N° d'ordre : 360/21

Université Sultan Moulay Slimane

UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE

Faculté des Sciences et Techniques

Béni Mellal

Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

EL HASSNAOUI MARIAM

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Espace topologique flou intuitionistique et ses propriétés

Soutenue le 09/07/2021 devant le jury :

Pr. Khalid HILAL,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Président.
Pr. Abdelmajid HAJJAJI,	Professeur à l'ENCG, El Jadida, Maroc	Rapporteur.
Pr. Jalila EL GHORDAF,	Professeur au CRMEF, Béni Mellal, Maroc	Rapporteur.
Pr. Adil ABBASSI,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Rapporteur.
Pr. M'hamed EL OMARI,	Professeur à la FP, Béni Mellal, Maroc	Invité.
Pr. Melliani Said,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Co-encadrant.
Pr. Oukessou Mohamed,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Encadrant.

Remerciements

Nombreuses sont les personnes qui m'ont accompagné durant mon parcours scolaire et qui m'ont permis de m'inscrire en thèse. Merci d'avoir contribué à mon apprentissage. Je remercie tous les personnes qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de mes années de doctorat. Pourtant il existe une difficulté, celle de n'oublier personne. C'est pourquoi je tiens à remercier par avance ceux dont le nom n'apparaît pas ici.

Je tiens tous d'abord à remercier très chaleureusement, mes encadrants, Professeurs **Oukessou Mohamed** (directeur de thèse) et **Said Melliani** (co-directeur de thèse) pour tout le temps qu'ils m'ont consacré. Je leur suis reconnaissante de leur soutien, de leur disponibilité et de leur bonne humeur. Ils ont suivi le déroulement de cette thèse avec grand intérêt et m'ont prodigué de nombreux et précieux conseils. Les discussions fructueuses que nous avons eues ensemble ont contribué à la réalisation de ce travail.

Un grand merci à Monsieur **Abdelmajid HAJJAJI**, Professeur à l'école Nationale de Commerce et de Gestion d'El Jadida, à Madame **Jalila EL GHORDAF**, Professeur au Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation, de Béni Mellal et à Monsieur **Adil ABBASSI**, professeur à la faculté des sciences et Techniques de Béni-Mellal d'avoir accepté de relire ma thèse et d'en être rapporteurs. Je les remercie aussi pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail et de m'avoir permis de l'améliorer. Je remercie également Monsieur **M'hamed EL OMARI**, Professeur à la Faculté Polydisciplinaire de Béni-Mellal d'avoir accepté de participer au processus d'évaluation et de faire partie des membres du jury de la soutenance.

Mention particulière à tous les membres du laboratoire de Mathématiques et Applications et Calcul scientifique, professeurs et doctorants avec qui j'ai partagé des moments inoubliables. Merci pour la contribution au bon déroulement du travail et à la bonne ambiance.

Je tiens à remercier très sincèrement tous les membres de ma famille, pour leur soutien et leurs encouragements constants.

Je ne peux pas finir sans remercier tous mes professeurs depuis le primaire, en particulier mes enseignants du Département de Mathématiques de la faculté des Sciences et Techniques, Université Sultan Moulay Slimane, pour leurs orientations et leurs conseils judicieux, et à tout le corps professoral qui a contribué à ma formation.

Table des matières

Introduction générale

En tous domaines, nous nous étonnons que des frontières se révèlent floues. Il y a pourtant des raisons mathématiques de penser que, s'agissant des frontières, le flou n'est pas l'exception mais la règle, et que c'est au contraire la netteté qui est exceptionnelle. Qu'une telle affirmation s'appuie sur les mathématiques, science exacte par excellence, pourrait paraître paradoxal. Ce serait oublier que cette exactitude est justement ce qui leur permet d'aborder de façon rigoureuse l'incertain ou l'approximatif. En témoignent la théorie des probabilités, l'analyse (l'étude des fonctions, avec l'encadrement des erreurs et les notions de convergence et de passage à la limite), mais aussi la théorie des ensembles flous. Les bases de théorie floue ont été formulées en 1965 par le professeur Lotfi A. Zadeh, de l'Université de Berkeley en Californie [61]. Il a introduit la notion de sous-ensemble flou pour fournir un moyen de représentation et de manipulation des connaissances imparfaitement décrites, vagues ou imprécises. A cette époque, la théorie de la logique floue n'a pas été prise au sérieux excepté par quelques experts. Dès 1975, Mamdani et Assilian publient les premiers résultats permettant une exploitation de cette théorie dans des systèmes de réglage [35]. En utilisant une structure de contrôleur relativement simple, ils ont obtenu de meilleurs résultats lors de la commande de certains processus que ceux fournis par un régulateur standard. Après, en 1977, le danois Ostergaard [46] a appliqué la théorie floue à la commande de tubes broyeurs pour la fabrication de ciment. A cette époque, la plupart des études concernant les systèmes de régulation exploitant la thórie floue ont été réalisées en Europe [57]. A partir de 1985 environ, ce sont les Japonais [50] qui commencent à utiliser largement cette nouvelle théorie dans des produits industriels et de consommation pour résoudre des problèmes de réglage et de commande.

La théorie des ensembles flous est une théorie mathématique afin de représenter mathématiquement l'incertitude et l'imprécision relative à certaines classes d'objets et sert de fondement à la logique floue, la théorie des ensembles flous est en fait selon Zadeh est la formalisation la plus adaptée pour décrire de manière qualitative les variables linguistique. La théorie des ensembles flous et plus exactement la logique floue a de nombreuse applications. En 1978, la société danoise F.L.Smith réalise le contrôle d'un four à ciment. C'est la première veritable application industrielle de la logique floue. A fin des années 80, plusieurs applications commencent à immerger au Japon. Cette théorie a été utilisée dans l'industrie, le traitement d'eau, les métros, les systèmes de ventilation et de climatisation. A partir des années 90, le champ d'application est devenu trés vaste. Cette théorie a été utilisée dans l'éctroménager, les systèmes audio-visuels, traitement de signal.

Le travail que nous présentons dans ce manuscrit est organisé comme suit :

Dans le chapitre 1, nous présentons la théorie des ensembles flous, sa position par rapport à la théorie des ensembles classiques, ainsi que les concepts flous relatifs comme les relations floues, les quantités floues suite aux différents travaux élaborés par L.Zadeh [62], H. Prade et D. Dubois [17], H. Bandemer [10], S. Miyamoto [40], A. Kaufmann [27], H. Nguyen [45], M.Mizumoto et K. Tanaka [41].

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de la notion des espaces super-connexes flous. Ensuite, nous présentons quelques caractérisations des sous-ensembles super-connexes flous en utilisant la continuité des fonctions à valeur floue. Notre approche est basée sur les propriétés d'espaces topologiques flous connexes.

Dans le chapitre 3, nous définissons l'espace topologique flou et l'espace de lindelöf fermé et le sous espace de lindelöf fermé flou, le but principal est d'étudier la relation entre l'espace lindelöf flou, le sous-espace de lindelöf fermé flou et l'espace topologique flou dénombrable. Ensuite, nous donnons une généralisation et les propriétés des espaces de lindelöf.

Dans le chapitre 4, nous présentons quelques notions de base de la théorie des ensembles flous intuitionistiques introduite par K.Atanassov dans [4], ainsi nous donnons quelques propriétés importantes de cette nouvelle théorie.

Dans le chapitre 5, nous définissons la notion de topologie de hausdroff sur un espace métrique flou, ainsi nous montrons une équivalence entre la convergence dans un espace métrique séparable flou et l'adhérence d'un ensemble flou intuitionnistique.

Chapitre 1

Théorie des sous-ensembles flous

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques notions de base des sous-ensembles flous, ainsi quelques propriétés importantes. Commençons d'abord par la définition des sous-ensembles flous, puis, nous discutons ses caractéristiques, et ensuite, nous nous concentrons sur les sous-ensembles flous des nombres réels, appelés les nombres flous, et leurs α-coupes. Enfin, nous nous intéressons aux opérations élémentaires sur les nombres flous. Pour plus de détails, des références bibliographiques sont systématiquement données.

1.1 Les sous-ensembles flous

Dans cette section, nous présentons les notions mathématiques de la théorie des sous-ensembles flous [55]. Les sous-ensembles flous (ou parties flous) ont été introduits afin de modéliser la représentation humaine des connaissances, et ainsi améliorer les performances des systèmes de décision qui utilisent cette modélisation. Dans la théorie des ensembles classique il n'ya que deux situations acceptables pour un élément, appartient ou n'appartient pas à un sous ensemble, le mérite de Zadeh a été tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée permettre des graduation dans l'appartenance d'un élément à appartenir plus moins fortement à ce sous-ensemble (degré d'appartenance qui est l'extension de la fonction caractéristique d'un sous-ensemble classique). En fait un sous-ensemble flou est formellement défini par l'application μ, mais pour se ramener au langage des mathématiques classiques, nous parlerons d'un ensemble flou A, et noterons μ_A sa fonction d'appartenance.

Définition 1.1.1. Soit X un ensemble de référence et soit x un élément quelconque de X, un sous-ensemble flou A de X est défini par sa fonction d'appartenance μ_A, telle que

$$\begin{array}{rccc} \mu_A & : & X & \longrightarrow & [0,\, 1] \\ & & x & \mapsto & \mu_A(x), \end{array}$$

où μ_A représente le degré d'appartenance avec lequel x appartient au sous-ensemble flou A.

Remarque 1.1.1. Cette fonction d'appartenance est l'équivalent de la fonction caractéristique d'un ensemble classique.

Soit X un ensemble de référence et soit x un élément quelconque de X, un sous-ensemble flou A de X est défini comme l'ensemble des couples :

$$A = \{(x,\, \mu_A(x),\, x \in X\} \ \text{ avec } \ \mu_A \,:\, X \longrightarrow [0,\, 1],$$

tel que le sous-ensemble A de X est caractérisé par une fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ (degré d'appartenance) qui à chaque point x de X fait correspondre un réel de l'intervalle $[0,\, 1]$. Nous observons les trois possiblités suivantes :

$$\begin{cases} \mu_A(x) = 0, \\ 0 < \mu_A(x) < 1, \\ \mu_A(x) = 1, \end{cases}$$

où $\mu_A(x) = 0$ si x n'appartient pas à A, $0 < \mu_A(x) < 1$ si x appartient partiellement à A et $\mu_A(x) = 1$ si x appartient entièrement à A. La fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ inclut ou exclut donc à ses extrémités, tout élément x au sous-ensemble A, mais entre les valeurs extrêmes le degré d'appartenance varie à proportion de la proximité à l'ensemble.

1.1.1 Les caractéristiques d'un sous ensemble flou

Un sous-ensemble flou il est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance, et cette fonction nous permis de définir plusieurs caractéristiques pour ces ensembles. Dans cette partie, nous présentons quelques unes et qu'elles sont les plus utiles pour décrire les ensembles flous.

Définition 1.1.2. Le support d'un ensemble flou A est caractérisé par l'ensemble des éléments de X, qui sont à des degrés strictement positifs dans A, noté $\mathrm{S}(A)$ est défini formellement par :

$$\mathrm{S(A)} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X},\ \mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) > 0\}.$$

Définition 1.1.3. Le noyau d'un sous-ensemble flous A est caractérisé par l'ensemble des éléments de X qui sont réellement dans A, noté par $\mathrm{N(A)}$ est défini par :

$$\mathrm{N(A)} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X},\ \mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) = 1\}.$$

Remarque 1.1.2. Pour un ensemble classique A, le noyau et le support sont confondus avec A.

Définition 1.1.4. La hauteur d'un sous-ensemble flou est la borne supérieure de la fonction d'appartenance donné par :

$$\mathrm{H(A)} = \sup_{\mathrm{x} \in \mathrm{X}} \mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}).$$

Définition 1.1.5. — Un sous-ensemble flou A de X est dit normalisé si

$$\mathrm{H(A)} = 1.$$

— La cardinalité d'un sous-ensemble flou A de X, noté $|A|$, est le nombre d'éléments appartenant à A pondéré par leurs degré d'appartenance, i.e.

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

Si A est sous-ensemble ordinaire de X, sa cardinalité est le nombre d'éléments qui le composent, selon la définition classique.

Il est souvent intéressant de se référer à des ensembles classiques correspondant de façon approximative à des sous-ensembles flous donnés, pour établir des critères de prise de décision. Ainsi, la meilleure façon de faire cette liaison est d'utiliser la notion des α-coupes (sous-ensembles de niveau α).

Définition 1.1.6. Une α-coupe de A ou l'ensemble de niveau α, le sous ensemble classique A_α, défini par :

$$A_\alpha = \{x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Lorsque nous construisons une α-coupe A_α d'un sous-ensemble flou A, nous pouvons dire que α représente le seuil d'appartenance, relativement à la définition de A. Plus nous exigeons sur la notion d'appartenance, plus nous augmentons ce seuil, et A_α est un sous ensemble ordinaire de fonction caractéristique :

$$\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \mu_A(x) \geq \alpha, \\ 0 \text{ sinon }. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons le théorème de décomposition suivant

Théorème 1.1.1. Soit A un sous-ensemble flou de X, de fonction d'appartenance μ_A, nous avons :

$$\forall x \in X,\ \ \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha \chi_{A_\alpha}(x).$$

Proposition 1.1.1. Soient $\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in [0,1]$, nous avons les propriétés suivantes :

— Si $\alpha_1 \leq \alpha 2$, alors $A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1}$.

— $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$.

— $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$.

— Si $A \subset B$, alors $A_\alpha \subset B_\alpha$.

Remarque 1.1.3. Pour le réel α appartenant à l'ensemble $\{0, 1\}$, nous avons :

— Si $\alpha = 0$, alors $A_\alpha = X$.

— Si $\alpha = 1$, alors $A_\alpha = \mathrm{N}(A)$.

1.1.2 Opérations sur les ensembles flous

Etant donné que le concept de sous ensemble flou peut être vu comme une généralisation du concept d'ensemble classique, on est conduit à introduire des opérations sur les sous ensembles flous qui sont équivalentes aux opérations classiques de la théorie des ensembles lorsque on est à faire à des fonctions d'appartenance à valeur 0 ou 1. On présente ici les opérations les plus couramment utilisées. Soient A et B deux sous-ensembles flous définis par les fonctions d'appartenance μ_A et μ_B.

— **Egalité** : Deux sous ensembles flous A et B de X sont égaux si

$$\forall x \in X, \quad \mu_A(x) = \mu_B(x).$$

— Le complémentaire d'un sous ensemble flou A de X noté A^c est défini par :

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

— **Inclusion** : Soient A et B deux sous-ensembles flous de X, A est inclus dans B $(A \subset B)$ est défini par :

$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in X, \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

— **Union** : L'union de deux sous-ensembles flous A et B $(A \cup B)$ est défini par :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \, \mu_B(x)\}.$$

— **Intersection** : L'intersection de deux sous-ensembles flous A et B $(A \cap B)$ est défini par :

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}.$$

Remarque 1.1.4. La définition de l'union et l'intersection repose sur l'emploi des fonctions $\min$ et $\max$, mais jusqu'à présent personne n'a justifié l'emploi de ces fonctions pour l'union et l'intersection. Zadeh dans [62] conseille l'emploi des t-normes et t-conormes, en particulier $\min$ et $\max$ qui sont les seules fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui sont mutuellement distributives. Donc c'est seulement avec $\min$ et $\max$ que l'on peut généraliser la théorie des ensembles classiques. De plus d'un intérêt calculatoire, ces fonctions conservent la structure ordonnée de l'ensemble flou, en effet il parait illusoire de faire des calculs sur des notions subjectives qui ne serait en fait que des préférences exprimées numériquement, pour une étude plus complète sur les choix des opérateurs d'union et d'intersection nous pouvons se référer à [51].

En utilisant les définitions usuelles des opérateurs flous, nous avons trouvé les propriétés de commutativité, distributivité et associativité des opérateurs classiques.

Remarque 1.1.5.

1. En théorie floue, le principe du tiers exclu est contredit : $A \cup A^c \neq X$, autrement dit
$$\mu_{A\cup A^c}(x) \neq 1.$$
2. En théorie floue, un élément peut appartient à A et au complément de A en même temps : $A \cap A^c \neq \varnothing$, autrement dit
$$\mu_{A\cap A^c}(x) \neq 0.$$
3. La négation du support et le noyau d'un ensemble flou sont des notions duales,
$$\mathrm{N(A)^c = X - S(A)} \ \text{ et } \ \mathrm{S(A)^c = X - N(A)}.$$

1.2 Les nombres flous

Les nombres flous généralisent les nombres réels classiques, et plus précisément, les nombres flous sont des sous-ensembles flous de $\mathbb{R}$; l'ensemble des nombres réels, qui ont quelques propriétés additionnelles.

Définition 1.2.1. Soit A un sous-ensemble flou de $\mathbb{R}$. Alors, A est dit un nombre flou s'il satisfait les propriétés suivantes :

1. A est normal, i.e., il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_A(x_0) = 1$.
2. A est convexe flou, i.e., $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, $\mu_A(tx+(1-t)y) \geq \min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\}, \forall t \in [0,1]$.
3. μ_A est semi-continue supérieur sur $\mathbb{R}$,i.e., pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
   a- $\lim\limits_{x \to x_0} \sup \mu_A(x) = \mu_A(x_0)$.
   b- Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage $W \subset \mathbb{R}$ de x_0 tel que pour tout $x \in W$ on a, $\mu_A(x) - \mu_A(x_0) < \epsilon$.
4. μ_A est a support compact, i.e., l'ensemble $\overline{\{x \in \mathbb{R}\,;\ \mu_A(x) > 0\}}$ est compact.

On note par $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des nombres flous.

