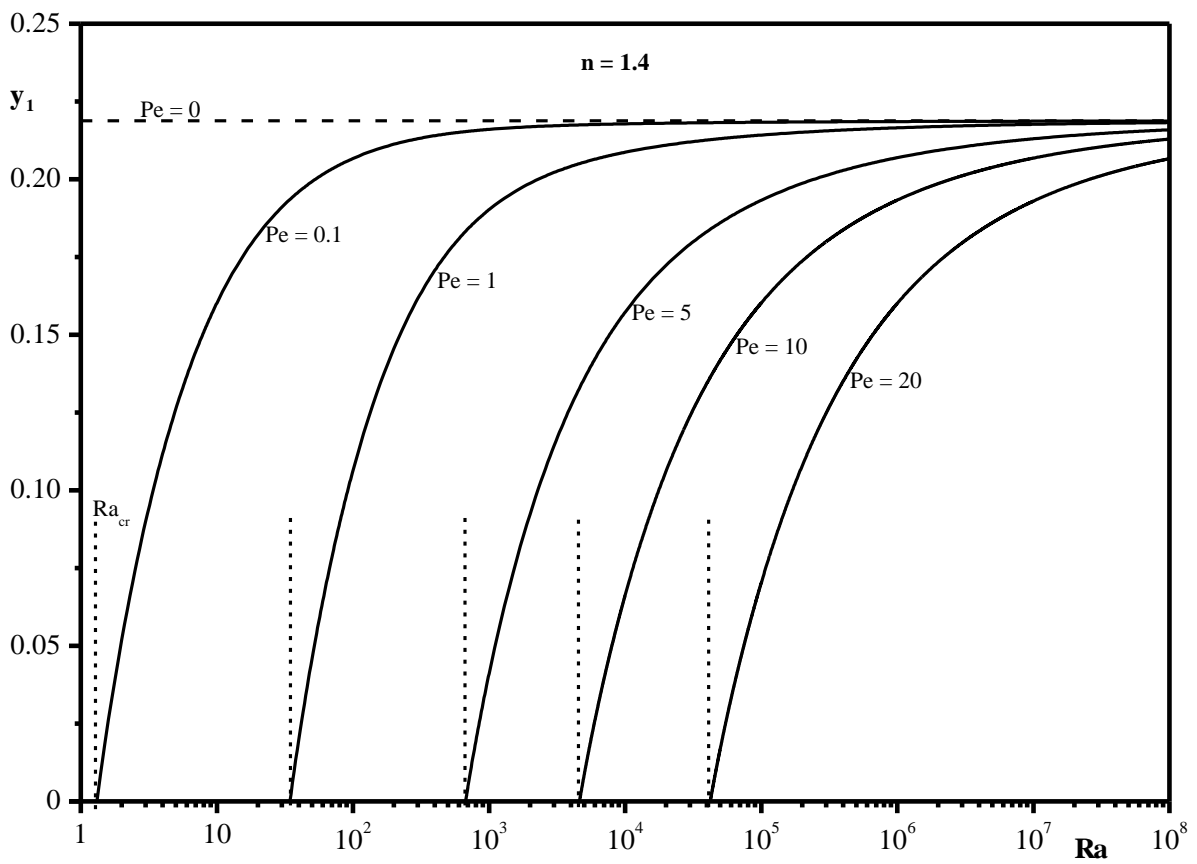


Figure 3.8 : Dépendance de y_1 de Ra et Pe pour $n = 1.4$

Enfin, en tenant compte des équations (2.34, 3.36), le nombre de Nusselt moyen peut être exprimé comme suit

$$\overline{Nu} = -\frac{1}{C} \quad (3.68)$$

3.2.2.5. Cas particuliers : Convections naturelle et forcée pures

Notant que, dans le cas de la convection naturelle pure (c-à-d : $Pe = 0$), on a $Ra_{cr} = 0$, $E_n = 0$ et les valeurs de y_1 , A_n et B_n ne dépendent que de l'indice de comportement, n , (voir Lamsaadi et al. (2006)). Telles valeurs sont présentées dans le tableau 3.3.

Pour n donné, il n'y a pas de dépendance entre y_1 et Ra , et par conséquent ce dernier ne semble pas affecter la forme du profil de vitesse dans le cas de la convection naturelle pure.

n	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
y_1	0.19914	0.20608	0.21132	0.21544	0.21876
A_n	0.24246 10 ⁻⁷	0.29989 10 ⁻⁶	0.13778 10 ⁻⁵	0.38394 10 ⁻⁵	0.80202 10 ⁻⁵
B_n	0.31701 10 ⁻⁴	0.11142 10 ⁻³	0.23871 10 ⁻³	0.39830 10 ⁻³	0.57547 10 ⁻³

Tableau 3.3 : Dépendance de y_1 , A_n et B_n de n pour la convection naturelle pure

Dans ce cas, l'approche d'écoulement parallèle conduit à l'équation transcendante suivante :

$$2C^{\frac{2}{n+1}} Ra^{\frac{2}{n}} A_n + C + 1 = 0 \quad (3.69)$$

dont la solution approximative, qui est une solution originale, est exprimée par :

$$C = -\frac{\left[1 + Ra^{\frac{2}{n+2}} (2A_n)^{\frac{n}{n+2}}\right]^{\frac{1+n}{2n}}}{1 + Ra^{\frac{2}{n+2}} (2A_n)^{\frac{n}{n+2}} \left[1 + Ra^{\frac{2}{n+2}} (2A_n)^{\frac{n}{n+2}}\right]^{\frac{1+n}{2n}}} \quad (3.70)$$

et qui concorde bien avec celle obtenue par la méthode de Newton-Raphson (voir la figure 3.9).

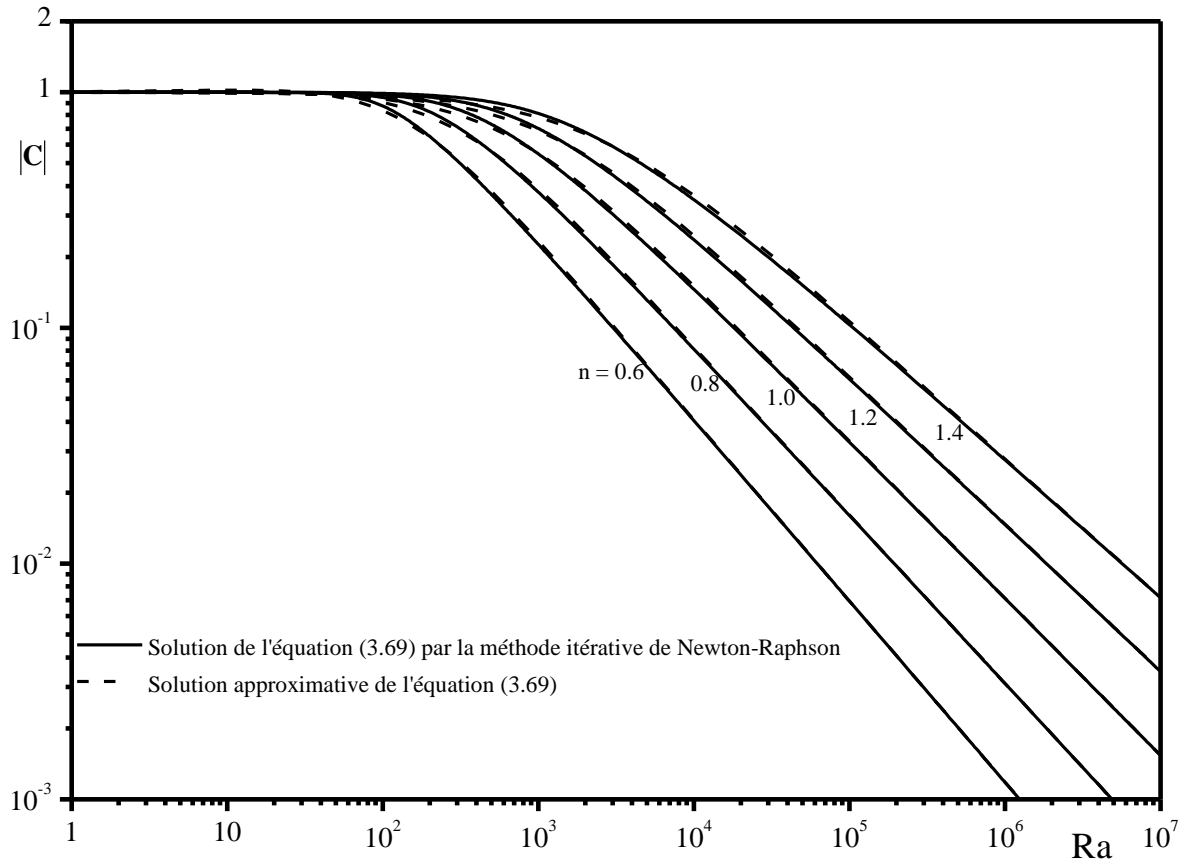


Figure 3.9 : Comparaison entre les solutions de l'équation (3.69)

En se référant à l'équation (3.68), le nombre de nuselt moyen, \overline{Nu} , en convection naturelle pure, peut être exprimé comme suit :

$$\overline{Nu} = Ra^{\frac{2}{n+2}}(2A_n)^{\frac{n}{n+2}} + \frac{1}{\left[1 + Ra^{\frac{2}{n+2}}(2A_n)^{\frac{n}{n+2}}\right]^{\frac{1+n}{2n}}} \quad (3.71)$$

Il convient de rappeler que, le cas $Ra = 0$ correspond à la convection forcée pure pour laquelle les forces de flottabilité sont absentes. Dans un tel cas, l'équation transcendante, pour une cavité doublement ou simplement entraînée, est :

$$\left[\frac{2 + 3a + 2a^2}{210} Pe^2 + 1 \right] C + 1 = 0 \quad (3.72)$$

et la constante C peuvent être explicitement déduite comme :

$$C = \frac{-1}{\frac{2 + 3a + 2a^2}{210} Pe^2 + 1} \quad (3.73)$$

conduisant à \overline{Nu} , en convection forcée pure :

$$\overline{Nu} = \frac{2 + 3a + 2a^2}{210} Pe^2 + 1 \quad (3.74)$$

Ces résultats obtenus, pour le cas de la convection forcée, sont indépendants de la nature du fluide (indice de comportement n). Ceci est dû à l'absence des forces de flottabilité et au grand rapport d'aspect de la cavité ($A \rightarrow \infty$) où le confinement latéral est négligeable par rapport à celui horizontal et l'écoulement est adhérent par les parois horizontales mobiles ayant des grandes surface. Tels résultats sont confirmés numériquement dans les paragraphes suivants.

Enfin, dans la présente étude, il est à noter que, dans les régimes naturel et forcé, un régime de couche limite peut être atteint pour les grandes valeurs des nombres de Rayleigh et de Peclet, respectivement, et il est facile de trouver à partir des équations (3.71) et (3.74) que :

$$\overline{Nu} = (2A_n)^{\frac{n}{n+2}} Ra^{\frac{2}{n+2}} \text{ (Convection naturelle) } \quad (3.75)$$

$$\overline{Nu} = \frac{Pe^2}{30} \text{ (Convection forcée) } \quad (3.76)$$

Dans la section suivante, l'ordre de grandeur obtenu par (3.75) et (3.76) du taux de transfert de chaleur, en fonction de Ra et Pe pour tels régimes, est confirmé par une analyse d'échelle.

3.2.3. Analyse d'échelle

Dans ce paragraphe, une analyse d'échelle est effectuée pour dévoiler le comportement de l'écoulement et du transfert thermique, en fonction du nombre de Rayleigh, Ra , (convection naturelle pure), du nombre de Peclet, Pe , (convection forcée pure) et de l'indice de comportement, n , tout en supposant l'existence d'un régime de couche limite dans les régions adjacentes aux parois verticales, une stratification thermique dans la région centrale de la cavité pour $A \gg 1$ et que les termes d'inertie sont négligeables lorsque $Pr \geq 1$.

Dans la région de la couche limite, où la plupart des mouvements de fluides sont limités à une couche mince $\delta x \ll A$ le long de chaque paroi verticale, soit du l'ordre de grandeur de la vitesse dans la région centrale de la cavité et ΔT les changements de la différence de température verticale. Les équations (2.20-2.23) et (2.30) nécessitent l'équilibre suivant :

$$\delta u^n \sim C Ra \text{ et } \delta u \sim C \Delta T \text{ (Convection naturelle) } \quad (3.77)$$

$$C \sim \frac{\Delta T}{Pe} \text{ (Convection forcée)} \quad (3.78)$$

A partir de l'équation (3.16) et de la condition de flux d'énergie équivalent, il est facile de trouver que :

$$\delta u \Delta T \sim 1 \text{ (Convection naturelle)} \quad (3.79)$$

$$\Delta T \sim Pe^{-\frac{1}{2-n}} \text{ (Convection forcée)} \quad (3.80)$$

Enfin, la résolution des équations (3.77) à (3.80) donne :

$$\delta u \sim Ra^{\frac{1}{n+2}}, \Delta T \sim Ra^{-\frac{1}{n+2}}, C \sim Ra^{-\frac{2}{2+n}} \text{ (Convection naturelle)} \quad (3.81)$$

$$\Delta T \sim Pe^{-1}, C \sim Pe^{-2} \text{ (Convection forcée)} \quad (3.82)$$

3.3. Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons présenté l'historique de développement de la méthode des volumes finies. Aussi, nous avons exposé les étapes à suivre pour la mise en œuvre informatique notamment l'organigramme et l'algorithme suivit pour l'élaboration de codes de calcul utilisés. Dans une autre partie nous avons présenté l'approximation de l'écoulement parallèle comme une approche analytique pour la résolution des équations gouvernantes. La comparaison entre les deux approches sera discutée dans les chapitres suivants.

CHAPITRE 4

Corrélations de transfert de chaleur par convection mixte dans des cavités rectangulaires allongées entraînées et chauffées latéralement : Cas d'un fluide Newtonien

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au cas de la cavité chauffée latéralement, par une densité de flux de chaleur constante, confinant un fluide Newtonien ($n = 1$) et dont les parois horizontales sont isolées. L'étude aborde une cavité de rapport de forme $A = 24$ en deux cas. Dans le premier cas, toutes les parois sont fixes à part celle supérieure qui est animée d'un mouvement uniforme dans le même sens que celui de la densité du flux de chaleur. Dans le deuxième cas, les parois horizontales partagent la même vitesse dans deux sens opposés (la paroi supérieure se déplace dans le sens du flux au contraire de celle inférieure qui se déplace dans le sens opposé).

4.2. Choix du maillage

La précision des résultats numériques est liée au choix du maillage, qui dépend du rapport de forme de la cavité, A , et de la nature de la solution. Comme le laisse présager la nature des conditions aux limites thermiques, pour $A \gg 1$ le problème peut avoir une solution analytique loin des bords latéraux. Pour optimiser le temps de calcul tout en préservant la précision, des essais préliminaires ont été conduits avec des tailles de grille variées pour $A=24$ (les raisons du choix de cette valeur sont précisées par la suite). La procédure suivie consiste à raffiner le maillage jusqu'à recouvrer raisonnablement les résultats analytiques.

Pe	Solution numérique					Solution analytique
	(341×121)	(421×121)	(381×121)	(381×161)	(381×81)	
0.1	6.8773	6.8773	6.8773	6.8761	6.8808	6.8745
0.5	6.9422	6.9422	6.9422	6.9410	6.9457	6.9394
5	7.7514	7.7514	7.7514	7.7514	7.7551	7.7485
25	13.7977	13.7977	13.7977	13.7962	13.8018	13.7944
50	30.1091	30.0829	30.0936	30.0926	30.0966	30.0642
100	99.5491	99.4279	99.4741	99.4747	99.4724	99.2643
150	218.0696	217.8088	217.9231	217.9258	217.9152	217.3456
200	384.9385	384.5569	384.7260	384.7312	384.7107	383.5063

Tableau 4.1: tests de convergence de \overline{Nu} pour $A = 24$, $Ra = 10^4$ et différentes valeurs de Pe pour une cavité simplement entraînée ($a = 0$)

Pe	Solution numérique					Solution analytique
	(341×121)	(421×121)	(381×121)	(381×161)	(381×81)	
0.1	6.8934	6.8934	6.8934	6.8922	6.8969	6.8906
0.5	7.0244	7.0244	7.0244	7.0232	7.0279	7.0216
5	8.7912	8.7912	8.7912	8.7898	8.7951	8.7881
25	27.5924	27.5924	27.5924	27.5910	27.5966	27.5892
50	87.9333	87.8298	87.8727	87.8717	87.8754	87.7604
100	337.0214	336.7170	336.8514	336.8508	336.8529	336.1068
150	754.4207	753.9114	754.1381	754.1368	754.1417	752.1875
200	1348.0362	1347.1129	1347.5314	1347.5147	1347.579	1335.225

Tableau 4.2 : tests de convergence de \overline{Nu} pour $A=24$, $Ra = 10^4$ et différentes valeurs de Pe pour une cavité doublement entraînée ($a = 1$)

Comme le montre les deux tableaux ci-dessus, ceux qui comparent les valeurs numérique et analytique du nombre de Nusselt moyen, un maillage uniforme de 381×121 est jugé suffisant pour modéliser convenablement l'écoulement et le transfert de chaleur au sein de la cavité considérée. Ce maillage est adopté pour tous les résultats numériques présentés dans ce travail.

4.3. Détermination de la valeur de A satisfaisant l'approximation du grand rapport d'aspect

Dans ce paragraphe, l'objectif est de déterminer la valeur inférieure du rapport de forme A , conduisant à des résultats de transfert de chaleur en accord avec ceux obtenus analytiquement. Ainsi, l'effet de rapport d'aspect, A , sur le nombre de Nusselt moyen, \overline{Nu} , évalué numériquement, est illustré sur les figures 4.1 et 4.2, pour un nombre de Rayleigh, $Ra = 10^4$ et différentes valeurs du nombre de Peclet Pe . On constate, une augmentation de A conduit à un comportement asymptotique de \overline{Nu} , qui semble moins précoce pour une cavité doublement entraînée que pour une cavité simplement entraînée, en raison des conditions aux limites cinématiques horizontales, et ce plus particulièrement pour la convection forcée ($Pe \geq 100$). Ainsi, pour toutes les valeurs de Pe considérées et pour les deux cas de cavité entraînée, les limites analytiques asymptotiques sont largement atteintes pour $A = 24$, qui se réduit à 8 en convection naturelle pure comme l'ont montré Lamsaadi et al. (2006), soulignant ainsi le rôle retardateur des parois entraînées vis-à-vis de l'état asymptotique. De plus, les résultats analytiques et numériques concordent parfaitement, ce qui valide chaque approche analytique, le code de calcul et justifie le choix de la valeur asymptotique de A . En outre, une bonne conformation, d'un tel fait peut être obtenue par la comparaison entre les courbes numériques et analytiques représentées ci-dessous (figures 4.1 et 4.2), dans la limite des valeurs explorées ($Ra \leq 5 \times 10^6$, $Pe \leq 500$).

