



UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE
Faculté des Sciences et Techniques
Béni-Mellal



Centre d'Études Doctorales « Sciences et Techniques »
Formation doctorale « Mathématiques et Physique Appliquées »
Laboratoire de Physique des Matériaux

THÈSE

Présentée par

Omar DADAH

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT

Discipline : Génie Mécanique

Spécialité : Calcul des structures et Mécanique des vibrations

Thème :

**CONTRIBUTIONS POUR LA PREDICTION DU COMPORTEMENT
DYNAMIQUE DES STRUCTURES MECANIQUES**

Soutenue le 02/10/2021 devant le jury composé de :

Bouchaib RADI	PES	Université Hassane 1, FST, Settat	Président / Rapporteur
Abdessamad BALOUKI	PES	Université Sultan Moulay Slimane, EST, Béni-Mellal	Rapporteur
Abderrahim BENRICHOU	PES	Université Sultan Moulay Slimane, FST, Béni-Mellal	Rapporteur
Ahmed MOUSRJ	PES	Université Hassane 1, FST, Settat	Co-encadrant
Hammou AIT RIMOUCH	PES	Université Sultan Moulay Slimane, FST, Béni-Mellal	Encadrant

Je dédie cette thèse de doctorat...

Aux

Plus chères personnes du monde

Mes Parents

*Parce que votre rôle dans ma vie est indiscutable,
quoique je dise, quoique je fasse, quoique j'écrive, je ne saurais vous
exprimer l'étendue de l'amour et de l'affection que j'ai pour vous.
Sans votre aide, je n'aurais jamais pu atteindre le niveau que j'ai
atteint aujourd'hui.*

Ma joie est de vous voir heureux en ce jour.

A

Mon frère, ma femme et mes sœurs

*Vous êtes pour moi la source de joie.
Que ce travail soit l'expression d'une fraternité sincère et
éternelle, de mon grand amour et de mon attachement
indéfectible.*

*Que dieu vous bénisse et vous prête une vie pleine de santé, de
succès et de bonheur.*

Que la vie ne puisse jamais nous séparer.

A

Mes Amis

*Pour tous les soucis et les bonheurs que nous avons partagés,
Vous êtes pour moi des amis, des frères et des confrères.
Je vous dois une profonde reconnaissance et je vous assure de mes
sincères sentiments.*

Que dieu protège notre amitié éternellement.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah de m'avoir donné le courage et la patience sans lesquels je n'aurais certainement jamais pu mener ce projet à terme.

Ensuite, je tiens à adresser plus particulièrement mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse le professeur Hammou AIT RIMOUCHE pour l'aide combien précieuse et efficace qu'il m'a apportée, pour sa patience, sa rigueur et ses encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail. Malgré ses nombreuses responsabilités, il a toujours répondu présent, me montrant ainsi la voie tout en me laissant une grande liberté de pensée et d'action. Ses discussions utiles et fructueuses ont été un atout pour moi pour mener à bien les travaux de cette thèse. J'ai eu ainsi la chance de travailler sous sa direction pendant ses années. Je tiens également à remercier mon co-directeur de thèse le professeur Ahmed MOUSRIJ pour m'avoir encouragé et conseillé tout au long de ce travail. Ses discussions ont été d'intérêt considérable.

Un grand merci aux membres du Laboratoire LPM, surtout les professeurs Mohamed SAJIEDINE, Lhoucine OUFNI et Ahmed LIBA, aussi bien que les doctorants, pour les bons moments que nous avons partagés.

À tous, merci!

Abstract

In the past, the designer of a product was obliged to make a series of prototypes until the final product was produced. This way of proceeding is rarely used nowadays, because it is very expensive. That is why it is necessary to elaborate a primitive mathematical model, generally of finite element type, on which the transformations will be carried out to arrive at the desired result; certainly, a direct calculation involves very high data-processing costs for structures of great size.

Within the framework of a general process of optimization of the dynamic behavior of a structure, we develop simplified computational methods (modal reanalysis, dynamic substructuring), based either on the exploitation of the identified eigen solutions, or on the frequency responses. These techniques allow us to predict the dynamic behavior of a structure based either on data from a primitive mathematical model or on measurements performed on an initial prototype.

In chapter 1, we develop a reanalysis method for conservative structures that allows to take into account, in a significant way, the effects of modal truncation. An extension of this method to dissipative structures is proposed in chapter 2. A validation by numerical simulations examples will be exposed and commented at the end of each chapter.

In the third chapter, the modal reanalysis of the modified structures is proposed by directly exploiting the frequency responses obtained from the measurements, without going through a modal identification of the primitive structure. The information associated with the unexcited DDLs will be estimated using a direct reconstruction of the flexibility matrix.

The last chapter aims at optimizing the prediction of the dynamic behavior of large structures by exploiting substructuring methods. An improvement in the quality of the prediction is obtained in the following two cases:

- When the effects of modal truncation are taken into account in the formulation using the identified eigen solutions of the substructures,
- When the reconstructed flexibility matrices of each sub-structure are exploited.

Keyword: Modal reanalysis, Structural modification, Truncated modal basis, Substructuring, Finite element method, Disturbance, Polynomial eigenvalue problem, Frequency response functions (FRF), Reconstruction, Modal identification, Exciters.

Résumé

Jadis, le concepteur d'un produit était astreint de réaliser une panoplie de prototypes jusqu'à l'aboutissement au produit final. Cette manière de procéder est rarement utilisée actuellement, car très onéreuse. C'est pourquoi, il est nécessaire d'élaborer un modèle mathématique primitif, généralement de type éléments finis, sur lequel les transformations seront effectuées pour arriver au résultat désiré ; certes, un calcul direct entraîne des coûts informatiques très élevés pour des structures de grande taille.

Dans le cadre d'un processus général d'optimisation du comportement dynamique d'une structure, nous développons des méthodes de calcul simplifiées (réanalyse modale, sous-structuration dynamique), basées soit sur l'exploitation des solutions propres identifiées, soit sur les réponses fréquentielles. Ces techniques permettent de prédire le comportement dynamique d'une structure en se basant soit sur des données issues d'un modèle mathématique primitif, soit sur des mesures effectuées sur un prototype initial.

Dans le chapitre 1, nous développons une méthode de réanalyse traitant le cas des structures conservatives et permettant de tenir compte, d'une manière significative, des effets de la troncature modale. Une extension de cette méthode aux structures dissipatives est proposée au chapitre 2, puis une validation par des exemples de simulations numériques sera exposée et commentée à la fin de chaque chapitre.

Au troisième chapitre, on propose de faire la réanalyse modale des structures modifiées en exploitant directement les réponses fréquentielles issues des mesures, sans passer par une identification modale, de la structure primitif. Les informations associées aux DDL non excités seront estimées à l'aide d'une reconstitution directe de la matrice de flexibilité.

Le dernier chapitre vise à optimiser la prédiction du comportement dynamique des structures, de grande taille, en exploitant les méthodes de sous-structuration. Une amélioration de la qualité de la prédiction est obtenue dans les deux cas suivants :

- Lorsqu'on tient compte des effets de la troncature modale dans la formulation utilisant les solutions propres identifiées des sous structures,
- Lorsqu'on exploite les matrices de flexibilité reconstituée de chaque sous structure.

Mot-clé : Réanalyse modale, Modification structurale, Base modale tronquée, Sous-structuration, Méthode des éléments finis, Perturbation, Problème aux valeurs propres polynomiale, Fonctions de réponse en fréquence (FRF), Reconstruction, Identification modale, Excitateurs.

Table des matières

Résumé	x
Liste des figures.....	1
Liste des tableaux.....	6
Introduction générale.....	7

Chapitre 1. Prédiction optimale du comportement dynamique des structures conservatives modifiées

Notations	10
1. Introduction.....	11
2. Hypothèse générale.....	12
3. Cas des structures conservatives	12
3.1. Calcul des solutions propres de la structure modifiée	14
3.1.1 L'approche classique de Rayleigh-Ritz.....	14
3.1.2 Approche proposée.....	14
3.1.3 Transformation optimale du problème aux valeurs propres.....	15
3.1.4 Réduction des coûts de calcul	16
4. Tests numériques.....	19
4.1 Exemple 1 : Poutre encastrée-libre	19
4.2 Exemple 2 : Poutre encastrée-encastrée	22
4.3 Exemple 3 : Portique 2D	24
4.4 Exemple: Structure 3D	26
4.5 Commentaire des résultats	30
5. Conclusion	31

Chapitre 2. Réanalyse des structures dissipatives modifiées à partir des solutions propres identifiées

1. Introduction.....	33
2. Hypothèse générale.....	34
3. Réanalyse d'une structure dissipative modifiée.....	34
3.1 Cas d'un amortissement visqueux proportionnel	35
3.1.1 Formulation générale.....	35
3.1.2 Formulation proposée	35
3.1.3 Exemple 1 : Portique "avec amortissement proportionnel".....	37

3.2	<i>Cas d'un amortissement visqueux non proportionnel</i>	39
3.2.1	<i>Formulation générale</i>	39
3.2.2	<i>Formulation proposée</i>	40
3.2.3	<i>Exemple 2 : Portique "avec amortissement non proportionnel"</i>	42
4.	<i>Discussion</i>	45
5.	<i>Conclusion</i>	45

Chapitre 3. Analyse des structures dynamiques à partir des fonctions des réponses fréquentielles (FRF)

1.	<i>Introduction</i>	47
2.	<i>Analyse modale expérimentale (A.M.E.)</i>	48
2.1	<i>Fonction d'auto corrélation R_{xx} et de Corrélation croisée R_{xf}</i>	50
2.2	<i>Auto spectre S_{xx} et spectre croisé S_{xf}</i>	51
2.3	<i>Fonctions de transfert H</i>	51
2.4	<i>Cohérence des signaux</i>	52
2.5	<i>Technique de mesure</i>	52
2.6	<i>Mesure des modes</i>	53
2.6.1	<i>Definitions des modes</i>	53
2.6.2	<i>Analyse Modale</i>	54
2.6.3	<i>Amortissement proportionnel</i>	55
2.6.4	<i>Identification modale /Identification des matrices de rigidité et d'amortissement</i> 55	
2.6.5	<i>Evaluation des modes</i>	57
2.6.6	<i>Identification des paramètres physique</i>	59
2.6.7	<i>Combinaison de systèmes complexes</i>	59
3.	<i>Problèmes de modification structurale via les fonctions de transfert</i>	60
3.1	<i>Formulation générale</i>	60
3.2	<i>Cas de blocage des DDL</i>	62
4.	<i>Évaluation de la matrice FRF</i>	63
4.1.1	<i>Estimation à partir d'un modèle d'éléments finis</i>	63
4.2	<i>Estimation à l'aide de mesures expérimentales</i>	63
4.2.1	<i>Reconstitutions à l'aide des solutions propres identifiées</i>	64
4.2.2	<i>Évaluation directe des matrices FRF</i>	65
a)	<i>Évaluation par factorisation spectrale de la sous-matrice H_{11} de la matrice mesurée</i> ...	66

c) Reconstitution du FRF après un choix optimal des excitations :	68
5. Résultats et discussion	68
5.1 Estimation de $\mathbf{H}_{cc}(\omega)$ par reconstitution directe.....	69
5.2 Exploitation des matrices de flexibilité reconstituées dans la formulation de réanalyse (Eq. (3.60)).....	72
6. Conclusion	74

Chapitre 4. Synthèse modale par sous-structuration dynamique

1. Introduction.....	77
2. Formulations traditionnelles	78
2.1.1 Cas de sous structure sans mode de corps rigide	79
2.1.2 Cas de sous structure avec mode de corps rigide	80
3. Méthode de sous-structure	85
3.1 Modélisation par discrétisation de la structure global	85
3.1.1 Equilibre des interfaces.....	87
3.1.2 Compatibilité des interfaces.....	87
3.1.3 Formulations d'assemblage.....	88
3.1.4 Estimation des solutions après séparation entre les modes connus et les modes inconnus ⁸⁹	
3.1.5 Exemple	93
3.2 Méthode de sous-structuration exploitant des données issues des mesures.....	97
3.2.1 Domaine Fréquentielle réduit	97
3.2.2 Estimation de la matrice de flexibilité dynamique assemblée après reconstitution des données :.....	98
3.2.3 Exemple	99
4. Conclusions.....	100
Conclusion générale.....	102
ANNEXE.....	104
1. Annexe A : Symétrie des matrices $\Delta\mathbf{K}$ et \mathbf{H}_k pour ($k = 1, 2, 3, \dots, n$).....	104
2. Annexe B : Expression théorique de la matrice \mathbf{R}_k	105
3. Annexe C : Développement de la matrice de flexibilité.....	106
4. Annexe D : Normalisation des modes.....	107
5. Annexe E : Méthode combinatoire.....	108
6. Annexe F : Algorithme de la méthode de Lanczos.....	110

Référence..... 112

Liste des figures

Figure 1. 1 : Représentation schématique d'une poutre encastrée-libre.....	19
Figure 1. 2 : Modification paramétrique de poutre.....	20
Figure 1. 3 : Comparaison des écarts de fréquence avec et sans résidu	21
Figure 1. 4 : Erreur sur le MAC pour le premier ordre.....	21
Figure 1. 5 : Ecart de fréquence pour les différents ordres de la méthode proposée	21
Figure 1. 6 : Blocage de DDL.....	22
Figure 1. 7 : Ecart de fréquence avec et sans résidu	23
Figure 1. 8 : Erreur sur le MAC pour le premier ordre.....	23
Figure 1. 9 : Ecart de fréquence pour les différents ordres de la méthode proposée	23
Figure 1. 10 : Dimensionnement d'un portique 2D.....	24
Figure 1. 11: Ecart de fréquence avec et sans résidu	25
Figure 1. 12: Ecart de ΔMAC_v avec et sans résidu.....	25
Figure 1. 13: Ecart de fréquence pour les différents ordres de la méthode proposée	25
Figure 1. 14: Ecart de ΔMAC_v pour les différents ordres de la méthode proposée.....	25
Figure 1. 15: Représentation schématique d'une Structure 3D.....	26
Figure 1. 16: Simulation MATLAB pour différents modes de la structure 3D.....	27
Figure 1. 17 : Ecart de fréquence avec et sans résidu pour la structure 3D	29
Figure 1. 18 : Ecart de ΔMAC_v avec et sans résidu pour la structure 3D.....	29
Figure 1. 19 : Ecart de fréquence pour les différents ordres de la méthode proposée pour la structure 3D.....	30
Figure 1. 20 : Ecart de ΔMAC_v pour les différents ordres de la méthode proposée pour la structure 3D.....	30
Figure 2. 1: Portique avec amortissement proportionnel.....	37
Figure 2. 2: Ecart entre les fréquences propres "exacte" et estimée avec et sans introduction des termes résiduels.....	38
Figure 2. 3 : Ecart entre les amortissements généralisés "exacte" et estimée avec et sans introduction des termes résiduels.....	38
Figure 2. 4 : Ecart entre les fréquences généralisées "exacte" et estimée avec introduction des termes résiduels.....	38
Figure 2. 5 : Ecart entre les amortissements généralisés "exacte" et estimée avec introduction des termes résiduels.....	38
Figure 2. 6 : Portique initial avec amortissement non proportionnel.....	42
Figure 2. 7 : Portique modifié avec amortissement non-proportionnel.....	42
Figure 2. 8 : Ecart entre les fréquences propres "exacte" et estimées avec et sans introduction des termes résiduels.....	44
Figure 2. 9 : Ecart entre les taux d'amortissements modaux de référence et estimés avec et sans introduction des termes résiduels.....	44
Figure 2. 10 : Ecart entre les fréquences propres "exacte" et estimées avec introduction des termes résiduels.....	44
Figure 2. 11 : Ecart entre les taux d'amortissements modaux de référence et estimés avec introduction des termes résiduels.....	44
Figure 3. 1: Contexte.....	48
Figure 3. 2: Chaîne d'acquisition.....	49
Figure 3. 3: Marteau d'impact/choc.....	50

<i>Figure 3. 4: Superposition modale</i>	54
<i>Figure 3. 5: Système complexe</i>	60
<i>Figure 3. 6: Portique 2D avec $p = 24$ capteurs</i>	69
<i>Figure 3. 7 : $p = 4$ points d'excitation, avec un facteur d'amortissement modal $\alpha_i = 0.01$</i>	70
<i>Figure 3. 8: $p = 8$ points d'excitation avec un facteur d'amortissement modal $\alpha_i = 0.01$</i>	72
<i>Figure 3. 9 : Portique 2D modifié avec $p=24$ capteurs</i>	73
<i>Figure 3. 10: Evaluation de l'amplitude ($P=8$) avec $\alpha_v = 1\%$</i>	74
<i>Figure 4. 1: Modèle EF d'un pont (2D)</i>	93
<i>Figure 4. 2: discrétisation du modèle</i>	94
<i>Figure 4. 3: Ecart des fréquences sans résidus (20 modes)</i>	95
<i>Figure 4. 4: Ecart des fréquences avec résidu R1 (20 modes)</i>	95
<i>Figure 4. 5: Ecart des fréquences avec résidus R2 et R2 (20 modes)</i>	95
<i>Figure 4. 6: Ecart des fréquences sans résidus (40 modes)</i>	96
<i>Figure 4. 7: Ecart des fréquences avec résidu R1 (40 modes)</i>	96
<i>Figure 4. 8: Ecart des fréquences avec résidus R1 et R2 (40 modes)</i>	96
<i>Figure 4. 12: discrétisation de cadre (2D)</i>	99
<i>Figure 4. 13: Les amplitudes calculées de la structure complète exacte avec les amplitudes calculées par la méthode de sous-structuration reconstitué</i>	100

Liste des tableaux

<i>Tableau 1. 1 : Caractéristiques des éléments modifiés de la poutre encastrée-libre.....</i>	<i>20</i>
<i>Tableau 1. 2 : Fréquences propres de la S.I, de la S.M de référence et estimées ainsi que le MACv pour une structure de 126 degrés de liberté.....</i>	<i>20</i>
<i>Tableau 1. 3 : Fréquences propres de la S.I, de la S.M de référence et estimées ainsi que le MACv pour une structure de 2577 degrés de liberté.....</i>	<i>22</i>
<i>Tableau 1. 4 : Fréquences propres de la S.I, de la S.M de référence et estimées ainsi que le MACv pour une structure de 126 degrés de liberté.....</i>	<i>22</i>
<i>Tableau 1. 5 : Fréquences propres de la S.I, de la S.M de référence et estimées ainsi que le MACv pour une structure de 2577 degrés de liberté.....</i>	<i>23</i>
<i>Tableau 1. 6 : Caractéristiques de la structure d'origine.</i>	<i>24</i>
<i>Tableau 1. 7:Caractéristiques des éléments modifiés du portique 2D.....</i>	<i>24</i>
<i>Tableau 1. 8: Caractéristique des éléments modifié de la structure 3D.....</i>	<i>28</i>
<i>Tableau 1. 9: Comparaison entre les résultats de référence et les résultats approximatifs avec différents ordres</i>	<i>29</i>
<i>Tableau 2. 1: Ecart des solutions propres exacte et estimé</i>	<i>37</i>
<i>Tableau 2. 2:Caractéristiques initiales du modèle.....</i>	<i>42</i>
<i>Tableau 2. 3: Perturbation d'amortissement</i>	<i>43</i>
<i>Tableau 2. 4: perturbations de la masse volumique et de module d'Young.....</i>	<i>43</i>
<i>Tableau 2. 5: Ecart entre les fréquences propres de référence et estimées.....</i>	<i>43</i>
<i>Tableau 3. 1: Valeurs de référence des 10 premières fréquences propres de portique</i>	<i>69</i>
<i>Tableau 4. 1: Fréquences propres de référence pour chaque sous-structure, fréquences propres de la structure globale de référence et estimées avec et sans termes résiduelles (avec 20 modes).</i>	<i>95</i>
<i>Tableau 4. 2 : Fréquences propres de référence pour chaque sous-structure, fréquences propres de la structure globale de référence et estimées avec et sans termes résiduelles (avec 40 modes)</i>	<i>96</i>

Introduction générale

Dans la plupart des secteurs de l'ingénierie, les besoins en calcul des structures mécaniques augmentent et se diversifient rapidement. Cela s'applique en particulier pour l'analyse vibratoire des systèmes, en raison notamment de la tendance à construire des structures soumises à des excitations qui fluctuent de plus en plus vite dans le temps. De ce fait, les vibrations peuvent conduire à la détérioration progressive ou l'effondrement brutal, ainsi il est essentiel de pouvoir les caractériser au stade de la conception (élaboration d'un modèle mathématique) afin d'en empêcher ou d'en réduire les conséquences désastreuses (réduction des sollicitations, modification de la conception, isolation vibratoire, influence des effets d'amortissement).

La prédiction du comportement dynamique d'une structure mécanique, lors de la phase de conception, nécessite l'élaboration d'un modèle mathématique, généralement de type éléments finis. Ensuite, l'opération de conception est répétée, pour chaque évolution de la structure, jusqu'à l'obtention du modèle souhaité. Certes, un calcul direct entraîne des coûts informatiques énormes tant au niveau de la place mémoire que du temps de calcul.

Dans le cadre d'un processus général d'optimisation du comportement dynamique d'une structure mécanique, nous développons des méthodes de calcul simplifiées (réanalyse modale, sous-structuration dynamique), basées soit sur l'exploitation des solutions propres, soit sur les réponses fréquentielles. Ces dernières seront les deux principales voies de recherche envisagées. Nous nous concentrons principalement sur la prédiction du comportement dynamique des structures mécaniques après introduction de modifications de masse et/ou de raideur et/ou d'amortissement et/ou des conditions aux limites. Ensuite, on essaiera d'élargir le champ d'application des formulations proposées au problème de sous-structuration dynamique.

Dans le premier chapitre, nous proposons une méthode de réanalyse, qui réduit le temps de calcul en utilisant des données obtenues d'une analyse théorique basée sur un modèle d'éléments finis. L'originalité réside dans le fait que la stratégie prend en compte, de manière très significative, l'apport des modes inconnus. Cette contribution sera représentée par des termes résiduels, qui peuvent être déterminés soit expérimentalement, soit théoriquement. Une extension de la méthode aux structures dissipatives est développée au chapitre 2. Cette méthode sera validée pour deux types d'amortissement, visqueux proportionnel et visqueux non proportionnel. La nouveauté de cette méthode réside dans le fait que la stratégie prend en

compte la contribution des modes inconnus d'une manière significative. Les résultats obtenus ont été validés par des simulations sur Matlab.

Dans le troisième chapitre, nous développons d'abord une technique de modifications structurale basée sur la connaissance des fonctions de réponse en fréquence de la structure d'origine et les modifications introduites. Ensuite, nous présentons les deux techniques présentées ci-dessus pour estimer la matrice de flexibilité de la structure originale. On s'intéresse essentiellement à la technique qui permet d'évaluer les matrices de flexibilité sans utiliser l'identification modale. La qualité de l'estimation de ces matrices est liée au nombre et à la position des excitateurs (choix des meilleures colonnes de $H(\omega)$).

Un exemple de simulation numérique sera proposé pour valider les formulations proposées. On étudiera les effets du nombre d'excitateurs et de leur position.

Le dernier chapitre vise à améliorer la méthode de sous-structuration pour calculer les solutions propres des structures à grande échelle, en tenant compte des effets de la troncature modale. Dans cette méthode, seules quelques premières solutions propres de chaque sous-structure doivent être connues. Les solutions propres inconnues des sous-structures sont compensées par une flexibilité résiduelle. L'amélioration de l'efficacité et de la précision du procédé de sous-structuration proposé sont illustrées par deux exemples de simulation. Les résultats démontrent que la méthode proposée peut réduire la charge de calcul tout en aboutissant une haute précision.

**Chapitre 1. Prédiction optimale du comportement dynamique des
structures conservatives modifiées**

Notations

DDL:	Degrés de libertés
S.I.:	Structure initiale
S.M.:	Structure modifiée
SCA:	Structure conservative associée
I_n :	Matrice d'identité d'ordre n
n :	Nombre de degré de liberté
m :	Nombre de modes identifiés
$X = [\dots x_\nu \dots] \in \mathbb{R}^{n,n}$:	Matrice modale de la SCA
$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_\nu\} \in \mathbb{R}^{n,n}$:	Matrice spectrale de la SCA
λ_ν, x_ν :	Les $\nu^{\text{ème}}$ valeur et vecteur propres de la S.I.
$\hat{\lambda}_\nu, \hat{x}_\nu$:	Les $\nu^{\text{ème}}$ valeur et vecteur propres de la S.M.
$p_\nu \in \mathbb{R}^{n,1}$:	Vecteur de combinaison linéaire $\hat{x}_\nu = X p_\nu$
$B ; K ; M \in \mathbb{R}^{n,n}$:	Respectivement les matrices d'amortissement de raideur et de masse
$\Delta B ; \Delta K ; \Delta M \in \mathbb{R}^{n,n}$:	Respectivement les matrices d'amortissement de raideur et de masse modifiées.
f_{ν_0}	La $\nu^{\text{ème}}$ fréquence propre de la S.I
f_ν	La $\nu^{\text{ème}}$ fréquence propre de la S.M de référence
\hat{f}_{ν_i}	La $\nu^{\text{ème}}$ fréquence propre de la S.M estimée par la méthode proposée d'ordre i lors de première modification
\check{f}_{ν_i}	La $\nu^{\text{ème}}$ fréquence propre de la S.M estimée par la méthode proposée d'ordre i de la modification qui suit
X_ν	Le $\nu^{\text{ème}}$ vecteur propre de la S.M de référence
\hat{X}_{ν_i}	Le $\nu^{\text{ème}}$ vecteur propre de la S.M estimée par la méthode proposée d'ordre i

1. Introduction

La réanalyse des vibrations libres est destinée à calculer efficacement les solutions propres pour divers changements de conception sans faire une réanalyse complète du système modifié. Une telle procédure utilise généralement les solutions propres de la structure initiale lors de la conception ou de l'optimisation topologique de la structure modifiée.

Dans des études précédentes, des techniques de réanalyse statique ont été développées pour plusieurs types de modifications [1], [2], [11], [3]–[10]. Dans le cas où le nombre de DDL reste inchangé, différentes méthodes ont été proposées : l'approximation combinée (CA) [12], la technique de sous-structuration associée à des structures régulières localement modifiées [13], l'approximation combinée par blocs avec décalage (BCAS) [14], etc. Dans le cas où le nombre de DDL est réduit, des auteurs [4], [15]–[19] proposent des solutions, par élimination ou blocage de certains DDL de la structure initiale, pour prévoir le comportement dynamique de la structure finale.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de réanalyse, qui réduit le temps de calcul en utilisant des données obtenues soit à partir d'une identification modale expérimentale, soit à partir d'une analyse théorique basée sur un modèle d'éléments finis [20]–[23]. L'originalité réside dans le fait que la stratégie prend en compte, de manière très significative, l'apport des modes inconnus. Cette contribution sera représentée par des termes résiduels, qui peuvent être déterminés soit expérimentalement, soit théoriquement.

Dans ce sens Nelson [24] a présenté une procédure simplifiée pour calculer les dérivés des vecteurs propres d'un système d'ordre arbitraire en utilisant uniquement les vecteurs propres de gauche et de droite et leurs valeurs propres associées. Cependant, ces expressions ont été dérivées en se basant uniquement sur le problème des valeurs propres standards. Chen et Wada [25] ont formulé une solution de perturbation du premier ordre en utilisant une expansion de la série de puissance pour effectuer une analyse dynamique. Le premier ordre de la méthode proposée a déjà été développé dans [17] et comparé à la technique développée dans [4]. Afin de développer notre méthode, différentes hypothèses ont été formulées. La structure est présumée d'être linéaire, non amortie et fixe. La stratégie peut être étendue aux structures amorties et flottantes.

2. Hypothèse générale

La théorie de la modification structurale dans la conception des systèmes mécaniques a été bien étudiée. Cependant, la plupart des articles n'ont appliqué cette méthode qu'aux systèmes présentant de petites perturbations, comme l'ont démontré Fox et Kapoor [26]. Notre méthode consiste à développer une formule pour traiter les systèmes perturbés lors de modifications importantes. Considérons un système dont les modes de vibration sont régis par les solutions du problème généralisé suivant :

$$[L]x_0 = \lambda_0[G]x_0 \quad (1.1)$$

Où $[L]$ et $[G]$ désignent les matrices nominales du système, toutes deux de taille $(n \times n)$, λ_0 représente une valeur propre nominale, et x_0 est le vecteur propre nominal droit correspondant. Supposons que toutes les valeurs propres non perturbées du système soient distinctes, et que $[L]$ et $[G]$ soient symétriques et définies positives.

3. Cas des structures conservatives

Considérons une structure mécanique autoadjointe conservatrice ($B = 0$), représentée par les matrices de masse et de rigidité M et $K \in \mathbb{R}^{n,n}$, à la fois symétrique et définie positives, n est le nombre total de degrés de liberté (DDL) du modèle structurel discret. Ses solutions propres sont regroupées dans la matrice modal $X = [\dots x_\nu \dots] \in \mathbb{R}^{n,n}$ et les matrices spectrales $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_\nu\} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\nu = 1, \dots, n$, qui satisfont les relations bi-orthogonales :

$$X^T M X = I_n; \quad X^T K X = \Lambda \quad (1.2)$$

où I_n est la matrice d'identité. Les valeurs propres sont classées par ordre de grandeur ($\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$).

La S.M est caractérisée par la matrice de masse $\hat{M} = M + \Delta M \in \mathbb{R}^{n,n}$, la matrice de rigidité $\hat{K} = K + \Delta K \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrices, où ΔM et ΔK sont respectivement les matrices de modification de masse et de rigidité introduite. Le problème aux valeurs propres de la S.M, en coordonnées physiques, est donné par :

$$(\hat{K} - \hat{\lambda}_\nu \hat{M})\hat{x}_\nu = 0; \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

où $\hat{x}_\nu \in \mathbb{R}^{n,n}$ et $\hat{\lambda}_\nu \in \mathbb{R}^{n,n}$ sont respectivement le $\nu^{\text{ème}}$ vecteur propre et le $\nu^{\text{ème}}$ valeur propre de la S.M. Il est supposé que les modifications ne changent pas l'ordre du système. L'équation

(1.3) peut être résolue soit dans l'espace physique, soit dans l'espace modal. La plupart des logiciels d'analyse par éléments finis résolvent ce problème dans l'espace physique. Ainsi, pour passer au problème aux valeurs propres, en coordonnées modales, on considère la transformation des coordonnées suivante :

$$\hat{x}_v = X p_v \quad (1.4)$$

où p_v est le $v^{\text{ème}}$ vecteur de coordonnées généralisées.

L'Eq. (1.4) implique que le vecteur propre \hat{x}_v est écrit comme une combinaison linéaire des n vecteurs propres de la S.I. En injectant l'Eq. (1.4) dans l'Eq (1.3) et en la prémultipliant par X^T , on ainsi obtient la représentation modale du problème aux valeurs propres de la structure modifiée

$$[\Lambda + X^T \Delta K X - \hat{\lambda}_v (I + X^T \Delta M X)] p_v = 0 \quad (1.5)$$

où les propriétés d'orthogonalité des solutions propres de l'Eq. (1.2) sont utilisées pour éliminer les matrices de masse et de rigidité de la S.I. Les solutions de l'équation précédente sont exactes si tous les modes de la structure d'origine sont utilisés. Cependant, cette condition est rarement vérifiée et les solutions ne peuvent être qu'approximatives. Par conséquent, le premier avantage de la représentation modale est que la dynamique de la structure originale peut être adéquatement représentée par un nombre réduit de modes fondamentaux (fréquences les plus basses). En outre, elle peut être appliquée dans une grande variété de cas expérimentaux et analytiques. Notre objectif est d'évaluer les solutions propres de la S.M sans recourir à une réanalyse exacte qui est coûteuse. En d'autres termes, nous souhaitons rechercher les meilleures solutions approximatives de l'Eq. (1.5) en utilisant uniquement les paramètres modaux identifiés de la S.I et les modifications introduites. Pour distinguer la partie identifiée (indice 1) de la partie inconnu (indice 2) des solutions propres de la S.I, nous partitionnons les matrices complètes X , Λ et le $v^{\text{ème}}$ vecteur des coordonnées généralisées p_v comme suit :

$$X = [X_1 \quad X_2]; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}; \quad p_v = \begin{bmatrix} p_{1v} \\ p_{2v} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

où $X_1 \in \mathbb{R}^{n,m}$ et $\Lambda_1 = \text{Diag} \{ \lambda_v ; v = 1, 2, \dots, m \}$ sont supposés être connus, $X_2 \in \mathbb{R}^{n,n-m}$ et $\Lambda_2 = \text{Diag} \{ \lambda_v ; v = m + 1, \dots, n \}$ sont inconnus $p_{1v} \in \mathbb{R}^{m,1}$ et $p_{2v} \in \mathbb{R}^{n-m,1}$ m est le nombre de modes connus ($m < n$). Avec cette décomposition, L'Eq. (1.6) devient :

$$\hat{x}_v = X_1 p_{1v} + X_2 p_{2v} \quad (1.7)$$

3.1. Calcul des solutions propres de la structure modifiée

Avant de proposer la méthode, nous allons brièvement passer en revue l'approche classique de Rayleigh-Ritz en utilisant uniquement une base modale tronquée de la structure originale.

3.1.1 L'approche classique de Rayleigh-Ritz

Les m premières solutions propres de la structure originale satisfont les relations bi-orthogonales

$$X_1^T M X_1 = I_m; \quad X_1^T K X_1 = \Lambda_1 \quad (1.8)$$

La procédure Ritz classique exprime le $v^{\text{ème}}$ vecteur propre \hat{x}_v de la structure modifiée sur la sous-base modale connu $X_1 \in \mathbb{R}^{n,m}$ de la structure originale comme

$$\hat{x}_v \cong X_1 p_{1v} \quad (1.9)$$

Dans ce cas, des solutions approximatives sont données par le problème aux valeur propre linéaire réduit, d'ordre m , suivant :

$$[\Lambda_1 + X_1^T \Delta K X_1 - \hat{\lambda}_v (I_1 + X_1^T \Delta M X_1)] p_{1v} = 0 \quad (1.10)$$

En pratique, la qualité de la réanalyse fournie par cette stratégie est souvent médiocre. Nous remarquons que lorsque le nombre de mode connu m croît, la convergence vers la solution exacte est monotone, mais généralement lente.

La question qui se pose est de savoir combien de modes doivent être inclus dans X_1 pour avoir une réanalyse adéquate. Coupry [27] a démontré la sensibilité des solutions approximatives aux erreurs de troncature, tandis que Ram et Braun [28] ont donné les limites supérieures et inférieures des solutions propres calculées avec cette procédure.

3.1.2 Approche proposée

Dans ce qui suit, les modifications seront de nature paramétrique (pas de changement de taille de la structure d'origine). Après avoir utilisé l'équation de décomposition (1.6), l'Eq. (1.5) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} [\Lambda_1 + X_1^T \Delta K X_1 - \hat{\lambda}_v (I_1 + X_1^T \Delta M X_1)] p_{1v} + [X_1^T \Delta K X_2 - \hat{\lambda}_v X_1^T \Delta M X_2] p_{2v} = 0 \\ [X_2^T \Delta K X_1 - \hat{\lambda}_v X_2^T \Delta M X_1] p_{1v} + [\Lambda_2 + X_2^T \Delta K X_2 - \hat{\lambda}_v (I_2 + X_2^T \Delta M X_2)] p_{2v} = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

La combinaison du système d'équations (1.11) implique :

$$\begin{cases} [\Lambda_1 + X_1^T \widehat{\Delta K} X_1 - \hat{\lambda}_v (I_1 + X_1^T \widehat{\Delta M} X_1)] p_{1v} = 0 \\ X_2 p_{2v} = -\Phi R_1 (\Delta K - \hat{\lambda}_v \Delta M) X_1 p_{1v} \end{cases} \quad (1.12)$$

où

$$\begin{cases} \widehat{\Delta M} = \Delta M \Phi + (\Delta K - \hat{\lambda}_v \Delta M) \Phi R_1 M \\ \widehat{\Delta K} = \Delta K \Phi \\ \Phi = [I + R_1 \Delta K - \hat{\lambda}_v R_1 \widehat{M}]^{-1} \\ R_1 = X_2 \Lambda_2^{-1} X_2^T \end{cases} \quad (1.13)$$

Les inconvénients des équations établies sont dû aux faites que les problèmes aux valeurs propres de système des Eq (1.12) de la S.M est non linéaire en $\hat{\lambda}_v$ et les matrices $\widehat{\Delta K}$ et $\widehat{\Delta M}$ peuvent être compliquées et coûteuses à évaluer, car elles s'expriment en fonction de la matrice Φ . Cette dernière contient explicitement la matrice de masse M de la S.I et sera calculée pour chaque valeur propre dans la bande des fréquences analysée et pour chaque modification introduite.