Remarque 1.2.1. 1. Tout nombre réel est un nombre flou dit "nombre flou trivial", i.e., $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Ainsi, on peut voir $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des singletons $\{x\}$; pour tout x un nombre réel, où la fonction d'appartenance associée est $\mu_{\{x\}} = \chi_{\{x\}}$ et nous avons

$$\mathbb{R} = \{\chi_{\{x\}}; x \in \mathbb{R}\}.$$

2. Les nombres flous généralisent les intervalles fermés, si on note I l'ensemble de tous les intervalles réels alors $I \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tel que :

$$I = \{\chi_{[a,b]}; [a,b] \subset \mathbb{R}\}.$$

3. Un nombre flou est dit positif (resp. strictement positif) si $\mathrm{S(A)} \subset [0, +\infty[$ (resp. $\mathrm{S(A)} \subset]0, +\infty[$).
4. un nombre flou est dit négatif (resp. strictement négatif) si $\mathrm{S(A)} \subset]-\infty, 0]$ (resp. $\mathrm{S(A)} \subset]-\infty, 0[$).

Le théorème suivant est connu par le théorème de Staking [11].

Théorème 1.2.1. Soit $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ un nombre flou et u_α désigne son α-coupe, alors nous avons

1. Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, u_α est l'intervalle fermé $[u_\alpha^-, u_\alpha^+]$, i.e. $u_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$, où
$$u_\alpha^- = \inf u_\alpha \text{ et } u_\alpha^+ = \sup u_\alpha.$$
2. Pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ tels que $\alpha_1 \leq \alpha_2$, nous avons $u_{\alpha_2} \subseteq u_{\alpha_1}$.
3. Pour toute suite croissante (α_n) telle que $\lim \alpha_n = \alpha \in [0, 1]$, nous avons
$$\bigcap_{n \geq 1} u_{\alpha_n} = u_\alpha.$$
4. Pour toute suite décroissante (α_n) telle que $\lim \alpha_n = 0$, nous avons
$$\overline{\bigcup_{n \geq 1} u_{\alpha_n}} = u_0.$$

1.2.1 Les opérations algébriques des nombres flous

Souvent, nous devons effectuer des opérations avec des paramètres incertains, c'est à dire, des nombres flous. Pour cette raison, les opérations analogues à celles classiques entre nombres réels ont été définies et develloppées de manière extensive. Avant d'entamer leur théorie, nous allons parler du principe d'extension de Zadeh [62], qui est l'une des idées les plus fondamentales de la théorie des ensembles flous. Il permet d'exploiter nos connaissances classiques dans le cas des données floues.

Définition 1.2.2. [11] Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux ensembles classiques et soit f une fonction de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$. Alors, elle peut être prolongée en une fonction $F : \mathbb{X}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{Y}_{\mathcal{F}}$ (fonction floue) tel que pour tout $A \in \mathbb{X}$; $B = f(A)$ est donnée par $B = \{(y, \mu(y)\,;\, y \in f(\mathbb{X})\}$, où pour tout $y \in f(\mathbb{X})$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\{\mu_A(x) \,:\, x \in \mathbb{X},\, y = f(x)\}, \text{ si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, \text{ si } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

La fonction F est appelée l'extension de Zadeh de f.

Remarque 1.2.2.

1. L'extension de Zadeh est bien définie pour tout ensemble flou $A \in \mathbb{X}_{\mathcal{F}}$. En effet, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, l'ensemble $\{\mu_A(x) \,:\, x \in \mathbb{X}\,,\, y = f(x)\}$ n'est pas vide et borné et ainsi, il admet au moins une borne supérieure.

2. Lorsque $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$; le produit cartésien des ensembles $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$.

   Soit $f : \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \longrightarrow \mathbb{Y}$; alors f peut être prolongée à $F : \mathbb{X}_{1\mathcal{F}} \times \mathbb{X}_{2\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{Y}_{\mathcal{F}}$ tel que pour tout $A \in \mathbb{X}_{1\mathcal{F}}$; $B \in \mathbb{X}_{2\mathcal{F}}$; $C = F(A, B)$, où

   $$\mu_C(y) = \begin{cases} \sup\{\mu_{A\times B}(x_1, x_2) \,:\, x_1 \in \mathbb{X}_1,\, x_2 \in \mathbb{X}_2,\, y = f(x_1, x_2)\}, \text{ si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, \text{ si } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

   où

   $$\mu_{A\times B}(x_1, x_2) = \min\{\mu_A(x_1);\, \mu_B(x_2)\}.$$

Pour le cas des nombres flous, il est naturel de poser la question de savoir si l'image d'un nombre flou par une fonction définit aussi un nombre flou. Le théorème suivant confirme cette propriété pour les fonctions continues et il a été développé en utilisant le principe d'extension de Zadeh. Pour une démonstration détaillée, voir [11].

Théorème 1.2.2. Toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être prolongée à une fonction $F : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, et pour tout $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ nous pouvons déterminer $B = F(A)$ par ses α-coupes $[B]_\alpha = [B_\alpha^-; B_\alpha^+]$, $\alpha \in]0, 1]$, où

$$B_\alpha^- = \inf\{f(x); x \in [A]_\alpha\},$$

et

$$B_\alpha^+ = \sup\{f(x); x \in [A]_\alpha\},$$

où $[A]_\alpha$, $\alpha \in]0, 1]$ désignent les α-coupes de A.

La proposition suivante est un cas particulier du théorème 1.2.2.

Proposition 1.2.1. Soit $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ un nombre flou tel que $[A]_\alpha = [A^-_\alpha; A^+_\alpha]$, $\alpha \in [0;1]$ ses α-coupes. Alors

1. La multiplication de A par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}^+$, est un nombre flou et ses α-coupes sont données par
$$[\lambda A]_\alpha = \lambda [A]_\alpha,\ \forall \alpha \in [0,1],$$
où, $\lambda[A]_\alpha$ est le produit usuel d'un réel par un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. Pour $\lambda = -1$, l'opposé de A, noté A est un nombre flou et ses α-coupes sont données par
$$[-A]_\alpha = -[A]_\alpha,\ \forall \alpha \in [0,1].$$
3. Si $0 \notin [A]_\alpha$, alors, l'inverse de A, noté A^{-1} ou $\frac{1}{A}$ est un nombre flou et ses α-coupes sont données par
$$[A^{-1}]_\alpha = \left[\frac{1}{A}\right]_\alpha,\ \forall \alpha \in [0,1],$$

Maintenant, nous rappelons quelques opérations algébriques des nombres flous.

Proposition 1.2.2. Soient $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ deux nombres flous, alors la somme de ces deux nombres flous, notée $A + B$, est un nombre flou et ses α-coupes sont données par

$$[A + B]_\alpha = \{x + y / x \in [A]_\alpha, y \in [B]_\alpha\} = [A]_\alpha + [B]_\alpha,$$

où $[A]_\alpha + [B]_\alpha$ est la somme de deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2.3. [11] Soient $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ deux nombres flous, alors le produit de A et B, noté $C = A.B$ est un nombre flou et ses α-coupes $[C]_\alpha = [A.B]_\alpha = [C^-_\alpha, C^+_\alpha]$, $\alpha \in [0,1]$ sont données par :

$$C^-_\alpha = (A.B)^-_\alpha = \min\{A^-_\alpha B^-_\alpha, A^-_\alpha B^+_\alpha, A^+_\alpha B^-_\alpha, A^+_\alpha B^+_\alpha\},$$

et

$$C^+_\alpha = (A.B)^+_\alpha = \max\{A^-_\alpha B^-_\alpha, A^-_\alpha B^+_\alpha, A^+_\alpha B^-_\alpha, A^+_\alpha B^+_\alpha\}.$$

Remarque 1.2.3. L'ensemble $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ n'est pas un espace véctoriel car les opérations $(+)$ et $(\cdot)$ n'admettent pas d'éléments symétriques. C'est une propriété qui restreint plusieurs domaines de mathématiques floues, comme par exemple, le domaine des équations différentielles et les équations aux dérivées partielles floues.

1.3 Analyse floue

1.3.1 Espace métrique des nombres flous

Maintenant, nous définissons une distance sur l'espace des nombres flous $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Définition 1.3.1. Soit A, B deux nombres flous, où $[A]_\alpha = [A_\alpha^-, A_\alpha^+]$ et $[B]_\alpha = [B_\alpha^-, B_\alpha^+]$ ses α-coupes respectivement. Nous définissons la distance entre les nombres flous A et B par :

$$\begin{array}{rcccc} D_\infty & : & \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & (A, B) & \longrightarrow & D_\infty(A, B), \end{array}$$

avec

$$D_\infty(A, B) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|A_\alpha^- - B_\alpha^-|, |A_\alpha^+ - B_\alpha^+|\}.$$

L'application D_∞ est appelée la distance de Hausdorff entre les nombres fous.

Nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.3.1.

1. $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}; D_\infty)$ est un espace métrique.
2. D_∞ est invariante par translation, i.e., $D_\infty(u + w, v + w) = D_\infty(u, v)$, $\forall u, v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.
3. $D_\infty(\lambda.u, \lambda.v) = |\lambda| D_\infty(u, v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $D_\infty(u + w, v + h) \leq D_\infty(u, v) + D_\infty(w, h)$, $\forall u, v, w, h \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Théorème 1.3.1. [11] $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}; D_\infty)$ est un espace métrique complet.

1.3.2 Les fonctions à valeurs floues

Définition 1.3.2. Soit $f\ :\ [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction et t_0 un point de $[a,\ b]$. On dit que f est continue au point t_0 si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta_\epsilon > 0\ /\forall t \in [a,\ b] \text{ tel que } |t - t_0| < \eta_\epsilon \Longrightarrow D_\infty(f(t),\ f(t_0)) < \epsilon.$$

Remarque 1.3.1. La fonction $f\ :\ [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est continue en $t_0 \in [a,\ b]$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta_\epsilon > 0\ /\forall t \in [a,\ b]\,;\ |t - t_0| < \eta_\epsilon \Longrightarrow \sup_{\alpha\in[0,\,1]} \max\{|f_\alpha^-(t) - f_\alpha^-(t_0)|,\ |f_\alpha^+(t) - f_\alpha^+(t_0)|\} < \epsilon.$$

Alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta_\epsilon > 0\ /\forall t \in [a,\ b]\,;\ |t - t_0| < \eta_\epsilon \Longrightarrow |f_\alpha^\pm(t) - f_\alpha^\pm(t_0)| < \epsilon \text{ pour tout } \alpha \in [0,\ 1].$$

Maintenant, nous donnons quelques résultats concernant la mesurabilité et l'intégrabilité des fonctions à valeurs floues.

Définition 1.3.3. Soient $(X;\Sigma)$ et $(Y;T)$ deux espaces mesurables avec Σ et T deux σ-agèbres. Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est dite mesurable si

$$f^{-1}(\Gamma) \subseteq \Sigma,\ \text{pour tout } \Gamma \in T.$$

Définition 1.3.4. Une fonction $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est dite fortement mesurable si $\forall \alpha \in [0,\ 1]$, les ensembles $f_\alpha(x)$ définies par $f_\alpha(x) = [f(x)]_\alpha$ sont mesurables.

Définition 1.3.5. Soit $f\ :\ [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction. L'intégrale de Aumann est définie par

$$\left[\int_a^b f(t)dt\right]_\alpha = \int_a^b [f(t)]_\alpha dt = \int_a^b f_\alpha(t)dt,\ \text{ pour tout } \alpha \in [0,\ 1].$$

Proposition 1.3.2. Toute fonction continue à valeurs floues est Aumann intégrable.

1.3.3 La diférentiabilité des fonctions à valeurs floues

Dans cette partie, nous rappelons la notion de la différentiabilité des fonctions à valeurs floues, nous començons par la différentiabilité au sens de Hukuhara.

Définition 1.3.6. Soit $f : (a,\, b) \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on dit que f est différentiable au sens de Hukuhara si pour tout $h > 0$ suffisamment petit la H-différence $f(x+h) \ominus f(x)$ et $f(x) \ominus f(x-h)$ existent, et il existe un élément $f'(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \ominus f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \ominus f(x-h)}{h} = f'(x).$$

Le nombre flou $f'(x)$ s'appelle la dérivée de Hukuhara de f au point x.

Maintenant, nous donnons la définition de la différentiabilité généralisée, voir [11].

Définition 1.3.7. Soit $f : (a,\, b) \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on dit que f fortement différentiable en $x_0 \in (a, b)$, s'il existe un élément $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathbb{F}}$ telle que

1. pour tout $h > 0$ suffisamment petit, nous avons
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0-h)}{h} = f'(x_0).$$
2. pour tout $h > 0$ suffisamment petit, nous avons
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0+h)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h) \ominus f(x_0)}{-h} = f'(x_0).$$
3. pour tout $h > 0$ suffisamment petit, nous avons
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) \ominus f(x_0)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h) \ominus f(x_0)}{-h} = f'(x_0).$$
4. pour tout $h > 0$ suffisamment petit, nous avons
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0+h)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0-h)}{-h} = f'(x_0).$$

Remarque 1.3.2. Le cas (1) Correspondant à la différentiabilité au sens de Hukuhara.

Chapitre 2

Espaces super-connexes flous

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats sur les espaces super-connexes dans le cas classique. Ensuite, nous définissons la notion des espaces super-connexes flous. Ainsi, nous présentons également quelques caractérisations des sous-ensembles super-connexes flous en utilisant la continuité des fonctions à valeur floue. Notre approche est basée sur les propriétés d'espaces topologiques flous connexes [18].

2.1 Introduction

Actuellement, il y a beaucoup d'activité dans le domaine des espaces topologiques flous, une topologie sur X peut être considérée comme une famille de fonctions caractéristiques avec les opérations d'ensembles habituelles $\subset$, $\cup$, $\cap$, et le complémentaire remplacées par les opérations suivantes $\leq$, $\vee$, $\wedge$ et $1-\mu_A$, respectivement. Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion d'un espace connexe flou et nous donnons sa caractérisation, et dans [6] Azad a observé que la connexité floue est préservée sous la continuité floue. Dans ce chapitre, nous donnons une autre caractérisation de cette connexité, nous définissons également un sous-ensemble connexe flou d'un espace topologique flou et nous étudions leurs propriétés et nous introduisons aussi la notion d'espace super-connexe flou [31], et en conséquence nous présentons quelques propriétés des espaces super-connexes flous.

2.2 Cas classique

2.2.1 Notions fondamentales

Nous donnons quelques définitions et propriétés des espaces super-connexes, nous commençons par la définition des espaces connexes, voir [12].

Définition 2.2.1. Un espace topologique $(X;T)$ est dit connexe si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont X et $\emptyset$.

Remarque 2.2.1. Il revient au même de dire que X n'admet pas de partition non triviale d'ouverts (ou de fermés).

Définition 2.2.2. [12] Une partie A de X est dite connexe si $(A;T_A)$ est connexe (T_A est la topologie induite).

Proposition 2.2.1. [12] Une partie A de X est connexe, si et seulement si, il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 de $(X;T)$ tels que $A \subset O_1 \cup O_2$ entraîne $A \subset O_1$ ou $A \subset O_2$.

2.2.2 Les connexes de $\mathbb{R}$

Théorème 2.2.1. [12] Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

2.2.3 Fonction continue et la connexité

Le résultat ci-dessous est à la fois simple et lourd de conséquences.

Théorème 2.2.2. [12] L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Corollaire 2.2.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** Si $f \in C^0(X,\mathbb{R})$ avec (X,T) espace topologique connexe, alors $f(X)$ est un intervalle.

Le résultat suivant donne une caractérisation de la connexité.

Proposition 2.2.2. Un espace topologique (X, T) est connexe, si et seulement si, toute fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante.

2.2.4 Union, adhérence et produit

Théorème 2.2.3. [12] Toute famille $(A_i)_i i \in I$ de parties connexes d'un espace topologique (X, T) ayant deux à deux une intersection non vide a une réunion connexe.

Preuve. Soit $(A_i)_i i \in I$ une famille de parties connexes telle que pour tout $i,\ j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $A = \cup_{i \in I} A_i \subset O_1 \cup O_2$. Pour un $i_0 \in I$ fixé, A_{i_0} est connexe et inclus dans $A \subset O_1 \cup O_2$. Cela entraîne que $A_{i_0} \subset O_1$ ou $A_{i_0} \subset O_2$. Si $A_{i_0} \subset O_1$, l'hypothèse $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ entraîne que $A_i \cap O_1 \neq \emptyset$ tandis que la connexité de A_i donne $A_i \subset O_1$, ce pour tout $i \in I$. On en déduit que $A \subset O_1$, l'autre possibilité $A_{i_0} \subset O_2$ donnant $A \subset O_2$. En conclusion, A est connexe. □

Définition 2.2.3. Soit (X, T) un espace topologique quelconque. Pour tout point x de X, on appelle composante connexe de x et on note $C(x)$ le plus grand connexe contenant x est donné par :

$$C(x) = \{\cup_{x \in C \subset X} C / C \text{ connexe}\}.$$

Corollaire 2.2.2. Les composantes connexes d'un espace topologique quelconque (X, T) sont des fermés.

Remarque 2.2.2. Il est clair que deux points x et y appartiennent à un même connexe, si et seulement si, $C(x) = C(y)$.

Proposition 2.2.3. La relation "appartenir à un même connexe" qui se traduit par $C(x) = C(y)$ est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes de X. Ainsi les composantes connexes de X forment une partition de X.

Remarque 2.2.3. D'un point de vue intuitif, les composantes connexes de X sont les morceaux d'un seul tenant de X. Par exemple les composantes connexes de $X = [0,1] \cup [2,3]$ sont $[0,1]$ et $[2,3]$.

Théorème 2.2.4. Si une partie A d'un espace topologique (X, T) est connexe alors son adhérence $\bar{A}$ est connexe.

Théorème 2.2.5. [12] Le produit des espaces connexes est un espace connexe.

Corollaire 2.2.3. Les pavés de $\mathbb{R}^n$ sont connexes.