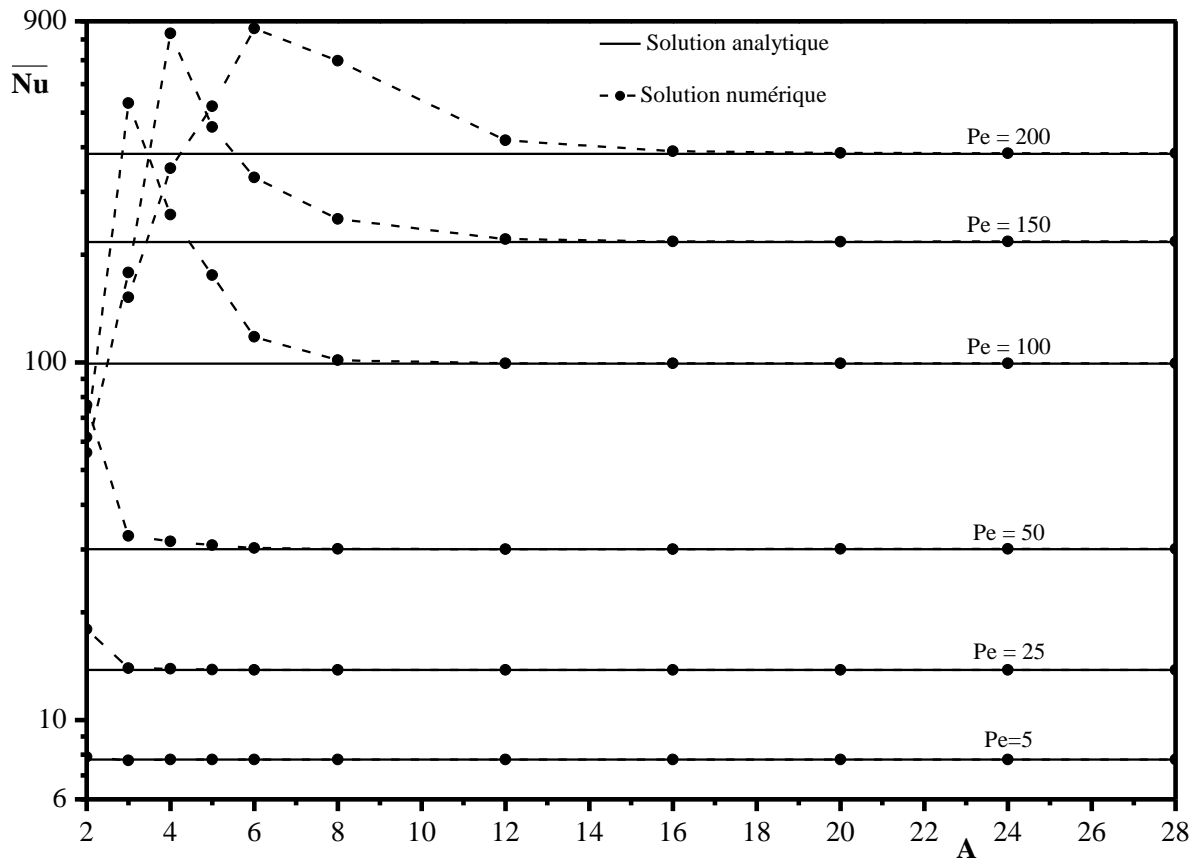


Figure 4.1 : Évolution de \overline{Nu} avec A pour une cavité simplement entrainée : $Ra = 10^4$ et diverse valeurs de Pe .

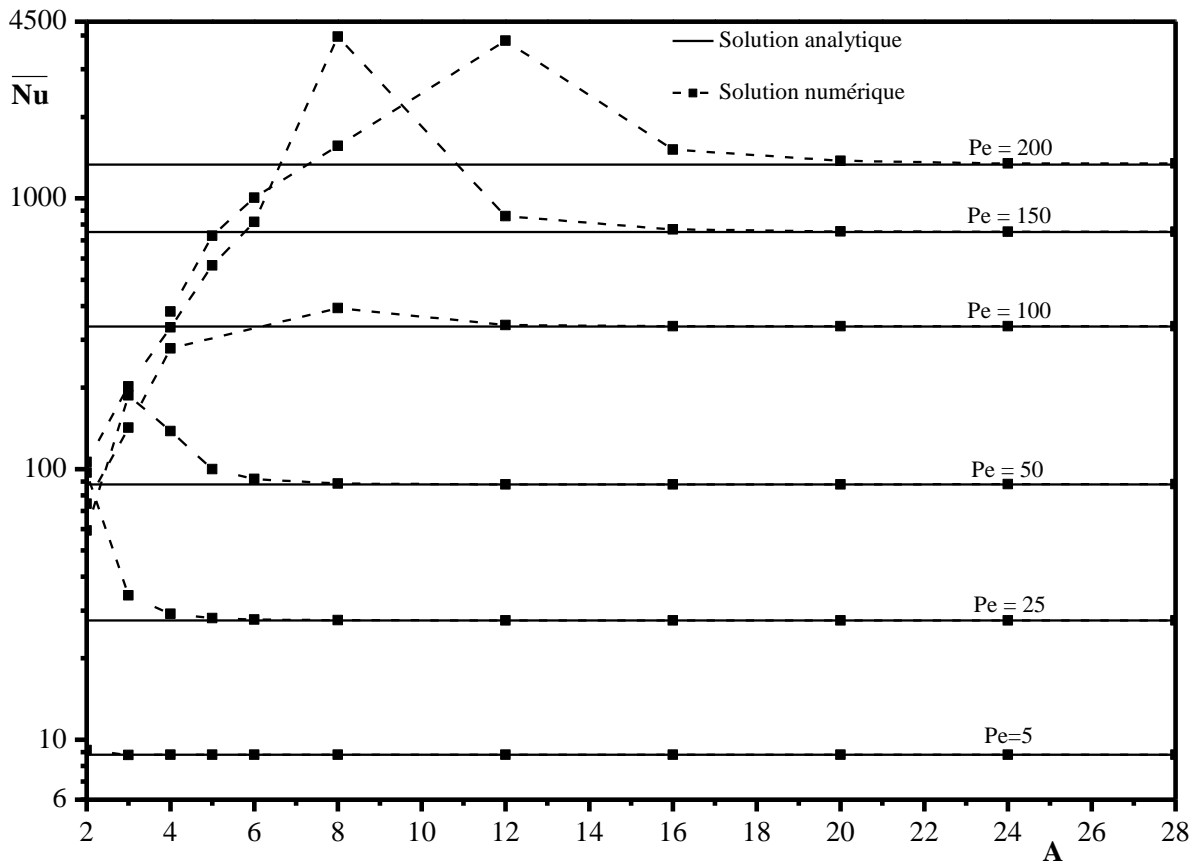


Figure 4.2 : Évolution de \overline{Nu} avec A pour une cavité doublement entrainée : $Ra = 10^4$ et diverse valeurs de Pe .

4.4. Détermination des paramètres contrôlant la convection mixte

Plusieurs configurations géométriques ont été considérées dans le passé et les travaux correspondants ont été rapportés dans la littérature. Il a été constaté que le paramètre Gr/Re^n (nombre de Richardson modifié ou paramètre de convection mixte), où l'exposant n dépend de la géométrie, des conditions aux limites thermiques et de la nature du fluide, est systématiquement approprié pour délimiter les régimes de convection. Par exemple, Eckert et Diaguila (1954) ont étudié la convection mixte dans un tube vertical rempli d'air et ont montré que le transfert de chaleur diffère d'environ de 10% de celui lié à la convection naturelle pure lorsque $Gr/Re^{2.5} > 0.007$, alors que la même déviation de la convection forcée a été observée pour $Gr/Re^{2.5} < 0.0016$. Siebers et al. (1983) ont étudié la convection mixte le long d'une plaque verticale chauffée par un flux uniforme et ont observé que le transfert de chaleur est principalement assuré par la convection forcée/ (convection naturelle) lorsque $Gr/Re^2 < 0.7$ / ($Gr/Re^2 > 10$). Pour les écoulements sur des plaques planes isothermes, Sparrow et Gregg (1959) ont trouvé que la chaleur est principalement transportée par la convection forcée lorsque $Gr/Re^2 < 0.15 \times f(Pr)$, avec $0.01 < Pr < 10$. D'autre part, pour les milieux confinés, Turki et al (1990) ont trouvé que, pour les écoulements d'un fluide Newtonien remplissant une forme géométrique carrée, l'exposant n et les limites du régime de convection mixte sont sensibles à tout changement de la valeur du nombre de Prandtl (Pr). Ainsi, pour délimiter un tel régime, les critères $0.5 < Gr/Re^{1.9} < 31$ et $24.4 < Gr/Re^{1.2} < 293.4$ ont été établis pour $Pr = 1$ et $Pr = 6.97$, respectivement.

Dans ce travail, le rapport Ra/Pe^3 apparaît clairement comme un paramètre délimitant les trois régimes quelle que soit la valeur de Pr , en faisant correspondre les deux relations asymptotiques (3.75) et (3.76). Ceci est illustré dans les figures ci-dessous. Notez qu'il est pratiquement intéressant, dans les calculs de transfert de chaleur, de distinguer les conditions dans lesquelles une convection donnée peut être considérée comme pure (naturelle ou forcée) de celles dans lesquelles elle peut être considérée comme mixte. L'importance de cette question découle du fait que souvent, seuls les résultats pour une convection pure sont disponibles. Dans ce travail, une convection sera considérée comme effectivement pure (qu'elle soit naturelle ou forcée) si le transfert de chaleur ne s'écarte pas de plus de 5% de la valeur associée à la convection complètement pure. Le critère de 5% est utilisé pour déterminer les paramètres caractérisant la convection mixte dans des cavités rectangulaires simplement et doublement entraînées, remplies d'un fluide Newtonien. Ainsi, afin de

différencier les trois régimes de convection (convection forcée, naturelle et mixte), les différences relatives suivantes sont introduites :

$$\varepsilon_f = \frac{|\overline{Nu} - \overline{Nu}_f|}{\overline{Nu}_f} \text{ et } \varepsilon_n = \frac{|\overline{Nu} - \overline{Nu}_n|}{\overline{Nu}_n} \quad (4.1)$$

où \overline{Nu}_f et \overline{Nu}_n sont respectivement les nombres de Nusselt moyens obtenus en convections forcée et naturelle pures. Il est supposé que la convection forcée/ (convection naturelle) est prédominante lorsque ces deux conditions $\varepsilon_f < 5\%$ / ($\varepsilon_n < 5\%$) sont vérifiées. Dans le cas contraire, le régime convectif est qualifié de mixte.

Sur la base de l'équation (4.1), les calculs effectués pour Pe et Ra , variant dans leurs plages explorées, permettent de construire le diagramme présenté sur la figure 4.3.

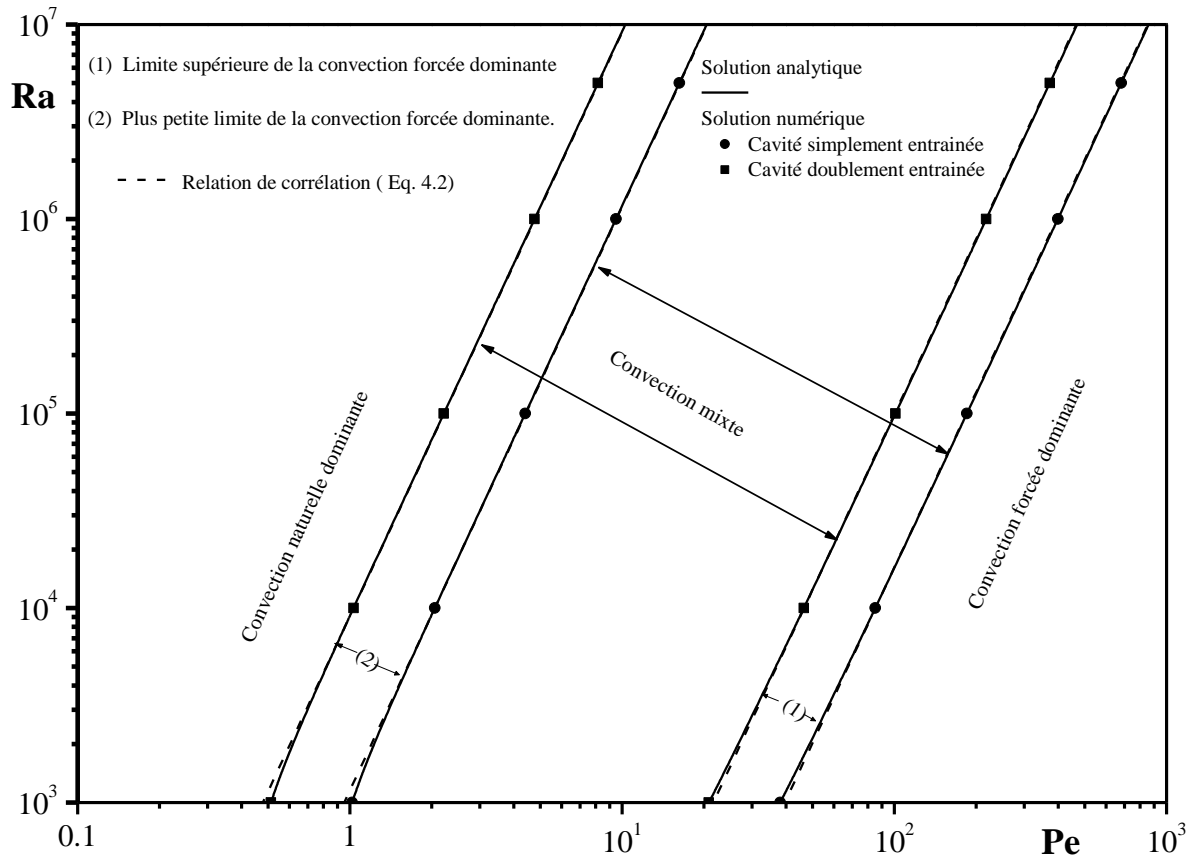


Figure 4.3 : Diagramme caractérisant les différents régimes convectifs

Pour les deux cas de cavité entraînée, les emplacements des points ($\log(Ra)$, $\log(Pe)$), obtenus analytiquement (lignes pleines) et numériquement (symboles) et correspondant approximativement à $\varepsilon_f = \varepsilon_n = 5\%$ sont organisées en lignes droites presque parallèles. Ces résultats sont corrélés dans les formes mathématiques suivantes :

$$\frac{Ra}{Pe^3} = \eta_n \text{ et } \frac{Ra}{Pe^3} = \eta_f \quad (4.2)$$

correspondant, respectivement, aux convections naturelle et forcée, où η_n et η_f sont des coefficients dépendant de la nature des conditions aux limites cinématiques appliquées aux surfaces horizontales de la couche du fluide. Leurs valeurs sont indiquées dans le tableau 4.3 et illustrées sur la figure 4.3 par des lignes pointillées.

Régime de convection	Convection naturelle	Convection forcée
	η_n	η_f
Cavité simplement entraînée	1156.2824	0.01612
Cavité doublement entraînée	9105.0833	0.09880

Tableau 4.3 : valeurs de η_n et η_f

Comme on peut le voir, la concordance entre la solution de l'écoulement parallèle et la solution numérique est excellente avec une déviation maximale ne dépassant pas 2%. En outre, les lignes droites définies par l'équation (4.2) séparent le plan (Ra, Pe) en trois zones pour chaque type de cavité entraînée. La première zone, située sous la droite (1), est caractérisée par la dominance de la convection forcée. La deuxième zone, située au-dessus de la ligne droite (2), correspond au régime dominant de convection naturelle. Enfin, la troisième zone, délimitée par les deux lignes droites, est liée à la situation où les deux phénomènes sont en compétition (régime de convection mixte). Cette dernière zone se traduit par des valeurs plus élevées du nombre de Peclet (Pe), lors du passage de la cavité doublement entraînée à celle simplement entraînée. Cela montre clairement que la transition d'un régime à l'autre, pour une même valeur de Pe , nécessite une force de flottabilité élevée pour le cas d'une cavité doublement entraînée.

En résumé, le régime de convection mixte dans une cavité rectangulaire allongée, remplie d'un fluide Newtonien et soumise à une densité de flux thermique uniforme de ses petits côtés verticaux, est défini par les critères suivants respectivement, pour la cavité simplement entraînée et la cavité doublement entraînée :

$$0.01612 < \frac{Ra}{Pe^3} < 1156.2824 \text{ et } 0.0988 < \frac{Ra}{Pe^3} < 9150.0833 \quad (4.3)$$

4.5. Structures dynamique et thermique

Des lignes de courant (à gauche) et des isothermes (à droite) sont représentées sur les figures 4.4 (cavité simplement entraînée) et 4.5 (cavité doublement entraînée) pour un nombre de Rayleigh $Ra = 10^4$ et différentes valeurs du nombre de Peclet (Pe).

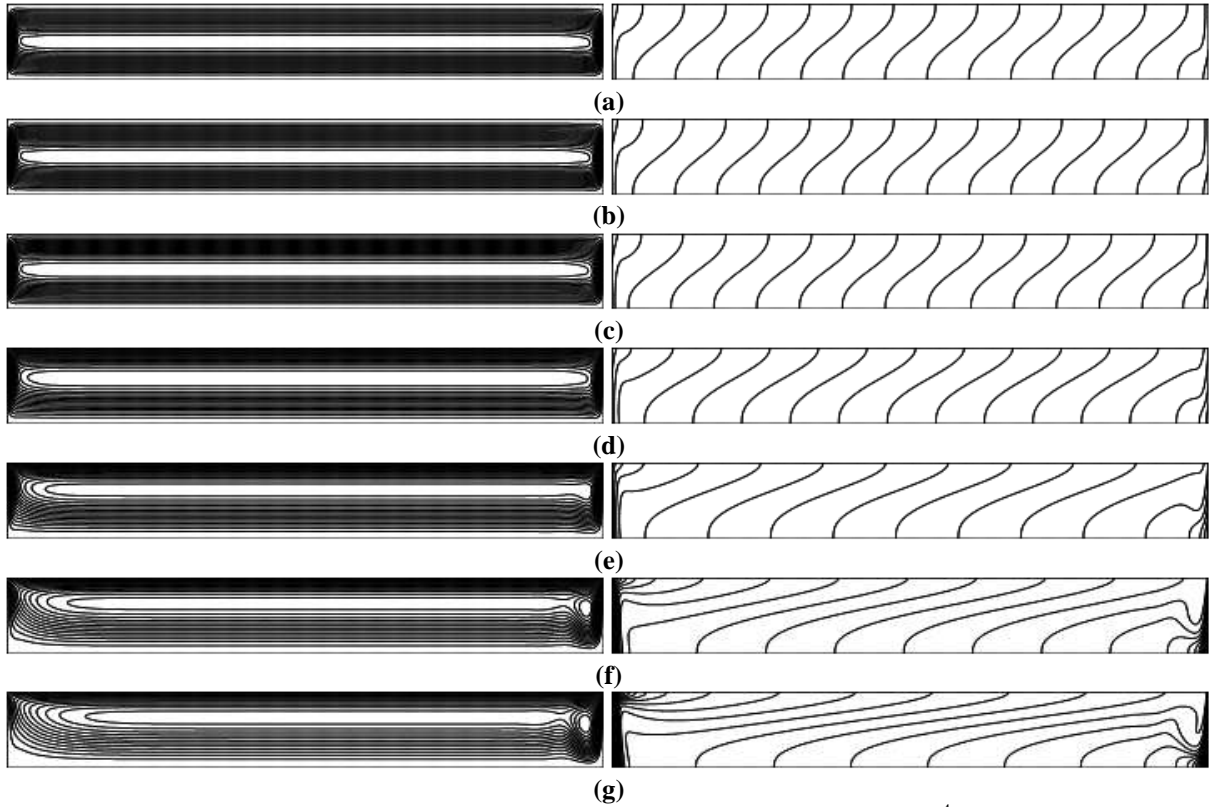


Figure 4.4 : Lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour $A = 24$, $Ra = 10^4$ et différentes valeurs de Pe : (a) $Pe = 0,1$, (b) $Pe = 0,5$, (c) $Pe = 5$, (d) $Pe = 25$, (e) $Pe = 50$, (f) $Pe = 100$ et (g) $Pe = 150$
Cas d'une cavité simplement entraînée

