



UNIVERSITE SULTAN MOULAY SLIMANE
Faculté des Sciences et Techniques
Béni-Mellal



UFR : GENIE ET SCIENCES DES MATERIAUX (G. S. M.)

THESE

Présentée par

Mourad KADDIRI

Pour obtention du grade du

Doctorat National

Spécialité : Physique

Etude numérique des écoulements et des transferts de chaleur par convection naturelle dans les fluides non-Newtoniens thermo-dépendants confinés

Soutenue le 08 Juin 2013 devant la commission d'examen :

Président	Mr. M. HASNAOUI	Professeur	F. S. Semlalia-Marrakech
Rapporteurs	Mr. M. NAJAM	Professeur	F.S. Ain Chock-Casablanca
	Mr. R. LBIBB	Professeur	F.S.T- Béni Mellal
	Mr. A. BEN RICHOU	Professeur	F.S.T- Béni Mellal
Examineurs	Mr. A. RAJI	Professeur	F.S.T- Béni Mellal
	Mr. M. NAIMI	Professeur	F.S.T- Béni Mellal

Dédicace

Je dédie ce travail à Charifa, mon épouse, à mes enfants, Mouad, Boutayna et Marcouan, à mes parents et à mes frères pour avoir accepté tant de sacrifices durant ces dernières années.

Je dédie aussi ce travail à mes vrais parents, sidi abdessalam, sidi alacoui, sidi mellakh et à mes frères et sœurs de Jamaat al adl wa al ihssane, pour leur soutien moral.

REMERCIEMENTS

Ces travaux de thèse ont été principalement effectués au sein du laboratoire LAMET de La FST de Béni Mellal dirigé par le Professeur Mohamed Naimi.

Avant tout, je remercie messieurs les membres du jury pour leur participation à la soutenance. J'adresse tout particulièrement ma reconnaissance à M. Mohamed Naimi, professeur à La FST de Béni Mellal, pour la direction de cette thèse. Il a su me faire profiter de ses nombreuses connaissances et de sa dimension internationale au travers des publications et des conférences que nous avons pu réaliser ensemble.

Je remercie vivement MM. Rachid Lbibb, Abderrahim Ben Richou et Mostafa Najam pour leur difficile travail de rapporteur. Qu'ils se trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance.

Je tiens à remercier Monsieur Mohamed Hasnaoui pour avoir accepté de présider le jury de thèse mais également pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Aussi, je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Abdelghani Raji, qui a accepté de participer au jury de thèse. Son avis sur ce travail permettra d'apporter des idées nouvelles pour les études futures.

Toute ma reconnaissance à mes collègues N. Kouider, J. Ben Gouram, M. Zekraoui, H. Boudaya, pour leurs conseils et leurs aides quotidiennes.

En fin, je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à ma famille, pour m'avoir épaulé au cours de ces cinq années.

AVANT PROPOS

- Prénom et Nom de l'auteur de la thèse : Mourad KADDIRI
- Intitulé de la thèse : **Etude numérique des écoulements et des transferts de chaleur par convection naturelle dans les fluides non-Newtoniens thermo-dépendants confinés.**
- Prénom et Nom du directeur de la thèse : Mohamed NAÏMI (Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni-Mellal)
- Lieu de réalisation du travail : Laboratoire de Modélisation des Ecoulements et des Transferts (LAMET) de la Faculté des Sciences et Techniques de Béni-Mellal
- Date de commencement des travaux de la thèse : Janvier 2008

PUBLICATIONS

- [1] **M. Kaddiri, M. Naïmi, T. Makayssi, A. Raji et M. Hasnaoui**, Etude numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée confinant des fluides non-Newtoniens, *Revue de Mécanique Appliquée et Théorique*, Vol. 2, N° 1, pp. 39-46, 2009.
- [2] **M. Kaddiri, M. Naïmi, A. Raji and M. Hasnaoui**, Thermal convection within a square cavity filled with non-Newtonian power-law fluids and differentially heated with uniform heat fluxes, *International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology*, Vol. 62, N° 6, pp. 131-137, 2011.
- [3] **M. Kaddiri, M. Naïmi, A. Raji and M. Hasnaoui**, Effect of temperature-dependent viscosity of non-Newtonian power-law fluids on thermal convection in a square cavity uniformly heated and cooled from

its vertical sides, International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology, Vol. 105, N° 1, pp. 28-39, 2012.

- [4] **M. Kaddiri, M. Naïmi, A. Raji and M. Hasnaoui**, Rayleigh-Bénard convection of non-Newtonian power-law fluids with temperature-dependent viscosity, ISRN Thermodynamics, Vol. 2012, Article ID 614712, 10 pages, 2012, doi.10.5402/2012/614712

COMMUNICATIONS

- [1] **M. Kaddiri, M. Naïmi, T. Makayssi, M. Hasnaoui et A. Raji**, Etude numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée confinant des fluides non-Newtoniens, 9ème Congrès de Mécanique (CDM9), Marrakech (Maroc), Volume II, pp. 400-402, 21-24 avril 2009.
- [2] **M. Kaddiri, M. Naïmi, A. Bahlaoui, A. Raji et M. Hasnaoui**, Convection naturelle pour des fluides non-Newtoniens confinés dans une cavité carrée exposée sur ses parois verticales à des densités de flux de chaleur uniformes, Colloque International sur les Méthodes Mathématiques et Numériques en Mécanique des Fluides (CIMMNMF), Errachidia (Maroc), pp. 97-98, 28-29 avril 2009.
- [3] **M. Kaddiri, M. Naïmi, A. Raji and M. Hasnaoui**, Effect of temperature-dependent viscosity of non-Newtonian fluids on thermal convection in a square cavity, The Fifth International Conference on Thermal Engineering: Theory and Applications (ICTEA5), Marrakesh (Maroc), pp. 204-208, 10-14 mai 2010.

- [4] **M. Kaddiri, M. Naïmi, A. Raji, M. Hasnaoui**, Effet de la thermodépendance sur la convection de Rayleigh-Bénard dans une cavité carrée confinant des fluides non-Newtoniens, 10ème Congrès de Mécanique (CDM10), Oujda (Maroc), Volume II, pp. 305-306, 19-22 avril 2011.
- [5] **M. Kaddiri, M. Naïmi, A. Raji, M. Hasnaoui**, Effect of temperature-dependent viscosity of non-Newtonian power-law fluids on free convection in a square cavity subjected to cross thermal gradients, 2ème Congrès de l'Association Marocaine de Thermique (AMT), Casablanca (Maroc), p. 23, 18-19 avril 2012.
- [6] **M. Kaddiri, M. Naïmi, A. Raji, M. Hasnaoui**, Viscosity thermodependence effect on the onset of the Rayleigh-Bénard convection in a square cavity confining non-Newtonian fluids, International Symposium on Multiphase flow and Transport Phenomena (MFTP), Agadir (Maroc), p. 29, 22-25 avril 2012.
- [7] **M. Kaddiri, M. Naïmi, A. Raji, M. Hasnaoui**, Effect of temperature-dependent viscosity of non-Newtonian power-law fluids on free convection in a square cavity submitted to cross heat fluxes, Communication acceptée au 11ème Congrès de Mécanique (CDM11), Agadir (Maroc), 23-26 avril 2013.
- [8] **M. Kaddiri, M. Naïmi, A. Raji, M. Hasnaoui**, Temperature-dependent viscosity effect on free convection in a square cavity filled with a shear-thinning and subjected to cross thermal gradients, Communication acceptée aux 16ème édition des Journées Internationales de Thermique (JITH), Marrakech (Maroc), 13-15 novembre 2013.

SOMMAIRE

RESUME

ABSTRACT

ملخص

TABLE DE MATIERES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

NOMENCLATURE

Résumé

La convection naturelle dans une cavité carrée, confinant des fluides non-Newtoniens à comportement thermo-rhéologique pouvant être modélisé par une combinaison de la loi puissance d'Ostwald-de Waele avec celle exponentielle de Frank-Kamenetski-Reynolds et chauffée à l'aide de densités de flux de chaleur uniformes, est étudiée numériquement à l'aide d'un code aux différences finies centrées. Les paramètres de l'étude sont :

- les fractions de flux de chaleur dans les directions horizontale et verticale, a et b ,
- le nombre de Pearson, m , caractérisant la thermo-dépendance de la viscosité,
- l'exposant, n , traduisant le comportement rhéologique des fluides,
- le nombre de Prandtl généralisé, Pr
- le nombre de Rayleigh généralisé, Ra .

Trois situations sont examinées selon que la cavité est chauffée horizontalement, verticalement ou dans les deux directions (densités de flux croisées).

Pour les fluides considérés, la convection est insensible au nombre Prandtl, dans le domaine des grandes valeurs de celui-ci ($Pr \geq 100$) et ce, indépendamment des paramètres gouvernants a , b , m , n et Ra .

Dans les trois cas, et dépendamment des paramètres n et Ra , l'effet de m est tel que l'écoulement est scindé en deux régions dont l'une, appelée sous-couche rhéologique, confine la convection et l'autre, dénommée zone morte ou couvercle conductif selon la configuration de chauffage en présence, où le fluide est presque inerte. Une telle situation physique a pour conséquences une brisure de la symétrie des champs dynamique et de thermique, une intensification de l'écoulement dans la sous-couche rhéologique et une détérioration du transfert de chaleur.

Lorsque la convection présente un seuil critique, Rac , celui-ci se trouve anticipé par une augmentation de m , ce qui montre le rôle déstabilisant de la thermo-dépendance de la viscosité.

En général, une diminution de n amplifie la convection thermique, alors qu'une augmentation de ce paramètre la réduit. De ce fait, les fluides rhéofluidifiants ($0 < n < 1$) s'annoncent favorables aux transferts thermo-convectifs contrairement à ceux rhéoépaississants ($n > 1$).

Mots clés : Convection naturelle, Thermo-dépendance, Transfert de chaleur, Cavité carrée, Fluides non-Newtoniens.

Abstract

Natural convection in a square cavity, confining non-Newtonian fluids having thermo-rheological behavior that may be modeled by a combination of Ostwald-de Waele power-law and Frank-Kamenetski-Reynolds with the exponential-law and submitted to uniform densities of heat flux, is numerically studied using a computing code based on centered finite differences. The parameters of the study are:

- the fractions of heat flux density in the horizontal and vertical direction, a and b ,
- the Pearson number, m , characterizing the viscosity thermo-dependency,
- the exponent, n , characterizing fluids rheological behaviour
- the generalised Prandtl number, Pr
- the generalised Rayleigh number, Ra .

Three situations are examined according to whether the cavity is heated horizontally, vertically or in both directions (crossed heat flux densities).

For the considered fluids, the convection is insensitive to the Prandtl number, in the range of large values of this one ($Pr \geq 100$) and this, irrespective of the governing parameters a , b , m , n and Ra .

In the three cases, and dependently on the parameters n and Ra , the effect of m is such that the flow is divided in two regions the one of which, called rheological sub-layer, confines convection and the other, named stagnant zone or conductive lid according to the considered heating configuration, where the fluid is almost inert. Such a physical situation has for consequences a break of the dynamical and thermal fields symmetry, an intensification of the flow in the rheological sub-layer and a deterioration of heat transfer.

When the convection presents a critical threshold, Rac , this one is found to be anticipated by an increase of m , which shows the destabilising role of the viscosity thermo-dependency.

In general, a decrease of n amplifies the convection, while an increase of this parameter reduces it. Therefore, shear-thinning fluids ($0 < n < 1$) looks favourable to convective heat transfer unlike shear-thickening ones ($n > 1$).

Keywords: Natural convection, Thermo-dependency, Heat transfer, Non-Newtonian fluids, Square cavity.

ملخص

الحمل الحراري الطبيعي في تجويف مربع مغلق متضمن لموائع لانيوتونية ذات اللزوجة المتغيرة مع الحرارة والتي يمكن تمثيلها بعلاقة ممزوجة من قانون أستفالد ديويل و العلاقة الأسية لكامينسكي - رينولدز فرانك والتي سخنت بتدفقات حرارية منتظمة ، درست دراسة رقمية باستعمال برنامج معلوماتي هيئ على طريقة فرق التغيرات المحدودة المركزة. و العوامل المتحكمة في هذه الدراسة هي:

✓ شدة التدفقات الأفقية والعمودية للحرارة، a و b

✓ عدد رايلي، Ra ، الذي يجسد التفاعل بين القوى الحرارية وقوة الجاذبية

✓ عدد بيرسون، m ، المميز لتغير اللزوجة بالحرارة ،

✓ الأس، n ، العاكس لسلوك السوائل،

✓ عدد برانتل، Pr .

ثلاث حالات تم اعتمادها حسب كيفية تسخين التجويف، أفقيا، رأسيا أو في كلا الاتجاهين.

بالنسبة لهاته السوائل، الحمل الحراري لا يتأثر كثيرا بعدد برانتل Pr في مجال القيم الكبيرة منها

($Pr \geq 100$)، بغض النظر عن قيم العوامل المتحكمة a, b, m, n, Ra .

في جميع الحالات الثلاث، ووفقا لمقادير المعاملات، n و Ra ، تأثير m على جريان السائل هو من النوع الذي ينقسم إلى منطقتين ذات جريان مختلف، واحدة منها، وتدعى طبقة حرارية تحتية، تحصر الحمل الحراري و الأخرى و تسمى منطقة ميتة أو غطاء موصلا حسب نوع التسخين المعتمد، يكون فيها السائل خاملا.

يستنتج من هذه الوضعية الفيزيائية، كسر للتناظر و التماثل في الحقول الحركية والحرارية، ارتفاع في

درجة السيلان في الطبقة تحت الحرارية و تدهور في النقل الحراري.

عندما يكون للحمل الحراري عتبة حرجة، Rac ، هذه العتبة تتناقص مع الزيادة في m ، مما يدل على

الدور المزعزع للاستقرار للزوجة المتغيرة بالحرارة.

و بشكل عام، أي انخفاض في قيمة الأس، n ، سيزيد في شدة الحمل الحراري، في حين أي ارتفاع في هذا

المعامل يقلل منه. ولذلك، فإن السوائل لانيوتونية المميزة ب ($0 < n < 1$) مواتية لنقل الحمل الحراري

على عكس تلك المميزة ب ($n > 1$).

كلمات البحث: الحمل الحراري الطبيعي، الحرارية التبعية، نقل الحرارة، السوائل غير النيوتونية، تجويف

مربع.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE.....	1
----------------------------	---

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTERATURE

1.1 Introduction.....	5
1.2 Convection naturelle.....	5
1.3 Importance de la convection naturelle.....	6
1.4 Fluides non-newtoniens.....	8
<i>1.4.1 Définition.....</i>	<i>8</i>
<i>1.4.2 Classification.....</i>	<i>8</i>
1.5 Travaux antérieurs sur la convection naturelle.....	10
<i>1.5.1 Cas où les variations de la viscosité avec la température ne sont pas prises en compte.....</i>	<i>11</i>
<i>1.5.2 Cas où les variations de la viscosité avec la température sont prises en compte.....</i>	<i>13</i>
1.6 Conclusion.....	17

CHAPITRE 2

Formulation Mathématique et Méthode de Résolution

2.1. Introduction.....	19
2.2. Formulation Mathématique.....	20
<i>2.2.1 Position du problème et géométrie considérée.....</i>	<i>20</i>
<i>2.2.2. Equations générales.....</i>	<i>20</i>
<i>2.2.3. Loi de viscosité adoptée.....</i>	<i>21</i>
<i>2.2.4. Conditions aux limites.....</i>	<i>23</i>
2.2.4.1. Conditions aux limites thermiques.....	23
2.2.4.2. Conditions aux limites dynamiques.....	24
<i>2.2.5. Hypothèses simplificatrices.....</i>	<i>25</i>
<i>2.2.6. Equations gouvernantes en formulation primitive adimensionnalisées.....</i>	<i>26</i>
<i>2.2.7. Equations gouvernantes en formulation secondaire adimensionnalisées.....</i>	<i>28</i>

2.2.8. <i>Transfert de chaleur</i>	29
2.2.8.1. Transfert de chaleur dans la direction horizontale.....	29
2.2.8.2. Transfert de chaleur dans la direction verticale.....	29
2.2.9. <i>Formulation en lignes de flux de chaleur</i>	30
2.3. Méthode de Résolution	31
2.3.1. <i>Méthode des différences finies</i>	31
2.3.2. <i>Discrétisation des équations gouvernantes</i>	32
2.3.2.1. Termes transitoires.....	32
2.3.2.2. Termes convectifs.....	33
2.3.2.3. Termes diffusifs et autres que diffusifs.....	33
2.3.3. <i>Résolution des équations gouvernantes</i>	33
2.3.3.1. Equations de la vorticité et de l'énergie.....	33
2.3.3.1.1. Schéma implicite en x et explicite en y	34
2.3.3.1.2. Schéma implicite en y et explicite en x	35
2.3.3.2. Equation de Poisson pour les fonctions de courant et de flux de chaleur.....	36
2.3.3.3. Conditions aux limites.....	37
2.3.4. <i>Critère de convergence</i>	38
2.3.5 <i>Caractérisation du régime permanent</i>	38

CHAPITRE 3

EFFET DE LA THERMO-DEPENDANCE SUR LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITÉ CARRÉE SOUMISE UNIFORMEMENT À DES DENSITES DE FLUX DE CHALEUR HORIZONTALAUX

3.1. Introduction	39
3.2. Tests de précision et choix d'un maillage optimal	39
3.3. Validation du code de calcul	40
3.4. Valeur optimale du nombre de Prandtl pouvant caractériser les fluides considérés	40
3.5. Structures des champs d'écoulement et de température	42
3.6. Distributions de la fonction de courant et de la température	44
3.7. Intensité d'écoulement et taux de transfert de chaleur moyen	45

3.8. Conclusion	47
------------------------------	-----------

CHAPITRE 4

EFFET DE LA THERMO-DEPENDANCE SUR LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITÉ CARRÉE SOUMISE UNIFORMEMENT À DES DENSITES DE FLUX DE CHALEUR VERTICAUX ASCENDANTS.

4.1. Introduction	54
4.2. Tests de précision et choix d'un maillage optimal	54
4.3. Validation du code de calcul	55
4.4. Détermination du seuil d'apparition de la convection	55
4.5. Analyse des champs d'écoulement, de température et de flux de chaleur	56
4.6. Distributions de la fonction de courant et de la température	57
4.7. Intensité d'écoulement et taux de transfert de chaleur moyen	58
4.8. Conclusion	59

CHAPITRE 5

EFFET DE LA THERMO-DEPENDANCE SUR LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITÉ CARRÉE SOUMISE UNIFORMEMENT À DES DENSITES DE FLUX DE CHALEUR CROISÉS

5.1. Introduction	66
5.2. Effet de la thermo-dépendance selon la configuration de chauffage considérée	66
5.2.1. <i>Configuration de chauffage $a = 1$ et $0 \leq b \leq 1$</i>	67
5.2.2. <i>Configuration de chauffage $b = 1$ et $0 \leq a \leq 1$</i>	68
5.2.3. <i>Configuration de chauffage $a = b = 1$</i>	69
5.3 Conclusion	70
CONCLUSION GENERALE	92
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	95

LISTE DES FIGURES

2.1 : Modèle physique et système de coordonnées.....	20
2.2 : Maillage en (i, j) et repère cartésien en (x, y).....	32
3.1 : Lignes de courant (gauche), isothermes (centre) et lignes de flux de chaleur (droite) obtenues pour $Ra = 10^2$, $m = 0$. (lignes continues noires), et $m = 10$. (lignes interrompues rouges).....	48
3.2 : Lignes de courant (gauche), isothermes (centre) et lignes de flux de chaleur (droite) obtenues pour $Ra = 10^4$, $m = 0$. (lignes continues noires), et $m = 10$. (lignes interrompues rouges).....	49
3.3 Lignes de courant (gauche), isothermes (centre) et lignes de flux de chaleur (droite) obtenues pour $Ra = 10^6$, $m = 0$. (lignes continues noires), et $m = 10$. (lignes interrompues rouges).....	50
3.4 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x, y = 1/2)$ et de la température $T(x, y = 1/2)$ pour $Ra = 10^2$	51
3.5 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x, y = 1/2)$ et de la température $T(x, y = 1/2)$ pour $Ra = 10^4$	52
3.6 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x, y = 1/2)$ et de la température $T(x, y = 1/2)$ pour $Ra = 10^6$	53
4.1 : Evolution du nombre de Ra_c avec n , pour différents valeurs de m	60
4.2 : Carte d'isovaleurs en fonction de Ra , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 0.6$, $m = 0$ (trait continu noir) et $m = 10$ (trait interrompu rouge).....	61
4.3 : Carte d'isovaleurs en fonction de Ra , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1$, $m = 0$ (trait continu noir) et $m = 10$ (trait interrompu rouge).....	62
4.4 : Carte d'isovaleurs en fonction de Ra , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.4$, $m = 0$ (traits continu noirs) et $m = 10$ (traits interrompu rouges).....	63

4.5 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x=1/2, y)$ (à gauche) et de la température $T(x=1/2, y)$ (à droite) pour différents valeurs de Ra , n et m . $m=0$. (lignes interrompues noires) et $m=10$. (lignes continues rouges).....	64
4.6 : Evolution de l'intensité d'écoulement maximale $ \psi_{\max} $ et du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} en fonction de Ra pour plusieurs valeurs de n et m . $m=0$. (lignes interrompues noires) et $m=10$. (lignes continues rouges).....	65
5.1 : Carte d'isovaleurs en fonction de l'intensité de chauffage vertical b , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 0.6$, $Ra = 5.10^3$, $a = 1$, $m=0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).....	72
5.2 : Carte d'isovaleurs en fonction de l'intensité de chauffage vertical b , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.0$, $Ra = 5.10^3$, $a = 1$, $m = 0$ (traits continus noires) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).....	73
5.3 : Carte d'isovaleurs en fonction de l'intensité de chauffage vertical b , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.4$, $Ra = 5.10^3$, $a = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).....	74
5.4 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x, y=1/2)$ (à gauche) et de la température $T(x, y=1/2)$ (à droite) pour $Ra = 5.10^3$, $a = 1$ et différents valeurs de b , n et m . $m=0$. (lignes interrompues noires) et $m=10$. (lignes continues rouges).....	75
5.5 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x=1/2, y)$ (à gauche) et de la température $T(x=1/2, y)$ (à droite) pour $Ra = 5.10^3$, $a = 1$ et différents valeurs de b , n et m . $m=0$. (lignes interrompues noires) et $m=10$. (lignes continues rouges).....	76
5.6 : Evolution de l'intensité d'écoulement maximale $ \psi_{\max} $ en fonction de b pour $Ra = 5.10^3$, $a = 1$ et plusieurs valeurs de n et m . $m=0$. (lignes interrompues noires) et $m=10$. (lignes continues rouges).....	77
5.7 : Evolution de nombre de Nusselt global moyen \overline{Nu}_g en fonction de b pour $Ra = 5.10^3$, $a = 1$ et plusieurs valeurs de n et m . $m=0$. (lignes interrompues noires) et $m=10$. (lignes continues rouges).	78

5.8 : Carte d'isovaleurs en fonction de l'intensité de chauffage horizontal a , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 0.6$, $Ra = 5.10^3$, $b = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).	79
5.9 : Carte d'isovaleurs en fonction de l'intensité de chauffage horizontal a , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.0$, $Ra = 5.10^3$, $b = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).	80
5.10 : Carte d'isovaleurs en fonction de l'intensité de chauffage horizontal a , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.4$, $Ra = 5.10^3$, $b = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).....	81
5.11 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x, y=1/2)$ (à gauche) et de la température $T(x, y=1/2)$ (à droite) pour $Ra = 5.10^3$, $b = 1$ et différents valeurs de a , n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).....	82
5.12 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x=1/2, y)$ (à gauche) et de la température $T(x=1/2, y)$ (à droite) pour $Ra = 5.10^3$, $b = 1$ et différents valeurs de a , n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).....	83
5.13 : Evolution de l'intensité d'écoulement maximale $ \psi_{\max} $, (a), et du nombre de Nusselt global moyen \overline{Nug} , (b), en fonction de a pour $Ra = 5.10^3$, $b = 1$ et plusieurs valeurs de n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).....	84
5.14 : Influence de a sur la structure de l'écoulement pour le cas initié par un écoulement antihoraire, pour $b = 1$, $Ra = 5.10^3$ et différents valeurs de n et de m	85
5.15 : Carte d'isovaleurs en fonction de Ra , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 0.6$, $a = 1$, $b = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).....	86
5.16 : Carte d'isovaleurs en fonction de Ra , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.0$, $a = 1$, $b = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).....	87
5.17 : Carte d'isovaleurs en fonction de Ra , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.4$, $a = 1$, $b = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).....	88