2.2.5 Espace super-connexe

Afin de définir l'espace super-connexe, nous rappelons quelques définitions et nous donnons quelques notations utiles. Soit A un sous ensemble de X, L'adhérence et l'intérieur de A dans X sont notées, respectivement, par $\bar{A}$ et $Int(A)$.

Définition 2.2.4. [31] A est dit ouvert régulier (resp. semi-ouvert) si $A = Int(A)$ (resp. $A \subset Int(A)$; $A \subset In\bar{t}(A)$)

Une topologie τ_α a été introduite en définissant ses ensembles ouverts comme étant les ensembles α ce sont les ensembles $A \subset X$ tels que $A \subset Int(In\bar{t}(A))$ ces ensembles sont généralement appelés α-ouverts, le complémentaire d'un ensemble ouvert régulier (resp. pré-ouvert, semi-ouvert, α-ouvert) est appelé fermé régulier (resp. pré-fermé, semi-fermé, α-fermé) .

L'espace X sera appelé un α-espace (resp. semi-espace), si et seulement si, tout α-ouvert (resp. semi-ouvert) sous-ensemble de X est ouvert.

Nous désignons par $d(A)$, l'ensemble de tous les points d'accumulation de A. Un ensemble sans points d'accumulation sera appelé non-cumulatif.

Rappelons qu'un ensemble $A \subset X$ est dit dense dans lui même si $A \subset d(A)$ ou de manière équivalente si A n'a aucun point isolé.

L'espace X non vide est irréductible si tous deux sous-ensembles ouverts non vides de X se croisent, ou de manière équivalente si chaque sous-ensemble non vide et semi-ouvert de X est dense. Un espace irréductible est appelé aussi hyper-connexe.

L'espace X est dit sous-maximal si chaque sous-ensemble dense de X est ouvert. L'espace X est extrémal, si et seulement si, chaque ensemble semi-ouvert est pré-ouvert, l'espace X est dit S-espace (ou S-topologie) si chaque sous-ensemble qui contient un sous-ensemble ouvert non vide est ouvert.

Définition 2.2.5. [23] Un espace est dit super-connexe, si et seulement si, c'est un S-espace connexe.

Théorème 2.2.6. Soit X un espace, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'espace X est super-connexe.
2. L'espace X est semi-espace connexe.
3. L'espace X est α-espace irréductible.
4. L'espace X est S-espace irréductible.

Théorème 2.2.7. Soit X un espace, nous avons les équivalences suivantes :

1. L'espace X est super-connexe.
2. Tous les sous-ensembles ouverts non vide de X forment un filtre sur X.
3. Pour un certain filtre $\mathcal{F}$ sur X, nous avons $\mathcal{F} \cap \{\emptyset\} = \tau$.

2.3 La connexité floue

Dans cette section, nous présentons les outils mathématiques et nous fixons les notations que nous utiliserons dans la suite de ce chapitre. Nous rappelons la notions des sous-ensembles flous et quelques propriétés.

Définition 2.3.1. [62] Soit X un espace. Un sous espace flou de X est une fonction de X dans $[0,1]$. Nous désignons par μ_A la fonction caractéristique d'une partie floue A de X.

L'union $\vee_{\alpha \in A} \lambda_\alpha$, et l'intersection $\wedge_{\alpha \in A} \lambda_\alpha$, des sous ensembles flous de λ'_α sont les fonctions définies, respectivement, par : Pour $x \in X$,

$$(\vee_{\alpha \in A} \lambda_\alpha)(x) = \sup\{\lambda_\alpha(x) | \alpha \in A\},$$

et

$$(\wedge_{\alpha \in A} \lambda_\alpha)(x) = \inf\{\lambda_\alpha(x) | \alpha \in A\}.$$

Définition 2.3.2. [62] Pour tous sous-ensembles flous λ et δ, nous avons $\lambda \leq \delta$ (ou $\delta \geq \lambda$), si et seulement si, pour tout $x \in X$, $\lambda(x) \leq \delta(x)$. Le complement λ' de sous ensemble flou λ de X est $1 - \lambda$ définie par :

$$\lambda'(x) = (1 - \lambda)(x) = 1 - \lambda(x) \text{ pour tout } x \in X;$$

où 0 et 1 sont repésenés, respectivement, par $\mu_\varnothing$ et μ_X.

Définition 2.3.3. Soit $F : X \longrightarrow Y$ une fonction de X à valeur dans Y. Si λ est un sous ensemble flou de X et δ dans Y, alors $F(\lambda)$ et $F^{-1}(\lambda)$ ont définies par : Pour $y \in Y$

$$F(\lambda)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y \in F^{-1}(y)} \lambda(y) & \text{si } F^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et pour $x \in X$, $F^{-1}(\delta)(x) = \delta(F(x))$.

2.3.1 Topologie floue

Définition 2.3.4. [13] Une topologie floue sur X est une famille $\tau(X)$ des parties floues qui vérifient les conditions suivantes :

— 0 et 1 appartient à $\tau(X)$.

— L'union quelques des éléments de $\tau(X)$ est un élément de $\tau(X)$.

— L'intersection finie des éléments de $\tau(X)$ est un élément de $\tau(X)$.

Remarque 2.3.1. X muni de $\tau(X)$ est appelé espace topologique flou.

Les éléments de $\tau(X)$ sont appelés les parties ouvertes floues et leurs complémentaires sont les parties fermées de l'espace topologique flou X. Pour une partie floue λ de X, L'adhérence $\bar{\lambda}$ et l'intérieur λ^i de λ sont définies, respectivement, par :

$$\bar{\lambda} = \wedge\{\delta : \delta \geq \lambda,\, 1 - \delta \in \tau(x)\},$$

et

$$\lambda^i = \vee\{\delta : \delta \leq \lambda,\, \delta \in \tau(x)\}.$$

Définition 2.3.5. [5] Une partie ouverte floue λ est dite régulière si $\bar{\lambda}^i = \lambda$ et une partie fermée floue δ est dite régulière si $\overline{\delta^i} = \delta$.

Remarque 2.3.2.
1. Le Complément d'une partie ouverte floue régulière est une partie fermée floue régulière et vice versa.
2. l'adhérence d'une partie ouverte floue est une partie fermée floue régulière et l'intérieur d'une partie fermée floue est une partie ouverte floue régulière.

Définition 2.3.6. [5]

— Un ensemble flou λ est dit semi-ouvert flou s'il existe un ensemble ouvert flou δ tel que $\delta \leq \lambda \leq \bar{\delta}$. Ce qui équivalent à $\lambda \leq \lambda^i$. Le Complémentaire d'un sous-ensemble semi ouvert flou est appelé sous ensemble semi fermé flou. Ainsi, le sous-ensemble δ est semi fermé flou, si et seulement si, $\bar{\delta}^i \leq \delta$, autrement, s'il existe une partie fermée floue k telle que $k^i \leq \delta \leq k$.

— Une fonction F d'un espace topologique flou. X à valeur dans un espace topologique flou. Y est continue floue (F-continue) [54] si pour toute ensemble ouvert flou E de Y, $F^{-1}(E)$ est un ensemble ouvert flou de X.

— Warren [54] a définit un sous-espace flou A de l'espace topologique flou $(X, \tau(X))$ par :
Si $A \in X$, alors la famille $\{T_A = \lambda/A : \lambda \in \tau(X)\}$ est une topologie sur A, où i/A est la restriction de λ sur A. Alors (A, T_A) est un sous espace flou de l'espace topologique flou X avec sous ensemble sous-jacent A. Un sous-ensemble flou a de A est sous-ensemble fermé flou de A, si et seulement si, il existe un sous-ensemble fermé b de X tel que $a = b/A$.

Dans [58], Wong a défini la base et sous-base pour une topologie floue donnée de la manière analogue à cette concepte dans la topologie générale. Dans [54], Warren a établi les résultats suivants :

Théorème 2.3.1. [54] Pour tout ensemble flou δ d'un espace topologique flou, nous avons

$$1 - \bar{\delta} = (1 - \delta)^i \text{ et } 1 - \delta^i = \overline{(1 - \delta)}$$

Théorème 2.3.2. [54] Soit (A, T_A) un sous-espace flou d'un espace topologique flou $(X, \tau(X))$, et soit a une partie floue de A. De plus soit b le sous-ensemble flou de X défini par $b(x) = a(x)$ si $x \in A$ et $b(x) = 0$ si $x \in X - A$. Alors $\bar{a} = \bar{b}/A$, où $\bar{a}$ est l'adhérence de a par rapport à T, et $\bar{b}$ est l'adhérence de b par rapport à $\tau(X)$.

2.3.2 Topologie produit floue

Définition 2.3.7. Soit $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille des parties non vides. Soit $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ le produit usuel de X_α et soit P_α la projection de X sur X_α. De plus, nous supposons que chaque X_α est un espace topologique flou avec la topologie floue τ_α. La topologie floue engendrée par $\rho = \{P_\alpha^{-1}(b_\alpha) : b_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in A\}$ comme sous-base, est appelée la topologie produit floue sur X. Clairement si λ est un élément basique de la topologie produit, alors pour $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in X$, il existe $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in A$ telle que

$$\lambda(x) = \min\{b_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) : i = 1, 2, ..., n\}.$$

Maintenant, nous présentons les résultats élémentaires suivants que nous utiliserons dans la suite de notre travail.

Théorème 2.3.3. Si $A \subset X$ tel que μ_A est un ouvert flou (fermé) dans un espace topologique flou X et λ_A est un sous-ensemble ouvert flou (fermé) du sous-espace A de X, alors l'ensemble flou λ est un ouvert flou (fermé) de X où $\lambda(x) = \lambda_A(x)$ si $x \in A$ et $\lambda(x) = 0$ si $x \in X - A$.

Preuve. $\lambda_A = \delta/A$ pour certain partie ouverte floue (fermée), soit δ dans X. Alors $\lambda = \delta \wedge \mu_A$. Par conséquent λ est un ouvert flou (fermé) comme δ l'est aussi. □

Corollaire 2.3.1. Si $B \subset A \subset X$ et μ_A est un ouvert flou (fermé) de l'espace topologique flou X et μ_B/A est un ouvert flou (fermé) d'un sous ensemble flou A de X, alors μ_B est ouvert flou (fermé) dans X.

Preuve. Puisque μ_B/A est un ouvert flou (fermé) dans A, il existe une partie ouverte floue (fermée) δ dans X telle que $\mu_B/A = \delta/A$. Maintenant, nous considérons $\mu_B = \delta \wedge \mu_A$. □

Théorème 2.3.4. Soit X un espace topologique flou et soient U, W et Z des sous-ensembles de X tels que $U \subset W \cap Z$, de plus, nous supposons que a est une partie floue du sous-ensemble U de X et b est définie par $b(x) = a(x)$ si $x \in U$ et $b(x) = 0$ si $x \in X - U$. Si b/W est un ouvert flou (fermé) dans W et b/Z est un ouvert flou (fermé) dans Z. Alors $b/W \cup Z$ est un ouvert flou (fermé) dans $W \cup Z$.

Preuve. Nous avons $b/W = \lambda/W$ et $b/Z = \delta/Z$ pour certain ensemble ouvert flou (fermé) λ

et δ dans X, ainsi $b/W \cup Z = (\lambda \wedge \delta)/W \cup Z$ qui un ouvert (fermé) flou dans $W \cup Z$. □

Corollaire 2.3.2. Si μ_U/W est un ouvert (fermé) flou dans W et μ_U/Z est un ouvert (fermé) flou dans Z, alors $\mu_U/W \cup Z$ est un ouvert (fermé) flou dans $W \cup Z$.

Preuve. La démonstration découle du Théorème 2.3.4. □

2.4 Espace connexe flou

Définition 2.4.1. Un espace topoligique flou X est dit connexe flou s'il n'admet pas des ensembles ouverts (fermés) flous propres. (un ensemble flou λ de X est propre si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$).

Maintenant, nous donnons des caractérisations des ensembles flous connexes.

Théorème 2.4.1. Un espace topoligique flou X est connexe flou, si et seulement s'il ne possède pas des ensembles ouverts flous non nuls λ et δ tel que $\lambda + \delta = 1$.

Preuve. Supposons que λ et δ existent, alors λ est un ensemble ouvert (fermé) flou propre dans X. Si X n'est pas connexe, alors il a un ensemble ouvert (fermé) flou propre λ. Ainsi $\delta = 1 - \lambda$ est un ensemble ouvert flou tel que $\delta \neq 0$ et $\lambda + \delta = 1$. □

Corollaire 2.4.1. Un espace topologique flou X est connexe flou, si et seulement s'il ne possède pas des ensembles flous non nuls λ et δ tels que $\lambda + \delta = 1$, $\bar{\lambda} + \delta = \lambda + \bar{\delta} = 1$.

Remarque 2.4.1. Le produit des espaces connexes flous n'est pas en général un espace connexe flou. En effet, pour $X_i = [0,1], i \in I$. Pour certains $j, k \in I$, soit

$$\tau(X_j) = \{0, 1, \lambda\} \text{ et } \tau(X_k) = \{0, 1, \lambda'\},$$

où $\lambda(x) = \frac{1}{3}$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $\tau(X_i) = \{0,1\}$ pour tout $i \in I$ et $i \neq j,\ i \neq k$. Alors, chaque X_i est un connexe flou mais $\prod_{i\in I} X_i$ n'est pas le cas, puisque $\tau(\prod_{i\in I} X_i)$ contient des ensembles ouverts flous non nuls $P_j^{-1}(\lambda)$ et $P_k^{-1}(\lambda')$ tels que pour tout $x \in \prod_{i\in I} X_i$

$$P_j^{-1}(\lambda) + P_k^{-1}(\lambda') = 1.$$

2.4.1 Sous-espace connexe flou d'un espace topologique flou

Définition 2.4.2. Si $A \subset X$, X est un espace topologique flou, alors A est un sous-espace connexe flou de X si A est un espace connexe flou en tant qu'un sous-espace flou de X.

Remarque 2.4.2. Il est facile de voir que si $A \subset Y \subset X$, alors A est un sous-espace connexe flou de l'espace topologique flou X, si et seulement s'il est un sous-ensemble connexe flou du sous espace flou Y de X.

Théorème 2.4.2. Si X est un espace topologique flou et A est un sous ensemble connexe flou de X, et λ et δ sont ensembles ouverts flous non nuls dans X satisfaisant $\lambda + \delta = 1$, alors, soit $\lambda/A = 1$ soit $\delta/A = l$.

Preuve. Nous supposons qu'il existe $x_0,\ y_0 \in A$ tels que $\lambda(x_0) \neq 1$ et $\delta(y_0) \neq 1$. Alors $\lambda + \delta = 1$ ce qui implique que $\lambda/A + \delta/A = 1$, où $\lambda/A \neq 0$ et $\delta/A \neq 0$. Ainsi d'après le théorème 2.4.1, A n'est pas un espace connexe flou. $\square$

Définition 2.4.3. Soient λ et δ des parties floues d'un espace topologique flou X. λ et δ sont séparés l'un de l'autre, si $\bar{\lambda} + \delta \leq 1$ et $\lambda + \bar{\delta} \leq 1$.

Théorème 2.4.3. Soit $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une famille des parties connexes floues de X telles que, pour tout α et β dans A et $\alpha \neq \beta$, μ_{A_α} et μ_{A_β} ne sont pas séparables entre eux. Alors $\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha$ est un sous espace connexe flou de X.

Preuve. Nous supposons $Y = \cup_{\alpha\in A} A_\alpha$ n'est pas un connexe de X. Alors il existe deux parties ouvertes floues non nulles a et b de Y tel que $a + b = 1$. Nous fixons $\alpha_0 \in A$. Alors $A_{\alpha 0}$ est un sous espace connexe flou de Y comme il n'est dans X. Par conséquent, d'après le théorème 2.4.2, nous avons

$$\mu_{A_{\alpha 0}}/A_{\alpha 0} = a/A_{\alpha 0} \text{ ou } \mu_{A_{\alpha 0}}/A_{\alpha 0} = b/A_{\alpha 0}.$$

Sans perte de généralité, nous supposons que

$$\mu_{A_{\alpha 0}}/A_{\alpha 0} = a/A_{\alpha 0}, \qquad \text{(i)}.$$

Nous définissons λ et δ par $\lambda(x) = a(x)$ si $x \in Y$, $\lambda(x) = 0$ si $x \in X - Y$, $\delta(x) = b(x)$ si $x \in Y$ et $\delta(x) = 0$ si $x \in X - Y$.

D'après le Théorème 2.3.2, nous avons

$$\bar{a} = \bar{\lambda}/Y \text{ et } \bar{b} = \bar{\delta}/Y, \quad \text{(ii)}.$$

Alors (i) implique que $\mu_{A_{\alpha 0}} \leq \lambda$. Par conséquent

$$\overline{\mu_{A_{\alpha 0}}} \leq \bar{\lambda}, \quad \text{(iii)}.$$

Soit $\alpha \in A - \{\alpha_0\}$. Puisque A_α est un sous espace connexe flou de Y, alors soit $\mu_{A_{\alpha 0}}/A_{\alpha 0} = a/A_{\alpha 0}$ ou $\mu_{A_{\alpha 0}}/A_{\alpha 0} = b/A_{\alpha 0}$. Ainsi, nous avons $\mu_{A_{\alpha 0}}/A_{\alpha 0} \neq b/A_{\alpha 0}$.