3.1.3 Transformation optimale du problème aux valeurs propres

La méthode utilisée pour résoudre le problème général Eq. (1.11) exige que, dans une bande de fréquences d'intérêt $[0, f_{max}]$, où f_{max} doit être inférieur ou égale à la plus grande fréquence propre identifiée de la S.I, la matrice Φ est approximée par une matrice polynomiale ($n \times n$) de degré n :

$$\begin{cases} \Phi \cong \Psi [I + \hat{\lambda}_v R_1 \widehat{M} + \hat{\lambda}_v (R_1 \widehat{M} \Psi) + \hat{\lambda}_v^2 (R_1 \widehat{M} \Psi)^2 + \dots + \hat{\lambda}_v^n (R_1 \widehat{M} \Psi)^n] \\ \Psi = [I + R_1 \Delta K]^{-1} \end{cases} \quad (1.14)$$

On injecte le système d'Eq. (1.14) dans le système d'Eq. (1.12) on obtient l'équation suivante :

$$[\Lambda_1 + X_1^T \widehat{\Delta K} X_1 - \hat{\lambda}_v (I_1 + X_1^T H_1 X_1) - \hat{\lambda}_v^2 (X_1^T H_2 X_1) - \dots - \hat{\lambda}_v^n (X_1^T H_n X_1)] p_{1v} = 0 \quad (1.15)$$

où :

$$\begin{cases} H_k = H_{(k-1)} \cdot D_1 + \dots + H_1 \cdot D_{(k-1)} - \overline{\Delta K} \cdot D_k \\ H_1 = \overline{\Delta M} - \overline{\Delta K} \cdot D_1 & \text{pour } k = 2, \dots, n \\ D_k = R_k \overline{\Delta M} - R_{k+1} \overline{\Delta K} \text{ et } R_k = X_1 \Lambda_2^{-k} X_1^T \\ \overline{\Delta K} = \Delta K \Psi \text{ et } \overline{\Delta M} = \Delta M \Psi \end{cases} \quad (1.16)$$

Comme mentionné dans les références [29]–[32], des algorithmes de calcul standard sont utilisés pour résoudre des problèmes aux valeurs propres polynomiales, par exemple, on peut utiliser la fonction `polyeig` du logiciel MATLAB. Avec cette approche et avec un niveau donné de précision, la réanalyse modale est décrite par m modes et l'ordre du problème aux valeurs propres est réduite à m aussi. Eq (1.15) permet de calculer les valeurs propres, tandis que les vecteurs propres de la structure modifiée sont exprimés, par l'équation suivante

$$\hat{x}_v = \Psi [I_n + \hat{\lambda}_v C_1 + \hat{\lambda}_v^2 C_2 + \dots + \hat{\lambda}_v^n C_n] \quad (1.17)$$

où

$$\begin{cases} C_1 = D_1 \\ C_k = D_1 \cdot C_{(k-1)} + \dots + D_{(k-1)} \cdot C_1 + D_k \text{ pour } k = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (1.18)$$

La qualité de la réanalyse est très satisfaisante, même si on se limite à l'ordre 1 en $\hat{\lambda}_v$ dans l'Eq (1.15). Ainsi, dans la plupart des cas, on se contente de résoudre un problème aux valeurs propres linéaire, symétrique réduit à l'ordre m . La méthode proposée prend en compte, de manière très significative, la contribution des modes inconnus. Cette contribution peut être estimée après une identification modale pour un modèle expérimental, et doit être calculée pour un modèle analytique.

3.1.4 Réduction des coûts de calcul

Les matrices $\overline{\Delta K}$ et H_k , pour $k = 1, 2, 3, \dots, n$, sont symétriques (voir l'annexe A). Par conséquent, l'Eq. (1.15) représente un problème aux valeurs propres symétrique et non linéaire en $\hat{\lambda}_v$. Le principal avantage du nouveau système est qu'il utilise moins d'opérations arithmétiques, ce qui permet de tirer pleinement profit de la symétrie.

En pratique, les modifications n'affectent qu'un nombre très limité de DDL ($q \ll n$). Cependant, ΔK , ΔM et H_k sont des matrices fortement creuses. Ainsi pour cela on effectué la décomposition suivante :

$$\Delta K = \begin{bmatrix} \delta K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta M = \begin{bmatrix} \delta M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R_k = \begin{bmatrix} R_k^{(qq)} & R_k^{(iq)T} \\ R_k^{(iq)} & R_k^{(ii)} \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} X_1^{(q)} \\ X_1^{(i)} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Où q et i désignent respectivement l'ensembles des DDL modifiés et non modifiés, $\delta K \in \mathbb{R}^{q,q}$ et $\delta M \in \mathbb{R}^{q,q}$ sont les matrices de modification condensées sur les DDL modifiés, $X_1^{(q)} \in \mathbb{R}^{q,m}$ est le sous-ensemble de X_1 associée au DDL modifiés et $X_1^{(i)} \in \mathbb{R}^{n-q,m}$ l'autre sous-ensemble de X_1 .

On utilise la technique d'inversion des matrices par bloc [33], [34], la matrice Ψ prend la forme suivante :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \widehat{\Psi} & 0 \\ -R_1^{(iq)} \widehat{\delta K} & I_{n-m} \end{bmatrix}, \widehat{\Psi} = (I_q + R_1^{(qq)} \delta K)^{-1} \in \mathbb{R}^{q,q} \text{ et } \widehat{\delta K} = \delta K \widehat{\Psi} \in \mathbb{R}^{q,q} \quad (1.20)$$

L'Eq. (1.19) nous permet d'obtenir la matrice Ψ en inversant seulement une matrice $q \times q$ au lieu d'une matrice $n \times n$, avec l'avantage significatif du point de vue du calcul.

L'introduction des Eqs. (1.19) et (1.20) dans l'Eq. (1.15) conduit aux problèmes aux valeurs propres polynomiales condensés :

$$[\Lambda_1 + X_1^{(q)T} \widehat{\delta K} X_1^{(q)} - \hat{\lambda}_v (I_m + X_1^{(q)T} \widehat{H}_1 X_1^{(q)}) - \sum_{i=2}^n \hat{\lambda}_v^i (X_1^{(q)T} \widehat{H}_i X_1^{(q)})] p_{1v} = 0 \quad (1.21)$$

où les matrices condensées $\widehat{H}_k \in \mathbb{R}^{q,q}$, $k = 2, 3, \dots, n$ ont la forme récurrente suivante

$$\begin{cases} \widehat{H}_1 = \widehat{\delta M} - \widehat{\delta K} \widehat{D}_1 \\ \widehat{H}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \widehat{H}_{k-j} \widehat{D}_j - \widehat{\delta K} \widehat{D}_k \text{ pour } k = 2, 3, \dots, n. \\ \widehat{D}_k = R_k^{(qq)} \widehat{\delta M} - R_{k+1}^{(qq)} \widehat{\delta K} \in \mathbb{R}^{q,q} \\ R_k^{(qq)} = X_2^{(q)} \Lambda_2^{-k} X_2^{(q)T} \in \mathbb{R}^{q,q} \\ \widehat{\delta M} = \delta M \widehat{\Psi} \in \mathbb{R}^{q,q} \end{cases} \quad (1.22)$$

ce qui prouve que la plupart des calculs intervenant dans l'Eq (1.15) sont effectués avec des matrices carré réduite de taille $q \times q$.

Remarques

1- La matrice des termes résiduels $R(\lambda)$ exprime la contribution des modes non identifiés de la structure d'origine. Elle s'écrit :

$$R(\lambda) = X_2(\Lambda_2 - \lambda I)^{-1} X_2^T \quad (1.23)$$

Puisque $\lambda < \lambda_m$, où λ_m est la plus grande valeur propre identifiée de la structure originale, $R(\lambda)$ peut-être approché par une matrice polynomiale en λ

$$R(\lambda) \cong R_1 + \lambda R_2 + \lambda^2 R_3 + \dots + \lambda^n R_{n+1} \quad (1.24)$$

Dans le cas d'une simulation numérique, les matrices $R_k^{(qq)}$ peuvent être calculées si les matrices K et M sont estimées avec une bonne précision (voir l'annexe B). Pour les données expérimentales, ces matrices résiduelles peuvent être estimées à partir de la différence entre la réponse en fréquence observée et celles recalculées avec les modes identifiés [35], en appliquant des forces externes sur les DDL affectés par les modifications.

2- L'inconvénient de résoudre l'équation Eq. (1.20) est que les matrices \widehat{D}_k et \widehat{H}_k sont calculées à partir de la matrice $\widehat{\Psi}$, inverse d'une matrice réduite $q \times q$, ce qui s'avère être coûteux à évaluer lorsque le nombre de DDL affectés par la modification de la rigidité est très important. Cet inconvénient disparaît lorsque la modification est purement massique.

3- Notez que la contribution de la matrice \widehat{H}_1 condensée est dominante, car chaque terme de \widehat{H}_k , pour $k = 2, 3, \dots, n$, est inversement proportionnel à la $k^{\text{ème}}$ puissance des termes de la matrice Λ_2 cette dernière contient les valeurs propres supérieures tronquées de la structure d'origine.

4- Selon la structure des matrices condensées \widehat{H}_k , on peut admettre l'hypothèse suivante

$$\|I_m + X_1^{(q)T} \widehat{H}_1 X_1^{(q)}\| \gg \left\| \sum_{i=2}^n \hat{\lambda}_v^{i-1} (X_1^{(q)T} \widehat{H}_i X_1^{(q)}) \right\| \quad (1.25)$$

Cette hypothèse est vérifiée, le problème (1.21) peut se réduire à la résolution du problème aux valeurs propres linéaires suivant :

$$\left[[\Lambda_1 + X_1^{(q)T} \widehat{\delta K} X_1^{(q)} - \hat{\lambda}_v (I_m + X_1^{(q)T} \widehat{H}_1 X_1^{(q)})] \right] p_{1v} = 0 \quad (1.26)$$

Dans la plupart des cas, les solutions obtenues par l'équation (1.24) sont largement satisfaisant, ainsi une très bonne approximation de la solution peut être obtenue uniquement à partir des modes identifiés et les matrices résiduelles R_1 et R_2 .

4. Tests numériques

Pour tester la méthode proposée, des modèles éléments finis sont utilisés pour générer à la fois les données du problème et les solutions propres de référence de la structure modifiée.

Quatre tests de simulation numérique ont été réalisés, pour illustrer l'approche développée ci-dessus.

Les critères suivants sont utilisés pour évaluer les erreurs dans les solutions propres approximatives

$$\delta f_v (\text{in } \%) = \frac{|f_v - \hat{f}_{v1}|}{f_v} \times 100, MAC_v = \left[\frac{|X_v^T \hat{X}_{v1}|}{\|X_v\| \|\hat{X}_{v1}\|} \right]^2, \Delta_{MAC_v} = (1 - MAC_v) \times 100 \quad (1.25)$$

où δf_v est l'erreur relative, en %, sur \hat{f}_{v1} la $v^{\text{ème}}$ fréquence propre estimée par la méthode proposée d'ordre 1 par rapport à f_v la $v^{\text{ème}}$ fréquence propre de référence, et MAC_v est la valeur du critère d'assurance modale qui calcule la colinéarité entre X_v le $v^{\text{ème}}$ vecteur propre de référence et \hat{X}_{v1} le $v^{\text{ème}}$ vecteur propre estimé par la méthode proposée d'ordre 1. Le résultat idéal donnera une valeur de Δ_{MAC_v} d'environ 0%.

4.1 Exemple 1 : Poutre encastrée-libre

L'exemple étudié concerne la poutre encastre-libre, illustrée à la figure 1.1. Il contient 42 éléments poutre, ce qui donne un total de 129 DDL (avec 3 DDL par nœud).

Ses caractéristiques sont les suivantes :

- Le module d'Young $E = 0,499 \times 10^9 N.m^{-2}$.
- La masse volumique $\rho = 7800 kg.m^{-3}$.
- Le moment d'inertie quadratique $I = 0,279 \times 10^{-4} m^4$
- La section droite transversale $A = 0,001 m^2$
- La longueur $L = 1,5 m$.

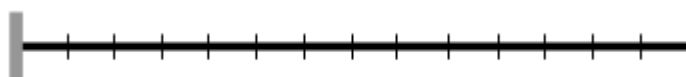


Figure 1.1 : Représentation schématique d'une poutre encastée-libre.

Les modifications introduites sont de type paramétrique (Fig.1.3), tableau (1.1).

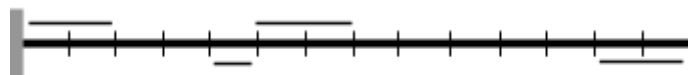


Figure 1. 2 : Modification paramétrique de poutre.

Tableau 1. 1 : Caractéristiques des éléments modifiés de la poutre encastrée-libre.

N° d'élément modifié	E	I	ρ
1	E	$0.1 * I$	ρ
2	E	$0.1 * I$	ρ
3	E	$0.1 * I$	ρ
4	E	$0.1 * I$	ρ
5	E	$0.1 * I$	ρ
6	E	$0.1 * I$	ρ
13	E	I	$1.5 * \rho$
14	E	I	$1.5 * \rho$
15	E	I	$1.5 * \rho$
16	E	$0.05 * I$	ρ
17	E	$0.05 * I$	ρ
18	E	$0.05 * I$	ρ
19	E	$0.05 * I$	ρ
20	E	$0.05 * I$	ρ
21	E	$0.05 * I$	ρ
37	$1.5 * E$	I	ρ
38	$1.5 * E$	I	ρ
39	$1.5 * E$	I	ρ
40	E	$2.1 * I$	ρ
41	E	$2.1 * I$	ρ
42	E	$2.1 * I$	ρ

Tableau 1. 2 : Fréquences propres de la S.I, de la S.M de référence et estimées ainsi que le MAC_v pour une structure de 126 degrés de liberté.

Modes	f_{v_0}	f_v	\hat{f}_{v_1}	\check{f}_{v_1}	MAC_v
1	10.50	3.90	3.90	3.90	1.000
2	42.15	22.50	22.50	22.50	0.9999
3	65.84	41.83	41.83	41.83	1.000
4	126.53	121.65	121.67	121.67	0.9999
5	184.37	122.87	122.87	122.87	1.000
CPU	0.0084 s	0.0084 s	0.0081 s	0.0065 s	

Dans le tableau 1.2 on présente les fréquences propres de la S.I, les fréquences propres de référence de la S.M, les fréquences propres de la S.M par la méthode proposée pour la première modification introduite et les fréquences propres pour une nouvelle modification, ainsi que la colinéarité entre les vecteurs propres de référence et les vecteurs propres calculés avec la méthode proposée.

On note que lors d'un process itératif l'inversion de la matrice de rigidité de la S.I n'est effectuée que pour la première réanalyse, ce qui permet un gain de temps supplémentaire.

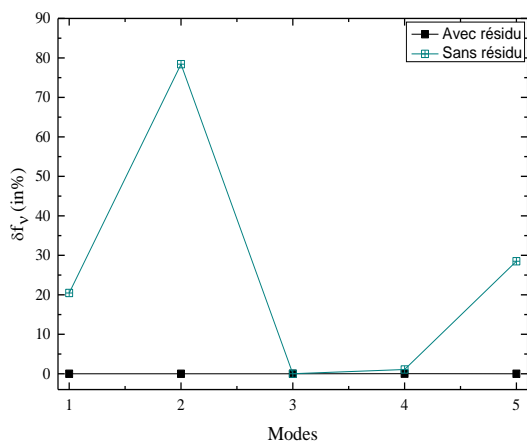


Figure 1.3 : Comparaison des écarts de fréquence avec et sans résidu

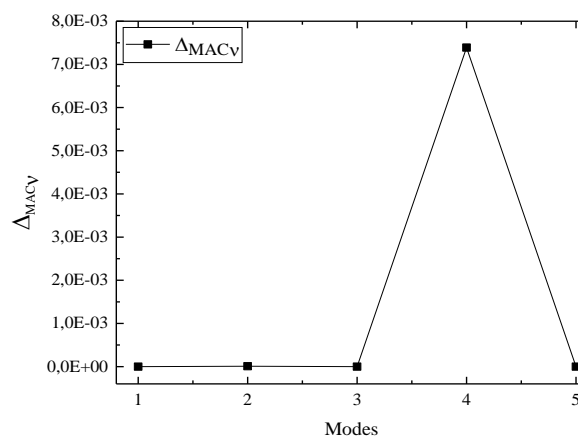


Figure 1.4 : Erreur sur le MAC pour le premier ordre

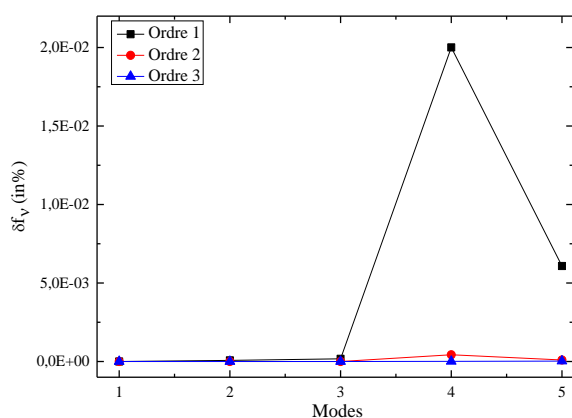


Figure 1.5 : Ecarts de fréquence pour les différents ordres de la méthode proposée

On remarque que la contribution des termes résiduelles améliore nettement la précision des résultats comme illustrée dans les figures (1.3) (1.4), lorsque n'applique la formulation proposée (Eq. (1.21)) à l'ordre 2 et 3, on constate une légère amélioration des résultats (fig. 1.5), ce qui prouve les résultats obtenus pour l'ordre 1 sont largement satisfaisants.

Pour prouver la robustesse de la réduction du temps de calcul de la méthode proposée, on augmente la taille de l'exemple précédent, la poutre est discrétisée en 859 éléments, soit 2580 DDL, les modifications affectent 210 éléments.

Tableau 1. 3 : Fréquences propres de la S.I, de la S.M de référence et estimées ainsi que le MAC_v pour une structure de 2577 degrés de liberté

Modes	f_{v_0}	f_v	\hat{f}_{v_1}	\check{f}_{v_1}	MAC_v
1	10.50	4.32	4.29	4.30	1.000
2	42.15	42.40	42.40	42.40	0.9999
3	65.84	44.02	44.02	44.02	0.9998
4	126.53	116.06	116.05	116.06	0.9996
5	184.37	125.78	125.78	125.78	1.000
CPU	88.392 s	88.569 s	28.105 s	7.161 s	

Les résultats obtenus sur le tableau 1.3 ou on observe clairement la réduction du temps de calcul.

4.2 Exemple 2 : Poutre encastrée-encastrée

Les modifications introduites ont fixé le mouvement de 3 DDL de la poutre encastrée-libre précédent.

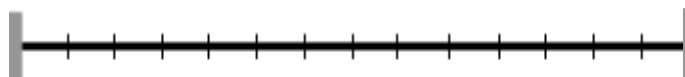


Figure 1. 6 : Blocage de DDL

Tableau 1. 4 : Fréquences propres de la S.I, de la S.M de référence et estimées ainsi que le MAC_v pour une structure de 126 degrés de liberté.

Modes	f_{v_0}	f_v	\hat{f}_{v_1}	\check{f}_{v_1}	MAC_v
1	10.50	66.86	66.86	66.86	0.9999
2	42.15	84.32	84.32	84.32	0.9999
3	65.84	168.77	168.77	168.77	0.9999
4	126.53	184.30	184.30	184.30	1.0000
5	184.37	253.46	253.46	253.46	0.9999
CPU	0.0084 s	0.00836 s	0.0071 s	0.0065 s	

Pour fixer, numériquement, les DDL de l'extrémité libre de la poutre originale, nous leur imposons une rigidité très importante.

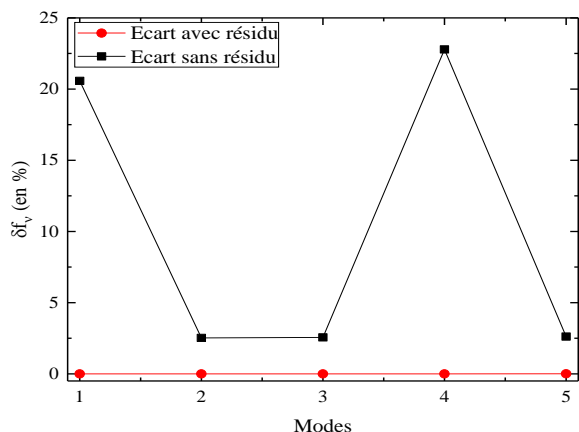


Figure 1. 7 : Ecart de fréquence avec et sans résidu

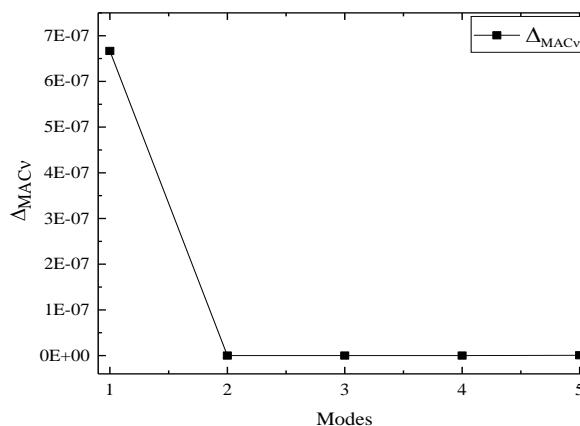


Figure 1. 8 : Erreur sur le MAC pour le premier ordre

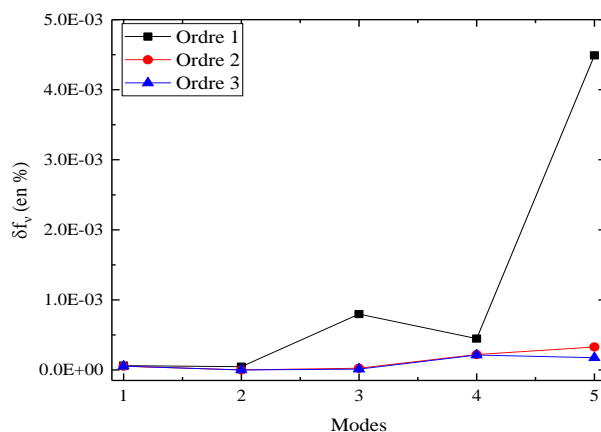


Figure 1. 9 : Ecart de fréquence pour les différents ordres de la méthode proposée

La même remarque que précédemment concernant la contribution des termes résiduelles comme illustrée dans les figures (1.7) (1.8), et on constate une légère amélioration des résultats (fig. 1.5), ce qui prouve les résultats obtenus pour l'ordre 1 sont satisfaisants.

Tableau 1. 5 : Fréquences propres de la S.I, de la S.M de référence et estimées ainsi que le MAC_v pour une structure de 2577 degrés de liberté

Modes	f_{v_0}	f_v	\hat{f}_{v_1}	\check{f}_{v_1}	MAC_v
1	10.50	89.67	66.31	66.86	0.6898
2	42.15	100.94	84.30	84.31	0.8899
3	65.84	160.93	168.50	168.62	0.8599
4	126.53	172.41	177.56	184.30	0.7999
5	184.37	251.03	252.86	252.93	0.7639
CPU	88.832 s	88.787 s	25.877 s	6.883 s	

On obtient des résultats approuvables aussi qu'une réduction importante du temps de calcul.

4.3 Exemple 3 : Portique 2D

Dans cet exemple, la procédure est appliquée au portique 2D illustré à la figure.1.10. La S.I est construit avec 78 éléments poutre (avec 3 DDL par nœud). Les caractéristiques de la structure sont indiquées dans le tableau 1.6

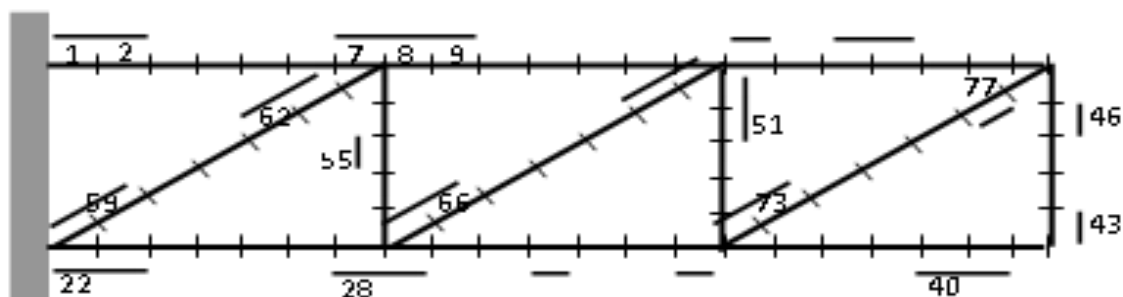


Figure 1. 10 : Dimensionnement d'un portique 2D

La structure modifiée est caractérisée par la modification des moments quadratiques I , la section droite A , le module d'Young E et les masses volumiques ρ , de quelques éléments (tableau 1.6)

Tableau 1. 6 : Caractéristiques de la structure d'origine.

Module d'young $E [N m^{-2}]$	Masse volumique $\rho [kg m^{-3}]$	moment d'inertie $I [m^4]$	Section droit vertical $A[m^2]$	Section droit horizontal $A[m^2]$	Section droit diagonal $A[m^2]$
$0.75 \cdot 10^{11}$	2800	$0.756 \cdot 10^{-1}$	$0.6 \cdot 10^{-2}$	$0.4 \cdot 10^{-2}$	$0.3 \cdot 10^{-2}$

Tableau 1. 7:Caractéristiques des éléments modifiés du portique 2D.

N° Elemts	E	I	A	N° Elemts	E	I	A
1	E	$10.1 * I$	A	43	E	$10.1 * I$	A
2	E	$10.1 * I$	A	46	E	$1.1 * I$	A
7	E	$1.1 * I$	A	51	$2.8 * E$	I	A
8	E	$1.1 * I$	A	52	$2.8 * E$	I	A
9	E	$1.1 * I$	A	55	$1.05 * E$	$1.1 * I$	A
15	$2.8 * E$	$1.1 * I$	A	58	E	$10.1 * I$	A
17	$2.8 * E$	$2 * I$	A	59	E	$10.1 * I$	A
18	$2.8 * E$	$2 * I$	A	62	E	$1.1 * I$	A
22	E	$10.1 * I$	$2 * A$	63	E	$1.1 * I$	A
23	E	$10.1 * I$	$2 * A$	65	E	I	$2.1 * A$
28	E	$10.1 * I$	A	66	E	I	$2.1 * A$
29	E	$10.1 * I$	A	70	E	$2 * I$	A
32	E	$1.1 * I$	A	71	E	$2 * I$	A
35	$2.8 * E$	$1.1 * I$	A	72	$1.05 * E$	$2.1 * I$	A
40	E	I	$2.1 * A$	73	$1.05 * E$	$2.1 * I$	A
41	E	I	$2.1 * A$	77	E	I	$2.1 * A$

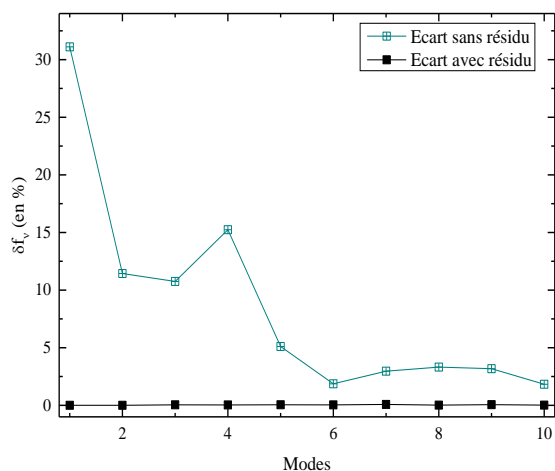


Figure 1.11: Ecart de fréquence avec et sans résidu

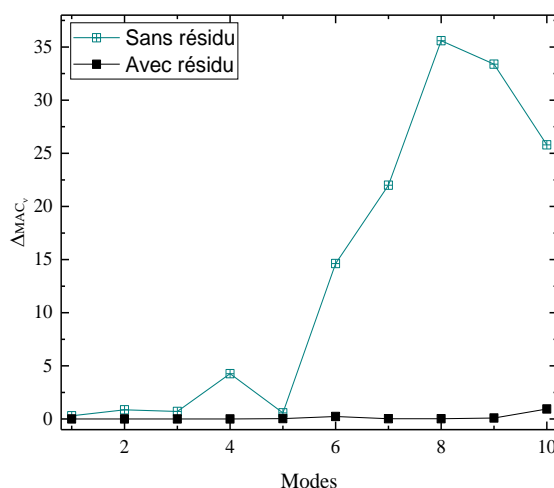


Figure 1.12: Ecart de Δ_{MAC_v} avec et sans résidu

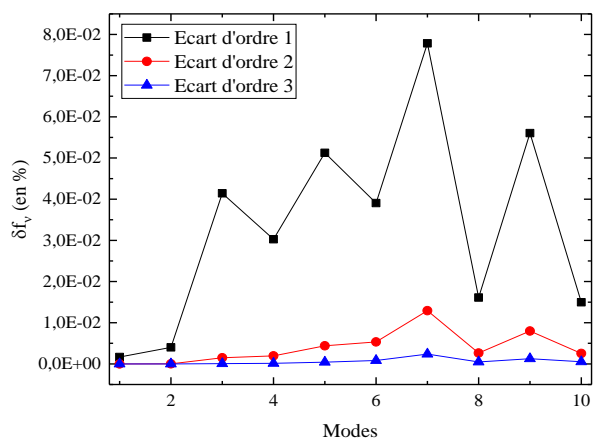


Figure 1.13: Ecart de fréquence pour les différents ordres de la méthode proposée

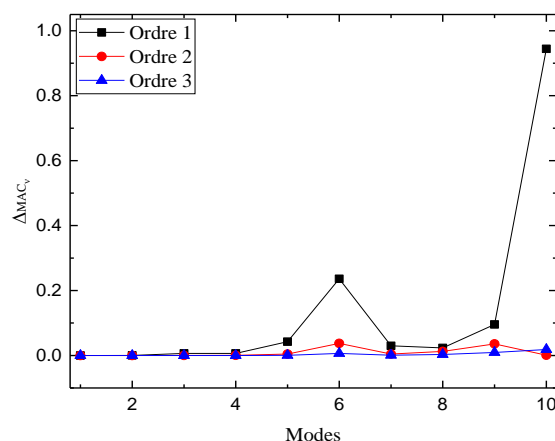


Figure 1.14: Ecart de Δ_{MAC_v} pour les différents ordres de la méthode proposée

La base modale initiale est composée de 10 modes. Les figures présentent les résultats obtenus sans et avec introduction des termes résiduels.

Les fréquences propres de la S.I. et de la S.M. obtenues par un code de calcul sur MATLAB, ainsi que les écarts entre les solutions propres calculées exactes et les solutions propres de la méthode approchée sont représentées dans les graphes ci-dessous.

La contribution des termes résiduelles améliore la précision des résultats comme illustrée dans les figures (1.11) (1.12), lorsque n'applique la formulation proposée (Eq. (1.21)) à l'ordre 2 et 3, on constate une légère amélioration des résultats (fig. 1.13 et fig. 1.14), ce qui prouve les résultats obtenus pour l'ordre 1 sont largement satisfaisants.

4.4 Exemple: Structure 3D

Dans cet exemple, la procédure est appliquée au cadre 3D illustré à la figure.1.18 Le modèle initial est construit avec 576 éléments poutre, il contient 1512 DDL (avec 6 DDL par nœud).