5.18 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x, y=1/2)$ (à gauche) et de la température $T(x, y=1/2)$ (à droite) pour $a = 1, b = 1$ et différents valeurs de Ra, n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).....**89**

5.19 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x=1/2, y)$ (à gauche) et de la température $T(x=1/2, y)$ (à droite) pour $a = 1, b = 1$ et différents valeurs de Ra, n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).....**90**

5.20 : Evolution de l'intensité d'écoulement maximale $|\psi_{\max}|$, (a), et du nombre de Nusselt global moyen \overline{Nug} , (b), en fonction de Ra pour $a = 1, b = 1$ et plusieurs valeurs de n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).....**91**

LISTE DES TABLEAUX

3.1 : Tests de comparaison justifiant le choix de 81×81 comme taille de grille optimale pour $Ra = 10^4, m = 5, Pr \rightarrow \infty$ et différents valeurs de n**40**

3.2 : Validation du code numérique par rapport aux études précédentes ($m = 0, Ra = 10^4$).....**40**

3.3 : Influence du nombre de Prandtl sur les intensités de l'écoulement et du transfert de chaleur pour $m = 5$ et différents valeurs de n et Ra **42**

3.4 : Effet de m sur l'intensité d'écoulement et le taux de transfert de la chaleur moyen.....**45**

4.1 : Essais préliminaires sur l'effet de la taille de grille pour $m = 5, Pr \rightarrow \infty$ et différentes valeurs de n et de Ra**55**

4.2 : Validation du code numérique pour $Pr = 0.71$**55**

NOMENCLATURE

- a intensité du chauffage latéral, (nombre réel)
- b intensité du chauffage transversal, (nombre réel)
- c_p capacité calorifique à pression constante, J/(kg K)
- g accélération gravitationnelle, m/s^2
- H fonction de flux de chaleur, (2.36)
- H' hauteur de la cavité, m
- \Rightarrow
 \mathbf{I} tenseur unité
- k_T indice de consistance pour un fluide d'Ostwald-De Waele, $Pa s^n$ (2.8)
- m nombre de Pearson, (2.21)
- n indice de comportement ou de structure pour un fluide d'Ostwald-De Waele
- Nu_h nombre de Nusselt correspond au transfert de chaleur local horizontal, équation (2.30)
- \overline{Nu}_h nombre de Nusselt correspond au transfert de chaleur moyen horizontal, équation (2.31)
- Nu_v nombre de Nusselt correspond au transfert de chaleur local vertical, équation (2.32)
- \overline{Nu}_v nombre de Nusselt correspond au transfert de chaleur moyen vertical, équation (2.33)
- \overline{Nu}_g nombre de Nusselt moyen global correspond à la somme de \overline{Nu}_h et \overline{Nu}_v , équation (5.1)
- P pression adimensionnelle (Pa).
- Pr nombre de Prandtl généralisé, équation (2.19)
- q' densité du flux de chaleur constant, W/m^2
- Ra nombre de Rayleigh généralisé, équation (2.20)
- T température adimensionnelle
- T_r température de référence
- (u, v) composantes de vitesse adimensionnelles, équation (2.24)

Lettres grecques

α	diffusivité thermique du fluide, m^2/s
β	coefficient d'expansion volumétrique thermique à pression constante, $1/\text{K}$
$\vec{\dot{\gamma}}$	tenseur des taux de cisaillement ou vitesses de déformation, s^{-1}
λ	conductivité thermique du fluide, $\text{W}/(\text{m K})$
μ	viscosité dynamique newtonienne, Pa s
μ_a	viscosité apparente adimensionnelle pour un fluide d'Ostwald-De Waele, équation (2.18)
$\vec{\Sigma}$	tenseur des contraintes générales, Pa , équation (2.4)
$\vec{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses, Pa , équation (2.5)
Ω	vorticité adimensionnelle, équation (2.25)
ψ	fonction de courant adimensionnelle
ρ	densité du fluide

Exposants

' variables dimensionnelles

Indices

c	valeur critique
p	paroi
max	maximum

INTRODUCTION GENERALE

La promotion par la recherche constitue l'une des principales priorités des activités du "*Laboratoire de Modélisation des Écoulements et des Transferts*" (LAMET). Dans ce cadre, nous nous sommes vus confié le sujet "*Etude numérique des écoulements et des transferts de chaleur par convection naturelle dans les fluides non-Newtoniens thermo-dépendants confinés*". Le choix d'un tel sujet est dicté par sa particularité d'être un terrain d'investigations intéressant et prometteur, qu'il convient de prospector en investissant nombre de ses aspects.

En effet, face aux enjeux économiques, sociaux et environnementaux, l'amélioration de "process-produit-matériaux" est désormais le levier indispensable du développement et de la pérennité des entreprises dans une économie de plus en plus compétitive et soumise aux réglementations. C'est dans ce contexte que les techniques de traitement des matériaux sont, aujourd'hui, l'un des plus importants domaines de recherche pouvant intéresser directement des applications en relation étroite avec des champs divers tels que l'environnement, l'énergie, la biotechnologie, le transport, les communications, l'électronique et l'informatique. La nécessité d'améliorer ces techniques est devenue donc, plus que jamais, une opération prioritaire.

Certains matériaux sont fluides et se caractérisent, pour la plupart, par un comportement rhéologique non-Newtonien et une thermo-dépendance marquée. On peut les rencontrer, notamment, dans les industries agro-alimentaires (chocolat, yaourt, mélasse mayonnaise, jus de fruits, ...), thermoplastiques (PE, PP, PS, PVC, polyamides, ...), chimiques (huile de lubrification, peinture, graisse, solutions de hauts polymères, ...), pétrochimiques (pétrole et ses dérivées, ...) et biomédicales (plasma sanguin, mucus, sève, liquide viscoélastique dans les plantes carnivores, ...). Autre exemples familiers intéressent la géophysique et on peut en citer la lave, la neige, la boue, etc.

D'autre part, étant donnée leur importance cruciale dans la vie active, la compréhension fondamentale du processus de leur traitement est aussi essentielle dans la conception et l'optimisation des systèmes dont ils relèvent.

Dans pas mal de procédés industriels, la thermisation de ces fluides fait souvent intervenir la thermoconvection. Si les mécanismes de la convection thermique semblent actuellement maîtrisés dans le cas des fluides Newtoniens, beaucoup reste encore à faire quant aux produits non-Newtoniens, compte tenu de la complexité et de la diversité de leur comportement rhéologique. Bien que des investigations ont été entreprises dans ce sens, pendant les trois dernières décennies, elles se sont limitées aux fluides à propriétés physiques supposées constantes, ce qui constitue une approximation grossière quand on sait que celles-ci, en particulier la viscosité, peuvent exhiber une dépendance manifeste vis-à-vis de la température. C'est là un autre défi qui se pose et vient s'ajouter à la non linéarité du comportement rhéologique et qu'il convient, bien entendu, de relever pour pouvoir appréhender de façon globale le problème de ces fluides. En effet, au cours de leur traitement dans des installations industrielles, la présence de gradients de température peut affecter sérieusement les caractéristiques rhéologiques et par voie de conséquence l'écoulement et le transfert de chaleur en leur sein. La répercussion en est que les équations gouvernant la convection prennent un aspect fortement couplé et non linéaire, ce qui complique considérablement leur résolution, et l'interprétation des résultats expérimentaux devient difficile. Une maîtrise parfaite des conditions d'écoulement de ces fluides complexes, en situation anisotherme, s'avère donc indispensable pour une prédiction réaliste des phénomènes de transport résultants.

L'objectif principal assigné à cette thèse est, donc, l'étude numérique de l'écoulement et du transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte carrée confinant des fluides non-Newtoniens. L'attention est particulièrement focalisée, ici, sur les produits de types pseudo-plastiques (ou

rhéofluidifiants) et dilatants (ou rhéoépaississants) affichant une certaine dépendance de la viscosité effective vis-à-vis de la température (comportement thermodépendant). Les premiers sont abondants et on peut mentionner à cet égard les suspensions de particules asymétriques, les solutions de hauts polymères (dérivées de cellulose), les ciments, la pâte à papier, les colles, les polymères fondus, le savon, les suspensions de détergents, le napalm, certaines peintures et bien d'autres. Les seconds sont rares en pratique et peuvent être représentés par les suspensions hautement concentrées, pour lesquelles la phase liquide n'occupe que les interstices entre les particules solides. A ce titre, les solutions d'amidon, les sables mouillés compactés et les huiles polymériques sont des exemples illustratifs. Le comportement rhéologique, de tous ces milieux, est modélisé par la loi en puissance d'Ostwald-De Waele, alors que celui thermo-dépendant est approximé à l'aide de la loi exponentielle de Frank-Kamenetski-Reynolds, dérivant de celle d'Arrhenius pour les variations de température relativement petites. La cavité est soumise à des conditions aux limites thermiques de type Neumann en imposant à ses parois rigides des densités de flux de chaleur uniformes. Bien évidemment, et sans aucun doute, la configuration géométrique, les conditions aux limites et la thermo-rhéologie peuvent avoir des retombées spécifiques sur la convection thermique en général et on peut s'attendre à des résultats nouveaux, les distinguant de ce qui est plus au moins bien connu dans le domaine. Les investigations portent essentiellement sur les effets des paramètres gouvernant le problème sur les champs dynamique et thermique ainsi que sur les transferts de chaleur conséquents.

La présentation de ce mémoire vient comme suit :

- Pour mieux situer le problème, objet de cette thèse, dans le contexte bibliographique, le premier chapitre fait une synthèse des travaux antérieurs, théoriques, expérimentaux ou numériques, ayant trait à la convection naturelle dans les milieux non-Newtoniens confinés purement fluides, à viscosité

apparente constante ou variable avec la température, pour différentes configurations géométriques et pour des conditions aux limites variées.

- Les équations générales régissant la convection naturelle dans un fluide non-Newtonien du type Ostwald-De Waele, sont présentées dans le second chapitre. Compte tenu de certaines hypothèses simplificatrices et de la nature carrée de la géométrie, ces équations sont écrites sous forme adimensionnelle dans un système de coordonnées cartésiennes en deux formulations : une formulation en variables primitives (vitesse-pression) et une autre en variables secondaires (fonction de courant-vorticité), laquelle est finalement adoptée en raison des avantages qu'elle offre en termes de simplicité et de résolution. Dans le même chapitre, l'approche numérique utilisée pour la résolution des équations gouvernantes est aussi exposée.

- Dans les chapitres trois, quatre et cinq sont rassemblés les principaux résultats numériques relatifs, respectivement, aux configurations de densités de flux de chaleur pariétales horizontales (convection naturelle), verticales (convection de Rayleigh-Bénard), et croisées (couplage convection naturelle et convection de Rayleigh-Bénard). Pour chaque cas, les analyses, interprétations et commentaires sont faits à partir des isolines, relatives à la fonction de courant, la température et la fonction de flux de chaleur, et des grandeurs thermoconvectives caractérisant l'écoulement et le transfert de chaleur, obtenues en situations d'isoviscosité (viscosité indifférente vis-à-vis de la température) et de viscosité thermo-dépendante (viscosité variable avec la température) et ce, en faisant varier les principaux paramètres gouvernant le problème.

- Enfin, pour clore ce mémoire, une conclusion générale, résumant l'essentiel des résultats obtenus et les nouveautés dégagées dans le cadre de la présente étude, s'impose. Quelques recommandations pour les études futures sont finalement émises.

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTERATURE

1.1 Introduction

Le travail faisant l'objet de cette thèse porte essentiellement sur la convection naturelle dans un fluide non-Newtonien, rhéologiquement thermodépendant, confiné dans une cavité carrée soumise à des flux de chaleur uniformes.

Après avoir défini le phénomène convectif et son importance dans la vie active, et après avoir rappelé la classification des fluides non-Newtoniens, on propose une revue bibliographique des principaux travaux antérieurs relatifs à la convection naturelle dans les milieux non-Newtoniens confinés purement fluides à viscosité constante et variable.

1.2 Convection naturelle

La convection naturelle est le mouvement résultant d'un gradient de température ou de concentration résidant dans un fluide en présence du champ de gravité. Ce phénomène, fréquemment rencontré dans les processus naturels et industriels, a souvent suscité l'intérêt de la communauté scientifique, qui n'a pas ménagé d'efforts pour l'étudier (Ostrach, 1988).

D'un point de vue physique, une partie fluide chauffée à la base devient plus légère du fait de sa dilatation thermique et remonte sous l'action de la poussée d'Archimède. Arrivée au sommet de la couche, la partie échange de chaleur, se refroidit et s'alourdit. Elle redescend alors et crée un transfert retour de chaleur. La première approche physique a été mise en place par Henri Bénard, avec l'étude de la convection dans une couche de fluide soumise à un gradient de température vertical. Ce problème présente deux états d'équilibre

stable et instable, pouvant exister selon le sens des gradients verticaux de température appliqués au fluide.

Dans le cas d'une couche fluide chauffée par le haut, la stratification de la densité (fluide léger en haut) est stable. Cet effet apparaît dans l'atmosphère de certaines villes lorsque les couches d'air chaud sont au-dessus de celles d'air plus frais. Cette situation ne permet pas l'élimination correcte de la pollution et il se forme un brouillard dans la partie supérieure de l'atmosphère qui fait obstacle au rayonnement solaire et empêche le réchauffement des couches basses (phénomène d'inversion de température).

Dans le cas d'une couche fluide chauffée par le bas, on se trouve dans une situation instable car les particules fluides de faible densité sont situées au-dessous de celles de plus grande densité (diminution de la masse volumique avec la température). Cependant, le fluide ne peut se mettre en mouvement que lorsque la différence de température excède une certaine valeur critique, appelée seuil d'instabilité.

Dans le cas d'une couche fluide soumise à un gradient horizontal de température, on se trouve dans une situation où l'équilibre statique du fluide est impossible du fait de la disparition de l'effet du seuil remarqué dans la configuration verticale.

1.3 Importance de la convection naturelle

Dans notre environnement quotidien, la convection tient une place importante dont on n'a pas toujours conscience. Elle assure les échanges de chaleur dans la plupart du temps.

De l'air à l'intérieur des maisons comme celui de l'atmosphère, à l'eau dans une casserole, ou encore les rivières et les océans sont autant d'exemples où ce phénomène se manifeste. Ainsi, pendant notre sommeil, on risquerait d'être étouffé si les mouvements de convection, provoqués par notre respiration, ne mélangeaient pas rapidement l'air expiré avec de l'air frais. Plus encore, la

pollution due aux gaz émis par les automobiles et les effluents industriels doit être évacuée assez rapidement par les mouvements atmosphériques, sinon l'air deviendrait irrespirable. Cependant, heureusement, la température étant plus élevée au sol qu'en altitude, des mouvements de convection assurent cette évacuation.

En météorologie, les nuages orageux sont d'énormes masses, en forme d'enclume, couvrant plusieurs kilomètres carrés, et atteignant souvent plusieurs kilomètres d'altitude. Des gouttes d'eau et des particules de glace sont localisées respectivement dans les parties inférieures et supérieures des masses nuageuses et leur formation est due à l'apparition de courants atmosphériques ascendants, provoqués par la convection naturelle.

En géologie, le mécanisme de la tectonique des plaques est la conséquence de mouvements convectifs générés par des gradients de température, dont l'origine est liée aux énormes quantités de chaleur libérées par les réactions thermonucléaires se produisant dans le manteau terrestre.

En agriculture, le problème de gelées tardives dans certaines régions viticoles affecte, partiellement ou totalement, les bourgeons des vignes, ce qui exige des techniques de prévention adaptées. L'idée consiste à réchauffer légèrement les gaules par l'intermédiaire de câbles électriques chauffants. Avec ce système, connu sous le nom de panache, la chaleur est essentiellement transmise aux gaules par convection naturelle (Essafi, 1995).

En fonderie, la convection induite par le gradient de température est une source d'instabilité qui engendre des modifications dans la structure du matériau. La répercussion en est l'apparition de stries dans le solide affectant ses propriétés physiques et par là sa qualité. C'est pourquoi il y a eu recours à des expériences en apesanteur afin de supprimer les effets convectifs dus aux forces d'Archimède (Batoul, 1995).

Dans les industries pétrolières, les pertes de chaleur, inhérentes à la convection naturelle, au niveau des parois des réservoirs de stockage du pétrole

brut (généralement à température plus élevée que celle ambiante) sont préoccupantes dans les régions froides ou les températures ambiantes peuvent être nettement en deçà du point de congélation du produit stocké, ce qui peut provoquer des instabilités structurelles. La connaissance des taux de refroidissement est, par conséquent, nécessaire pour la prédiction de temps de stockage acceptables, au-delà desquels le déchargement du brut peut s'avérer difficile (Cotter et Charles, 1993).

Enfin, la rupture de la chaîne du froid est souvent observée au niveau du dernier maillon qui est celui des réfrigérateurs ménagers, où les produits alimentaires séjournent longtemps. La connaissance des profils de température et de vitesse de l'air, engendrés par la convection naturelle au sein d'un réfrigérateur, est d'importance pour maintenir une bonne qualité d'aliments. Ainsi, pour un emplacement optimum de ceux-ci, il est indispensable de connaître l'épaisseur des couches limites thermiques et hydrodynamiques à proximité des parois. Si le produit est placé trop près de la paroi de l'évaporateur, on favorise les risques de congélation alors que l'emplacement de celui-ci trop près des parois latérales, accentue les risques sanitaires (Ben Amara, 2005).

1.4 Fluides non-newtoniens

1.4.1 Définition

En rhéologie, On dit qu'un fluide est non-newtonien lorsque sa viscosité dépend du taux de cisaillement, sinon le fluide est newtonien et sa viscosité est alors constante. Le plastique, le caoutchouc, le dentifrice sont par exemple des fluides Non-newtoniens. L'eau, l'air sont des fluides newtoniens.

1.4.2 Classification

Il existe deux types classiques de fluides non-newtoniens :

➤ **Fluides non-newtoniens à comportement dépendant du temps**

Dans cette catégorie, on trouve les fluides thixotropes et antithixotropes. Pour les premiers, la viscosité dépend non seulement de la vitesse de cisaillement, mais aussi du temps (diminution avec le temps) et des traitements préalables que le fluide a subis. Après suppression de la contrainte appliquée au fluide, la viscosité recouvre sa valeur initiale, suivant un temps plus ou moins long (fluide à mémoire).

Inversement, on rencontre rarement les fluides antithixotropes, c'est-à-dire dont la viscosité apparente augmente avec le temps, dans les mêmes conditions que pour une expérience de thixotropie.

➤ Fluides non-newtoniens à comportement indépendant du temps

Il existe deux types de fluides "à comportement indépendant du temps": les fluides à contrainte critique (ou contrainte seuil ou seuil d'écoulement) tels que les viscoplastiques, et ceux sans contrainte critique tels que les pseudo-plastiques et les dilatants.

✓ *Fluides à contrainte critique*

Ces matériaux ne peuvent s'écouler que lorsque la contrainte qui leur est appliquée dépasse un niveau critique appelée contrainte seuil, seuil de plasticité ou seuil d'écoulement. Cette propriété, particulièrement utile pour le transport particules en empêchant la sédimentation, est typique aux boues de forage, pâtes dentifrices, ketchup, mayonnaise, graisses et peintures non coulantes. Au dessous du seuil le comportement est plastique, et au dessus de celui-ci il est soit rhéofluidifiant (fluides de Herschel-Bulkley) soit newtonien (fluides de Bingham).

✓ *Fluides sans contrainte critique*

Parmi ces fluides on trouve les rhéofluidifiants ou pseudoplastiques. Ce sont les suspensions diluées de particules solides, les suspensions de vésicules déformables (comme le sang), les encres, les peintures, les solutions diluées de polymères, les polymères liquides (acétate de cellulose), la pâte à papier et bien d'autres. Leur viscosité effective diminue avec l'augmentation de la contrainte.

Cela est dû principalement à une brisure de la structure interne par l'écoulement (Midoux, 1993).

Rares sont les fluides ayant un comportement rhéoépaississant ou dilatant, comme les suspensions concentrées ou encore le sable mouillé. Leur viscosité apparente augmente avec la contrainte, d'où le qualificatif qui leur est attribué. Ceci est lié à un changement de type d'association entre les macromolécules et donc à un gonflement du liquide à mesure que la vitesse de déformation croît (Couarraze et Grossiord, 1991).

Dans ce travail, c'est à ces deux types de fluides qu'on s'est intéressé.

1.5 Travaux antérieurs sur la convection naturelle

Le phénomène de convection thermique a d'abord été reconnu par le compte de Rumford en 1797 et James Thomson en 1882, mais les premières séries d'expériences, pour démontrer l'apparition d'une instabilité thermique dans un fluide, ont été réalisées par Bénard, qui a montré, ensuite, la formation spontanée de cellules dans une couche fluide chauffé par le bas (Bénard, 1900). En 1916, Lord Rayleigh, motivé par le travail de Bénard, s'est intéressé par le fondement des bases théoriques pour l'étude de l'instabilité de la convection. Ce dernier a montré que la convection s'établit lorsque le nombre de Rayleigh, qui compare les forces d'Archimède (forces motrices) aux forces visqueuses (forces de freinage), dépasse une valeur critique appelée seuil de convection.

Presque tous les travaux sur la convection naturelle ont considéré des géométries simples, différentiellement chauffées, et à l'intérieur desquelles un fluide Newtonien est confiné. Les configurations rectangulaires ou carrées sont les plus étudiées, étant donné leur simplicité et le fait de servir de base pour les études à caractère fondamental. Aussi, se trouvent-elles parfois impliquées dans certains procédés thermo-hydrauliques (Jaluria, 2003).

Dans le cas des milieux Newtoniens en situation de confinement, la littérature montre une abondance de travaux consacrés à la convection naturelle.

Pour une revue exhaustive à ce propos, on peut consulter, par exemple, Ostrach (1988), Gebhart et al. (1988), Prud'homme et al. (2003) et Rahman et al. (2003).

1.5.1 Cas où les variations de la viscosité avec la température ne sont pas prises en compte

Dans une telle situation, les travaux réalisés ont considéré le cas d'une cavité rectangulaire ou carrée confinant un fluide non-newtonien, souvent, à comportement du type Ostwald. Les conditions aux limites thermiques sont, pour la plupart, du type Dirichlet (températures imposées). A cet égard, deux configurations ont été examinées.

- Une configuration où la cavité est chauffée différentiellement dans la direction verticale. C'est le problème de Rayleigh-Bénard. Il convient, dans ce cas, de citer le travail d'Ozoe et Churchill (1972) qui furent les premiers à étudier le problème numériquement. Ces auteurs ont déterminé les conditions critiques relatives à l'apparition de la convection et ont montré que les nombres de Rayleigh critique et de Nusselt moyen augmente et diminue, respectivement, avec l'indice de comportement. Cependant, leurs résultats sous-estiment ceux obtenus expérimentalement par Tien et al. (1969). Dans l'étude numérique d'Ohta et al. (2002) il a été rapporté que le comportement pseudo-plastique améliore de façon substantielle le transfert thermique, conclusion à laquelle sont parvenus Inaba et al. (2003) dans leur travail, à caractère expérimental et numérique, portant sur une boue de micro-émulsion à différentes concentrations.