Nous supposons que $\mu_{A_\alpha}/A_\alpha = b/A_\alpha$. Par conséquent $\mu_{A_\alpha} \leq \delta$. Ainsi

$$\overline{\mu_{A_\alpha}} \leq \bar{\delta} \text{ (iv)}$$

Puisque $\bar{a} + b = a + \bar{b} = 1$, $\bar{\lambda} + \delta \leq 1$ par (ii) et la définition de λ et δ. Alors (iii) et (iv) implique que

$$\bar{\mu}_{A_{\alpha 0}} + \mu_{A_\alpha} \leq 1 \text{ et } \mu_{A_{\alpha 0}} + \bar{\mu}_{A_\alpha} \leq 1.$$

Ceci mène à une contradiction puisque $\mu_{A_{\alpha_\alpha}}$ et μ_{A_α} ne sont pas séparable entre eux.
Ainsi $\mu_{A_\alpha}/A_\alpha \neq b/A_\alpha$. Par conséquent $\mu_{A_\alpha}/A_\alpha = a/A_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$. Ce qui implique que $\mu_Y = a$. Or $a + b = 1$, alors $b(x) = 0$ pour tout $x \in Y$, mais $b \neq 0$. Par conséquent notre supposition que Y n'est pas un sous-ensemble connexe flou de X est fausse. □

Corollaire 2.4.2. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est une famille des parties connexes floues d'un espace topologique flou X et $\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha \neq \varnothing$, alors $\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$ est un sous-espace connexe flou de X.

Indice : pour tout $\alpha,\ \beta \in A$, nous avons $A_\alpha \cap A_\beta \neq \varnothing$. Alors $\overline{\mu_{A_\alpha}} + \mu_{A_\beta} > 1$ et $\mu_{A_\alpha} + \overline{\mu_{A_\beta}} > 1$. Ainsi les fonctions caractéristiques de chaque couple de membres de la famille ne sont pas séparées les unes des autres.

Corollaire 2.4.3. Si $\{A_n : n = 1, 2, ...\}$ est une suite des parties connexes floues d'un espace topologique flou X telle que μ_{A_n} et $\mu_{A_{n+1}}$ ne sont pas séparable entre eux, pour $n = 1, 2, ...$, Alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ est un sous-espace connexe flou de X.

Théorème 2.4.4. Si A et B des sous-espaces d'un espace topologique flou X tel que $\mu_A \leq \mu_B \leq \overline{\mu_A}$ et A est sous-espace connexe flou de X, Alors B est lui même un sous-espace connexe flou de X.

2.5 Super-connexe flou

Levine a introduit la notion D-espace comme étant un espace topologique dont tout ensemble ouvert non vide est dense. Il a défini un espace super-connexe comme étant un espace topologique qui n'a pas de sous-ensemble ouvert régulier propre et il a montré qu'un espace est super-connexe, si et seulement si, il s'agit d'un D-espace. Nous définissons donc un D-espace flou comme un espace topologique flou qui ne possède pas un ouvert régulier flou propre et nous appellerons également un tel espace un espace super-connexe flou. Puisqu'un ensemble ouvert (fermé) flou est un ensemble ouvert régulier flou, alors tout espace super-connexe flou est un espace connexe flou, mais l'exemple suivant montre que l'inverse n'est pas vrai.

Exemple 2.5.1. Soit $X = [0, 1]$. Pour tout $x \in X$, nous définissons $\lambda(x) = \frac{1}{6}$ et $\mu(x) = \frac{2}{3}$. Soit $\tau(X) = \{0, 1, \lambda, \mu\}$. Alors l'espace topologique flou X est un espace connexe flou mais n'est un espace super-connexe flous, puisque il possède une partie ouverte floue propre μ.

Nous définissons également des sous-ensembles super-connexes flous d'un espace topologique flou et nous étudions leurs propriétés.

2.5.1 Caractérisation des espaces super-connexes flous

Maintenant, nous donnons la caractérisation des espaces super-connexes flous. Nous commençons par le théorème suivant.

Théorème 2.5.1. Si X est un espace topologique flou, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est supper-connexe flou.
2. L'adhérence de chaque ensemble ouvert flou non nul de X est 1.
3. L'intérieur de chaque ensemble fermé flou de X, différent de 1, est nul.
4. X ne possède pas d'ensembles ouverts flous non nuls λ et μ tels que $\lambda + \mu \leq 1$.
5. X ne possède pas d'ensembles flous non nuls λ et μ satisfaisant $\bar{\lambda} + \mu = \lambda + \bar{\mu} = 1$.
6. X ne possède pas d'ensembles fermés flous non nuls f et k satisfaisant $f^i + k = f + k^i = 1$.

Preuve. (1)$\Longrightarrow$ (2). Si X possède une partie ouverte floue non nulle λ tel que $\bar{\lambda} \neq 1$, alors $\bar{\lambda}^i$ est une partie ouverte floue réguliière et propre.
(2)$\Rightarrow$ (3). Soit f une partie fermée floue de X différente de 1. Maintenant $f^i = 1 - \overline{1 - f} = 0$ comme $1 - f$ est une partie ouverte floue non nulle (d'après théorème 2.3.1).
(3)$\Rightarrow$(4). Si X possède une partie ouverte floue non nulle λ etμ tel que $\lambda + \mu \leq 1$, alors $\bar{\lambda} + \mu \leq 1$. Ainsi $\mu \neq 0$ ce qui implique $\bar{\lambda} \neq 1$. Puisque $\lambda \neq 0$,$\bar{\lambda}^i \neq 0$, c'est une contradiction avec (3)
(4)$\Rightarrow$(1) Si X possède une partie ouverte floue propre et régulière λ et $\mu = 1 - \bar{\lambda}$ sont deux parties ouvertes non vides satisfont $\lambda + \mu \leq 1$
(1)$\Leftrightarrow$ (5) Si X n'est un espace super-connexe flou, alors, il possède une partie ouverte floue propre et régulière notée λ. Si on pose $\mu = 1 - \bar{\lambda}$, alors $\mu \neq 0$ et $\lambda + \bar{\mu} = 1$. D'après le théorème 2.3.1, $\bar{\mu} = \overline{1 - \lambda} = \overline{(1 - \lambda)^i} = 1 - \lambda$ comme $1 - \lambda$ est une partie fermée régulière. Par conséquent $\lambda + \bar{\mu} = 1$. Par suite (5) n'est pas satisfait.

Inversement, si X ne possède pas des parties ouvertes floues non nulles λ et μ tels que $\bar{\lambda} + \mu = \lambda + \bar{\mu} = 1$, alors

$$\bar{\lambda}^i = (1 - \mu)^i = 1 - \bar{\mu} = \lambda.$$

Puisque μ et $\bar{\lambda} + \mu = 1$, $\lambda \neq 1$. DE plus $\lambda \neq 0$ est donnée. Par suite λ est une partie ouverte floue propre et régulière. Par conséquent X ne peut pas être un espace super-connexe flou.

(5)$\Leftrightarrow$ (6). (5)$\Rightarrow$ (6), il suffit de considérer $f = 1 - \lambda$ et $k = 1 - \mu$. L'implication se démontre de la même manière. □

Théorème 2.5.2. Un espace topologique flou X est super-connexe flou, si et seulement s'il ne possède pas de partie ouverte floue propre qui est également une partie semi-fermée floue, ou de manière équivalente, si et seulement s'il ne possède pas de partie fermée floue propre qui est également semi-ouverte floue.

Preuve. Cela découle immédiatement de la définition des ensembles ouverts réguliers flous, des ensembles semi-ouverts flous, des ensembles fermés flous et des ensembles semi-fermés flous. □

Théorème 2.5.3. Soient X et Y deux espace topologique et F une fonction continue de X dans Y. Si X est super-connexe flou alors Y est super-connexe flou.

Preuve. il existe un sous-ensembles flou $\lambda \neq 0$ de Y tel que $\lambda \neq 1$. F est continue floue implique

$$\overline{F^{-1}(\lambda)} \leq F^{-1}(\bar{\lambda}) \qquad (v)$$

(voir Théorème 2.3.4 de Warren [54]). Puisque $\lambda \neq 0$ et $\bar{\lambda} \neq 1$, il existe $y_1, y_2 \in Y$ telles que $\lambda(y_1) \neq 0$ et $\bar{y_2} \neq 1$. Par conséquent, il existe $x_1, x_2 \in X$ tel que

$$F(x_1) = y_1 \text{ et } F(x_2) = y_2 \,.$$

Donc $F^{-1}(\lambda)(x_1) = \lambda(F(x_1) = \lambda(y_1) \neq 0$. De la même manière $F^{-1}(\bar{\lambda})(x_2) \neq 0$. En utilisant (v) $F^{-1}(\lambda)$ est une partie ouverte floue non nulle de X tel que $\overline{F^{-1}\lambda} \neq 1$. C'est une contradiction avec le fait que X est super-connexe flou. □

Théorème 2.5.4. Le produit fini d'espaces super-connexes flous est un espace super-connexe flou.

Preuve. Soient $(X, \tau(x))$ et $(Y, \tau(y))$ deux espace topologiques super-connexes flous. Supposons que $(X \times Y, \tau(X \times Y))$ n'est pas un espace super-connexe flou. Alors, il existe $\lambda, \mu \in \tau(X)$ et $\xi, \eta \in \tau(Y)$ tels que $\lambda \times \xi \neq 0$ et

$$(\lambda \times \xi)(x, y) + (\mu \times \eta)(x, y) \leq 1,$$

pur tout $(x, y) \in X \times Y$, où $\lambda \times \xi$, $\mu \times \eta \in \tau(X \times Y)$, $\lambda \times \xi = P_X^{-1}(\lambda) \cap P_Y^{-1}(\xi)$ P_x est la projection de $X \times Y$ sur X, donc $min\{\lambda(x), \xi(y)\} + min\{\mu(x), \eta(y)\} \leq 1$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$ ce qui implique que pour tout $(x, y) \in X \times Y$ nous avons (i) $\lambda(x) + \mu(x) \leq 1$ ou (ii) $\lambda(x) + \mu(y) \leq 1$ ou bien (iii)$\eta(y) + \mu(x) \leq 1$ ou (iv)$\xi(y) + \eta(y) \leq 1$. Maintenant $\lambda \wedge \mu \in \tau(X)$ et $\xi \wedge \eta \in \tau(Y)$.

Comme X et Y sont deux espaces topologiques super-connexes flous, si $\lambda \wedge \mu \neq 0, \xi \wedge \eta \neq 0$, alors il existe $x_1 \in X$ et $y_1 \in Y$ tels que $(\lambda \wedge \mu)(x_1) > \frac{1}{2}$ et $(\xi \wedge \eta)(y_1) > \frac{1}{2}$. Donc $\lambda(x_1) > \frac{1}{2}$, $\mu(x_1) > \frac{1}{2}$, $\xi(y_1) > \frac{1}{2}$, et $\eta(y_1) > \frac{1}{2}$. Par conséquant si $x = x_1$ et $y = y_1$, alors aucune des possibilités ci-dessus ne sera vraie.

Si $\lambda \wedge \mu = 0$, alors pour tout $x \in X$ nous avons, soit $\lambda(x) = 0$ ou $\mu(x) = 0$. Donc pour tout $x \in X$, $\lambda(x) + \mu(x) \leq 1$. Notons que λ, $\mu \neq 0$ comme $\lambda \times \xi$, $\mu \times \eta \neq 0$ ce qui implique que $(X, \tau(X))$ n'est pas super-connexe flou. De même $\xi \wedge \eta = 0$ implique que $(Y, \tau(Y))$ n'est pas super-connexe flou. □

2.5.2 Sous-espace super-connexe flou

Définition 2.5.1. Un sous ensemble d'un espace topologique flou X est dit un sous-ensemble super-connexe flou de X s'il s'agit d'un espace topologique super-connexe flou en tant que sous-espace flou de X

Théorème 2.5.5. Si $A \subset Y \subset X$, alors A est un sous espace super-connexe flou de X, si et seulement si, est un sous ensemble super-connexe flou du sous-espace flou Y de X.

Théorème 2.5.6. Soit A un sous-ensemble super-connexe flou d'un espace topologique flou X. S'il existe des ensembles fermés flous f et k de X tels que

$$f^i + k = f + k^i = 1.$$

Alors $f/A = 1$ ou $k/A = 1$.

Preuve. Si $f(x_0) \neq 1$ et $k(y_0) \neq 1$ pour $x_0, y_0 \in A$ alors $f^i(y_0) + k(y_0) = 1$ et $f(x_0) + k^i(x_0) = 1$ implique que $f^i(y_0) \neq 0$ et $k^i(x_0) \neq 0$. Par conséquent f^i/A et k^i/A sont des ouverts flous non nuls de A tels que $f^i/A + k^i/A \leq 1$, ceci est une contradiction avec le fait que A est un sous espace super connexe flou de X. $\square$

Théorème 2.5.7. Soit X un espace topologique flou et $A \subset X$ un sous-espace super-connexe flou de X tel que μ_A est une partie ouverte floue dans X. Si λ est un ouvert régulier flou dans X, alors, soit $\mu_A \leq \lambda$ soit $\mu_A \leq 1 - \lambda$.

Preuve. Si $\lambda = 0$ ou 1, alors nous avons le résultat. Supposons que $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$. Soient $f = \bar{\lambda}$ et $k = 1 - \lambda$. Alors f et k satisfont $f^i + k = f + k^i = 1$. D'après le théorème précédent $\mu_A \leq f$ ou $\lambda_A \leq k$. Donc $\mu_A \leq f^i$ ou $\mu_A \leq k^i$, comme μ_A est un ouvert flou. Par conséquent $\mu_A \leq \bar{\lambda}^i = \lambda$; ou $\mu_A \leq (1-\lambda)^i \leq \overline{(1-\lambda)^i} = 1 - \lambda$. $\square$

Théorème 2.5.8. Soit $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille des parties d'un espace topologique flou X tel que chaque μ_{O_α} est un ouvert flou. Si $\cap_{\alpha \in A} O_\alpha \neq \varnothing$ et chaque O_α est un sous-espace super-connexe flou de X, alors $\cup_{\alpha \in A} O_\alpha$ est aussi un sous-espace super-connexe flou de X.

Preuve. Soit $Y = \cup_{\alpha \in A} O_\alpha$ et supposons que Y n'est pas un sous-espace super-connexe flou de X. Alors il existe un ouvert flou propre et régulier λ_Y dans le sous-espace flou Y

de X.

Chaque μ_{O_α} est un ouvert flou dans X. Donc chaque μ_{O_α}/Y est un ouvert flou dans Y. De plus chaque O_α est un sous-ensemble super-connexe flou du sous-espace Y qui est dans X. Par conséquent, en utilisant le résultat précédent, pour chaque $\alpha \in A$ soit $\mu_{O_\alpha}/Y \leq \lambda_Y$ ou $\mu_{O_\alpha}/Y \leq 1 - \lambda_Y$. Nous supposons que $x_0 \in \cap_{\alpha \in A} O_\alpha$. Alors, soit $\lambda_Y(x_0) = 1$ ou $\lambda_Y(x_0) = 0$. Si $\lambda_Y(x_0) = 1$, alors $\mu_{O_\alpha}/Y \leq \lambda_Y$ pour tout $\alpha \in A$. Par conséquent $\mu_Y/Y = \bigvee_{\alpha \in A}(\mu_{O_\alpha}/Y) \leq \lambda_Y$. Mais $\lambda_Y \leq \mu_Y/Y$; ainsi $\lambda_Y = 1$, ce qui est impossible puisque $\lambda_Y \neq 1$. En utilisant le même argument, si $\lambda_Y(x_0) = 0$ alors nous obtenons $\lambda_Y = 0$, ce qui est aussi une contradiction. □

Théorème 2.5.9. Soient A et B deux sous-espaces super-connexes flous d'un espace topologique flou X et μ^i_B/A ou $\mu^i_A \neq 0$, Alors $A \cup B$ est un sous-espace super-connexe flou de X.

Preuve. Nous supposons que $Y = A \cup B$ n'est pas un sous-espace super-connexe flou de X. Alors il existe des parties ouvertes floues λ et δ tels que $\lambda/Y \neq 0$, $\delta/Y \neq 0$, et $\lambda/Y + \delta/Y \leq 1$. Puisque A est un sous-espace super-connexe flou de X donc, soit $\lambda/A = 0$ ou $\delta/A = 0$. Sans perte de généralité, nous supposons que $\delta/A = 0$. Dans ce cas, puisque B est également super-connexe flou, nous avons (i) $\lambda/A \neq 0$, (ii)$\delta/B \neq 0$, (iii) $\delta/A = 0$, et (iv) $\lambda/B = 0$. Par conséquent

$$\text{(v) } \lambda/A + \mu^i_B/A \leq 1 \text{ (parce que } \lambda/B = 0)$$

Si $\mu^i_B/A \neq 0$, alors (i) et (v) impliquent que A n'est pas un sous-espace super-connexe flou de X.

De la même manière $\mu^i_A/B \neq 0$, alors (ii) et $\delta/B + \mu^i_A/B \leq 1$ impliquent que B n'est pas un sous-espace super-connexe flou de X. On obtient ainsi une contradiction. □

Théorème 2.5.10. [33] Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est une famille des sous-espaces super-connexes flous d'un espace topologique flou X telle que

$$\left[\bigwedge_{\alpha\in A}\mu_{A_\alpha}\right]^i \neq 0\text{, alors } \cup_{\alpha\in A}A_\alpha$$

est un sous-espace super-connexe flou de X.

Théorème 2.5.11. Soient X un espace topologique super-connexe flou et C un sous-espace super-connexe flou de X. Nous supposons que $X - C$ contient un ensemble V tel que $\mu_v/X - C$ est un ensemble ouvert flou dans le sous-espace flou $X - C$ de X, alors $C \cup V$ est un sous-espace super-connexe flou de X.