Les caractéristiques de la structure sont les suivantes :

$E = 210 \text{ GPa}$; Module d'young

$G = 84 \text{ GPa}$; Module de cisaillement

$A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$; Section droite

$I_y = 10 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$; Moment d'inertie

$I_z = 20 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$; Moment d'inertie

$J = 10 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$; Moment d'inertie polaire

$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$; Masse volumique

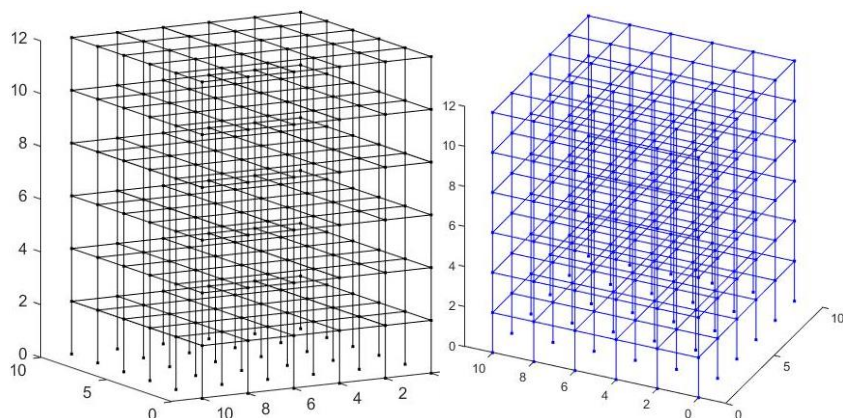
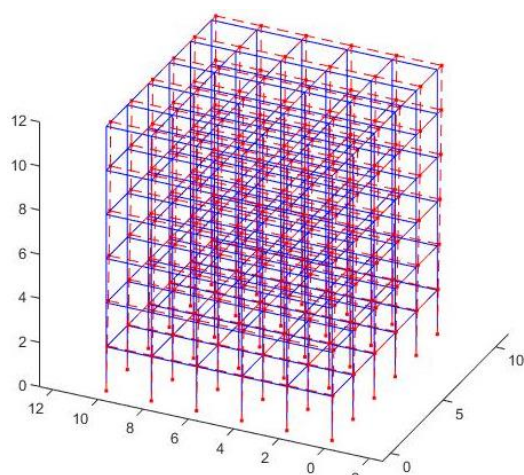
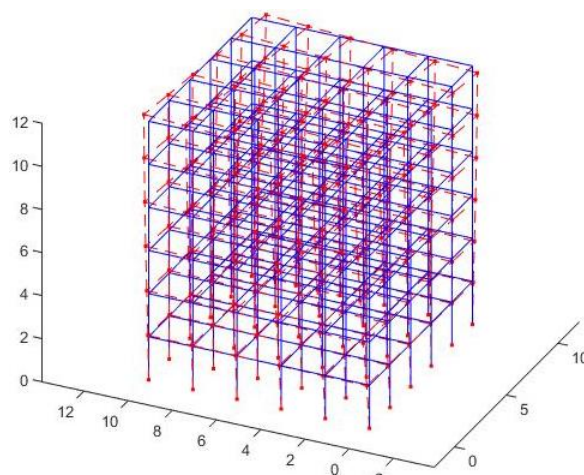


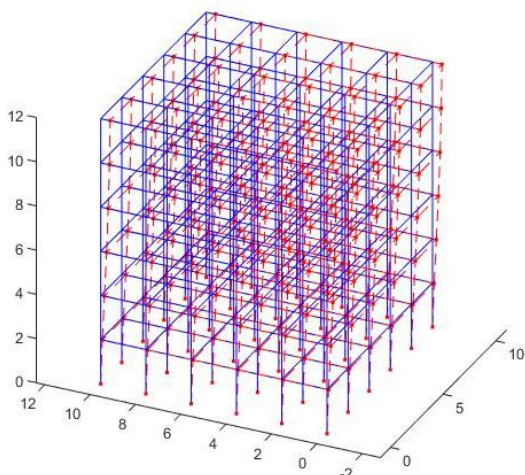
Figure 1. 15: Représentation schématique d'une Structure 3D



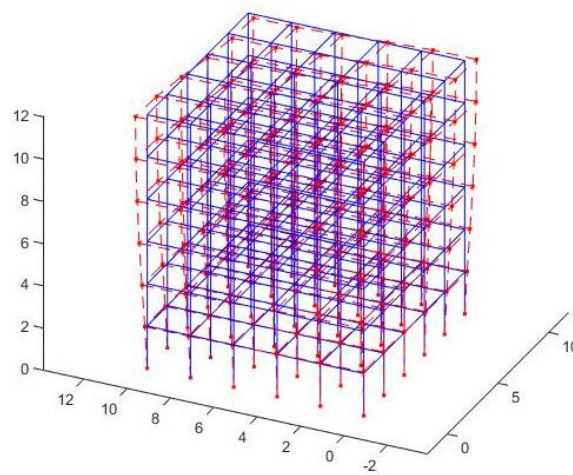
Mode = 1 ; Fréquence = 6.0786 Hz



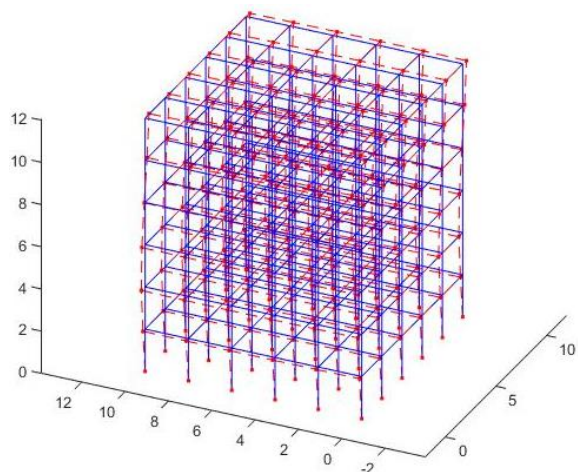
Mode = 2 ; Fréquence = 7.239Hz



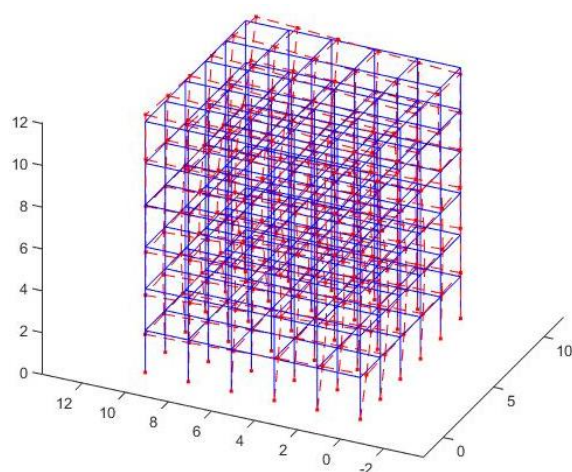
Mode = 3 ; Fréquence = 7.4450 Hz



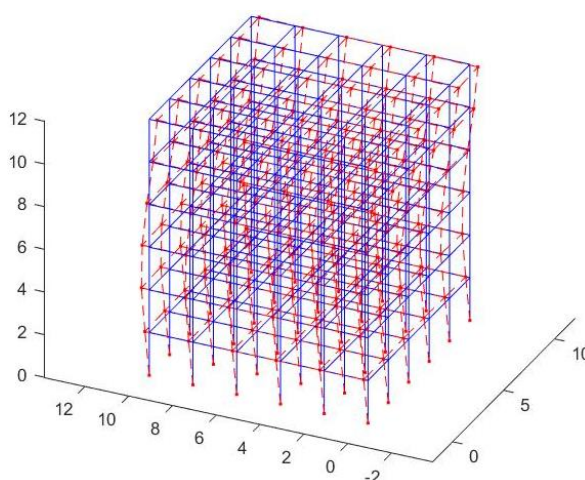
Mode = 4 ; Fréquence = 16.947 Hz



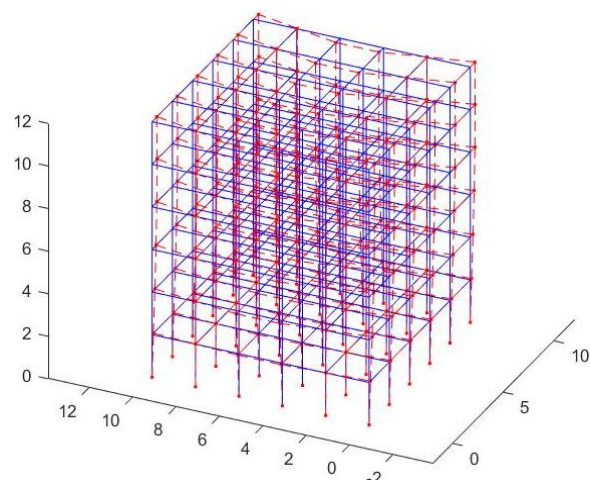
Mode = 5 ; Fréquence = 18.421 Hz



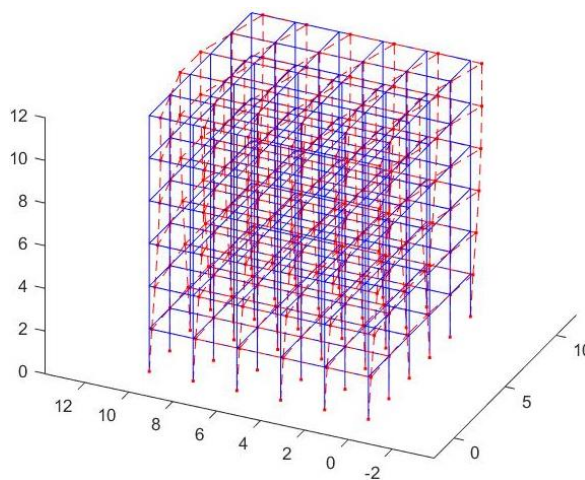
Mode = 6 ; Fréquence = 21.228 Hz



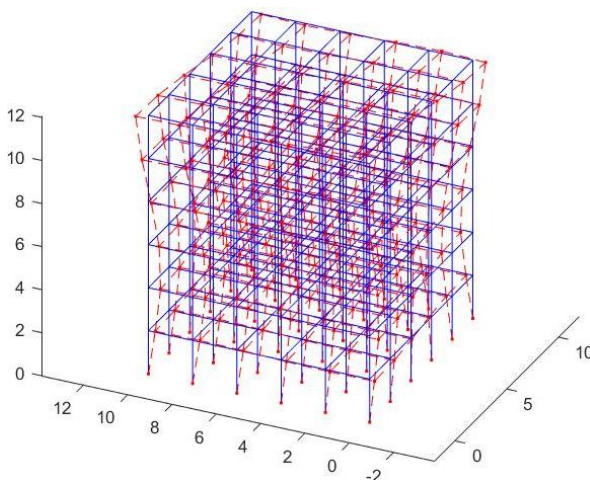
Mode = 7 ; Fréquence = 22.889 Hz



Mode = 8 ; Fréquence = 24.714 Hz



Mode = 9 ; Fréquence = 25.173 Hz



Mode = 10 ; Fréquence = 26.991 Hz

Figure 1. 16: Simulation MATLAB pour différents modes de la structure 3D

Tableau 1. 9: Comparaison entre les résultats de référence et les résultats approximatifs avec différents ordres

Modes	f_{v_0}	f_v	\hat{f}_{v_1}	\hat{f}_{v_2}	\hat{f}_{v_3}	\hat{f}_{v_4}
1	6.0786	5.626	5.626	5.626	5.626	5.626
2	7.2388	6.675	6.675	6.675	6.675	6.675
3	7.4450	6.958	6.958	6.958	6.958	6.958
4	16.947	16.04	16.04	16.04	16.04	16.04
5	18.421	17.75	17.75	17.75	17.75	17.75
6	21.228	20.40	20.40	20.40	20.40	20.40
7	22.889	22.65	22.65	22.65	22.65	22.65
8	24.714	23.31	23.31	23.31	23.31	23.31
9	25.173	23.87	23.87	23.87	23.87	23.87
10	26.991	26.20	26.20	26.20	26.20	26.20
11	31.063	28.93	28.94	28.93	28.93	28.93
12	31.384	30.79	30.80	30.79	30.79	30.79
13	34.222	32.72	32.74	32.72	32.72	32.72
14	34.430	33.51	33.52	33.51	33.51	33.51
15	36.249	34.54	34.55	34.54	34.54	34.54
16	40.036	37.86	37.89	37.87	37.86	37.86
17	40.048	39.38	39.41	39.39	39.38	39.38
18	41.398	39.86	39.87	39.86	39.86	39.86
19	42.065	40.36	40.39	40.37	40.37	40.37
20	43.148	42.64	42.66	42.65	42.64	42.64

La base modale initiale de cette structure est composée de 20 modes. Ces figures présentent les résultats obtenus sans et avec introduction des termes résiduels

L'écart entre les solutions propres calculées exactes et les solutions propres de la méthode approchée sont représentés dans les graphes ci-dessous

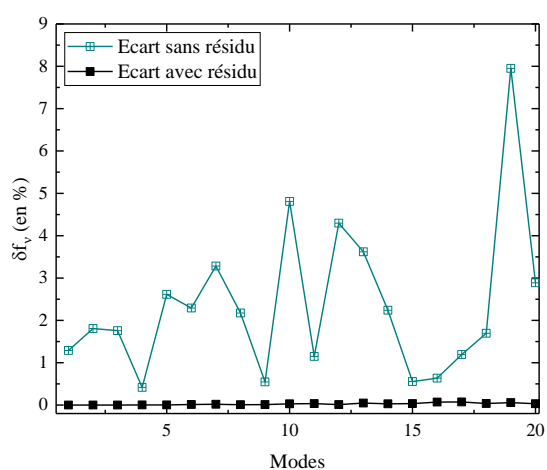


Figure 1. 17 : Ecart de fréquence avec et sans résidu pour la structure 3D

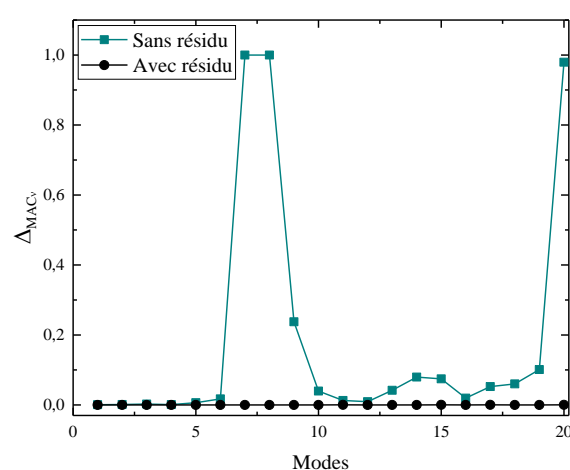


Figure 1. 18 : Ecart de Δ_{MAC_v} avec et sans résidu pour la structure 3D

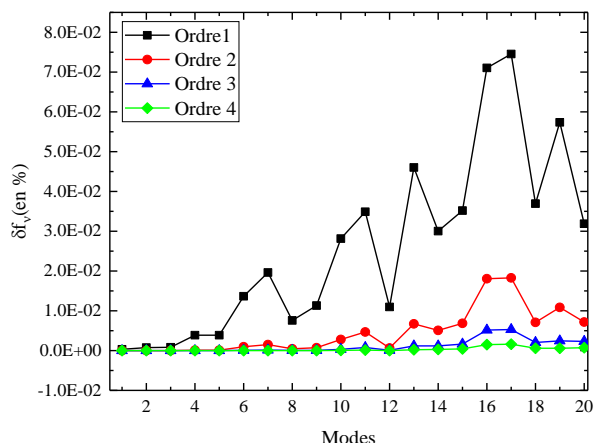


Figure 1.19 : Ecart de fréquence pour les différents ordres de la méthode proposée pour la structure 3D

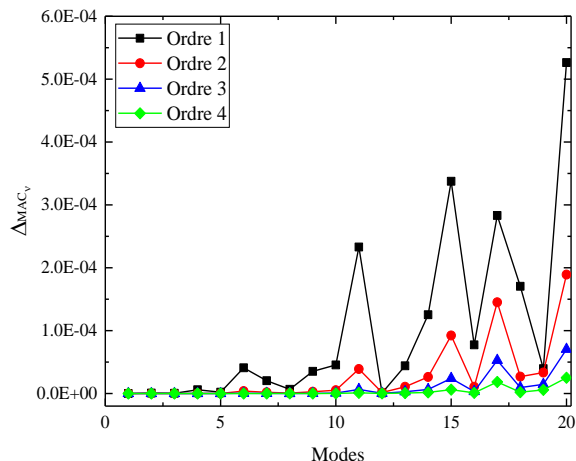


Figure 1.20 : Ecart de Δ_{MAC_v} pour les différents ordres de la méthode proposée pour la structure 3D

Certains éléments de la structure originale sont modifiés. Ces éléments et leurs nouvelles caractéristiques sont indiqués dans le tableau. 1.8 et les figures ci-dessus présentent les 20 premières fréquences propres de référence des modèles originaux et modifiés, ainsi que les erreurs entre eux.

On remarque que la contribution des termes résiduelles améliore clairement la précision des résultats comme illustrée dans les figures (1.17) (1.18), lorsqu'on applique la formulation proposée (Eq. (1.21)) à l'ordre 2, 3 et 4, on constate une légère amélioration des résultats (fig. 1.19 et fig. 1.20), ce qui prouve que les résultats obtenus pour l'ordre 1 sont largement satisfaisants.

4.5 Commentaire des résultats

La figure. 1.14 montre les erreurs relatives (en %) entre les fréquences propres approximatives et de référence de la structure modifiée pour deux cas : le cas sans termes résiduels, en utilisant l'équation (1.10), et le cas avec termes résiduels, en utilisant notre méthode pour $n = 1$ (voir l'équation (1.10)). (1.24)). D'après cette figure, on peut observer que la méthode proposée réduit considérablement les effets de troncature modale. L'erreur relative maximale est d'environ 30% avec la méthode classique de Ritz, alors qu'elle n'est que d'environ 0,26% pour notre méthode (voir Fig. 1.13) pour le premier ordre ($n = 1$). Nous pouvons voir ici que la précision est largement satisfaite. Cependant, au lieu de résoudre un problème de valeur propre de taille 220×220 , il est efficace d'utiliser le problème de valeur propre linéaire symétrique réduit (Eq. (1.24)) où la taille n'est que de 10×10 .

La figure (1.15) montre les résultats lorsque l'ordre du problème de valeur propre polynomial (1.20) augmente. Dans cette figure sont tracées les erreurs relatives entre les fréquences propres approximatives et exactes de la structure modifiée pour les cas $n = 1, 2$ et 3 . La méthode proposée améliore encore plus les fréquences propres.

La même discussion peut être faite sur les valeurs des critères de l'analyse modale. Les valeurs des figures (1.14) et (1.16) sont également très satisfaisantes.

La qualité des résultats obtenus pour le premier exemple (voir les figures (1.7) et (1.11)) est identique à celle du deuxième exemple.

5. Conclusion

Cette méthode proposée présente les avantages suivants

- 1- Elle travaille directement avec des données obtenues soit à partir d'une base de données expérimentale, soit à partir d'une analyse théorique utilisant un modèle d'éléments finis de la structure. Une combinaison entre les deux types de données est également possible ;
- 2- les résultats obtenus à partir du problème des valeurs propres symétriques linéaires réduites (1.24), correspondant au cas où $n = 1$, sont de très haute qualité. Ce qui prouve que la méthode proposée utilise moins d'opérations arithmétiques et d'espace de stockage, en tirant pleinement parti de la linéarité, de la symétrie et des matrices éparses ;
- 3- lorsque la base de données est identifiée, nous n'avons pas besoin de la connaissance des matrices de masse et de rigidité de la structure d'origine ;
- 4- elle peut traiter le cas où les modifications sont très importantes, par exemple le cas où peu de DDL sont rigidement reliés au sol ;
- 5- elle peut être facilement étendue aux modifications des conditions aux limites (ajout de DDL), ou aux problèmes de sous-structures ;
- 6- elle peut contribuer de manière significative à réduire le temps et le coût de développement d'un prototype et de mise à jour des modèles avec des données identifiées. Et elle peut être facilement mise en œuvre avec n'importe quel programme d'analyse par éléments finis à usage général.

Chapitre 2. Réanalyse des structures dissipatives modifiées à partir des solutions propres identifiées

1. Introduction

La plupart des travaux existants se limite à la réanalyse des structures conservatives affectés par des modifications. C'est le cas des travaux développés dans [36], [37] où les résultats obtenus sont très satisfaisant nous avons exploré leurs potentiels dans le domaine de la réanalyse des structures dissipatives. Notre objectif est d'étendre notre travail développé [36] au cas des structures dissipatives. Des auteurs [7], [27], [38]–[40] ont déjà discuté l'effet des termes résiduels, pour la réanalyse des S.D. En outre, la plupart de ces techniques de réanalyse n'ont été utilisées que dans le cas où les systèmes ne sont pas dissipatifs. Néanmoins, peu d'entre elles ont pris en compte l'amortissement dans les présents systèmes. D'autre part, même si l'amortissement était introduit dans les études théoriques [27], [39], il a été validé uniquement dans les études conservatrices structures.

Dans ce chapitre, deux méthodes de réanalyse sont proposées pour deux cas d'amortissement, visqueux proportionnel et visqueux non proportionnel, en utilisant les données obtenues soit à partir des mesures ou de l'analyse théorique basée sur un modèle d'éléments finis de la structure. La nouveauté de cette méthode réside dans le fait que la stratégie prend en compte, de manière très significative, la contribution des modes tronqués. Cette contribution sera représentée par des termes de flexibilité résiduelle associée à la structure dissipative initial. Les résultats obtenus sont validés par des exemples de simulation numérique sur Matlab.

2. Hypothèse générale

L'équation du mouvement en régime libre d'une structure dissipative est donnée par :

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (2.1)$$

où K , M , et $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ sont respectivement la rigidité, la masse et l'amortissement, qui sont supposés réelles, symétriques et définies positives, x représente le vecteur déplacement associé aux n DDL du modèle.

Il est à rappeler que la matrice d'amortissement B provient, d'une part, des forces, de dissipation admise de nature visqueuse, d'autre part, de la loi de comportement choisie de type viscoélastique et non plus élastique pure.

Dans le développement ultérieur, nous supposons que l'amortissement est sous-critique et que la matrice B est définie strictement positive.

Dans le domaine fréquentielle, l'équation de comportement mécanique autonome d'une structure dissipative s'écrit :

$$(s_v^2 M + s_v B + K)z_v = 0 \quad (2.2)$$

où $s_v \in \mathbb{C}^{n,n}$ et $z_v \in \mathbb{C}^{n,n}$ sont respectivement la $v^{\text{ème}}$ valeurs propres et le $v^{\text{ème}}$ vecteur propre de la structure dissipative.

3. Réanalyse d'une structure dissipative modifiée

La structure modifiée est caractérisée par la matrice de masse $\widehat{M} = M + \Delta M \in \mathbb{R}^{n,n}$, la matrice de rigidité $\widehat{K} = K + \Delta K \in \mathbb{R}^{n,n}$ et la matrice d'amortissement $\widehat{B} = B + \Delta B \in \mathbb{R}^{n,n}$.

où ΔM , ΔK , et ΔB sont respectivement les matrices de modification introduites de masse de rigidité et d'amortissement. L'équation du mouvement en régime libre de la structure modifiée s'écrit sous la forme suivante :

$$(\hat{s}_v^2 \widehat{M} + \hat{s}_v \widehat{B} + \widehat{K})\hat{z}_v = 0 \quad (2.3)$$

Nous cherchons à déterminer les solutions propres $\hat{s}_v \in \mathbb{C}^{n,n}$ et $\hat{z}_v \in \mathbb{C}^{n,n}$ de la S.M, à partir de la connaissance des modifications introduites et les paramètres modaux identifiés de la S.I.

3.1 Cas d'un amortissement visqueux proportionnel

L'approche proposée consiste à déterminer les modes vibratoires de la structure dissipative en utilisant un principe similaire à celui développé dans le chapitre 1.

3.1.1 Formulation générale

Dans l'équation du mouvement de la structure dissipative modifiée Eq. (2.3), nous projetons le $v^{\text{ème}}$ le vecteur de la structure dissipative dans la base modale, X , de la structure conservative associée à la structure d'origine :

$$\hat{z}_v = X p_v \quad (2.4)$$

Nous remplaçons l'Eq. (2.4) dans l'Eq. (2.3) et prémultiplions par X^T , ce qui donne le système suivant :

$$[\Lambda + X^T \Delta K X + \hat{s}_v (\beta + X^T \Delta B X) + \hat{s}_v^2 (I + X^T \Delta M X)] p_v = 0 \quad (2.5)$$

$\beta = X^T B X$ est la matrice d'amortissement généralisée. Cette matrice symétrique est généralement pleine. Une condition nécessaire et suffisante pour sa diagonalisation est $B M^{-1} K = K M^{-1} B$. En pratique, β n'est pas diagonal, [27] montre que l'influence de ses termes extra-diagonaux, sur le comportement de la structure mécanique, est généralement négligeable, sauf dans le cas de fréquences propres très proches.

3.1.2 Formulation proposée

En utilisant la décomposition de l'Eq. (1.6) dans l'Eq. (2.5), on obtient :

$$\begin{cases} [\Lambda_1 + X_1^T \Delta K X_1 + \hat{s}_v (\beta_1 + X_1^T \Delta B X_1) + \hat{s}_v^2 (I_1 + X_1^T \Delta M X_1)] p_{1v} + X_2^T [\Delta K + s_v \Delta B + \hat{s}_v^2 \Delta M] X_2 p_{2v} = 0 \\ X_2^T [\Delta K + \hat{s}_v \Delta B + \hat{s}_v^2 \Delta M] X_1 p_{1v} + [\Lambda_2 + X_2^T \Delta K X_2 + \hat{s}_v (\beta_2 + X_2^T \Delta B X_2) + \hat{s}_v^2 (I_2 + X_2^T \Delta M X_2)] p_{2v} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

avec : $\Lambda_1 = X_1^T K X_1$; $\Lambda_2 = X_2^T K X_2$; $I_1 = X_1^T M X_1$; $I_2 = X_2^T M X_2$; $\beta_1 = X_1^T B X_1$ et $\beta_2 = X_2^T B X_2$.

La combinaison de l'Eq. (2.7) nous donne le système (2.8) :

$$\begin{cases} [\Lambda_1 + \delta K + \hat{s}_v(\beta_1 + \delta B) + \hat{s}_v^2(I_1 + \delta M)X_1^T \Delta S \Phi R_1 \Delta S X_1] p_{1v} = 0 \\ X_2 p_{2v} = -[I + R_1 \Delta K + \hat{s}_v R_1 \hat{B} + \hat{s}_v^2 \hat{M}]^{-1} R_1 \Delta S X_1 p_{1v} \end{cases} \quad (2.8)$$

où : $\delta K = X_1^T \Delta K X_1$; $\delta M = X_2^T \Delta M X_2$; $\delta B = X_1^T \Delta B X_1$ et $\Delta S = \Delta K + \hat{s}_v \Delta B + \hat{s}_v^2 \Delta M$

$$\begin{cases} \Phi = [I + R_1 \Delta K + \hat{s}_v R_1 \hat{B} + \hat{s}_v^2 \hat{M}]^{-1} = \Psi [I - P + P^2 - \dots] \\ \Psi = [I + R_1 \Delta K]^{-1} \\ R_1 = X_2 \Lambda_2^{-1} X_2^T \\ P = \hat{s}_v R_1 (\hat{B} + \hat{s}_v \hat{M}) \Psi \end{cases} \quad (2.10)$$

Si $\|P\| \ll 1$ (condition généralement vérifiée grâce à la forme de la matrice P) et si on se limite à un développement à l'ordre 2 en \hat{s}_v , l'Eq. (2.8) se réduit au problème suivant :

$$[A_0 + \hat{s}_v A_1 + \hat{s}_v^2 A_2] p_{1v} = 0 \quad (2.11)$$

où :

$$\begin{cases} A_0 = [\Lambda_1 + X_1^T \Delta \hat{K} X_1] \\ A_1 = [\beta_1 + X_1^T (\Delta \hat{K} R_1 \hat{B} \Psi - \Delta \hat{K} R_1 B - \Delta \hat{B}) X_1] \\ A_2 = [I_1 + X_1^T \{ \Delta \hat{K} R_1 (\hat{M} \Psi - \hat{B} \Psi R_1 \hat{B} \Psi + \hat{B} \Psi R_1 B - M) + \Delta \hat{B} R_1 (\hat{B} \Psi - B) - \Delta \hat{M} \} X_1] \end{cases} \quad (2.12)$$

Avec : $\Delta \hat{M} = \Delta M \Psi$; $\Delta \hat{B} = \Delta B \Psi$; $\Delta \hat{K} = \Delta K \Psi$

Lorsque l'amortissement proportionnel est de type Rayleigh, la matrice B peut être écrite comme une somme pondérée de la matrice masse et la matrice rigidité (hypothèse de Basile) :

$B = \alpha M + \chi K$; (où : α et χ sont des coefficients aléatoires).

Avec cet amortissement, A_1 et A_2 ne dépendent pas explicitement de K , M et B .

3.1.3 Exemple 1 : Portique "avec amortissement proportionnel".

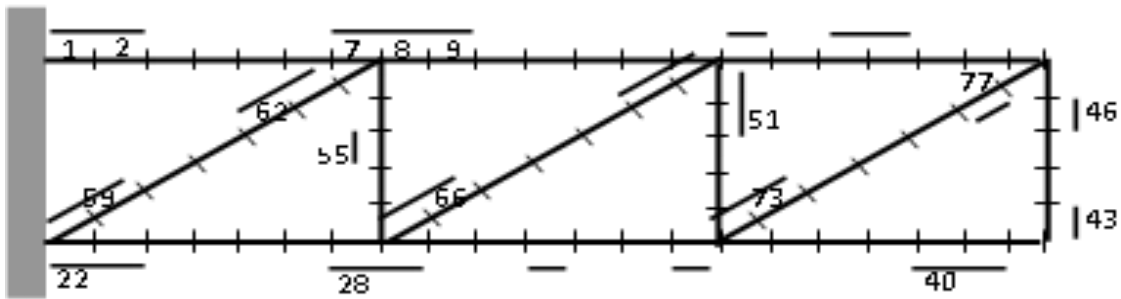


Figure 2. 1:Portique avec amortissement proportionnel

Dans ce test, on reprend l'exemple du chapitre 1 avec les mêmes propriétés mécaniques de la structure et les modifications paramétriques introduites, l'étude sera menée sur l'amortissement de type proportionnel.

Tableau 2. 1:Ecart des solutions propres exacte et estimé

Modes	f_{v_0}	f_v	\hat{f}_{v_1}	MAC_v
1	45.15	52.52	52.52	1.0000
2	79.04	84.45	84.45	1.0000
3	227.18	236.12	236.22	1.0000
4	249.66	289.02	289.11	0.9999
5	363.56	377.03	377.22	1.0000
6	437.72	452.96	453.14	0.9998
7	445.90	468.41	468.78	1.0000
8	469.20	498.99	499.07	1.0000
9	488.87	514.68	514.97	1.0000
10	511.07	532.42	532.50	0.9999

Dans le tableau 2.1 on présente les dix premières fréquences de référence de la S.I et de la S.M, les dix premières fréquences estimées de la S.M, l'écart entre les fréquences propres calculées et estimées, ainsi que la colinéarité entre les vecteurs propres de référence et les vecteurs propres estimés (MAC_v).

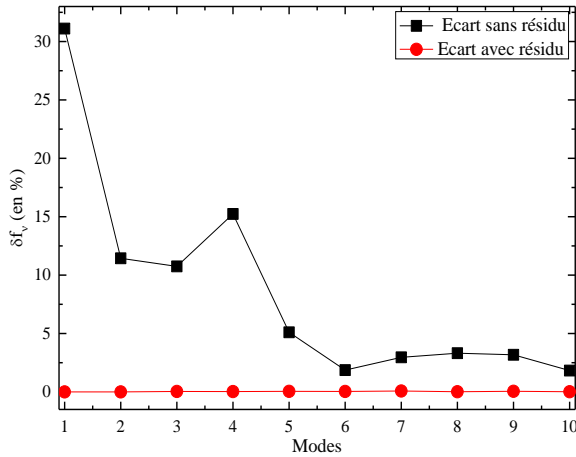


Figure 2. 2: Ecart entre les fréquences propres "exacte" et estimé avec et sans introduction des termes résiduels

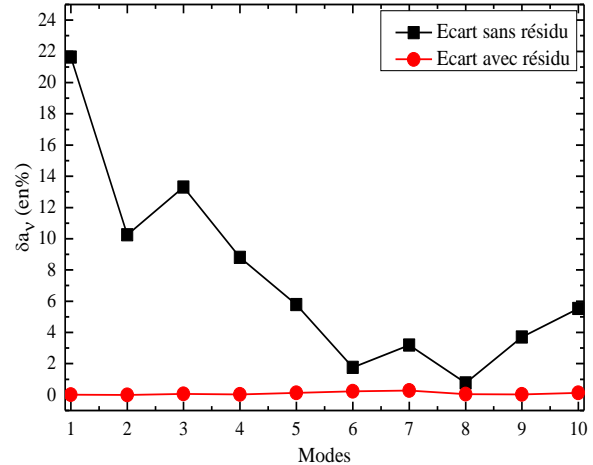


Figure 2. 3 : Ecart entre les amortissements généralisés "exacte" et estimé avec et sans introduction des termes résiduels

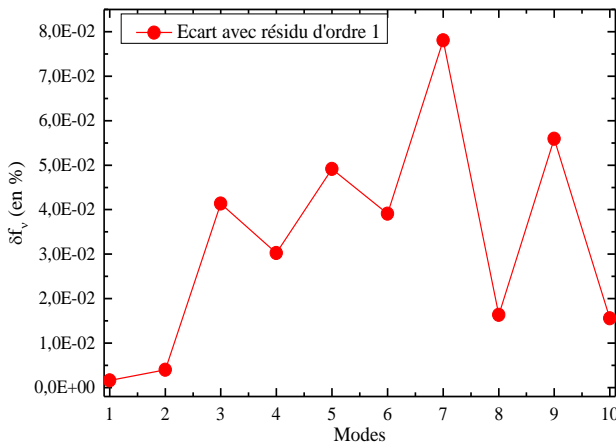


Figure 2. 4 : Ecart entre les fréquences généralisées "exacte" et estimé avec introduction des termes résiduels

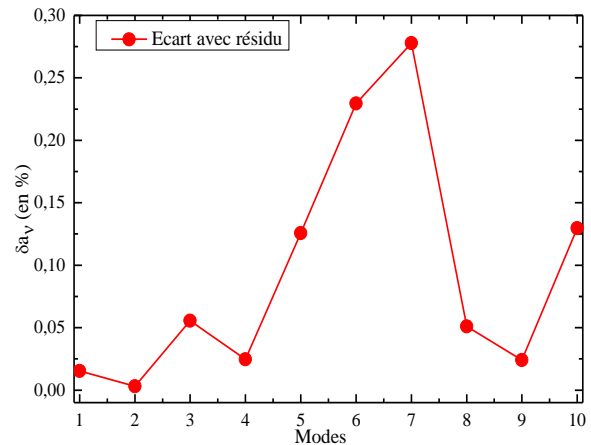


Figure 2. 5 : Ecart entre les amortissements généralisés "exacte" et estimé avec introduction des termes résiduels

La figure 2.2 et la figure 2.3 montre les résultats obtenus avec et sans introduction des termes résiduels R_1 . On y présente les écarts entre les fréquences de référence et les fréquences estimées et les écarts entre les amortissements généralisés.

La figure 2.4 et la figure 2.5 ni autre qu'un agrandissement des courbes obtenues avec introduction des termes résiduels.

On constate que la précision obtenue par la méthode proposée, est très satisfaisant.

3.2 Cas d'un amortissement visqueux non proportionnel

La démarche dans cette partie est similaire à celle de la partie précédente, mais la formulation est faite dans l'espace d'état de dimension double ($2n$).

On suppose, comme précédemment, que seuls les premiers modes de vibrations de la S.I dissipative ont été identifiés. On développera ci-dessous une formulation de réanalyse des structures modifiées ayant un amortissement visqueux non proportionnel. La contribution des modes supérieurs sera également introduite à l'aide de termes résiduels

3.2.1 Formulation générale

Dans ce cas, la base modale de la structure conservative associée (SCA) ne permet pas la diagonalisation de la matrice d'amortissement B . Il est donc préférable de transformer le problème aux valeurs propres de taille n à un problème linéaire classique de taille $2n$ [40]. On réécrit l'Eq. (2.1) sous la forme suivante :

$$U\dot{y}(t) - Ay(t) = 0 \quad (2.16)$$

Avec : $A = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$ et $U = \begin{bmatrix} B & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$ (0 est une matrice d'ordre n)

$$y(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

où les matrices d'états A et U d'ordre $2n$ sont symétriques définies positives.

Ainsi, on a transformé le système de n équation du second ordre en un système équivalent de $2n$ équations du premier ordre.

Les solutions de l'Eq. (2.16) sont de la forme $y(t) = ye^{st}$. On obtient ainsi le problème aux valeurs propres suivant :

$$(A - sU)y_v = 0 \quad (2.18)$$

Les solutions propres de (2.18) apparaissent par paires complexes conjuguées et les $2n$ solutions propres peuvent être regroupées dans les matrices modales $\tilde{Y} \in \mathbb{C}^{N,N}$ et spectrale $\tilde{S} \in \mathbb{C}^{N,N}$, $N = 2n$:

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y & \bar{Y} \\ YS & \bar{Y}\bar{S} \end{bmatrix}; \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

où $Y = [\dots y_\nu \dots] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $S = \text{Diag}\{s_\nu\}$, $\nu = 1, \dots, n$

Les matrices : \tilde{Y} , \tilde{S} , U et A satisfont aux relations d'orthogonalité :

$$\tilde{Y}^T U \tilde{Y} = \tilde{N} \text{ et } \tilde{Y}^T A \tilde{Y} = \tilde{N} \tilde{S}; \quad \tilde{N} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & \bar{N} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$N = \text{diag}\{n_\nu\}$; n_ν est un scalaire réel ou complexe, nous considérons ci-dessous $n_\nu = 1$.

Séparant les modes connus des modes inconnus sous la forme suivante :

$$Y = [Y_1 \quad Y_2]; \quad S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

où : $Y_1 \in \mathbb{C}^{n,m}$; $S_1 = \text{Diag}\{s_\nu = -a_\nu \omega_\nu + j\omega_\nu, \nu = 1, 2, \dots, m\}$ sont connus.

$Y_2 \in \mathbb{C}^{n,n-m}$ et $S_2 = \text{Diag}\{s_\nu = -a_\nu \omega_\nu + j\omega_\nu, \nu = m + 1, \dots, n\}$ sont inconnus.

On transforme le découpage (2.19) sous la forme :

$$\tilde{Y} = [\tilde{Y}_1 \quad \tilde{Y}_2]; \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

où : $\tilde{Y}_1 = \begin{bmatrix} Y_1 & \bar{Y}_1 \\ Y_1 S_1 & \bar{Y}_1 \bar{S}_1 \end{bmatrix}$; $\tilde{Y}_2 = \begin{bmatrix} Y_2 & \bar{Y}_2 \\ Y_2 S_2 & \bar{Y}_2 \bar{S}_2 \end{bmatrix}$; $\tilde{S}_1 = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & \bar{S}_1 \end{bmatrix}$ et $\tilde{S}_2 = \begin{bmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & \bar{S}_2 \end{bmatrix}$

Après introduction des modifications on obtient le problème aux valeurs propres :

$$[A + \Delta A - \hat{s}_\nu(U + \Delta U)]\hat{y}_\nu = 0 \quad (2.23)$$

Avec : $\Delta A = \begin{bmatrix} -\Delta K & 0 \\ 0 & \Delta M \end{bmatrix}$ et $\Delta U = \begin{bmatrix} \Delta B & \Delta M \\ \Delta M & 0 \end{bmatrix}$ (0 est une matrice d'ordre n)

3.2.2 Formulation proposée

Projetons le vecteur \hat{y}_ν dans la base modale de la structure dissipative initiale :

$$\hat{y}_\nu = \tilde{Y} c_\nu = \tilde{Y}_1 c_{1\nu} + \tilde{Y}_2 c_{2\nu} \quad (2.24)$$

Injectons l'Eq. (2.24) dans l'Eq. (2.23) et prémultiplions par \tilde{Y}^T , nous aurons :

$$\begin{cases} [\tilde{Y}_1^T A \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_1^T \Delta A \tilde{Y}_1 - \hat{s}_v (\tilde{Y}_1^T U \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_1^T \Delta U \tilde{Y}_1)] c_{1v} + [\tilde{Y}_1^T \Delta A \tilde{Y}_2 - \hat{S}_v \tilde{Y}_1^T \Delta U \tilde{Y}_2] c_{2v} = 0 \\ [\tilde{Y}_2^T \Delta A \tilde{Y}_1 - \hat{S}_v \tilde{Y}_2^T \Delta U \tilde{Y}_1] c_{1v} + [\tilde{Y}_2^T A \tilde{Y}_2 + \tilde{Y}_2^T \Delta A \tilde{Y}_2 - \hat{s}_v (\tilde{Y}_2^T U \tilde{Y}_2 + \tilde{Y}_2^T \Delta U \tilde{Y}_2)] c_{2v} = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

En combinant le système d'Eq. 2.25, et en utilisant un développement de Taylor similaire à celui effectué dans le chapitre 1, on peut se ramener au problème approximatif suivant :

$$[L + \hat{s}_v M + \hat{s}_v^2 N] \hat{c}_{1v} = 0 \quad (2.26)$$

où :

$$\begin{cases} L = [\tilde{s}_1 + \tilde{Y}_1^T \Delta A \tilde{Y}_1] \\ M = [I_{2m} - \tilde{Y}_1^T (\Delta U + \Delta A (R_2 \Delta A - R_1 \Delta U)) \tilde{Y}_1] \\ N1 = [\tilde{Y}_1^T \Delta A \{R_1 (\Delta U R_1 \Delta U - \Delta U R_2 \Delta A) - R_3 \Delta A + R_2 (\Delta U - \Delta A R_1 \Delta U + \Delta A R_2 \Delta A)\} \tilde{Y}_1] \\ N2 = [\tilde{Y}_1^T (R_2 \Delta A - R_1 \Delta U) \tilde{Y}_1] \\ N = N1 + N2 \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\text{où : } R_1 = \tilde{Y}_2 \tilde{S}_2^{-1} \tilde{Y}_2^T; R_2 = \tilde{Y}_2 \tilde{S}_2^{-2} \tilde{Y}_2^T \text{ et } R_3 = \tilde{Y}_2 \tilde{S}_2^{-3} \tilde{Y}_2^T$$

On constate que les matrices masse, raideur et amortissement n'apparaissent pas explicitement dans la formulation (2.26).