- Une configuration où la cavité est chauffée différentiellement dans la direction horizontale. C'est la convection thermique classique. On peut mentionner, ici, le travail expérimental de Cardon (1989) qui a considéré des solutions aqueuses de carboxyméthylcellulose (CMC), faiblement concentrées (2% et 4%), où le problème des couches limites dynamique et thermique a été examiné pour différents écarts de température et des corrélations locales, reliant le coefficient de transfert de chaleur aux divers paramètres adimensionnels du

problème, ont été établies. Le même travail a été repris numériquement, par la suite, par Turki (1990) qui a obtenu des résultats, en accord plus ou moins satisfaisant avec les expériences de Cardon (1989), informant clairement sur le rôle bénéfique du comportement pseudo-plastique dans la convection thermique. Quant à Kim et al. (2003), ils ont conclu qu'aux grands nombres de Rayleigh et de Prandtl l'activité convective s'intensifie avec la diminution de l'indice de comportement, entraînant, de façon globale, des améliorations des taux de transfert de chaleur.

Récemment, Turan et al. (2011), ont proposé, pour le nombre de Nusselt moyen, une corrélation, prenant en compte l'indice de comportement, le nombre de Prandtl et celui de Rayleigh. Enfin, tout récemment, Khezzar et al. (2012) ont étendu le travail de Kim et al. (2003) au cas où l'indice de comportement est supérieur à l'unité, tout en examinant l'effet du comportement rhéologique sur le taux de transfert de chaleur pour différents angles d'inclinaison de la cavité. Les auteurs ont observé, dépendamment du nombre de Rayleigh, l'existence d'une valeur critique de l'angle d'inclinaison pour laquelle le taux de transfert de chaleur est maximum. En outre, ils ont proposé aussi, pour le nombre de Nusselt, une corrélation impliquant les différents paramètres gouvernants.

Enfin, on ne peut oublier les investigations, effectuées de façons analytiques et numériques, par Lamsaadi (2006), qui bien qu'elles aient porté sur des conditions aux limites thermiques de type Neumann (flux de chaleurs imposés uniformément), ont montré que toute variation dans les grandes valeurs du rapport de forme et du nombre de Prandtl n'affecte guère les caractéristiques thermo-convectives, et le problème est essentiellement gouverné par le nombre de Rayleigh et l'indice de comportement, dont les effets sont opposés.

1.5.2 Cas où les variations de la viscosité avec la température sont prises en compte

Les études susmentionnées ont manifestement ignoré les variations des propriétés physiques des fluides avec la température, ce qui est en général peu réaliste si l'on se réfère, par exemple, au cas de l'eau et d'une huile de silicone où, rien que pour une augmentation de la température de 20 °C à 25 C°, la viscosité cinématique diminue pour la première de 10% et pour la deuxième de 20%, la conductivité thermique restant presque constante (Richardson et Straughan, 1993). C'est, donc, souvent la viscosité qui connaît une thermodépendance appréciable voire très appréciable. Ce point de vue peut être réconforté par les expériences de Piau (1970) qui a constaté que les principales propriétés variables pour l'eau, à un niveau de température modéré, sont la viscosité et le coefficient d'expansion thermique et que pour les liquides à grand nombre de Prandtl, la variation d'un tel coefficient est souvent négligeable, conclusion à laquelle parvint aussi Carey (1978) avec les huiles de pétrole, la glycérine, les glycols, les huiles de silicones et les sels fondus, à l'exception de l'eau. La répercussion en est que l'hypothèse adoptée peut s'avérer grossière puisque, dans beaucoup de cas, ceci peut affecter sérieusement l'écoulement et le transfert de chaleur comme peuvent en témoigner les investigations expérimentales et numériques, entreprises respectivement par Scirocco (1985) et Shin et Cho (1994). En effet, ces derniers ont observé que, pour une solution de Polyacrylamide (Separan AP-273), le taux de transfert de chaleur augmente de 70 à 300% par rapport au cas d'une viscosité supposée constante.

Conscients des retombées non réalistes de l'approximation de propriétés thermo-physiques constantes et motivés par des problèmes d'ordre géophysique et d'autres relevant de l'ingénierie, un certain nombre de chercheurs se sont, surtout, concentrés sur les aspects théoriques, numériques et expérimentaux d'une viscosité thermo-dépendante, hypothèse jugée crédible si l'on en croit Piau (1970) et Carey (1978). Etant donné l'abondance des travaux existants sur

ce sujet, on se limitera, dans le cadre de cette thèse, aux investigations réalisées dans ce sens en rapport avec les cavités rectangulaires et carrées. Celles-ci peuvent être scindées en deux parties.

- Les contributions ayant trait aux fluides newtoniens. On peut évoquer, par exemple, le travail de Palm (1960), qui a observé l'apparition de cellules hexagonales stables à partir d'un nombre Rayleigh critique inférieur à celui relatif au cas d'une viscosité constante. Busse (1967), en développant un modèle analytique pour la viscosité en fonction de la température jusqu'au premier ordre, a montré que des perturbations de viscosité aussi faibles soient-elles suffisent pour modifier la structure de l'écoulement. Par la suite, Foster (1969) a remarqué que la tendance de multiplicité de solutions peut être plus forte pour un fluide à viscosité variable avec la température. D'autres auteurs ont introduit la notion de saut de viscosité. Ainsi, Torrance et Turcotte (1971) ont remarqué que l'écoulement se concentre dans une région inférieure à faible viscosité et que la hauteur efficace de la cellule diminue avec un tel saut. Lorsque ce saut se trouve entre 2 et 6, Richter (1978) a observé la formation de rouleaux dont la stabilité est semblable à celle relative au cas d'une viscosité constante. Grâce à une théorie de stabilité linéaire, Stengel et al. (1982) ont pu relier le saut de viscosité aux nombres de Rayleigh et d'onde critiques pour plusieurs modèles de dépendance de la viscosité, ce qui leur a permis de suivre l'évolution de l'épaisseur de la couche convective. Pour un saut de viscosité aussi grand que 10^6 , Richter et al. (1983) ont montré l'existence d'une convection sous-critique d'amplitude finie au voisinage du nombre de Rayleigh critique. Christensen (1984) suggéra l'existence de différents régimes selon les valeurs du nombre de Rayleigh et du saut de viscosité. Pour ce qui est de la structure de l'écoulement, Busse et Frick (1985) ont montré qu'il est possible d'avoir une forme de cellule carrées pour un saut de viscosité dépassant 2. Quant à White (1988), lui, il a observé expérimentalement que dès que le saut devient de l'ordre de 10, les cellules convectives prennent un aspect carré ou hexagonal.

Hyun et al (1988) sont arrivés à la conclusion qu'avec un fluide de viscosité variable les activités convectives se manifestent essentiellement à proximité de la paroi chaude alors que près de la paroi froide elles sont pratiquement inexistantes. Concernant le transfert de chaleur, les auteurs ont constaté aussi que, pendant la phase transitoire, et pour des parois horizontales adiabatiques, le flux de chaleur entrant est supérieur à celui sortant, et la cavité se comporte dans ce cas comme un récepteur de chaleur. Ce dernier résultat confirme les mesures effectuées, au paravent, par Booker (1976) qui ont indiqué 12% de réduction dans le taux de transfert de chaleur pour une couche horizontale d'huile à grand nombre de Prandtl.

Presque toutes les études entreprises ont fait part, pour un fluide soumis à de fortes variations de viscosité, de la présence de deux couches, dont une, supérieure, comparée à un couvercle conducteur (stagnant ou quasiment immobile) et une autre, inférieure, confinant la convection (sous-couche active). Selon Ogawa et al. (1991) cela se produit dès que le saut de viscosité dépasse une valeur critique qui dépend du nombre de Rayleigh de surface. De leur côté, Giannadrea et Christensen (1992) ont pu distinguer, par le biais d'expériences analogiques en surface libre, deux régimes dont l'un s'apparente au régime de couvercle et l'autre au régime transitoire. Davaille et Jaupart (1993) ont trouvé expérimentalement que, dans le cas d'un saut de viscosité et d'un nombre de Rayleigh allant, respectivement, de 10^4 à 10^6 et de 10^6 à 10^8 , le couvercle rigide existe si l'écart de température appliqué au fluide est supérieur au double d'une échelle de température visqueuse qu'ils ont définie dans la zone de confinement des instabilités. Cette échelle représente les variations relatives de la viscosité induites par le saut de température dans la couche limite. Solomatov (1995) et Moresi et Solomatov (1995), dans leurs études de modélisation de la convection naturelle dans le manteau terrestre avec prise en compte de la variabilité de la viscosité, ont dessiné, dépendamment principalement du saut de viscosité, trois régimes : convectif, transitoire et de couvercle stagnant. Par la suite, pour des

applications géophysiques et planétologiques, Deschamps (1997), en examinant le problème de Rayleigh-Bénard à viscosité variable, a souligné que, contrairement au cas isovisqueux, trois régimes convectifs peuvent se manifester, selon le nombre de Rayleigh et l'amplitude des variations de la viscosité. Il a en outre suggéré que la convection soit gouvernée par la couche limite thermique du bas et que, dans le cas du régime de couvercle, la sous-couche confinant la convection ne peut être traitée comme un fluide isovisqueux. Enfin, il parvint à la conclusion qu'un fluide dont la viscosité varie évacue moins bien la chaleur qu'un fluide isovisqueux, et doit limiter le flux de chaleur à sa base, ce qui se traduit par un taux de transfert de chaleur diminué par le saut de viscosité. Tout récemment, Solomatov (2012) a mené des simulations numériques de la convection thermique à nombre de Prandtl infini dans le régime de couvercle stagnant en tenant compte de la thermo-dépendance de la viscosité. L'auteur a montré l'existence de cellules convectives spatialement localisées, au dessous du nombre de Rayleigh critique (convection sous-critique), dont la formation nécessite seulement des conditions sous-critiques et une perturbation initiale localisée de la température.

- Les contributions ayant trait aux fluides non-newtoniens. Celles-ci sont très peu nombreuses et il convient d'en évoquer le travail de Turki (1990) qui, pour des fluides d'Ostwald à consistance fortement thermo-dépendante, a observé des effets secondaires. En effet, la circulation est plus intense près de la paroi chaude alors qu'elle est sensiblement faible à proximité du bord froid. Dans une telle situation, la structure de l'écoulement prend un aspect complexe, en perdant la propriété de centro-symétrie, alors que le transfert de chaleur global demeure quasiment in affecté. Dans pas mal de situations, telles qu'en géophysique, la prise en compte de la dépendance de la viscosité vis-à-vis de la température ne suffit pas pour expliquer certains comportements physiques et il faudra composer avec les effets mécaniques. Un modèle rhéologique pour la viscosité impliquant le couplage entre les effets mécaniques et thermiques est

donc nécessaire pour plus de réalisme. Solomatov et Moresi (1997) ont ainsi suggéré que trois régimes de convection soient également présents dans le cas d'un fluide non-newtonien. Du point de vue transfert de chaleur, une rhéologie non-newtonienne devrait affaiblir le couvercle conductif. Dans ce cas, on s'attend à ce que le transfert de chaleur soit un peu plus efficace que dans le cas d'un fluide newtonien. Dumoulin et al (1999) ont constaté que le transfert de chaleur semble être contrôlé par les instabilités secondaires en développement dans les couches limites thermiques. Dans le cas d'un fluide pseudo-plastique, Solomatov et Barr (2006) ont déterminé le nombre de Rayleigh et le rapport d'aspect critiques pour un saut de viscosité élevé (régime de couvercle stagnant). Une comparaison de leurs résultats aux prédictions théoriques de Solomatov (1995) a permis de dégager une tendance similaire à un facteur 2 près. De leur part, Solomatov et Barr (2007) ont examiné comment la forme de la perturbation initiale affecte l'apparition de la convection dans un fluide non-newtonien à viscosité fortement thermo-dépendante obéissant à la loi de puissance. Les auteurs ont souligné que les perturbations optimales de température, capables de conduire à un mouvement de convection, sont situées à l'intérieur de la sous-couche rhéologique où la viscosité est la plus faible.

1.6 Conclusion

Au vu des travaux susmentionnés, le problème de la convection naturelle pour des fluides non-newtoniens confinés à viscosité variable avec la température n'a pas fait l'objet d'assez d'investigations bien que de tels fluides soient au centre de nombreux processus naturels et industriels. Beaucoup reste donc à faire dans ce sens si l'on veut contribuer à une maîtrise parfaite des mécanismes de convection naturelle pour cette catégorie de fluides.

Par ailleurs, la littérature montre la tendance des travaux à s'intéresser plutôt à la convection naturelle en cavité, carrée ou rectangulaire, soumise à des températures différentes sur deux parois en vis-à-vis (conditions de type

Dirichlet), les deux autres étant adiabatiques, qu'à une densité de flux de chaleur (conditions de type Neumann). De plus, le problème reste encore ouvert à la recherche si l'on considère le cas où toutes les parois seraient thermiquement actives, ce qui pourrait être rencontré pratiquement.

Partant de tout cela, la présente thèse se propose d'étudier, par voie numérique, la convection naturelle dans une cavité carrée, confinant des fluides à comportement rhéologique du type Ostwald-De Waele et à viscosité variable avec la température, à travers sa consistance, sous des conditions aux limites thermiques de type Neumann. Le caractère particulier de ces conditions combiné avec la non-linéarité du comportement rhéologique peuvent conduire à des complexités d'ordre thermo-hydraulique qu'il convient de prédire pour une meilleure compréhension de la physique du problème en vue de possibles applications pratiques.

CHAPITRE 2

Formulation Mathématique et Méthode de Résolution

2.1. Introduction

Dans ce chapitre sont présentées les équations générales qui régissent la convection naturelle dans les fluides non-Newtoniens, de types Ostwald-De Waele. Après avoir précisé les hypothèses simplificatrices et les conditions aux limites associées au problème, ces équations sont écrites sous forme adimensionnelle dans un système de coordonnées cartésiennes compte tenu de la configuration géométrique étudiée. Deux formulations peuvent être employées : la formulation en variables primitives (u, v, p, T) et celle en variables secondaires (ψ, Ω, T), pour laquelle on a opté en raison des avantages qu'elle présente.

Par ailleurs, il est rare en général d'aboutir à une solution analytique exacte de ces équations, sauf si des simplifications importantes sont introduites, en raison du leur aspect couplé, de la forte non linéarité du comportement rhéologique et de la complexité de la géométrie. Cependant, grâce aux développements technologiques, donnant lieu à des ordinateurs de plus en plus performants, les méthodes numériques se sont imposées, ces dernières années, comme compléments indispensables ou, parfois, alternatives, aux méthodes expérimentales, qui restent, en général, onéreuses et difficiles à réaliser. Dans le cadre de cette thèse, le choix d'une méthode aux différences finies a été jugé suffisant pour la résolution des équations décrivant la convection, écrites en formulation (ψ, Ω, T).

2.2. Formulation Mathématique

2.2.1 Position du problème et géométrie considérée

Dans ce travail de thèse, on s'intéresse à l'étude de l'effet de la visco-thermo-dépendance sur la convection naturelle dans un fluide non-newtonien, du type Ostwald-De Waele, confiné. La géométrie qui a fait l'objet des recherches est schématisée sur la figure 2.1. Il s'agit d'une cavité carrée soumise au niveau de ses bords à des densités surfaciques de flux de chaleur. C'est l'une des plus expérimentées, pour sa simplicité et la possibilité qu'elle offre en termes d'approximation bidimensionnelle de l'écoulement réel. Trois configurations principales ont été examinées : une première configuration où les parois verticales sont thermiquement actives, celles horizontales étant maintenues adiabatiques, une deuxième où les rôles de ces parois sont inversés (problème de Rayleigh-Bénard) et une troisième où toutes les parois sont sollicitées thermiquement.

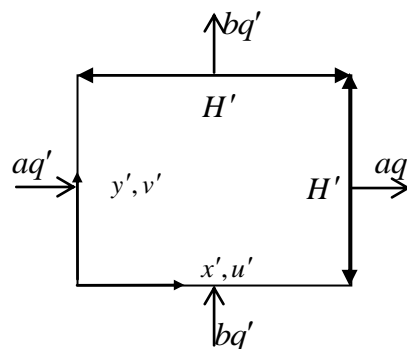


Figure 2.1 : Modèle physique et système de coordonnées.

2.2.2. Equations générales

Les équations gouvernant le processus de convection d'un fluide sont obtenues à partir des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Résoudre le problème décrit par de telles équations revient à déterminer les diverses grandeurs inconnues V' , p' et T' y intervenant. En général, ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + \text{div}(\rho \vec{V}') = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{V}')}{\partial t'} + \text{div}(\rho \vec{V}' \otimes \vec{V}' - \vec{\Sigma}) = \rho \vec{f} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho c_p T')}{\partial t'} + \text{div}(\rho c_p T' \vec{V}' + \vec{q}) = \beta T' \frac{dp'}{dt'} + \vec{\tau} : \text{grad} \vec{V}' \quad (2.3)$$

où c_p est la chaleur massique à pression constante et \vec{f} la résultante des forces de volume appliquées à l'unité de masse du fluide. La densité, ρ , la pression, p' , la température, T' et la vitesse, \vec{V}' , sont les variables principales. Pour fermer le système, il faut établir des liaisons définissant le tenseur des contraintes générales $\vec{\Sigma}$, celui des contraintes visqueuses, $\vec{\tau}$, et le vecteur densité surfacique de flux de chaleur, \vec{q} , en fonction de ces variables. Pour un fluide matériellement simple, $\vec{\Sigma}$ et $\vec{\tau}$ sont respectivement donnés par :

$$\vec{\Sigma} = -p \vec{I} + \vec{\tau} \quad (2.4)$$

$$\vec{\tau} = 2\mu'_a(\dot{\gamma}) \vec{\dot{\gamma}} \quad (2.5)$$

où \vec{I} est le tenseur unité, $\vec{\dot{\gamma}}$ est celui des vitesses de déformation et $\mu'_a(\dot{\gamma})$ est la viscosité apparente du fluide. Celle-ci, dépend de la vitesse de déformation généralisée, $\dot{\gamma}$, de la température et éventuellement de la pression.

Quant à \vec{q} , il est fixé par la loi de Fourier

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T' \quad (2.6)$$

dans laquelle λ est la conductivité thermique du fluide.

2.2.3. Loi de viscosité adoptée

Rappelons ici que les fluides non-newtoniens qui ont retenu notre attention sont les pseudo-plastiques et dilatants d'Ostwald-de Waele (1925), pour lesquels

la viscosité apparente s'exprime par la loi puissance (power-law) couramment adoptée :

$$\mu'_a(\dot{\gamma}) = k_T \dot{\gamma}^{(n_T - 1)} \quad (2.7)$$

Les deux paramètres empiriques n_T et k_T , y apparaissant, sont, respectivement, l'indice de comportement (ou de structure) et l'indice de consistance. Ce sont, en général, des fonctions de la température, quoique, dans la plupart des cas, la dépendance de n_T vis-à-vis de cette grandeur peut être ignorée ($n_T = \text{constant} = n$) comparée à celle de k_T (Sirocco et al. (1985) et Nouar, (2005)), pour laquelle nous avons convenu d'adopter la loi exponentielle de Frank-Kamenetski (Balmforth et Provenzale, 2001) :

$$k_T = k e^{-d(T' - T_r)} \quad (2.8)$$

qui n'est autre que l'approximation de celle d'Arrhenius pour les variations relativement faibles. Elle reflète la décroissance de la viscosité avec la température, où k est la consistance du fluide à la température de référence T_r et d est un exposant positif lié à l'énergie d'activation de l'écoulement et à la constante universelle des gaz parfaits.

D'autre part, trois situations peuvent être discutées selon la valeur du paramètre n :

- Pour $n = 1$, la viscosité ne dépend que de la température ($\mu'_a = k_T$), ce qui est le cas d'un fluide Newtonien.

- Pour $0 < n < 1$, le comportement est pseudo-plastique car la viscosité apparente décroît avec le taux de déformation. Ce type de comportement, de loin le plus fréquent, concerne les dispersions de particules asymétriques, les polymères de longue chaîne en solution dans l'eau ou à l'état fondu, les pâtes à papier, les colles, les ciments, certains produits agroalimentaires, certaines peintures et bien d'autres.

- Pour $n > 1$, le comportement est qualifié de dilatant. Il est beaucoup moins fréquent que celui pseudo-plastique, et se caractérise par une augmentation de la viscosité apparente avec la vitesse de déformation. Il est spécifique des dispersions très concentrées, des solutions d'amidon, des sables mouillés compactés, de certaines huiles polymériques...

Notons, enfin, que la loi (2.7) combine avantages et inconvénients dans la mesure où elle s'éloigne de la réalité à faible et à fort taux de déformation (modèle tronqué), alors qu'entre les deux elle ajuste convenablement les mesures effectuées et offre, parfois, par sa simplicité des développements analytiques, ce qui en fait un modèle très convoité aussi bien dans la pratique que dans la théorie.

Par ailleurs, pour tenir compte des changements de la viscosité apparente avec les différents gradients de vitesses on introduit le taux de déformation composé ou généralisé comme suit :

$$\dot{\gamma} = \left(2 \vec{\gamma} : \vec{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(2 \sum_{ij} \dot{\gamma}_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

où $\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2}(V'_{i,j} + V'_{j,i})$ sont les composantes du tenseur des taux de déformation qui n'est autre que la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse (Agassant et al., 1989).

2.2.4. Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées au présent problème sont de deux natures.

2.2.4.1. Conditions aux limites thermiques

Elles sont de type Neumann, puisque la cavité est soumise, sur toutes ses parois, à des densités de flux de chaleur uniformes, ce qui se traduit en termes de loi de Fourier par :

$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial T'}{\partial x'} = aq' & \text{pour } x' = 0 \text{ et } x' = H' \\ -\lambda \frac{\partial T'}{\partial y'} = bq' & \text{pour } y' = 0 \text{ et } y' = H' \end{cases} \quad (2.10)$$

où a et b sont, respectivement, deux facteurs de pondérations arbitraires des intensités relatives des vecteurs densités de flux de chaleur horizontal et vertical.

Expérimentalement, la paroi supérieure est d'habitude mince et hautement thermiquement conductrice par rapport au fluide qui l'affleure, ce qui garantit une température à peu près uniforme sur les frontières. Cependant, si l'épaisseur est importante ou la conductivité thermique est faible, on devra s'attendre automatiquement à une distorsion de l'uniformité de la température, puisqu'il y aura apparition d'un gradient de température horizontal. Celui-ci augmente avec l'épaisseur de la paroi ou quand un matériau mauvais conducteur de chaleur est utilisé (Otero et al., 2002). Ce type de conditions aux limites ne peut convenir pour modéliser le problème de convection, en particulier lorsque le nombre de Nusselt, traduisant le transfert de chaleur, est du même ordre de grandeur que le rapport de la conductivité thermique de la paroi à celle du fluide. Le choix, donc, de conditions aux limites de types densités de flux de chaleur s'avère approprié.

2.2.4.2. Conditions aux limites dynamiques

Puisqu'il s'agit d'un problème où la seule source de convection, dans le champ de pesanteur, sont des gradients thermiques, c'est la condition d'adhérence aux parois rigides et imperméables qui prévaut. Celle-ci s'écrit :

$$\begin{cases} u' = v' = 0 & \text{pour } x' = 0 \text{ et } x' = H' \\ u' = v' = 0 & \text{pour } y' = 0 \text{ et } y' = H' \end{cases} \quad (2.11)$$

Avec u' et v' comme, respectivement, composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse du fluide.

2.2.5. Hypothèses simplificatrices

Pour résoudre le système d'équations (2.1)-(2.3) auquel sont associées les conditions aux limites appropriées précisées ci-dessus, un certain nombre d'hypothèses et d'approximations, généralement admises en convection naturelle, sont faites. En voici la liste :

- Le vecteur \vec{f} de l'équation (2.2) se résume à la seule contribution de la pesanteur \vec{g} .

- Dans la plus part des problèmes de convection naturelle les vitesses du fluide sont relativement faibles pour considérer l'écoulement comme laminaire et ce à cause des gradients de température modérés mis en jeu (Siginer et Valenzuela-Rendon, 2000).