Preuve. Nous supposons que $Y = C \cup V$ n'est pas un sous-espace super-connexe flou de X.
Alors il existe deux ensembles ouverts flous λ et δ dans A tels que $\lambda/Y \neq 0$, $\delta/Y \neq 0$, et $\lambda/Y + \delta/Y \leq 1$. Comme C est un sous-espace super-connexe flou de X, donc soit $\lambda/C = 0$ ou $\delta/C = 0$.
Sans perte de généralité, nous supposons que $\lambda/C = 0$. Par consq́uent $\lambda/V \neq 0$, si nous définissons un ensemble flou λ_V dans X comme $\lambda_v(c) = \lambda(x)$ si $X \in V$, $\lambda_v(x) = 0$ si $x \in X - V$, alors λ_V est un ouvert dans X comme $\lambda_V = \lambda \wedge \mu_V$. Donc $\bar{\lambda_V}$ est un ensemble fermé flou régulier dans X.
Maintenant, nous montrons que $\bar{\lambda_V}$ est un ensemble propre flou dans X. $\lambda/Y + \delta/Y \leq 1$ implique $\lambda_V + \delta \leq 1$. Donc $\bar{\lambda_V} + \delta \neq 1$. Par conséquent $\bar{\lambda_V} \neq 1$ comme $\delta \neq 0$. De plus si $\bar{\lambda_V} = 0$, alors $\lambda_V = 0$, ainsi $\lambda/V = 0$, et d'après (1), $\lambda/V \neq 0$. Ainsi X n'est pas un espace super-connexe flou, ce qui est une contradiction. □

2.5.3 Caractérisation des espaces super-connexes

Théorème 2.5.12. Soient A et B deux sous-ensembles d'un espace topologique flou X et $\mu_A \leq \mu_B \leq \bar{\mu_A}$ si A est un sous-espace super-connexe flou de X, alors B l'est aussi. On conclut que $\bar{A}$ est également un sous-ensemble super-connexe flou.

Preuve. Nous supposons que B n'est pas un sous-espace super-connexe, alors il existe un ensemble ouvert flou λ qui est également semi-fermé tel que :

$$\lambda/B \neq 0,\ \delta/B \neq 0 \text{ et } \lambda/B + \delta/B = 1 \ \text{(i)}$$

Nous montrons d'abord que $\lambda/A \neq 0$, si $\lambda/A = 0 \Longrightarrow \lambda + \mu_A \leq 1$

nous avons

$$\lambda + \bar{\mu_A} \leq 1, \quad \text{avec} \quad (\mu_A \leq \lambda \leq \bar{\mu_A})$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda + \mu_B \leq 1, \quad \text{avec} \quad (\mu_B \leq \bar{\mu_A}).$$

Ce qui implique $\lambda/B = 0$, ce qui est une contradiction puisque $\lambda/B \neq 0$, par suite $\lambda/A \neq 0$ de la même manière on montre que $\delta/A \neq 0$. Maintenant, en utilisant (i) et $\mu_A \leq \mu_B$ nous avons $\lambda/A + \delta/A = 1$. Donc A n'est pas super-connexe flou, ce qui est une contradiction. En particulier, nous avons $\bar{A}$ est super-connexe flou ($\mu_B \leq \bar{\mu_A}$). □

Théorème 2.5.13. Soit $I = [0, 1]$: I est un super-connexe flou et

$$f \ : \ I \longrightarrow I$$

est une fonction continue. Alors, nous avons les assertions suivantes :

1. $F \ : \ I \longrightarrow I \times I$ définie par $F(x) = (x, f(x))$ est continue.
2. $F(I)$ est super-connexe flou dans $I \times I$.

Preuve. — Puisque $F^{-1}(]x, y[\times]z, t[) =]x, y[\bigwedge f^{-1}(]z, t[)$ est un ensemble ouvert de I.

— Le résultat découle directement du Théorème 2.5.12.

□

Chapitre 3

Espace de Lindelöf flous

Dans ce chapitre, nous présentons l'espace topologique flou et l'espace de lindelöf fermé flou, le but principal de ce travail est d'étudier la relation entre l'espace lindelöf flou, le sous-espace de lindelöf fermé flou et l'espace topologique flou dénombrable. Ensuite, nous donnons une généralisation et quelques propriétés des espaces de lindelöf.

3.1 Introduction

En 1965, L. A. Zadeh [62], a généralisé la notion habituelle d'ensemble classique en introduisant les "ensembles flous". Les sous-ensembles flous sont les classes d'objets dont les degrés d'appartenance varient entre la valeur nulle 0 et la valeur 1. Les ensembles flous nous permettent de représenter des concepts vagues exprimés en langage naturel. La représentation dépend non seulement du concept, mais aussi du contexte dans lequel il est utilisé. Ainsi, leur application se développe dans le domaine de la théorie des probabilités, de la théorie de l'information, de l'informatique, etc.

En 1968, C. L. Chang [13] a introduit le concept d'espaces topologiques flous comme application des ensembles flous aux espaces topologiques généraux. La théorie des espaces topologiques flous a ensuite été développée par des chercheurs comme J. A. Goguen, C. K. Wong, M. D. Weiss, R. H. Warren [54], R. Lowen [32], K. K. Azad [7], G. Balasubramaniam [53], A. S. Bin Shahna [49], C. Dogan [15] et beaucoup d'autres. Le cas particulier de la topologie floue est la topologie générale.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions fondamentales des espaces de Lindelöf dans la cas classique, puis nous donnons une brève introduction des espaces topologiques flous. Ensuite, nous présentons quelques résultats sur les espaces de lindelöf flous et nous discutons quelques propriétés de ce type d'espaces.

3.2 Cas classique

Dans cette section, nous présentons quelques résultats et propriétés des espaces de Lindelöf dans le cas classique connues dans la littérature, pour plus de détails, voir par exemple [12].

Définition 3.2.1. — Un espace topologique est dit espace de Lindelöf si tout recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement dénombrable.

— Un espace est dit héréditairement de Lindelöf si tous ses sous-espaces sont de Lindelöf.

Remarque 3.2.1. Cette condition est un affaiblissement de la quasi-compacité, dans laquelle nous demandons l'existence de sous-recouvrements finis.

3.2.1 Propriétés

Définition 3.2.2. Un espace topologique (X, τ) est à base dénombrable si τ admet une base dénombrable.

Proposition 3.2.1. Tout espace à base dénombrable est à bases dénombrables de voisinages.

Un espace X est de Lindelöf, si tout recouvrement de X par des ouverts d'une base fixée possède un sous-recouvrement dénombrable.

Proposition 3.2.2. Un espace est quasi-compact si et seulement s'il est de Lindelöf et dénombrablement compact.

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.2.1. Tout espace à base dénombrable est de Lindelöf.

La réciproque est fausse en général. Par exemple, la droite de Sorgenfrey S est de Lindelöf (et de plus, séparable et à bases dénombrables de voisinages) mais n'est pas à base dénombrable.

Proposition 3.2.3. Soit (X, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'espace (X, τ_d) est à base dénombrable.
2. L'espace (X, τ_d) est séparable.
3. L'espace (X, τ_d) est de Lindelöf.

Remarque 3.2.2. Tout fermé d'un espace de Lindelöf est de Lindelöf.

Toute image d'un espace de Lindelöf pr une fonction continue est un espace de Lindelöf.

Remarque 3.2.3.
1. La réunion dénombrable de sous-espaces de Lindelöf est un espace de Lindelöf (en particulier tout espace dénombrable est de Lindelöf).
2. En général, nous n'avons aucune implication (dans un sens ou dans l'autre) entre la propriété de Lindelöf et les autres propriétés de compacité. Cependant : tout espace σ-compact est clairement de Lindelöf (cas particulier de la propriété précédente).

Proposition 3.2.4. Le produit des espaces de Lindelóf n'est pas toujours de Lindelöf.

Lemme 3.2.2. Le produit d'un espace de Lindelöf par un espace quasi-compact est de Lindelöf.

3.3 Espace topologique flou

Soit $X = \{x\}$ un espace de points. formellement, un ensemble flou A de X est une "classe" avec les bornes floues, i.e., la "classe" des nombres réels qui sont très grands. Cette classe est caractirisée par la fonction de degré d'appartenance associée à chaque élément x, son degré d'appartenance est noé $\mu_A(x)$. Nous supposons dans nos définitions et nos résultats que μ_A est une fonction de X à valeur dans $[0, 1]$.

Maintenant nous donnons quelques résultats utiles dans la suite de notre travail.

Définition 3.3.1. Soient A et B deux parties floues de l'espace $X = \{x\}$, muni par les fonction de degré d'appartenances $\mu_A(x)$ et $\mu_B(x)$, respectivement. Alors, nous avons

— $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$ pour tout $x \in X$.

— $A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ pour tout $x \in X$.

— $C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_C(x) = Max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$ pour tout $x \in X$.

— $D = A \cap B \Leftrightarrow \mu_D(x) = Min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$ pour tout $x \in X$.

— $E = A^c \Leftrightarrow \mu_E(x) = 1 - \mu_A(x)$ pour tout $x \in X$.

En général, pour toute famille des parties floues $A = \{A_i \ / \ i \in I\}$, l'union C = $\vee_I A_i$, et l'intersection $D = \wedge A_i$, sont définies, respectivement, par :

$$\mu_C(x) = \sup_I \{A_i\}, \ \ x \in X,$$

et

$$\mu_D(x) = \inf_I \{A_i\}, \ \ x \in X.$$

Le symbole $\emptyset$ désigne l'ensemble vide flou, telle que $\mu_\emptyset(x) = 0$ pour tout x dans X. Nous avons par définition $\mu_X(x) = 1$, pour tout x dans X.

Nous avons la définition suivante.

Définition 3.3.2. Soit (X, T) un espace topologique flou. Une famille A des parties floues de X est un recouvrement d'une partie floue B de X si $B \leq \vee\{A; A \in \lambda\}$. Il dit un

T-ouvert recouvrement flou si chaque élément de λ est un ensemble T-ouvert flou. Un sous-recouvrement de λ est une sous famille de λ qui constitue aussi un recouvrement de B .

A fin de présenter nos résultats, nous aurons besoin des notations et des résulats préliminaires. Dans la suite de ce travail , (X, T) ou simplement X désigne un espace topologique flou. Soit X un ensemble non vide et I est l'intervalle unitaire $[0, 1]$. une partie floue λ de X est une fonction de X à valeur dans I. L'ensemble vide est la fonction définie de X dans I qui égale à 0 et l'ensemble flou entier est la fonction de X dans I qui prend la valeur 1.

Définition 3.3.3. Soit (X, T) un espace topologique flou et λ désigne une partie floue de (X, T).

L'intérieur et l'adhérence de λ sont définies par :

$$Int(\lambda) = \vee\{\mu/\mu \leq \lambda, \mu \in T\}.$$

$$Cl(\lambda) = \wedge\{\mu/\lambda \leq \mu, 1 - \mu \in T\}.$$

Définition 3.3.4. Un point flou x_{0p} de X est un sous ensemble flou de X et qui a la fonction d'appartenance définie par :

$$\mu_{x_{0p}} = \begin{cases} p, & \text{si } x = x_0; \\ 0, & \text{sinon ,} \end{cases}$$

où $0 < p \leq 1$. x_0 est appelé le support et p désigne la valeur du point flou x_{0p}.

Définition 3.3.5. Soient x_{0p} un point flou de X et A un sous ensemble flou de X, alors x_{0p} est un élement de A ou A contient x_0p, et on note $x_{0p} \in A$, si et seulement si, $\mu_{x_{0p}} \leq \mu_A$ ou simplement, si et seulement si, $p \leq \mu_A(x_0)$.

3.3.1 Espace de lindelöf flou

Pour les espaces de lindelöf flou, il y a plusieurs définitions. Ainsi nous rappelons quelques unes.

Définition 3.3.6. Un espace topologique flou de (X, T) est appelé espace de lindelöf flou si pour tout recouvrement ouvert flou de X possède un sous-recouvrement dénombrable. Autrement, si pour tout recouvrement ouvert flou $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de X, il existe $\{\lambda_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ des parties ouvertes floues de (X, T) telles que $\vee_{n\in\mathbb{N}}\{\lambda_{\alpha_n}\} = 1$.

Remarque 3.3.1. Un espace topologique flou généralisé est appelé aussi l'espace topologique flou dénombrable a été présenté par plusieurs auteurs. La généralisation a été réalisée en utilisant le critère de préservation du supremum arbitraire de topologie floue au supremum dénombrable. Dans ce chapitre, nous présentons quelques propriétés de l'espace de lindelöf flou et nous montrons quelques résultats qui relient un sous espace fermé avec un espace Lindelöf flou.

3.3.2 Propriétés des espaces de lindelöf

Théorème 3.3.1. Un sous espace fermé flou d'un espace de lindelöf est un espace de lindelöf flou.

Preuve. Soit λ une partie floue fermée de l'espace de lindelöf flou X, et soit :

$$\lambda = \vee_{i\in I}\lambda_i, \quad \text{où} \quad \lambda_i \text{ est une partie ouverte floue de } \lambda,$$

nous avons

$$\lambda_i = \mu_i \wedge \lambda, \quad \text{où} \quad \mu_i \text{ est une partie ouverte floue de } X,$$

alors

$$X = (1 - \lambda) \vee (\vee_{i \in I} \mu_i), \text{ est un recouvrement ouvert flou de } X,$$

alors

$$X = (1 - \lambda) \vee (\vee_{i \in J} \mu_i), \text{ où } J \text{ est une partie dénombrable floue de } I,$$

par suite

$$\lambda = \vee_{i \in J} \lambda_i.$$

Par conséquent, nous avons le résultat. □

Lemme 3.3.1. Si X est un espace flou dénombrable, alors X est un espace de lindelöf flou.

Preuve. Si X est un espace dénombrable et $B = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de X. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X :

$$X = \vee_{i \in I} \lambda_i.$$

Si $x \in X$: $\exists i_x \in I$, $x \in \lambda_{ix}$; B est une base : $x \in B_{nx} \leq \lambda_{nx}$ alors $X = \vee_{x \in X} B_{nx}$
puisque $\{B_n x, x \in X\} \leq B$, alors est dénombrable :

$$X = \vee_{\alpha \in L} B_\alpha \qquad \text{où } L \text{ est dénombrable,}$$

avec $B_n x = B_\alpha$, pour $\alpha \in L$,soit $i_\alpha \in I$ telle que $B_\alpha \leq \lambda_{i\alpha}$: $X = \vee_{\alpha \in L} \lambda_{i\alpha}$ est un recouvrement ouvert flou et dénombrable de X. Par suite X est un espace de lindelöf flou. □

Proposition 3.3.1. Tout sous-espace d'un espace dénombrable flou est dénombrable.

Preuve. Si $B = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base dénombrable de X, alors $\{B_n \wedge A\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base dénombrable de sous-espace A. □

Remarque 3.3.2. l'implication inverse du théorème 3.3.1 n'est pas nécessairement vraie. En effet, d'après le lemme 3.3.1 et la proposition 3.3.1, si X est un espace dénombrable flou, nous avons tout sous-espace de X est un espace de lindelöf flou même si il n'est pas fermé.

Exemple 3.3.1. Pour $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle τ_0 (On considère l'intervalle $]x, y[$ comme une base), elle est dénombrable et de plus, le sous espace $[0, 1[$ n'est pas fermé de X, mais c'est un espace de lindelöf flou.

Chapitre 4

Théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques notions de base des sous-ensembles flous intuitionistiques (IFS), ainsi que quelques propriétés importantes. Commençons d'abord par la définition des sous-ensembles flous intuitionistiques. Puis, nous nous intéressons aux opérations élémentaires sur les sous-ensembles flous intuitionistiques. Pour plus de détails, des références bibliographiques sont systématiquement données.

4.1 Motivations

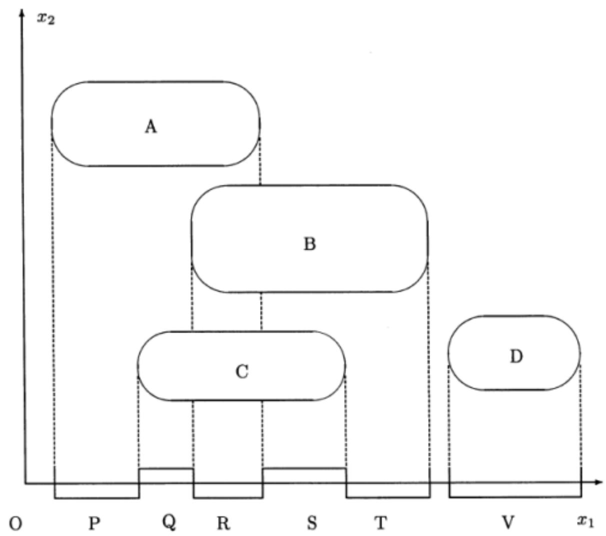
Le développement de la théorie des ensembles flous, a été spectaculaire dans les trois dernières décennies. Néanmoins, il y a des problèmes qui pour une meilleure analyse exigent une philosophie semblable à la notion floue, dans lequel non seulement le degré d'appartenance d'un élément à un ensemble est pris en considération, mais aussi bien son degré de non-appartenance à cet ensemble. Dans cette direction, en 1984, La notion des ensembles flous intuitionistiques (IFS) a été introduite par K.Atanassov dans [4] comme une généralisation de la notion des ensembles flous (FS) qui a été décrite par Zadeh [62].

Maintenant, nous présentons un exemple d'un sous-ensemble intuitionistique propre, c'est à dire : un sous-ensemble qui n'est pas floue.

Soient A,B,C et D quatre parties compactes, fermées et convexes du plan (O, x_1, x_2), telles que

$$A \cap B = A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset,$$

dans le même plan nous considérons les sous-ensembles $P \cup R \cup Q$, $Q \cup R \cup S$, $R \cup S \cup T$ et V et leurs projections orthogonales sur l'axe Ox_1.