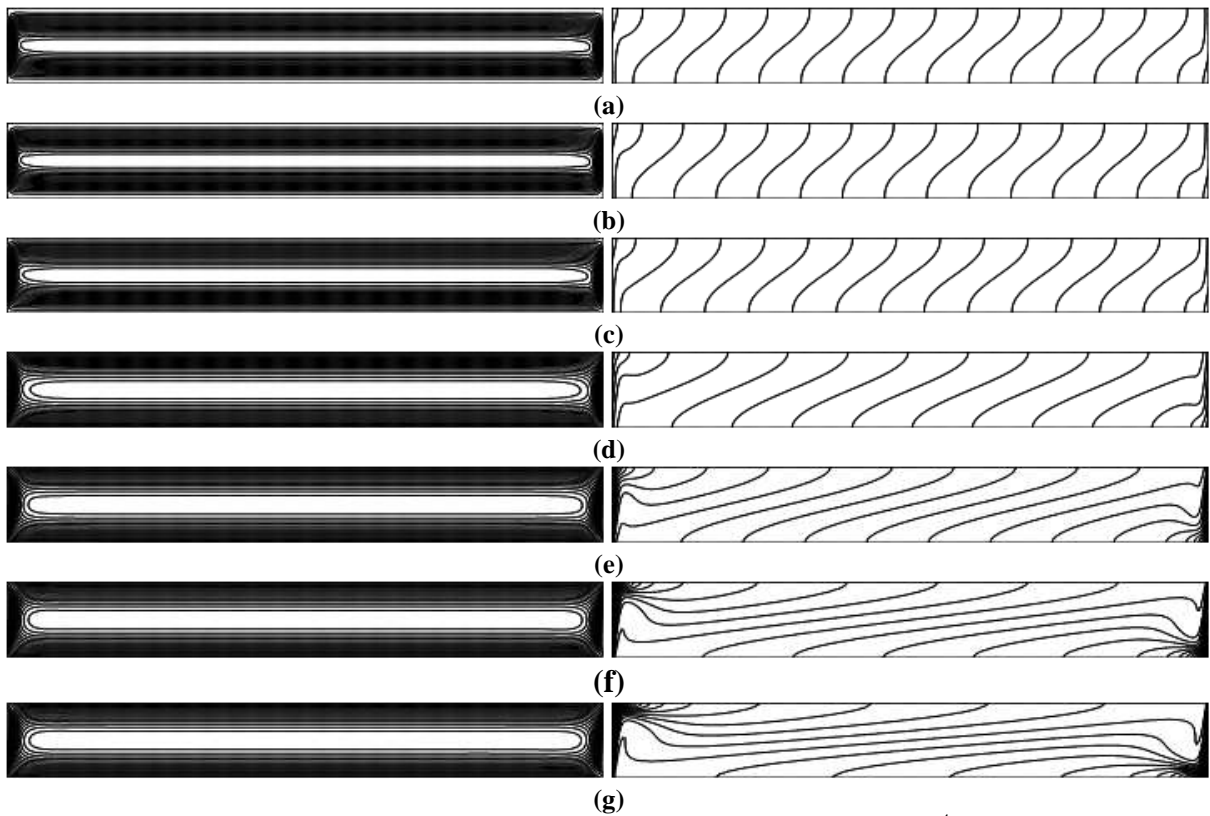


Figure 4.5 : Lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour $A = 24$, $Ra = 10^4$ et différentes valeurs de Pe : (a) $Pe = 0,1$, (b) $Pe = 0,5$, (c) $Pe = 5$, (d) $Pe = 25$, (e) $Pe = 50$, (f) $Pe = 100$ et (g) $Pe = 150$
Cas d'une cavité doublement entraînée

Il est intéressant de noter que l'écoulement est bel et bien unicellulaire s'effectuant dans le sens des aiguilles d'une montre, en raison de la coopération entre les effets de flottabilité et de cisaillement, qui agissent ensemble de gauche à droite. De même, à l'exception des extrémités de la cavité où le flux subit une rotation de 180° , les champs dynamiques et thermiques présentent des aspects parallèles et linéairement stratifiés selon la direction horizontale à l'intérieur de la zone centrale de l'enceinte. En revanche, pour des valeurs relativement élevées de Pe , les lignes de courant et les isothermes semblent être plus sensibles aux conditions aux limites cinématiques horizontales, puisque la symétrie centrale de la cellule convective disparaît et que l'inclinaison des isothermes, par rapport à la direction verticale, augmente lors du passage de conditions aux limites identiques (deux parois mobiles) à des conditions aux limites mixtes (une seule paroi mobile). Cependant, pour une faible valeur de Pe , l'effet de ces conditions sur la symétrie centrale des isolignes n'apparaît pas clairement. Ainsi, une diminution de Pe (c'est-à-dire lorsque $\frac{Ra}{Pe^3} > \eta_n$), exerce un effet de flottabilité plus important, ce qui donne lieu à des schémas dynamiques et thermiques pratiquement identiques à ceux obtenus en convection naturelle pure pour $Ra = 10^4$ (voir figure 4.6), où l'écoulement et les champs thermiques sont centro-symétriques, avec un parallélisme et une stratification dans la majeure partie de la cavité.



Figure 4.6 : lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour la convection naturelle pure, $Ra = 10^4$.

Pour les deux cas de cavité entraînée, lorsque l'effet de cisaillement est important (c'est-à-dire lorsque $\frac{Ra}{Pe^3} < \eta_f$), l'augmentation de Pe conduit à des lignes de courant plus serrées près des parois mobiles et à des isothermes plus inclinés conduisant à des structures dynamiques et thermiques presque identiques à celles obtenues en convection forcée pure pour $Pe = 100$ et 150 dans les deux cas où les lignes de courant et les isothermes sont asymétriques (figure 4.7) et centro-symétriques (figure 4.8).

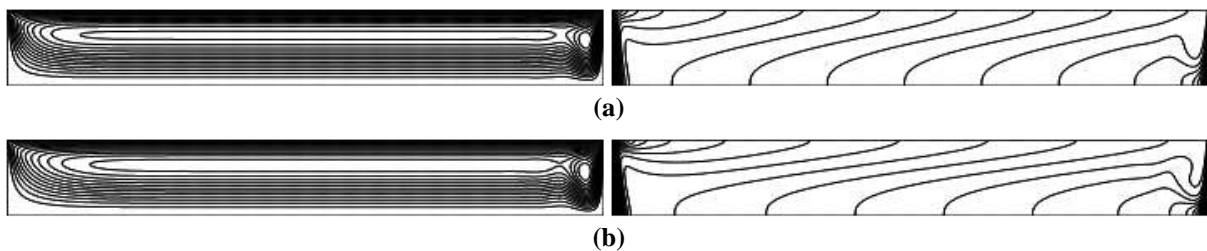


Figure 4.7 : lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour la convection forcée pure dans une cavité simplement entraînée: (a) $Pe = 100$ et (b) $Pe = 150$.

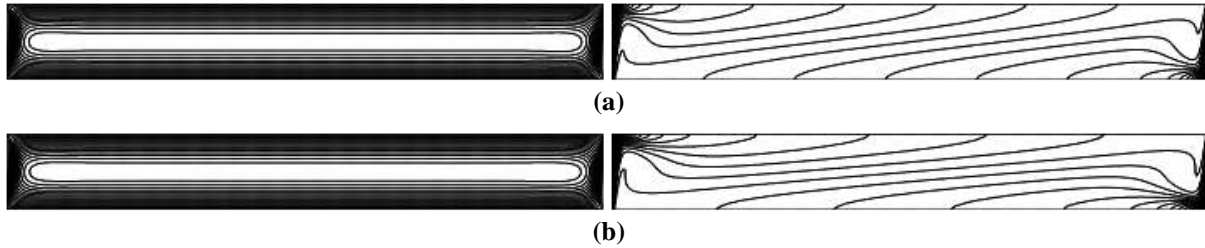


Figure 4.8 : lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour la convection forcée pure dans une cavité doublement entraînée: (a) $Pe = 100$ et (b) $Pe = 150$.

De plus, en augmentant progressivement le nombre de Peclet, Pe , à partir de sa valeur la plus basse, les isothermes tendent à être plus resserrées au niveau des parois verticales. Cela exprime de forts gradients de température près de ces frontières et favorise le développement de deux couches limites d'épaisseur décroissante. Le resserrement des isothermes est plus visible, en particulier près de la paroi gauche dans le cas de la cavité simplement entraînée. Avec deux parois horizontales mobiles, la distribution de la température devient symétrique avec des couches limites thermiques plus fine que celle obtenus dans l'autre cavité. Pour une valeur élevée de Pe , et pour les deux configurations, les isothermes sont presque linéaires dans la zone centrale de la cavité.

4.6. Vitesse horizontale et distribution de la température le long de la section centrale verticale

Les variations de la vitesse horizontale (à gauche) et de la température (à droite) le long de l'axe y à mi-longueur de la cavité ($X = A/2$) sont illustrées sur les figures 4.9 (cavité à une seule paroi mobile) et 4.10 (cavité à deux parois mobiles), pour $Pe = 20$ et différentes valeurs de Ra . Ici aussi, l'accord entre les résultats numériques (symbole) et analytiques (lignes pleines) semble quantitativement parfait. Les profils présentés semblent être plus sensibles aux conditions aux limites cinématiques horizontales, puisqu'ils sont asymétriques dans la cavité à une seule paroi mobile et centro-symétriques dans la cavité à deux parois mobiles, lorsque la convection forcée est prédominante. Ainsi, la présence de deux zones de signes positifs (en haut) et négatifs (en bas), en fonction des conditions aux limites cinématiques horizontales, dans le profil horizontal de la vitesse, est compatible avec l'écoulement monocellulaire dans le sens des aiguilles d'une montre entraîné par les effets coopératifs du couvercle et de la flottabilité. De plus, le profil de température présente, en général, deux parties, avec des signes négatifs et positifs, dont l'amplitude dépend de Ra et du type d'entraînement de la cavité. En fait, le flux résultant dans le sens des aiguilles d'une montre réchauffe la partie supérieure, en transportant la chaleur du côté chaud de gauche, et

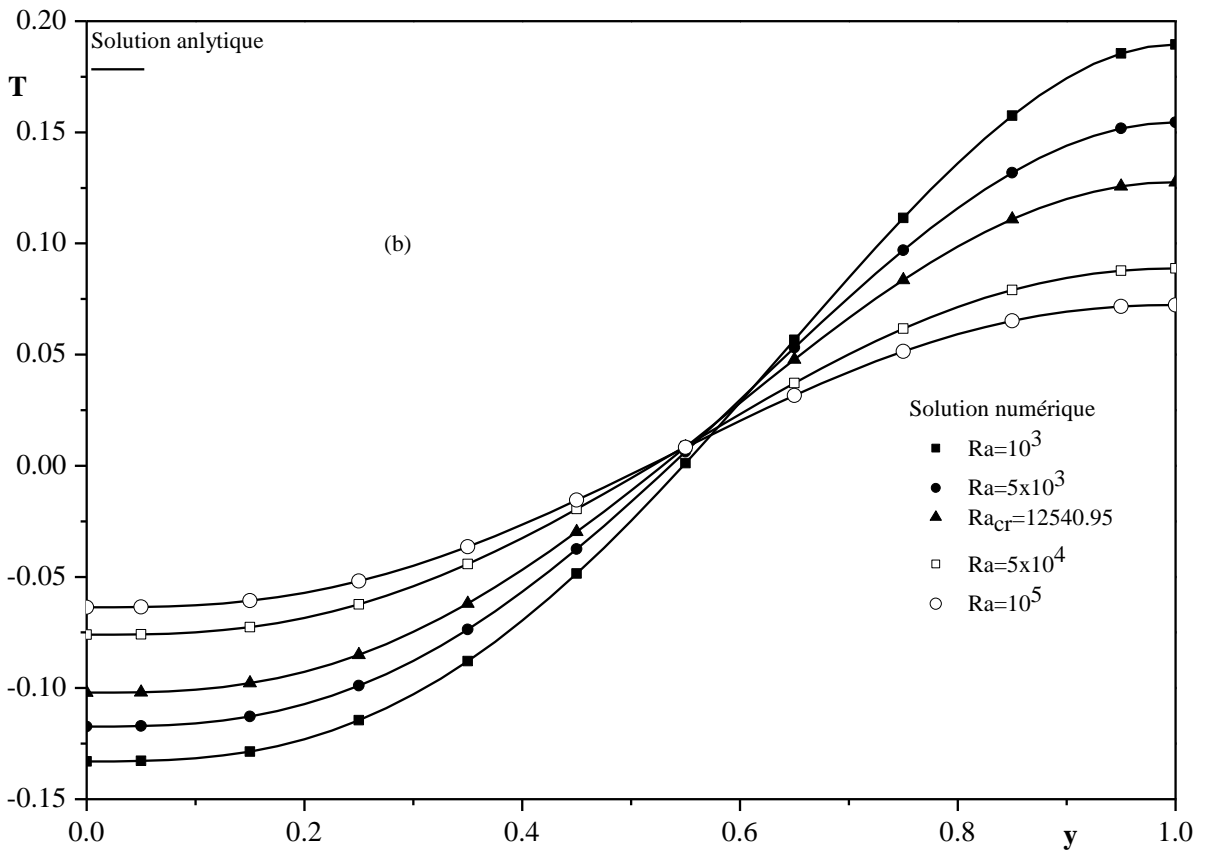
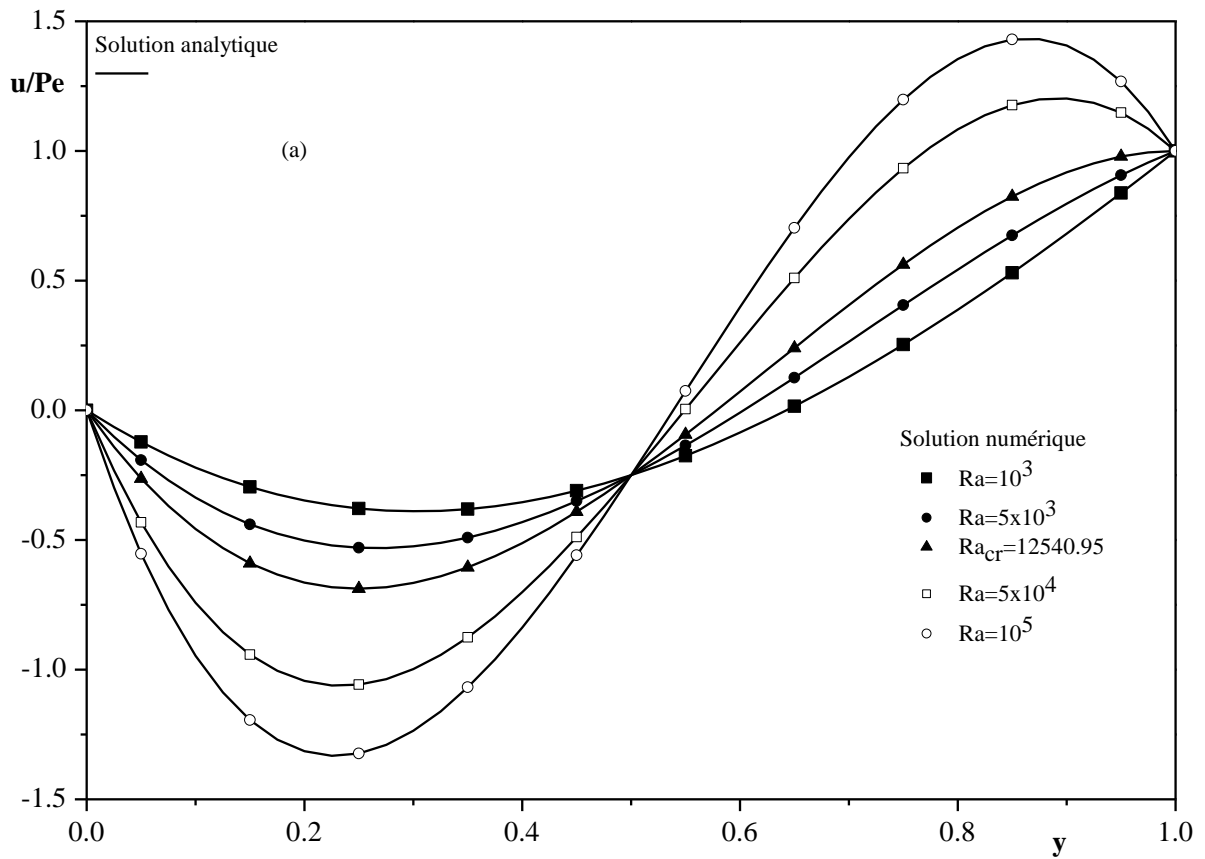


Figure 4.9 : Profils horizontaux de vitesse (a) et de température (b) à mi-longueur de la cavité, le long de la coordonnée verticale dans une cavité simplement entraînée pour $Pe = 20$ et différentes valeurs de Ra .