Dans la pratique les matrices de modification sont fortement creuses, la plupart des calculs intervenants dans les matrices L , M et N se ramènent aux seuls DDL affectés par les modifications.

Dans le cas où la structure initiale présente des modes de corps rigide. Une possibilité pratique permettant d'éviter ces difficultés numérique lors de la résolution de (2.23) consiste à introduire numériquement de très faible raideur de liaisons avec l'espace immobile pour faire disparaître les modes propres à fréquence nulle [41].

3.2.3 Exemple 2 : Portique "avec amortissement non proportionnel"

La méthode proposée est appliquée à un portique 2D comportant 22 éléments finis, chaque nœud ayant 3 DDL. Des amortisseurs sont introduits sur certains DDL (fig. 2.7).

Les propriétés physiques et géométriques de la structure sont les suivantes :

Module d'Young: $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

Section droite : $A = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

Masse volumique : $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

Moment d'inertie quadratique : $I = 0.417 \cdot 10^{-08} \text{ m}^4$

Nous introduisons des modifications de masse, de raideur, et d'amortissement non proportionnel comme il est indiqué sur (Fig. 2.7), et les tableaux (2.2, 2.3 et 2.4)

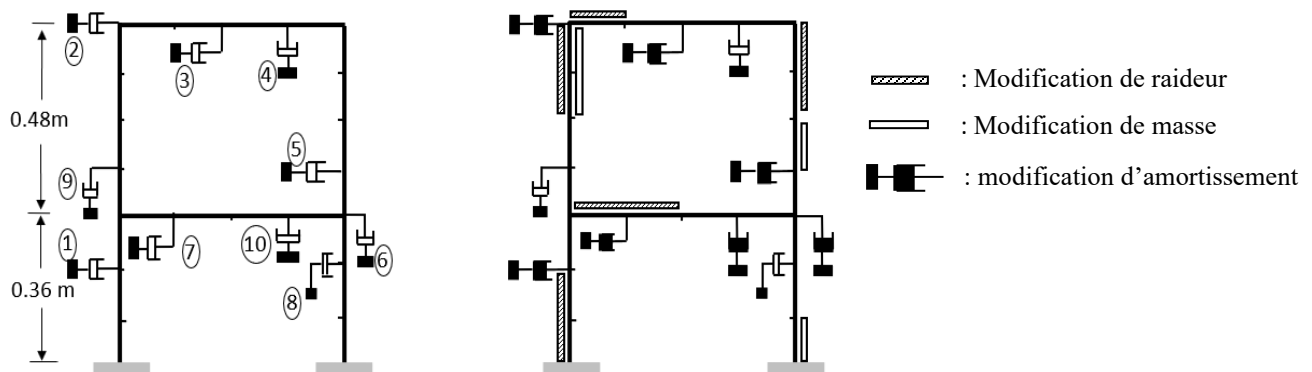


Figure 2. 6 : Portique initial avec amortissement non proportionnel

Figure 2. 7 : Portique modifié avec amortissement non-proportionnel

Dans le tableau. 2.5 on présente :

- Les neuf premières fréquences de référence de la S.I et de la S.M,
- Les neuf premières fréquences estimées par la méthode proposée de la S.M,
- La colinéarité entre les vecteurs propres de référence et les vecteurs propres estimés (MAC_v).

Tableau 2. 2:Caractéristiques initiales du modèle

N° d'amortisseur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur kg/s	50	70	100	80	150	150	50	100	80	80

Tableau 2. 3: Perturbation d'amortissement

N° de l'amortisseur	1	3	4	6	7	8	9
$\frac{\text{valeur initial}}{\text{valeur final}}$	4	3	2	2	2	2.5	2

Tableau 2. 4: perturbations de la masse volumique et de module d'Young

N° Elément	1	2	6	7	8	12	13	14	18	19	20
$\frac{\rho \text{ final}}{\rho \text{ initial}}$	1.	1.	2.	2.	1.	1.	1.	2.	2.	1.	1.
$\frac{E \text{ final}}{E \text{ initial}}$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1.	1.	0.5	0.5

Tableau 2. 5: Ecart entre les fréquences propres de référence et estimées

Modes	f_{v_0}	f_v	\hat{f}_{v_1}	MAC_v
1	17.96	13.89	13.89	0.9999
2	59.71	52.20	52.20	0.9999
3	97.56	78.85	78.85	1.0000
4	131.15	112.46	112.46	0.9999
5	191.53	140.36	140.37	0.9999
6	203.62	156.05	156.05	1.0000
7	326.67	263.96	263.96	0.9999
8	364.78	308.26	308.28	0.9999
9	399.04	337.67	337.69	0.9998

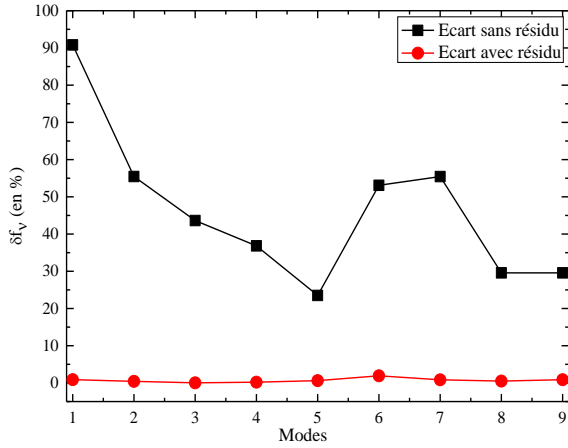


Figure 2. 8 : Ecart entre les fréquences propres "exacte" et estimées avec et sans introduction des termes résiduels

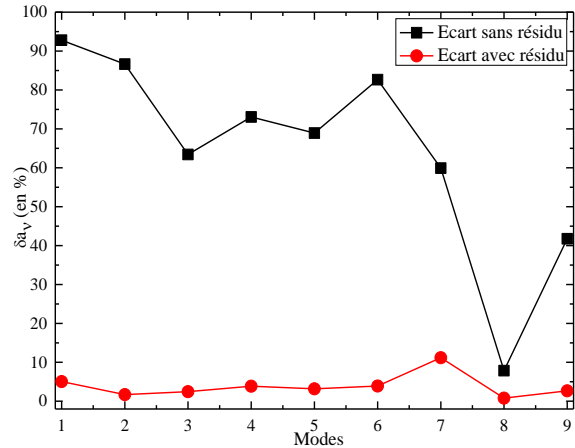


Figure 2. 9 : Ecart entre les taux d'amortissements modaux de référence et estimés avec et sans introduction des termes résiduels

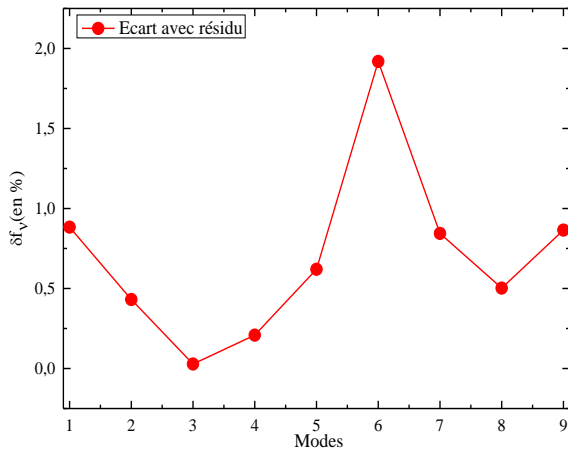


Figure 2. 10 : Ecart entre les fréquences propres "exacte" et estimées avec introduction des termes résiduels

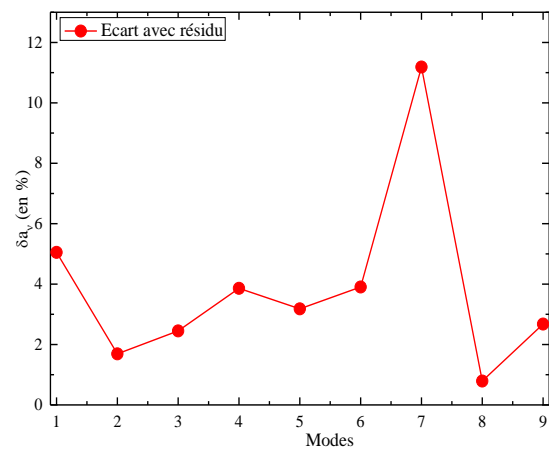


Figure 2. 11 : Ecart entre les taux d'amortissements modaux de référence et estimés avec introduction des termes résiduels

La figure 2.8 et la figure 2.9 montre les résultats obtenus avec et sans introduction des termes résiduels R_1 . On y présente les écarts entre les fréquences de référence et les fréquences estimées et les écarts entre les amortissements généralisés non proportionnel.

La figure 2.10 et la figure 2.11 ni autre qu'un agrandissement des courbes obtenu avec introduction des termes résiduels.

On constate que la précision obtenue par la méthode proposée, est très satisfaisant.

4. Discussion

Cette étude s'appuie sur des méthodes utilisant une matrice de projection de type Rayleigh-Ritz, du fait qu'elles sont faciles à mettre en œuvre et relativement efficaces en termes de précision et de coût opérationnel. L'ajout de résidus à la base modale tronquée permet d'obtenir une amélioration des solutions propres calculées et des amortissements généralisés. La connaissance des matrices A et U n'est pas nécessaire dans le cas où nous disposons de données issues de tests expérimentaux.

En ce qui concerne les formulations proposées pour les structures dissipatives, l'ajout des termes résiduels permet d'obtenir un résultat très satisfaisant, par conséquent le développement jusqu'à l'ordre 3 en \hat{s}_v n'a qu'un effet négligeable sur la précision trouvée.

5. Conclusion

Ce chapitre se concentre sur la réanalyse modale due à la modification structurale tout en modifiant les paramètres (masse, rigidité et amortissement) et sans changer la taille de la structure à étudier. Deux approches efficaces et optimales ont été développées pour prédire le comportement dynamique des structures dissipatives modifiées, une pour des amortissements de type proportionnel et l'autre de type non proportionnel. Ses approches ne nécessitent que la connaissance des paramètres modaux et les termes résiduels de la structure initiale, par conséquent elles sont aptes à utiliser des données issues des mesures. Les exemples numériques montrent que les approches proposées sont précises et optimales.

L'approche (2.26) peut être développée à un ordre supérieur à 2 en \hat{s}_v , mais de nombreuses applications numériques montrent que la précision obtenue à l'ordre 2 est largement satisfaisante

Par ailleurs, la technique proposée peut être étendue au cas où les modifications sont de type conditions aux limites ou aux problèmes de sous-structuration.

**Chapitre 3. Analyse des structures à partir des fonctions des réponses
fréquentielles (FRF)**

1. Introduction

Pour optimiser les calculs en dynamique des structures, nous sommes souvent confrontés à la résolution de formulations utilisant des matrices de fonctions de réponse en fréquence (FRF), comme des problèmes de sous-structuration dynamique ou de modifications structurales [1], [42]. En pratique, ces problèmes sont basés sur la connaissance de la matrice (FRF) $H(\omega)$.

Cette matrice peut être estimée soit à partir d'un modèle analytique ou numérique, proche du modèle réel, soit à partir des données expérimentales.

Dans le cas expérimental, la matrice $H(\omega)$, à chaque fréquence de la bande analysée, est souvent évaluée soit après identification modale [35]-[43], soit par mesure directe de tous ses éléments indépendants. Cette dernière situation est rarement appliquée, car elle n'est pas économique, donc seul un nombre très limité de colonnes de la matrice de flexibilité dynamique peut être mesuré, et par conséquent les autres colonnes doivent être estimées [44]-[46].

Dans ce travail, nous rappelons d'abord la technique d'analyse modale expérimentale, ensuite nous développons une méthode de modifications structurale basée sur la connaissance des fonctions de réponse en fréquence de la structure d'origine et les modifications introduites. Après, nous présentons des techniques pour estimer la matrice de flexibilité de la structure originale on s'intéresse essentiellement à la technique [44]-[46] qui permet d'évaluer les matrices de flexibilité sans utiliser l'identification modale. La qualité de l'estimation de ces matrices est étroitement liée au nombre et à la position des excitateurs en combinant l'une des méthodes proposées dans [45] à une procédure qui permet de choisir la meilleure position des excitateurs (choix des meilleures colonnes de $H(\omega)$).

Un exemple de simulation numérique sera proposé pour valider les formulations présentées. On étudiera les effets du nombre d'excitateurs et de leur position, ainsi que l'effet de l'amortissement sur la qualité de l'évaluation. Les matrices de flexibilités $H(\omega)$ reconstituées seront exploitées par la suite dans la technique de modification structurale.

2. Analyse modale expérimentale (A.M.E.)

Parmi les techniques expérimentales existantes, il faut distinguer deux cas :

- Seule la réponse est mesurée, par exemple, lorsqu'il s'agit d'excitations naturelles, il n'est pas possible d'évaluer la part des résonances et du niveau d'excitation dans l'amplitude de la réponse. Les quantités mesurées ne peuvent donc pas être normalisées. Les techniques associées à cette catégorie de mesure permettent alors d'obtenir des déformées opérationnelles.
- La force et la réponse sont mesurées simultanément. La relation peut ici être exploitée pour déterminer les caractéristiques intrinsèques du système. On parle alors d'analyse modale expérimentale. L'objectif est donc de déterminer expérimentalement les caractéristiques modales d'une structure mécanique (fréquences propres, vecteurs propres, masses modales, matrice d'amortissement généralisée)

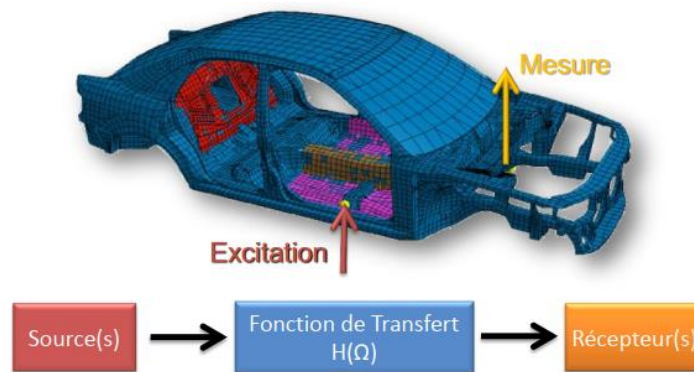


Figure 3. 1:Contexte

L'analyse modale expérimentale a été développée dans les années 50-60 par les "avionneurs" confrontés par le problème de flottement des avions (couplage aéroélastique entre l'air et la structure de l'avion qui provoque, à certaines vitesses, un phénomène de vibrations auto-excitées pouvant causer la destruction de l'appareil). Ce problème peut être évité si on connaît les caractéristiques modales de l'avion.

Selon la méthode employée, les paramètres modaux peuvent être :

- Obtenus directement : Dans ce cas où la méthode employée est l'appropriation modale. Elle met en œuvre une méthodologie particulière et permet d'obtenir les paramètres modaux du SCA. La méthode est de type MIMO (Multiple Input Multiple Output) et utilise l'excitation sinus.
- Identifiés à partir des réponses temporelles ou fréquentielles : Plusieurs solutions peuvent être envisagées avec différents types d'excitations : SISO (Single Input Single Output), SIMO (Single Input Multiple Output) ou MIMO.

La mise en œuvre de ces méthodes demande beaucoup de soin. Le temps est donc un facteur dont il faut tenir compte car il est très dépendant de la nature (et de la qualité) des quantités recherchées :

- Estimation des fréquences et des taux d'amortissement ; réponses mesurées sur quelques points de la structure (informations sur l'amortissement pour le calcul)
- Estimation de paramètres modaux avec recherche d'une norme correcte des modes propres. On peut aussi, pour un coût supplémentaire compléter les informations avec les effets résiduels des modes non mesurés : correction de modèles (recalage), sous-structuration, ...

Il est important, notamment pour le dernier cas, de vérifier en permanence la qualité des signaux, la répétabilité des tests, la cohérence des mesures (tous les capteurs "répondent" de la même manière, modifier les conditions d'essai, ...).

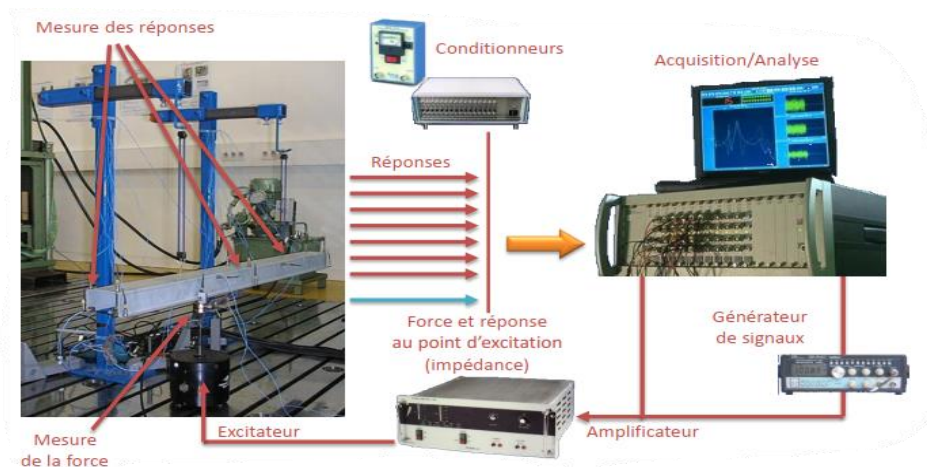


Figure 3. 2: Chaîne d'acquisition

- En général on réalise des excitations de type choc. Dans ce cas, le moyen le plus utilisé est le marteau de choc. On peut aussi travailler avec un exciteur électromagnétique (par exemple un électro-aimant mais il y a souvent un rebond important).

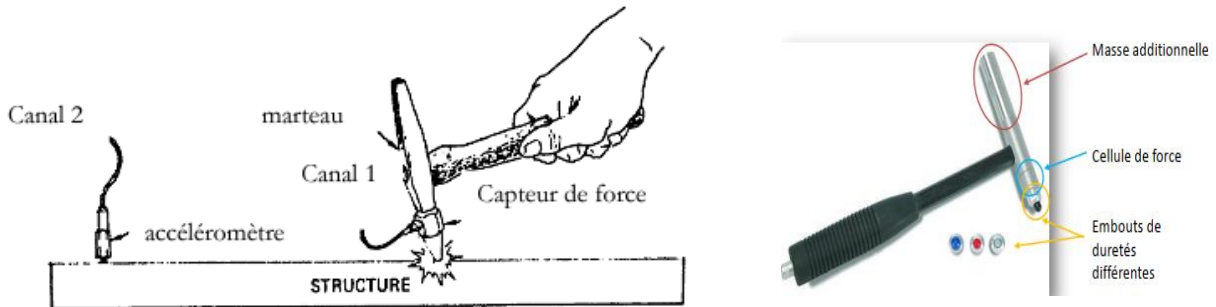


Figure 3. 3: Marteau d'impact/choc

2.1 Fonction d'auto corrélation R_{xx} et de Corrélation croisée R_{xf}

Une variable qui retient l'attention est la vitesse de variation du paramètre étudié (ou en d'autres termes le nombre d'échantillons et le temps nécessaire qu'il faudra avant de pouvoir envisager une valeur statistique). La fonction d'auto corrélation $R_{xx}(t)$ est :

$$R_{xx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)x_i(t + \tau) dt \quad (3.1)$$

La valeur τ représente la différence de temps s entre les valeurs auxquelles le signal est échantillonné. Le terme xx (auto) signifie qu'il s'agit du même signal $x(t)$ observé à différents instants. La variance du signal est égale à la fonction d'auto corrélation au temps 0.

$$Var(x(t)) = R_{xx}(0) \quad (3.2)$$

La fonction de corrélation croisée s'exprime comme la convolution de la réponse par la force :

$$R_{xf}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)f(t + \tau) dt \quad (3.3)$$

2.2 Auto spectre S_{xx} et spectre croisé S_{xf}

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est l'auto-spectre :

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.4)$$

Le spectre croisé S_{xf} entre la réponse et la force se traduit comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation croisée ce qui nous donne :

$$S_{xf}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xf}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.5)$$

2.3 Fonctions de transfert H

La mesure de la fonction de transfert en est une de cause à effet entre 2 signaux quelconques. La fonction de transfert peut être évaluée de 3 façons distinctes :

H_1 Permet d'éliminer, suite à une série de moyennes des prises de mesure, le bruit sur la sortie x :

$$H_1(j\omega) = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} \quad (3.6)$$

H_2 Permet d'éliminer, suite à une série de moyennes des prises de mesure, le bruit sur l'entrée f . Il donne de meilleurs résultats à la résonance.

$$H_2(j\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xf}(\omega)} \quad (3.7)$$

H_3 ne nous donne que le module seulement :

$$|H_3(\omega)|^2 = H_1 \times H_2 = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} \quad (3.8)$$

La mesure des fonctions de transfert A/F (inertance) ou V/F (mobilité) ou X/F (compliance) dans le domaine des fréquences nous prodigue l'information sur les fréquences de résonance, sur les amortissements et sur les modes.

On peut également mesurer les fonctions inverses ($F/A =$ masse apparente, $F/V =$ impédance, $F/X =$ rigidité apparente). La résonance dans ce cas est une vallée. On peut également mesurer une fonction de transfert en termes de déplacements X/Y . L'algorithme fonctransfert (ANNEX)

En représentant les fonctions de transfert en échelle log-log, l'on obtient des informations intéressantes en regard des rigidités et des masses apparentes de la structure, en analysant les points d'impédance et en examinant les valeurs limites en fréquence.

2.4 Cohérence des signaux

Tout signal mesuré peut être altéré par le bruit. La confiance dans la quantité évaluée est accrue en procédant à la moyenne de plusieurs essais identiques. La cohérence est rendue par le rapport des fonctions de transfert H_1/H_2 soit :

$$\gamma^2 = \frac{|S_{xf}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{ff}(\omega)} \quad (3.9)$$

Cette fonction varie entre 0 et 1. La cohérence permet d'établir si la réponse provient de la force ou d'une autre source perturbatrice.

Si l'on obtient une valeur nulle, il y a du bruit dans le signal ;

Si l'on obtient une valeur unitaire, le signal est pur.

Pour que la valeur soit considérée comme étant valide, il faut que la cohérence $\gamma^2 > 0.75$ dans une gamme de fréquence près des résonances. Il est normal d'avoir de faibles valeurs aux antirésonances puisqu'à ces fréquences, la structure ne répond pas à la force. L'on doit toujours s'assurer de la cohérence du signal après avoir procédé à une série de moyennes de la prise de mesure

2.5 Technique de mesure

La technique consiste à choisir un point d'impact dont l'auto-spectre de la force est représenté par une constante e sur toute la gamme de fréquence considérée. Puis, en déplaçant l'accéléromètre, en chaque endroit choisi, l'on enregistre le rapport de la réponse sur la force en chaque endroit. La réponse peut être soit en accélération, soit en vitesse voire encore en déplacement. Ensuite, on

procède à l'analyse du signal en chaque point et à chacune des fréquences. Il nous est aussi donné de déplacer le marteau au lieu de l'accéléromètre si l'auto-spectre de la force s'avère être bon à tous les endroits. Toutefois, cette méthode, bien que plus rapide, est moins précise que celle où l'on déplace le capteur. Pour chaque point de mesure, on obtient une fonction de transfert différente. Les fréquences doivent être identiques pour chaque point de mesure, mais les amplitudes sont distinctes car elles sont indicatrices de la déformée de la structure au point envisagé. Une fois que les fonctions de réponses en fréquence $H(j\omega)$ ont été obtenues, nous y avons recours pour en extraire les paramètres modaux. La tâche vise à évaluer les fréquences de résonance, les coefficients d'amortissement et les amplitudes modales associées à chaque pic de la FRF ainsi évaluée. Le grand inconnu reste le nombre de degrés de liberté à trouver. Une méthode réside à compter le nombre de fréquences de résonance d'une gamme de fréquences déterminées. La méthode qualifiée de SDOF (pour Single Degree Of Freedom) émet l'hypothèse à l'effet que chaque pic peut être analysé indépendamment l'un de l'autre et qu'à une fréquence de résonance donnée, les autres modes ont une influence négligeable. Aussi et dans ce cas de figure, chaque pic représente la vibration d'un système à 1 seul degré de liberté.

2.6 Mesure des modes

2.6.1 Définitions des modes

Soit un système d'équations (sans amortissement).

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.10)$$

Pour normaliser les modes, on pose par hypothèse :

$$\{x(t)\} = [M]^{-1/2}\{q(t)\} \quad (3.11)$$

En substituant (3.11) dans (3.10), l'on obtient :

$$[M][M]^{-1/2}\{\ddot{q}(t)\} + [K][M]^{-1/2}\{q(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.12)$$

En prémultipliant l'équation (3.12) par $[M]^{-1/2}$

$$[M]^{-1/2}[M][M]^{-1/2}\{\ddot{q}(t)\} + [M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}\{q(t)\} = [M]^{-1/2}\{f(t)\} \quad (3.13)$$

L'équation modifiée s'énonce comme suit :

$$[I]\{\ddot{x}(t)\} + [\bar{K}]\{x(t)\} = [M]^{-1/2}\{f(t)\} \quad (3.14)$$

$$[\bar{K}] = [M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2} \quad (3.15)$$

Si l'on pose $\{q(t)\} = \{P\}e^{i\omega t}$: l'on obtient (pour $f(t) = 0$)

$$-\omega^2[I]\{P\} + [\bar{K}]\{P\} = \{0\} \quad (3.16)$$

$$[\bar{K}]\{P\} = \omega^2[I]\{P\} \quad (3.17)$$

ω^2 Représente la valeur propre du système et $\{P\}$ le vecteur propre, qui représente le mode.

2.6.2 Analyse Modale

Par hypothèse, l'on admet que la réponse est une combinaison linéaire des modes (Fig. 3.4) :

$$\{q(t)\} = [P]\{r(t)\} \quad (3.18)$$

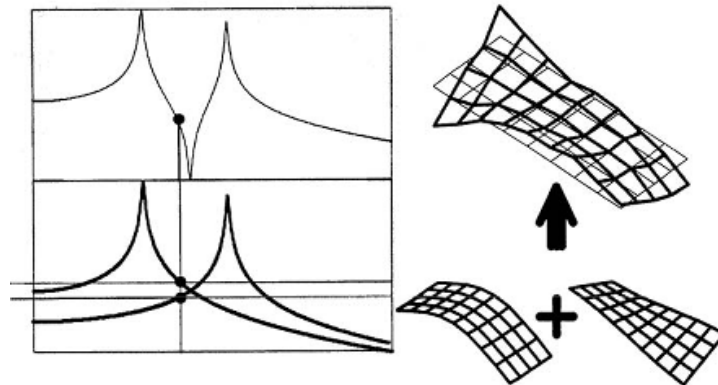


Figure 3. 4: Superposition modale

$$[P]\{\ddot{r}(t)\} + [\bar{K}][P]\{r(t)\} = [M]^{-1/2}\{f(t)\} \quad (3.19)$$

On prémultiplie l'équation (3.18) par le transposé de la matrice modale qui est normalisée par rapport à l'unité, et tel que $[P]^T[P] = [I]$ (ANNEXE D).

$$[P]^T [P] \{\ddot{r}(t)\} + [P]^T [\bar{K}] [P] \{r(t)\} = [P]^T [M]^{-1/2} \{f(t)\} \quad (3.20)$$

$$[I] \{\ddot{r}(t)\} + [P]^T [\bar{K}] [P] \{r(t)\} = [P]^T [M]^{-1/2} \{f(t)\} \quad (3.21)$$

Conformément aux critères d'orthogonalité, nous obtenons :

$$[P]^T [\bar{K}] [P] = \omega_n^2 \quad (3.22)$$

Nous constatons que les équations sont découplées et, l'équation (3.22) devient :

$$[I] \{\ddot{r}(t)\} + \omega_n^2 \{r(t)\} = [P]^T [M]^{-1/2} \{f(t)\} \quad (3.23)$$

2.6.3 Amortissement proportionnel

Pour découpler les équations, il faut supposer un amortissement proportionnel.

$$C = \alpha [M] + \beta [K] \quad (3.24)$$

La condition générale de découplage des équations, telle que formulée par Caughey, est :

$$[C] [M]^{-1} [K] = [K] [M]^{-1} [C] \quad (3.25)$$

En réalisant les mêmes opérations que précédemment, nous obtenons :

$$[M]^{-\frac{1}{2}} [C] [M]^{-\frac{1}{2}} = \alpha [I] + \beta [\bar{K}] \quad (3.26)$$

et :

$$[P]^T [M]^{-\frac{1}{2}} [C] [M]^{-\frac{1}{2}} [P] = \alpha [I] + \beta [\omega_n^2] = [2\zeta \omega_n] \quad (3.27)$$

2.6.4 Identification modale / Identification des matrices de rigidité et d'amortissement

Les techniques d'identification modale ont pour objet la détermination des paramètres modaux d'une structure à partir d'essais dynamiques, ce qui implique :

- La détermination du nombre de modes présents dans la bande de fréquence étudiée
- Pour chaque mode:

- L'évaluation de la pulsation complexe : $s_v = -\zeta_v \omega_{0v} + j\omega_{0v}$
 - La détermination du vecteur propre complexe associé normalisé : z_v
 - Le passage des solutions propres complexes du système dissipatif aux solutions propres du Système Conservatif Associé pour les comparer aux résultats d'un calcul par élément fini (E.F).
- Éventuellement, la détermination de la matrice des amortissements généralisés.

Pour réaliser cet objectif, les mesures doivent être effectuées sur la structure en un certain nombre de points (capteurs) judicieusement choisis, afin d'obtenir des déformées significatives.

Ces mesures s'effectuent en excitation de type choc, aléatoire ou sinus, avec éventuellement différentes localisations de la force d'excitation.

- **Identification des matrices de rigidité et d'amortissement**

D'après les équations (3.15) et (3.22), la matrice des fréquences naturelles est énoncée de la façon suivante :

$$[\omega_n^2] = [P]^T [M]^{-\frac{1}{2}} [K] [M]^{-\frac{1}{2}} [P] \quad (3.28)$$

Pour déterminer la matrice de rigidité, on procède aux opérations suivantes :

$$[M]^{\frac{1}{2}} [P] [P]^T [M]^{-\frac{1}{2}} [K] [M]^{-\frac{1}{2}} [P] = [M]^{\frac{1}{2}} [P] [\omega_n^2] \quad (3.29)$$

$$[M]^{-\frac{1}{2}} [P] [\omega_n^2] = [K] [M]^{-\frac{1}{2}} [P] \quad (3.30)$$

$$[M]^{\frac{1}{2}} [P] [\omega_n^2] [P]^T [M]^{\frac{1}{2}} = [K] [M]^{-\frac{1}{2}} [P] [P]^T [M]^{\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

Si l'on a calculé les modes et les fréquences naturelles et que l'on connaît la matrice de masse, il nous est donné d'évaluer la matrice de rigidité condensée aux degrés de liberté évalués, d'après les résultats expérimentaux :

$$[K] = [M]^{\frac{1}{2}} [P] [\omega_n^2] [P]^T [M]^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

Si on effectue la même opération sur $[C]$, on obtient la matrice d'amortissement, après avoir calculé le taux d'amortissement de chaque mode, on obtient :

$$[C] = [M]^{\frac{1}{2}}[P][2\zeta\omega_n][P]^T[M]^{\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

2.6.5 Evaluation des modes

L'équation du mouvement est donnée par :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (3.34)$$

Si l'on admet l'existence d'un mouvement harmonique on obtient :

$$x(t) = \{X\}e^{i\omega t} \text{ et } f(t) = \{F\}e^{i\omega t} \quad (3.35)$$

où $\{X\}$ et $\{F\}$ désignent des amplitudes calculées de déplacement et de force.

$$[K - \omega^2 M + i\omega C]\{X\} = \{F\} \quad (3.36)$$

$$\{X\} = [K - \omega^2 M + i\omega C]^{-1}\{F\} \quad (3.37)$$

En remplaçant les matrices K et C , trouvées dans l'équations (3.32) et (3.33), on obtient :

$$\{X\} = \left[[M]^{\frac{1}{2}}[P]([\omega_n^2] - \omega^2[I] + i\omega[2\zeta\omega_n])[P]^T[M]^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} \{F\} \quad (3.38)$$

Si on pose que :

$$[X] = [M]^{\frac{1}{2}}[P] \quad (3.39)$$

La fonction de transfert devient :

$$H(\omega) = [X]([\omega_n^2] - \omega^2[I] + i\omega[2\zeta\omega_n])[X]^T)^{-1} \quad (3.40)$$

Puisque les matrice entre parenthèses sont diagonales, nous pouvons énoncer la fonction de transfert sous la forme suivante :

$$H(\omega) = [X]^{-T} \left[\frac{1}{\omega_{ni}^2 - \omega^2 + 2i\zeta_i\omega\omega_{ni}} \right] [X]^{-1} \quad (3.41)$$

La fonction de transfert est alors rendue par :

$$H(\omega) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{X_i X_i^T}{(\omega_i^2 - \omega^2) + (2i\zeta_i \omega \omega_i)} \right] \quad (3.42)$$

Le produit $\{X_i\}_{n \times 1} \{X_i\}_{1 \times n}^T$ est une matrice $n \times n$. Si on calcule la réponse X_s au point 's' sous l'effet d'une force f_r au point 'r', on obtient l'élément H_{sr} .

- Extraction des modes

Il est nécessaire qu'on calcule la matrice complète $[X_i X_i^T]$, pour pouvoir procéder à l'analyse du mode, afin d'en extraire le vecteur modal. A titre indicatif, si on a un mode associé à un modèle à 3 DDL pouvant être formulé comme suit :

$$\{X_1\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \text{ et } \{X_1\}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3\}$$

Le produit du vecteur modal par son transposé nous donne :

$$[X_i X_i^T] = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Nous constatons alors qu'une seule ligne ou colonne suffit pour procéder à l'extraction du vecteur. De la sorte, pour calculer le mode, seule une ligne ou une colonne de la fonction de transfert H est requise. À cette fin, nous pouvons décider de l'endroit d'excitation et évaluer la réponse en d'autres endroits ou bien, évaluer la réponse en un endroit donné et calculer l'excitation en d'autres endroits (la matrice est symétrique). [47]

L'amplitude peut être analysée à partir, soit :

- Des courbes de fonctions de transfert dans le domaine fréquentiel (amplitude et phase)
- De la courbe imaginaire versus réel (Nyquist) ou bien,
- Des parties imaginaires et réelles du signal fréquentiel. Pour être sûr d'avoir la bonne phase, il est vivement conseillé d'évaluer le mode à partir de la partie imaginaire de l'inertance. $Im(H_{sr}(\omega_i))$ désigne la valeur de l'amplitude de la partie imaginaire de la fonction de transfert à la fréquence ω_i mesurée au point s sous l'action de la force au point r.

L'essentiel de l'analyse dans cette phase réside dans la présentation de l'information sous une forme à la fois synthétique et facile d'emploi. Les logiciels actuels permettent d'animer les déformations aux différents modes. En outre, ils peuvent tant modifier l'amplification de la déformation que la direction de son observation. Certains même, couplés à des programmes de calculs de structure, vont jusqu'à prévoir l'effet d'une modification locale de la structure.

2.6.6 Identification des paramètres physique

Une fois que nous disposons des modes et des fréquences de résonance, il nous est possible de calculer les paramètres de masse et de rigidité qui les ont générés.

$$([K] - \omega_i^2[M])\{X_i\} = 0 \quad (3.44)$$

À titre indicatif, prenons un système à 2DDL deux degrés de liberté :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_i = 0 \quad (3.45)$$

En combinant les matrices de masse et de rigidité, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} K_{11} - \omega_i^2 M_{11} & K_{12} - \omega_i^2 M_{12} \\ K_{21} - \omega_i^2 M_{21} & K_{22} - \omega_i^2 M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_i = 0 \quad (3.46)$$

Ce système nous donne 2 équations couplées :

$$(K_{11} - \omega_i^2 M_{11})X_1 + (K_{12} - \omega_i^2 M_{12})X_2 = 0 \quad (3.47)$$

$$(K_{21} - \omega_i^2 M_{21})X_1 + (K_{22} - \omega_i^2 M_{22})X_2 = 0 \quad (3.48)$$

Les matrices étant symétriques, nous obtenons :

$$K_{21} - \omega_i^2 M_{21} = -(K_{11} - \omega_i^2 M_{11}) \frac{X_1}{X_2} = -(K_{22} - \omega_i^2 M_{22}) \frac{X_2}{X_1} \quad (3.49)$$

Une fois que l'on sait la relation qui prévaut entre K_{11} , K_{12} et K_{22} , et que l'on est en possession de $[M]$, il nous est aisé de trouver les paramètres physiques de $[K]$.