Nous désignons par X le sous-ensemble suivant $X = A \cup B \cup C \cup D$, et nous considérons les parties F et G telles que :

$$A \subset F \subset A \cup C \cup D,$$

$$B \subset G \subset B \cup C \cup D,$$

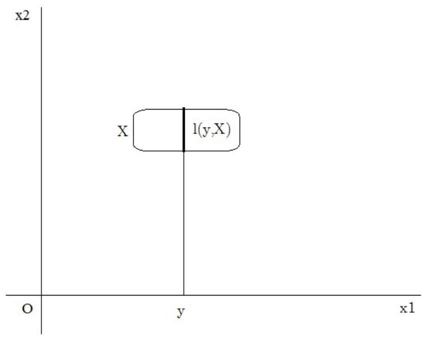
$$F \cap G = \emptyset,$$

$$F \cup G \subset X.$$

Nous remarquons que la partie F est incluse dans le complémentaire de la partie G dans X.

Maintenant, nous supposons que nous pouvons seulement observer les projections des points de X sur (Ox_1), et pour $x \in X$. Nous ne connaissons pas $l(y, X)$ que si X est l'une des parties A, B, C ou D.

Nous notons $l(y, X)$ la longueur d'un segment dans X construit sur une ligne perpendiculaire à (Ox_1), incident d'un point y de (Ox_1)(voir la figure ci-dessous).



Notre objectif est d'expliquer la notion du degré d'appartenance et non-appartennace d'un élément x par rapport à la partie F, en respectant la position des quatre parties.

Si $y \in P$, il est clair que y est la projection orthogonale d'un point $x \in F$, dans ce cas, nous avons

$$\mu_F(x) = 1.$$

Si $y \in Q$, alors $x \in A$ ou $x \in C$.

Si $x \in A$, alors $x \in F$, mais si $x \in C$, alors nous ne sommes pas sûr que $x \in F$ ou $x \in G$. Donc

$$\mu_F(x) = \frac{l(y, A)}{l(y, A) + l(y, C)}$$

Nous déduisons que

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } y \in P \\ \\ \frac{l(y,A)}{l(y,A)+l(y,C)}, \ si \ y \in Q \\ \\ \frac{l(y,A)}{l(y,A)+l(y,B)+l(y,C)}, \ si \ y \in R \\ \\ 0, \text{ si } y \in S \cup T \cup V \end{cases}$$

De la même manière, nous avons

$$\nu_F(x) = \mu_G(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } y \in P \cup Q \cup V \\ \\ \frac{l(y,B)}{l(y,B)+l(y,C)}, \ si \ y \in S \\ \\ \frac{l(y,B)}{l(y,A)+l(y,B)+l(y,C)}, \ si \ y \in R \\ \\ 1, \text{ si } y \in T. \end{cases}$$

Alors

$$\mu_F(x) + \nu_G(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } y \in P \cup T \\ \\ \frac{l(y,A)}{l(y,A)+l(y,C)}, \; si \; y \in Q \\ \\ \frac{l(y,A)+l(y,B)}{l(y,A)+l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in R \\ \\ \frac{l(y,B)}{l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in S \\ \\ 0, \text{ si } y \in V. \end{cases}$$

Par conséquent $0 \leq \mu_F(x) + \nu_F(x) < 1$.

Ainsi, la valeur d'incertitude est donnée par :

$$\pi(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } y \in P \cup T \\ \\ \frac{l(y,C)}{l(y,A)+l(y,C)}, \; si \; y \in Q \\ \\ \frac{l(y,C)+l(y,B)}{l(y,A)+l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in R \\ \\ \frac{l(y,C)}{l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in S \\ \\ 1, \text{ si } y \in V. \end{cases}$$

4.2 Notions fondamentales

Définition 4.2.1. Nous définissons un sous-ensemble flou intuitionistique A d'un univers X par la donnée de deux fonctions

$$\mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$$

et

$$\nu_A : X \longrightarrow [0, 1]$$

appelées, respectivement, fonction d'appartenance et fonction de non-appartenance de A, qui vérifient

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X.$$

Ainsi, nous pouvons représenter A de la manière suivante :

$$A = \left\{ < x, \mu_A(x), \nu_A(x) >, \quad 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X \right\}.$$

Nous désignons par $\mathbb{IF}(X)$ l'espace des sous-ensembles floues intuitionistiques de X.

Remarque 4.2.1. Tout sous-ensemble flou est un sous-ensemble flou intuitionistique. En effet,

$$0 \leq \mu_A + \nu_A = 1.$$

Maintenant, nous rappelons quelques propriétés des sous-ensembles flous intuitionistiques.

Définition 4.2.2. Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de X. nous appelons support de A, noté $S(A)$, l'ensemble donné par :

$$S(A) = \left\{ x \in X, \nu_A(x) < 1 \right\}.$$

Définition 4.2.3. Soient n sous-ensembles flous intuitionistiques $A_1, ..., A_n$ respectivement de $X_1, ..., X_n$. Le produit cartésien de $A_1, ..., A_n$ est un sous-ensemble flou intuitionistique de $X_1 \times ... \times X_n$, défini par

$$\mu_{A_1 \times ... \times A_n}(x_1, ..., x_n) = \min\Big(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\Big)$$
$$\nu_{A_1 \times ... \times A_n}(x_1, ..., x_n) = \max\Big(\nu_{A_1}(x_1), ..., \nu_{A_n}(x_n)\Big)$$

$\forall x_i \in A_i,\ i = 1, 2, ...$

4.3 Opérations de base sur les sous-ensembles flous intuitionistiques

Dans cette partie, nous rappelons quelques opérations de base sur l'espace des sous-ensembles flous intuitionistiques.

— **Egalité**

$$A = B \Longleftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \text{et} \quad \nu_B(x) = \nu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

— **Inclusion**

$$A \subset B \Longleftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \text{et} \quad \nu_B(x) \leq \nu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

— **Complémentaire**

Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de X caractérisé par μ_A et ν_A. Le complémentaire de A est un sous-ensemble flou intuitionistique caractérisé par :

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \nu_A(x) \quad \text{et} \quad \nu_{\overline{A}}(x) = \mu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

— **Intersection**

L'intersection de deux sous-ensembles flous intuitionistiqus A et B de X est un sous-ensemble flou intuitionistique défini par :

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \quad \text{et} \quad \nu_{A\cap B}(x) = \max\Big(\nu_A(x), \nu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X.$$

— **Union**

L'union de deux sous-ensembles flous intuitionistiques A et B de X est un sous-ensemble flou intuitionistique défini par :

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \quad \text{et} \quad \nu_{A\cup B}(x) = \min\Big(\nu_A(x), \nu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X.$$

Pour $A, B \in \mathbb{IF}(X)$, nous avons les assertions suivantes [1, 3].

$$A \cap B = B \cap A.$$

$$A \cup B = B \cup A.$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

$$A \cap A = A.$$

$$A \cup A = A.$$

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B.$$

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B.$$

4.4 Interprétations géométriques

4.4.1 interprétation géométrique d'un sous-ensemble flou intuitionistique

Dans cette section, plusieurs interprétations géométriques des $\mathbb{IF}(X)$ sont représentées.

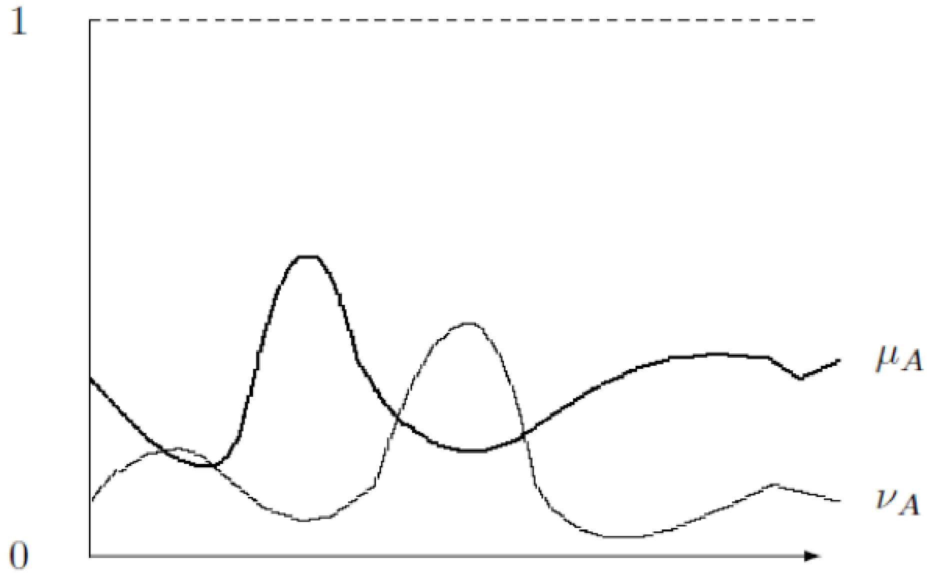


FIGURE 4.1 – L'interprétation géométrique la plus largement acceptée

Son analogue est donné dans la figure 4.1.

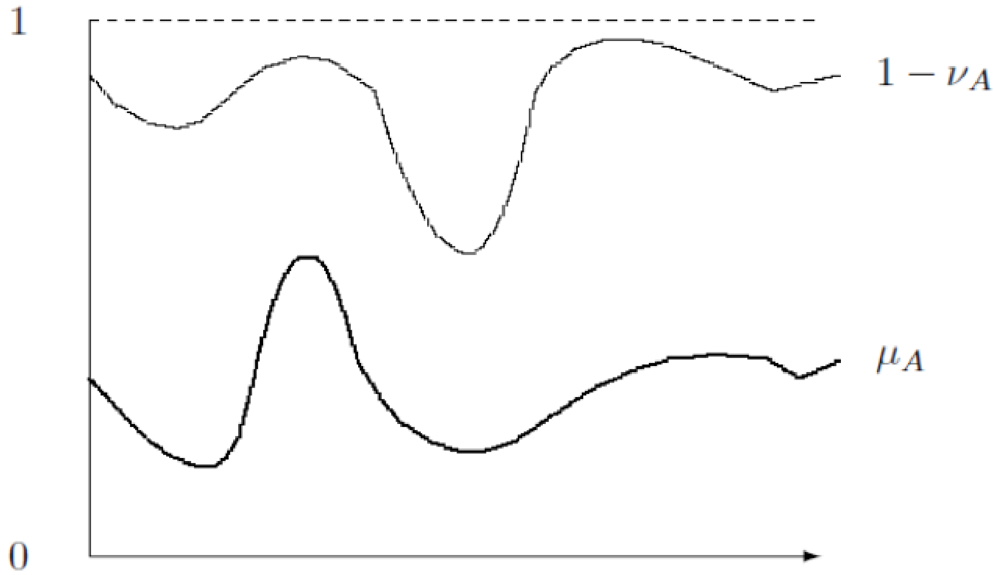


FIGURE 4.2 – Équivalente à la figure 4.1

Nous pouvons aussi donner une interprétation géométrique par un segment de longueur 1.

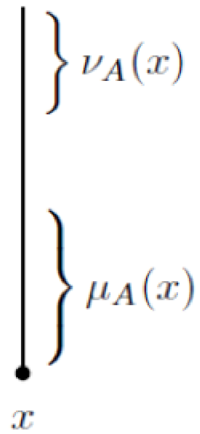


FIGURE 4.3 – Présentation sur un segment de longueur 1

Les interprétations suivantes sont impossibles car on peut remarquer que $\mu(x) + \nu(x) \geq 1$ pour un x de $\mathbb{R}$.

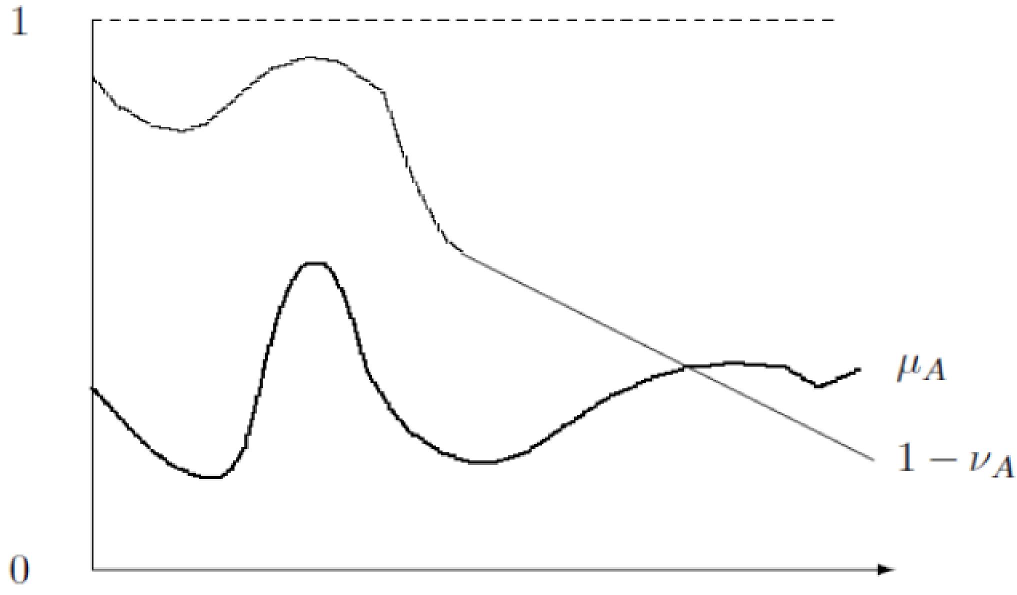


FIGURE 4.4 – Situation impossible

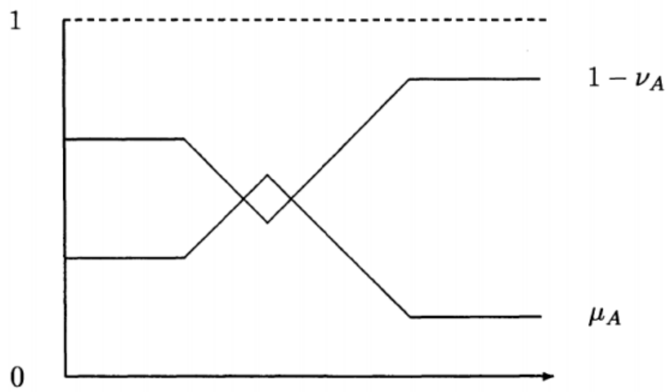


FIGURE 4.5 – Intérprétation impossible

4.4.2 Interprétation géométrique des opérations

Soient $A, B \in \mathbb{IF}(X)$, nous notons $f_{A\cup B}$ la fonction qui à tout $x \in X$ fait associer $f_{A\cup B}(x)$ point du plan (O, x_1, x_2) de coordonnées $< \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\nu_A(x), \nu_B(x)\} >$

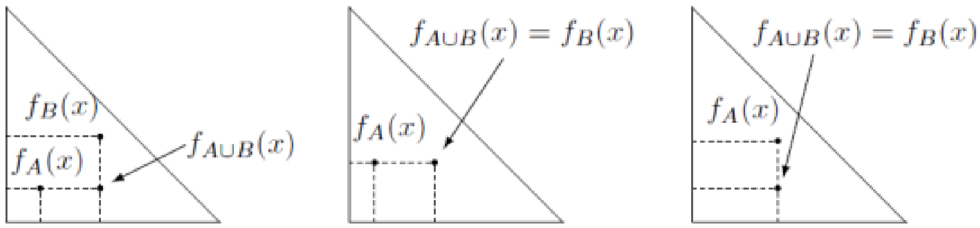


FIGURE 4.6 – Interprétation géométrique de l'union

Soient $A, B \in \mathbb{IF}(X)$, nous notons $f_{A\cap B}$ la fonction qui à tout $x \in X$ fait associer $f_{A\cap B}(x)$ point du plan (O, x_1, x_2) de coordonnées $< \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\nu_A(x), \nu_B(x)\} >$

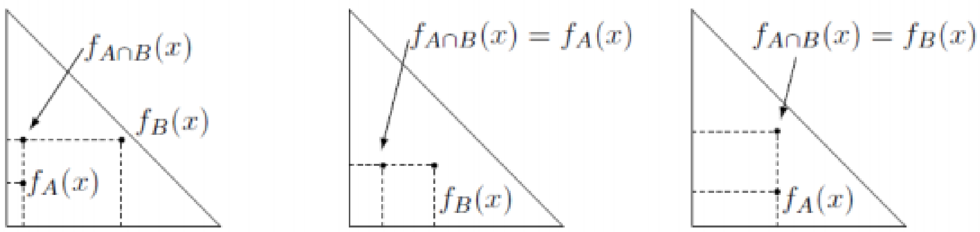


FIGURE 4.7 – Interprétation géométrique de l'intersection

4.5 Transformation de $\mathbb{IF}(X)$ dans $\mathbb{F}(X)$

On introduit les deux opérateurs suivants $\Box$ et $\diamond$ qui transforment un sous-ensemble flou intuitionistique en un sous-ensemble flou.