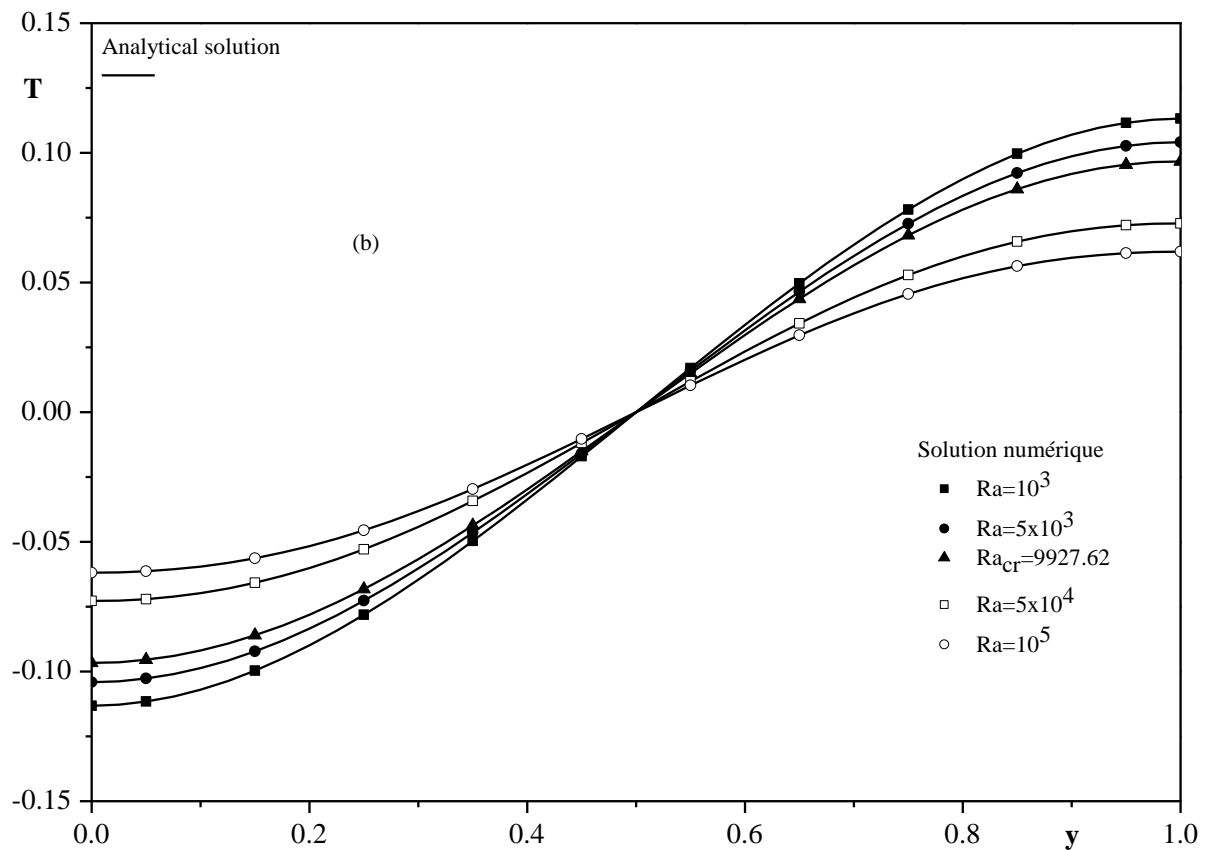
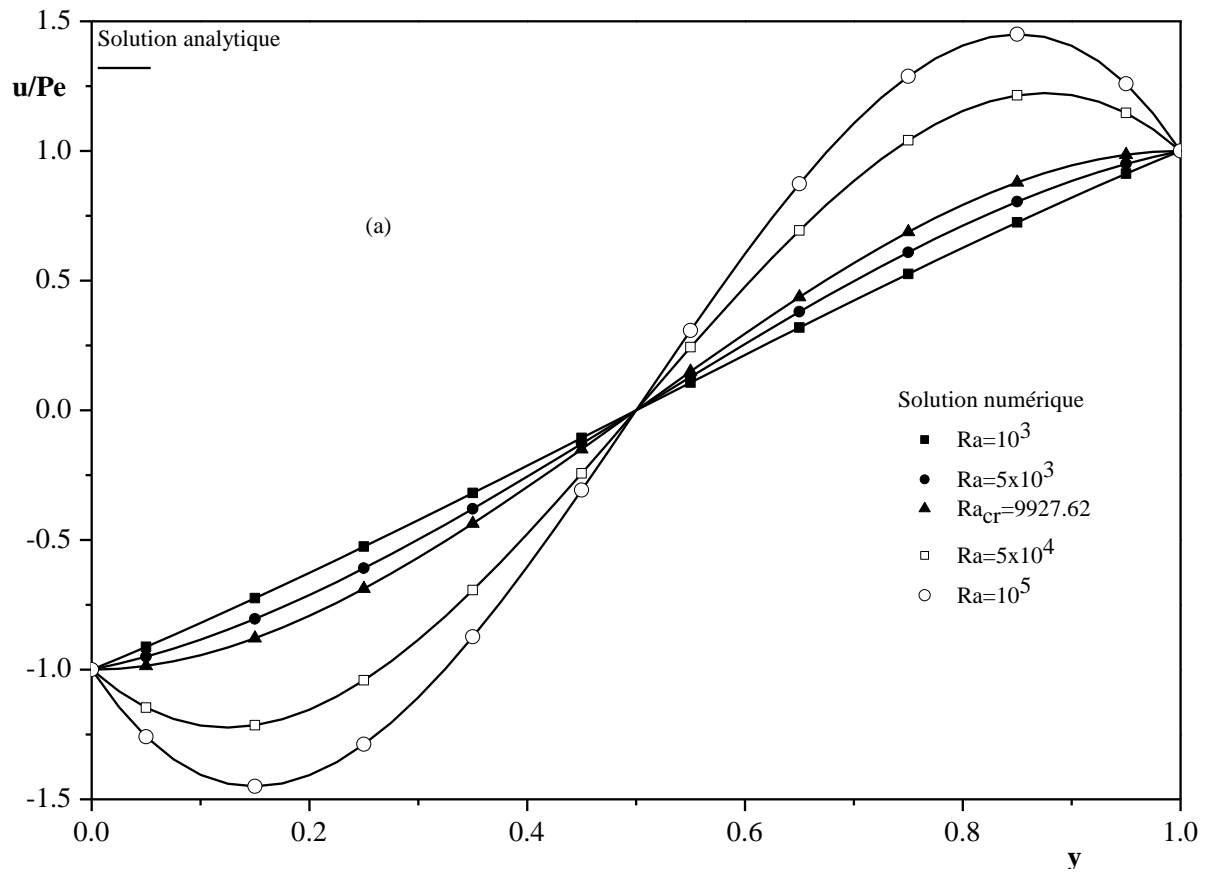


Figure 4.10 : Profils horizontaux de vitesse (a) et de température (b) à mi-longueur de la cavité, le long de la coordonnée verticale dans une cavité doublement entraînée pour $Pe = 20$ et différentes valeurs de Ra .

amène les courants les plus froids vers la partie inférieure de la cavité après avoir évacué la chaleur à travers la paroi verticale de droite. En outre, il est facile de noter que l'augmentation du paramètre Ra conduit à une amplification importante des valeurs extrêmes de la vitesse pour les deux cavités. Dans le cas d'une cavité à un seul côté mobile, le profil de vitesse présente un minimum qui s'amplifie avec l'augmentation de Ra. Pour la valeur de Ra la plus élevée, la valeur maximale à un endroit donné semble s'éloigner de la paroi supérieure mobile. Ce pic, plus élevé que celui de la paroi mobile, indique que l'écoulement devient plus fort et plus rapide dans cette région, ce qui explique l'effet dominant de la force de flottabilité. Pour la cavité entraînée par deux côtés, le profil de vitesse est caractérisé par sa linéarité pour un effet de cisaillement important. Pour une force de flottabilité dominante, le profil de vitesse présente simultanément deux extrema (maximum et minimum) près des frontières mobiles. Le début de l'écoulement sous l'effet de la flottabilité (Ra_{cr}), ce qui donne lieu à de tels extrema, peut être exprimé comme suit :

$$Ra_{cr} = 48Pe + \frac{152}{105}Pe^3 \text{ et } Ra_{cr} = 24Pe + \frac{124}{105}Pe^3 \quad (4.4)$$

respectivement, pour le cas simplement et doublement entraînée

4.7. Taux de transfert de chaleur

Pour une analyse plus détaillée, l'effet de Pe et de Ra sur le taux de transfert de chaleur est étudié en faisant varier Pe et en fixant Ra et vice versa (tableau 4.4 et figures 4.11 et 4.12).

Dans le tableau 4.4, donné ci-dessous, sont affichées les valeurs de \overline{Nu} , obtenue numériquement pour $Ra = 10^4$ et diverses valeurs de Pe pour les deux configurations considérées et différents régimes. Tout d'abord, il semble clair que \overline{Nu} augmente avec Pe comme une conséquence bénéfique de l'effet de cisaillement sur le transfert de chaleur. Il est également intéressant de noter que pour une même valeur de Pe, le transfert de chaleur est plus important dans le cas d'une enceinte à double entraînement. Ceci est lié aux effets de coopération des parois mobiles, qui agissent de manière à améliorer la circulation des fluides.

De plus, une augmentation de Pe provoque \overline{Nu} pour être plus proche de sa valeur en convection forcée lorsque $Ra/Pe^3 < \eta_f$, tandis qu'une diminution de Pe rend \overline{Nu} très proche de celle obtenue en convection naturelle lorsque $Ra/Pe^3 > \eta_n$.

Cavité simplement entraînée							Convection naturelle
Pe	0.1	1	10	50	100	150	Ra = 10 ⁴
Convection mixte	6.877	7.025	8.846	30.094	99.474	217.923	6.8612
Convection forcée	1.0001	1.001	1.953	24.837	96.446	215.861	

Cavité doublement entraînée							Convection naturelle
Pe	0.1	1	10	50	100	150	Ra = 10 ⁴
Convection mixte	6.893	7.194	11.555	87.873	336.851	754.138	6.8612
Convection forcée	1.0003	1.033	4.333	84.440	335.076	752.902	

Tableau 4.4 : valeurs numériques de \overline{Nu} pour A = 24, Ra = 10⁴ et différentes valeurs de Pe

Une confirmation de ces faits est donnée par la figure 4.11, dans laquelle sont tracées les variations de \overline{Nu} avec Pe pour différents Ra. Noter que, pour une gamme de petites valeurs de Pe et indépendamment du type d'entraînement de la cavité, le transfert de chaleur semble être assuré par convection naturelle pour chaque Ra, puisque \overline{Nu} ne change pas dans ce cas quelle que soit la configuration, après ça la tendance d'augmentation de \overline{Nu} est lente et tend à être rapide avec Pe jusqu'à ce que le transfert soit pratiquement régi par convection forcée (évolution linéaire de \overline{Nu} avec Pe). Cette augmentation commence précocement avec un petit Ra et la valeur correspondante de Pe peut être corrélée par $(Ra/\eta_n)^{1/3}$. Les limites asymptotiques des résultats relatifs aux écoulements purs à convection naturelle et forcée, qui sont respectivement définis par les équations (3.71) et (3.76), sont indiquées par des lignes brisées.

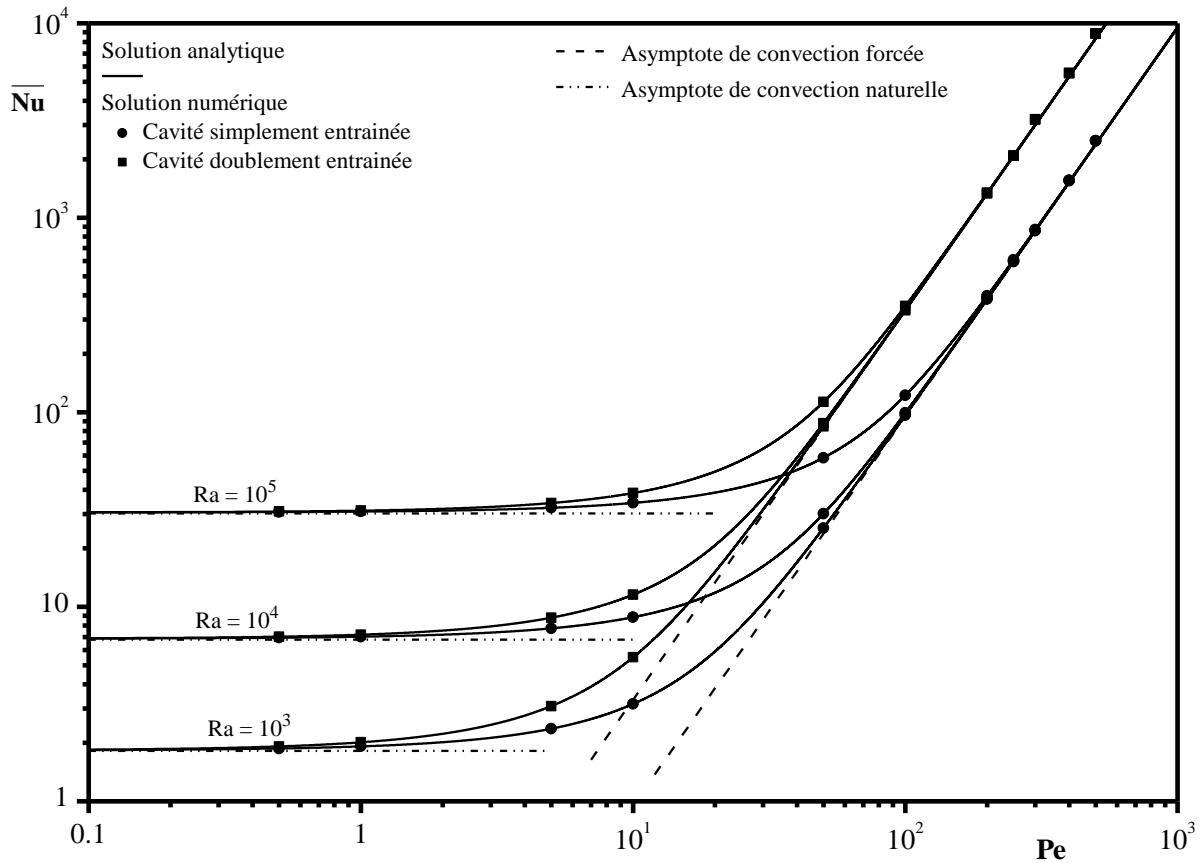


Figure 4.11 : Evolution du nombre de Nusselt moyen avec Pe pour différentes valeurs de Ra
Cavité simplement ou doublement entraînée

Pour avoir une idée plus précise de l'effet de Ra sur le transfert de chaleur, l'évolution de \overline{Nu} avec ce paramètre dans la gamme $1 \leq Ra \leq 10^7$, couvrant les petites et grandes valeurs, est illustré dans la figure 4.12. Ici aussi, une tendance analogue peut être observée, puisque \overline{Nu} reste constant (transfert de chaleur par convection forcée dominant) pour une gamme de petites valeurs de Ra, dont l'étendue augmente avec Pe, et au-delà duquel \overline{Nu} subit d'abord une légère augmentation (transfert de chaleur par convection mixte), puis une autre rapide et linéaire (dominant le transfert de chaleur par convection naturelle). Il est inutile de rappeler que l'on peut s'attendre à ce que \overline{Nu} augmente avec Ra, puisque les effets de flottabilité agissent toujours de manière à favoriser le transfert de chaleur par convection.

Notons que la transition vers le régime de convection naturelle est contrôlée par le paramètre $(\eta_f Pe^3)$ et confirme bien les critères obtenus avec l'équation (4.3) pour le régime de convection mixte. Les lignes pointillées limites correspondant aux rôles dominants des convections forcées et naturelles sont définies par les équations (3.74) et (3.75), respectivement. Ils semblent bien corroborer les résultats obtenus avec les deux approches adoptées.

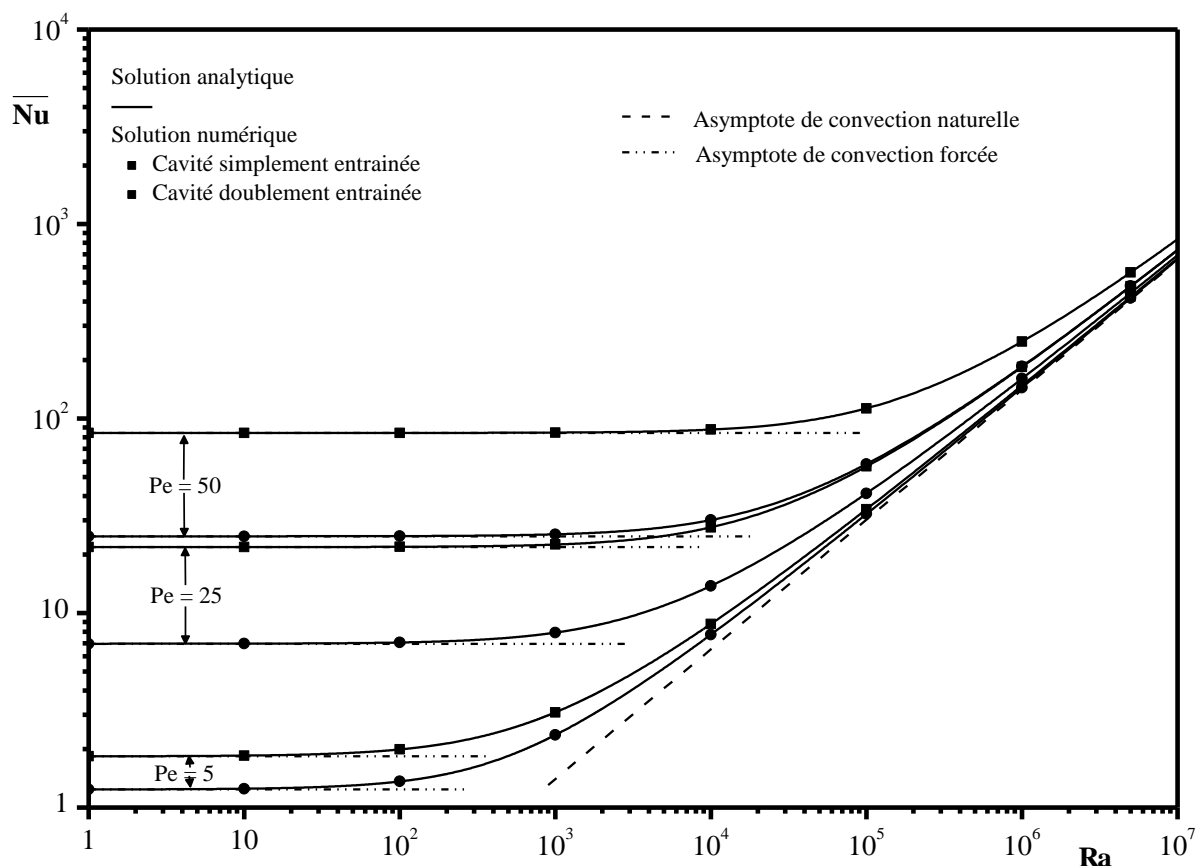


Figure 4.12 : Evolution du nombre de Nusselt moyen avec Ra pour différentes valeurs de Pe
Cavité simplement ou doublement entraînée

4.8. conclusion

Dans ce chapitre, Le problème de la convection mixte dans une enceinte bidimensionnelle simplement et doublement entraînée remplie d'un fluide Newtonien est étudié analytiquement et numériquement dans le cas de flux de chaleur uniforme imposé sur leurs courtes parois verticales. Des solutions numériques et analytiques sont obtenues pour diverses combinaisons des paramètres de contrôle, qui sont les nombres de Peclet ($0.1 \leq Pe \leq 500$) et de Rayleigh ($1 \leq Ra \leq 10^7$).

Dans la limite des variations des paramètres de contrôles dans les plages considérées, les résultats analytiques et numériques sont en bon accord. D'autre part, le paramètre de convection mixte Ra/Pe^3 s'avère être la clé pour délimiter les trois régimes d'écoulement convectif, dont les limites dépendent fortement des conditions aux limites cinématiques horizontales. Les critères suivants :

$$0.01612 < \frac{Ra}{Pe^3} < 1156.2824 \text{ et } 0.0988 < \frac{Ra}{Pe^3} < 9150.0833$$

sont établis pour définir le régime de convection mixte pour la cavité avec une seule paroi mobile et une cavité avec deux parois mobiles, respectivement. En dehors des plages ci-dessus, l'effet de la convection naturelle/ (forcée) est dominant pour des valeurs plus élevées/ (plus faibles) du paramètre Ra/Pe^3 .

CHAPITRE 5

Corrélations de transfert thermique par convection mixte dans des cavités rectangulaires allongées entraînées et chauffées latéralement :

Cas des fluides non-Newtoniens

5.1. Introduction

Dans ce chapitre, la cavité est chauffée latéralement, par une densité de flux thermique uniforme, et isolée transversalement. Elle est doublement entraînée par les parois horizontales et confine des fluides non-Newtoniens de type loi de puissance. L'indice de loi de puissance, n , varie ici de 0.6 à 1.4 pour couvrir les fluides d'amincissement par cisaillement ($0 < n < 1$), Newtoniens ($n = 1$) et d'épaississement par cisaillement $n > 1$.

Il a été rapporté dans des études antérieures par Lamsaadi et al. (2018), T. Makayssi et al. (2008) et Allioui et al. (2010) que l'indice de comportement (n) et le nombre de Rayleigh (Ra), en convection naturelle pure dans une cavité rectangulaire, ont un effet opposé sur le transfert de chaleur. Ainsi, ce résultat sera utilisé pour définir le rapport Ra/n comme un paramètre de contrôle de la convection naturelle pure dans la cavité rectangulaire. D'autre part, le mouvement des parois (convection forcée pure) est contrôlé par le nombre de Peclet (Pe). C'est pourquoi, le nombre de Peclet, Pe , et le rapport Ra/n seront les paramètres régissant cette étude.

5.2. Détermination des paramètres contrôlant la convection mixte

Le phénomène de convection est un processus physique de transmission de chaleur qui repose sur un milieu matériel avec un mouvement de matière. Il existe trois types de convection : naturelle, forcée et mixte. La question qui se pose maintenant est la suivante : quels critères peuvent être utilisés pour distinguer ces trois types. De nombreuses configurations géométriques ont été traitées dans le passé et sont rapportées dans la littérature. Il est établi que la valeur du groupe Gr/Re^n (nombre de Richardson modifié ou paramètre de convection mixte) a été systématiquement utilisée pour délimiter les régimes convectifs, où l'exposant n dépend de la géométrie, des conditions aux limites thermiques et de la nature du fluide (E. Eckert et al (1954), D. L. Siebers et al (1983) et S. Turki (1990)). Dans ce travail, la procédure adoptée par Turki et al. (1990) est choisie dans le but de différencier les trois régimes de convection et les variations relatives suivantes sont introduites:

$$\varepsilon_n = \frac{|\overline{Nu} - \overline{Nu}_n|}{\overline{Nu}_n} \quad \text{et} \quad \varepsilon_f = \frac{|\overline{Nu} - \overline{Nu}_f|}{\overline{Nu}_f} \quad (5.1)$$

où \overline{Nu}_n and \overline{Nu}_f sont les nombres moyens de Nusselt obtenus en convection naturelle pure et en convection forcée pure, respectivement. On suppose que la convection forcée et naturelle est prédominante lorsque $\varepsilon_f < 5\%$ et $\varepsilon_n < 5\%$, respectivement. Lorsque $\varepsilon_f > 5\%$ ou $\varepsilon_n > 5\%$ le régime de convection sera qualifié de mixte.