2.6.7 Combinaison de systèmes complexes

Soit 2 systèmes A et B qui doivent être combinés en un système C à l'aide d'une. (Fig. 3.5).

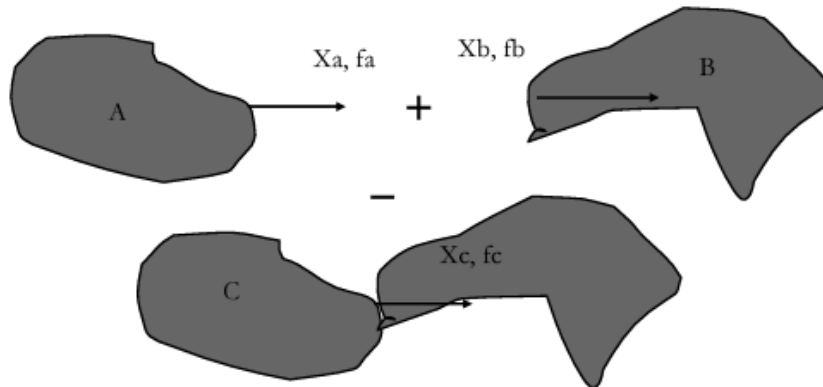


Figure 3. 5: Système complexe

Au point d'attache, nous avons la continuité des déplacements :

$$Xa = Xb = Xc \quad (3.50)$$

À ce point les forces s'additionnent ce qui nous donne :

$$fa + fb = fc \quad (3.51)$$

Chaque force peut être déterminée grâce à sa fonction de transfert H :

$$F_i = X_i / H_{ii} \quad (3.52)$$

Ainsi l'équation (3.51) devient :

$$1/H_{aa} + 1/H_{bb} = 1/H_{cc} \quad (3.53)$$

La réceptance du système combiné au point d'attache peut être déterminée à partir de la réceptance de chaque sous-structure au même point.

3. Problèmes de modification structurale via les fonctions de transfert

3.1 Formulation générale

La structure modifiée peut être représentée par un assemblage de deux sous-systèmes : la structure initiale et un système supplémentaire constitué par les modifications introduites.

L'équation représentant la solution particulière de la structure dans son état initial, sous une excitation harmonique, est exprimé sous la forme matricielle suivante :

$$z(s) = H(s)f, \quad s = j\omega \quad (3.54)$$

Où $H(s) \in \mathbb{C}^{c,c}$ est la matrice (FRF) symétrique de la (S. I), à la fréquence ω , c est le nombre de DDL capteurs et $z(s)$ étant la réponse du système à l'excitation $f \in \mathbb{C}^{c,1}$.

Pour réduire l'écriture, nous éliminons l'argument s . L'équation ci-dessus est partitionnée sous la forme :

$$\begin{pmatrix} z_i \\ z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{ii} & H_{ia} \\ H_{ai} & H_{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i \\ f_a \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Où a désigne les DDL affectés par la modification, et i désigne les autres DDL.

Le système supplémentaire, constitué de quelques modifications paramétriques connus qui ne modifient pas l'ordre du système, est représenté par la matrice de rigidité dynamique :

$$\Delta Z_{aa} = [\Delta K_{aa} + s\Delta B_{aa} + s^2\Delta M_{aa}] \in \mathbb{C}^{a,a} \quad (3.56)$$

Où $\Delta K_{aa}, \Delta M_{aa}, \Delta B_{aa} \in \mathbb{R}^{a,1}$ sont, respectivement les matrices symétriques de rigidité, de masse et d'amortissement de la modification structurelle.

Le vecteur de forces de liaison \check{f}_{al} exercé par la S. I. sur le système supplémentaire peut être écrit (après condensation sur le DDL de liaison) :

$$\check{f}_{al} = \Delta Z_{aa} \hat{z}_a \in \mathbb{C}^{a,1} \quad (3.57)$$

\hat{z}_a est le vecteur déplacement du système supplémentaire aux points de connexion avec la S.I.

La relation de flexibilité de la (S. M.) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \hat{z}_i \\ \hat{z}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{ii} & H_{ia} \\ H_{ai} & H_{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_i \\ \hat{f}_a \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Avec : $\hat{f}_i = f_i \in \mathbb{C}^{c-a,1}$ et $\hat{f}_a = f_a + f_{al} \in \mathbb{C}^{a,1}$, f_{al} est le vecteur des forces de liaison exercées par le système additionnel sur les DDL de type "a".

Les conditions de connexion sont :

$$\hat{z}_a = \check{z}_a; \quad \check{f}_{al} + f_{al} = 0 \quad (3.59)$$

Après avoir utilisé les équations (3.57) et (3.59), l'équation (3.58) peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \hat{z}_i \\ \hat{z}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{ii} - H_{ia}\Delta Z_{aa}GH_{ai} & H_{ia}(I_a - \Delta Z_{aa}GH_{aa}) \\ GH_{ai} & GH_{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i \\ f_a \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

avec : $G = [I_a + H_{aa}\Delta Z_{aa}]^{-1}$

À l'aide de l'équation (3.60), on peut exprimer les réponses forcées de la S.M., sans recourir à une méthode exacte mais coûteuse, en utilisant uniquement la matrice de flexibilité dynamique de la S.I. et les modifications introduites. Afin d'évaluer les FRF de la S.M à partir de (3.60), on doit déterminer la matrice G à chaque fréquence ω . Le coût de son évaluation, à chaque pulsation ω , dépend du nombre de DDL affectés par les modifications structurales.

Cette formulation devient impraticable dans le cas où le nombre a est important

3.2 Cas de blocage des DDL

Pour les problèmes de DDL bloqués, dans le cas le plus simple, on choisit pour les matrices de perturbation $\Delta M_{aa} = 0$ et ΔK_{aa} comme matrice diagonale avec de très grands éléments diagonaux. Ensuite, la perturbation de la rigidité relie de façon quasi rigide les a DDL au référentiel fixe. L'équation (3.60) se réduit à:

$$\hat{z}_i = \hat{H}f_i \quad (3.61)$$

d'où : $\hat{H} = H_{ii} - H_{ia}\Delta K_{aa}GH_{ai}$; $G = [I_a + H_{aa}\Delta K_{aa}]^{-1}$

Si nous prenons ΔK_{aa} sous la forme suivante :

$\Delta K_{aa} = kI_a$, k est un scalaire positif et I_a la matrice unitaire d'ordre a .

Les matrices G et \hat{H} deviennent :

$$G = \frac{1}{k}[\frac{1}{k}I_a + H_{aa}]^{-1}; \quad \hat{H} = H_{ii} - H_{ia}[\frac{1}{k}I_a + H_{aa}]^{-1}H_{ai} \quad (3.62)$$

et pour k tendant vers l'infini, \hat{H} s'écrit:

$$\hat{H} = H_{ii} - H_{ia}[H_{aa}]^{-1}H_{ai} \quad (3.63)$$

Dans cette formulation, l'introduction des modifications structurales n'apparaîtra pas explicitement, mais nous sommes toujours confrontés à l'inversion de la sous-matrice H_{aa} d'ordre égal au nombre de ddl fixes. On peut trouver la même formulation que (3.63), mais établie de manière différente, en utilisant (3.58) et en imposant la contrainte $\hat{z}_a = 0$

4. Évaluation de la matrice FRF

Pour résoudre les problèmes de modifications structurales définis dans (3.60), ou les formulations de sous-structuration, on doit estimer la matrice de flexibilité dynamique $H(\omega)$.

4.1.1 Estimation à partir d'un modèle d'éléments finis

En dynamique des structures mécaniques, un système continu est souvent discrétisé et représenté par un modèle à n DDL. Une première façon de déterminer la matrice $H(\omega) \in \mathbb{C}^{n,n}$ est effectuée par un calcul à partir d'un modèle d'éléments finis existant. Si nous notons M , B et K , respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure, la matrice $H(\omega)$ (FRF) est alors calculée par la relation suivante :

$$H(\omega) = (K + j\omega B - \omega^2 M)^{-1} \quad (3.64)$$

Ce calcul peut être très coûteux dans le cas d'un modèle ayant un grand nombre de DDL et lorsque la gamme des fréquences d'excitation est très large.

4.2 Estimation à l'aide de mesures expérimentales

Lorsque les données sont issues des mesures expérimentales, nous sommes souvent contraints d'opérer avec une sous matrice $H_{cc} \in \mathbb{C}^{c,c}$ où c ($c \ll n$) représente le nombre limité de capteurs qui ont été placés sur la structure testée [48], [49].

Les éléments de $H_{cc}(\omega)$ sont généralement évalués soit par reconstitution à l'aide des valeurs propres identifiées, soit par mesure directe de $c(c+1)/2$ éléments indépendants. Parce que les matrices H_{cc} est symétrique.

4.2.1 Reconstitutions à l'aide des solutions propres identifiées

Dans le cas d'une structure dissipative, la relation entre la matrice $H(\omega)$ et les vecteurs propres de la structure est exprimée par

$$H(\omega) = Y(j\omega I - S)^{-1}Y^T + \bar{Y}(j\omega I - \bar{S})^{-1}\bar{Y}^T \quad (3.65)$$

où $Y \in \mathbb{C}^{c,c}$, $S = \text{Diag}(s_i) \in \mathbb{C}^{c,c}$ représentent respectivement les matrices modales et spectrales de la structure et \bar{Y} , \bar{S} sont respectivement les matrices conjuguées de Y et S .

Habituellement, le nombre m de modes identifiés est inférieur au nombre total n de DDL ($m \ll n$). Afin de compenser partiellement la contribution des $(n - m)$ modes non identifiés [50], dans la bande observée, on se contente fréquemment de leur contribution statique H^s .

Ainsi, dans une bande de fréquences contenant les modes mesurés, on peut approximer $H(\omega)$ comme suit :

$$H(\omega) \cong H^s + H^d(\omega) \quad (3.66)$$

où : $H^d(\omega) \in \mathbb{C}^{n,n}$ représente une contribution des modes propres identifiées, son expression en fonction des paramètres modaux identifiées (Y_1, S_1) s'exprime par la relation suivante :

$$H^d(\omega) = Y_1(j\omega I_m - S_1)^{-1}Y_1^T + \bar{Y}_1(j\omega I_m - \bar{S}_1)^{-1}\bar{Y}_1^T \quad (3.67)$$

où :

$$H^s = H(0) - H^d(0) \quad (3.68)$$

Comme déjà mentionné ci-dessus, nous utiliserons uniquement la sous-matrice $H_{cc} \in \mathbb{C}^{c,c}$ ($m < c < n$) de $H(\omega)$ par rapport aux c DDL capteurs. La matrice $H_{cc}(\omega)$ est définie par :

$$H_{cc}(\omega) \cong H_{cc}^s + Y_{1c}(j\omega I_m - S_1)^{-1}Y_{1c}^T + \bar{Y}_{1c}(j\omega I_m - \bar{S}_1)^{-1}\bar{Y}_{1c}^T \quad (3.69)$$

avec :

$$H_{cc}^s = H_{cc}(0) - Y_{1c}(-S_1)^{-1}Y_{1c}^T - \bar{Y}_{1c}(-\bar{S}_1)^{-1}\bar{Y}_{1c}^T \quad (3.70)$$

$Y_{1c} \in \mathbb{C}^{n,m}$ ($m < c$) est la sous-matrice modale de Y_1 aux c DDL observés.

Pour estimer $H_{cc}(\omega)$, nous devons identifier les matrices Y_{1c} , S_1 et $H_{cc}^s \in \mathbb{C}^{c,c}$, c . Pour cela, seules p ($p < c$) colonnes ou lignes de $H_{cc}(\omega)$ sont suffisantes [35], celles-ci sont mesurées en appliquant des excitations linéairement indépendantes dans la bande de fréquence observée. Ainsi, les équations (3.69) et (3.70) permettent d'évaluer la matrice $H_{cc}(\omega)$ à partir d'un nombre p , beaucoup plus restreint, de colonnes observées parmi les c colonnes. Plusieurs méthodes d'identification modale ont été développées à cette fin. On peut voir, par exemple, la référence [35]. Afin d'exploiter directement les données issues des mesures, sans passer par une l'identification modale coûteuse, dans les formulations utilisant les FRF, on propose d'utiliser une méthode alternative consistant à compléter la matrice $H_{cc}(\omega)$ à partir de la connaissance d'un nombre très limité de ces colonnes.

4.2.2 Évaluation directe des matrices FRF

Dans ce cas, la contribution de tous les modes sont prises en compte. La connaissance de tous les éléments de la matrice $H_{cc}(\omega)$ nécessite c capteurs et c excitations. Habituellement, pour des raisons économiques, seul un nombre limité p de configurations d'excitations linéairement indépendantes est disponible.

Problème : Connaissant p ($p < c$) colonnes de $H_{cc}(\omega)$ désignées par la sous-matrice $H_1(\omega) \in \mathbb{C}^{c,p}$, nous devons estimer (au mieux) les $c - p$ colonnes restantes sans effectuer une identification modale.

Nous décrivons ci-après une technique qui contribue à la résolution de ce problème [50], [51].

Pour préciser les inconnus du problème, la matrice FRF $H_{cc}(\omega)$ est divisée en sous- matrices comme suit :

$$H_{cc} = [H_1 \quad H_2] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Où : $H_1 \in \mathbb{C}^{c,p}$ est la partie connue de H_{cc} , $H_{11} \in \mathbb{C}^{p,p}$ une sous-matrice carrée de H_1 et $H_2 \in \mathbb{C}^{c,c-p}$ est la partie inconnue de H_{cc} .

Nous ne considérons que les cas où la matrice FRF $H_{cc}(\omega)$ est symétrique :

$$H_{12} = H_{21}^T, H_{11} = H_{11}^T, H_{22} = H_{22}^T$$

Dans ce cas, le nombre d'éléments inconnus de la matrice rectangulaire H_2 est contenu dans la matrice carrée H_{22} . Ainsi, le nombre total d'éléments inconnus est réduit à $(c - p) \times (c - p + 1)/2$

a) Évaluation par factorisation spectrale de la sous-matrice H_{11} de la matrice mesurée

Les valeurs propres γ_i et les vecteurs propres $\varphi_i (i = 1, \dots, p)$ de la matrice H_{11} sont définis par le problème des valeurs propres [52] :

$$(H_{11} - \gamma_i I_p) \varphi_i = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.72)$$

On peut alors écrire la matrice symétrique complexe H_{11} dans la forme :

$$H_{11} = \phi_{11} \Gamma \phi_{11}^T \quad (3.73)$$

Où : $\Gamma, \phi_{11} \in \mathbb{C}^{p,p}$ sont la matrice diagonale des valeurs propres et la matrice modale des vecteurs propres de H_{11} , respectivement. Ces vecteurs propres sont normalisés de telle sorte que :

$$\phi_{11} \phi_{11}^T = \phi_{11}^T \phi_{11} = I_p \quad (3.74)$$

La factorisation (3.73) est valable pour les matrices ayant des valeurs propres distinctes et éventuellement pour les matrices ayant des valeurs propres multiples.

Pour estimer l'ensemble de la matrice FRF, cherchons la matrice $\phi_{21} \in \mathbb{C}^{c-p,p}$ [17] telle que :

$$\begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \end{bmatrix} = \phi_1 \Gamma \phi_{11}^T, \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

On peut en déduire que :

$$\phi_{21} = H_{21} \phi_{11} \Gamma^{-1} \quad (3.76)$$

Ainsi, la sous-matrice H_{22} est approchée par :

$$H_{22} = \phi_{21} \Gamma \phi_{21}^T \quad (3.77)$$

Par conséquent, la matrice complète H_{cc} est approximée par la matrice :

$$\tilde{H}_{cc} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} \Gamma (\phi_{11}^T \quad \phi_{21}^T) \quad (3.78)$$

A cet effet on note les remarques suivantes :

Dans le cas où certains éléments diagonaux γ_i de la matrice diagonale Γ sont des valeurs très faibles, il est évident que le calcul de ϕ peut influencer la qualité de l'évaluation.

- En général, les valeurs propres d'une matrice ne donnent pas d'informations précises sur son rang. Si l'on souhaite contrôler le rang de la matrice H_{11} , il est préférable d'utiliser une décomposition en valeurs singulières [45], [53].

b) Formulation complémentaire

Les simulations numériques montrent que, avec la formulation précédente, la qualité de l'évaluation dans les environs des antirésonances (régions de faible amplitude) est mauvaise, mais dans les régions des fréquences de résonance, la qualité est pratiquement parfaite. Dans ce cas, pour améliorer l'estimation dans les régions de faible amplitude, on peut exploiter une idée déjà proposée dans [45], où la matrice de flexibilité peut être exprimée, à chaque fréquence ω de la bande analysée, par une combinaison linéaire des flexibilités dynamiques aux fréquences de résonance. Les étapes à suivre sont décrites ci-dessous :

- (1) Estimer approximativement, à partir de la sous-matrice rectangulaire mesurée H_1 , les m fréquences de résonance $\omega_i (i = 1, \dots, m)$ dans la bande d'analyse ;
- (2) Calculer $H_{cc}(\omega_i)$, pour $i = 1, \dots, m$, par Eq. (3.78) ;
- (3) Trouver les coefficients $x_i(\omega) \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, m$ en utilisant le processus des moindres carrés qui doivent être vérifiés :

$$H_1(\omega) = \sum_{i=1}^m x_i(\omega) H_1(\omega_i) \quad (3.79)$$

- (4) Calculer $H_{cc}(\omega)$ finalement, par analogie avec (3.79), à chaque fréquence ω de la bande analysée, en utilisant les résultats des étapes précédentes, ce qui donne :

$$H_{cc}(\omega) = \sum_{i=1}^m x_i(\omega) H_{cc}(\omega_i) \quad (3.80)$$

Il est évident que la qualité de l'évaluation de la matrice FRF dépend notamment des positions et du nombre de capteurs et d'excitateurs, de l'amortissement de la structure et de la densité spectrale.

c) Reconstitution du FRF après un choix optimal des excitations :

Dans la référence [45] l'auteur mentionne que la qualité de la reconstitution est étroitement liée au placement des excitations. D'où l'idée de chercher une manière qui permet de sélectionner les meilleurs colonnes observées (choix des meilleures excitations, [54],[55])

Pour les simulations numériques présentées dans la section 4, nous choisirons la sous-matrice rectangulaire H_1 , contenant la p colonnes connues de H_{cc} , en utilisant la méthode combinatoire présentée dans [46]. Cette technique est construite à partir d'un modèle d'éléments finis disponible, et permet d'avoir les meilleures positions des p excitations entre g DDL, éventuellement excitable (c'est-à-dire qu'il permet de choisir p colonnes linéairement indépendantes de la matrice FRF parmi les colonnes g). La technique consiste à générer toutes les combinaisons possibles de p DDL potentiels parmi les DDL sélectionnés ; un critère de sélection est ensuite appliqué. (ANNEXE E)

5. Résultats et discussion

On considère le portique 2D représenté dans la figure 2. 6. La structure est modélisée en utilisant un code d'éléments finis. Ce modèle est discrétisé en 22 éléments poutre et contient 20 nœuds non contraints avec 3 DDL par nœud. Les caractéristiques physiques et géométriques sont suivantes :

Module d'Young: $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{N/m}^2$

Section droite : $S = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{m}^2$

Masse volumique : $\rho = 7800 \text{kg/m}^3$

Moment d'inertie quadratique : $I = 0.417 \cdot 10^{-08} \text{m}^4$

Les longueurs du portique $L_1 = 0.56 \text{ m}$; $L_2 = 0.48 \text{ m}$; $L_3 = 0.36 \text{ m}$.

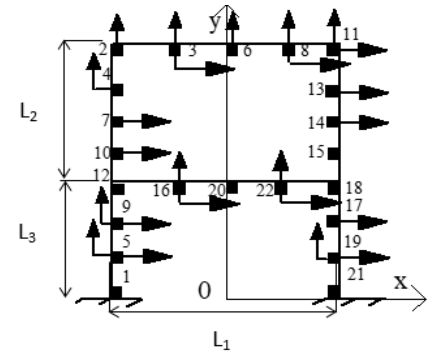


Figure 3. 6: Portique 2D avec $p = 24$ capteurs

Un amortissement proportionnel ($B M^{-1}K = K M^{-1}B$) est introduit et la matrice FRF "exacte" $H(\omega)$ est calculée, à chaque fréquence ω dans la bande analysée, en utilisant les modes propres de la structure dissipative. On note que $a_i = Re(s_i)/Im(s_i)$ est le $i^{\text{ème}}$ facteur d'amortissement modal, $s_i = -a_i\omega_i + j\omega_i$ est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de la structure. La bande de fréquences considérées $[0, 200 \text{ Hz}]$ contient les 10 premières fréquences propres de la structure (voir tableau. 3.1)

Tableau 3. 1: Valeurs de référence des 10 premières fréquences propres de portique

Numéro du mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquences (Hz)	17.96	59.71	97.56	131.15	191.53	203.62	326.67	364.78	399.04	455.84

5.1 Estimation de $H_{cc}(\omega)$ par reconstitution directe

Nous supposons que nous connaissons p colonnes de la matrice $H_{cc}(\omega)$ et cherchons les autres $c - p$ colonnes manquantes. Un total de $c = 24$ DDL capteur.

Afin de justifier que la qualité de l'évaluation dépend des positions et du nombre d'excitations, et de l'amortissement de la structure, nous considérons les cas suivants :

(a) Choix de $p = 4$ points d'excitation choisis arbitrairement, avec un facteur d'amortissement modal $a_i = 0.01$, $i = 1, 2, \dots$

Les 20 colonnes restantes de la matrice $H_{cc}(\omega)$ sont déterminées sur la base des 4 colonnes mesurées, ce qui donne un total de 138 éléments inconnus si l'on tient compte de la symétrie. Dans la figure 3.7(a et b), où le choix des $p = 4$ colonnes de H_{cc} est arbitraire, l'amplitude des deux éléments inconnus H_{sr} et H_{ij} est tracée en fonction de ω et comparée avec un choix arbitraire des emplacements de 4 excitateurs conduit à une qualité d'évaluation médiocre dans certaines régions de la bande de fréquences, ceci est dû à un problème numérique au mauvais conditionnement de matrice H_{11} . L'expansion est presque parfaite dans le voisinage des résonances, mais elle est mauvaise dans les régions de faible amplitude, en particulier près des antirésonances. Un certain nombre de pic parasites sont d'origine numérique et peuvent disparaître si le choix des $p = 4$ colonnes de H_{cc} est judicieusement choisies comme elles sont montrées dans les figures 3.7 (a' et b') de la matrice de flexibilité \tilde{H}_{cc} estimée.

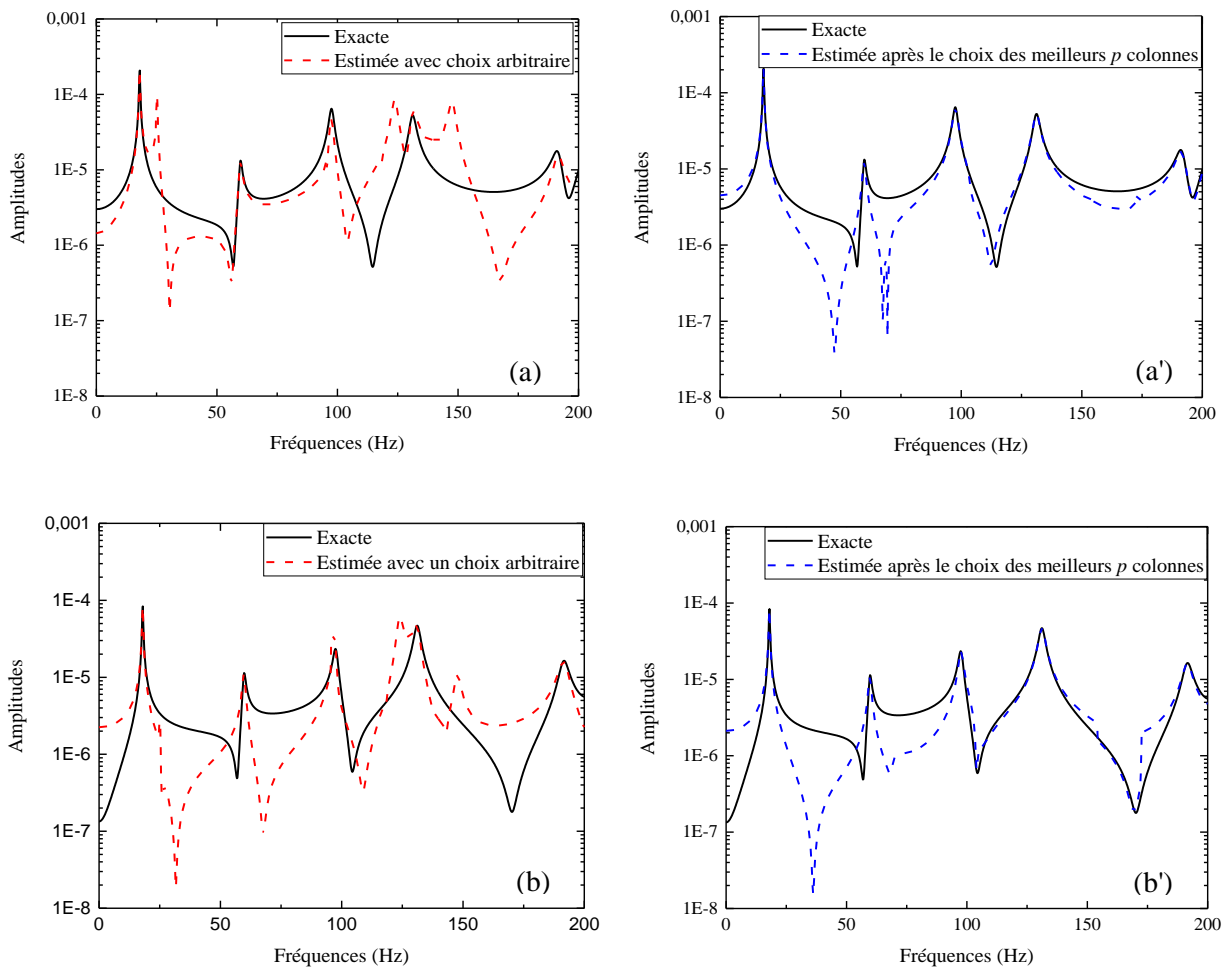


Figure 3. 7 : $p = 4$ points d'excitation, avec un facteur d'amortissement modal $\alpha_i = 0.01$

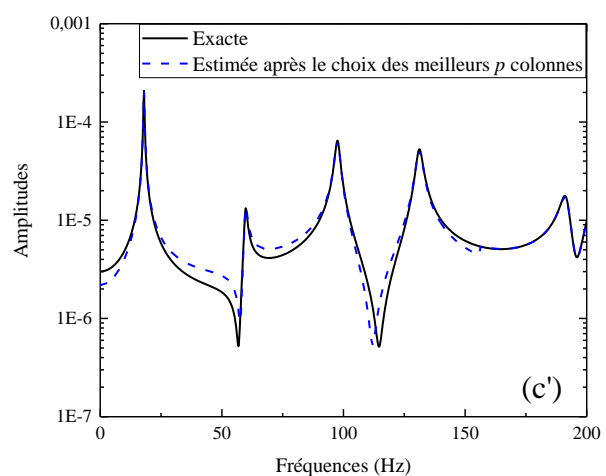
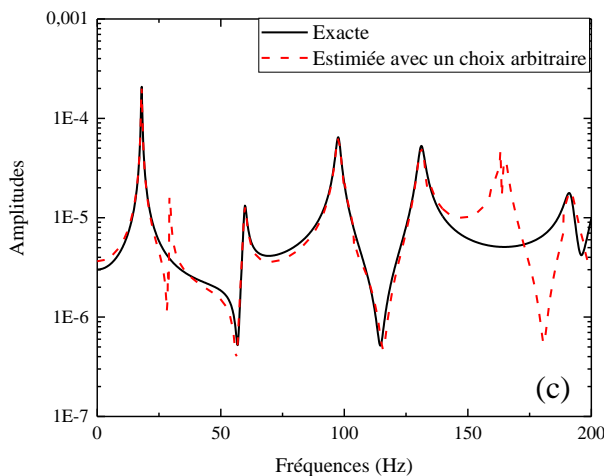
On note également que, pour l'élément considéré dans la figure ci-dessus, la courbe estimée présente quelques pics parasites qui ne sont pas liés aux fréquences de résonance de la structure, mais au fait que la matrice H_{11} peut être mal conditionnée pour certaines fréquences ; c'est donc lors de la factorisation (3.73) que de très petites valeurs apparaîtront dans la matrice diagonale Γ , et qui deviendront très grandes lors de son inversion. C'est donc l'équation (3.76) qui peut générer de tels pics lorsque les matrices considérées ne sont pas de plein rang. Cela signifie que les colonnes observées de la matrice H_{cc} doivent être sélectionnées intelligemment.

(a' et b') Choix de $p = 4$ points d'excitation optimale sélectionnés, avec un facteur d'amortissement modal $a_i = 0.01$, $i = 1, 2, \dots$

Ce cas est similaire au cas (a) sauf que les excitateurs $p = 4$ sont ici choisis de manière optimale, en utilisant la technique présentée dans [46]. La figure 3.8.(c et c'), montre l'évolution des amplitudes exactes et estimées du même élément H_{sr} et H_{ij} .

Les résultats dans ce cas sont nettement meilleurs que les précédents. Cependant, il y a encore des régions où l'estimation reste médiocre. Il faut noter que le choix des meilleures positions d'excitations est une expérience problème. Dans le cas ci-dessous, nous examinons ce qui se passera si le nombre p d'excitateurs optimaux augmente.

(c) Choix de $p = 8$ points d'excitation optimale sélectionnés, avec un facteur d'amortissement modal $a_i = 0.01$



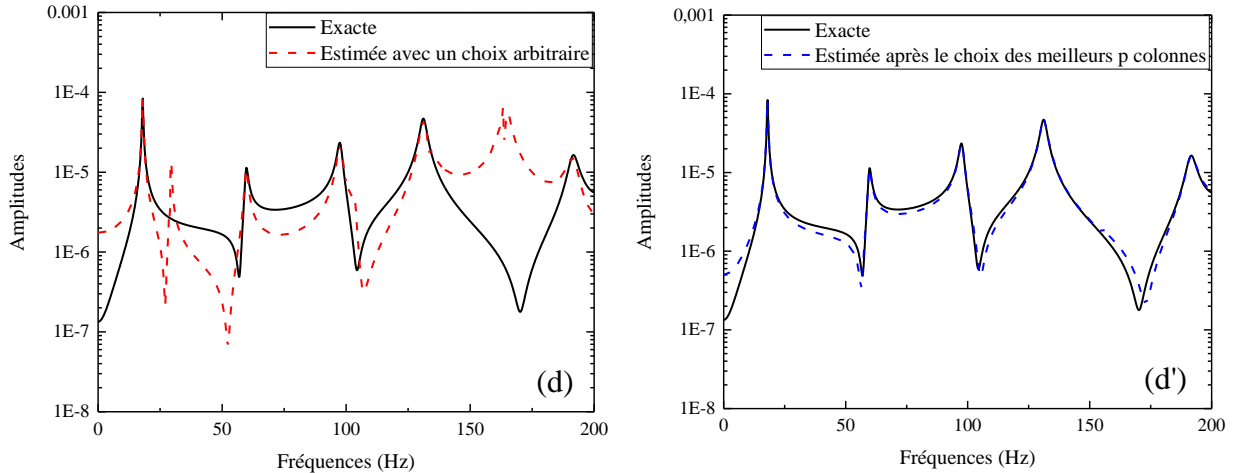


Figure 3. 8: $p = 8$ points d'excitation avec un facteur d'amortissement modal $a_i = 0.01$

Dans ce cas, nous considérons $p = 8$ points d'excitation sélectionnés selon le critère développé dans l'ANNEXE E, avec le même facteur d'amortissement modal $a_i = 0.01$, et nous étudierons les mêmes éléments H_{sr} et H_{ij} que ci-dessus. Dans la figure 3.8, nous voyons que l'augmentation de p améliore sensiblement la qualité des résultats, en particulier près des résonances où la qualité est parfaite. En général, les résultats obtenus sont meilleurs que ceux des cas (a) et (b). Néanmoins, l'estimation reste faible dans le voisinage de quelques antirésonances mais il est acceptable pour celles situées dans la bande de fréquence $[0, 60 \text{ Hz}]$. Pour améliorer l'estimation dans le voisinage des antirésonances, on peut utiliser l'Eq. (3.78).

5.2 Exploitation des matrices de flexibilité reconstituées dans la formulation de réanalyse (Eq. (3.60))

On note que pour certains éléments la qualité moyenne d'estimation est meilleure dans certains, pour les autres elles sont moyennes soit médiocre dans certains. Mais ce qui est important c'est que pour tous les éléments on obtient des résultats très satisfaisant au voisinage de résonance.

Choix de $p = 8$ points d'excitation sélectionnés, avec un facteur d'amortissement modal $a_i = 0.01$ et on va introduire des modifications dans des éléments choisis où on utilise l'Eq. (3.60).

Les matrices de flexibilité de la S.I ont été estimées par reconstitution directe à partir d'un choix optimal de p excitation, des modifications sont introduites comme il est montré sur la figure 3.9, la matrice de flexibilité de la S.M sont calculée à partir de l'Eq. (3.60).