- Le fluide en écoulement est incompressible. Dans le domaine des pressions avoisinant celle de l'atmosphère, les liquides constituent une très bonne approximation des milieux incompressibles, dans la mesure où $\partial\rho/\partial p' \approx 0$. Il convient donc de négliger le terme $\beta T' dp'/dt'$ de l'équation (2.3), qui représente en fait le travail adiabatique réversible et dans lequel $\beta = -(1/\rho)(\partial\rho/\partial T')_p$ désigne le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

- La production de chaleur due aux frottements visqueux, $\vec{\tau} : \vec{grad}V$, dans l'équation (2.3) est négligeable. Ceci reste valable tant que la viscosité des produits non-Newtoniens considérés est relativement faible (extra low viscosity). Des calculs numériques effectués par Turki (1990) sur un problème de convection naturelle en considérant des fluides non-Newtoniens confinés (solutions aqueuses de Carboxyméthylcellulose (CMC) à faible concentration), suivis d'une analyse d'ordre de grandeur, confirment bien la validité de cette hypothèse.

- Les propriétés physiques du fluide sont supposées indépendantes de la température à l'exception de la viscosité et de la masse volumique dans le terme

de poussée d'Archimède qui obéit à l'approximation de Boussinesq, dont la dérivation systématique des équations de la dynamique des fluides compressibles est assez fastidieuse et requière, prudemment, le classement de nombreux processus limitatifs (Gray et Giorgini, 1976).

- La troisième dimension de la cavité est supposée assez large de sorte que le problème puisse être ramené à deux dimensions. Cela est généralement relativement satisfait et peut donner un aperçu sur les écoulements tridimensionnels, plus compliqués (Siginer et Valenzuela-Rendon, 2000). Dans ce cas, qui est le notre, le taux de déformation généralisé s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \left(2 \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

et la viscosité apparente est alors :

$$\mu'_a = k_T \left(2 \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.13)$$

2.2.6. Equations gouvernantes en formulation primitive adimensionnalisées

En introduisant les grandeurs de référence H' , $\rho(\alpha/H')^2$, α/H' , $q'H'/\lambda$ et H'^2/α , comme, respectivement, facteurs d'échelle pour la longueur, la pression, la vitesse, la température et le temps, les équations (2.1)-(2.3) associées aux conditions aux limites (2.10)-(2.11) prennent la forme bidimensionnelle adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + Pr \left[\mu_a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu_a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + Pr \left[\mu_a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu_a}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + RaT \right] \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.17)$$

où

$$\mu_a = e^{-mT} \left[2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.18)$$

$$Pr = \frac{(k/\rho) H'^{2-2n}}{\alpha^{2-n}} \quad (2.19)$$

$$Ra = \frac{g \beta H'^{2n+2} q'}{(k/\rho) \alpha^n \lambda} \quad (2.20)$$

Et

$$m = -\frac{1}{k_T} \frac{dk_T}{dT} = -\frac{d \ln(k_T/k)}{dT} \quad (2.21)$$

sont, respectivement, la viscosité apparente adimensionnelle, le nombre de Prandtl généralisé, celui de Rayleigh et celui de Pearson. Ra mesure, en fait, l'importance relative de la poussée d'Archimède qui provoque le mouvement du fluide par rapport aux forces visqueuses et à la conduction thermique qui tendent à supprimer ce mouvement. Quant à Pr , il compare les effets des diffusions de la quantité de mouvement et de la chaleur. Enfin, m indique le degré de la dépendance de la viscosité apparente vis-à-vis de la température.

$$u = v = \frac{\partial T}{\partial x} + a = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = 1 \quad (2.22)$$

et

$$u = v = \frac{\partial T}{\partial y} + b = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = 1 \quad (2.23)$$

2.2.7. Equations gouvernantes en formulation secondaire adimensionnalisées

En général en convection naturelle, la notion de pression est sans intérêt pratique. L'utilisation, donc, de la formulation fonction de courant-vorticité, $\psi - \Omega$, qui consiste à éliminer cette grandeur, réduit le nombre d'équations de un. Ceci est bénéfique non seulement dans la phase de calcul utilisant la mémoire centrale de l'ordinateur mais aussi lorsque les résultats doivent être stockés dans une mémoire auxiliaire. Un autre avantage de cette formulation est le fait de permettre le traçage direct des courbes caractérisées par $\psi = \text{constante}$ (lignes de courant) qui apportent de précieuses informations quant à la structure de l'écoulement. Le principe repose sur le fait d'introduire, à partir des composantes horizontale, u , et verticale, v , de la vitesse adimensionnelle, les notions de fonction de courant, ψ , et de vorticité, Ω , telles que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.24)$$

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.25)$$

Avec ceci, les équations adimensionnelles gouvernant la convection s'écrivent :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial u \Omega}{\partial x} + \frac{\partial v \Omega}{\partial y} = Pr \left[\mu_a \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial \mu_a}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \right] + S_\Omega \quad (2.26)$$

pour le transport de la vorticité,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial v T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.27)$$

pour l'énergie, et

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega \quad (2.28)$$

pour la fonction de courant (équation de Poisson), où le terme source, S_Ω , a pour expression :

$$S_\Omega = Pr \left[\left(\frac{\partial^2 \mu_a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu_a}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^2 \mu_a}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + Pr Ra \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.29)$$

Noter qu'ici les équations (2.26) et (2.27) sont écrites sous forme conservative, compte tenu de l'hypothèse d'incompressibilité.

Aussi, les conditions aux limites demeurent celles données par (2.22) et (2.23), à l'exception de ψ qui est considérée nulle sur toutes les frontières et de Ω qui est inconnue sur celles-ci et pour laquelle une approche numérique est proposée ci-dessous.

2.2.8. Transfert de chaleur

Dans le domaine de l'ingénierie, la connaissance des quantités de chaleur, échangées ou transférées, est primordiale pour le dimensionnement des systèmes sièges d'échanges thermiques. Le groupement adimensionnel traduisant ces échanges est le nombre de Nusselt.

2.2.8.1. Transfert de chaleur dans la direction horizontale

Le nombre de Nusselt, mesurant le transfert de chaleur local dans la direction horizontale, est défini comme suit :

$$Nu_h(y) = \frac{a}{\Delta T_h(y)} \quad (2.30)$$

où $\Delta T_h(y) = T(0, y) - T(1, y)$ représente l'écart de température adimensionnel local entre les deux parois verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Quant au transfert global dans la même direction, on utilise le nombre de Nusselt moyen donné par

$$\overline{Nu_h} = \int_0^1 Nu_h(y) dy \quad (2.31)$$

2.2.8.2. Transfert de chaleur dans la direction verticale

Le nombre de Nusselt, mesurant le transfert de chaleur local dans la direction verticale, est défini par :

$$Nu_v(x) = \frac{b}{\Delta T_v(x)} \quad (2.32)$$

où $\Delta T_v(x) = T(x,0) - T(x,1)$ n'est autre que la différence de température adimensionnelle locale entre les deux parois horizontales d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

Une intégration de (2.32) le long de la paroi horizontale conduit au nombre de Nusselt moyen

$$\overline{Nu_v} = \int_0^1 Nu_v(x) dx \quad (2.33)$$

exprimant le taux de transfert de chaleur global dans la direction verticale.

2.2.9. Formulation en lignes de flux de chaleur

La visualisation des chemins suivis par le flux de chaleur à travers la cavité requiert l'utilisation du concept de la fonction de flux de chaleur, H , introduit par Kimura et Bejan (1983) comme suit :

$$\frac{\partial H}{\partial y} = uT - \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.34)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = vT - \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.35)$$

Les lignes de flux de chaleur sont donc des courbes qui correspondent à $H = \text{constante}$.

Une forme plus simple peut être obtenue en dérivant (2.34) et (2.35), respectivement par rapport à y et x , et en faisant la différence, membre à membre, soit

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = -\frac{\partial vT}{\partial x} + \frac{\partial uT}{\partial y} \quad (2.36)$$

dont les conditions aux limites associées suivantes :

$$H(0, y) = H(0,0) + a y \text{ pour } x = 0 \quad (2.37)$$

$$H(x,1) = H(0,1) - b x \text{ pour } y = 1 \quad (2.38)$$

$$H(1, y) = H(1,1) - a(1 - y) \text{ pour } x = 1 \quad (2.39)$$

$$H(x,0) = H(1,0) + b(1 - x) \text{ pour } y = 0 \quad (2.40)$$

proviennent d'une intégration de (2.34) et (2.35) le long des quatre parois de la cavité.

Enfin, la résolution de (2.36), dans le domaine de calcul, conduit aux valeurs de H et donc aux lignes de flux de chaleur.

Aussi convient-il de noter ici que seules les différences entre les valeurs de H sont requises, ce qui offre la possibilité de choisir $H(0,0) = 0$ comme référence arbitraire.

2.3. Méthode de Résolution

2.3.1. Méthode des différences finies

Bien que la formulation (ψ, Ω, T) , offre plus d'avantage au niveau de la réduction du nombre d'équations, celles-ci forment un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires fortement couplées que seule la simulation numérique permet sa résolution.

La méthode des différences finies est la plus ancienne des méthodes numériques. Elle a été introduite au 18^{ème} siècle par Euler, et s'avère la plus adaptée et la plus facile d'utilisation pour les problèmes à géométrie simple. Celle-ci consiste en la discrétisation du domaine physique, par le biais d'un maillage uniforme (Figure 2.2), en un nombre fini de points appelés nœuds, dont chacun peut être identifié par un couple d'indices (i, j) . Ainsi, les valeurs des variables recherchées sont calculées sur chaque nœud. Les équations gouvernant

le problème sont, donc, approximées par un système d'équations algébriques dans lesquelles les valeurs des variables aux nœuds sont les inconnues.

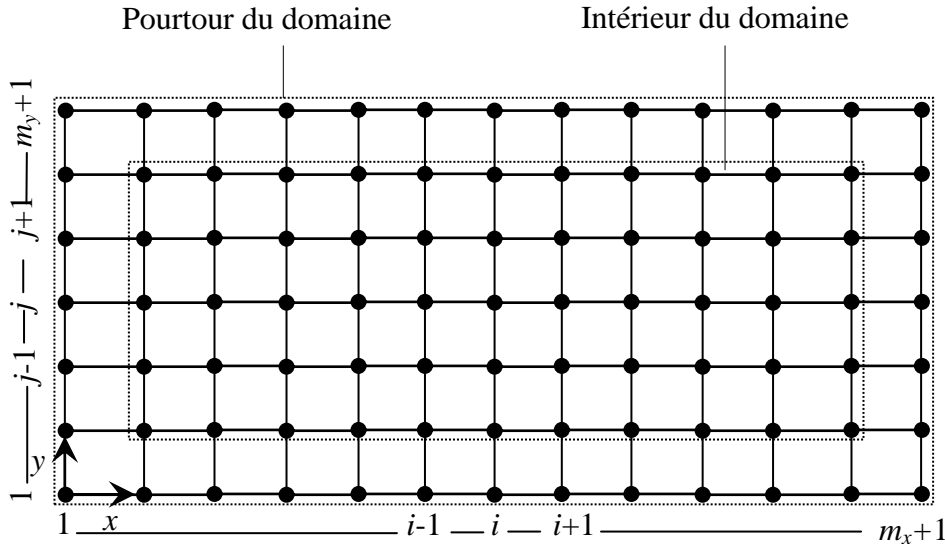


Figure 2.2 : Maillage en (i, j) et repère cartésien en (x, y)

2.3.2. Discrétisation des équations gouvernantes

A l'intérieur du domaine, les dérivées partielles spatiales, apparaissant dans les équations de base, sont discrétisées selon un schéma centré aux différences finies. Ce choix est lié à la nature du problème étudié : les informations sont connues à l'amont et à l'aval (cavité fermée) et les termes diffusifs se trouvent pondérés par un facteur supérieur ou égal à l'unité.

2.3.2.1. Termes transitoires

Des différences finies, de premier ordre, avancées sont adoptées pour la discrétisation des dérivées temporelles. Ainsi, en considérant les valeurs de f entre les instants $t_{n_i} = n_i \Delta t$ et $t_{n_i+1} = t_{n_i} + \Delta t$, on obtient :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i,j}^{n_i+1} = \frac{f_{i,j}^{n_i+1} - f_{i,j}^{n_i}}{\Delta t} \quad (2.41)$$

2.3.2.2. Termes convectifs

Les termes convectifs des équations (2.26) et (2.27) sont approchés par

$$\left. \frac{\partial uf}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}f_{i+1,j} - u_{i-1,j}f_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.42)$$

2.3.2.3. Termes diffusifs et autres que diffusifs

A l'intérieur du domaine, les dérivées première, seconde et croisée, apparaissant dans les équations (2.26) - (2.29), sont approximées par :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.43)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (2.44)$$

et

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \quad (2.45)$$

Sur le pourtour du domaine, les dérivées partielles exprimant les conditions aux limites sont discrétisées, à l'ordre deux, à l'aide d'un schéma aux différences finies décentrées en amont

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i-2,j} - 4f_{i-1,j} + 3f_{i,j}}{2\Delta x} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j-2} - 4f_{i,j-1} + 3f_{i,j}}{2\Delta y} \quad (2.46)$$

ou en aval

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{4f_{i+1,j} - f_{i+2,j} - 3f_{i,j}}{2\Delta x} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{4f_{i,j+1} - f_{i,j+2} - 3f_{i,j}}{2\Delta y} \quad (2.47)$$

2.3.3. Résolution des équations gouvernantes

2.3.3.1. Equations de la vorticité et de l'énergie

La méthode implicite des directions alternées (*ADI*) est choisie comme outil de résolution des équations de la vorticité (2.26) et de l'énergie (2.27).

Celle-ci, est fréquemment utilisée dans le cas des fluides Newtoniens, a été étendue avec succès au cas des milieux non-Newtoniens clairs (Ozoe et Churchill (1972), Turki (1990), Naïmi (2001) et Lamsaadi (2006)) ou poreux (Amari et al. (1994) et Bian et al. (1994)). Elle donne lieu à des systèmes matriciels tridiagonaux dans les deux directions. L'un est obtenu en discrétisant implicitement selon x et explicitement selon y , et vice-versa pour l'autre. Son principe consiste à écrire, au cours d'un premier demi-pas de temps ($t_{n_t+1/2} = t_{n_t} + \Delta t/2$), les équations d'évolution pour les inconnues Ω et T de manière implicite dans une direction déterminée (les autres variables apparaissent explicitement). Par contre, pour l'intégration au cours du second demi-pas de temps ($t_{n_t+1} = t_{n_t+1/2} + \Delta t/2$), une inversion de la direction des termes implicites permet d'obtenir finalement toutes les valeurs de Ω et T .

D'autre part, puisque les équations (2.26) et (2.27) présentent des formes similaires, elles peuvent être condensées sous la forme unique suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial u f}{\partial x} + \frac{\partial v f}{\partial y} = \Lambda \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] + 2 \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right] + S_f \quad (2.48)$$

Ainsi :

- pour $\Lambda = Pr \mu_a, S_f = S_\Omega$ et $f = \Omega$, on retrouve l'équation de la vorticité ;
- pour $\Lambda = 1, S_f = 0$ et $f = T$, on retrouve l'équation de l'énergie.

2.3.3.1.1. Schéma implicite en x et explicite en y

C'est un schéma aux différences finies centrées, au temps $t_{n_t+1/2}$ pour les dérivées en x et au temps t_{n_t} pour les dérivées en y . La discrétisation des dérivées partielles étant faite selon :

$$\frac{f_{i,j}^{n_t+1/2} - f_{i,j}^{n_t}}{\Delta t/2} + \frac{u_{i+1,j} f_{i+1,j}^{n_t+1/2} - u_{i-1,j} f_{i-1,j}^{n_t+1/2}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} f_{i,j+1}^{n_t} - v_{i,j-1} f_{i,j-1}^{n_t}}{2\Delta y} =$$

$$A_{i,j} \left[\frac{f_{i+1,j}^{n_t+1/2} - 2f_{i,j}^{n_t+1/2} + f_{i-1,j}^{n_t+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1}^{n_t} - 2f_{i,j}^{n_t} + f_{i,j-1}^{n_t}}{\Delta y^2} \right] +$$

$$2 \left[\frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{f_{i+1,j}^{n_t+1/2} - f_{i-1,j}^{n_t+1/2}}{2\Delta x} + \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{f_{i,j+1}^{n_t} - f_{i,j-1}^{n_t}}{2\Delta y} \right] + S_{f_{i,j}}^{n_t} \quad (2.49)$$

où $f_{i,j}^{n_t}$ représente la valeur discrète de la fonction f à l'instant $t_{n_t} = n_t \Delta t$ et $f_{i,j}^{n_t+1/2}$ la valeur discrète intermédiaire qui servira pour la détermination de $f_{i,j}^{n_t+1}$ à l'instant $t_{n_t+1} = t_{n_t} + \Delta t$. Ainsi, après réarrangement, on aboutit à un système d'équations implicites de la forme :

$$A_{i,j}^x f_{i-1,j}^{n_t+1/2} + B_{i,j}^x f_{i,j}^{n_t+1/2} + C_{i,j}^x f_{i+1,j}^{n_t+1/2} = D_{i,j}^x \quad (2.50)$$

2.3.3.1.2. Schéma implicite en y et explicite en x

C'est un schéma aux différences finies centré, au temps $t_{n_t+1/2}$ pour les dérivées en x et au temps t_{n_t+1} pour les dérivées en y , la discrétisation des dérivées partielles étant faite selon :

$$\begin{aligned} & \frac{f_{i,j}^{n_t+1} - f_{i,j}^{n_t+1/2}}{\Delta t/2} + \frac{u_{i+1,j} f_{i+1,j}^{n_t+1/2} - u_{i-1,j} f_{i-1,j}^{n_t+1/2}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} f_{i,j+1}^{n_t+1} - v_{i,j-1} f_{i,j-1}^{n_t+1}}{2\Delta y} = \\ & A_{i,j} \left[\frac{f_{i+1,j}^{n_t+1/2} - 2f_{i,j}^{n_t+1/2} + f_{i-1,j}^{n_t+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1}^{n_t+1} - 2f_{i,j}^{n_t+1} + f_{i,j-1}^{n_t+1}}{\Delta y^2} \right] + \\ & 2 \left[\frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{f_{i+1,j}^{n_t+1/2} - f_{i-1,j}^{n_t+1/2}}{2\Delta x} + \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{f_{i,j+1}^{n_t+1} - f_{i,j-1}^{n_t+1}}{2\Delta y} \right] + S_{f_{i,j}}^{n_t+1/2} \end{aligned} \quad (2.51)$$

où $f_{i,j}^{n_t+1/2}$ et $f_{i,j}^{n_t+1}$ désignent les valeurs discrètes de la fonction f aux instants respectifs $t_{n_t+1/2}$ et t_{n_t+1} . Là aussi, on peut arranger l'équation ci-dessus sous la forme :

$$A_{i,j}^y f_{i,j-1}^{n_t+1} + B_{i,j}^y f_{i,j}^{n_t+1} + C_{i,j}^y f_{i,j+1}^{n_t+1} = D_{i,j}^y \quad (2.52)$$

La résolution des systèmes d'équations (2.43) et (2.45), conduit généralement à l'inversion d'une matrice tridiagonale.

2.3.3.2. Equation de Poisson pour les fonctions de courant et de flux de chaleur

Là aussi, la similarité de forme des équations des fonctions de courant (2.28) et de flux de chaleur (2.36) exige leur condensation en l'équation de Poisson suivante :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = S_G \quad (2.53)$$

où le terme source S_G est soit $-\Omega$ lorsque $G = \psi$ soit $-\frac{\partial vT}{\partial x} + \frac{\partial uT}{\partial y}$ quand $G = H$.

Une fois discrétisée à l'aide d'un schéma centré classique, l'équation (2.53) est résolue par le biais de la méthode de surrelaxation successive par point (*PSOR*), qui n'est autre que la méthode de Gauss-Seidel relaxée. La valeur de la fonction G aux nœuds (i, j) est alors calculée à partir de

$$G_{i,j}^{iter+1} = (1-\omega)G_{i,j}^{iter} + \frac{\omega}{2(1+\eta^2)} \left[G_{i-1,j}^{iter} + G_{i+1,j}^{iter} + \eta^2 (G_{i,j-1}^{iter} + G_{i,j+1}^{iter}) - \Delta x^2 S_{G_{i,j}} \right] \quad (2.54)$$

où $\eta = \Delta x / \Delta y$ et ω est le coefficient de surrelaxation, dont la valeur optimale est donnée par la relation de Frankel (1950) :

$$\omega_{opt} = 2 \frac{1 - \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta^2} \quad (2.55)$$

avec

$$\zeta = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{m_x}\right) + \eta^2 \cos\left(\frac{\pi}{m_y}\right)}{1 + \eta^2} \quad (2.56)$$

Dans la formule (2.56), valable uniquement pour un maillage rectangulaire uniforme, m_x et m_y désignent respectivement les nombres d'intervalles dans les directions x et y . A noter ici que pour $\omega = 1$, la procédure est identique à celle de Gauss-Seidel.

Dès lors, le champs des vitesses, $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$, et de viscosité apparente, $\mu_{a,i,j}$, s'en déduisent :

$$u_{i,j}^{iter+1} = \frac{\psi_{i,j+1}^{iter+1} - \psi_{i,j-1}^{iter+1}}{2\Delta y} \quad (2.57)$$

$$v_{i,j}^{iter+1} = \frac{\psi_{i-1,j}^{iter+1} - \psi_{i+1,j}^{iter+1}}{2\Delta x} \quad (2.58)$$

$$\mu_{ai,j}^{iter+1} = \left[2 \left(\left(\frac{u_{i+1,j}^{iter+1} - u_{i-1,j}^{iter+1}}{2\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j+1}^{iter+1} - v_{i,j-1}^{iter+1}}{2\Delta y} \right)^2 \right) + \left(\frac{u_{i,j+1}^{iter+1} - u_{i,j-1}^{iter+1}}{2\Delta y} + \frac{v_{i+1,j}^{iter+1} - v_{i-1,j}^{iter+1}}{2\Delta x} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.59)$$

2.3.3.3. Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont discrétisées suivant un schéma aux différences finies décentré avant ou arrière selon la paroi considérée.

- Paroi verticale gauche ($x = 0$) :

$$u_{1,j} = v_{1,j} = \psi_{1,j} = T_{1,j} - \frac{4T_{2,j} - T_{3,j} + 2a\Delta x}{3} = 0 \quad (2.60)$$

- Paroi verticale droite ($x = A$) :

$$u_{m_x+1,j} = v_{m_x+1,j} = \psi_{m_x+1,j} = T_{m_x+1,j} - \frac{4T_{m_x,j} - T_{m_x-1,j} - 2a\Delta x}{3} = 0 \quad (2.61)$$

- Paroi horizontale inférieure ($y = 0$) :

$$u_{i,1} = v_{i,1} = \psi_{i,1} = T_{i,1} - \frac{4T_{i,2} - T_{i,3} + 2b\Delta y}{3} = 0 \quad (2.62)$$

- Paroi horizontale supérieure ($y = 1$) :

$$u_{i,m_y+1} = v_{i,m_y+1} = \psi_{i,m_y+1} = T_{i,m_y+1} - \frac{4T_{i,m_y} - T_{i,m_y-1} - 2b\Delta y}{3} = 0 \quad (2.63)$$

Pour ce qui est de la vorticité, Ω , aux bords, n'y étant pas explicitement donnée, elle constitue l'une des principales difficultés de la formulation $\psi - \Omega$. Pour pallier celle-ci, l'approche de Woods (1954), fréquemment utilisée pour sa précision, s'impose, soit

$$\Omega_p = -\frac{1}{2}\Omega_{p+1} - \frac{3}{\Delta n^2}(\psi_{p+1} - \psi_p) \quad (2.64)$$

où p désigne la paroi et Δn le pas d'espace dans la direction normale à cette paroi.

D'autre part, l'inconvénient majeur du modèle d'Ostwald-de Waele réside dans le fait qu'il conduit, pour $0 < n < 1$, à une viscosité apparente infinie aux coins de la cavité, là où toutes les vitesses sont nulles, ce qui rend impossible toute résolution numérique. Pour remédier à ceci, une alternative, consistant à extrapoler cette grandeur intrinsèque le long des frontières croisées et à en prendre la valeur moyenne, est utilisée. Elle présente, en outre, l'avantage de garantir la stabilité des calculs.