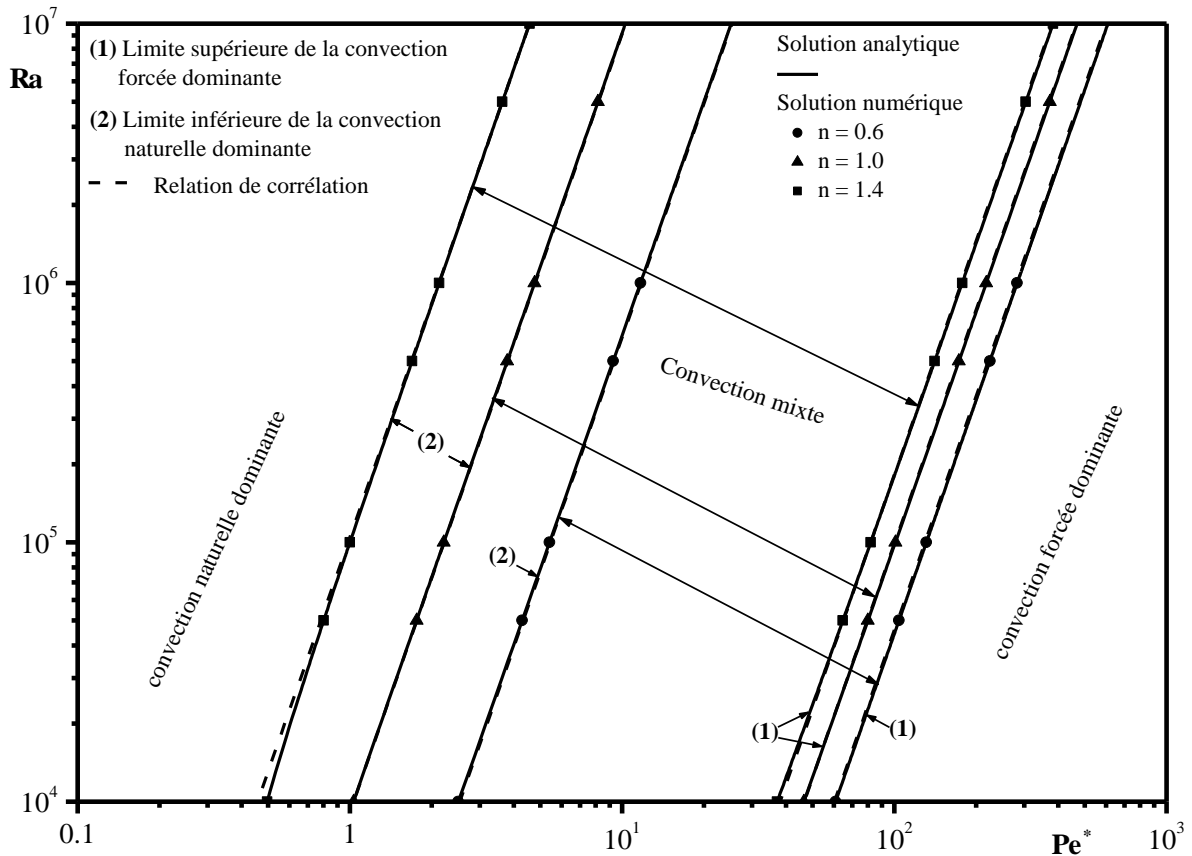


Figure 5.1 : Diagramme caractérisant les différents régimes de convection pour différentes valeurs de n

Les deux critères exposés au paragraphe précédent (équation 5.1) nous ont permis de construire le diagramme de la figure 5.1. L'emplacement des points ($\log(Pe^*)$, $\log(Ra)$), obtenues analytiquement (représentées par des lignes pleines) et numériquement (représentées par des symboles) et correspondent approximativement à $\varepsilon_f = 5\%$ et $\varepsilon_n = 5\%$, sont presque des lignes droites parallèles. Ces résultats sont généralement les suivants :

$$Ra = (22.635 n - 1.7535)^{2+n} Pe^{*3} \quad \text{et} \quad Ra = (0.4214 n - 0.0639)^{\frac{5}{4}+n} Pe^{*3} \quad (5.2)$$

pour les régimes naturel et forcé respectivement, mais nous pouvons également les corrélérer en termes de $\log(Ra)$ en fonction de $\log(Pe^*)$ sous la forme mathématique suivante :

$$\frac{Ra}{Pe^{*3}} = \eta_n \text{ et } \frac{Ra}{Pe^{*3}} = \eta_f \text{ avec } Pe^* = Pe^{\frac{2+n}{3}} \quad (5.3)$$

correspondant, respectivement, aux convections naturelle et forcée, où η_n et η_f sont des coefficients dépendant de la nature des conditions aux limites cinématiques appliquées aux surfaces horizontales. Leurs valeurs sont indiquées dans le tableau 5.1 et illustrées sur la figure 5.1 par des lignes pointillées.

Nature du fluide	Convection naturelle	Convection forcée
	η_n	η_f
Pseudo-plastique (n=0.6)	615.91628	0.045835
Newtonian (n=1)	9105.0833	0.09880
Dilatant (n=1.4)	104480.24	0.182282

Tableau 5. 1: valeurs de η_n et η_f

Les résultats obtenus avec l'équation (5.3) sont présentés à la figure 5.1 avec des lignes pointillées. On constate qu'ils sont en bon accord avec la résolution de l'écoulement parallèle et les résultats numériques avec un écart maximal ne dépassant pas 2 %. De plus, les lignes droites définies par l'équation (5.3) séparent le plan (Pe^* , Ra) en trois zones pour chaque type de fluide. La première zone, placée au-dessus de la droite (1), où le transfert de chaleur est dominé par la convection forcée. La deuxième zone, située en dessous de la ligne droite (2), dans laquelle la convection naturelle est prédominante. Enfin, la troisième zone délimitée par les deux lignes droites, est liée à la situation où les deux phénomènes sont en compétition (régime de convection mixte).

Pour récapituler, le mode de convection mixte, étudié dans ce travail, est défini par le critère suivant:

$$(0.4214n - 0.0639)^{\frac{5}{4}+n} < \frac{Ra}{Pe^{2+n}} < (22.635n - 1.7535)^{2+n} \quad (5.4)$$

En dehors des gammes ci-dessus, l'effet de la convection naturelle/ (forcée) est dominant pour des valeurs supérieures/ (inférieures) du paramètre Ra/Pe^{2+n} . Pour $n = 1$ nous trouvons les résultats du chapitre 4 pour le cas d'une cavité doublement entraînée.

Des observations similaires ont été faites par Sparrow et Gregg (1959) pour les écoulements sur une plaque plane isotherme. Ces auteurs ont constaté que le transfert de chaleur s'effectue principalement par convection forcée lorsque $Gr/Re^2 < 0.15 \times f(Pr)$ pour $0.01 < Pr < 10$. En revanche, pour la cavité carrée entraînée, comme l'ont expliqué Turkey et al. (1990), Pr affecte l'exposant n et les limites de ce régime.

5.3. Structures dynamiques et thermique

Les figures 5.2, 5.3 et 5.4 (pour $n = 0.6$, $n = 1$ et $n = 1.4$ respectivement) présentent des lignes de courant (à gauche) et des isothermes (à droite) pour $Ra = 10^4$ et différentes valeurs de Pe . Il est intéressant de noter que la flottabilité et les effets de cisaillement travaillent ensemble de gauche à droite. Pour cette raison, le flux est vu unicellulaires et dans le sens des aiguilles d'une montre. De plus, en dehors des extrémités où l'écoulement subit une rotation de 180° , les champs dynamique et thermique présentent des aspects parallèles et linéairement stratifiés selon la direction horizontale à l'intérieur de la région centrale de l'enceinte.

En outre, pour de grandes valeurs de Pe , les lignes de courant et les isothermes semblent dépendre davantage des conditions aux limites cinématiques horizontales, puisque la symétrie centrale de la cellule convective disparaît et que l'inclinaison des isothermes, par rapport à la direction verticale, augmente lors du passage de conditions aux limites identiques à des conditions aux limites mixtes. Cependant, pour les faibles valeurs de Pe , il est perçu que l'impact de ces conditions sur la centro-symétrie des isolignes est absent. Par conséquent, une diminution de Pe (c'est-à-dire lorsque $\frac{Ra}{Pe^{*3}} > \eta_n$), pousse l'effet de flottabilité à devenir fort, donnant lieu à des modèles dynamiques et thermiques pratiquement identiques à ceux obtenus en convection naturelle pure pour $Ra = 10^4$, où la circulation et les champs thermiques sont centro-symétriques, avec un parallélisme et une stratification dans la majeure partie de l'enceinte.

L'augmentation de Pe , lorsque l'effet de cisaillement est important (c'est-à-dire lorsque $\frac{Ra}{Pe^{*3}} < \eta_f$), conduit les lignes de courant à être plus serrés près des parois mobiles et les isothermes à s'incliner davantage, ce qui conduit à des structures thermiques et dynamiques presque similaires à celles obtenues en convection forcée pure pour $Pe = 100$ et $Pe = 150$.

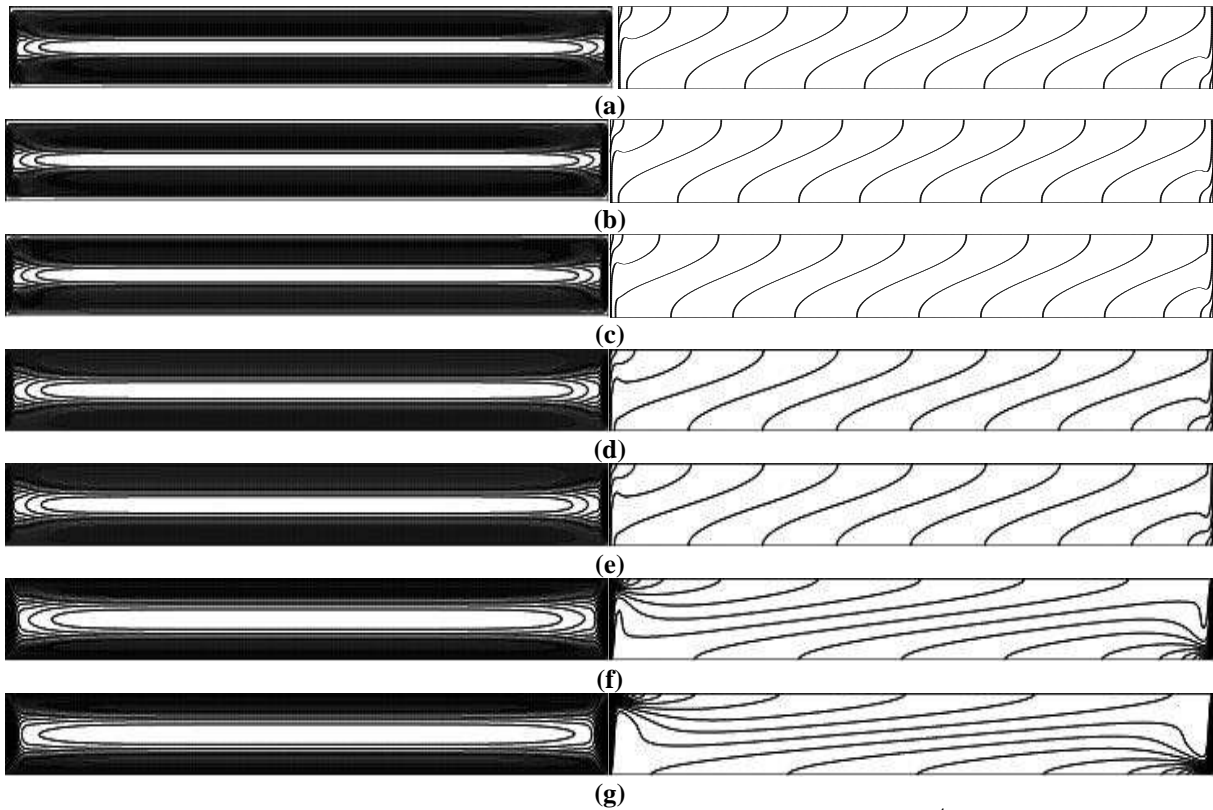


Figure 5.2 : Lignes de courant (gauche) et isothermes (droite) pour $A = 24$, $Ra = 10^4$, $n = 0,6$ et différentes valeurs de Pe : (a) $Pe = 0,1$, (b) $Pe = 1$, (c) $Pe = 5$, (d) $Pe = 25$, (e) $Pe = 50$, (f) $Pe = 100$ et (g) $Pe = 150$.

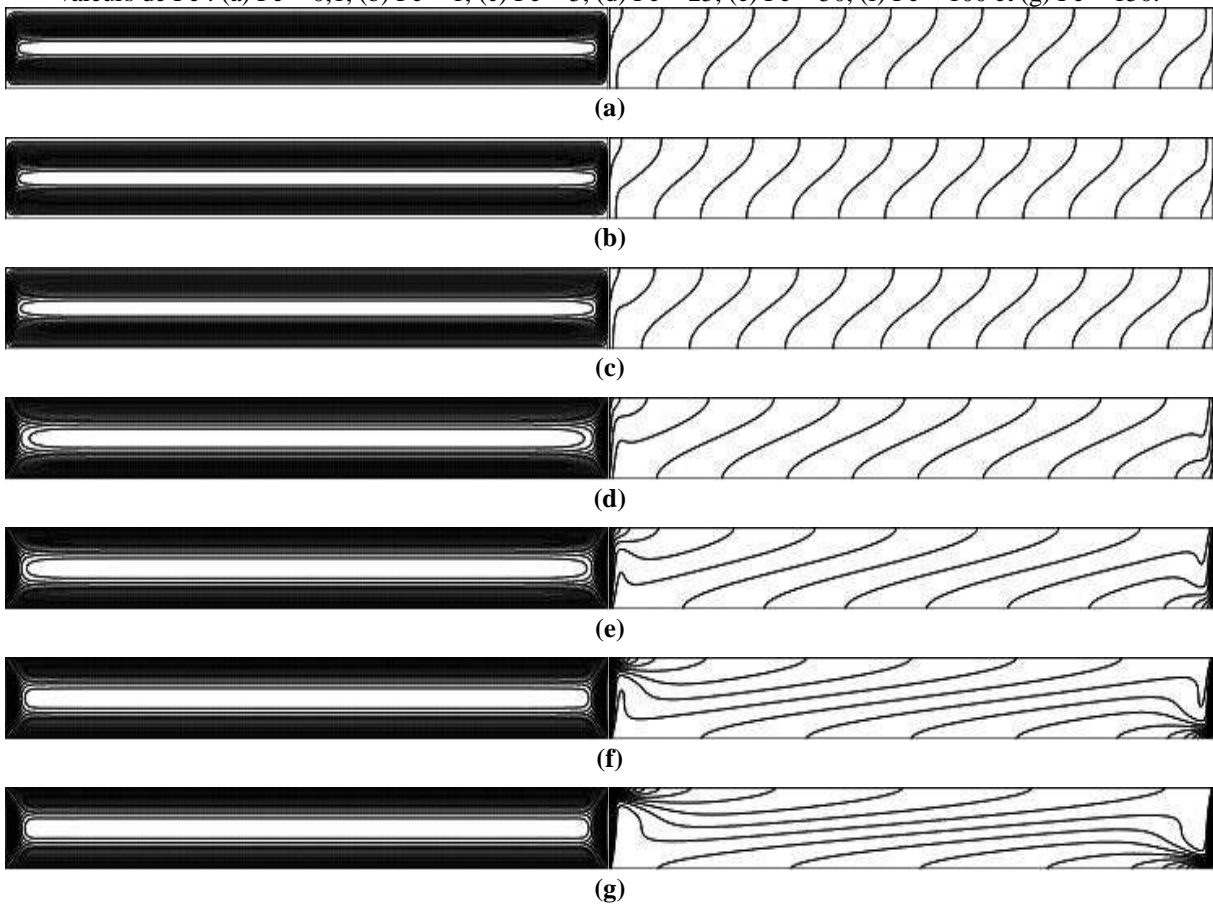


Figure 5.3 : Lignes de courant (gauche) et isothermes (droite) pour $A = 24$, $Ra = 10^4$, $n = 1,0$ et différentes valeurs de Pe : (a) $Pe = 0,1$, (b) $Pe = 1$, (c) $Pe = 5$, (d) $Pe = 25$, (e) $Pe = 50$, (f) $Pe = 100$ et (g) $Pe = 150$.

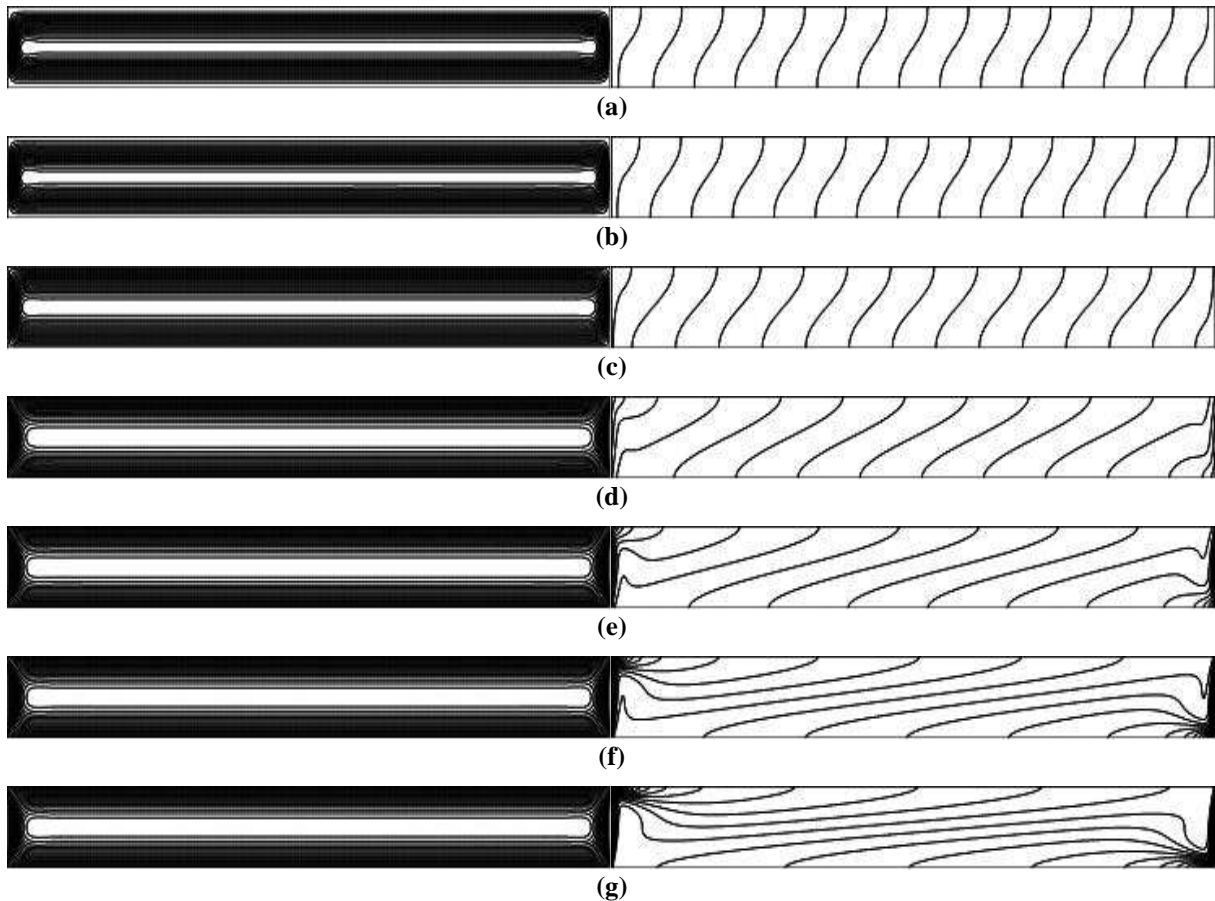


Figure 5.4 : Lignes d'écoulement (gauche) et isothermes (droite) pour $A = 24$, $Ra = 10^4$, $n = 1,4$ et différentes valeurs de Pe : (a) $Pe = 0,1$, (b) $Pe = 1$, (c) $Pe = 5$, (d) $Pe = 25$, (e) $Pe = 50$, (f) $Pe = 100$ et (g) $Pe = 150$.