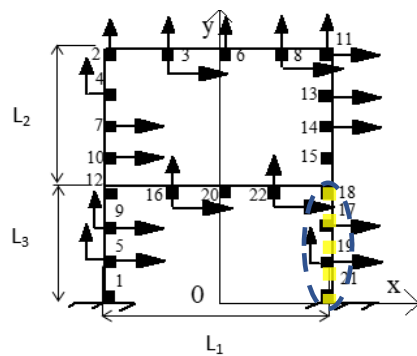
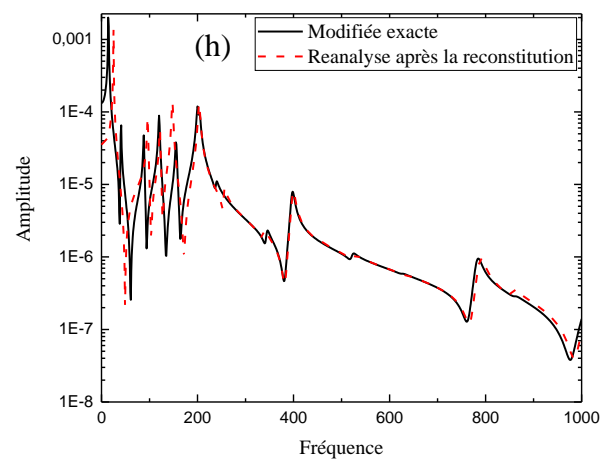
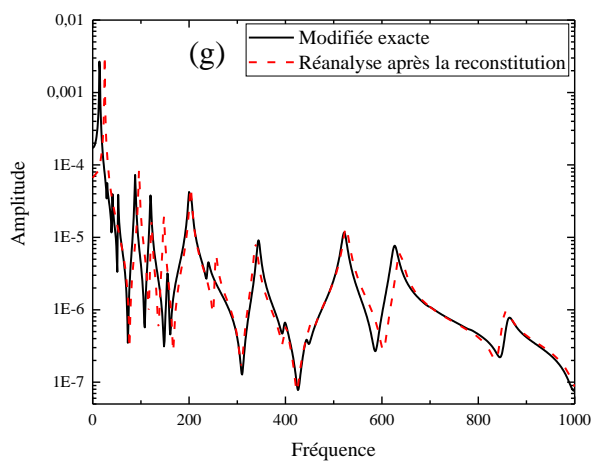
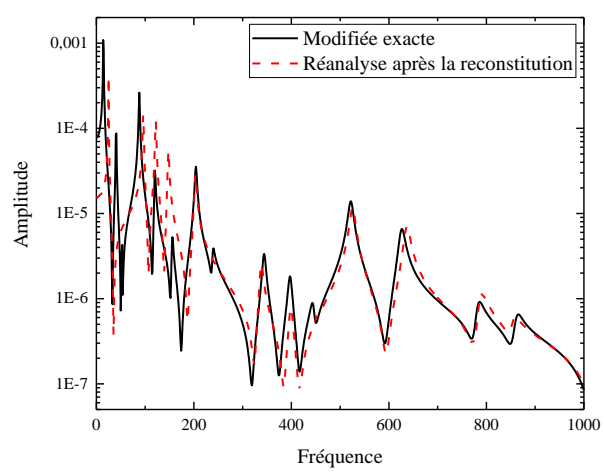
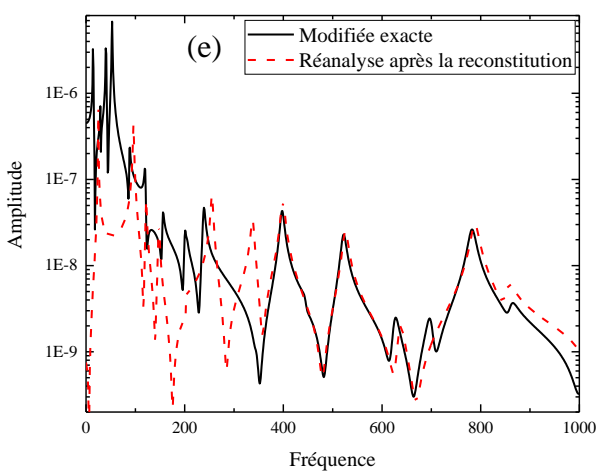


Figure 3. 9 : Portique 2D modifié avec $p=24$ capteurs



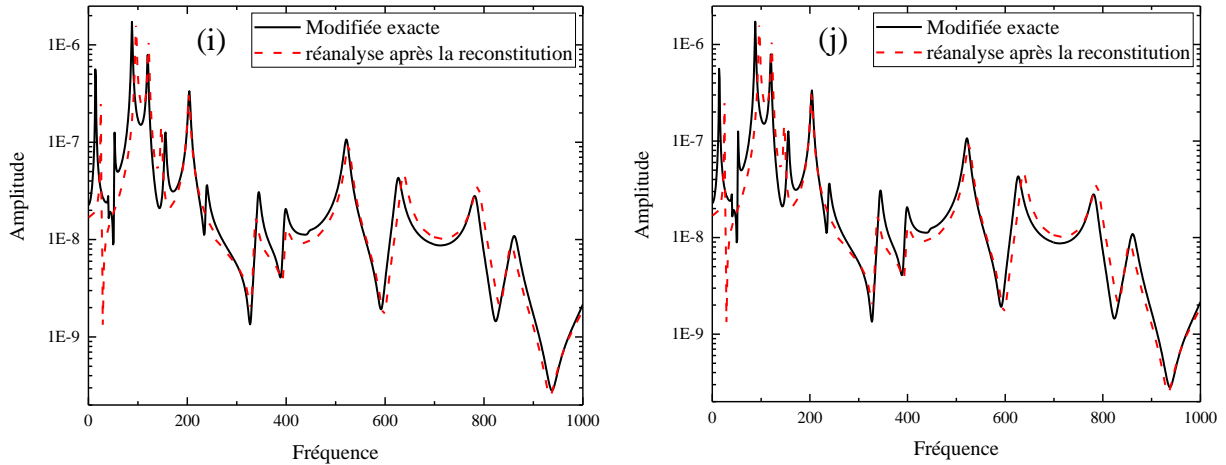


Figure 3. 10: Evaluation de l'amplitude ($P=8$) avec $\alpha_v = 1\%$

On représente les amplitudes de 6 éléments différents de la matrice de flexibilité reconstitué \tilde{H}_{cc} en utilisant l'Eq. (3.60)

6. Conclusion

L'objectif était de résoudre certains problèmes de modification structurale en utilisant les matrices de flexibilité. Pour cela dans la section 3, nous avons présenté une formulation traitant la réanalyse des problèmes de structures modifiées, et discuté du cas où certains ddl peuvent être rigidement connectés au sol. En général, la qualité des réponses en fréquence de la structure modifiée dépend de la qualité d'estimation des matrices de flexibilité de la structure d'origine. Pour ce faire, nous avons proposé, au paragraphe 4.2.2, une méthode, basée sur une décomposition spectrale d'une sous-matrice FRF carrée ; cette procédure peut être associée à la formulation complémentaire exposée dans l'Eq. (3.26) pour améliorer les résultats.

Cette dernière aboutisse à une matrice de flexibilité dynamique, de la S.I, incomplète. Pour compléter cette matrice, pour chaque ω , une reconstitution est proposée au paragraphe 4.

A travers les simulations numériques, nous avons vu que la qualité d'estimation de la matrice FRF $H_{cc}(\omega)$ dépend de plusieurs facteurs. Dans le cas où une dégradation de la qualité de l'estimation est observée, même avec un meilleur choix des positions des excitateurs, une augmentation du nombre d'excitateurs peut corriger ce défaut.

L'augmentation de l'amortissement permet également d'améliorer la qualité de l'estimation et d'atténuer les pics parasites qui apparaissent dans le spectre.

On a montré que l'exploitation des matrices de flexibilités dynamiques reconstitués, de la S.I, dans le problème de réanalyse, donne des résultats très satisfaisantes au voisinage de résonance.

Chapitre 4. Synthèse modale par sous-structuration dynamique

1. Introduction

Dans le processus de conception et de modélisation des grandes structures complexes le calcul par EF est très couteux en temps et en espace mémoire et n'est donc pas adéquat à une modification rapide et à une optimisation structurale [56]–[58]. La méthode de synthèse par sous-structuration apporte une solution à ce type de problème. Elle divise la structure globale en plusieurs sous-structures indépendantes, puis construit la relation de connexion dynamique entre les sous-structures et l'ensemble de la structure selon les conditions de coordination du déplacement et de la force, pour ensuite calculer les caractéristiques dynamiques de chaque sous-structure et enfin déterminer les caractéristiques dynamiques de la structure globale en fonction de la relation de connexion.

Les méthodes traditionnelles de synthèse par sous-structure dynamique utilisent des bases modales tronquées telles que la méthode de synthèse en mode composant à interface fixe, la méthode de synthèse modale à interface couplée et la méthode de synthèse modale à interface mixte présente des erreurs de troncature modale d'ordre supérieur, sont imprécise lors de la synthèse modale. On note également l'existence de certaines lacunes dans la précision et l'efficacité de calcul par sous-structuration. Ces dernières années, plusieurs auteurs, à titre d'exemples en cite [59], [60], se sont intéressés aux problèmes de sous-structuration basées sur les repenses fréquentiels (FRF). Dans le cas où on veut exploiter directement les matrices de flexibilité dynamique issues des mesures, sans passer par l'identification modale, on doit proposer de compléter ces matrices à partir de la méthode de reconstitution directe au chapitre 3.

Dans la plupart des cas, les résultats obtenus par analyse numérique ne sont pas en bon accord avec les résultats expérimentaux. La raison est que les connexions insèrent des incertitudes dans le système et que chaque système séparé peut être décrit de manière adéquate par un modèle numérique. Lorsque l'incertitude sur les résultats expérimentaux est importante, les caractéristiques dynamiques par modèle (E.F) obtenues seront très différentes des résultats issus des mesures.

Ce chapitre vise à améliorer la méthode de sous-structuration pour calculer les solutions propres des structures à grande échelle, en tenant compte des effets de la troncature modale. Dans cette méthode, seules quelques premières solutions propres de chaque sous-structure doivent être

connues. Les solutions propres inconnus des sous-structures sont compensées par une flexibilité résiduelle. L'amélioration de l'efficacité et de la précision du procédé de sous-structuration proposé est illustrée par deux exemples de simulations. Les résultats démontrent que la méthode proposée peut réduire la charge de calcul tout en aboutissant à une bonne précision.

2. Formulations traditionnelles

Pour simplifier l'analyse, on considère tout d'abord les vibrations libres de sous-structures conservative qui ne possèdent pas des modes de corps rigide. On étudie ensuite la formulation dans le cas de l'existence de tels modes.

La synthèse modale est l'une des techniques de sous-structuration la plus couramment utilisée dans la pratique de l'ingénierie. Elle a été proposée par Craig [61], qui a écrit sous une forme plus intuitive des idées publiées précédemment par Hurty [62], connue sous le nom de méthode Craig-Bampton.

Le système d'équations de mouvement discrétisé (E.F) conservatif s'écrit sous la forme :

$$M^{(j)}\ddot{x}^{(j)} + K^{(j)}x^{(j)} = f^{(j)} \quad (4.1)$$

où $M^{(j)}$ et $K^{(j)}$ sont les matrices de masse et de rigidité, respectivement, $u^{(s)}$ est le vecteur de déplacement, $f^{(j)}$ est le vecteur de force et l'exposant j désigne la $j^{\text{ème}}$ sous-structure. Les équations de mouvement de la sous-structure sont divisées en DDL intérieur et interface, en séparant les DDL intérieur " i " et les DDL d'interface " b " les équations de mouvement de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure s'écrite :

$$\begin{bmatrix} M_{ii}^{(j)} & M_{ib}^{(j)} \\ M_{bi}^{(j)} & M_{bb}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_i^{(j)} \\ \dot{x}_b^{(j)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii}^{(j)} & K_{ib}^{(j)} \\ K_{bi}^{(j)} & K_{bb}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i^{(j)} \\ x_b^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_b^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

où les indices b et i sont des indices se référant à la limite et à la composante interne des matrices et des vecteurs.

L'ensemble x des DDL physique peut être exprimé en fonction de coordonnées généralisées z à l'aide de la transformation linéaire :

$$x = \Phi z \quad (4.3)$$

Où Φ est une matrice supposée de rang maximal, contenant les différents types de modes propres des sous structures disjointes : mode de corps rigides, mode à contours communs libres, mode contraints, mode d'attache.

2.1.1 Cas de sous structure sans mode de corps rigide

- Modes normaux

Les modes normaux peuvent être de trois types :

- Modes normaux à interfaces fixes
- Modes normaux à interface libres
- Modes normaux hybrides dépendants de chargements introduits sur les interfaces

Ils sont obtenus en résolvant un problème aux valeurs propres de la forme :

$$\left(K^{(j)} - \omega^{2(j)} M^{(j)} \right) \Phi^{(j)} = 0 \quad (4.4)$$

Et satisfont les relations d'orthonormalité suivantes :

$$\Phi_n^{T(j)} M^{(j)} \Phi_n^{(j)} = I_{nn}^{(j)} \quad (4.5)$$

$$\Phi_n^{T(j)} K^{(j)} \Phi_n^{(j)} = \Lambda_{nn}^{(j)} \quad (4.6)$$

$\Phi_n^{(j)}$ étant la matrice contenant les modes normaux. Lorsque cette base est tronquée à k modes, on la note Φ_k .

- Modes contraints (modes composants (MC))

Les modes composants (MC) des sous-structure, sont formés en calculant la réponse statique associée aux DDL intérieur de la sous-structure lorsqu'un DDL d'interface reçoit un déplacement unitaire et que tous les autres DDL sont maintenus fixes. Les MC définis pour l'ensemble de l'interface sont exprimés comme suit :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(j)} & K_{ib}^{(j)} \\ K_{bi}^{(j)} & K_{bb}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_i^{(j)} \\ I_{bb}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_{bb}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

D'où l'on déduit la matrice de MC

$$\Psi_i^{(j)} = \begin{bmatrix} -K_{ii}^{(j)-1} K_{ib}^{(j)} \\ I_{bb} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

- Modes d'attache

Partageons le vecteur x des DDL physiques en une partie a relative à la définition des modes d'attache et sa partie complémentaire d .

Un mode d'attache est défini statiquement comme la déformée due à une force unité exercée sur un seul DDL contenus dans a . L'ensemble de ces modes d'attache est donc défini par l'équation :

$$\begin{bmatrix} K_{dd}^{(j)} & K_{da}^{(j)} \\ K_{ad}^{(j)} & K_{aa}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{da}^{(j)} \\ \Psi_{aa}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ I_{aa}^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Désignant par $G = K^{-1}$ la matrice de flexibilité statique, la matrice $\Psi_{aa}^{(j)}$ des modes d'attache est donc constituée des colonnes de la matrice de souplesse relatives aux ddl contenus dans a :

$$\Psi_a^{(j)} = \begin{bmatrix} \Psi_{da}^{(j)} \\ \Psi_{aa}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{da}^{(j)} \\ G_{aa}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

2.1.2 Cas de sous structure avec mode de corps rigide

La différence provient de la définition des modes d'attache et de l'introduction des modes de corps rigide

- Modes d'attache

Partageons le vecteur des coordonnées généralisées z en trois parties : r , a et w la partie r est liée statiquement aux modes contraintes provenant des mouvements de corps rigide. La partie a contient l'ensemble des DDL où l'on applique successivement des forces unité pour définir les

modes d'attache. La partie w est la partie complémentaire. Ainsi, les modes d'attache relativement aux modes contraints de r sont définis par :

$$\begin{bmatrix} K_{dd}^{(j)} & K_{da}^{(j)} & K_{dr}^{(j)} \\ K_{ad}^{(j)} & K_{aa}^{(j)} & K_{ar}^{(j)} \\ K_{rd}^{(j)} & K_{ra}^{(j)} & K_{rr}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{da}^{(j)} \\ \Psi_{aa}^{(j)} \\ 0_{ra}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{da}^{(j)} \\ I_{aa}^{(j)} \\ R_{ra}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Les modes d'attache sont donc ici également constitués de colonnes de la matrice de flexibilité

$$\Psi_a^{(j)} = \begin{bmatrix} \Psi_{da}^{(j)} \\ \Psi_{aa}^{(j)} \\ 0_{ra}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{da}^{(j)} \\ G_{aa}^{(j)} \\ 0_{ra}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

où les sous-matrice $G_{da}^{(j)}$ et $G_{aa}^{(j)}$ sont obtenues par inversion de la partie supérieur gauche du découpage en sous-matrice (Eq. 4.11)

- Modes inertiels d'attache

Une autre alternative pour définir les modes d'attache d'une sous-structure possédant des modes de corps rigide est d'exercer numériquement un système de forces $f^{(j)}$ équilibré par la force d'inertie $-M^{(j)}\ddot{x}_r^{(j)}$ où $x_r^{(j)}$ représente le déplacement d'ensemble dû à la force originale $f^{(j)}$ les modes de corps rigide $\psi_r^{(j)}$ vérifiant la relation de norme :

$$\psi_r^{T(j)} M^{(j)} \psi_r^{(j)} = I_{rr}^{(j)} \quad (4.13)$$

Le système de forces équilibrées s'écrit :

$$f_e^{(j)} = f^{(j)} - M^{(j)}\ddot{x}_r^{(j)} = P^{(j)} f^{(j)} \quad (4.14)$$

Où :

$$P^{(j)} = I^{(j)} - M^{(j)} \psi_r^{(j)} \psi_r^{T(j)} \quad (4.16)$$

Ainsi les modes d'attache $\hat{\Psi}_a^{(j)}$ relativement aux contraintes r vérifient :

$$\begin{bmatrix} K_{dd}^{(j)} & K_{da}^{(j)} & K_{dr}^{(j)} \\ K_{ad}^{(j)} & K_{aa}^{(j)} & K_{ar}^{(j)} \\ K_{rd}^{(j)} & K_{ra}^{(j)} & K_{rr}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_{da}^{(j)} \\ \widehat{\Psi}_{aa}^{(j)} \\ 0_{ra}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{dd}^{(j)} & P_{da}^{(j)} & P_{dr}^{(j)} \\ P_{ad}^{(j)} & P_{aa}^{(j)} & P_{ar}^{(j)} \\ P_{rd}^{(j)} & P_{ra}^{(j)} & P_{rr}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{da}^{(j)} \\ I_{aa}^{(j)} \\ 0_{ra}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

En supprimant la contribution des modes rigides à $\widehat{\Psi}_a^{(j)}$ on obtient la formule suivante :

$$\Psi_a^{(j)} = P^{(j)T} \widehat{\Psi}_a^{(j)} = \left(P^{(j)T} G^{(j)} P^{(j)} \right) F_a^{(j)} \quad (4.18)$$

Où \tilde{G} est la matrice de flexibilité relative à d , donnée par :

$$\tilde{G}^{(j)} = \begin{bmatrix} G_{dd}^{(j)} & G_{da}^{(j)} & 0 \\ G_{ad}^{(j)} & G_{aa}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Et

$$F_a^{(j)} = \begin{bmatrix} 0_{da}^{(j)} \\ I_{aa}^{(j)} \\ 0_{ra}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Dans l'expression (4.18) intervient la matrice de flexibilité élastique :

$$G_e^{(j)} = \left(P^{(j)T} G^{(j)} P^{(j)} \right) \quad (4.21)$$

Cette matrice $G_e^{(j)}$ peut également être exprimée à partir de :

$$G_e^{(j)} = \Phi_e^{(j)} \Lambda_{ee}^{-1(j)} \Phi_e^{T(j)} \quad (4.22)$$

Où $\Phi_e^{(j)}$ sont les modes élastiques orthonormés.

- Flexibilité résiduelle (modes résiduels des sous-structures)

En considérant l'équation du mouvement de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure :

$$M^{(j)} \ddot{\chi}^{(j)} + K^{(j)} \chi^{(j)} = f_{ext}^{(j)} + f_{con}^{(j)} \quad (4.23)$$

Chaque sous-structure peut être considérée comme étant excitée par les forces de connexion d'interface f_{con} et les forces externes f_{ext} . Cela indique que $x^{(j)}$ les déplacements de chaque sous-structure peuvent être exprimés en termes de solutions statiques locales $x_{stat}^{(j)}$ et en termes de modes propres associés à l'ensemble des matrices de chaque sous-structure $K^{(j)}$ et $M^{(j)}$:

$$x^{(j)} = x_{stat}^{(j)} + \sum_{i=1}^{n^{(j)}-n_r^{(j)}} \Phi_i^{(j)} \eta_i^{(j)} \quad (4.24)$$

où $n^{(j)}$ et $n_r^{(j)}$ sont respectivement le nombre des DDL et les modes de corps rigides de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure. Le problème aux valeurs propres de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure est donné comme suit :

$$\left(K^{(j)} - \omega_i^2 M^{(j)} \right) \Phi_i^{(j)} = 0 \quad (4.25)$$

La solution statique s'écrit comme suit (en supposant qu'aucune force extérieure n'est appliquée) :

$$x_{stat}^{(s)} = -K^{(j)+} f_{con}^{(j)} + \sum_{i=1}^{n_r^{(j)}} \psi_{r_i}^{(j)} \alpha_i^{(j)} \quad (4.26)$$

La solution statique résulte de la résolution de l'Eq. (4.23) en supposant qu'il n'y a pas de forces d'inertie ni de forces externes agissant sur la sous-structure. La notation $K^{(j)+}$ représente l'inverse de la matrice $K^{(j)}$ lorsqu'il existe suffisamment de conditions aux limites pour empêcher la sous-structure à interface libre de flotter [63]. Si une sous-structure présente des modes de corps rigides (flottante), $K^{(j)+}$ représente le pseudo inverse de $K^{(j)}$ et $\psi_{r_i}^{(j)}$ sont les modes de corps rigide de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure [64] pour calculer l'inverse des modes de corps rigide. Si un nombre limité de modes d'interface libre est utilisé pour la sous-structure Eq. (4.24), Eq. (4.26) donnent une approximation comme suit :

$$x^{(j)} \approx -K^{(j)+} C^{(j)T} \{g\}^{(j)} + R^{(j)} \alpha^{(j)} + \Theta^{(j)} \eta^{(j)} \quad (4.27)$$

Le vecteur $\alpha^{(j)}$ contient les amplitudes des modes du corps rigide et le vecteur $\eta^{(j)}$ contient les amplitudes des modes propres des interfaces libres locales $n_\theta^{(j)}$ retenues. Les matrices $R^{(j)}$ et $\Theta^{(j)}$ contiennent les modes des corps rigides et les modes propres retenus.

Comme une partie du sous-espace couvert par $\Theta^{(j)}$ est déjà incluse dans $K^{(j)+}$, la matrice de flexibilité résiduelle $G_r^{(j)}$ peut être utilisée au lieu de $K^{(j)+}$, elle est définie par :

$$G_r^{(j)} = \sum_{i=n_\theta^{(j)}+1}^{n^{(j)}-n_r^{(j)}} \frac{\Phi_i^{(j)} \Phi_i^{(j)T}}{\omega_i^{(j)2}} = K^{(j)+} - \sum_{i=1}^{n_\theta^{(j)}} \frac{\Phi_i^{(j)} \Phi_i^{(j)T}}{\omega_i^{(j)2}} \quad (4.28)$$

On notera que, par construction, $G_r^{(j)} = G_r^{(j)T}$, qui est calculé en utilisant la deuxième égalité en Eq. (4.28). Pour d'autres propriétés de $G_r^{(j)}$, [63] l'approximation d'une sous-structure s'écrit :

$$x^{(j)} \approx \begin{bmatrix} R^{(j)} & \Theta^{(j)} & G_r^{(j)} A^{(j)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{(j)} \\ \eta^{(j)} \\ g_b^{(j)} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$G_r^{(j)} A^{(j)T}$ est la matrice contenant les modes d'attaches de flexibilité résiduelle de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure, puisque la matrice booléenne de localisation $A^{(j)T}$ choisit simplement les colonnes de $G_r^{(j)}$ associées aux DDL d'interface. En d'autres termes :

$$A^{(j)T} g_b^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_b^{(j)} \end{bmatrix} = f_{con}^{(j)} = C^{(j)T} \{g\}^{(j)} \quad (4.30)$$

C est une matrice de sélection des DDL de jonction, et $\{g\}$ force de jonction.

On pose :

$$T_1^{(j)} = \begin{bmatrix} R^{(j)} & \Theta^{(j)} & G_r^{(j)} A^{(j)T} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

L'approximation (4.29) peut maintenant être utilisée pour réduire les DDL de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure. En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes dans l'Eq. (4.29), l'équation de mouvement d'une sous-structure devient

$$M_{libre}^{(j)} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}^{(j)} \\ \ddot{\eta}^{(j)} \\ \ddot{g}^{(j)} \end{bmatrix} + K_{libre}^{(j)} \begin{bmatrix} \alpha^{(j)} \\ \eta^{(j)} \\ g^{(j)} \end{bmatrix} = T_1^{(j)T} (f_{ext}^{(j)} + f_{con}^{(j)}) \quad (4.32)$$

avec les matrices

$$K_{libre}^{(j)} = T_1^{(j)T} K^{(j)} T_1^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^{(j)2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{r,bb}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

où :

$$G_{r,bb}^{(j)} = A^{(j)} G_r^{(j)} A^{(j)T} \quad (4.34)$$

Et

$$M_{libre}^{(j)} = T_1^{(j)T} M^{(j)} T_1^{(j)} = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & M_{r,bb}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

où :

$$M_{r,bb}^{(j)} = A^{(j)} G_r^{(j)} M^{(j)} G_r^{(j)} A^{(j)T} \quad (4.36)$$

$G_{r,bb}^{(j)}$ est la flexibilité résiduelle et $M_{r,bb}^{(j)}$ est l'inertie d'interface associée à la flexibilité résiduelle liée aux DDL d'interface, et $\Omega^{(j)}$ étant une matrice diagonale contenant les $n_\theta^{(j)}$ valeurs propres retenues $\omega_j^{(j)}$

3. Méthode de sous-structure

3.1 Modélisation par discrétisation de la structure global

Pour une structure globale avec N DDL, sa matrice de rigidité et sa matrice de masse seront d'ordre $N \times N$. L'application de la méthode de sous-structure exige d'abord que la structure globale soit divisée en N_s sous-structures indépendantes [65], et chaque sous-structure a $n^{(j)}$ DDLs ($j = 1, 2, \dots, N_s$). Le nombre total de DDL de toutes les sous-structures sera étendu à N_p , qui est plus grand que N .

$$N_p = \sum_{j=1}^{N_s} n^{(j)} \quad (4.37)$$

Chaque sous-structure est caractérisée par ses matrices de rigidité $\mathbf{K}^{(j)}$ et de masse $\mathbf{M}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, N_s$). L'équation du mouvement en régime libre de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure s'écrit :

$$\mathbf{K}^{(j)} \{\phi_i^{(j)}\} = \lambda_i^{(j)} \mathbf{M}^{(j)} \{\phi_i^{(j)}\} \quad (4.38)$$

$\mathbf{K}^{(j)}$ et $\mathbf{M}^{(j)}$ sont d'ordre $n^{(j)} \times n^{(j)}$.

$\lambda_i^{(j)}$ et $\{\phi_i^{(j)}\}$ sont respectivement les $i^{\text{ème}}$ valeur propre et vecteur propre de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure. Eq. (4.38) donne n_j valeurs propres $\Lambda^{(j)} = \text{Diag}[\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \lambda_3^{(j)}, \dots, \lambda_{n^{(j)}}^{(j)}]$, et les vecteurs propres correspondants $\Phi^{(j)} = [\phi_1^{(j)}, \phi_2^{(j)}, \phi_3^{(j)}, \dots, \phi_{n_j}^{(j)}]$.

Avec la normalisation à la masse, on a :

$$\begin{cases} [\Phi^{(j)}]^T \mathbf{M}^{(j)} \Phi^{(j)} = I_{n^{(j)}} \\ [\Phi^{(j)}]^T \mathbf{K}^{(j)} \Phi^{(j)} = \Lambda^{(j)} \end{cases} \quad (4.39)$$

Les matrices modales, spectrales, raideurs et masse des sous-structures sont regroupées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{M}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{M}^{(N_s)} \end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{K}^{(N_s)} \end{bmatrix} \\ \widehat{\Phi} &= \begin{bmatrix} \Phi^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Phi^{(N_s)} \end{bmatrix}, \widehat{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Lambda^{(N_s)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Par conséquent les relations d'orthogonalité, se regroupe comme suit :

$$\begin{cases} [\widehat{\Phi}]^T \widehat{\mathbf{M}} \widehat{\Phi} = I_{N_p} \\ [\widehat{\Phi}]^T \widehat{\mathbf{K}} \widehat{\Phi} = \widehat{\Lambda} \end{cases} \quad (4.41)$$

La reconnexion du système initial peut être effectuée en tenant compte de la compatibilité géométrique et de l'équilibre des forces aux points de jonction entre les sous-structures. On note $\{x\}_{N \times 1}$ le vecteur déplacement de la structure globale d'origine, il peut être étendu au vecteur $\{\hat{x}\}_{N_p \times 1}$ après la sous-structuration.

$$\{\hat{x}\}_{N_P \times 1} = \begin{Bmatrix} \hat{x}_i^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{x}_i^{(N_P)} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

La continuité des déplacements aux points de jonction s'exprime par la relation suivante :

$$C\{\hat{x}\} = 0 \quad (4.43)$$

C est une matrice rectangulaire qui contient des contraintes implicites générales pour assurer la continuité de déplacement en chaque nœud de l'interface.

L'ensemble des équations d'équilibres des sous-structures est regroupé sous la forme :

$$\widehat{M}\{\ddot{\hat{x}}\} + \widehat{K}\{\hat{x}\} = F_{ext} + F_{con} \quad (4.44)$$

3.1.1 Equilibre des interfaces

L'équilibre de l'interface exige que les forces d'interface, $f_{con}^{(j)}$, qui sont des forces internes entre les sous-structures, s'additionnent à zéro lorsqu'elles sont assemblées. Ceci n'est qu'une manifestation du principe "action-réaction" de Newton. En considérant, par exemple, une interface $\Gamma^{(12)}$ entre deux sous-structures 1 et 2, on pourrait exprimer cette condition comme

$$f_{con_b}^{(1)} + f_{con_b}^{(2)} = 0 \text{ on } \Gamma^{(12)} \quad (4.45)$$

$$f_{con_i}^{(1)} = 0, f_{con_i}^{(2)} = 0 \quad (4.46)$$

où l'indice b indique les DDL associés à l'interface entre les deux sous-structures. L'indice i indique les DDL internes. Dans le cas d'un DDL interne, aucune force de connexion ne doit exister.

3.1.2 Compatibilité des interfaces

La deuxième condition à remplir sur l'interface est que les DDL appartenant à un nœud structural quelconque aient la même réponse des deux côtés d'interface, ou en d'autres termes que les DDL soient compatibles sur l'interface. Si on considère les DDL des deux sous-structures 1 et 2 couplées sur l'interface $\Gamma^{(12)}$, la condition de compatibilité devient

$$\hat{x}_b^{(1)} - \hat{x}_b^{(2)} = 0 \text{ on } \Gamma^{(12)} \quad (4.47)$$

comme précédemment, l'indice b indique la continuité des DDL d'interface.

3.1.3 Formulations d'assemblage

Pour un système en vibration libre, force d'excitation externe $F_{ext} = 0$, le travail virtuel effectué par les forces de connexion F_{con} suivant $\{\hat{x}\}$, est :

$$\delta W = F_{con}^T \{\delta \hat{x}\} \quad (4.48)$$

On montre [66] que :

$$F_{con} = C^T \{g\} \quad (4.49)$$

Par conséquent, l'Eq. (4.44) peut être transformée en

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\ddot{x}} \\ \hat{\ddot{g}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{K} & -C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{x} \\ g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

Après le passage au domaine fréquentiel, la projection des vecteurs déplacements associés aux DDL des sous-structures dans leurs bases modales respectives conduit à l'expression suivante :

$\hat{x} = \hat{\Phi} z$, z étant le vecteur des coordonnées généralisées.

Pour introduire les forces de liaison aux jonctions on transforme l'écriture précédente sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \hat{x} \\ g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ g \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

En exploitant l'Eq. (4.51) et les relations d'orthonormalité Eq. (4.41), l'Eq. (4.50) peut être transformée sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{\Lambda} - \hat{\lambda}I & -(C\hat{\Phi})^T \\ -(C\hat{\Phi}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

Où $(C\hat{\Phi})^T$ est appelée matrice de connexion normale. Avec la procédure décrite ci-dessus, les nœuds aux points de jonction des structures adjacentes sont contraints de se déplacer

conjointement. Les simulations numériques montrent que, les valeurs propres $\hat{\lambda}$ obtenus à partir de l'Eq. (4.49) sont très proches des valeurs propres de référence associées aux valeurs propres de la structure d'origine.

La contribution des modes de vibrations inconnus, extérieurs de la bande fréquentielle identifiée, est introduite à l'aide de la matrice $\hat{\mathbf{R}}$.

$(C\hat{\Phi})^T$ est d'ordre $N_p \times (N_p - N)$, où $(N_p - N)$ est le nombre de relations de contrainte. De l'Eq. (4.52) on déduit la relation suivante :

$$\hat{\mathbf{R}}g = 0 \quad (4.53)$$

avec $\hat{\mathbf{R}} = (C\hat{\Phi})(\hat{\Lambda} - \bar{\lambda}I)^{-1}(C\hat{\Phi})^T$

La matrice $\hat{\mathbf{R}}$, de taille $(N_p - N) \times (N_p - N)$ contient la matrice résiduelle.

La résolution de l'Eq. (4.52) prend beaucoup de temps puisque $\hat{\mathbf{R}}$ dépend de l'inconnu $\hat{\lambda}$. Des approches numériques sont appliquées (méthode Lanczos (ANNEXE D)) [67] pour estimer, avec une bonne précision, les solutions. Néanmoins, il est coûteux de calculer les solutions propres complètes de chaque sous-structure pour assembler $\hat{\Lambda}$ et $\hat{\Phi}$. La recherche des N_p solutions propres à partir de l'Eq. (4.52), devient impraticable pour des structures de grande taille.

Pour surmonter ces difficultés, on présente dans ce chapitre la technique de troncature modale pour optimiser les calculs dans les problèmes de sous-structuration tout en obtenant une bonne précision sur les solutions.

3.1.4 Estimation des solutions après séparation entre les modes connus et les modes inconnus

Dans chaque sous-structure, seuls les premiers modes sont connus (faible fréquence) ; l'effets des modes supérieures seront introduits sous formes résiduelles.

En note que les $m^{(j)}$ le nombre des modes connus ($j = 1, 2, \dots, N_s$) de la $j^{\text{ème}}$ sous-structure et $s^{(j)} = n^{(j)} - m^{(j)}$ le nombre des modes inconnus :

$$\Lambda_m^{(j)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(j)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{m^{(j)}}^{(j)} \end{bmatrix}, \Phi_m^{(j)} = [\varphi_1^{(j)}, \dots, \varphi_{m^{(j)}}^{(j)}] \quad (4.54)$$

$$\Lambda_s^{(j)} = \begin{bmatrix} \lambda_{m^{(j)+1}}^{(j)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{m^{(j)+s^{(j)}}}^{(j)} \end{bmatrix}, \Phi_s^{(j)} = [\varphi_{m^{(j)+1}}^{(j)}, \dots, \varphi_{m^{(j)+s^{(j)}}}^{(j)}]$$

En regroupant tous les couples propres sous la forme :

$$\hat{\Lambda}_m = \begin{bmatrix} \Lambda_m^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Lambda_m^{(N_s)} \end{bmatrix}, \hat{\Phi}_m = \begin{bmatrix} \Phi_m^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Phi_m^{(N_s)} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$\hat{\Lambda}_s = \begin{bmatrix} \Lambda_s^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Lambda_s^{(N_s)} \end{bmatrix}, \hat{\Phi}_s = \begin{bmatrix} \Phi_s^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Phi_s^{(N_s)} \end{bmatrix}$$

En exploitant l'Eq. (4.55), l'Eq. (4.52) se transforme comme suit :

$$\begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_m - \hat{\lambda}I & 0 & -[C\hat{\Phi}_m]^T \\ 0 & \hat{\Lambda}_s - \hat{\lambda}I & -[C\hat{\Phi}_s]^T \\ -[C\hat{\Phi}_m] & -[C\hat{\Phi}_s] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_m \\ z_s \\ g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

En déduit de l'Eq. (4.56) l'expression de z_s :

$$z_s = (\hat{\Lambda}_s - \hat{\lambda}I)^{-1} [C\hat{\Phi}_s]^T g \quad (4.57)$$

La substitution d'Eq. (4.57) dans l'Eq. (4.56) donne :

$$\begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_m - \hat{\lambda}I & -[C\hat{\Phi}_s]^T \\ -[C\hat{\Phi}_s] & -[C\hat{\Phi}_s](\hat{\Lambda}_s - \hat{\lambda}I)^{-1}[C\hat{\Phi}_s]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_m \\ g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

On considère le développement de Taylor suivant :

$$(\hat{\Lambda}_s - \hat{\lambda}I)^{-1} = (\hat{\Lambda}_s)^{-1} + \hat{\lambda}(\hat{\Lambda}_s)^{-2} + \hat{\lambda}^2(\hat{\Lambda}_s)^{-3} + \dots \quad (4.59)$$

3.1.4.1 Estimation à partir du premier terme du développement (4.59)

En général, la matrice $\hat{\Lambda}_s$ contient les valeurs propres les plus grandes, donc les éléments de son inverse serrant faible.

Dans un premier temps on se contente d'approximer de la matrice $(\hat{\Lambda}_s - \hat{\lambda}I)^{-1}$ par $(\hat{\Lambda}_s)^{-1}$. Dans ce cas l'Eq (4.58) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_m - \bar{\lambda}I & -[C\hat{\Phi}_m]^T \\ -[C\hat{\Phi}_m] & -[C\hat{\Phi}_s](\hat{\Lambda}_s)^{-1}[C\hat{\Phi}_s]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_m \\ g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

La résolution de g à partir de la deuxième équation de l'Eq. (4.60) et son remplacement dans la première équation, permet d'obtenir la formulation suivante :

$$\left[\hat{\Lambda}_m + [C\hat{\Phi}_m]^T \left([C\hat{\Phi}_s](\hat{\Lambda}_s)^{-1}[C\hat{\Phi}_s]^T \right)^{-1} [C\hat{\Phi}_m] \right] z_m = \hat{\lambda}z_m \quad (4.61)$$

Alors la forme standard finale de l'équation peut être exprimée par le problème aux valeurs propres :

$$(A - \hat{\lambda}I)z_m = 0 \quad (4.62)$$

Où $A = \hat{\Lambda}_m + [C\hat{\Phi}_m]^T \left([C\hat{\Phi}_s](\hat{\Lambda}_s)^{-1}[C\hat{\Phi}_s]^T \right)^{-1} [C\hat{\Phi}_m]$,

$\hat{\Phi}_s(\hat{\Lambda}_s)^{-1}[\hat{\Phi}_s]^T$ est considérée comme la flexibilité résiduelle de premier ordre. La transformation détaillée concernant la flexibilité résiduelle de premier ordre. La flexibilité résiduelle de premier ordre associé à la $j^{ème}$ sous-structure sera déterminer à partir de la relation ci-dessous :

$$\Phi_s^{(j)} \left(\Lambda_s^{(j)} \right)^{-1} [\Phi_s^{(j)}]^T = (K^{(j)})^{-1} - \Phi_m^{(j)} \left(\Lambda_m^{(j)} \right)^{-1} [\Phi_m^{(j)}]^T \quad (4.63)$$

Par la suite l'Eq. (4.62) peut être évaluée avec la méthode standard d' itération de sous-espace ou de Lanczos. Les vecteurs propres z de cette équation sont basés sur les coordonnées modales. Les vecteurs propres étendus de la structure globale dans les coordonnées physiques peuvent être récupérés par :

$$\tilde{\Phi} = \hat{\Phi}_m z_m \quad (4.64)$$

Dans cette section, les modes supérieurs des sous-structures sont compensés par la flexibilité résiduelle du premier ordre, qui est intitulée méthode de sous-structuration basée sur la flexibilité résiduelle du premier ordre. La matrice A pour les solutions propres est réduite à la taille de $\hat{m} \times \hat{m}$, qui est bien inférieure à celle d'origine ($N_p \times N_p$). Dans la méthode présentée, seul le premier élément de l'expansion de Taylor est conservé. Théoriquement, cette simplification n'est précise qu'à fréquence dans une base réduite. L'approximation est satisfaite lorsque les valeurs propres estimées $\hat{\lambda}$ sont bien inférieurs à la valeur minimale $\hat{\lambda}_s$. Par conséquent, si une précision de calcul plus élevée est requise, le deuxième élément de l'expansion de Taylor (Eq. (4.59)) doit être conservé.