Soit $A \in \mathbb{IF}(X)$

$$\Box A = \Big\{ < x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) >, x \in X \Big\},$$

et

$$\diamond A = \Big\{ < x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x) >, x \in X \Big\}.$$

Soit A un sous-ensemble flou, alors

$$\Box A = A = \diamond A.$$

Remarque 4.5.1. La dernière égalité montre que les opérateurs $\Box$ et $\diamond$ n'admettent pas une analogie sur l'espace des sous-ensembles flous, ce qui entraine aussi que $\mathbb{IF}(X)$ est une extension propre de l'ensemble des sous-ensembles flous.

nous avons les propriétés suivantes :

$$\overline{\Box \overline{A}} = \diamond A.$$

$$\overline{\diamond \overline{A}} = \Box A.$$

$$\Box A \subset A \subset \diamond A.$$

$$\Box\Box A = \Box A.$$

$$\diamond\Box A = \Box A.$$

$$\diamond\diamond A = \diamond A.$$

Nous notons $\subset_\Box$, $\subset_\diamond$ et $\sqsubseteq$, trois opérations définies sur $\mathbb{IF}(X)$ par :

$$A \subset_\Box B \Longleftrightarrow \Box A \subset \Box B,$$

$$A \subset_\diamond B \Longleftrightarrow \diamond A \subset \diamond B,$$

$$A \sqsubseteq B \Longleftrightarrow \pi_A(x) \leq \pi_B(x),\ \forall x \in X.$$

Nous obtenons

— Si $A \subset_{\Box} B$ et $A \subset_{\diamond} B$, alors $A \sqsubseteq B$

— Si $A \subset_{\Box} B$ et $A \sqsubseteq B$, alors $A \sqsubseteq B$

— Si $A \subset_{\diamond} B$ et $A \sqsubseteq B$, alors $A \sqsubseteq B$

L'interprétation géométrique pour les deux opérateurs est donnée par :

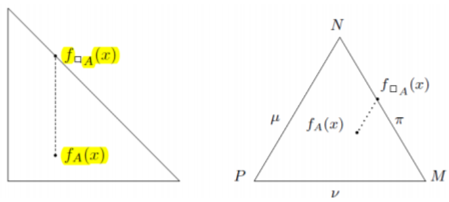


FIGURE 4.8 – Interprétation géométrique de l'opérateur $\Box$

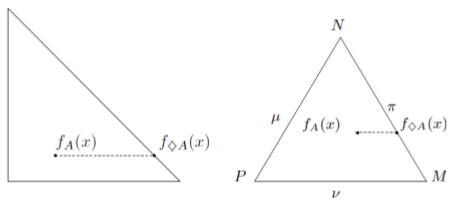


FIGURE 4.9 – Interprétation géométrique de l'opérateur $\diamond$

4.6 (α, β)-coupe d'un ensemble flou intuitionistique

Dans cette section, nous allons donner une généralisation de la notion de α-coupe utilisée dans le cas d'un sous-ensemble flou.

Définition 4.6.1. Une (α, β)-coupe d'un sous-ensemble flou intuitionistique

$$A = \{< x, \mu_A(x), \nu_A(x) >, x \in X\},$$

est définie par

$$A^{\alpha,\beta} = \Big\{x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha, \quad \text{et} \quad \nu_A(x) \leq \beta\Big\},$$

où $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ et $\alpha + \beta \leq 1$.

nous définissons aussi

$$A^{\beta} = \Big\{x \in X, \quad \nu_A(x) \leq \beta\Big\},$$

et

$$A_{\alpha} = \Big\{x \in X, \quad \mu_A(x) \geq \alpha\Big\}.$$

Ainsi, nous avons la proposition suivante.

Proposition 4.6.1.

$$A^{\alpha,\beta}(A) = A_{\alpha} \cap A^{\beta}(A).$$

Exemple 4.6.1. Soit le sous-ensemble suivant $X = \{a, b, c, d, e\}$ et

$$A = \{< a, 0.5, 0.3 >, < b, 0.1, 0.7 >, < c, 1, 0 >, < d, 0, 0 >, < e, 0, 1 >\}.$$

Alors, nous avons $A^{0.3,0.4} = \{a, c\}$, $A_{0.3} = \{a, c\}$, $A^{0.4} = \{a, c, d\}$.

Chapitre 5

La convergence dans les espaces métriques flous intuitionnistiques

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la notion de topologie de hausdroff sur un espace métrique flou, ainsi nous donnons une équivalence entre la convergence des suites dans un espace métrique séparable flou et l'adhérence d'un ensemble flou intuitionnistique [19].

5.1 Introduction

L'un des problèmes les plus importants de la topologie floue est d'obtenir un concept approprié d'espace métrique flou, ce problème a été étudié par plusieurs auteurs de différentes manières [2, 14]. En particulier, George et Veerimani [47] ont introduit et étudié la notion d'espace métrique flou en utilisant les t-normes continues, Atanassov [2] a introduit et étudié le concept d'ensembles flous intuitionnistiques comme une généralisation des ensembles flous, et plus tard, de nombreux auteurs [21] ont fait quelques avancements dans l'étude des ensembles flous intuitionnistiques. Dans ce chapitre, nous utilisons l'idée d'ensemble flou intuitionnistique et nous définissons la notion d'espace métrique flou intuitionnistique à l'aide de t-norme continue et de t-conorme continue, dues à George et

Veermani, ainsi que la topologie de Hausdorff sur cet espace métrique flou intuitionnistique et nous montrons que chaque distance induit une distance floue intuitionnistique, plus nous définissons un espace topologique flou intuitionnistique et l'ensemble adhérence de cet espace, enfin nous donnons l'équivalence entre la notion de convergence dans un espace métrique flou intuitionnistique et l'ensemble des points adhérent de cet espace.

5.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, nous fixons les notations et nous présentons quelques résultats préliminaires que nous aurons besoin dans la suite de ce chapitre.

Définition 5.2.1. [22] L'opérateur binaire $*:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow[0,1]$ est t-norme continu si $*$ satisfait les conditions suivantes :

1. $*$ est commutative et associative.
2. $*$ est continu.
3. $a*1=a$ pour tout $a\in[0,1]$.
4. $a*b\leq c*d$ pour $a,b,c\in[0,1]$ tels que $a\leq c$ et $c\leq d$.

Définition 5.2.2. L'opérateur binaire $\Diamond:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow[0,1]$ est t-conorme continue si $\Diamond$ satisfait les conditions suivantes :

1. $\Diamond$ est commutative et associative.
2. $\Diamond$ est continu.
3. $a\Diamond 1=a$ pour tout $a\in[0,1]$.
4. $a\Diamond b\leq c\Diamond d$ pour $a\leq c$, $c\leq d$, et $a,b,c\in[0,1]$

Définition 5.2.3. Un 5-uplet $(X,M,N,*,\Diamond)$ est un espace flou intuitionistique si X est une partie quelconque, $*$ est une t-norme continue, $\Diamond$ est une t-conorme continue et M,

N sont des sous-ensembles de $X^2 \times (0, \infty)$ satisfont les conditions suivantes : pour tout $x,\ y,\ z \in X$ et $s,\ t > 0$,

1. $M(x, y, t) + N(x, y, t) \leq 1$.
2. $M(x, y, t) > 0$.
3. $M(x, y, t) = 1$, si et seulement si, $x = y$.
4. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$.
5. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$.
6. $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \longrightarrow (0, 1]$ est continue.
7. $N(x, y, t) > 0$.
8. $N(x, y, t) = 0$, si et seulement si, $x = y$.
9. $N(x, y, t) = N(y, x, t)$.
10. $N(x, y, t) \lozenge N(y, z, s) \leq N(x, z, t + s)$.
11. $N(x, y, \cdot) : (0, \infty) \longrightarrow (0, 1]$ est continue.

Alors (M, N) est dite une distance floue intuitionistique sur l'espace X. Les fonctions $M(x, y, t)$ et $N(x, y, t)$ désignent, respectivement, le degré d'appartenance et le degré de non-appartenance entre x et y par rapport à t.

Remarque 5.2.1. Tout espace métrique $(X, M, *)$ est un espace métrique flou intuitionistique de la forme $(X, M, 1 - M, *, \lozenge)$ tels que la t-norme $*$ et la t-conorme $\lozenge$ sont associées, i.e. $x \lozenge y = 1 - ((1 - x) * (1 - y))$ pour tous $x, y \in X$.

Remarque 5.2.2. Dans un espace métrique flou intuitionistique X, $M(x, y, \cdot)$ est croissante et $N(x, y, \cdot)$ est décroissante pour tout $x, y \in X$.

Exemple 5.2.1. (Espace métrique flou intuitionistique induit). Soit (X, d) un espace métrique. Nous considérons les opérateurs $*$ et $\lozenge$ définis, respectivement, par $a * b = ab$ et

$a\Diamond b = \min\{1, a+b\}$ pour tous $a, b \in [0,1]$, et soient M_d et N_d deux applications floues définies sur $X^2 \times (0,\infty)$ par :

$$M_d(x,y,t) = \frac{ht^m}{ht^n + md(x,y)}, \quad N_d(x,y,t) = \frac{d(x,y)}{kt^n + md(x,y)} \text{ pour tout } h,k,m,n \in \mathbb{R}^+.$$

Alors $(X, M_d, N_d, *, \Diamond)$ est un espace métrique flou intuitionistique.

Remarque 5.2.3. Nous notons que l'exemple ci-dessus reste vrai avec la t-norme $a * b = \min\{a,b\}$ et la t-conorome $a\Diamond b = \max\{a,b\}$, par conséquent (M,N) est un espace métrique flou intuitionistique par rapport à toute t-norme continue et à toute t-conorme continue.

Dans l'exemple précédent, pour $h = k = m = n = 1$, nous avons

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)} \text{ et } N_d = \frac{d(x,y}{t+d(x,y)}.$$

Cet espace métrique flou intuitionistique introduit par la distance d est die espace métrique flou intuitionistique standard.

5.3 Topologie induite par une distance floue intuitionistique

Définition 5.3.1. Soit $(X, M, N, *, \Diamond)$ un espace métrique flou intuitionistique, et soit $r \in (0,1), t > 0$ et $x \in X$. La partie $B(x,r,t) = \{y \in X : M(x,y,t) > 1-r, \ \ N(x,y,t) < r\}$ est dite la boule ouverte de centre x et de rayon r par rapport à t.

Théorème 5.3.1. Toute boule ouverte $B(x,r,t)$ est une partie ouverte.

Preuve. Soit $B(x,r,t)$ la boule ouverte de centre de x et de rayon r par rapport à t. Soit $y \in B(x,r,t)$, alors $M(x,y,t) > 1-r$ et $N(x,y,t) < r$. Puisque $M(x,y,t) > 1-r$, alors il existe $t_0 \in (0,t)$ tell que $M(x,y,t_0) > 1-r$ et $N(x,y,t_0) < r$. Posons $r_0 = M(x,y,t_0)$, puisque $r_0 > 1-r$, alors il existe $s \in (0,1)$ tel que $r_0 > 1-s > 1-r$. Maintenant pour r_0 donné et s tel que $r_0 > 1-s$, alors il existe $r_1, r_2 \in (0,1)$ tel que $r_0 * r_1 > 1-s$ et $(1-r_0)\Diamond(1-r_2) \leq s$.

Posons $r_3 = max\{r_1, r_2\}$ et considérons la boule ouverte $B(y, 1-r_3, t-t_0)$. Nous montrons que $B(y, 1-r_3, t-t_0) \subset B(x, r, t)$. Soit $z \in B(y, 1-r_3, t-t_0)$, alors $M(y, z, t-t_0) > r_3$ et $N(y, z, t-t_0) < r_3$. Par conséquent

$$M(x, z, t) \geq M(x, y, t_0) * M(y, z, t-t_0) \geq r_0 * r_3 \geq r_0 * r_1 \geq 1-s > 1-r$$

et

$$N(x, z, t) \leq N(x, y, t_0) \Diamond N(y, z, t-t_0) \leq (1-r_0) \Diamond (1-r_3) \leq (1-r_0) \Diamond (1-r_2) \leq s < r.$$

Par suite $z \in B(x, r, t)$, par conséquent $B(y, 1-r_3, t-t_0) \subset B(x, r, t)$. □

Remarque 5.3.1. Soit $(X, M, N, *, \Diamond)$ un espace métrique flou intuitionistique. Nous définissons $\tau_{(M,N)} = \{A \in X :$ pour tout $x \in A$, ils existent $t > 0$ et $r \in (0, 1)$ tel que $B(x, r, t) \subset A\}$. Alors $\tau_{(M,N)}$ est une topologie sur X.

Remarque 5.3.2.

1. D'après le théorème 5.3.1 et la remarque 5.3.1, tout espace métrique intuitionistique (N, M) sur X engendre une topologie $\tau_{(M,N)}$ sur X qui a pour base la famille de toute partie ouverte de la forme :

$$\{B(x, r, t) : x \in, r \in (0, 1), t > 0\}.$$

2. Puisque $\{B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n = 1, 2, ...\}$ est une base locale à x, la topologie $\tau_{(M,N)}$ est à base dénombrable.

Théorème 5.3.2. Tout espace métrique flou intuitionistique est de Hausdorff.

Preuve. Soit $(X, M, N, *, \Diamond)$ un espace métrique flou intuitionistique. Soient x et y deux points défférents de X. Alors $0 < M(x, y, t) < 1$ et $0 < N(x, y, t) < 1$. Posons $r_1 = M(x, y, t)$, $r_2 = M(x, y, t)$ et $r = \max\{r_1, 1-r_2\}$. Pour tout $r_0 \in (r, 1)$, il existe r_3 et r_4 tels que

$$r_3 * r_3 \geq r_0 \quad \text{et} \quad ,(1-r_4) \Diamond (1-r_4) \leq 1-r_0.$$

Posons $r_5 = \max\{r_3, 1 - r_4\}$ et considérons les boules ouvertes $B(x, 1 - r_5, \frac{t}{2})$ et $B(y, 1 - r_5, \frac{t}{2})$. Alors, nous avons

$$B(x, 1 - r_5, \frac{t}{2}) \cap B(y, 1 - r_5, \frac{t}{2}) \neq \emptyset,$$

donc il existe $z \in B(x, 1 - r_5, \frac{t}{2}) \cap B(y, 1 - r_5, \frac{t}{2})$, tels que

$$r_1 = M(x, y, t) \geq M(x, z, \frac{t}{2}) * M(z, y, \frac{t}{2}) \geq r_5 * r_5 \geq r_3 * r_3 \geq r_0 > r_1$$

et

$$r_2 = N(x, y, t) \leq N(x, z, \frac{t}{2}) \Diamond N(z, y, \frac{t}{2}) \leq (1 - r_5) \Diamond (1 - r_5) \leq (1 - r_4) \Diamond (1 - r_4) \leq 1 - r_0 < r_2$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent $(X, M, N, *, \Diamond)$ est de Hausdorff. □

Remarque 5.3.3. Soit (X, d) un espace métrique et soit

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}, \quad N(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{kt + d(x, y)} \; k \in \mathbb{R}^+,$$

la distance floue intuitionistique définie sur X. Alors la topologie τ_d induite par la distance d et la topologie $\tau_{(M,N)}$ induite par la distance floue intuitionistique (M, N) sont les mêmes.

Définition 5.3.2. Soit $(X, M, N, *, \Diamond)$ un espace métrique flou intuitionistique. Un sous ensemble A de X est dit $\mathbb{IF}$-borné s'il existe $t > 0$ et $r \in (0, 1)$ tels que $M(x, y, t) > 1 - r$ et $N(x, y, t) < r$ pour tout $x, y \in A$.

Théorème 5.3.3. Toute partie compacte A d'un espace métrique flou intuitionistique $(X, M, N, *, \Diamond)$ est $\mathbb{IF}$-bornée.

Preuve. Soit A une partie compacte d'un espace métrique flou intuitionistique X. Fixons $t > 0$ et $0 < r < 1$. Nous considérons un recouvrement ouvert $\{B(x, r, t) \; ; \; x \in A\}$ de A, puisque A est compacte, alors il existe $x_1, \, x_2, \, \cdots, \, x_n \in A$ tel que : $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(x_i, r, t)$.

Soient $x,\, y \in A$, alors il existe $1 \leq i,\, j \leq n$ tels que $x \in B(x_i, r, t)$ et $y \in B(x_j, r, t)$, par suite

$$M(x, x_i, t) > 1 - r \quad \text{et} \quad M(y, x_j, t) > 1 - r.$$

Posons

$$\alpha = \min\{M(x_i, x_j, t) \ : \ 1 \leq i,\, j \leq n\},$$

il est clair que $\alpha > 0$ et nous avons

$$M(x, y, 3t) \geq M(x, x_i, t) * M(x_i, x_j, t) * M(x_j, y, t) \geq (1 - r) * (1 - r) * \alpha.$$

Pour $t' = 3t$, nous avons

$$(1 - r) * (1 - r) * \alpha > 1 - s, \text{ pour tout } 0 < s < 1.$$

Alors

$$M(x, y, t') > 1 - s, \text{ pour tout } x, y \in A.$$

Par conséquent A est $\mathbb{IF}$-bornée. □

Théorème 5.3.4. Soit $(X, M, N, *, \Diamond)$ un espace métrique flou et $\tau_{(M,N)}$ une topologie sur X induite par l'espace métrique flou. Alors pour toute suite $\{x_n\}$ de X, $x_n \longrightarrow x$ si et seulement si $M(x_n, x, t) \longrightarrow 1$ et $N(x_n, x, t) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Preuve. Soit $t > 0$ fixé et nous supposons que $x_n \longrightarrow x$. Alors pour $r \in (0, 1)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x, r, t)$ pour tout $n \geq n_0$. Alors $1 - M(x_n, x, t) < r$ et $N(x_n, x, t) < r$ et par suite

$$M(x_n, x, t) \longrightarrow 1 \text{ et } N(x_n, x, t) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

Inversement, si pour tout $t > 0$, $M(x_n, x, t) \longrightarrow 1$ et $N(x_n, x, t) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, alors pour $r \in (0, 1)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$. Par conséquent $x_n \in B(x, r, t)$ pour tout $n \geq n_0$, par suite $x_n \longrightarrow x$. □

Nous avons aussi le résultat suivant.

Théorème 5.3.5. Soit $(X, M, N, *, \Diamond)$ un espace métrique flou intuitionistique, pour tout $A \subset X$ et pour tout $x \in X$, nous avons les équivalence des propriétés suivantes :

i) x est un élément de $\overline{A}$.

ii) il existe une suite $x_n \in A$ telle que $\lim x_n = x$.

Preuve. Nous suposons que $x \in \overline{A}$, puisque A est à base dénombrable, alors il existe une suite x_n et nous avons

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ et } N \text{ tel que : } n > N;\; d(x_n,\, x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \; t + d(x_n, x) < \varepsilon + t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + d(x_n, x)} > \frac{1}{\varepsilon + t} = 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + t}$$

$$\Rightarrow M(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$$

$$\Rightarrow x_n \in B(x, \varepsilon, t)$$

$$\Rightarrow \lim x_n = x.$$

Inversement, Nous supposons que x_n converge vers x. Alors pour $r \in (0, 1)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n > n_0$, nous avons $x_n \in B(x, r, t)$ et $x_n \in A$. Alors $B(x, r, t) \cap A \neq \emptyset$, par suite $x \in \overline{A}$. □

Remarque 5.3.4. La deuxième implication est toujours vraie pour tout espace topologique flou intuitionistique (X, τ), même s'il n'est pas séparé. Mais, pour l'autre implication nous avons besoin que tout voisinage d'un point a admet une base dénombrable, ce qui vrai pour les espaces métriques flous intuitionistiques.