D'autre part, de fur et à mesure que Pe augmente à partir de ses valeurs les plus basses, les isothermes ont tendance à être beaucoup plus serrées sur les parois verticales. Cela exprime des gradients de température robustes à proximité de ces frontières et favorise le développement de deux couches limites d'épaisseur décroissante. Le déplacement des deux frontières horizontales fait que la distribution de la température devient symétrique avec des couches limites thermiques. Pour des valeurs élevées de Pe , les isothermes sont presque linéaires dans la partie centrale de la forme géométrique.

5.4. Vitesse horizontale et distribution de la température le long de la section centrale verticale

Les fluctuations de la vitesse horizontale (a) et de la température (b) le long de l'axe y à mi-longueur de la cavité ($x = A/2$) sont illustrées sur les figures (5.5 - 5.7), (pour $n = 0.6$, $n = 1$ et $n = 1.4$ respectivement), pour $Pe = 20$ et différentes valeurs de Ra . Ici aussi, la bonne concordance entre les résultats numériques (symbole) et analytiques (lignes pleines) est fortement remarquée. Le profil de vitesse est centro-symétrique et présente deux zones, de

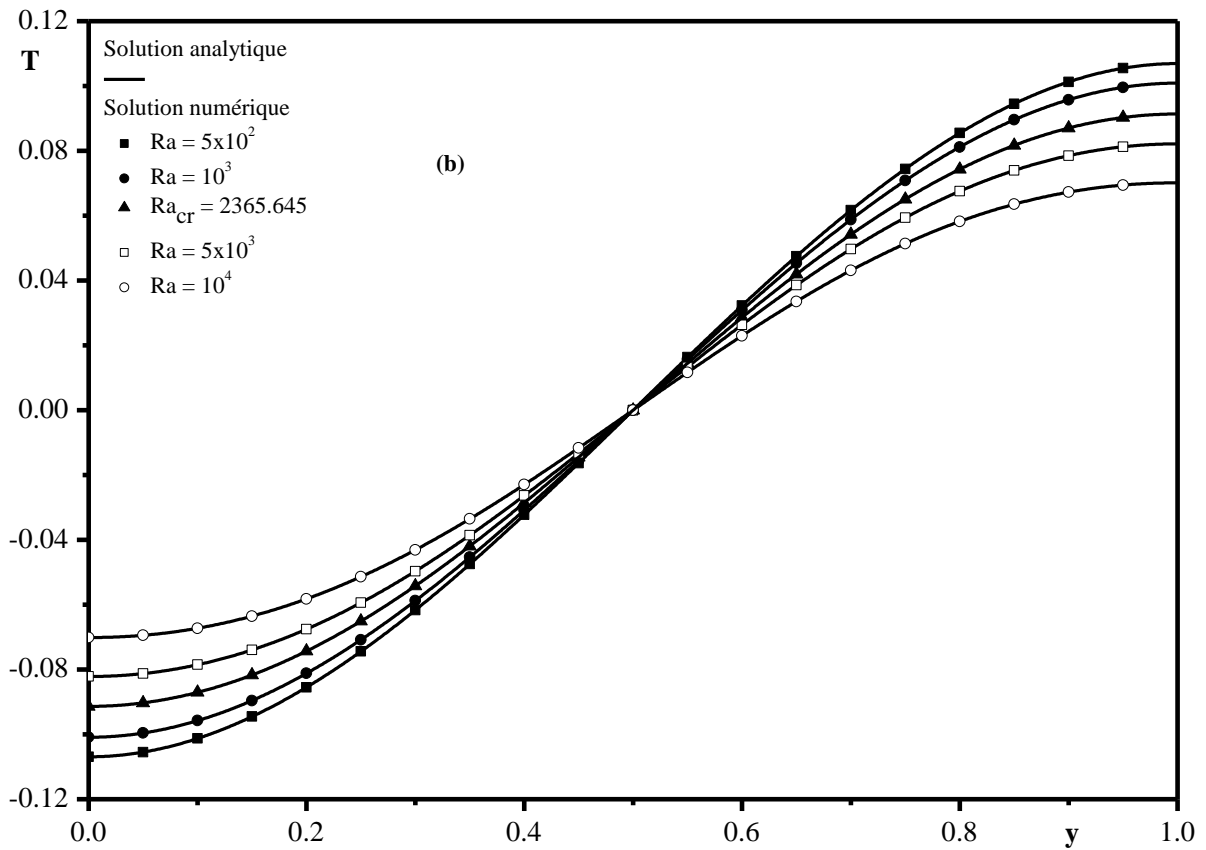
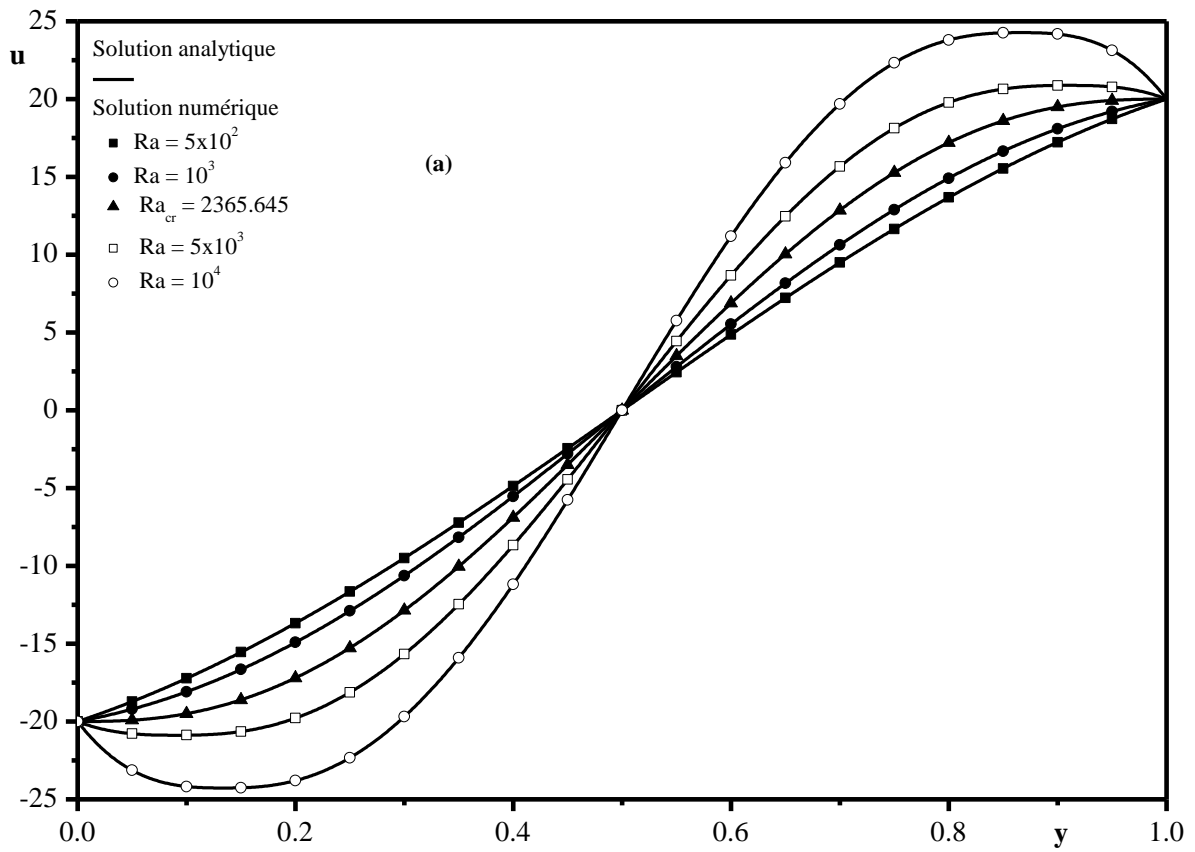


Figure 5.5 : Profils horizontaux de vitesse (a) et de température (b) à mi-longueur de la cavité, le long de la coordonnée verticale pour $n=0.6$, $Pe=20$ et différentes valeurs de Ra .

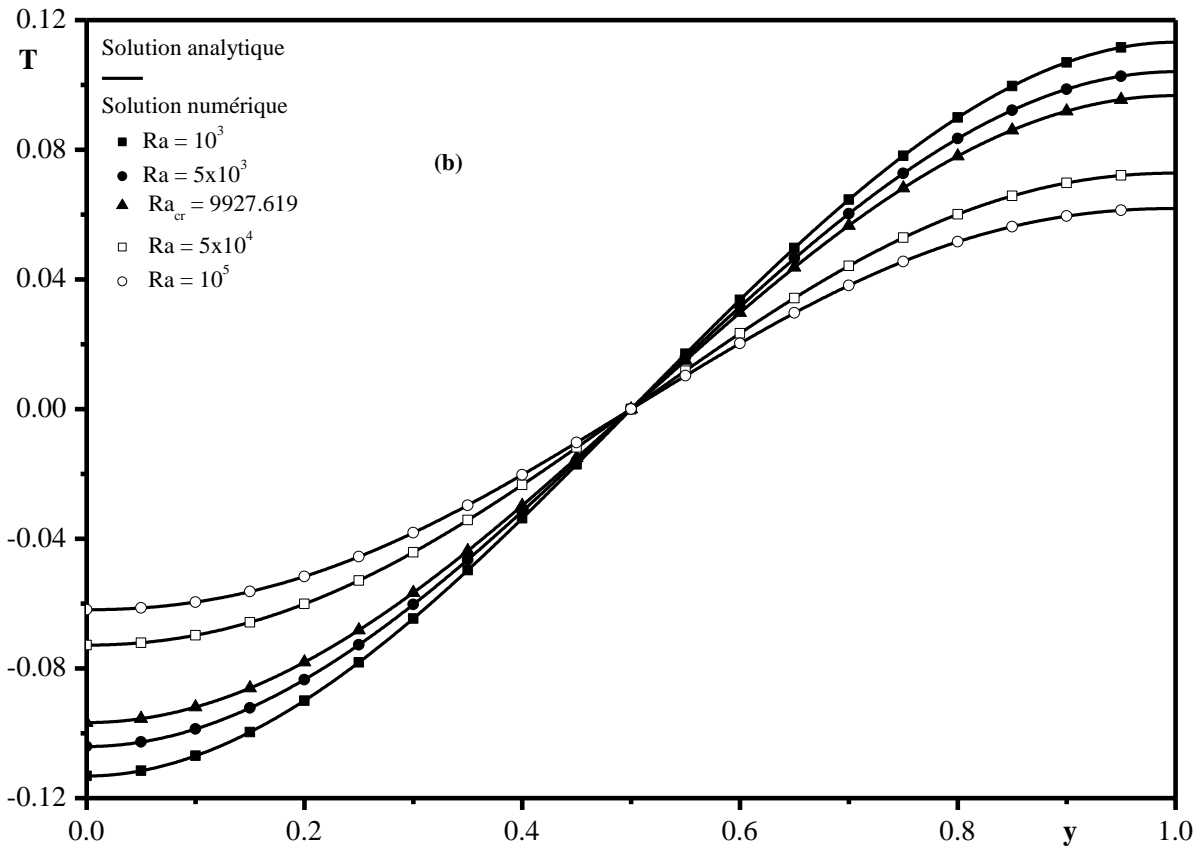
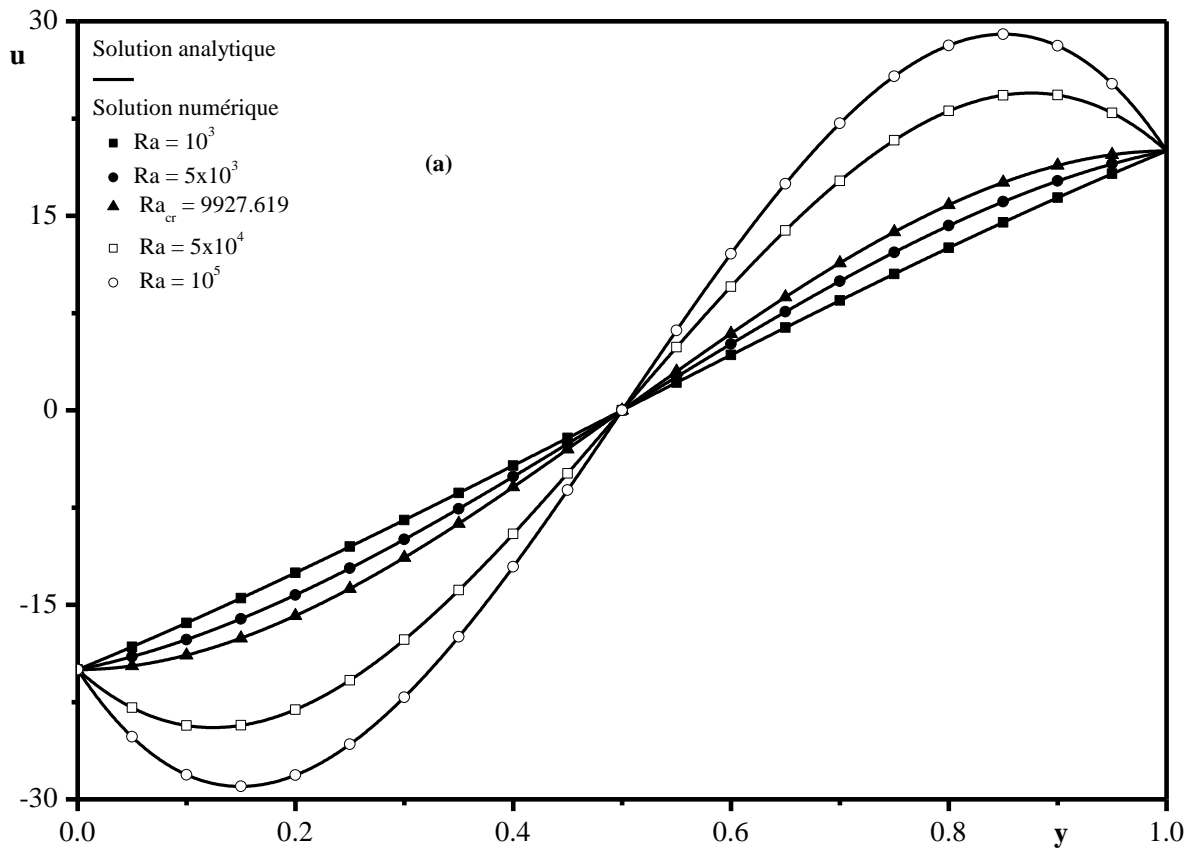


Figure 5.6 : Profils horizontaux de vitesse (a) et de température (b) à mi-longueur de la cavité, le long de la coordonnée verticale pour $n=1$, $Pe=20$ et différentes valeurs de Ra .

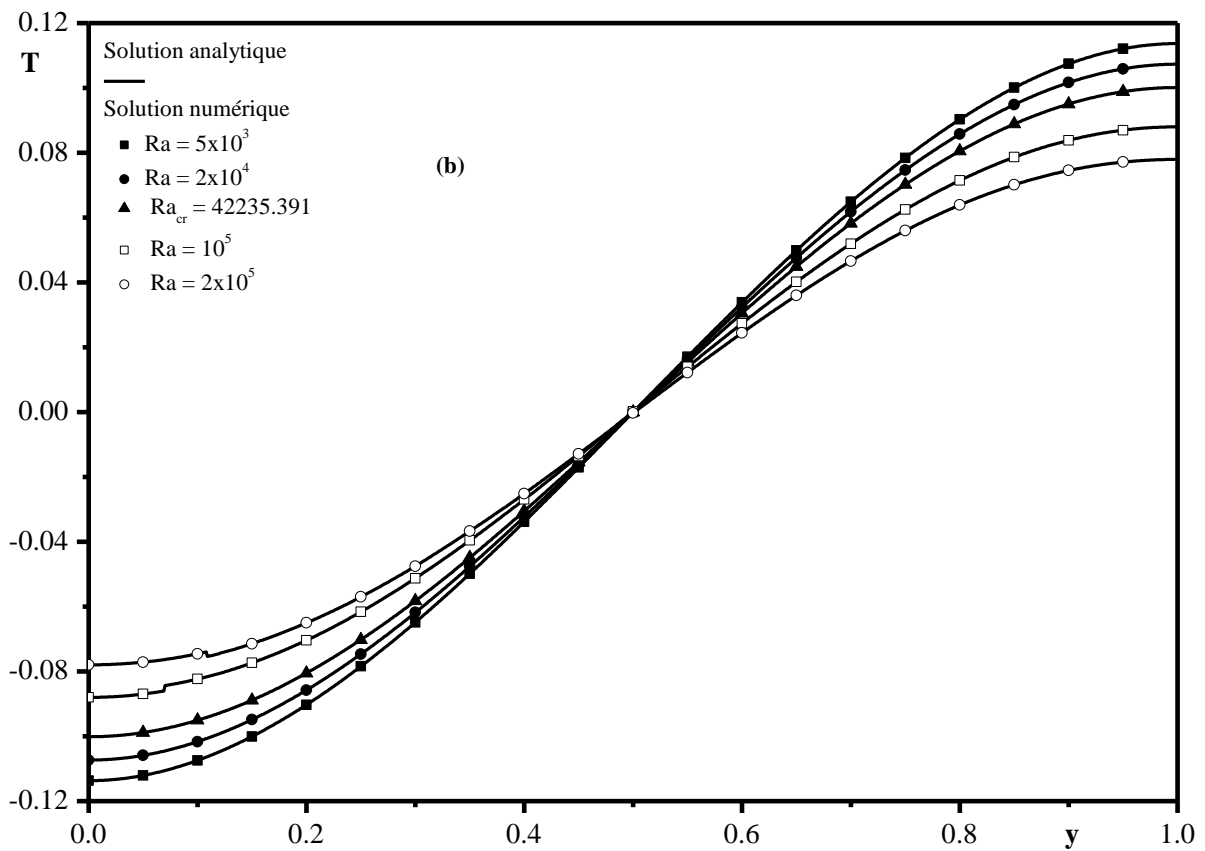
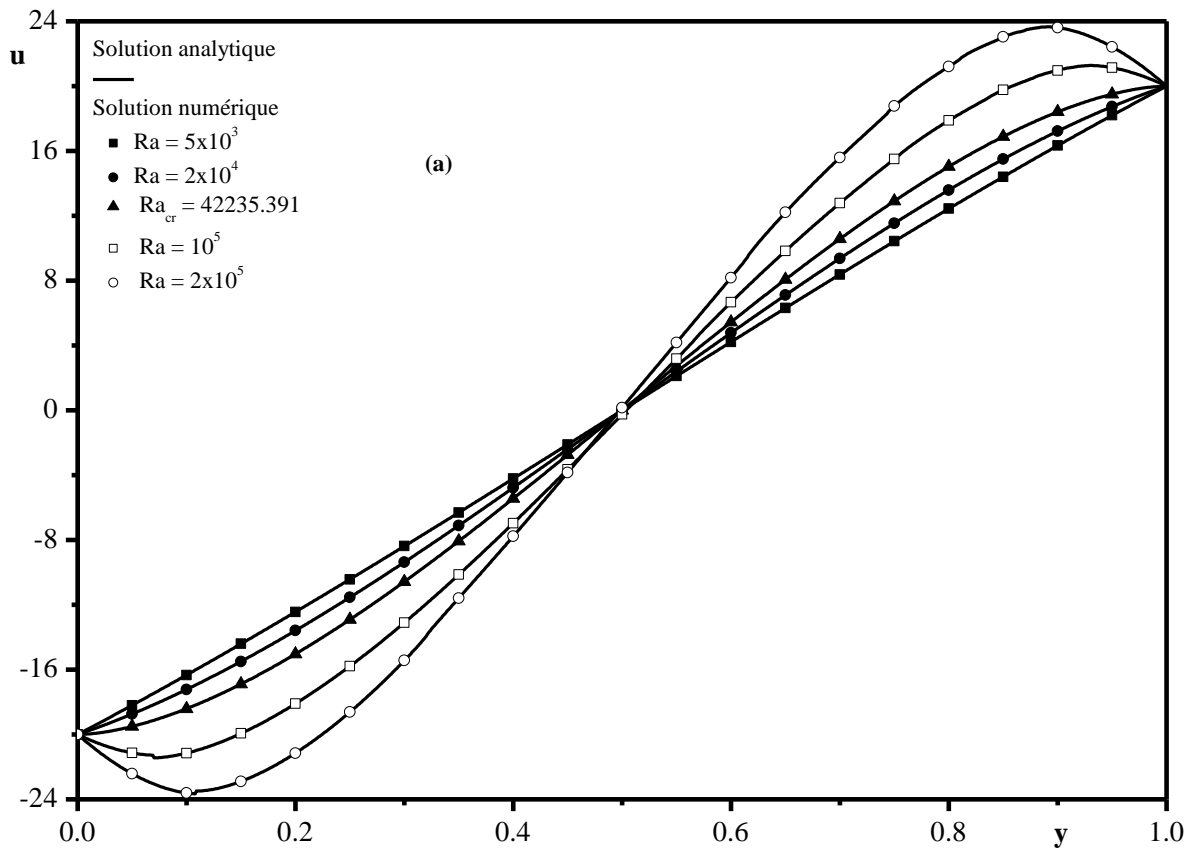