Pour améliorer encore mieux la précision des résultats on peut prendre les deux premiers termes de l'Eq. (4.59)

3.1.4.2 Estimation à partir des deux premiers termes du développement (4.59)

Si seuls les deux premiers termes de l'expansion de Taylor Eq. (4.59) sont conservés, l'Eq. (4.58) devient

$$\begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_m - \hat{\lambda}I & -[C\hat{\Phi}_s]^T \\ -[C\hat{\Phi}_s] & -([C\hat{\Phi}_s](\hat{\Lambda}_s)^{-1}[C\hat{\Phi}_s]^T + \hat{\lambda}[C\hat{\Phi}_s](\hat{\Lambda}_s)^{-2}[C\hat{\Phi}_s]^T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_m \\ g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.65)$$

Cette équation peut être reformulée sous la forme ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_m & -\Gamma_m \\ -[C\hat{\Phi}_m] & -[C\hat{\Phi}_s](\hat{\Lambda}_s)^{-2}[C\hat{\Phi}_s]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_m \\ \tau \end{Bmatrix} = \hat{\lambda} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & [C\hat{\Phi}_s](\hat{\Lambda}_s)^{-2}[C\hat{\Phi}_s]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_m \\ g \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

$\hat{\Phi}_s(\hat{\Lambda}_s)^{-2}[\hat{\Phi}_s]^T$ est appelé flexibilité résiduelle du deuxième-ordre. La formation de la flexibilité résiduelle de deuxième ordre. Avec la même procédure décrite dans la section précédente, la forme primitive de la flexibilité résiduelle de deuxième ordre peut également obtenue par l'assemblage en diagonale de la flexibilité résiduelle de second ordre des sous-structures comme

Par rapport à la procédure introduite précédemment, cette méthode de sous-structuration basée sur la flexibilité résiduelle du second ordre permettra d'obtenir des résultats beaucoup plus précis

puisqu'elle inclut le deuxième terme dans l'expansion de Taylor. Cependant, cette haute précision est obtenue au prix des charges suivantes :

- La deuxième formulation nécessite un temps (CPU) supplémentaire pour calculer la flexibilité résiduelle $\hat{\Phi}_s(\hat{\Lambda}_s)^{-2}[\hat{\Phi}_s]^T$;
- Et la taille du problème aux valeurs propres (Eq. (4.68)), est plus grande que celle de la méthode de premier ordre.

3.1.5 Exemple

La méthode de sous-structuration traitée est appliquée à un pont 2D comme le montre la Fig. (4.1), le modèle comprend 745 nœuds, 852 éléments et 2211 DDL, les longueurs sont les suivantes :

$$L_1 = 56m ; L_2 = 12m ; L_3 = 10m ; L_4 = 3m ; L_5 = 2m \text{ et } L_6 = 2m$$

$$\text{module d'Young: } E = 2.1 \cdot 10^{11} N/m^2$$

$$\text{Section droite : } A = 0.5 \cdot 10^{-3} m^2$$

$$\text{Masse volumique : } \rho = 7800 kg/m^3$$

$$\text{Moment d'inertie quadratique : } I = 0.417 \cdot 10^{-08} m^4$$

$$\text{Et coefficient de poisson } \nu = 0.3$$

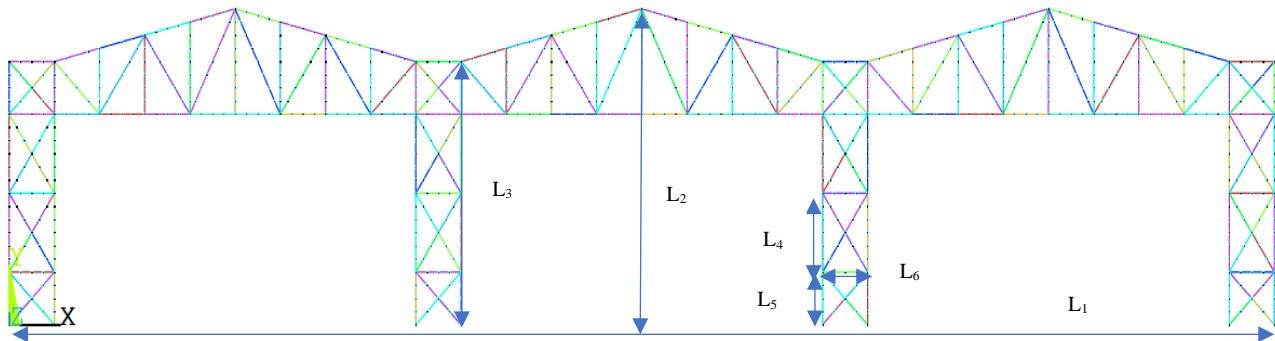


Figure 4. 1:Modèle EF d'un pont (2D)

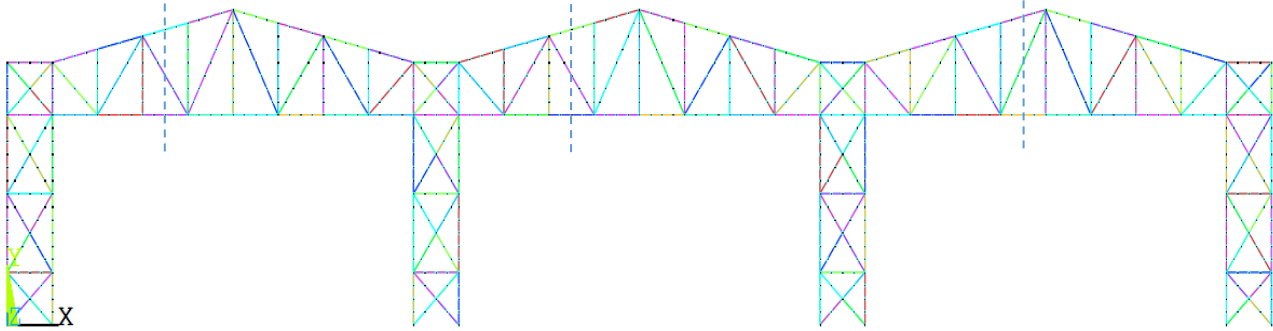


Figure 4. 2: discrétisation du modèle

La structure globale est partitionnée en quatre sous-structures (Fig. 4.2), Après la discrétisation des quatre sous-structures on a respectivement :

Sous-structure 1 ($SS^{(1)} = 360$ DDL, $SS^{(2)} = 666$ DDL, $SS^{(3)} = 726$ DDL, $SS^{(4)} = 486$ DDL.

Pour évaluer la précision de la méthode de sous-structuration, la méthode des éléments finis effectuée sur le modèle global est également utilisée pour calculer les solutions propres, ces dernières sont considérées comme des résultats exacts. Dans la méthode globale traditionnelle, les solutions propres de la structure globale sont calculées à l'aide de la méthode de Lanczos.

Tableau 4. 1: Fréquences propres de référence pour chaque sous-structure, fréquences propres de la structure globale de référence et estimées avec et sans termes résiduelles (avec 20 modes).

Modes	Fréquence $SS^{(1)}$	Fréquence $SS^{(2)}$	Fréquence $SS^{(3)}$	Fréquence $SS^{(4)}$	Fréquence BLOCK LANCZOS	Fréquence $R1 = 0 ; R2 = 0$	Fréquence $R1 \neq 0 ; R2 = 0$	Fréquence $R1 \neq 0 ; R2 \neq 0$
1	1.9555	1.7856	1.3555	1.3037	2.1425	2.2038	2.1425	2.1425
2	3.4937	1.9553	1.7855	2.2875	2.1454	2.2185	2.1459	2.1455
3	3.9499	2.1947	2.1943	2.5609	2.1458	2.2862	2.1487	2.1458
4	4.6563	2.5389	2.5383	3.2413	2.4539	2.5028	2.4543	2.4539
5	4.892	2.824	2.8233	3.5126	2.4539	2.532	2.4544	2.4539
6	5.4591	3.2202	3.0641	3.8514	2.4539	2.8142	2.4618	2.4543
7	5.4891	3.2668	3.1744	4.6525	2.7887	2.8199	2.7892	2.7887
8	5.6055	3.4822	3.239	4.7035	2.7887	2.8233	2.7893	2.7887
9	5.9307	3.5231	3.2668	4.8905	2.7887	3.2639	2.7901	2.7888
10	6.4788	3.8399	3.523	5.2062	3.2501	3.3074	3.2523	3.2503
11	7.0739	3.9494	3.7459	5.4516	3.2622	3.3453	3.263	3.2624
12	8.8293	4.5795	3.8499	5.4709	3.2622	3.4009	3.2637	3.2633
13	8.9572	4.6717	4.4524	5.62	3.2632	3.5089	3.2641	3.2634
14	9.2628	4.8651	4.6645	5.875	3.2635	3.5243	3.2696	3.2636
15	9.6217	4.9479	4.7217	6.1622	3.2636	3.5421	3.2757	3.2642
16	9.7924	5.4799	4.8457	6.5213	3.4991	3.5687	3.5007	3.4992
17	10.321	5.4954	4.9269	7.1418	3.5012	3.6001	3.5028	3.5014
18	10.441	5.5836	5.4804	8.3685	3.5014	3.7003	3.5035	3.5016
19	10.777	5.5999	5.4909	8.8286	3.543	3.7929	3.5446	3.5431
20	10.967	5.7333	5.5364	8.9483	3.543	3.8749	3.5452	3.5432
CPU	0.6881 s	2.9746 s	3.7128 s	1.0701 s		2.3728 s	2.3879 s	2.4057 s
CPU (sec)					30.016	10.8184	10.8335	10.8513

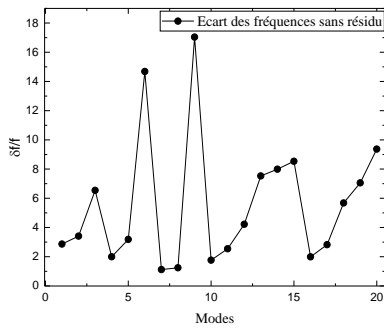


Figure 4. 3: Ecart des fréquences sans résidus (20 modes)

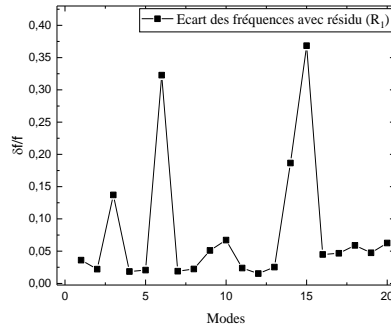


Figure 4. 4: Ecart des fréquences avec résidu R_1 (20 modes)

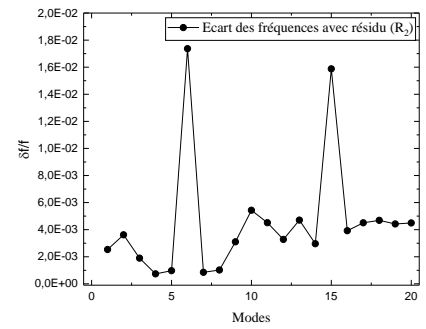


Figure 4. 5: Ecart des fréquences avec résidus R_1 et R_2 (20 modes)

Tableau 4. 2 : Fréquences propres de référence pour chaque sous-structure, fréquences propres de la structure globale de référence et estimées avec et sans termes résiduelles (avec 40 modes)

Modes	Fréquence $SS^{(1)}$	Fréquence $SS^{(2)}$	Fréquence $SS^{(3)}$	Fréquence $SS^{(4)}$	Fréquence BLOCK LANCZOS	Fréquence $R1 = 0 ; R2 = 0$	Fréquence $R1 \neq 0 ; R2 = 0$	Fréquence $R1 \neq 0 ; R2 \neq 0$
1	1.9555	1.7856	1.3555	1.3037	2.1425	2.1599	2.1426	2.1425
2	3.4937	1.9553	1.7855	2.2875	2.1454	2.1649	2.1456	2.1454
3	3.9499	2.1947	2.1943	2.5609	2.1458	2.2612	2.1459	2.1458
4	4.6563	2.5389	2.5383	3.2413	2.4539	2.4773	2.4541	2.4539
5	4.892	2.824	2.8233	3.5126	2.4539	2.4798	2.4542	2.4539
6	5.4591	3.2202	3.0641	3.8514	2.4539	2.7498	2.4544	2.4539
7	5.4891	3.2668	3.1744	4.6525	2.7887	2.8081	2.7888	2.7887
8	5.6055	3.4822	3.239	4.7035	2.7887	2.81	2.7889	2.7887
9	5.9307	3.5231	3.2668	4.8905	2.7887	2.9381	2.7891	2.7887
10	6.4788	3.8399	3.523	5.2062	3.2501	3.2622	3.2517	3.2502
11	7.0739	3.9494	3.7459	5.4516	3.2622	3.2663	3.2628	3.2623
12	8.8293	4.5795	3.8499	5.4709	3.2622	3.2717	3.2634	3.2632
13	8.9572	4.6717	4.4524	5.62	3.2632	3.3148	3.2637	3.2633
14	9.2628	4.8651	4.6645	5.875	3.2635	3.4561	3.2659	3.2635
15	9.6217	4.9479	4.7217	6.1622	3.2636	3.5173	3.2721	3.2639
16	9.7924	5.4799	4.8457	6.5213	3.4991	3.5189	3.4996	3.4991
17	10.321	5.4954	4.9269	7.1418	3.5012	3.5231	3.5017	3.5012
18	10.441	5.5836	5.4804	8.3685	3.5014	3.5663	3.5024	3.5014
19	10.777	5.5999	5.4909	8.8286	3.543	3.649	3.5432	3.543
20	10.967	5.7333	5.5364	8.9483	3.543	3.6605	3.5441	3.543
CPU	0.6881 s	2.9746 s	3.7128 s	1.0701 s		2.3994 s	2.5126 s	2.6111 s
CPU (sec)					30.016	10.845	10.9582	11.0567

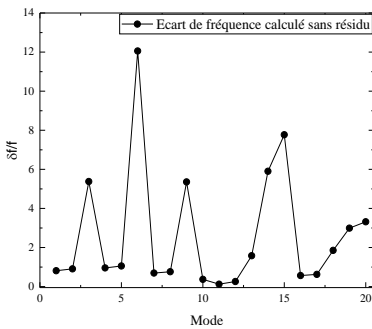


Figure 4. 6: Ecart des fréquences sans résidus (40 modes)

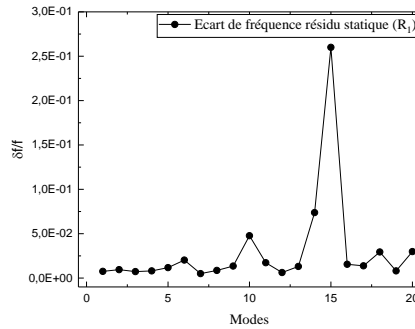


Figure 4. 7: Ecart des fréquences avec résidu R_1 (40 modes)

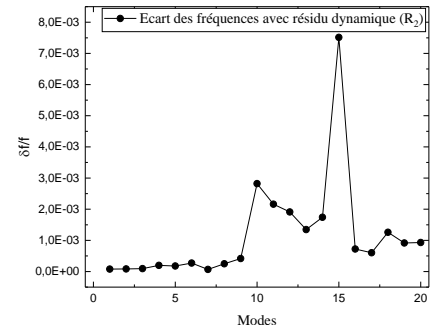


Figure 4. 8: Ecart des fréquences avec résidus R_1 et R_2 (40 modes)

Sur le tableau 4.1 et le tableau 4.2 on présente les fréquences de référence des quatre sous-structures, les fréquences de référence de la structure globale en utilisant l'algorithme de BLOCK LANCZOS, ainsi que les fréquences propres estimées à partir de la formulation de sous-structuration présenté précédemment, avec et sans des termes résiduels, on remarque que l'introduction de terme résiduel R_1 améliore la qualité des résultats par rapport au cas sans terme résiduel ($R_1 = 0$; $R_2 = 0$) ; la précision s'améliore encore lorsqu'on introduit les deux termes résiduels R_1 et R_2 ; on note que les sous bases modales tronqués considéré contient les 20 premiers modes. Il est logique l'augmentation des modes de les sous-bases tronqués améliore la qualité des résultats, comme on voit sur le tableau 4.2 et les figures (4.7 et 4.8).

3.2 Méthode de sous-structuration exploitant des données issues des mesures

Dans la sous-structuration expérimentales, la dynamique des (certaines) sous-structures est obtenue par des mesures [68]. On mesure généralement un composant à interface libre [69]–[72] tout en appliquant des excitations et en mesurant la réponse dynamique, généralement ces matrices sont incomplets, on propose d les complétées on utilisant la technique de reconstitution.

Pour reconstituer les matrices de flexibilité (Présentés dans le chapitre 3), on procède à une technique de reconstitution, des sous-structures.

3.2.1 Domaine Fréquentielle réduit

En utilisant le partage et les propriétés d'orthogonalité des fonctions harmoniques, l'Eq. (4.44), après l'introduction de l'amortissement, s'écrit comme suit :

$$(-\omega^2 \widehat{M} + i\omega \widehat{B} + \widehat{K})\{\widehat{y}\} = F_{ext} + F_{con} \quad (4.67)$$

Il est courant d'écrire toutes les sous-structures sous la forme d'une matrice en bloc [73] comme suit :

$$\widehat{Z} = \begin{bmatrix} Z^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & Z^{(N_s)} \end{bmatrix}, \widehat{y} = \begin{bmatrix} \widehat{y}^{(1)} \\ \vdots \\ \widehat{y}^{(N_s)} \end{bmatrix}, F_{ext} = \begin{bmatrix} F_{ext}^{(1)} \\ \vdots \\ F_{ext}^{(N_s)} \end{bmatrix}, F_{con} = \begin{bmatrix} F_{con}^{(1)} \\ \vdots \\ F_{con}^{(N_s)} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

La dimension de ces matrices par bloc et vecteurs est respectivement de $(\sum_{j=1}^{N_s} n^{(j)}) \times (\sum_{j=1}^{N_s} n^{(j)})$ et $(\sum_{j=1}^{N_s} n^{(j)}) \times 1$

Où le couplage est garanti avec la force de jonction entre les DDL d'interface dont l'amplitude est déterminée par la condition de compatibilité contenue dans l'Eq. (4.50).

L'équation dynamique dans le domaine fréquentielle est souvent écrite comme suit :

$$\hat{Z}\{\hat{y}\} = F_{ext} + F_{con} \quad (4.69)$$

où :

$$\hat{Z}(\omega) = (-\omega^2 \hat{M} + i\omega \hat{B} + \hat{K}) \quad (4.70)$$

\hat{Z} est une matrice de rigidité dynamique, et $\{\hat{y}\}$ est la réponse harmonique du système.

La rigidité dynamique peut également être inversée comme suit :

$$\hat{H}(\omega) = \begin{bmatrix} H^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & H^{(N_s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{(1)-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & Z^{(N_s)-1} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

3.2.2 Estimation de la matrice de flexibilité dynamique assemblée après reconstitution des données :

On applique la formulation décrite dans [73] la matrice de transfert \hat{H} assemblée pour deux sous-structures 1 et 2 respectivement. La matrice s'écrit comme suit :

$$\hat{H}_{assem} = \begin{bmatrix} H^1 & 0 \\ 0 & H^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H^1 & 0 \\ 0 & H^2 \end{bmatrix} C^T (C \begin{bmatrix} H^1 & 0 \\ 0 & H^2 \end{bmatrix} C^T)^{-1} C \begin{bmatrix} H^1 & 0 \\ 0 & H^2 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

A travers l'exploitation de la méthode de reconstitution présentée dans le chapitre 3, on obtient la matrice ci-dessous :

$$\hat{H}_{assem} \cong \begin{bmatrix} H_{rec}^r & 0 \\ 0 & H_{rec}^s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{rec}^r & 0 \\ 0 & H_{rec}^s \end{bmatrix} C^T (C \begin{bmatrix} H_{rec}^r & 0 \\ 0 & H_{rec}^s \end{bmatrix} C^T)^{-1} C \begin{bmatrix} H_{rec}^r & 0 \\ 0 & H_{rec}^s \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

3.2.3 Exemple

On considère le cadre 2D représenté dans la fig. (3.1), la structure globale est partitionnée en deux sous-structures (Fig. 4.2), après la partition, la première et la deuxième sous-structure ont respectivement $SS^{(1)} = 33$ DDL, $SS^{(2)} = 33$ DDL.

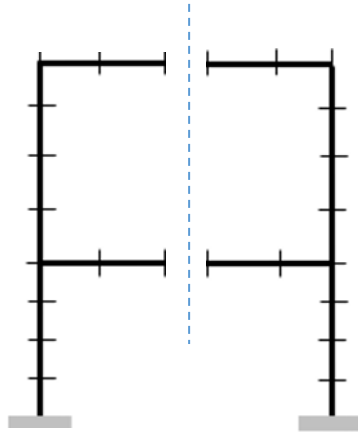
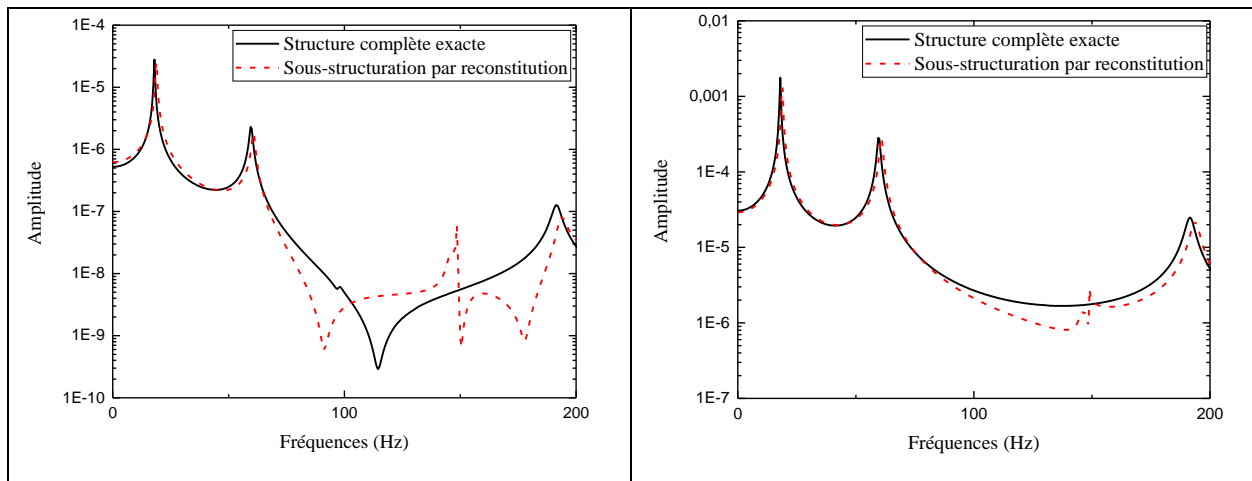


Figure 4. 9: discrétisation de cadre (2D)



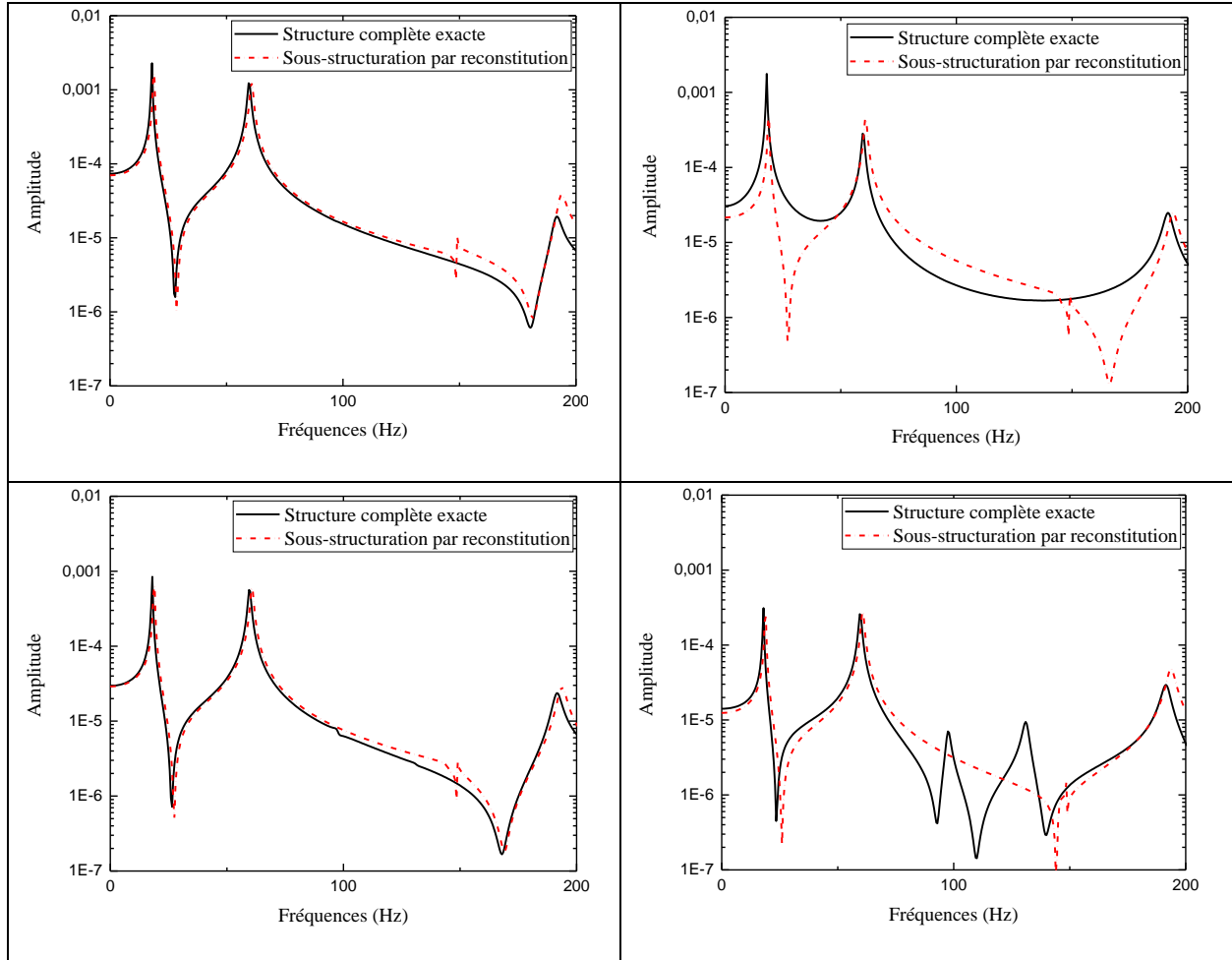


Figure 4. 10: Les amplitudes calculées de la structure complète exacte avec les amplitudes calculées par la méthode de sous-structuration reconstitué

La technique de sous-structuration utilisée en exploitant les matrices de flexibilité reconstituée pour chaque sous-structure permet d'obtenir des résultats très satisfaisant au voisinage de résonance certain pic parasite apparaissent sur certain élément de la matrice, ces pics peuvent être disparaître en utilisant la décomposition aux valeurs singulières ou bien le lissage comme elle est montrée dans la figure 4.13

4. Conclusions

Deux méthodes de sous-structuration ont été envisagé dans ce chapitre.

La première repose sur des données issues soit une modélisation par discrétisation des sous-structure en (E.F), pour extraire les sous-bases modales tronquées de ces dernières, soit d'une identification modale à partir des mesures effectuées sur chaque sous-structure pour réduire la

charge de calcul. La compensation des effets des modes tronqués sera introduite sous forme terme résiduel, seules quelques solutions propres des sous-structures sont nécessaires. Un exemple de pont est utilisé pour valider la procédure. Pour les très grandes structures (telles que celles avec des millions de ddl), les solutions propres obtenu par des méthodes traditionnelles peuvent être plus difficiles et plus longues, et même le stockage des matrices de système global peut être impossible. La méthode de sous-structuration peut être une option encourageante, elle peut être combinée avec d'autres techniques de réduction [74].

La deuxième repose sur des données expérimentales issues des techniques d'analyse modale. Pour ce dernier type de donné, on procède comme suit. Pour chaque sous-structure un certain nombre des capteurs placées sur des points (judicieusement choisies), un nombre très limité d'excitateurs sont placées, dans des endroits intelligemment choisis, ou sur des données issues directement des mesures, pour ce dernier type de donné une reconstitution des matrices de flexibilité dynamique s'imposes pour chaque sous-structure.

Parmi les champs d'applications de ces méthodes on cite la mise à jour des modèle et l'identification des dommages. En général, la mise à jour des modèles et l'identification des dommages nécessitent une réanalyse dynamique de la structure globale. Lorsque les paramètres de certains éléments sont modifiés. Avec la méthode de sous-structuration, seules des sous-structures particulières doivent être réanalysées, les d'autres sous-structures peuvent reste intactes.

Conclusion générale

L'étude effectuée concerne l'optimisation du calcul dynamique des structures dans les problèmes de modification structurale ou dans les problèmes de sous-structuration. Les méthodes présentées exploitent des données issues soit de modèle mathématique bien recalé, soit des mesures expérimentales. Une combinaison entre les deux types de données est également possible.

Pour le premier chapitre, on a proposé une méthode efficace de réanalyse des structures mécaniques conservatives modifiées, elle se base sur l'exploitation d'une sous-bas modale tronquée de la S.I. Cette méthode permet de transformer un problème aux valeurs propres de très grande taille à un problème aux valeur propre polynômial symétrique de petite taille, dans laquelle les effets des modes tronqués sont introduites d'une manière très significative, et où les matrices masse et raideur n'apparaissent pas explicitement. La formulation proposée a été structurée de telle sorte à ce que les termes d'ordre supérieure en $\hat{\lambda}_\nu$ soient négligeables devant les termes d'ordre inférieure ; ce qui justifie pourquoi les résultats obtenus à partir du problème aux valeurs propres symétrique linéaire réduit (1.24), correspondant au cas où $n = 1$, sont de très bonne qualité. La méthode proposée utilise moins d'opérations arithmétiques et d'espace de stockage, en tirant pleinement profit de la linéarité, de la symétrie et du fait que la plupart des calculs sont ramenés sur les DDL affectées par la modification. Lors du développement d'un prototype et de mise à jour des modèles, le temps et le coût de calcul seront réduit considérablement. On note aussi que lorsque les données sont issues d'une identification modale expérimentale, nous n'avons pas besoin de la connaissance des matrices de masse et de rigidité de la S.I. La méthode proposée peut être intégré, comme complément, dans les logiciels d'éléments finis.

Le deuxième chapitre se concentre sur la réanalyse modale des structures dissipatives. Deux approches efficaces et optimales ont été développées pour prédire le comportement dynamique des structures, une pour des amortissements visqueux proportionnel et l'autre de type amortissements visqueux non proportionnel. Ses approches ne nécessitent que la connaissance des paramètres modaux et les termes résiduels de la structure initiale, par conséquent elles sont aptes à utiliser des données issues des mesures.

Dans le troisième chapitre l'objectif était de contribuer à la résolution de certains problèmes de structures dynamiques établis à partir des matrices FRF. Pour cela, nous avons présenté une formulation traitant la réanalyse des problèmes de structures modifiées, et discuté du cas où certains ddl peuvent être rigidement connectés au sol. En général, la qualité des réponses en fréquence de la structure modifiée dépend de la qualité d'estimation des matrices de flexibilité de la structure d'origine.

Nous avons exposé, au paragraphe (4.2.2), une méthode, basée sur une décomposition spectrale d'une sous-matrice FRF carrée, permettant de compléter les matrices de flexibilité, de la S.I, issues directement des mesures. On note que les estimations obtenues au voisinage des résonances sont très satisfaisantes, mais dans certaines régions (zones de faible amplitude) la qualité d'estimation est médiocre ; Pour améliorer la qualité d'estimation dans ces zones on peut faire recours à la formulation complémentaire décrite par l'Eq. (3.80). On note aussi que lorsque le choix de la position des excitations se fait d'une manière intelligente la qualité de la reconstitution s'améliore ; pour prouver ceci, on a exploité, lors de la simulation numérique, une technique qui permet de choisir judicieusement les p colonnes mesurées de la matrice de flexibilité de la S.I.

On note que l'exploitation des matrices de flexibilité dynamique reconstituées, de la S.I, dans les problèmes de réanalyse (Eq. (3.60)), donne des résultats satisfaisants au voisinage des résonances de la S.M.

Au dernier chapitre on expose deux formulations, pour optimiser le calcul dynamique des structures, utilisant la technique de sous-structuration :

- La première repose sur des données issues soit d'une modélisation des sous-structure par E.F., pour extraire les sous-bases modales tronquées de ces dernières, soit par une identification modale expérimentale effectuée sur chaque sous-structure. Elles permettent d'estimer les premières solutions propres d'une structure à grande échelle, tout en réduisant considérablement les coûts de calcul. Les effets des modes inconnus sont compensés par la flexibilité résiduelle.
- La deuxième repose sur l'exploitation des FRF de chaque sous-structure. Nous avons estimé la matrice de flexibilité dynamique, associé à la structure assemblée, en exploitant les matrices de flexibilité dynamique reconstituées des sous-structures. La qualité d'estimation des résultats de la structure assemblée est similaire à celle obtenue par la formulation de réanalyse présentée dans le chapitre 3.

ANNEXE

1. Annexe A : Symétrie des matrices $\bar{\Delta K}$ et H_k pour $(k = 1, 2, 3, \dots, n)$

a- Symétrie de $\bar{\Delta K}$

$$\bar{\Delta K} = \Delta K(I + R_1 \Delta K)^{-1}$$

$$\bar{\Delta K} = (I + R_1 \Delta K)^{-1}(\Delta K + \Delta K R_1 \Delta K)(I + R_1 \Delta K)^{-1}$$

$$\bar{\Delta K} = (I + R_1 \Delta K)^{-1} \Delta K = \Psi^T \Delta K = \bar{\Delta K}^T \quad (A1)$$

b- Symétrie de H_k (voir Eq. (20))

$$H_1 = \bar{\Delta M} - \bar{\Delta K} A_1 \text{ et } H_k = H_{k-1} A_1 + H_{k-2} A_2 + \dots + H_1 A_{k-1} - \bar{\Delta K} A_k \text{ pour } k = 2, \dots, n.$$

Pour $k = 1$ et $k = 2$, H_k est une matrice symétrique. En effet :

$$H_1 = \bar{\Delta M} - \bar{\Delta K} A_1 = \bar{\Delta M} - \bar{\Delta K} (R_1 \bar{\Delta M} - R_2 \bar{\Delta K})$$

$$H_1 = (I - \bar{\Delta K} R_1) \bar{\Delta M} + \bar{\Delta K} R_2 \bar{\Delta K} = \Psi^T \Delta M \Psi + \bar{\Delta K} R_2 \bar{\Delta K} \quad (A2)$$

Puisque ΔM , $\bar{\Delta K}$ et R_2 sont symétriques et $\Psi^T = (I + \bar{\Delta K} R_1)^{-1}$, on en déduit que H_1 est symétrique.

Pour la matrice H_2 :

$$H_2 = H_1 A_1 - \bar{\Delta K} A_2$$

$$H_2 = H_1^T A_1 - \bar{\Delta K} A_2$$

$$H_2 = (\bar{\Delta M}^T - A_1^T \bar{\Delta K}) A_1 - \bar{\Delta K} A_2$$

$$H_2 = \bar{\Delta M}^T (R_1 \bar{\Delta M} - R_2 \bar{\Delta K}) - A_1^T \bar{\Delta K} A_1 - \bar{\Delta K} (R_2 \bar{\Delta M} - R_3 \bar{\Delta K})$$

$$H_2 = (\bar{\Delta M}^T R_1 - \bar{\Delta K} R_2) \bar{\Delta M} - (\bar{\Delta M}^T R_2 - \bar{\Delta K} R_3) \bar{\Delta K} - A_1^T \bar{\Delta K} A_1$$

$$H_2 = A_1^T (\bar{\Delta M} - \bar{\Delta K} A_1) - A_2^T \bar{\Delta K}$$

$$H_2 = A_1^T H_1 - A_2^T \bar{\Delta K} = H_2^T$$

Par analogie, on montre que H_3, H_4, H_5, H_6 sont symétriques.