2.3.4. Critère de convergence

A chaque pas de temps, Δt , qui varie dans cette étude entre 10^{-7} et 10^{-4} dépendamment des paramètres gouvernants, la fonction de courant, ψ , est calculée à partir du champ de vorticité et comparée à celle obtenue à l'itération précédente. Ce processus est répété jusqu'à ce que le critère de convergence

$$\sum_{i,j} |\psi_{i,j}^{iter+1} - \psi_{i,j}^{iter}| < \varepsilon_c \sum_{i,j} |\psi_{i,j}^{iter+1}| \quad (2.65)$$

soit satisfait. A signaler que le paramètre ε_c , dont le choix n'est pas libre, doit être suffisamment petit de sorte que de grandes erreurs de troncature ne puissent s'introduire, tout en restant au-dessus des erreurs d'arrondis ($10^{-5} < \varepsilon_c < 10^{-4}$).

2.3.5 Caractérisation du régime permanent

Pour le problème traité, le régime permanent est atteint lorsque le critère

$$|f_{i,j}^{n_i+1} - f_{i,j}^{n_i}| < \varepsilon_p |f_{i,j}^{n_i+1}| \quad (2.66)$$

est vérifié pour toute variable indépendante, f , pouvant être T , Ω ou ψ , ε_p étant de l'ordre de 10^{-4} .

CHAPITRE 3

EFFET DE LA THERMO-DEPENDANCE SUR LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITÉ CARRÉE SOUMISE UNIFORMEMENT À DES DENSITES DE FLUX DE CHALEUR HORIZONTAUX

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas où la cavité est chauffée latéralement et est isolée transversalement ($a=1$ et $b=0$). Après avoir choisi le maillage optimal et validé le code de calcul utilisé dans cette étude, on examine l'effet du nombre de Pearson, m , mesurant la thermo-dépendance, sur l'écoulement et le transfert de chaleur compte tenu des valeurs des autres paramètres gouvernants à savoir ; l'indice de comportement, n , le nombre de Prandtl généralisé, Pr , et le nombre de Rayleigh généralisé, Ra . Enfin, le concept des lignes de flux de chaleur est utilisé pour expliquer l'impact négatif du comportement thermo-dépendant de la viscosité sur le transfert de chaleur.

3.2. Tests de précision et choix d'un maillage optimal

Il est bien connu que plus le maillage est raffiné meilleure est la précision des résultats. Cependant, un raffinement conduit à un coup prohibitif en temps de calcul. Par conséquent, pour optimiser ce temps, tout en préservant la précision, des essais préliminaires ont été conduits, avec des tailles de grille variées, pour $Ra = 10^4$, $m = 5$, $Pr \rightarrow \infty$ et différentes valeurs de n .

Ainsi, comme le montre le tableau 3.1, qui compare les valeurs des grandeurs thermo-convectives, $|\psi_{max}|$ et \overline{Nu} , une grille de taille 81×81 est jugée suffisante pour parvenir à des solutions raisonnablement acceptables, la différence, avec une taille de 101×101 , n'excédant pas 1,2% et 2% en termes de $|\psi_{max}|$ et \overline{Nu} , respectivement.

Grilles	61×61		81×81		101×101	
n	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}
0.6	5.096	3.563	5.042	3.467	5.103	3.534
1.0	3.184	1.936	3.190	1.934	3.193	1.932
1.4	1.850	1.350	1.848	1.348	1.847	1.348

Tableau 3.1 : Tests de comparaison justifiant le choix de 81×81 comme taille de grille optimale pour $Ra = 10^4$, $m = 5$, $Pr \rightarrow \infty$ et différents valeurs de n .

3.3. Validation du code de calcul

Afin de valider le code de calcul développé dans le cadre de cette thèse, nous en avons comparé les résultats avec d'autres disponibles dans la littérature, obtenus dans des conditions similaires. Le tableau 3.2 illustre l'essentiel des comparaisons effectuées et qui portent principalement sur les valeurs des quantités $|\psi_{\max}|$ et \overline{Nu} . Comme on peut le constater, l'accord semble satisfaisant, moyennant un écart ne dépassant pas 2%, ce qui démontre la validité du programme numérique établi.

Pr	n	Present travail		Turki(1990)		Vola (2003)		De Vahl Davis (1983)	
		$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}
0.71	1.0	5.072	2.248	-----	-----	5.032	2.240	5.071	2.238
	0.7	10.025	4.274	-----	4.217	-----	-----	-----	-----
100	1.0	5.180	2.279	-----	2.280	-----	-----	-----	-----
	1.3	2.759	1.492	-----	1.522	-----	-----	-----	-----

Tableau 3.2 : Validation du code numérique par rapport aux études précédentes ($m = 0$, $Ra = 10^4$)

3.4. Valeur optimale du nombre de Prandtl pouvant caractériser les fluides considérés

Au vu de la formule (2.19) on se rend compte que le nombre de Prandtl généralisé, Pr , ne peut être considéré comme une propriété intrinsèque en raison de sa dépendance de la géométrie et du comportement rhéologique du fluide. Malheureusement, il s'avère que, pour presque tous les fluides non-newtoniens,

$Pr \ggg 1$, ce qui se répercute sur le temps de calcul par une augmentation excessive, comme déjà observé par Ozoe et Churchill (1972) et Lamsaadi (2006). Partant de ceci, des essais numériques pour $Pr = 1, 10, 100$ et $Pr \rightarrow \infty$ ont été nécessaires pour déterminer la valeur de ce paramètre assurant un temps de calcul moindre et pouvant, au même temps, caractériser les fluides considérés, connus pour leur grand nombre de Prandtl. Ainsi, comme le montre le tableau 3, toute augmentation de Pr à partir pratiquement de 10 laisse presque insensibles les propriétés thermo-convectives du fluide, $|\psi_{\max}|$ et \overline{Nu} , qui tendent vers un état asymptotique, dépendamment des autres paramètres de l'étude. Cela peut, aisément, être déduit de l'équation (3) dans laquelle les termes convectifs, de gauche, voient leur importance nettement diminuer avec Pr par rapport à ceux diffusifs, de droite. Il en résulte que les vrais paramètres gouvernants sont m, n et Ra , et les résultats présentés sont obtenus avec $Pr \rightarrow \infty$, situation présentant l'avantage de réduire notablement le temps de calcul comparativement aux cas $Pr \leq 100$ pour lesquels les termes convectifs sont présents.

Une telle tendance d'évolution avec Pr a été également remarquée par Ozoe et Churchill (1972), Naïmi (2001) et Lamsaadi (2006), qui ont adopté respectivement, pour les mêmes types de fluides, les valeurs asymptotiques $Pr = 10, 100$ et ∞ .

Ra		10^2		10^4		10^6	
n	Pr	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}
0.6	1	0.256	1.008	-----	-----	-----	-----
	10	0.256	1.008	4.979	3.459	9.298	16.439
	100	0.256	1.008	5.035	3.467	10.132	16.846
	∞	0.256	1.008	5.042	3.467	10.184	16.855
1.0	1	0.139	1.003	3.192	1.932	6.703	6.411
	10	0.139	1.003	3.190	1.934	6.781	6.443
	100	0.139	1.003	3.190	1.934	6.786	6.443
	∞	0.139	1.003	3.190	1.934	6.786	6.443
1.4	1	0.109	1.003	1.851	1.347	5.262	3.612
	10	0.109	1.003	1.848	1.348	5.267	3.613
	100	0.109	1.003	1.848	1.347	5.267	3.613
	∞	0.109	1.003	1.848	1.348	5.267	3.613

Tableau 3.3 : Influence du nombre de Prandtl sur les intensités de l'écoulement et du transfert de chaleur pour $m = 5$ et différents valeurs de n et Ra .

3.5. Structures des champs d'écoulement et de température

Des lignes de courants (à gauche), isothermes (au milieu) et lignes de flux de chaleur (à droite) sont présentées dans les figures 3.1-3.3, pour différentes valeurs de m , n et Ra . L'effet de m peut être discuté dépendamment des valeurs attribuées à n et Ra .

- Pour $Ra = 10^2$ (faible convection), on peut facilement voir sur la figure 3.1 que, pour une valeur donnée de n , la structure de l'écoulement, naturellement unicellulaire, subit des changements significatifs lorsque m passe de 0 à 10. Cela paraît bien évident pour $n = 0.6$ puisque les lignes de courant perdent peu à peu leur centro-symétrie en augmentant m (le cœur de l'écoulement est déplacé du côté de la paroi chaude). Ainsi, deviennent-elles de plus en plus serrées à

l'approche de la paroi chaude, là où la viscosité effective est faible, ce qui conduit à une intense convection dans cette région et donne lieu, par la même occasion, à une zone de stagnation partout ailleurs, c'est-à-dire dans les régions de forte viscosité. Pour ce qui est des isothermes, elles se trouvent légèrement tordues près de la face chauffée et tendent à être verticales à mesure qu'on s'approche de la paroi froide, confirmant le fait que le flux de convection est très faible. D'autre part, une augmentation de n , de 0.6 à 1.4, réduit l'effet de m sur les iso-lignes. Ce résultat, spécifique à la faible convection, peut être attribué au rôle réducteur de n vis-à-vis de cette convection, laquelle tend à évoluer vers un régime de conduction inhibant progressivement l'influence de m .

- Pour $Ra=10^4$ (convection modérée), la figure 3.2 montre que, qualitativement, une augmentation de m fait perdre à la structure unicellulaire de l'écoulement sa centro-symétrie (le cœur de l'écoulement ne s'éloigne pas assez du centre de l'enceinte), surtout pour $n=0.6$. Toutefois, convient-il de remarquer ici que bien que l'effet de m ne soit pas aussi marqué que dans le cas $Ra=10^2$, il prend de l'importance avec n . Au niveau des isothermes, cet effet est à peine visible puisque, dans la gamme des valeurs de n , celles-ci se montrent presque insensibles à tout changement dans la valeur de m . Il est clair qu'ici le rôle mixeur de Ra commence à se faire sentir.

- Pour $Ra=10^6$ (convection relativement élevée), la figure 3.3 indique qu'une augmentation de m reste à peu près sans conséquence sur les structures dynamique et thermique, dans la mesure où ces dernières gardent presque leur configuration correspondant au cas iso-consistant $m=0$ et ce, quelle que soit la valeur de n , ce qui confirme le rôle de mixage, assuré par le paramètre Ra , qui vient s'opposer aux manifestations de la thermo-dépendance.

L'ensemble de ces résultats démontre comment les effets conjugués de n et Ra peuvent affecter celui de m .

3.6. Distributions de la fonction de courant et de la température

Afin d'obtenir plus de renseignements sur l'effet de m , un examen des profils de la fonction de courant (à gauche), ψ , et de la température (à droite), T , est nécessaire. Celui-ci s'effectue sur les figures 3.4-3.6, représentant les évolutions des ces deux grandeurs le long de la direction horizontale, x , à mi-hauteur de la cavité ($y = 0.5$).

- Pour $Ra = 10^2$ (faible convection), la figure 3.4 informe qu'une augmentation de m entraîne une amplification et un déplacement du creux de $\psi(y)$ vers la gauche, lesquels paraissent d'autant plus importants que n est petit. En contre partie, $\psi(y)$ tend à s'annuler en s'approchant de la paroi froide, justifiant ainsi de la présence d'une zone, de plus forte viscosité, pouvant être qualifiée de morte (ou stagnante). Ces tendances semblent diminuer avec n . Cependant, le régime installé présente la particularité d'être pseudo-conducteur puisque l'amplitude de $\psi(y)$ est faible et l'allure de $T(y)$ est quasiment linéaire et ce, indépendamment de m et de n .

- Pour $Ra = 10^4$ (convection modérée), comme on peut le voir sur la figure 3.5, quand n augmente, la courbe de ψ dévoile plus de changement, dans sa forme, avec m que celle de T , qui paraît visiblement moins affectée par m , en particulier pour $n = 1.4$. En fait, la première présente une forte déformation et une dissymétrie qui prend de l'ampleur avec n , avec un creux qui se décale vers le côté chaud de la cavité, tandis que la seule modification importante, que la deuxième présente, est que sa portion centrale de faible gradient, qui s'affiche avec m , tend à disparaître avec n .

- Pour $Ra = 10^6$ (convection relativement élevée), la figure 3.6 est une illustration parfaite de l'incidence des effets conjugués des paramètres n et Ra sur celui de m . Ainsi, comme le montre cette figure, l'influence de m , sur les profils de ψ et de T , est pratiquement inexistante pour $n = 0.6$, qui retrouvent

pratiquement leur aspect symétrique correspondant au cas iso-consistant $m=0$. Toutefois, une augmentation de n réduit la convection, ce qui rend légèrement visible l'effet de m . On comprend de là que, pour observer un éventuel effet de m , il faudrait que toute augmentation de Ra , risquant d'inhiber le rôle de m , soit accompagnée d'une augmentation de n , qui, elle, permet de réhabiliter ce rôle.

Cette analyse, bien qu'effectuée à l'échelle locale, permet de retrouver les conclusions de la section 3.5 quant à l'incidence des effets conjugués de n et de Ra sur celui de m .

3.7. Intensité d'écoulement et taux de transfert de chaleur moyen

Dans le tableau 4 sont donnés l'intensité de l'écoulement, traduite en termes de fonction de courant maximale $|\psi_{\max}|$, et le taux de transfert de chaleur global, désigné par le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} , en fonction de m , pour différentes valeurs de n et de Ra . Tout d'abord, il convient de rappeler que le cas $\overline{Nu} = 1$ correspond à un transfert de chaleur purement conductif.

Ra		10^2		10^4		10^6	
n	m	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}
0.6	0	0.216	1.007	5.039	3.575	10.108	16.887
	5	0.256	1.008	5.042	3.467	10.184	16.855
	10	0.747	1.023	5.141	3.243	10.401	16.608
1.0	0	0.126	1.003	3.155	1.982	6.732	6.459
	5	0.139	1.003	3.190	1.934	6.786	6.443
	10	0.244	1.004	3.465	1.831	6.816	6.276
1.4	0	0.102	1.002	1.830	1.350	5.249	3.621
	5	0.109	1.003	1.848	1.348	5.267	3.613
	10	0.154	1.002	2.132	1.341	5.345	3.558

Tableau 3.4: Effet de m sur l'intensité d'écoulement et le taux de transfert de la chaleur moyen

D'autre part, comme on peut le constater, à faible convection ($Ra = 10^2$), une augmentation de m conduit à une forte augmentation de $|\psi_{\max}|$, laquelle tend à être de moins en moins importante à mesure que n augmente. En revanche, à l'exception d'une montée de 1.5 % enregistrée pour $n = 0.6$, \overline{Nu} est pratiquement indifférent vis-à-vis de toute variation de m et garde, globalement, une valeur proche de l'unité, ce qui témoigne d'un régime pseudo-conductif. D'ailleurs, les lignes de flux de chaleur représentées dans la partie droite de la figure 3.1 reflètent bien cet état de fait.

Pour $Ra = 10^4$ (convection modérée), $|\psi_{\max}|$ continue d'augmenter avec m , pour toutes les valeurs de n , mais pas de manière significative que précédemment, tandis que \overline{Nu} présente une tendance inverse. Ce dernier résultat peut s'expliquer en se référant aux lignes de flux de chaleur de la figure 3.2 (à droite) qui deviennent davantage tordues en augmentant m , ce qui veut dire que le chemin suivie par la chaleur, pour passer de la paroi chaude à celle froide, est plus compliqué la contraignant à mettre un peu plus de temps à cause de la thermo-dépendance.

Enfin, pour $Ra = 10^6$ (convection relativement élevé), la thermo-dépendance se manifeste à moindre degré cette fois-ci puisque l'augmentation de $|\psi_{\max}|$ et la diminution de \overline{Nu} avec m sont faibles. D'ailleurs, les lignes de flux de chaleur de la figure 3.3 (à droite) confirment bien la tendance observée pour \overline{Nu} . En effet, celles-ci restent, globalement, faiblement affectées par m .

Il ressort donc de ces résultats que, dans une certaine mesure, la dépendance de la consistance du fluide vis-à-vis de la température (ou thermo-dépendance) joue un rôle de résistance au transfert de chaleur, entraînant donc une perte d'énergie thermique du fluide.

3.8. Conclusion

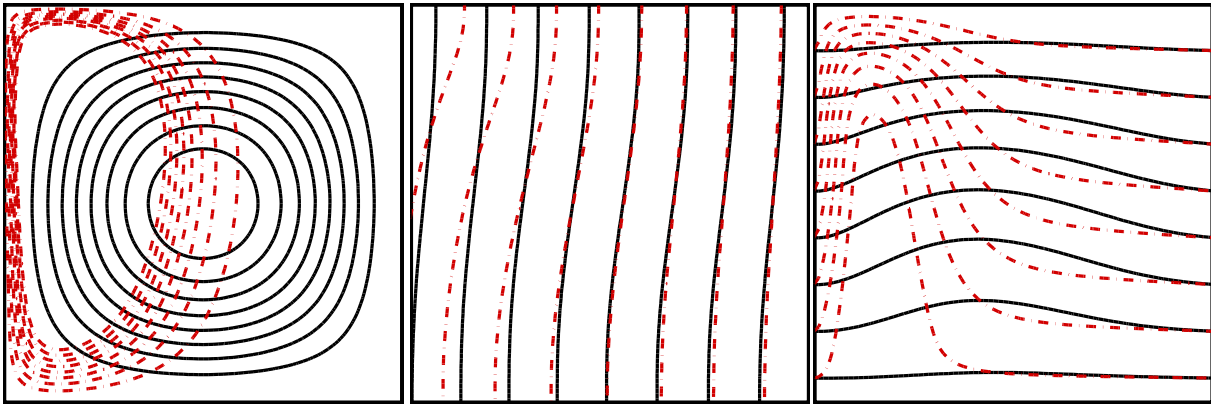
L'effet des variations de la viscosité avec la température sur la convection naturelle, générée par un flux de chaleur imposé aux parois verticales d'une cavité carré confinant un fluide non-Newtonien à comportement en loi de puissance thermo-dépendant, est étudié numériquement. Voici les points à retenir :

- La convection est insensible au nombre Prandtl, pour les grandes valeurs de celui-ci ($Pr \geq 100$), indépendamment des paramètres gouvernants m , n et Ra ;

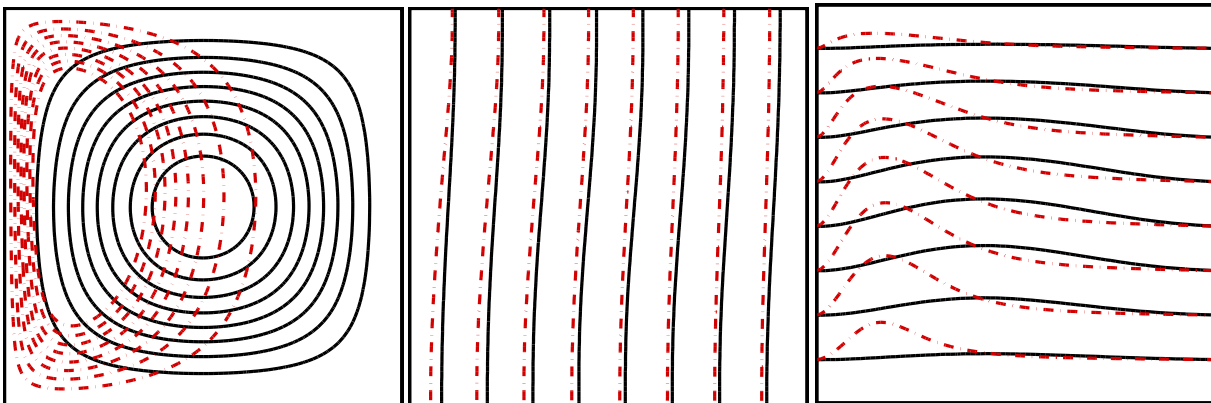
- La thermo-dépendance brise la centro-symétrie des champs d'écoulement et de température et favorise, ainsi, la formation de deux couches, une active, proche de la paroi chaude, et l'autre morte (ou stagnante) dans le reste de la cavité ;

- La thermo-dépendance augmente l'intensité de l'écoulement, dans la couche active, et réduit relativement le taux de transfert de chaleur moyen ;

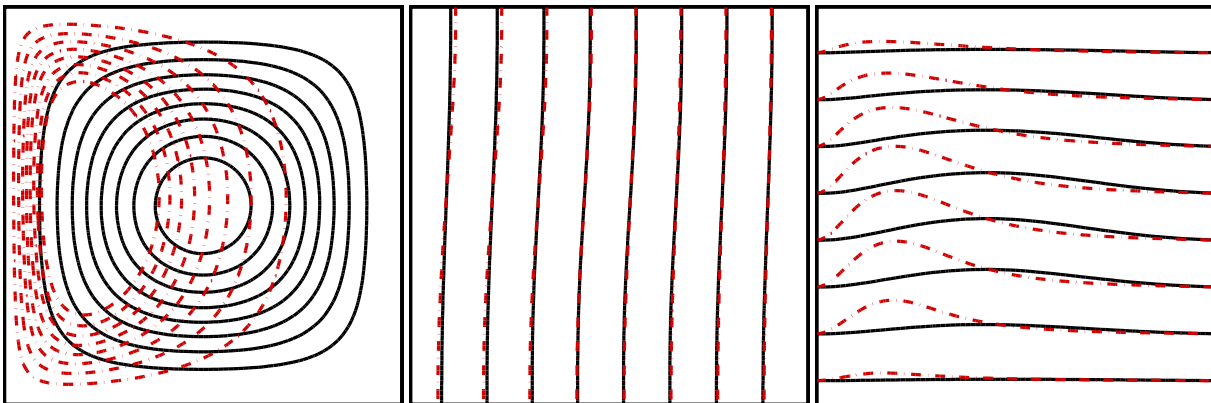
- L'effet de la thermo-dépendance est tributaire des effets conjugués de n et de Ra .