Figure 5.7 : Profils horizontaux de vitesse (a) et de température (b) à mi-longueur de la cavité, le long de la coordonnée verticale pour $n=1.4$, $Pe=20$ et différentes valeurs de Ra .

signes positifs (en haut) et négatifs (en bas), ce qui est compatible avec l'écoulement monocellulaire dans le sens des aiguilles d'une montre, entraîné par les effets coopératifs de la paroi et de la flottabilité. De plus, le profil de température présente, en général, deux parties, avec des signes négatifs et positifs, dont l'amplitude dépend du rapport Ra/n . En fait, le flux dans le sens des aiguilles d'une montre qui en résulte réchauffe la partie supérieure, transporte la chaleur vers le côté gauche chaud et amène les courants plus froids vers la partie inférieure de la cavité après avoir déchargé la chaleur à travers la paroi verticale droite.

En outre, et en accord avec l'équation (2.24), de petites valeurs de l'indice de comportement, n , impliquent des niveaux de viscosité plus faibles, et donc un écoulement plus fort, ce qui conduit à des profils de température plus plats et de vitesse vraiment intenses. Par ailleurs, il est simple de constater que l'augmentation du paramètre Ra/n (augmentation de Ra ou diminution de n) conduit à une intensification significative des valeurs extrêmes de la vitesse. Le profil de la vitesse est défini par sa linéarité pour un effet de cisaillement important et présente simultanément deux extrema (maximum et minimum) à proximité des frontières mobiles pour une force de flottabilité dominante. L'apparition de ce phénomène, Ra_{cr} , est donnée par l'équation (3.59).

5.5. Intensité d'écoulement et taux de transfert de chaleur

Les évolutions de l'intensité de la circulation et du transfert de chaleur dans la partie centrale de forme géométrique, en fonction du nombre de Peclet, Pe , et pour des valeurs fixes du nombre de Rayleigh, Ra , sont illustrées dans les figures 5.8 (a) et (b), respectivement. Il convient tout d'abord de mentionner la bonne entente entre les résultats numériques et analytiques (pour Pe inférieur à 500).

En outre, les fluides non Newtoniens présentent une tendance similaire à celle du fluide Newtonien, tandis que le pseudo-plastique donne des valeurs plus élevées que celles obtenues par le diluant. De plus, il semble clair que l'intensité de l'écoulement et le taux de transfert thermique augmentent avec Pe comme une répercussion bénéfique de l'effet de cisaillement dû aux deux parois horizontales mobiles. De plus, une augmentation de Pe provoque \overline{Nu} et $|\Psi_c|$ pour être plus proches de leurs valeurs de convection forcée pure lorsque $Ra/Pe^{*3} < \eta_f$, tandis qu'une réduction de Pe rend \overline{Nu} et $|\Psi_c|$ très proches de celles obtenues en convection naturelle pure lorsque $Ra/Pe^{*3} > \eta_n$.

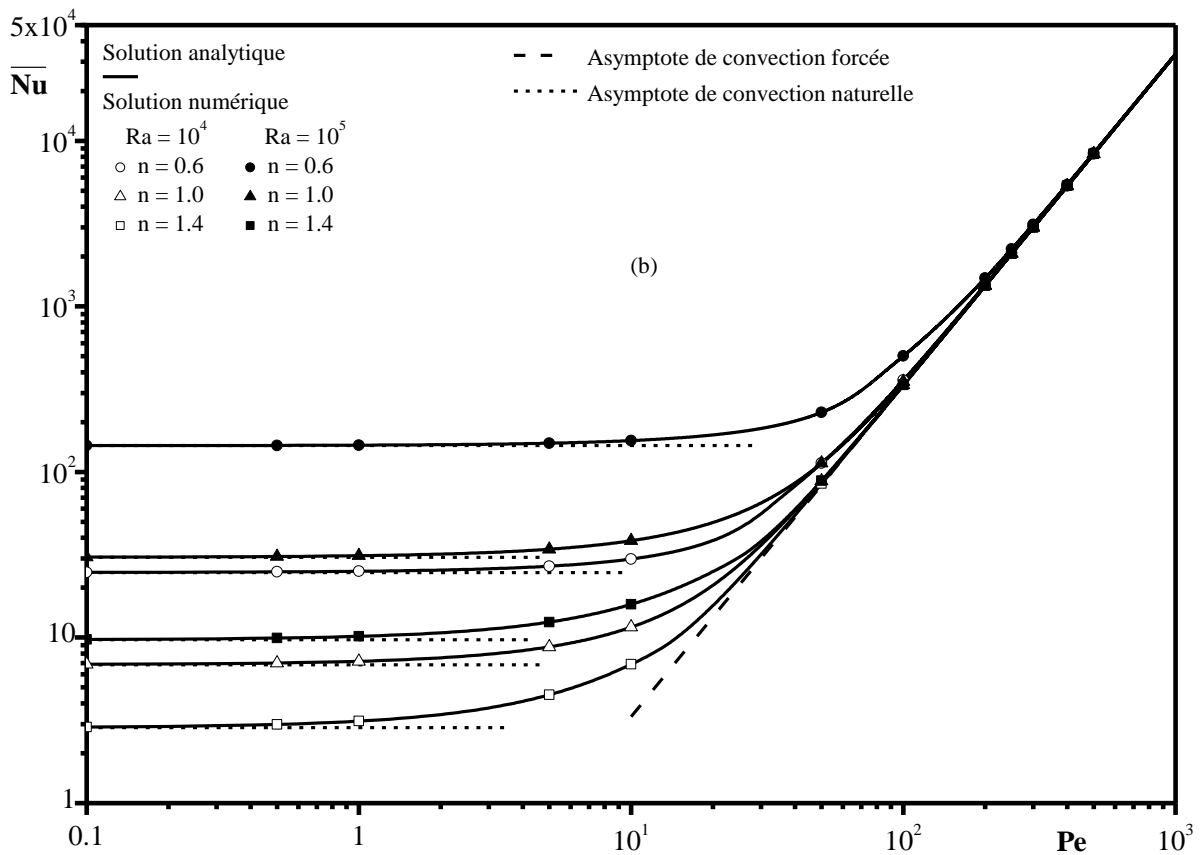
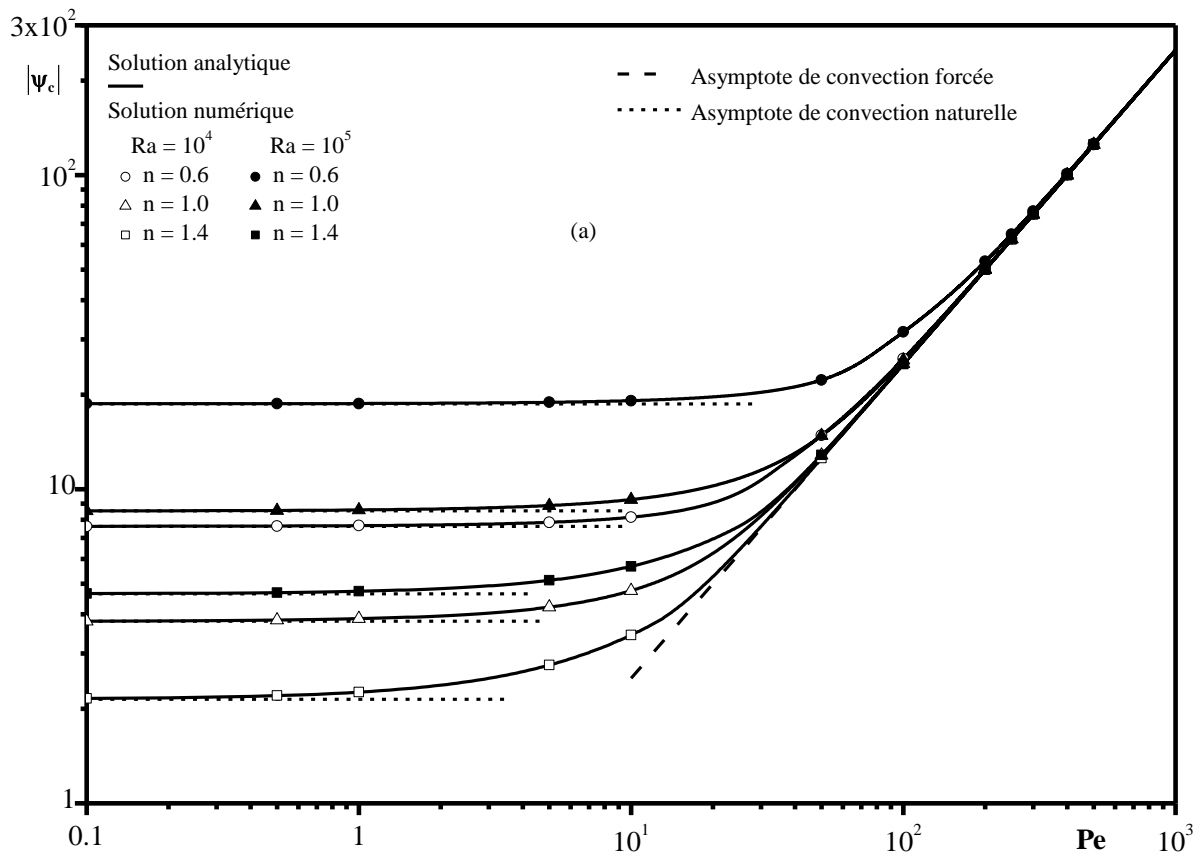


Figure 5.8 : Évolution de l'intensité de l'écoulement (a) et du nombre de Nusselt moyen (b) avec Pe pour différentes valeurs de Ra et n

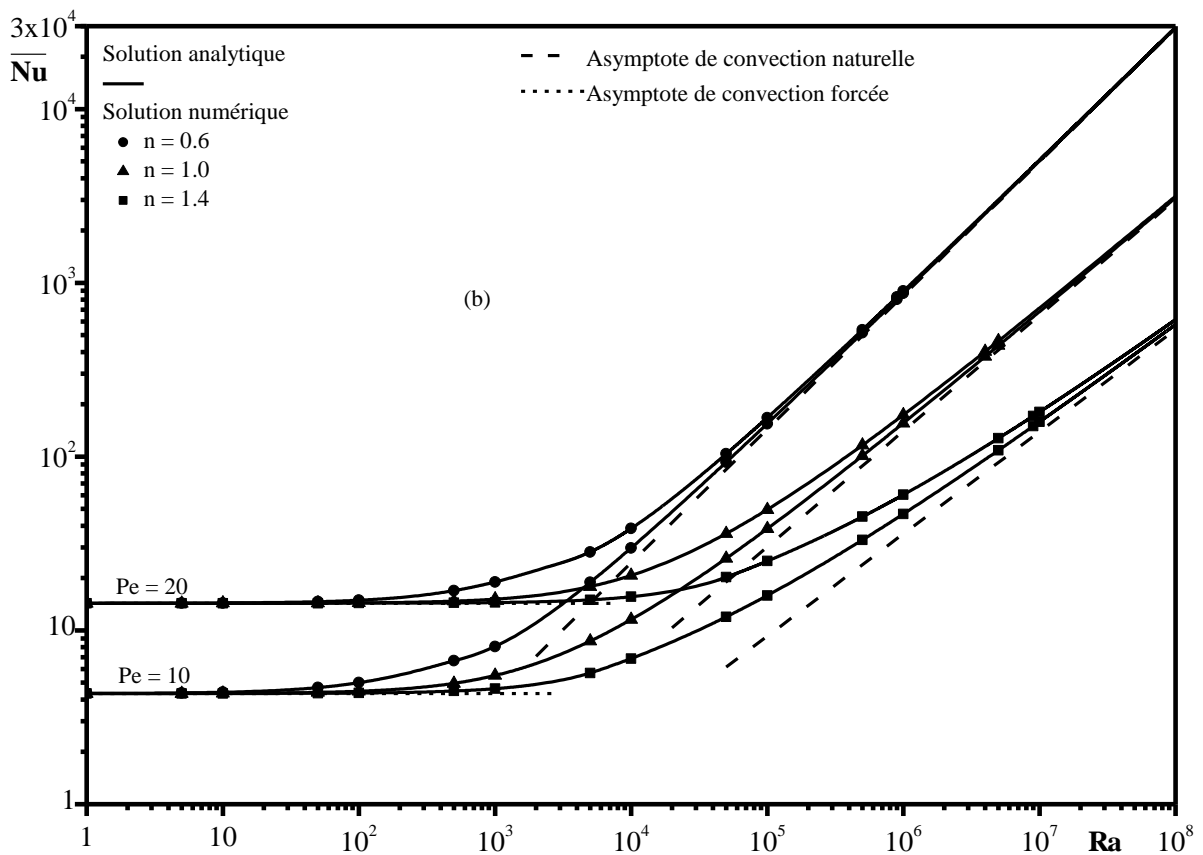
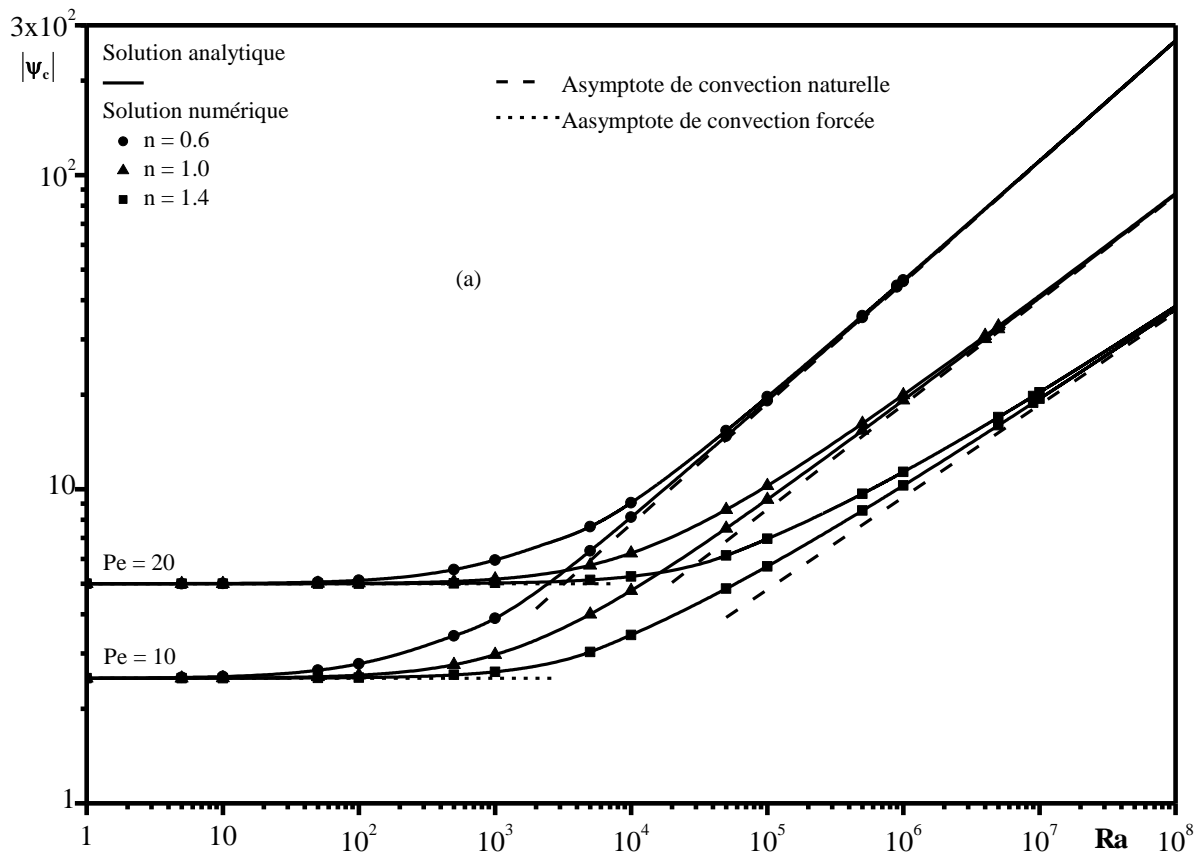


Figure 5.9 : Évolution de l'intensité de l'écoulement (a) et du nombre moyen de Nusselt (b) avec Ra pour différentes valeurs de Pe et n

L'effet du nombre de Rayleigh généralisé sur l'intensité du flux et le taux de transfert de chaleur est illustré respectivement dans les figures 5.9 (a) et (b). En général, pour un nombre de Peclet fixe, Pe , le transfert de chaleur et l'intensité de l'écoulement augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, Ra , qui caractérise l'intensité de la convection naturelle, parce que la flottabilité devient, de plus en plus, la principale force motrice du mouvement du fluide, et donc la convection naturelle devient dominante, validant les résultats obtenus dans la figure 5.1. De même, pour les faibles valeurs du nombre de Peclet, Pe , le fluide d'amincissement par cisaillement ($0 < n < 1$) donne de grandes valeurs, soit pour le transfert de chaleur, soit pour l'intensité de la circulation, que celles obtenues pour les fluides newtoniens ($n = 1$) et d'épaississement par cisaillement ($n > 1$). Pour une valeur élevée de Pe , le fluide non-Newtonien se comporte comme le fluide Newtonien car les forces d'inertie dominent les autres forces de viscosité. Il est clair que l'indice de loi de puissance, n , et le nombre de Rayleigh, Ra , ont des effets opposés sur les caractéristiques de l'écoulement et le transfert de chaleur. En fait, pour un indice de comportement, n , donné, et en augmentant encore Ra , l'effet de convection est renforcé, et un comportement similaire est induit en diminuant n pour un Ra donné.