Théorème 5.3.6. Soit $(X, M, N, *, \Diamond)$ un espace métrique flou intuitionistique. Alors

a) Une suite (x_n) de X est dite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ et $t > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ et $N(x_n, x_m, t) < \varepsilon$ pour tout $n,\, m \geq n_0$.

b) L'espace $(X, M, N, *, \Diamond)$ est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente par rapport à $\tau_{(M,N)}$

Théorème 5.3.7. Soit $(X, M, N, *, \Diamond)$ un espace métrique flou intuitionistique, tel que toute suite de Cauchy de X a une sous suite convergente, alors $(X, M, N, *, \Diamond)$ est complet.

Preuve. Soit (x_n) une suite de Cauchy et soit (x_{i_n}) une sous suite de (x_n) telle que x_{i_n} converge vers x, on montre que x_n converge vers x.

Soit $t > 0$ et $\varepsilon \in (0, 1)$, on choisit $r \in (0, 1)$ tel que :

$$(1 - r) * (1 - r) \geq 1 - \varepsilon \ \text{ et } \ r\Diamond r \leq \varepsilon.$$

Puisque x_n est de Cauchy, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$M(x_n, x_m, \frac{t}{2}) > 1 - r \ \text{ et } \ N(x_n, x_m, \frac{t}{2}) < r, \ \text{ pour tout } \ m,\, n \geq n_0.$$

Puisque x_{i_n} converge vers x, il existe un entier positif i_p tel que $i_p \geq n_0$ vérifiant

$$M(x_{i_p}, x_m, \frac{t}{2}) > 1 - r \ \text{ et } \ N(x_{i_p}, x_m, \frac{t}{2}) < r$$

Pour $n \geq n_0$, nous avons

$$M(x_n, x, t) \geq M(x_n, x_{i_p}, \frac{t}{2}) * M(x_{i_p}, x, \frac{t}{2}) > (1 - r) * (1 - r) \geq 1 - \varepsilon$$

et

$$N(x_n, x, t) \leq N(x_n, x_{i_p}, \frac{t}{2})\Diamond N(x_{i_p}, x, \frac{t}{2}) < r\Diamond r \leq \varepsilon$$

Ainsi (x_n) converge vers x, par suite l'espace $(X, M, N, *, \Diamond)$ est complet. □

Théorème 5.3.8. Soit $(X, M, N, *, \Diamond)$ un espace métrique flou intuitionistique et A une partie de X, nous considérons les distances induites suivantes

$$(M_A, N_A) = (M/_{A^2 \times (0,+\infty)}, N/_{A^2 \times (0,+\infty)}).$$

Alors l'espace $(A, M_A, N_A, *, \Diamond)$ est complet si et seulement si A est un sous-espace fermé de X.

Preuve. Supposons que A est un sous espace fermé de X et soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de $(A, M_A, N_A, *, \lozenge)$, donc $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de X, donc il existe un point x de X telle que x_n converge vers x, par suite $x \in \bar{A} = A$, ainsi $(x_n)_n$ converge dans A et par conséquent $(A, M_A, N_A, *, \lozenge)$ est complet.
Inversement, par l'absurde, nous supposons que $(A, M_A, N_A, *, \lozenge)$ est complet et A est non fermé, soit $x \in \bar{A} \setminus A$, donc il existe une suite $(x_n)_n$ de A qui converge vers x, par suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, en utilisant la définition, nous avons pour tout $0 < \epsilon < 1$ et $t > 0$, il existe un entier n_0 tels que

$$M(x_n, x_m, t) > 1 - \epsilon \ \text{ et } \ N(x_n, x_m, t) < \epsilon, \ \text{ pour tout } \ m, n > n_0.$$

Puisque $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de A, et nous avons

$$M(x_n, x_m, t) = M_A(x_n, x_m, t) \quad \text{et} \quad N(x_n, x_m, t) = N_A(x_n, x_m, t).$$

De plus, $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de A, et puisque $(A, M_A, N_A, *, \lozenge)$ est un espace complet, donc il existe $y \in A$ telle que x_n converge vers y, par suite, pour tout $0 < \epsilon < 1$ et $t > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, nous avons

$$M_A(y, x_n, t) > 1 - \epsilon \ \text{ et } \ N_A(y, x_n, t) < \epsilon.$$

Puisque $(x_n)_n$ est une suite de A et $y \in A$, de plus

$$M(y, x_n, t) = M_A(y, x_n, t) \ \text{ et } \ N(y, x_n, t) = N_A(y, x_n, t),$$

alors $(x_n)_n$ converge dans $(X, M_A, N_A, *, \lozenge)$ vers x et y, puisque $x \notin A$, donc $x \neq y$ ce qui est une contradiction avec l'unicité de la limite. □

Définition 5.3.3. Soit $(X, M, N, *, \lozenge)$ un espace métrique flou intuitionistique, une collection $\{F_n\}_n$ est dite a diamètre flou intuitionistique, si pour tout $r \in (0,\, 1)$ et $t > 0$, il existe un entier n_0 telle que $M(x, y, t) > 1 - r$ et $N(x, y, t) < r$ pour tous $x,\ y \in F_{n_0}$.

Remarque 5.3.5. Un sous-espace $F \neq \varnothing$ d'un espace métrique flou intuitionistique a un diamètre nul, si et seulement si, F est réduit à un singleton.

Lemme 5.3.1. Soit $(X, M, N, *, \Diamond)$ un espace métrique flou intuitionistique, si $t > 0$ et $r,\ s \in (0,\ 1)$ telles que $(1-s) * (1-s) \geq 1-r$ et $s \Diamond s \leq r$. Alors

$$\overline{B(x, s, \frac{t}{2})} \subset B(x, r, t).$$

Preuve. Soit $y \in \overline{B(x, s, \frac{t}{2})}$, nous désignons par $B(x, s, \frac{t}{2})$ la boule ouverte de centre x et de rayon s. Puisque $\overline{B(x, s, \frac{t}{2})} \cap B(x, s, \frac{t}{2})$ est non vide, alors il existe un élément z de $\overline{B(x, s, \frac{t}{2})} \cap B(x, s, \frac{t}{2})$ tel que

$$M(x, y, t) \geq M(x, z, \frac{t}{2}) * M(y, z, \frac{t}{2}) > (1-s) * (1-s) \geq 1-r,$$

et

$$N(x, y, t) \leq N(x, z, \frac{t}{2}) \Diamond N(y, z, \frac{t}{2}) < s \Diamond s \leq r.$$

Alors $y \in B(x, r, t)$ et par suite $\overline{B(x, s, \frac{t}{2})} \subset B(x, r, t)$. $\square$

Conclusion

Cette thèse est une contribution à l'étude des espaces topologiques flous intuitionistiques. Après une introduction générale, nous avons décomposé notre travail en cinq chapitres :

Dans le chapitre 1, nous avons présenté la théorie des ensembles flous, sa position par rapport à la théorie des ensembles classiques. Ensuite, nous avons introduit la théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques et ses propriétés.

Nous avons étudié la notion des espaces super-connexes flous dans le chapitre 2, et nous avons présenté quelques caractérisations des sous-ensembles super-connexess flous en utilisant la continuité des fonctions à valeur floue. Notre approche est basée sur les propriétés des espaces topologiques flous connexes.

Dans le chapitre 3, nous avons défini l'espace topologique flou et l'espace de lindelöf fermé et le sous espace de lindelöf fermé flou, dans ce chapitre nous avons établi la relation entre l'espace lindelöf flou, le sous-espace de lindelöf fermé flou et l'espace topologique flou dénombrable. Ensuite, nous avons donné une généralisation et les propriétés des espaces de lindelöf.

Dans le chapitre 4, nous avons présenté quelques notions de base de la théorie des ensembles flous intuitionistiques, ainsi nous avons donné quelques propriétés importantes de cette nouvelle théorie.

Dans le chapitre 5, nous avons définit la notion de topologie de hausdroff sur un espace métrique flou, ainsi nous avons montré l'équivalence entre la convergence dans un espace métrique séparable flou et l'adhérence d'un ensemble flou intuitionnistique.

Le travail présenté dans ce manuscrit nous permettra d'aborder et de traiter certains axes importants :

1. Développement quelques propriétés topologiques des espaces super-connexes flous intuitionistiques intuitionistiques généralisés.
2. Etudier les espaces fortement super-connexes flous intuitionistiques.
3. Introduire les espaces de Lebesgue flous intuitionistiques.

Bibliographie

[1] K. Atanassov, *On Intuitionistic Fuzzy Sets Theory*. Springer, Berlin (2012).

[2] K. Atanassov, *Intuitionistic fuzzy sets*. In : SgurevV, editor. VII ITKR's Session, Sofia June, 1983 (Central Sci. and Techn. Library, Bulg. Academy of Sciences, 1984). Comput. Math. Appl. **59** (3), 1095–1100, 2010.

[3] K. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets, theory and Applications, Studies in Fuzziness and Soft Computing., **35**, Physica-Verlag, Heidelberg, 1999.

[4] K. Atanassov, *Intuitionistic fuzzy sets*. Fuzzy Sets Syst. **20**, 87–96, 1986.

[5] K.K. Azad, *On fuzzy semi-continuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity*. J. Math. Anal. Appl. **82**, 14–32, 1981.

[6] K. K. Azad, *Fuzzy connectedness*, unpublished.

[7] K. K. Azad, *On fuzzy semicontinuity, semi almost continuity and fuzzy weakly continuity*. J.Math. Anal. Appl., **82**, 14–32, 1981.

[8] I. Bakhadach , S. Melliani, M. Oukessou, L.S. Chadli, *Intuitionistic fuzzy ideal and intuitionistic fuzzy prime ideal in a ring*, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, **22** (2), 59-63, 2016.

[9] I. Bakhadach, S. Melliani, L. S. Chadli. *On intuitionistic fuzzy implications*, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets. **23** (5), 7-19, 2017.

[10] H. Bandemer, *Fuzzy sets, fuzzy logic, fuzzy methods with applications*. John Wiley 1996.

[11] B. Barnabs, *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer 2013.

[12] N. Bourbaki, *Topologie générale : Chapitres 1 à 4*, v. **3**. Springer Science & Business Media 2007.

[13] C.L. Chang, *Fuzzy topological spaces*. J. Math. Anal. Appl. **24**, 182-190, 1968.

[14] D. Coker, *An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces*. Fuzzy Sets Syst. **88**, 81–89, 1997.

[15] C. Dogan, *An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces*. Fuzzy Sets Syst., vol. **88**, pp. 81–89, 1997.

[16] D. Dubois, H. Prade, *Towards fuzzy differential calculus, Part 1. Integraation of fuzzy mappings*, Fuzzy Sets Systems **8**, 1–17, 1982.

[17] D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy sets and systems*. Academic Press, New York, 1980.

[18] M. El Hassnaoui, S. Melliani, M. Oukessou, *On Some Results of Fuzzy Super-Connected Space*. Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems. Studies in Fuzziness and Soft Computing-springer, 119-130, 2021.

[19] M. El Hassnaoui, S. Melliani, L. S. Chadli, *Convergence on Intuitionistic Fuzzy Metric Space*. Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems, 233-238, 2019.

[20] M. Elomari, S. Melliani, I. Bakhadach, L.S. Chadli, *Intuitionistic fuzzy soft generalized superconnectedness*, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, **22** (2), 44-51, 2016.

[21] M. A. Erceg, *Metric spaces in fuzzy set theory*. J Math Anal Appl. **69**, 316–328, 1979.

[22] A. George, P. Veeramani, *On some results in fuzzy metric spaces*. Fuzzy Sets Syst., **64** (3), 395-399, 1994.

[23] U.V. Fatteh, D. S. Bassan,*A note on D-spaces*. Bull. Calcutta Math. Soc. **75** (6).

[24] R. Goetschel, W. Voxman, *Elementary Calculus*, Fuzzy Sets Systems, **18**, 31-43, 1986.

[25] J. A. Goguen, *The fuzzy Tychonoff theorem*. J. Math. Anal. Appl. **43**, 734–742, 1973.

[26] O. Kaleva, *Fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets Systems **24**, 301–317, 1987.

[27] A. Kaufmann, M. Gupta, *Introduction to fuzzy arithmetic : theory and applications*. Van Nostran d Rehinold, New York, NY, 1985.

[28] E. P. Klement, *Operations on fuzzy sets : an axiomatic approach*. Inform Sci. **27**, 221–232, 1984.

[29] O. Kramosil, J. Michalek, *Fuzzy metric and statistical metric spaces*. Kybernetica, **11**, 326–334, 1975.

[30] E. Kruger-Thiemer, *Formal theory of drug dosage regiments*. International Journal of Theoretical Biology , **13**, 1966.

[31] N. Levine, *Dense topologies*. Amer. Math. Monthly **75**, 847–852, 1968.

[32] R. Lowen, *Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness*. J. Math. Anal. Appl. **56**, 621–633, 1976.

[33] N. Levine, *Strongly connected sets in a topology*. Amer. Math. Monthly **72**, No. 10, 1098–1101, 1965.

[34] R. Lowen, *Fuzzy set theory*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1996.

[35] E. H. Mamdani, S. Assilian, *An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller*. Int. J. Man Mach. Studies, **7** (1) : 1–13, 1975.

[36] S. Melliani, I. Bakhadach, M. Elomari, L. S. Chadli, *Intuitionistic fuzzy actions*, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, **24** (3), 11-26, 2018.

[37] S. Melliani, I. Bakhadach, M. Elomari, L. S. Chadli, *Intuitionistic fuzzy Dirichlet problem*, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, **24** (4), 72-84, 2018.

[38] K. Menger, *Statistical metrics*. Proc Nat Acad Sci., **28**, 535–537, 1942.

[39] V.D. Mil'man, A.D. Myshkis, *On the stability of motion in the presence of impulses*. Sib. Math. J., **1**, 233–237, 1960.

[40] S. Miyamoto, *Fuzzy sets in information retrieval and cluster analysis*. Kluwer academic publishers, 1990.

[41] M. Mizumoto, K. Tanaka, *Algebraic proprerties of fuzzy numbers*. Comminication in Inter. Conf. on Cybernetics and Society, Washington D.C, 1976.

[42] J. R. Munkres, *Topology–a first course*. New Jersey : Prentice-Hall ; 1975.

[43] J. Nagata, *Modern general topology*. Amsterdam : North-Holland ; 1974.

[44] S. Nanda, *On integration of fuzzy mappings*, Fuzzy Sets Systems **32**, 95-101, 1989.

[45] H. T. Nguyen, *A note on the extension principle for fuzzy sets*. J. Math. Anal. Appl, **64**, 369–380, 1978.

[46] J. J. Ostergaad, *Fuzzy logic control of a heat exchange process*. in Fuzzy Automata and Decision Processes, M.M. Gupta, G.N. Saridis, and B.R. Gaines,Eds., 285–320, 1977.

[47] J. H. Park, *Intuitionistic fuzzy metric spaces*. Chaos, Solitons & Fractals,2004 ; **22** (5),1039–1046, 2004.

[48] B. Schweizer, A. Sklar, *Statistical metric spaces*. Pacific J Math, **10**, 314–334, 1960.

[49] A. S. B. Shahna, *On fuzzy compactness and fuzzy Lindelofness*. Bull. Calcutta Math. Soc. **83**, 146–150, 1991.

[50] T. Tamakawa, *High speed fuzzy controller hardware system*. Proc. 2nd Fuzzy System Symp., pages 122–130, 1986.

[51] B. Taner, I. B. TÜRKSEN, *Measurement-theoretic Justification of Connectives in Fuzzy Set Theory*. Fuzzy Sets and Systems, septembre 1994.

[52] G. Thangaraj, S. Dharmasaraswathi, *On Fuzzy Simply Lindelöf Spaces*. Advances in Fuzzy Mathematics. **12**, 957–964, 2017.

[53] G. Thangaraj, G.Balasubramanian, *On Some Generalizations of Fuzzy Lindelof Spaces*. J. Fuzzy. Math, Vol. **15**, No. 3, 1–7, 2007.

[54] R. H. WARREN, *Neighborhoods, bases and continuity in fuzzy topological spaces*. Rocky Mountain J. Math. **8**, 459–470, 1978.

[55] W. U. Wei, *Synthèse d'un contrôleur flou par Algorithme Génétique : Application au réglage dynamique des paramètres d'un système*. Thèse de doctorat de l'Université de Lille 1, 1998.

[56] M. D. Weiss, *Fixed points, separation, and induced topologies for fuzzy sets*. J. Math. Anal. Appl. **50**, 142–150, 1975.

[57] D. Willaeys, N. Malvache, *Use of fuzzy model for process control*. IEEE International Conference on Cybernetics and Society, 1978.

[58] K. C. Wong, *Fuzzy topology : Product and Quotient theorems*. J. Math. Anal. Appl. **45**, 512-521, 1974.

[59] C. K. Wong, *Covering Properties of Fuzzy Topological Spaces*. J. Math. Anal. Appl. **43**, 697–704, 1973.

[60] R. R. Yager, *On a general class of fuzzy connectives*. Fuzzy Sets Syst., **4**, 235–242, 1980.

[61] L. A. Zadeh, *Soft computing and fuzzy logic*. IEEE Software, **11** (6), pp 48–56, 1994.

[62] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*. Information and control, vol **8**, 338–353, 1965.