$n = 0.6$

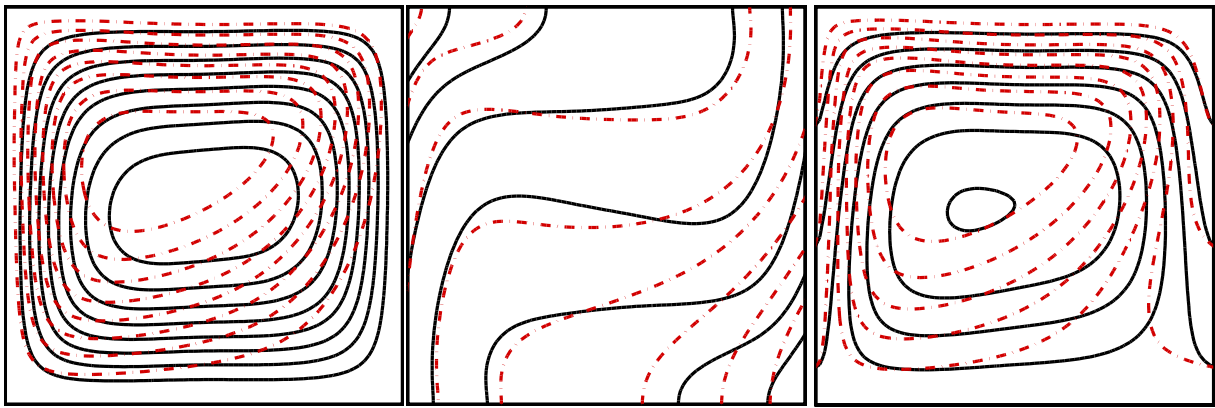


$n = 1$

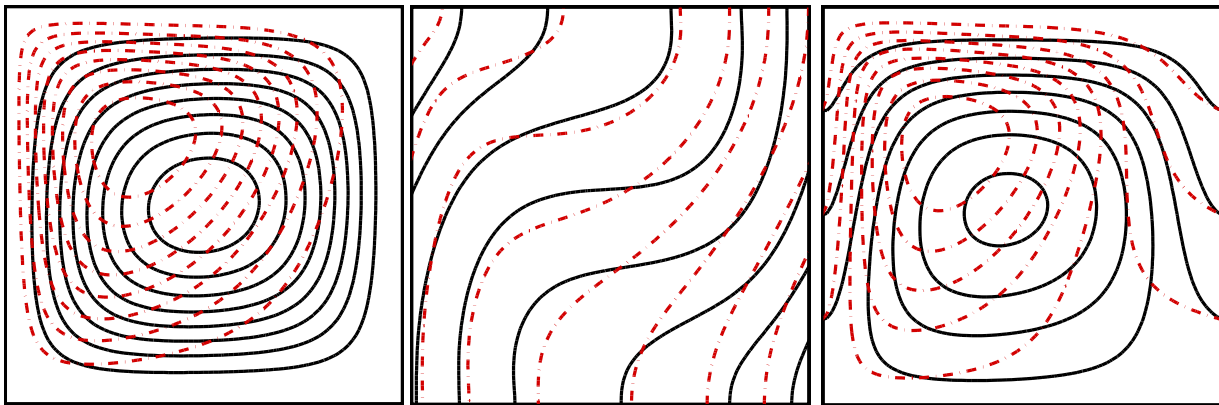


$n = 1.4$

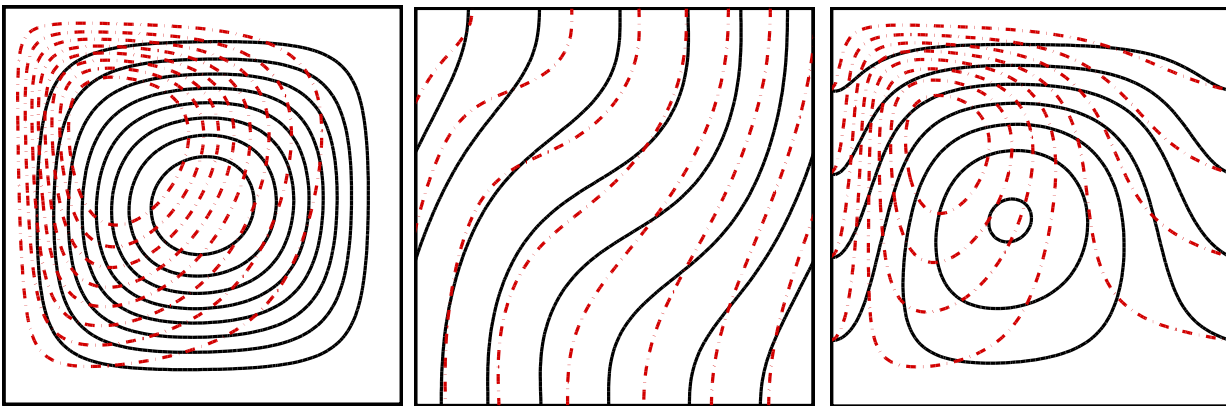
Figure 3.1 : Lignes de courant (gauche), isothermes (centre) et lignes de flux de chaleur (droite) obtenues pour $Ra = 10^2$, $m = 0$. (lignes continues noires), et $m = 10$. (lignes interrompues rouges).



$n = 0.6$

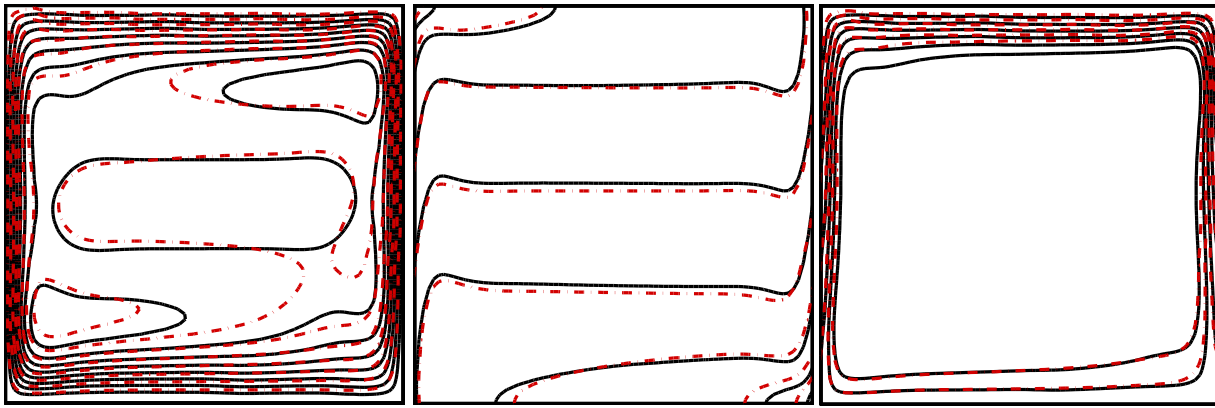


$n = 1$

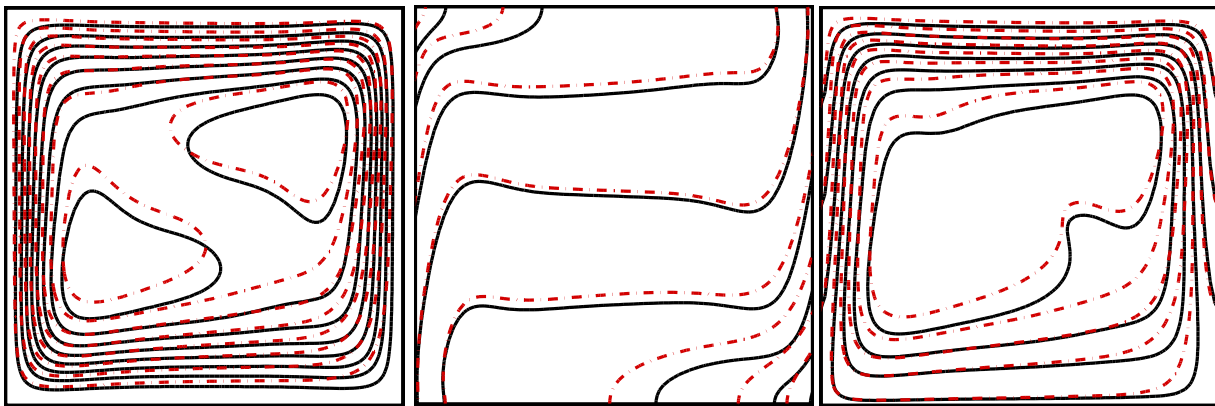


$Nn = 1.4$

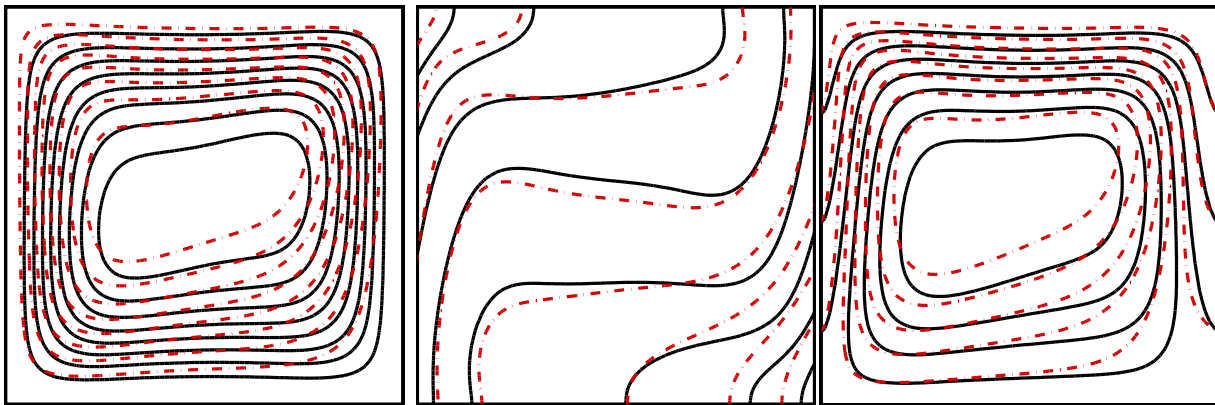
Figure 3.2 : Lignes de courant (gauche), isothermes (centre) et lignes de flux de chaleur (droite) obtenues pour $Ra = 10^4$, $m = 0$. (lignes continues noires), et $m = 10$. (lignes interrompues rouges).



$n = 0.6$

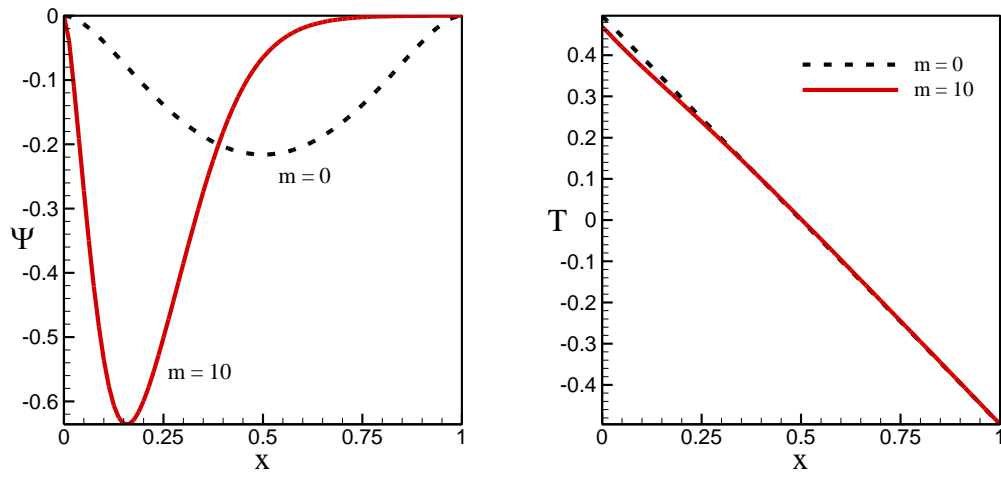


$n = 1$

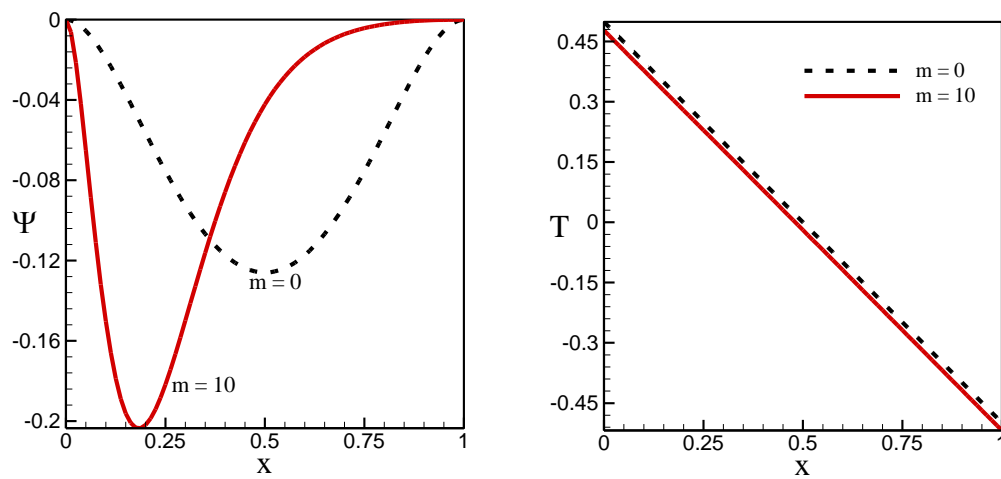


$n = 1.4$

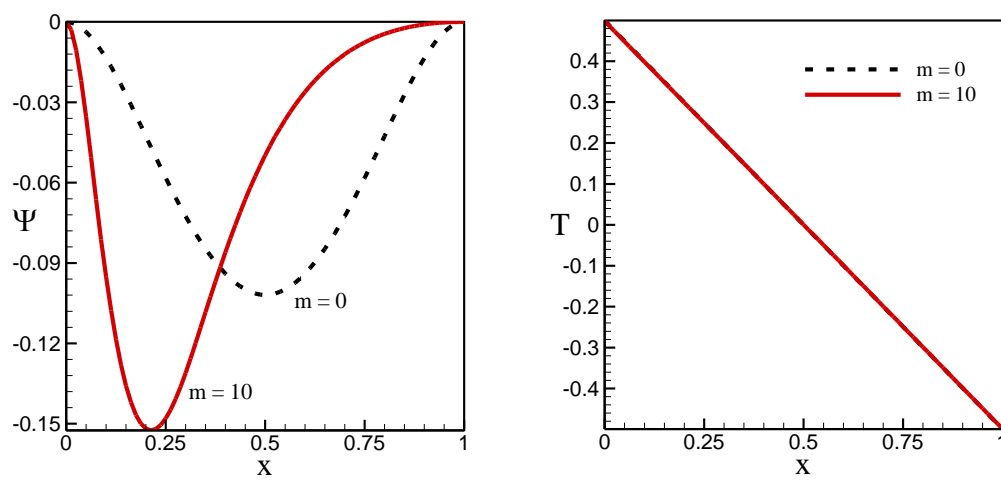
Figure 3.3 : Lignes de courant (gauche), isothermes (centre) et lignes de flux de chaleur (droite) obtenues pour $Ra = 10^6$, $m = 0$. (lignes continues noires), et $m = 10$. (lignes interrompues rouges).



$n = 0.6$



$n = 1$



$n = 1.4$

Figure 3.4 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x, y = 1/2)$ et de la température $T(x, y = 1/2)$ pour $Ra = 10^2$.

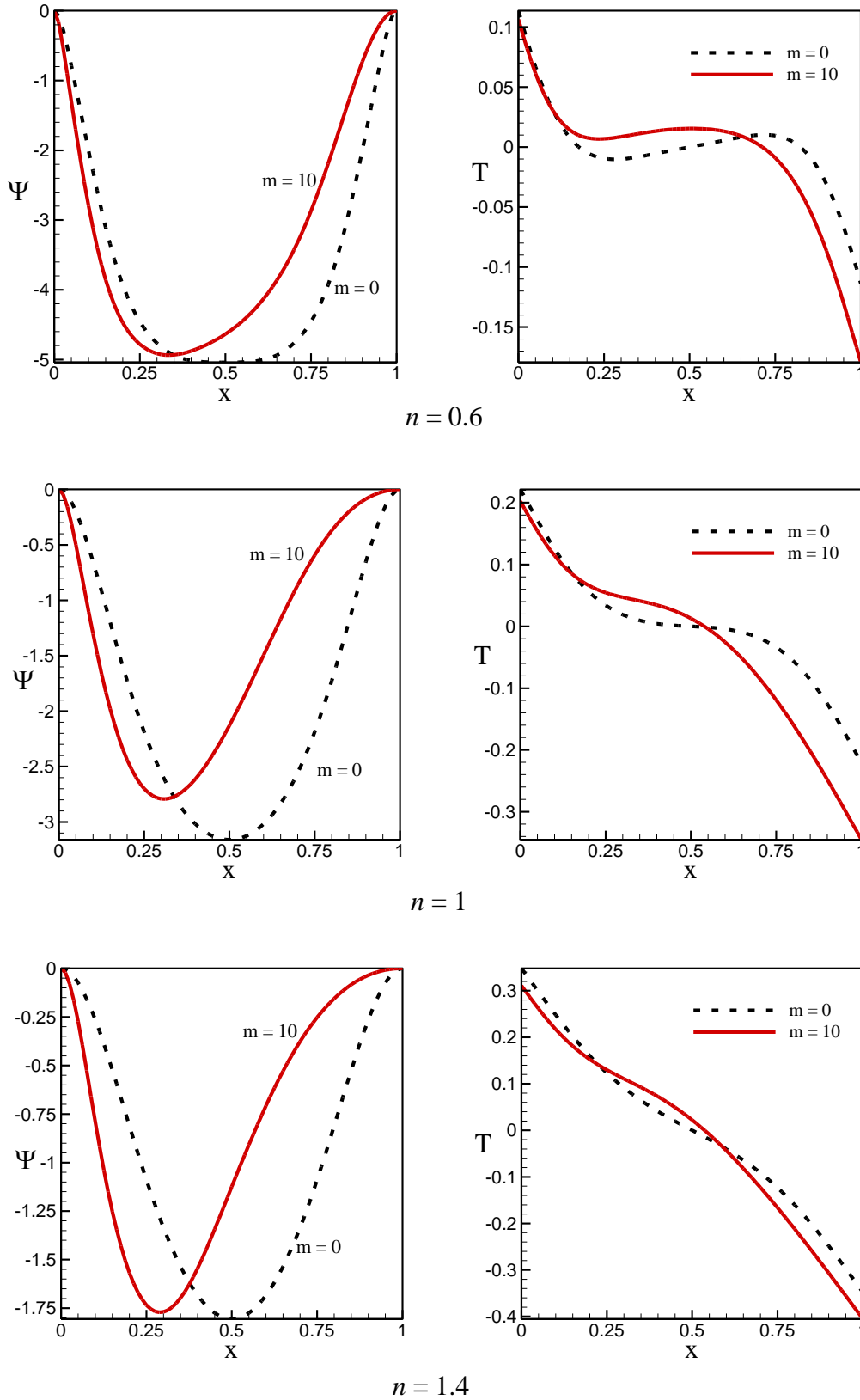


Figure 3.5 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x, y = 1/2)$ et de la température $T(x, y = 1/2)$ pour $Ra = 10^4$.

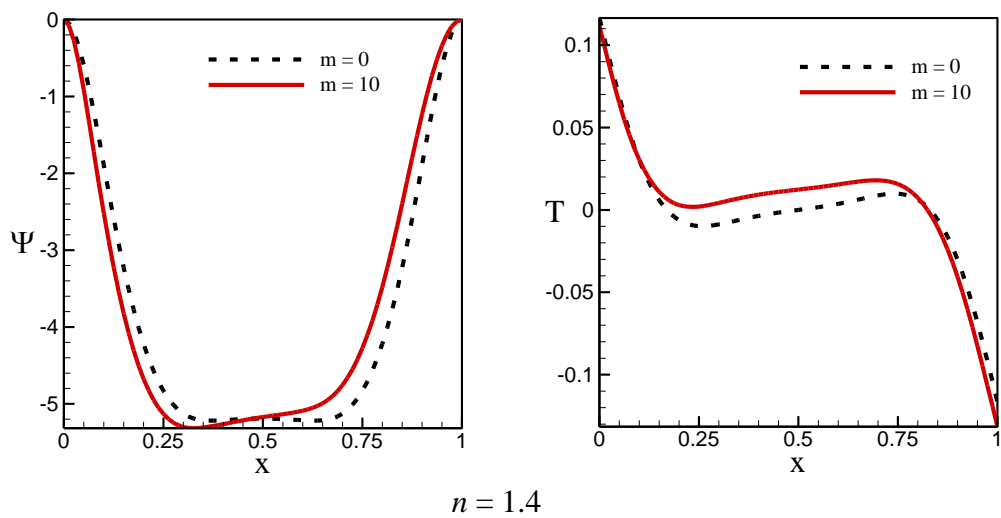
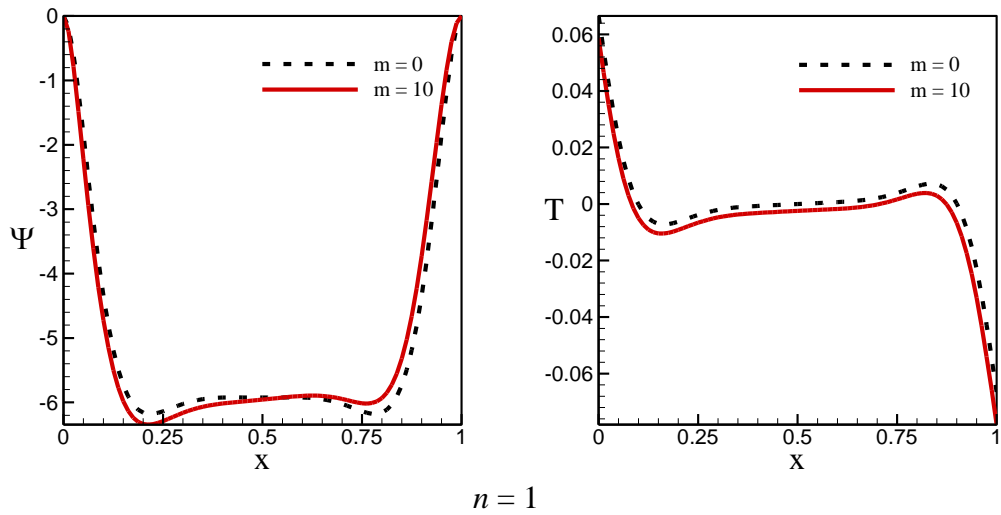
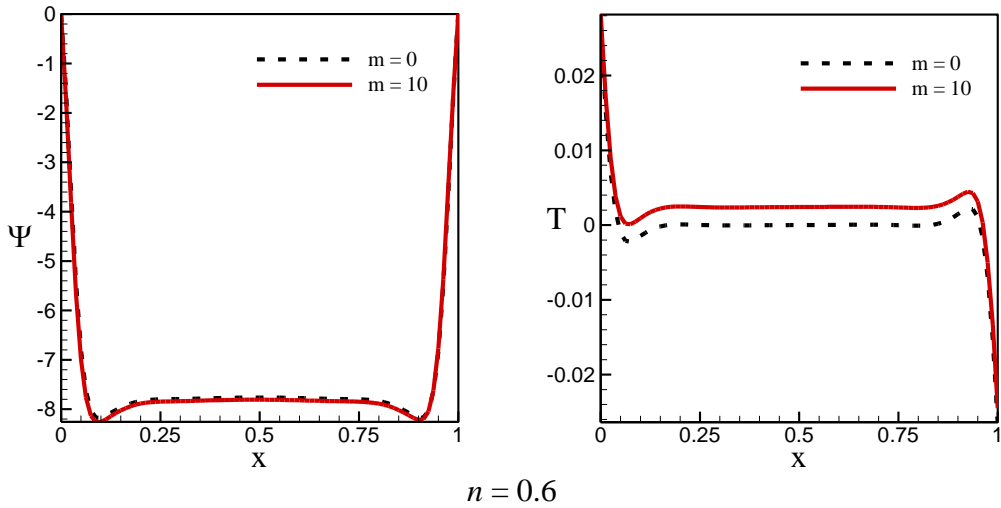


Figure 3.6 : Profil de la fonction de courant $\Psi(x, y = 1/2)$ et de la température $T(x, y = 1/2)$ pour $Ra = 10^6$.

CHAPITRE 4

EFFET DE LA THERMO-DEPENDANCE SUR LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITÉ CARRÉE SOUMISE UNIFORMEMENT À DES DENSITES DE FLUX DE CHALEUR VERTICAUX ASCENDANTS.

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, on se propose d'examiner l'effet de la thermo-dépendance sur la convection de Rayleigh-Bénard dans la cavité carrée précédente, qui est chauffée, cette fois-ci, par le bas et isolée au niveau des côtés verticaux ($a=0$ et $b=1$). Pour une telle configuration de chauffage, on a gardé pour le nombre de Prandtl la valeur indéfinie $Pr \rightarrow \infty$ en s'appuyant sur les travaux de Lamsaadi (2006) et en considérant aussi que la direction de chauffage n'affecte guère les conclusions du chapitre précédent à ce propos. Partant de ceci, les vrais paramètres gouvernant le problème demeurent le nombre de Pearson, m , exprimant la thermo-dépendance de la viscosité, l'indice de comportement, n , et le nombre de Rayleigh, Ra , dont les effets, sur les champs d'écoulement et de température et sur le transfert de chaleur résultant, sont analysés par la suite. Là aussi, on recourt au concept des lignes de flux de chaleur pour comprendre comment les variations de la viscosité avec la température réduisent le taux de transfert de chaleur.

4.2. Tests de précision et choix d'un maillage optimal

Comme dans toute étude, à caractère numérique, des tests avec différentes tailles de maillage sont nécessaires pour atteindre la précision requise pour les simulations. Dans le tableau 4.1 sont répertoriées les valeurs des quantités $|\psi_{\max}|$ et \overline{Nu} , représentant respectivement l'intensité de l'écoulement et le taux de transfert de chaleur, pour diverses tailles de grille, où l'on s'aperçoit qu'une taille uniforme de 81×81 est suffisante pour simuler le problème objet de

l'étude, puisqu'un raffinement à 101×101 conduit au maximum à 1.32 % et 1.52 % d'écart pour $|\psi_{\max}|$ et \overline{Nu} , respectivement.