La convection dépend fortement du changement de Ra pour le comportement d'amincissement par cisaillement ($0 < n < 1$) par rapport à celui d'épaississement par cisaillement ($n > 1$). De plus, une augmentation du rapport Ra/n rend \overline{Nu} et $|\Psi_c|$ plus proches de leurs valeurs en convection naturelle lorsque $Ra/Pe^{*3} > \eta_n$, tandis qu'une diminution du rapport Ra/n rend \overline{Nu} et $|\Psi_c|$ très proches de celles obtenues en convection forcée lorsque $Ra/Pe^{*3} < \eta_f$.

5.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la convection mixte dans une enceinte rectangulaire allongée, de rapport d'aspect $A = 24$, confinant des fluides non-Newtoniens de type loi de puissance. L'étude est concentrée sur le cas où les deux murs supérieurs et inférieurs sont mobiles. Les résultats montrent, que dans les limites de variation des paramètres directeurs dans leurs gammes considérées, les résultats analytiques concordent complètement avec les résultats numériques qui valident l'approximation de l'écoulement parallèle et le code numérique. La convection naturelle domine pour les grandes valeurs du rapport Ra/n mais pour les grandes valeurs de Pe c'est la convection forcée qui domine. De plus, en augmentant le rapport Ra/n ou le nombre de Peclet, Pe , on favorise le transfert de

chaleur et aussi l'intensité de l'écoulement. En outre, la croissance des paramètres de contrôle nécessite un élargissement de la cavité exprimé par l'augmentation du rapport d'aspect afin d'obtenir une bonne solution numérique. D'autre part, il est intéressant de noter que pour $n = 1$ nous trouvons tous les résultats présentés dans le chapitre 4 (cas d'un fluide Newtonien)

CONCLUSION GENERALE

Dans ce rapport de thèse, la contribution à l'étude analytique et numérique du phénomène physique de convection mixte est présentée. L'étude est faite en régime laminaire dans une cavité rectangulaire horizontale allongée, dont les deux parois supérieure et inférieure sont constamment en mouvement. L'espace confiné est soumis à une densité de flux de chaleur uniforme (conditions aux limites de type Neumann) horizontale. L'enceinte peut confiner des fluides Newtoniens ou des fluides non-Newtoniens de type Ostwald-De Waele et qui obéissent à l'approximation de Boussinesq adoptée pour le terme de poussée. Pour les fluides Newtoniens, deux cas ont été examinés : cavité à deux parois horizontales mobiles et cavité à une seule paroi horizontale en mouvement. À cause de la complexité du problème, pour les fluides non-Newtoniens uniquement le cas où le problème présente une centro-symétrie (cavité doublement entraînée) est examiné. La méthode des volumes finis a été utilisée pour discrétiser les équations adimensionnelles gouvernantes et l'algorithme SIMPLER est adopté pour leur résolution. La structure de l'écoulement et le transfert de chaleur sont analysés en fonction des valeurs des paramètres de contrôle du problème à savoir : le rapport de forme de la cavité, A , l'indice de comportement, n , le nombre de Peclet, Pe , et celui de Rayleigh, Ra . Par ailleurs, dans le cas limite d'une cavité allongée $A \gg 1$, une solution analytique, basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle dans la région centrale de la cavité, a été élaborée pour prédire qualitativement les propriétés thermo-convectives. Cette solution analytique, dans la limite des valeurs considérées des paramètres gouvernants, s'avère être en excellent accord avec la solution numérique. Les solutions ont conduit à plusieurs résultats, illustrant l'influence des paramètres de contrôle sur le nombre de Nusselt, l'intensité de la fonction de courant et ainsi que sur les profils de la vitesse et de la température. Les principales conclusions du présent travail peuvent être résumées comme suit :

Pour un rapport de forme $A = 24$, les résultats obtenus sont apparus indifférents vis-à-vis de toute augmentation de A . Il en ressort que pour les fluides Newtoniens ($n = 1$) et non-Newtoniens considérés dans cette étude, la convection mixte est essentiellement contrôlée par deux paramètres, à savoir : le rapport Ra/n et le nombre de Peclet (Pe).

Dans le cas des fluides Newtoniens, la cavité simplement entraînée présente des isothermes plus serrées près de la paroi gauche tandis que dans le cas de la cavité doublement entraînée la distribution de la température devient centro-symétrique avec des couches limites thermiques plus fines. De plus, le transfert de chaleur est plus important dans le cas d'une

enceinte doublement entraînée que dans le cas d'une enceinte simplement entraînée. Ceci est lié aux effets coopératifs des parois mobiles, qui agissent de manière à améliorer la circulation des fluides.

En outre, dans tous les cas étudiés, la convection naturelle prédomine pour les grandes valeurs du rapport, Ra/n , tandis que pour les grandes valeurs de Pe c'est la convection forcée qui prédomine. De plus, l'augmentation du rapport, Ra/n , où du nombre de Peclet, Pe , favorise le transfert de chaleur et aussi l'intensité de l'écoulement. D'autre part, il convient de noter que les limites d'un régime convectif dépendent du nombre de parois mobiles et de l'indice de comportement, n , ou la transition d'un régime dominant à un autre dépend du rapport Ra/Pe^{2+n} .

D'un point de vue industriel, ces résultats originaux constituent donc une banque de données utiles pour compléter les acquis dans le domaine de la thermisation des fluides. Ils permettent, en fait, de contribuer à la compréhension des mécanismes de base gouvernant la convection mixte dans les milieux Newtoniens et non-Newtoniens et présentent un intérêt pour les procédés thermiques des fluides incompressibles à comportement rhéologique simple et complexe.

En perspective, la cavité rectangulaire chauffée latéralement, dont l'étude a fait l'objet de cette thèse, n'est qu'un cas de chauffage parmi d'autres. Il faudra donc envisager d'aborder dans le futur le cas d'une cavité chauffée par le bas pour les mêmes types de fluides et avec des conditions aux limites similaires. Aussi, il sera nécessaire d'essayer à étudier le cas d'une cavité simplement entraînée remplie par des fluides non Newtoniens. D'autre part, la réalisation d'une étude approfondie du problème en configuration tridimensionnelle pourrait élargir la portée des travaux de cette thèse.

REFERENCES

A

Agassant, J.-F., Avenas, P. et Sergent, J.-Ph. (1989), La mise en forme des matières plastiques, TEC. et Doc.-Lavoisier, Paris.

A.J. Chamkha, E. Abu-Nada, Mixed convection flow in single- and double-lid driven square cavities filled with water–Al₂O₃ nanofluid: effect of viscosity models, *Eur. J. Mech. B/Fluids* 36 (2012) 82–96.

A. Karimipour, A.H. Nezhad, A. D’Orazio, E. Shirani, The effects of inclination angle and prandtl number on the mixed convection in the inclined lid driven cavity using Lattice Boltzmann method, *J. Theo. Appl. Mech.* 51 (2) (2013) 447–462.

A.K. Hussein, S.H. Hussain, Mixed convection through a lid-driven air-filled square cavity with a hot wavy wall, *Int. J. Mech. Mater. Eng. (IJMME)* 5 (2) (2010) 222–235.

B

Bejan, A. (1983), The boundary layer regime in a porous layer with uniform heat flux from the side, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 1339-1346.

C

Chuo-Jeng Huang, Kuo-Ann Yih, Heat and Mass Transfer on the Mixed Convection of Non-Newtonian Fluids Over a Vertical Wedge with Soret/Dufour Effects and Internal Heat Generation: Variable Wall Temperature/Concentration, *Transport in Porous Media* <https://doi.org/10.1007/s11242-019-01325-8>.

Corcione, M. (2010), “Heat transfer features of buoyancy-driven nanofluids inside rectangular enclosures differentially heated at the sidewalls,” *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 49, pp. 1536–1546.

Couarraze, G. et Grossiord, J.L. (1991), *Initiation à la rhéologie*, TEC. et Doc.-Lavoisier.

D

D.E. Cormack, L.G. Leal, J. Imberger, Natural convection in a shallow cavity differentially heated end walls. Part 1. Asymptotic theory, *J. Fluid Mech.* 65 (1974) 209–229.

D. L. Siebers, R. G. Schwind, R. J. Moffat. Experimental mixed convection heat transfer from a large vertical surface in horizontal flow. Sandia Rept. Sand, Sandia Nat. Lab. Albuquerque, N., M., 83–8225, 1983.

E

E. Abu-Nada, A.J. Chamkha, Mixed convection flow in a lid-driven inclined square enclosure filled with a nanofluid, *Eur. J. Mech. B/Fluids* 29 (2010) 472–482.

E. M. Sparrow, J. L. Gregg. Buoyancy Effects in Forced Convective Flow and Heat Transfer. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 26:81-133, 1959.

E. R. G. Eckert, A. J. Diaguila. Convective heat transfer for mixed free and forced flow through tubes. *Trans. ASME*, 76:497–504, 1954.

F

F.J.K. Ideriah, Prediction of turbulent cavity flow driven by buoyancy and shear, *J. Mech. Eng. Sci.* 22 (1980) 287–295.

G

G.H.R. Kefayati, Mixed convection of non-Newtonian nanofluid in an enclosure using Buongiorno's mathematical model, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 108 (2017) 1481–1500.

Gourdin, A. et Boumahrat, M. (1989), Méthodes numériques appliquées, TEC. et Doc.-Lavoisier, Paris.

Gray, D.D. et Giorgini, A. (1976), The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 545-551.

H

H.F. Oztop, I. Dagtekin, Mixed convection in two-sided lid-driven differentially heated square cavity, *Int. J. Heat Mass Transf.* 47 (2004) 1761–1769.

Hussein M. Jassim, Hayder K. Rashid, Emad D. Aboud, Saba Y. Ahmed, Hameed K. Hamzah, Farooq H. Ali, MHD Mixed Convection in Square Enclosure Filled with non-

Newtonian Nanofluid with Semicircular-Corrugated Bottom Wall, *International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering IJMME-IJENS* Vol:20 No:01.

H. Tabor, some thoughts on water heaters for rural areas. *Sunworld*, 1984, 8(2), 44-46.

H.T. Rossby, On thermal convection driven by non-uniform heating from below: an experimental study, *Deep-Sea Res.* 12 (1965) 9–16.

H.T. Rossby, Numerical experiments with a fluid heated non-uniformly from below, *Tellus* 50 (A) (1998) 242–257.

I

I. Alloui, H. Benmoussa, P. Vasseur, Soret and thermosolutal effects on natural convection in a shallow cavity filled with a binary mixture, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 31 (2010) 191-20

J

J. Imberger, P.F. Hamblin, Dynamics of lake reservoirs and cooling ponds, *A. Rev. Fluid Mech.* 14 (1982) 153–187

Jinhu Zhao, Liancun Zheng, Xinxin Zhang, Mixed convection heat transfer of non-Newtonian Carreau–Yasuda fluid driven by power law temperature gradient, *Heat Transfer Research* 48(9):749–764 (2017)

K

K.M. Khanafer, A.M. Al-Amiri, I. Pop, Numerical simulation of unsteady mixed convection in a driven cavity using an externally excited sliding lid, *Eur. J. Mech B/Fluids* 26 (2007) 669–687.

Krunal M. Gangawane, Hakan F. Oztop, Mixed convection in the semi-circular lid driven cavity with heated curved wall subjugated to constant heat flux for non-Newtonian power-law fluids, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 114 (2020) 104563.

K. Yapici, S. OBUT, Laminar mixed-convection heat transfer in a lid-driven cavity with modified heated wall, *Heat Transf. Eng.* 36 (3) (2015) 303–314.

L

L.A.B. Pilkington, Review lecture. The float glass process, *Proc. R. Soc. London, A Math. Phys. Sci.* 314 (1516) (1969) 1–25.

Lamsaadi, M., Naimi, M. et Hasnaoui, M. (2006), “Natural convection heat transfer in shallow horizontal rectangular enclosures uniformly heated from the side and filled with non-Newtonian power law fluids,” *Energy Conversion and Management*, Vol. 47, pp. 2535–2551.

M

M.A. Ismael, I. Pop, A.J. Chamkha, Mixed convection in a lid-driven square cavity with partial slip, *Int. J. Therm. Sci.* 82 (2014) 47–61.

M. Alinia, D.D. Ganji, M.G. Bandy, Numerical study of mixed convection in an inclined two sided lid driven cavity filled with nanofluid using two-phase mixture model, *Int. Comm. Heat Mass Transf.* 38 (2011) 1428–1435.

Manvi Manchanda , Krunal M. Gangawane, Mixed convection in a two-sided lid-driven cavity containing heated triangular block for non-Newtonian power-law fluids, *International Journal of Mechanical Sciences* 144 (2018) 235–248.

M.A.R. Sharif, Laminar mixed convection in shallow inclined driven cavities with hot moving lid on top and cooled from bottom, *Appl. Therm. Eng.* 27 (2007) 1036–1042.

M.A. Sheremet, I. Pop, Mixed convection in a lid driven square cavity filled by a nanofluid: Buongiorno’s mathematical model, *Appl. Math. Comput.* 266 (2015) 792–808.

M.A. Taher, S.C. Saha, Y.W. Lee³, H.D. Kim, Numerical study of lid-driven square cavity with heat generation using LBM, *Am. J. Fluid Dyn.* 3 (2) (2013) 40–47.

M. Bernier and B. R. Baliga, AI-D/2-D model and experimental results for a closed-loops thermosyphon with vertical heat transfer sections. *Int. J. of heat and mass transfer*, 1992, 35(11), 2969-2982.

M. G. parent, Th. H. Van Der Meer and K. G. T. Hollands, Natural convection heat exchangers in solar water heating systems: theory and experiment. *Solar Energy*, 1990, 45(1), 43-52

Midoux, N. (1993), Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique, TEC. et Doc.-Lavoisier.

Mohammad Shahabadi , S.A.M. Mehryan , Mohammad Ghalambaz , Muneer Ismael , Controlling the natural convection of a non-Newtonian fluid using a flexible fin, Applied Mathematical Modelling (2020), doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.11.029>.

Muhammad Bilal, Muzma Nazeer, Numerical analysis for the non-Newtonian flow over stratified stretching/shrinking inclined sheet with the aligned magnetic field and nonlinear convection, Arch Appl Mech, <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01798-w>.

M. Lamsaadi, M. Naïmi, M. Kaddiri, H. El Harfi, R. El Amraoui, M. Hasnaoui, Analytical and numerical study of hydrodynamical boundary conditions effect on natural double-diffusive convection in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated and salted from the sides, J. Mater. Environ. Sci. 9 (2018) 741-753.

M.R. Heydari, M.H. Esfe, M.H. Hajmohammad, M. Akbari, S.S.M. Esforjani, Mixed convection heat transfer in a double lid-driven inclined square enclosure subjected to Cu water nanofluid with particle diameter of 90 Nm, Heat Transf. Res. 45 (1) (2014) 75–95.

N

N.A. Bakar, R. Roslan, M. Ali, A. Karimipour, Mixed convection in an inclined lid-driven square cavity with sinusoidal heating on top lid, ARPN J. Eng. Appl. Sci. 12 (2017) 2539–2544.

Nasreddine Benkacem, Nader Ben Cheikh, Brahim Ben Beya, Threedimensional analysis of mixed convection in a differentially heated liddriven cubic enclosure, J. Appl. Mech. Eng. 4 (2015) 159.

N. Ouertatani, N. Ben Cheikh, B. Ben Beyaa, T. Lilia, A. Campo, Mixed convection in a double lid-driven cubic cavity, Int. J. Therm. Sci. 48 (2009) 1265–1272.

O

Ostwald, W. (1925), Kolloid z., Vol. 36, pp. 99-117.

Otero, J., Wittenberg, R.W., Worthing, R.A. et Doering, C.R. (2002), Bounds on Rayleigh-Bénard convection with an imposed heat flux, *J. Fluid Mech.*, Vol. 473, pp. 191-199.

Ozoe, H., et Churchill, S. W., 1972, “Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwald-de-Waele and Ellis fluids: the development of a numerical solution”, *AICHE J.* vol. 18, pp. 1196-1207.

P

Patankar, S. (1980), “Numerical heat transfer and fluid flow,” Hemisphere, Washington DC.

R

R.K. Tiwari, M.K. Das, Heat transfer augmentation in a two-sided lid-driven differentially heated square cavity utilizing nanofluids, *Int. J. Heat Mass Transf.* 50 (2007) 2002–2018

S

Saeed Nazari, R. Ellahi, M. M. Sarafraz, Mohammad Reza Safaei, Ali Asgari, Omid Ali Akbari, Numerical study on mixed convection of a non-Newtonian nanofluid with porous media in a two lid-driven square cavity, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, <https://doi.org/10.1007/s10973-019-08841-1>.

Sharaban Thohura, Md. Mamun Molla, Md. Manirul Alam Sarker, Numerical Simulation of Non-Newtonian Power-Law Fluid Flow in a Lid-Driven Skewed Cavity, *Int. J. Appl. Comput. Math* (2019), <https://doi.org/10.1007/s40819-018-0590-y>.

Siginer, D. A. et Valenzuela-Rendon A. (2000), On the laminar free convection and stability of grade fluids in enclosures, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 3391-3405.

Sibony, M. et Mardon, J.-Cl. (1982), *Analyse numérique II, approximation et équations différentielles*, Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, Paris.

S. Sivasankaran, V. Sivakumar, P. Prakash, Numerical study on mixed convection in a lid-driven cavity with non-uniform heating on both side walls, *Int. J. Heat Mass Transf.* 53 (2010) 4304–4315

S. Turki, Contribution to numerical study of natural and mixed convection heat transfers in confined non-Newtonian fluids. Ph.D. Thesis, CNAM, Paris, France, 1990.

T

Tien, C., Tsuei, H.S., et Sun, Z.S., 1969, “thermal instability of horizontal layer of non-Newtonian fluid heated from below”, *Intern. J. Heat Mass Transfer*, vol.12, pp. 1173

T. Basak, S. Roy, P.K. Sharma, I. Pop, Analysis of mixed convection flows within a square cavity with linearly heated side wall(s), *Int. J. Heat Mass Transf.* 52 (2009) 2224–2242

Toufik Benmalek, Ferhat Souidi, Mourad Moderres, Bilal Yassad and Said Abboudi, Mixed Convection of Bingham Fluid in a Two Sided Lid-Driven Cavity Heated From Below, *FDMP*, vol.15, no.2, pp.107-123, 2019

T. Makayssi , M. Lamsaadi , M. Naïmi , M. Hasnaoui , A. Raji , A. Bahlaoui, Natural double-diffusive convection in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated and salted from the side and filled with non-Newtonian power-law fluids: The cooperating case, *Ener. Conv. Manag.* 49 (2008) 2016–2025.

V

V. Sivakumar, S. Sivasankaran, P. Prakash, J. Lee, Effect of heating location and size on mixed convection in lid-driven cavities, *Comp. Math. With Appl.* 59 (2010) 3053–3065.

V. Sivakumar, S. Sivasankaran, Mixed convection in an inclined lid-driven cavity with non-uniform heating on both sidewalls, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 55 (4) (2014) 634–649.

Y

Y. Zvirin, A review of natural circulation loops in pressurized water reactors and other systems. *Nuclear Engineering and Design*, 1981, 203-225

Y.S. Prasad, M.K. Das, Hopf bifurcation in mixed convection flow inside a rectangular cavity, *Int. J. Heat Mass Transf.* 50 (2007) 3583–3598

Z. Alloui, J. Guet, P. Vasseur, M. Reggio, Natural convection of nanofluids in a shallow rectangular enclosure heated from the side, *Can. J. Chem. Eng.* 90 (1) (2012) 69–78.