Soit $k > 5$, supposons que H_k est symétrique pour $i = 1, 2, \dots, k$ et montrons que H_{k+1} est symétrique.

En utilisant l'Eq. (1.16), nous obtenons :

$$H_{k+1} = H_k A_1 + H_{k-1} A_2 + H_{k-2} A_3 + \dots + H_4 A_{k-3} + H_3 A_{k-2} + H_2 A_{k-1} + H_1 A_k - \bar{\Delta K} A_{k+1}$$

$$H_{k+1} = H_k^T A_1 + H_{k-1}^T A_2 + H_{k-2}^T A_3 + \dots + H_4^T A_{k-3} + H_3^T A_{k-2} + H_2^T A_{k-1} + H_1^T A_k - \bar{\Delta K} A_{k+1}$$

$$\begin{aligned}
H_{k+1} = & (A_1^T H_{k-1}^T + A_2^T H_{k-2}^T + A_3^T H_{k-3}^T + \dots + A_{k-3}^T H_3^T + A_{k-2}^T H_2^T + A_{k-1}^T H_1 - A_k^T \bar{\Delta K}) A_1 \\
& + (A_1^T H_{k-2}^T + A_2^T H_{k-3}^T + A_3^T H_{k-4}^T + \dots + A_{k-3}^T H_2^T + A_{k-2}^T H_1 - A_{k-1}^T \bar{\Delta K}) A_2 \\
& + (A_1^T H_{k-3}^T + A_2^T H_{k-4}^T + A_3^T H_{k-5}^T + \dots + A_{k-4}^T H_2^T + A_{k-3}^T H_1 - A_{k-2}^T \bar{\Delta K}) A_3 + \dots \\
& + (A_1^T H_3^T + A_2^T H_2^T + A_3^T H_1^T - A_4^T \bar{\Delta K}) A_{k-3} + (A_1^T H_2^T + A_2^T H_1^T - A_3^T \bar{\Delta K}) A_{k-2} \\
& + (A_1^T H_1^T - A_2^T \bar{\Delta K}) A_{k-1} + H_1^T A_k - \bar{\Delta K} A_{k+1}
\end{aligned}$$

Compte tenu de l'équation (1.16), nous avons

$$\begin{aligned}
H_1^T A_k - \bar{\Delta K} A_{k+1} &= (\bar{\Delta M}^T - A_1^T \bar{\Delta K}) A_k - \bar{\Delta K} A_{k+1} \\
H_1^T A_k - \bar{\Delta K} A_{k+1} &= -A_1^T \bar{\Delta K} A_k + \bar{\Delta M}^T (R_k \bar{\Delta M} - R_{k+1} \bar{\Delta K}) - \bar{\Delta K} (R_{k+1} \bar{\Delta K} - R_{k+2} \bar{\Delta K}) \\
H_1^T A_k - \bar{\Delta K} A_{k+1} &= -A_1^T \bar{\Delta K} A_k + (\bar{\Delta M}^T R_k - \bar{\Delta K} R_{k+1}) \bar{\Delta M} - (\bar{\Delta M}^T R_{k+1} - \bar{\Delta K} R_{k+2}) \bar{\Delta K} \\
H_1^T A_k - \bar{\Delta K} A_{k+1} &= -A_1^T \bar{\Delta K} A_k + A_k^T \bar{\Delta M} - A_{k+1}^T \bar{\Delta K} \tag{A5}
\end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice H_{k+1} peut-être réécrite

$$\begin{aligned}
H_{k+1} = & A_1^T (H_{k-1} A_1 + H_{k-2} A_2 + H_{k-3} A_3 + \dots + H_3 A_{k-3} + H_2 A_{k-2} + H_1 A_{k-1} - \bar{\Delta K} A_k) \\
& + A_2^T (H_{k-2} A_1 + H_{k-3} A_2 + H_{k-4} A_3 + \dots + H_2 A_{k-3} + H_1 A_{k-2} - \bar{\Delta K} A_{k-1}) \\
& + A_3^T (H_{k-3} A_1 + H_{k-4} A_2 + H_{k-5} A_3 + \dots + H_1 A_{k-3} - \bar{\Delta K} A_{k-2}) + \dots \\
& + A_{k-2}^T (H_2 A_1 + H_1 A_2 - \bar{\Delta K} A_3) + A_{k-1}^T (H_1 A_1 - \bar{\Delta K} A_2) + A_k^T (\bar{\Delta M} - \bar{\Delta K} A_1) \\
& - A_{k-1}^T \bar{\Delta K}
\end{aligned}$$

$$H_{k+1} = A_1^T H_k + A_2^T H_{k-1} + A_3^T H_{k-2} + \dots + A_{k-2}^T H_3 + A_{k-1}^T H_2 + A_k^T H_1 - A_{k-1}^T \bar{\Delta K}$$

$$H_{k+1} = H_{k+1}^T \tag{A6}$$

Cela met fin à la preuve.

2. Annexe B : Expression théorique de la matrice R_k

On rappelle les relations bi-orthogonales (voir Eq. (1.2))

$$X^T M X = I; \quad X^T K X = A$$

On en déduit que l'inverse de la matrice de rigidité est

$$K^{-1} = X_1 \Lambda_1^{-1} X_1^T + X_2 \Lambda_2^{-1} X_2^T \tag{B1}$$

La matrice résiduelle statique R_1 est exprimée comme suit

$$R_1 = X_2 \Lambda_2^{-1} X_2^T = K^{-1} - X_1 \Lambda_1^{-1} X_1^T \tag{B2}$$

Pour calculer R_2 , nous multiplions l'équation (B1) par $M K^{-1}$, ce qui donne

$$K^{-1} M K^{-1} = X_1 \Lambda_1^{-1} X_1^T M K^{-1} + X_2 \Lambda_2^{-1} X_2^T M K^{-1} \tag{B3}$$

Et substituons l'Eq. (B1) dans le second membre l'équation (B3), on obtient :

$$R_2 = X_2 \Lambda_2^{-2} X_2^T = K^{-1} M K^{-1} - X_1 \Lambda_1^{-2} X_1^T$$

Pour $k > 2$, on montre de la même manière que :

$$R_k = X_2 \Lambda_2^{-k} X_2^T = K^{-1} (M K^{-1})^{k-1} - X_1 \Lambda_1^{-k} X_1^T$$

3. Annexe C : Développement de la matrice de flexibilité

Dans le cas conservatif auto adjoint et en fonctions des paramètres

$$\begin{aligned} y &= (k - \lambda M)^{-1} f \\ &= (I - \lambda K^{-1} M) K^{-1} f \\ &= (I - \lambda K^{-1} + \lambda^2 K^{-1} M K^{-1} + \dots) K^{-1} f \\ &= (K^{-1} + \lambda K^{-1} M K^{-1} + \lambda^2 K^{-1} M K^{-1} + \dots + \lambda^n R_n(\lambda)) f \quad (C.1) \end{aligned}$$

où $R_n(\lambda)$ représente la matrice des résidus dû aux termes d'ordre élevé. En termes des paramètres explicites, on a:

$$\begin{aligned} y &= \Gamma f \\ &= Y(\Lambda - \lambda I)^{-1} Y^T f \\ &= Y \Lambda^{-1} Y^T + \lambda Y \Lambda^{-2} Y^T + \lambda^2 Y \Lambda^{-3} Y^T + \lambda^n Y \Lambda^{-n} (\Lambda - \lambda I)^{-1} Y^T \quad (C.2) \end{aligned}$$

Identifiant les termes entre λ entre (C.1) et (C.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(0)} &\triangleq Y \Lambda^{-1 T} Y = K^{-1} \\ \Gamma^{(1)} &\triangleq Y \Lambda^{-2 T} Y = K^{-1} M K^{-1} \\ \Gamma^{(p)} &\triangleq Y \Lambda^{-p T} Y = K^{-1} (M K^{-1})^{p-1} \\ R_n(\lambda) &= Y \Lambda^{-n} (\Lambda - \lambda I)^{-1} Y^T, \quad p < n \end{aligned}$$

D'où l'expression de la matrice de souplesse dynamique :

$$\Gamma(\lambda) = \Gamma^{(0)} + \lambda \Gamma^{(1)} + \dots + \lambda^n R_n(\lambda)$$

La réponse forcée $y(\lambda)$ à une excitation s'écrit :

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= \Gamma f \\ y(\lambda) &= y^{(0)} + \lambda y^{(1)} + \lambda^2 y^{(2)} + \dots + \lambda^n y^{(n)} \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} y^{(0)} &\text{ est solution de : } K y^{(0)} = f \\ y^{(1)} &\text{ est solution de : } K y^{(1)} = M K^{-1} f = M y^{(p)} \text{ est solution de : } K y^{(1)} = M K^{-1} f = M y^{(p)} \\ y^{(p)} &\text{ est solution de : } K y^{(p)} = (M K^{-1})^{p-1} f = M y^{(p-1)}, p < n \\ y^{(n)} &\triangleq R_n(\lambda) f \end{aligned}$$

Remarque

En pratique, $R_n(\lambda)$ est évalué de manière approximative sur la base modale connu Y_1 :

$$R_n(\lambda) \approx Y_1 \Lambda_1^{-n} (\Lambda_1 - \lambda I)^{-1} Y_1^T$$

Pour $n = 0$ et 1 , on retrouve les approximations classiques :

$$n = 0 : \Gamma = Y(\Lambda - \lambda I)^{-1} Y^T$$

$$n = 1 : \Gamma = Y \Lambda^{-1} + \lambda Y \Lambda^{-1} (\Lambda - \lambda I)^{-1} Y^T$$

4. Annexe D : Normalisation des modes

Nous présenterons deux formes de normalisation, soit :

- Normalisation par rapport à l'unité

La normalisation par rapport à l'unité consiste à énoncer le fait que la somme des carrés de chaque terme du mode normalisé P^* est égale à l'unité.

$$[P^*]^T [P^*] = [I] \quad (D1)$$

Pour normaliser les modes, on conçoit la matrice normalisée P^* en post multipliant le mode P par une matrice diagonale $[A]$, dont on se doit de déterminer les coefficients.

$$[P^*] = [P][A] \quad (D2)$$

*En substituant l'équation (D2) dans (D1), on obtient :

$$[A][P]^T [P][A] = [I] \quad (D3)$$

Puisque $[A]$ est une matrice diagonale, on détermine les coefficients de $[A]$ à l'aide de l'équation suivante : $[A] = [P^T P]^{-1/2}$

Le calcul numérique à l'aide de MATLAB rend comme résultat le mode normalisé par rapport à l'unité.

- Normalisation par rapport à la masse

Pour donner à l'équation une forme analogue à la forme canonique obtenue dans le cas des systèmes à 1 degré de liberté et que le coefficient soit égal à l'unité devant le terme d'accélération, la matrice modale normalisée par rapport à la masse $[U^*]$ est obtenue en multipliant les modes par un coefficient d'une manière telle que la matrice modale soit égale à la matrice identité :

$$[U^*]^T [M][U^*] = [I] \quad (D4)$$

Nous obtenons alors l'expression suivante qui nous facilite les calculs qui seront faits ultérieurement :

$$[\bar{K}^*] = [\bar{\omega}_n^2] \quad (D5)$$

Ce n'est que lorsque les modes sont normalisés par rapport à la masse, qu'il nous est donné de constater que la matrice de rigidité modale est ramenée à la matrice des valeurs propres (carré des fréquences naturelles).

L'équation normalisée finale devient :

$$\{\ddot{y}(t)\} + [\bar{\omega}_n^2]\{y(t)\} = [U^*]^T\{f(t)\} \quad (D6)$$

La technique de normalisation est la même que celle utilisée précédemment. En procédant au changement de variable où la matrice B est diagonale et comprend les coefficients de normalisation :

$$[U^*] = [U][B] \quad (D7)$$

*En introduisant (D7) dans (D4), on obtient :

$$[B][U]^T[M][U][B] = [I]$$

Puisque [B] est une matrice diagonale, on détermine les coefficients de [B] en faisant appel à l'équation suivante :

$$[B] = [U^T M U]^{-1/2}$$

5. Annexe E : Méthode combinatoire

Soit un système conservatif associé M^e ; K^e avec une base modale (Λ_e, Y^e)

(Λ_e, Y^e) Base modale du système conservatif associé M^e ; K^e

Réponse harmonique :

$$y(\omega) = \sum_{v=1}^m y_v^e \cdot c_v$$

$$c_v = -\omega^2 \frac{y_v^{eT} \cdot f}{\omega_v^2 - \omega^2 + 2ia_v \omega_v \omega}$$

On introduit le scalaire r_v

$$r_v = \frac{y_v^{pT} \cdot f_p}{2a_v}; (v = 1, \dots, m)$$

f_p : vecteur représentant la configuration d'excitation.

a_v : estimation de l'amortissement modal du mode v .

y_v^p : $v^{\text{ème}}$ sous vecteur propre du système conservatif associé aux système dissipatif, contenant les p DDL excitateurs.

La contribution de l'ensemble des m modes au voisinage de chacune de leur résonance est représentée par le vecteur r :

$$r = [\dots \quad r_v \quad \dots]^T = \tilde{Y}^{(p)T} f^{(p)}, \in \mathbb{R}^{m,1}$$

où: $\tilde{Y}^{(p)T} = Q \cdot Y^{(p)T}$; $Q = \text{Diag}(1/2a_v)$

-Procédé combinatoire :

Génération de toutes les combinaisons possibles de p degrés de liberté potentiels parmi les g degrés de liberté sélectionnés.

Nombre total des combinaisons :

$$C_g^p = \frac{g!}{p!(g-p)!}$$

-Excitation simultanée de σ modes :

Contribution simultanée dominante de σ modes parmi m :

$r \hat{=} r_v$ (Contribution initialement choisie)

$$r_\sigma = \{1, 1, \dots, 1\}^T \in \mathbb{R}^{\sigma, 1}; \sigma \leq m$$

Recherche de la force optimale $f_\sigma^{(p)}$ permettant d'obtenir la contribution \hat{r}_σ la plus voisine de la contribution r_σ .

La solution au sens des moindres carrés est donnée par l'expression :

$$\text{Min}_{f_\sigma^{(p)}} h = \|\varepsilon_\sigma\|^2 \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_\sigma = r_\sigma - \hat{r}_\sigma \\ \hat{r}_\sigma = \tilde{Y}^{(p)T} f_\sigma^{(p)} \end{cases}$$

Solution correspondante

$$f_\sigma^{(p)} = \left[\tilde{Y}^{(p)T} \right]^+ \cdot r_\sigma$$

où: $\left[\tilde{Y}^{(p)T} \right]^+$ est la pseudo-inverse de la matrice $\tilde{Y}^{(p)T}$ $\text{rang}(\tilde{Y}^{(p)T}) = p$; p : nombre d'excitateurs
; $\sigma \geq p$;

σ : nombre de modes à exciter

Pour la totalité des modes à exciter, le vecteur de la contribution des modes à obtenir est :

$$\hat{r} = \left[\tilde{Y}^{(p)T} \right] \cdot \left[\tilde{Y}^{(p)T} \right]^+ \cdot r_\sigma$$

Contribution du mode v au voisinage de sa résonance :

$$r_\sigma = \frac{y_v^{pT} \cdot f_\sigma^{(p)}}{2a_v} \quad (v = 1, \dots, \sigma)$$

Expression du vecteur de la contribution des modes à obtenir :

$$r_\sigma = \left[\tilde{Y}^{(p)T} \right] \cdot f_\sigma^{(p)}$$

Critère d'erreur relatif à l'écart entre les vecteurs de contribution des modes r_σ et \hat{r}_σ

Pour choisir la meilleure répartition des ddl excitateurs, on utilise le critère d'erreur relatif suivant :

$$\varepsilon_r = \frac{\|r_\sigma - [\bar{Y}^{(p)T}] [\bar{Y}^{(p)T}]^+ . r_\sigma\|}{\|r_\sigma\|}$$

Critère de sélection définitif des meilleures combinaisons parmi celles obtenues précédemment :

On applique ensuite un critère de sélection définitif des meilleures combinaisons parmi celles

Obtenues précédemment. Ce critère a pour expression :

$$\text{Min } J_{f_\sigma^{(p)}} = \varepsilon_r + \alpha \|f_\sigma^{(p)}\|$$

$f_\sigma^{(p)}$: vecteur représentant la configuration d'excitation

α : scalaire de pondération.

6. Annexe F : Algorithme de la méthode de Lanczos

- Définition des grandeurs

\mathbf{M}, \mathbf{K} Matrice de masse et de rigidité d'ordre n

Θ_r Matrice diagonale d'ordre k contenant les fonctions des fréquences approchées (Valeur de Ritz) θ_i^k ($i = 1, 2, \dots, k$) à l'itération k

$\mathbf{Q}_{(k)}$ Matrice ($n \times k$) de Lanczos renfermant les k vecteurs de Lanczos q_i ($i = 1, 2, \dots, k$) associé à la suite courant de Krylov

$\bar{q}_{(k)}, \hat{q}_{(k)}, p_{(k)}, \hat{p}_{(k)}$ vecteurs auxiliaires d'itération

$\mathbf{T}_{(k)}$ Matrice tridiagonale d'interaction d'ordre k de la matrice $\mathbf{T}_{(k)}$

$\beta_{(k)}, \alpha_{(k)}$ Terme diagonal et non diagonal de rang k de la matrice $\mathbf{T}_{(k)}$

$\mathbf{Z}_{(k)}$ Matrice d'ordre k renferment les coordonnées de Ritz z_i^k ($i = 1, 2, \dots, k$) au pas k

$r_{(k)}$ Vecteur de krylov de rang k ($r_{(0)}$ vecteur initial)

ρ, σ Décalage spectraux (scalaires positifs)

$\mathbf{K}_{(\rho)}, \mathbf{K}_{(\sigma)}$ Matrice de rigidité décalées

$\mathbf{L}_\kappa, \mathbf{D}_\kappa$ Matrice triangulaire inférieure et diagonale issue de la factorisation de la matrice $\mathbf{K}_{(\rho)}$ ou $\mathbf{K}_{(\sigma)}$

$\lambda_i^{(l)}, P_i^{(l)}$ paire propre de rang i estimée à la dernière itération l

p Nombre des paires propres désirées

- Initialisation des variables

1- choix d'un décalage spectral σ et évaluation de la matrice de rigidité translattée

$$\mathbf{K}_{(\sigma)} = \mathbf{K} + \sigma \mathbf{M}$$

2- Factorization de la matrice $\mathbf{K}_{(\sigma)}$ (méthode de cholesky) en le produit $\mathbf{L}_{\kappa} \mathbf{L}_{\kappa}^T$

3- Sélection du vecteur initial de krylov \mathbf{r}_0 calcul du premier vecteur de Lanczos

$$\mathbf{q}_{(1)} = \mathbf{r}_0 / (\mathbf{r}_0^T \mathbf{M} \mathbf{r}_0)^{1/2}, \text{ ainsi que de son complément pondéré } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{M} \mathbf{q}_{(1)}$$

- Itération : pour $k = 1, 2, \dots$

1- résolution du système d'équation $\mathbf{L}_{\kappa} \mathbf{L}_{\kappa}^T \mathbf{r}_{(k)} = \mathbf{p}_{(k)}$ et détermination de vecteur intermédiaire

$$\bar{\mathbf{q}}_{(k)} = \mathbf{r}_{(k)} - \beta_{(k-1)} \mathbf{q}_{(k-1)} \text{ avec } \beta_{(0)} = 0$$

2- calcul du terme diagonal $\alpha_{(k)} = \mathbf{p}_{(k)}^T \bar{\mathbf{q}}_{(k)}$ ainsi que de son complément pondéré $\hat{\mathbf{p}}_{(1)} = \mathbf{M} \hat{\mathbf{q}}_{(1)}$

3- Calcul du terme non diagonal $\beta_{(k)} = (\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^T \hat{\mathbf{q}}_{(k)})^{1/2}$ de la matrice $\mathbf{T}_{(k)}$

4- résolution par l'algorithme QR du problème d'interaction $\mathbf{T}_{(k)} \mathbf{Z}_{(k)} = \mathbf{Z}_{(k)} \Theta_{(k)}$

5- normalisation du nouvel élément $\mathbf{q}_{(k+1)} = \hat{\mathbf{p}}_{(k)} / \beta_{(k+1)}$ de la matrice de Lanczos $\mathbf{Q}_{(k)}$ et détermination de son complément pondéré $\mathbf{p}_{(k+1)} = \hat{\mathbf{p}}_{(k)} / \beta_{(k)}$

6- test de convergence sur les p premiers coefficients diagonaux de la matrice $\Theta_{(k)}$

- Evaluation final à l'itération l

1- calcul des p vecteurs propres approchés $\mathbf{p}_i^{(l)} = \mathbf{Q}_{(l)} \mathbf{z}_i^{(l)}$ ($i = 1, 2, \dots, l$)

2- récupération des vecteurs propres approchées $\lambda_i^{(l)} = (1/\theta_i^l) - \sigma$ ($i = 1, 2, \dots, p$)

- Contrôle du spectre (loi d'inertie de Sylvester)

1- Choix d'une translation spectrale ρ légèrement supérieur à $(1/\theta_p^l)$ et calcul de la matrice de rigidité translattée $\mathbf{K}_{(\rho)} = \mathbf{K} + \rho \mathbf{M}$

2- Factorisation de la matrice $\mathbf{K}_{(\rho)}$ (méthode de Gauss) en le produit $\mathbf{L}_{\kappa} \mathbf{D}_{\kappa} \mathbf{L}_{\kappa}^T$ et contrôle du nombre de pivots négatifs dans la matrice \mathbf{D}_{κ}

Référence

- [1] G. Huang, H. Wang, and G. Li, “An exact reanalysis method for structures with local modifications,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 54, no. 3, pp. 499–509, 2016, doi: 10.1007/s00158-016-1417-2.
- [2] Q. Song, P. Chen, and S. Sun, “An exact reanalysis algorithm for local non-topological high-rank structural modifications in finite element analysis,” *Comput. Struct.*, vol. 143, pp. 60–72, Sep. 2014, doi: 10.1016/J.COMPSTRUC.2014.07.014.
- [3] S. H. Boo, “Structural modal reanalysis using automated matrix permutation and substructuring,” *Struct. Eng. Mech.*, vol. 69, no. 1, pp. 105–120, Jan. 2019, doi: 10.12989/sem.2019.69.1.105.
- [4] R. C. Sohaney and D. Bonnesse, “Residual mobolities and structural dynamic modifications,” in *IMAC*, 1989, vol. 7, pp. 568–574.
- [5] F. Massa, T. Tison, B. Lallemand, and O. Cazier, “Structural modal reanalysis methods using homotopy perturbation and projection techniques,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 200, no. 45–46, pp. 2971–2982, Oct. 2011, doi: 10.1016/j.cma.2011.06.016.
- [6] D. Li, Q. Zhou, G. Chen, and Y. Li, “Structural dynamic reanalysis method for transonic aeroelastic analysis with global structural modifications,” *J. Fluids Struct.*, vol. 74, pp. 306–320, Oct. 2017, doi: 10.1016/J.JFLUIDSTRUCTS.2017.06.004.
- [7] H. Jian-jun, C. Xiang-zi, and X. Bin, “Structural modal reanalysis for large, simultaneous and multiple type modifications,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 62–63, pp. 207–217, Oct. 2015, doi: 10.1016/J.YMSSP.2015.03.019.
- [8] X. Yang, H. Lian, and S. Chen, “An adaptive iteration algorithm for structural modal reanalysis of topological modifications,” *Commun. Numer. Methods Eng.*, vol. 18, no. 5, pp. 373–382, May 2002, doi: 10.1002/cnm.500.
- [9] F. Eastep, N. Khot, and R. Grandhi, “Improving the active vibrational control of large space structures through structural modifications,” *Acta Astronaut.*, vol. 15, no. 6–7, pp. 383–389, 1987, doi: 10.1016/0094-5765(87)90174-3.
- [10] B. S. Wu and Z. G. Li, “Reanalysis of structural modifications due to removal of degrees of freedom,” *Acta Mech.*, vol. 180, no. 1–4, pp. 61–71, 2005, doi: 10.1007/s00707-005-0264-9.
- [11] S. P. Zheng, B. S. Wu, and Z. G. Li, “Free vibration reanalysis of structures with added degrees of freedom,” *Comput. Struct.*, vol. 206, pp. 31–41, Aug. 2018, doi: 10.1016/J.COMPSTRUC.2018.06.006.
- [12] L. Ma, S. H. Chen, and G. W. Meng, “Combined approximation for reanalysis of complex eigenvalues,” *Comput. Struct.*, vol. 87, no. 7–8, pp. 502–506, 2009, doi: 10.1016/j.compstruc.2009.01.009.

-
- [13] A. Kaveh and H. Fazli, “Approximate eigensolution of locally modified regular structures using a substructuring technique,” *Comput. Struct.*, vol. 89, no. 5–6, pp. 529–537, 2011, doi: 10.1016/j.compstruc.2010.12.013.
- [14] S. P. Zheng, B. S. Wu, and Z. G. Li, “Vibration reanalysis based on block combined approximations with shifting,” *Comput. Struct.*, vol. 149, pp. 72–80, Mar. 2015, doi: 10.1016/J.COMPSTRUC.2014.12.006.
- [15] S. Cogan, “Réanalyse des structures à partir de données expérimentales: Rigidification et substitution.” Besançon, 1990.
- [16] B. P. Wang, S. P. Caldwell, and C. M. Smith, “Improved eigensolution reanalysis procedures in structural dynamics,” *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 11, no. 3, pp. 191–200, 1992.
- [17] H. Aitrimouch, “Analyse de structures mécaniques modifiées.” Besançon, 1993.
- [18] R. N. Coppelino, “Structural mode sensitivity to local modification,” *SAE Trans.*, pp. 3441–3444, 1981.
- [19] L. Jezequel, “Procedure to reduce the effects of modal truncation in eigensolutionreanalysis,” *AIAA J.*, vol. 28, no. 5, pp. 896–902, 1990.
- [20] O. Koubaiti, J. El-mekkaoui, and A. Elkhalfi, “Complete study for solving Navier-Lamé equation with new boundary condition using mini element method,” vol. 12, 2018.
- [21] O. KOUBAITI, “ELASTICITY WITH MIXED FINITE ELEMENT,” in *Communications in Applied Analysis*, 22, No. 4 (2018), 493-510 ISSN: 1083-2564, 2018, vol. 4, no. 1083–2564, pp. 493–510.
- [22] O. Koubaiti, A. Elkhalfi, and J. El-Mekkaoui, “WEB-Spline Finite Elements for the Approximation of Navier-Lamé System with CA,B Boundary Condition,” *Abstr. Appl. Anal.*, vol. 2020, 2020, doi: 10.1155/2020/4879723.
- [23] O. Koubaiti, A. Elkhalfi, J. El-Mekkaoui, and N. Mastorakis, “Solving the problem of constraints due to Dirichlet boundary conditions in the context of the mini element method,” *Int. J. Mech.*, vol. 14, pp. 12–22, 2020, doi: 10.46300/9104.2020.14.2.
- [24] R. B. Nelson, “Simplified calculation of eigenvector derivatives,” *AIAA J.*, vol. 14, no. 9, pp. 1201–1205, 1976, doi: 10.2514/3.7211.
- [25] J. CHEN and B. WADA, “Matrix Perturbation for Structural Dynamic Analysis,” vol. 15, no. 8, pp. 1095–1100, 1976, doi: 10.2514/6.1976-1538.
- [26] G. F. Lang, “Demystifying complex modes,” *Sound Vib.*, vol. 23, no. 1, pp. 36–40, 1989.
- [27] G. Coupry, “MESURE DES AMORTISSEMENTS GENERALISES NON DIAGONAUX D’UNE STRUCTURE LORS D’UN ESSAI AU SOL DE VIBRATION.,” 1977.
- [28] Y. M. Ram and S. G. Braun, “An inverse problem associated with modification of
-

- incomplete dynamic systems,” 1991.
- [29] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman, “Matrix Polynomials, Comp,” *Sci. Appl. Math. Acad. Press. New York*, 1982.
- [30] P. Lancaster, “A Review of Numerical Methods for Eigenvalue Problems Nonlinear in Parameter, Numerik und Anwendungen von Eigenwertaufgaben und Verzweigungsproblemen (edited by E. Bohl, L. Collatz and KP Hedeler) ISNM 38.” Basel-Stuttgart, Birkhauser, 1977.
- [31] G. Peters and J. H. Wilkinson, “ $Ax=\lambda Bx$ and the generalized eigenproblem,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 7, no. 4, pp. 479–492, 1970.
- [32] A. Ruhe, “Algorithms for the nonlinear eigenvalue problem,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 10, no. 4, pp. 674–689, 1973.
- [33] H. V Henderson and S. R. Searle, “On deriving the inverse of a sum of matrices,” *Siam Rev.*, vol. 23, no. 1, pp. 53–60, 1981.
- [34] A. S. Householder, “The theory of matrices in numerical analysis, Blaisdell Publ,” *Co., New York*, 1964.
- [35] R. Fillod, G. Lallement, J. Piranda, and J. L. Raynaud, “Global method of modal identification,” in *Proceedings of the 3rd IMAC Conference, Orlando, Florida*, 1985, pp. 1145–1151.
- [36] O. Dadah, H. Ait Rimouch, A. Mousrij, O. Koubaiti, and N. Mastorakis, “A new approach to solve perturbed symmetric eigenvalue problems,” *Int. J. Circuits, Syst. Signal Process.*, vol. 14, pp. 629–636, 2020, doi: 10.46300/9106.2020.14.80.
- [37] Z. J. Yang, S. H. Chen, and X. M. Wu, “A method for modal reanalysis of topological modifications of structures,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 65, no. 13, pp. 2203–2220, Mar. 2006, doi: 10.1002/nme.1546.
- [38] P. Level, D. Moraux, P. Drazetic, and A. Oudshoorn, “Some considerations on modal reanalysis of non-conservative dynamics systems by the generalized receptance method,” *Comput. Struct.*, vol. 57, no. 6, pp. 1029–1034, 1995.
- [39] A. Bouazzouni, G. Lallement, and S. Cogan, “Selecting a Ritz basis for the reanalysis of the frequency response functions of modified structures,” *J. Sound Vib.*, vol. 199, no. 2, pp. 309–322, 1997, doi: 10.1006/jsvi.1996.0617.
- [40] G. Gambolati and M. Putti, “A comparison of Lanczos and optimization methods in the partial solution of sparse symmetric eigenproblems,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 37, no. 4, pp. 605–621, 1994.
- [41] T. SEKA, “Methode de correction des caracteristiques residuelles de frontiere en synthese modale,” 1988.
- [42] H. Rentzsch, M. Kolouch, and M. Putz, “Application of Substructure Techniques to

-
- Predict Cutting Stability for Mobile Machine Tools,” *Procedia CIRP*, vol. 58, pp. 110–115, 2017, doi: 10.1016/j.procir.2017.03.205.
- [43] A. A. Ozdemir and S. Gumussoy, “Transfer function estimation in system identification toolbox via vector fitting,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 6232–6237, 2017.
- [44] W. G. Halvorsen, P. S. Barney, and D. L. Brown, “The U-vector expansion method for modeling structural/acoustic systems,” in *PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE*, 1992, p. 584.
- [45] H. Aitrimouch, G. Lallement, and J. Kozanek, “Construction of the unobserved part of the square dynamic flexibility matrix,” *J. Sound Vib.*, vol. 204, no. 1, pp. 73–84, 1997, doi: 10.1006/jsvi.1997.0921.
- [46] R. Majed, “Placement optimal d’excitateurs et modelisation de structures non-lineaires.” Besançon, 1995.
- [47] M. Thomas and F. Laville, *Simulation des vibrations mécaniques, 2e édition: par Matlab, Simulink et Ansys*. Presses de l’Université du Québec, 2017.
- [48] G. Lallement, A. Ramanitranja, and S. Cogan, “Optimal sensor deployment: application to model updating,” *J. Vib. Control*, vol. 4, no. 1, pp. 29–46, 1998.
- [49] J. Zhang, K. Maes, G. De Roeck, E. Reynders, C. Papadimitriou, and G. Lombaert, “Optimal sensor placement for multi-setup modal analysis of structures,” *J. Sound Vib.*, vol. 401, pp. 214–232, 2017.
- [50] R. M. Lin, “Identification of modal parameters of unmeasured modes using multiple FRF modal analysis method,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 25, no. 1, pp. 151–162, 2011, doi: 10.1016/j.ymsp.2010.03.002.
- [51] L. A. C. M. Araga~o Filho, C. Magluta, and N. Roitman, “Damping Estimation of Risers Using Time-Frequency Transforms,” in *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 2004, vol. 37459, pp. 95–99.
- [52] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. 1985.
- [53] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix computations*, Johns Hopkins University Press. 2013.
- [54] R. Brincker and C. Ventura, *Introduction to operational modal analysis*. John Wiley & Sons, 2015.
- [55] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier, 2005.
- [56] A. Oktay, Ç. Yılmaz, and G. Anlaş, “Transfer path analysis: Current practice, trade-offs and consideration of damping,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 85, pp. 760–772, 2017.
- [57] L. Keersmaekers, L. Mertens, R. Penne, P. Guillaume, and G. Steenackers, “Decoupling of mechanical systems based on in-situ frequency response functions: The link-preserving,
-

-
- decoupling method,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 58, pp. 340–354, 2015.
- [58] Y. Ren and C. F. Beards, “On substructure synthesis with FRF data,” *J. Sound Vib.*, vol. 185, no. 5, pp. 845–866, 1995.
- [59] W. Liu and D. J. Ewins, “Substructure synthesis via elastic media,” *J. Sound Vib.*, vol. 257, no. 2, pp. 361–379, 2002.
- [60] D.-H. Lee and W.-S. Hwang, “An identification method for joint structural parameters using an FRF-based substructuring method and an optimization technique,” *J. Mech. Sci. Technol.*, vol. 21, no. 12, pp. 2011–2022, 2007.
- [61] M. C. C. Bampton and R. R. Craig Jr, “Coupling of substructures for dynamic analyses.,” *Aiaa J.*, vol. 6, no. 7, pp. 1313–1319, 1968.
- [62] W. C. Hurty, “Dynamic analysis of structural systems using component modes,” *AIAA J.*, vol. 3, no. 4, pp. 678–685, 1965.
- [63] D. J. Rixen, “A dual Craig–Bampton method for dynamic substructuring,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 168, no. 1–2, pp. 383–391, 2004.
- [64] M. Géradin and D. J. Rixen, *Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics*. John Wiley & Sons, 2014.
- [65] A. Simpson, “A generalization of Kron’s eigenvalue procedure,” *J. Sound Vib.*, vol. 26, no. 1, pp. 129–139, 1973.
- [66] A. El Hami and B. Radi, *Dynamique des structures de grande taille et problèmes inverses*, vol. 5. ISTE Group, 2018.
- [67] T. Gmür, *Dynamique des structures: analyse modale numérique*. PPUR presses polytechniques, 1997.
- [68] K. Cuppens, P. Sas, and L. Hermans, “Evaluation of the FRF based substructuring and modal synthesis technique applied to vehicle FE data,” in *Proceedings of the 25th International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA*, 2000, pp. 1165–1172.
- [69] M. Karamooz Mahdiabadi, A. Bartl, D. Xu, P. Tiso, and D. J. Rixen, “An augmented free-interface-based modal substructuring for nonlinear structural dynamics including interface reduction,” *J. Sound Vib.*, vol. 462, p. 114915, Dec. 2019, doi: 10.1016/J.JSV.2019.114915.
- [70] N. Bouhaddi and J. P. Lombard, “Improved free-interface substructures representation method,” *Comput. Struct.*, vol. 77, no. 3, pp. 269–283, Jun. 2000, doi: 10.1016/S0045-7949(99)00219-9.
- [71] J. H. Kim, S. H. Boo, and P. S. Lee, “A dynamic condensation method with free interface substructuring,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 129, pp. 218–234, 2019, doi: 10.1016/j.ymsp.2019.04.021.
-

- [72] F. M. Gruber and D. J. Rixen, “Dual Craig-Bampton component mode synthesis method for model order reduction of nonclassically damped linear systems,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 111, pp. 678–698, Oct. 2018, doi: 10.1016/j.ymssp.2018.04.019.
- [73] M. S. Allen, D. Rixen, M. Van der Seijs, P. Tiso, T. Abrahamsson, and R. L. Mayes, *Substructuring in engineering dynamics*. Springer, 2020.
- [74] H. Kim and M. Cho, “Improvement of reduction method combined with sub-domain scheme in large-scale problem,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 70, no. 2, pp. 206–251, 2007.