Grilles		61×61		81×81		101×101	
n	Ra	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}	$ \psi_{\max} $	\overline{Nu}
0.6	2.10^3	4.369	2.058	5.202	2.165	5.145	2.155
1.0	5.10^3	2.935	1.984	3.053	1.621	3.013	1.609
1.4	5.10^4	4.366	1.947	4.441	1.966	4.396	1.936

Table 4.1 : Essais préliminaires sur l'effet de la taille de grille pour $m = 5$, $Pr \rightarrow \infty$ et différents valeurs de n et de Ra .

4.3. Validation du code de calcul

Le présent code de calcul est validé à l'aide d'une solution de référence obtenue, dans le cas du problème de Rayleigh-Bénard classique, par Ouertatani et al. (2008). Des résultats comparatifs, portant sur les valeurs de \overline{Nu} , sont rassemblés dans le tableau 4.2 où l'on peut constater que l'accord est parfaitement bon avec une déviation maximale n'excédant pas 0.6%.

Ra	Ouertatani et al. (2008)	Présent travail
10^3	1.0004	0.9963
10^4	2.1581	2.1531
10^5	3.9103	3.9326
10^6	6.3092	6.3373

Table 4.2 : Validation du code numérique pour $Pr = 0.71$.

4.4. Détermination du seuil d'apparition de la convection

Dans la figure 4.1 est reporté le nombre de Rayleigh critique, Ra_c , correspondant au seuil d'apparition de la convection, en fonction de n pour différentes valeur de m . Une telle figure montre que, pour toute valeur de m ,

Ra_c est une fonction croissante de n , ce qui signifie que le comportement rhéofluidifiant (ou pseudo-plastique) anticipe la convection alors que celui rhéoépaississant (ou dilatant) la retarde. Par ailleurs, on peut voir aussi que, pour une valeur donnée de n , une augmentation de m conduit à une diminution de Ra_c , ce qui veut dire que la thermo-dépendance rend précocement la convection. Toutefois, cet effet devient de moins en moins marqué avec un n décroissant. Cela paraît évident, puisque la pseudo-plasticité tend à réduire la viscosité effective et donc à limiter sa variabilité avec la température. En effet, avec un fluide moins visqueux, tel que l'eau par exemple, la viscosité dépend faiblement de la température, alors qu'avec un fluide fortement visqueux, tel que le miel, cette grandeur est fortement thermo-dépendante.

4.5. Analyse des champs d'écoulement, de température et de flux de chaleur

Examinons, maintenant, les retombées d'une viscosité variable avec la température sur les champs d'écoulement, de température et de flux de chaleur. Avec la loi de viscosité 2.18 (cf. chapitre 2), des solutions numériques, présentées dans les figures 4.2-4.4 en termes de lignes de courant (à gauche), de température (au milieu) et de lignes de flux de chaleur (à droite), sont générées avec $m=0$ (cas iso-consistant) et $m=10$ (cas thermo-dépendant), pour des valeurs de Ra choisies dépendamment de n , puisque Ra_c change avec ce dernier paramètre.

Comme on peut le voir, dans la limite des valeurs assignées à n et Ra , l'écoulement demeure, en général, unicellulaire s'effectuant dans le sens horaire, mais perd sa centro-symétrie avec un m croissant. En fait, dans le cas où $m=0$, l'écoulement gagne tout le domaine $0 < y < 1$ en présentant une parfaite centro-symétrie centrale, mais pour $m > 0$ cette centro-symétrie se voit brisée puisque les lignes de courant deviennent plus serrées dans la région jouxtant le coin inférieur gauche de la cavité, indiquant une intensification de la convection suite

à une baisse sérieuse de la viscosité dans cet endroit chaud. Une sous-couche rhéologique, dans laquelle est concentrée la convection, prend donc naissance. En revanche, dans les zones avoisinant les parois froide supérieure et verticales isolées, la viscosité est importante à cause de la baisse de température et l'écoulement est presque inexistant, c'est-à-dire que le fluide stagne : c'est le régime du couvercle conducteur. Ce phénomène prend de l'importance avec un n croissant et un Ra décroissant, ce qui implique que la dépendance de la viscosité vis-à-vis de la température ne manifeste son effet que lorsque la convection est faible, ce qui relève de l'évidence dans la mesure où une convection forte, laquelle se produit pour $0 < n < 1$ et Ra grand, inhibe cet effet.

Parallèlement, comparées au cas iso-consistant ($m=0$), les isothermes exhibent, pour $m>0$, une forte distorsion et une perte de centro-symétrie conséquente dans la sous-couche rhéologique là où la convection est fortement développée, mais tendent à être moins tordues ailleurs, en particulier dans le couvercle conducteur. Ce comportement s'amplifie en augmentant n et diminuant Ra , comme discuté ci-dessus.

D'autre part, pour avoir une description microscopique du processus de transfert de chaleur, ce qui diffère de l'utilisation du nombre de Nusselt conventionnel décrivant macroscopiquement le même mécanisme, une analyse des lignes de flux de chaleur est requise. Ainsi, comparées au cas $m=0$, les lignes de flux de chaleur montrent une certaine complexité pour $m>0$, ce qui veut dire que le chemin suivi par la chaleur pour atteindre la paroi froide est plus compliqué dans la sous-couche rhéologique et, de ce fait, on peut s'attendre à une diminution du taux de transfert de chaleur dans une telle situation. Force est de noter ici aussi qu'une augmentation de n et une diminution de Ra favorisent ce fait.

4.6. Distributions de la fonction de courant et de la température

Une analyse locale de la situation peut être effectuée en traçant (figures 4.5) les profils de la fonction de courant (à gauche), ψ , et de la température (à droite), T , le long de la coordonnée verticale y à mi-largeur de la cavité ($x = 0.5$). Bien que celle-ci reste partielle, elle permet d'apporter un supplément quand aux conclusions globales tirées dans le paragraphe précédent (cf. 4.5).

Ainsi, comme on peut le voir, une augmentation de m conduit, dans tous les cas, à une légère réduction et un déplacement du creux de $\psi(y)$ vers le bas de la cavité, laissant derrière lui une zone où le mouvement du fluide est en voie de cesser ($\psi \rightarrow 0$), synonyme d'une réorganisation de la convection qui tend à s'éloigner du centre de la cavité et à se concentrer à proximité du coin gauche inférieur de celle-ci. D'autre part, l'allure de $T(y)$ est telle que son point d'inflexion se décale de sa position centrale vers le fond chaud et sa descente devient rapidement quasi-linéaire, traduisant une baisse de température qui s'opère de façon rapide à cause du couvercle conducteur. Il faut noter, toutefois, que ce comportement, par rapport à m , a tendance à s'affirmer avec n et à disparaître avec Ra , pour les raisons précisées ci-dessus (cf. 4.5).

4.7. Intensité d'écoulement et taux de transfert de chaleur moyen

La figure 4.6 présente les évolutions $|\psi_{\max}|$ et \overline{Nu} avec Ra , pour les valeurs choisies pour m et n . A première vue, ces quantités sont des fonctions croissantes de Ra , ce qui est évident puisque les effets thermogravitaires, incarnés par Ra , jouent un rôle moteur dans la convection. En revanche, une augmentation de n conduit à l'effet opposé, puisque le comportement rhéofluidifiant ($0 < n < 1$) rehausse la convection, alors que celui rhéo-épaississant ($n > 1$) la réduit. De surcroît, $|\psi_{\max}|$ et \overline{Nu} augmente et diminue avec m respectivement. Ces tendances sont liées au fait qu'avec une viscosité thermo-dépendante, les activités convectives sont concentrées dans la sous-couche rhéologique sont presque inexistantes ailleurs dans la cavité. Par ailleurs, la

diminution de \overline{Nu} , exprimant la chute du transfert de chaleur, est attendue si on se réfère aux lignes de flux de chaleur, comme expliqué dans le paragraphe 4.5.

4.8. Conclusion

Le problème de la convection de Rayleigh-Bénard au sein d'une cavité carrée, remplie d'un fluide non-Newtonien, à comportement en loi de puissance thermo-dépendant, et soumise par le bas à un flux de chaleur uniforme, est examiné numériquement. Les principaux résultats sont résumés comme suit :

- Pour la configuration de chauffage considérée, la convection ne peut s'initier qu'à partir d'un seuil critique, Ra_c , qui dépend de n et m . Ainsi, une diminution de n ou augmentation de m anticipe la convection, alors qu'une augmentation de n ou une diminution de m la retarde.

- La thermo-dépendance détruit la symétrie des champs d'écoulement et de température et encourage, par voie de conséquence, la formation d'une sous-couche rhéologique, concentrant la convection, et d'un couvercle conductif où le mouvement du fluide est presque absent ;

- La thermo-dépendance intensifie l'écoulement, dans la sous-couche rhéologique, et réduit le transfert de la chaleur ;

- L'effet de m reste conditionné par les effets conjugués de n et de Ra , puisqu'une augmentation/(diminution) de $n/(Ra)$ favorise celui de m alors qu'une diminution/(augmentation) de $n/(Ra)$ le défavorise.

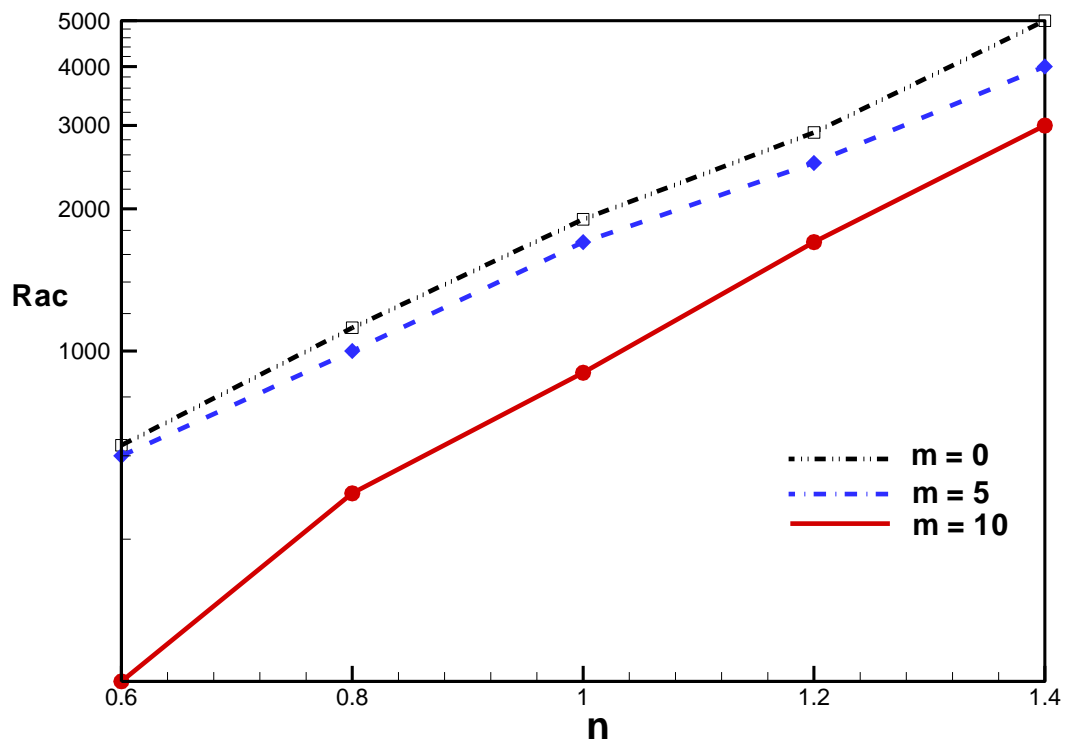


Figure 4.1 : Evolution du nombre de Ra_c avec n , pour différentes valeurs de m .

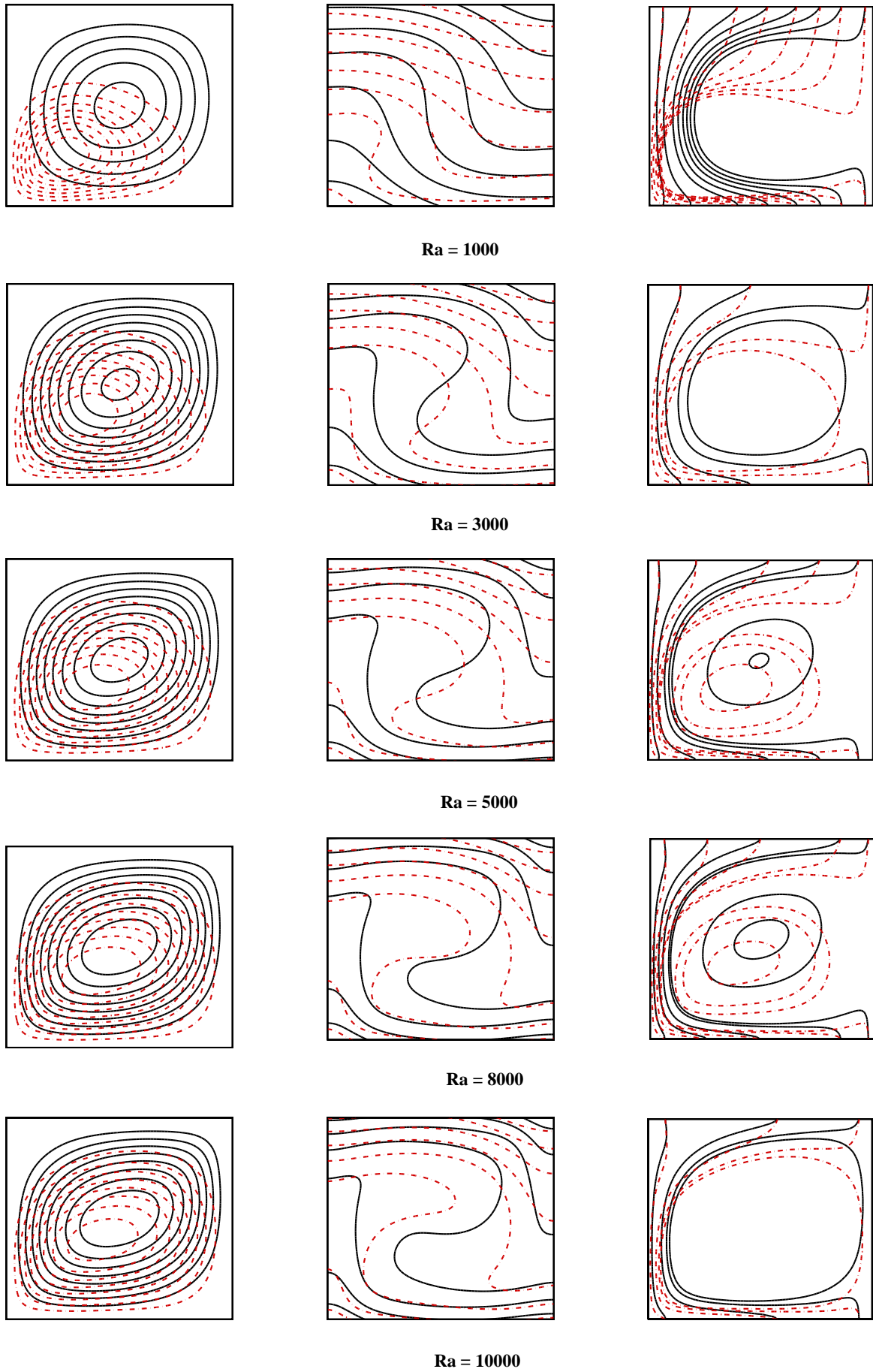


Figure 4.2: Carte d'isovaleurs en fonction de Ra , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 0.6$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).

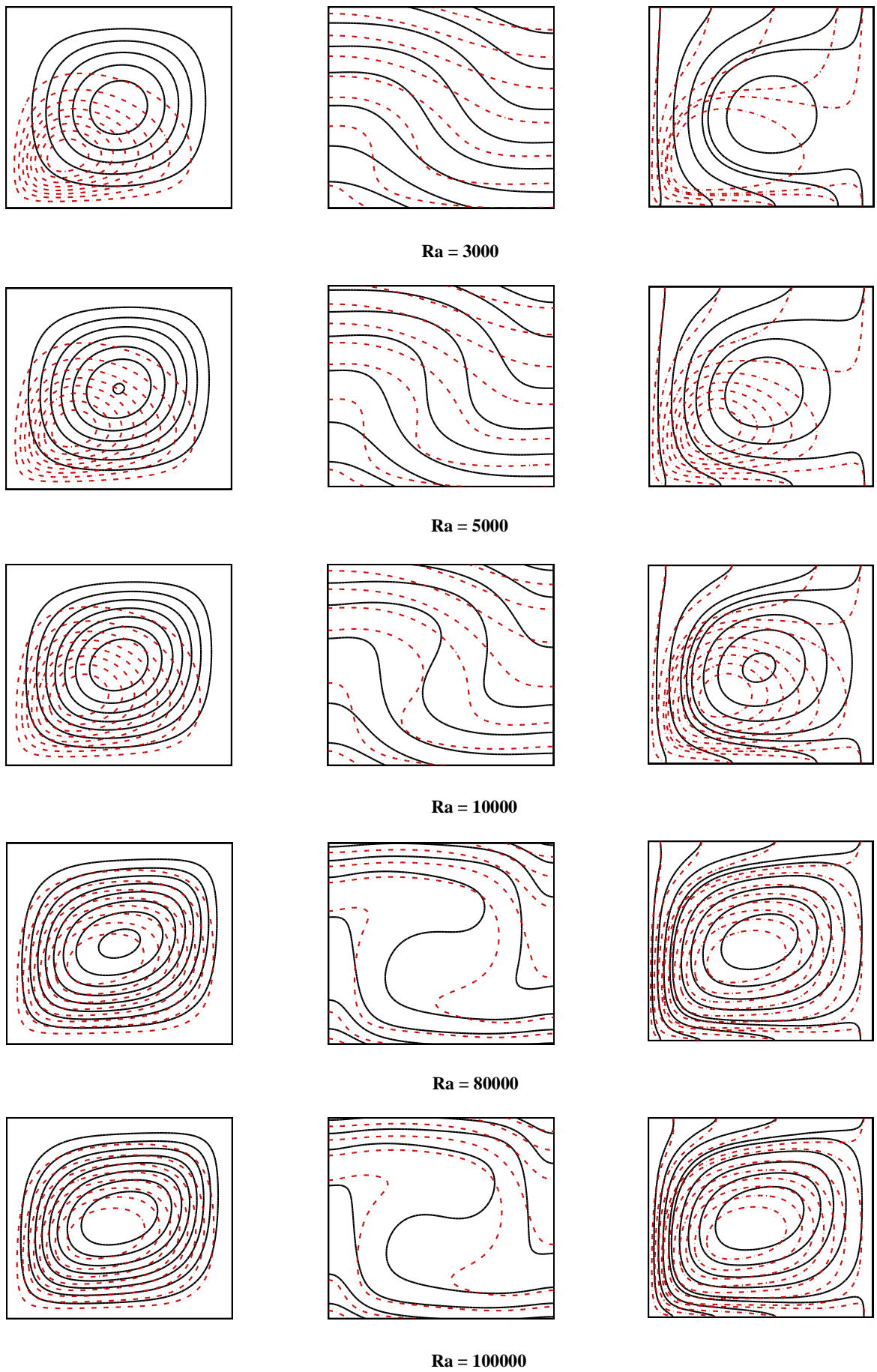


Figure 4.3: Carte d'isovaleurs en fonction de Ra, isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m=10$ (traits interrompus rouges).

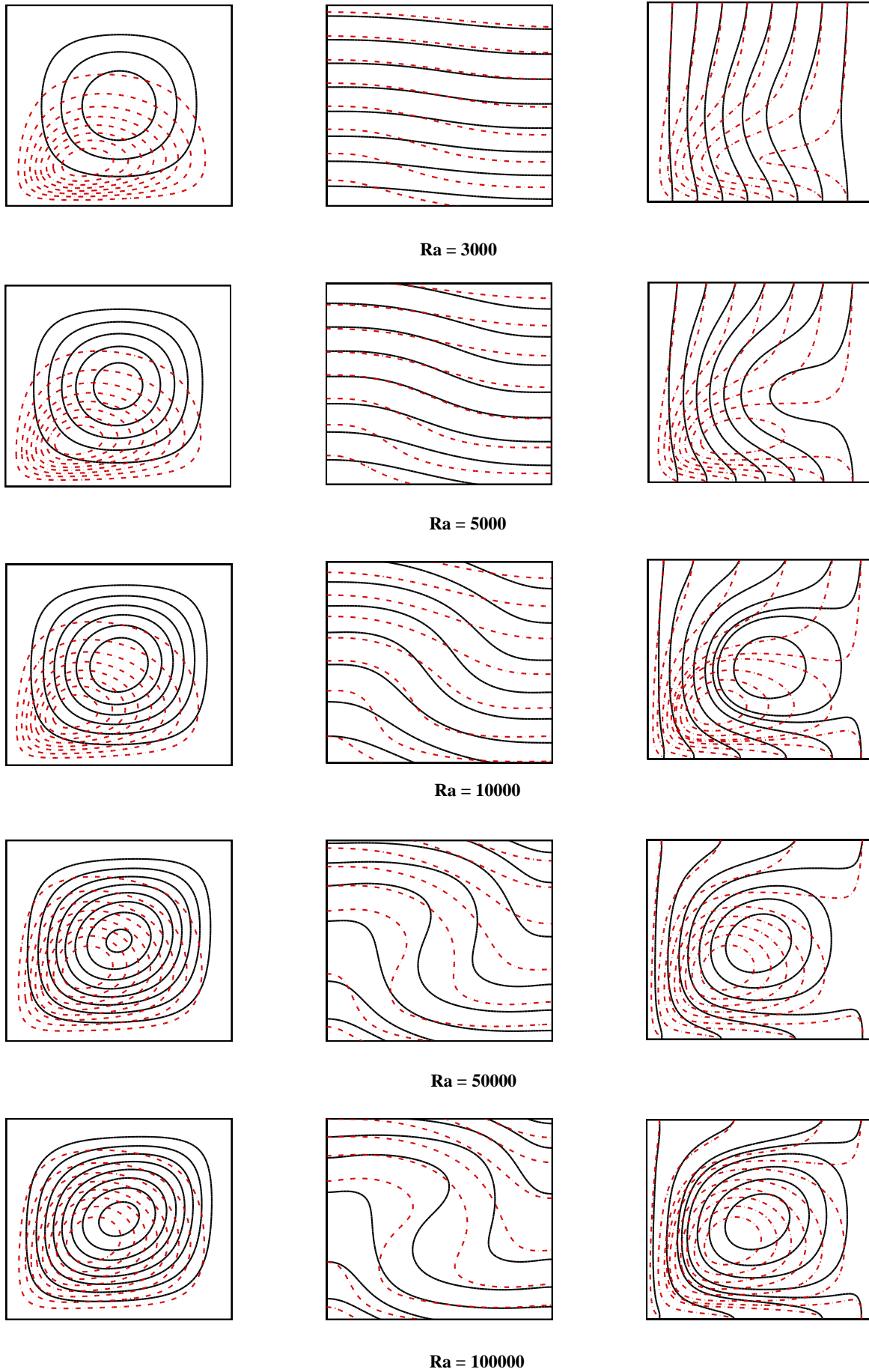


Figure 4.4: Carte d'isovaleurs en fonction de Ra , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.4$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m=10$ (traits interrompus rouges).

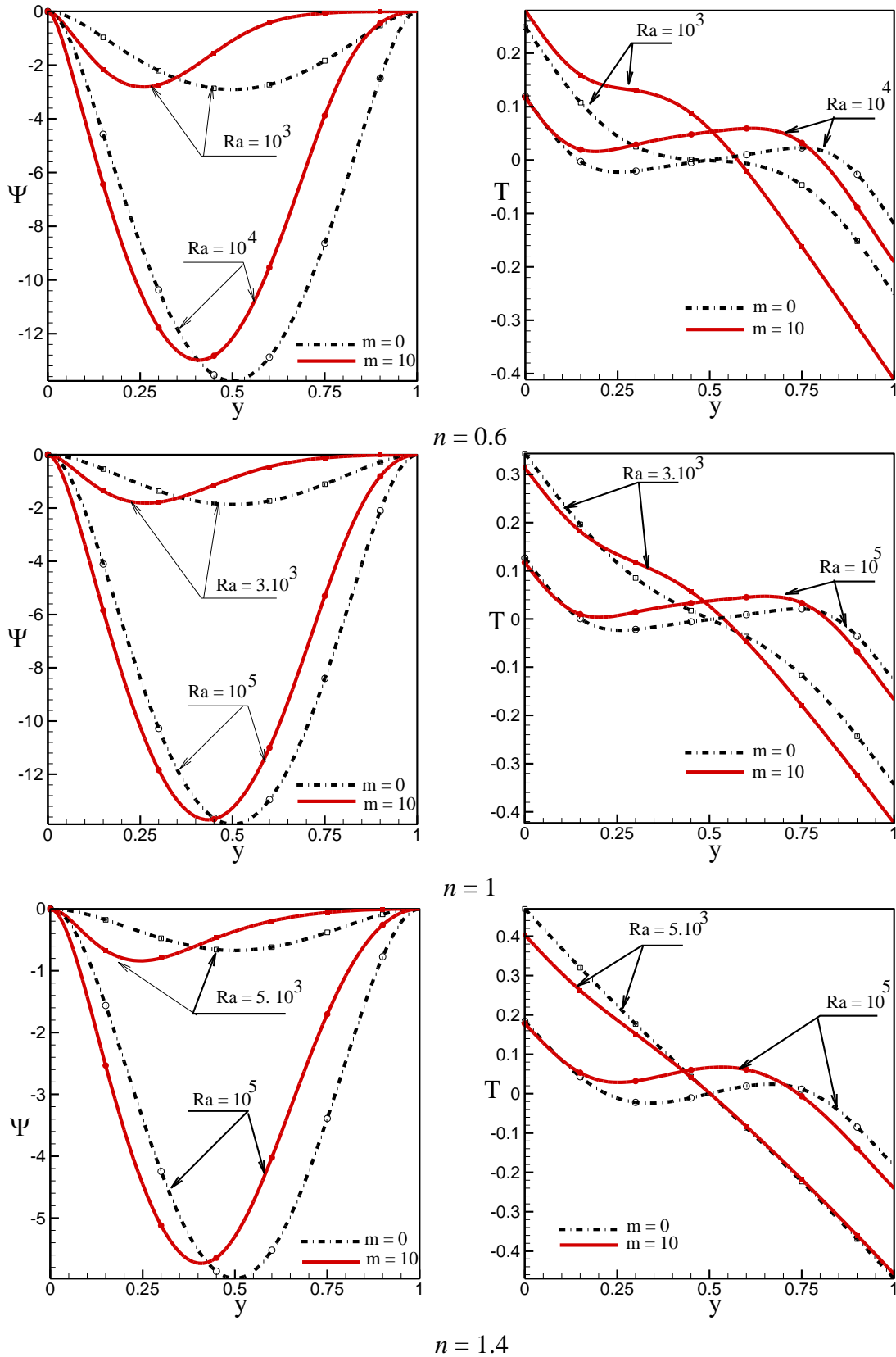


Figure 4.5: Profil de la fonction de courant $\Psi(x=1/2, y)$ (à gauche) et de la température $T(x=1/2, y)$ (à droite) pour différents valeurs de Ra , n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).

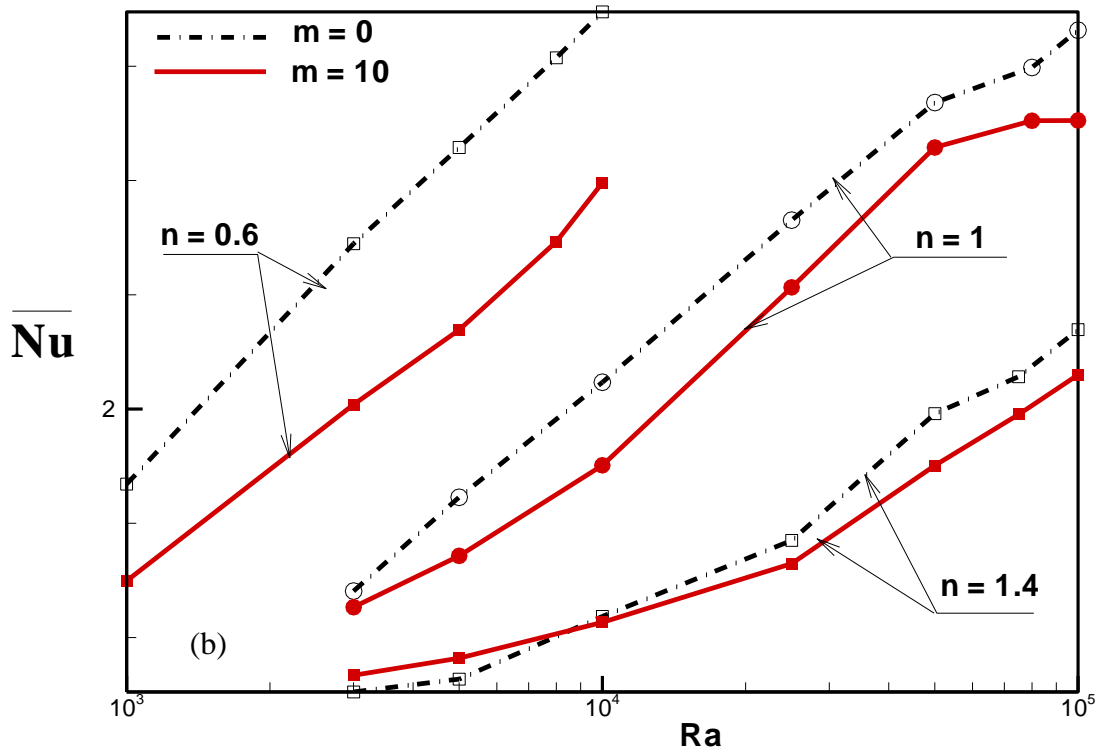
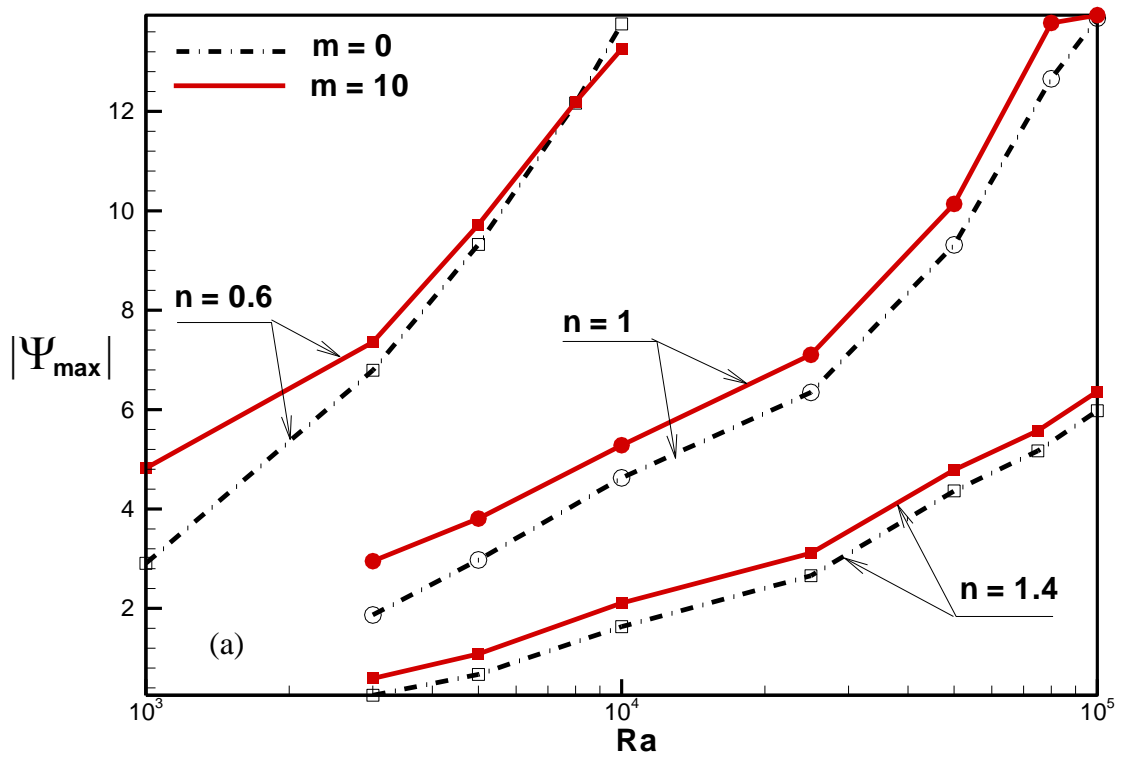


Figure 4.6: Evolution de l'intensité d'écoulement $|\psi_{\max}|$ (a) et du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} (b) en fonction de Ra pour plusieurs valeurs de n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).

CHAPITRE 5

EFFET DE LA THERMO-DEPENDANCE SUR LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITÉ CARRÉE SOUMISE UNIFORMEMENT À DES DENSITES DE FLUX DE CHALEUR CROISÉS

5.1. Introduction

Ce chapitre s'attaque au cas où la cavité carrée est exposée à des flux de chaleur croisés. Une telle configuration présente plus de réalisme puisqu'il n'est jamais possible de chauffer deux parois en regard tout en maintenant les deux autres en isolation parfaite à cause des déperditions thermiques qui peuvent se produire à ce niveau.

Par ailleurs, dans la mesure où la configuration considérée englobe les deux précédentes ($a=0$ et $b=1$, $a=1$ et $b=0$), on garde pour le nombre de Prandtl la valeur $Pr \rightarrow \infty$ et pour le maillage la taille 81×81 . Dans une telle situation, on examine de près le rôle des constantes a et b , exprimant respectivement les proportions des flux de chaleur suivant les directions horizontale et verticale, dans la promotion ou la réduction de la convection thermique, en présence ou en absence de thermo-dépendance et ce, compte tenu des autres paramètres gouvernants n , m et Ra .

En dernier, on fait appel, comme tout dans les chapitres 3 et 4, à la notion de lignes de flux de chaleur pour voir comment la thermo-dépendance de la viscosité affecte le transfert de chaleur.

5.2. Effet de la thermo-dépendance selon la configuration de chauffage considérée

Ici, compte tenu du caractère croisé des sollicitations thermiques, on introduit le nombre de Nusselt global suivant :

$$\overline{Nu_g} = \overline{Nu_h} + \overline{Nu_v} \quad (5.1)$$

pour traduire l'échange de chaleur entre les parois thermiquement actives, $\overline{Nu_h}$ et $\overline{Nu_v}$ étant donnés respectivement par les expressions 2.31 et 2.33 (Cf. Chapitre 2).

5.2.1. Configuration de chauffage $a = 1$ et $0 \leq b \leq 1$

Comme dans les deux cas précédemment examinés (Cf. chapitres 3 et 4), l'effet de la thermo-dépendance est bel et bien manifeste ici aussi, sauf que, cette fois-ci, il varie bien avec l'intensité du chauffage vertical ascendant. En effet, comme le montrent les figures 5.1-5.3, en portant une perturbation thermique progressive au niveau de la paroi inférieure ($b > 0$) à la configuration de chauffage horizontal ($a = 1$ et $b = 0$), on s'aperçoit que les iso-lignes ont tendance à converger vers une situation ressemblant à une superposition des cas ($a = 1$ et $b = 0$) et ($a = 0$ et $b = 1$), où les lignes de courant (à gauche) se trouvent plus entassées dans la partie centrale du côté gauche dégageant, ainsi, une zone de faible vitesse côtoyant la paroi verticale et les coins inférieur et supérieur droits, alors que les isothermes (au milieu) indiquent de forts et de faibles gradients dans ces endroits, respectivement. Pour leur part, les lignes de flux de chaleur (à droite) suivent globalement la direction de l'écoulement mais avec des complications qui laissent présager une certaine résistance au transfert de chaleur. Bien entendu, le comportement rhéologique n'est pas étrange à cela, puisqu'une augmentation de n , dans les limites des valeurs données de b et Ra , ne fait que consolider l'effet de la thermo-dépendance de la viscosité.

On peut, bien sûr, examiner localement la situation pour parvenir à des conclusions similaires. En fait, les distributions de la fonction de courant, $\psi(x, 1/2)$ et $\psi(1/2, y)$, et de la température, $T(x, 1/2)$ et $T(1/2, y)$, représentées dans les figures 5.4-5.5, montrent des tendances qui corroborent les observations effectuées à l'échelle globale.

Quantitativement, on voit bien à travers la figure 5.6, exprimant les variations, avec b , de l'intensité de l'écoulement, $|\psi_{\max}|$, pour $Ra = 5.10^3$ et différentes valeurs de n et m , que cette grandeur subit globalement progressivement la loi de la thermo-dépendance à mesure que b et n augmentent. La quantité $\overline{Nu_g}$, traduisant le transfert thermique globale et dont les variations avec b sont données par la figure 5.7, n'échappe pas également à cette loi, puisqu'elle diminue généralement avec m (comme avancé par les lignes de flux de chaleur) et ce, dépendamment de b et de n . En outre, sa tendance générale d'évolution laisse présager une valeur critique b_c de b (difficile à préciser graphiquement) pour laquelle le taux de transfert de chaleur est indéfini, à cause d'une égalisation des températures locales des parois horizontales en regard, ce qui informe sur le changement de signe, observé sur la valeur de $\overline{Nu_g}$, lequel se trouve anticipé par la thermo-rhéologie étant donnée la diminution de b_c avec les paramètres m et n .

5.2.2. Configuration de chauffage $b = 1$ et $0 \leq a \leq 1$

Partons de la configuration ($a = 0$ et $b = 1$), on peut comme auparavant, en augmentant progressivement la perturbation thermique a , portée à celle-ci, de 0 à 1, retrouver petit à petit la configuration ($a = 1$ et $b = 1$), qui s'apparente à une superposition des configurations ($a = 0$ et $b = 1$) et ($a = 1$ et $b = 0$), et tirer les mêmes conclusions quant à l'effet de la thermo-dépendance sur les champs d'écoulement, de température et de flux de chaleur et ce, aussi bien sur le plan global (figures 5.8-5.10) que sur celui local (figures 5.11 et 5.12).

Pour ce qui est de l'intensité de l'écoulement, $|\psi_{\max}|$, la figure 5.13(a), renseignent sur les augmentations de $|\psi_{\max}|$ avec a et m qui deviennent respectivement moindre et confuse au fur à mesure que n diminue. Quant au taux de transfert de chaleur global, $\overline{Nu_g}$, la figure 5.13(b) indique une croissance qui s'opère de façon différente avec a : $\overline{Nu_g}$ augmente relativement lentement au

démarrage puis rapidement vers la fin, mais présentent tout de même un comportement inverse avec m par comparaison à $|\psi_{\max}|$. En effet, \overline{Nu}_g diminue nettement avec m quand n diminue. D'ailleurs les lignes de flux de chaleur des figures 5.8-5.10 (à droite) l'annoncent bien. Toutefois, ce résultat reste typique à $Ra = 5000$, car comme on le verra ci-après, un changement dans la valeur de Ra influencera certainement les tendances observées.

Il convient de mentionner ici la possibilité, pour $0 < a < 0.4$, d'un écoulement antihoraire (dépendant des conditions initiales) se traduisant par une cellule de grande taille tournant dans le sens trigonométrique. Cette dernière cohabite avec de petits tourbillons situés dans les coins de la cavité qui, pour $a \geq 0.4$, finissent par la déloger (à cause de son instabilité dans pareilles circonstances) pour donner lieu à un écoulement entièrement horaire (Figures 5.14) dont l'étude en fonction de m est effectuée ci-dessus.

5.2.3. Configuration de chauffage $a = b = 1$

Ici, les paramètres a et b étant fixés à 1, on examinera plutôt l'effet de m compte tenu des valeurs assignées à n et à Ra . Ainsi, les figures 5.15-5.17, illustrant les lignes de courant (à gauche), les isothermes (au centre) et les lignes de flux de chaleur (à droite) pour différentes valeurs de m , n et Ra , indiquent clairement qu'avec la configuration de chauffage considérée, une diminution de n ou une augmentation de Ra tendent à limiter l'influence de m et donc à réduire celle de la thermo-dépendance de la viscosité. En effet, pour n donné, quand Ra augmente, l'écoulement tend à recouvrer sa configuration iso-consistante, après s'être trouvé sérieusement affecté à faible valeur de Ra , et ce, d'autant plus vite que n diminue.

Des faits similaires peuvent être dégagés à partir de l'analyse des valeurs locales de la fonction de courant, $\psi(x, 1/2)$ et $\psi(1/2, y)$, et de la température, $T(x, 1/2)$ et $T(1/2, y)$, représentées dans les figures 5.18-5.19.

Sur le plan quantitatif les choses se présentent autrement. En effet, les courbes d'évolution de $|\psi_{\max}|$ avec Ra (figure 5.20,(a)) ne confirment pas totalement les conclusions tirées à partir de l'examen des lignes de courant, puisque, pour $n = 0.6$, $|\psi_{\max}|$ se trouve favorisée et défavorisée par m tout au tour d'une certaine valeur de Ra . En augmentant petit à petit n on augmente graduellement $|\psi_{\max}|$ avec m sur toute la plage des valeurs choisies pour Ra , mais pas de façon uniforme, car cette tendance diminue avec Ra . Pour ce qui est des variations de \overline{Nu}_g (figure 5.20,(b)), il n'en est pas de même dans la mesure où l'effet de m peut être retardé par une augmentation de n . La raison en est que, pour $n = 0.6$, cet effet est globalement plus palpable sur toute la gamme des valeurs explorées de Ra , mais il est certain qu'à force d'augmenter Ra il peut être réduit jusqu'à disparition. Pour $n = 1.0$, l'influence de m se manifeste timidement aux faibles valeurs de Ra et prend progressivement de l'ampleur, par la suite, à mesure que Ra devient important. Enfin, pour $n = 1.4$, il faut aller plus loin dans la valeur de Ra pour initier le rôle de m . On comprend de là que les influences conjuguées de n et de Ra conditionnent bien celle de m .

En conclusion, l'analyse effectuée sur les variations des grandeurs thermo-convectives, avec les paramètres gouvernants, semble bien ne pas corroborer entièrement celle portant sur les champs d'écoulement et de température illustrés par les lignes de courant et les isothermes.

5.3 Conclusion

L'étude numérique de la convection naturelle, d'origine thermique, à l'intérieur d'une cavité carrée, occupée par un fluide non-Newtonien, et soumise, au niveau de ses parois, à des densités de flux de chaleur uniformes croisées, est entreprise. Le fluide est à comportement thermo-rhéologique pouvant être modélisé par une combinaison de la loi puissance d'Ostwald-de Waele avec celle exponentielle de Frank-Kamenetski-Reynolds. Le problème se

trouve gouverné par cinq paramètres, à savoir, les fractions de flux de chaleur dans les direction horizontale et verticale, a et b , le nombre de Pearson, m , mesurant le degré de thermo-dépendance de la viscosité, l'exposant, n , traduisant le comportement non-Newtonien du fluide et enfin le nombre de Rayleigh, Ra , comme moteur de la convection. Il convient d'en dégager les principaux résultats suivants :

- Pour la configuration de chauffage considérée, la convection ne présente pas de seuil d'apparition, puisqu'elle prend naissance à la moindre petite valeur de Ra dans la limite des valeurs assignées aux paramètres a , b , m et n ;

- L'écoulement antihoraire, dû au chauffage par le bas, est instable car il ne peut se manifester que pour les faibles proportions du chauffage horizontal ($0 < a < 0.4$).

- Le transfert de chaleur global présente un caractère singulier au voisinage d'une valeur critique $b_c < 1$, à cause de l'égalisation des températures locales des parois horizontales.

- La thermo-dépendance brise la symétrie des champs d'écoulement et de température et encourage, par voie de conséquence, la formation d'une région presque morte et d'une sous-couche rhéologique où la convection est confinée, dont l'emplacement dépend des paramètres gouvernants ;

- La thermo-dépendance intensifie l'écoulement, dans la sous-couche rhéologique, et réduit le transfert de chaleur ;

- L'effet de m dépend des effets articulés de a , b , n et Ra .

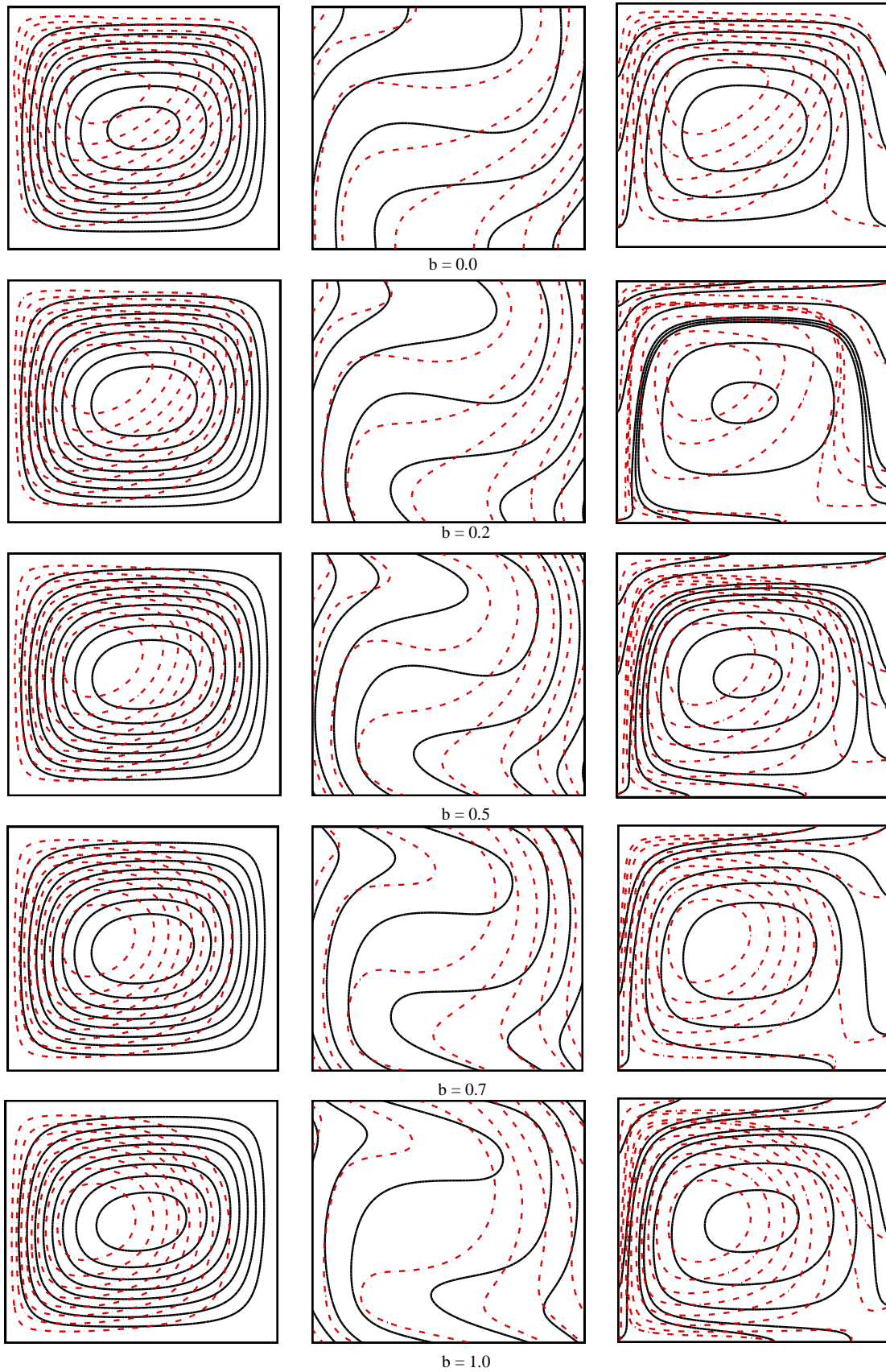


Figure 5.1: Carte d'isovaleurs en fonction de l'intensité de chauffage verticale b , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 0.6$, $Ra = 5 \cdot 10^3$, $a = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).

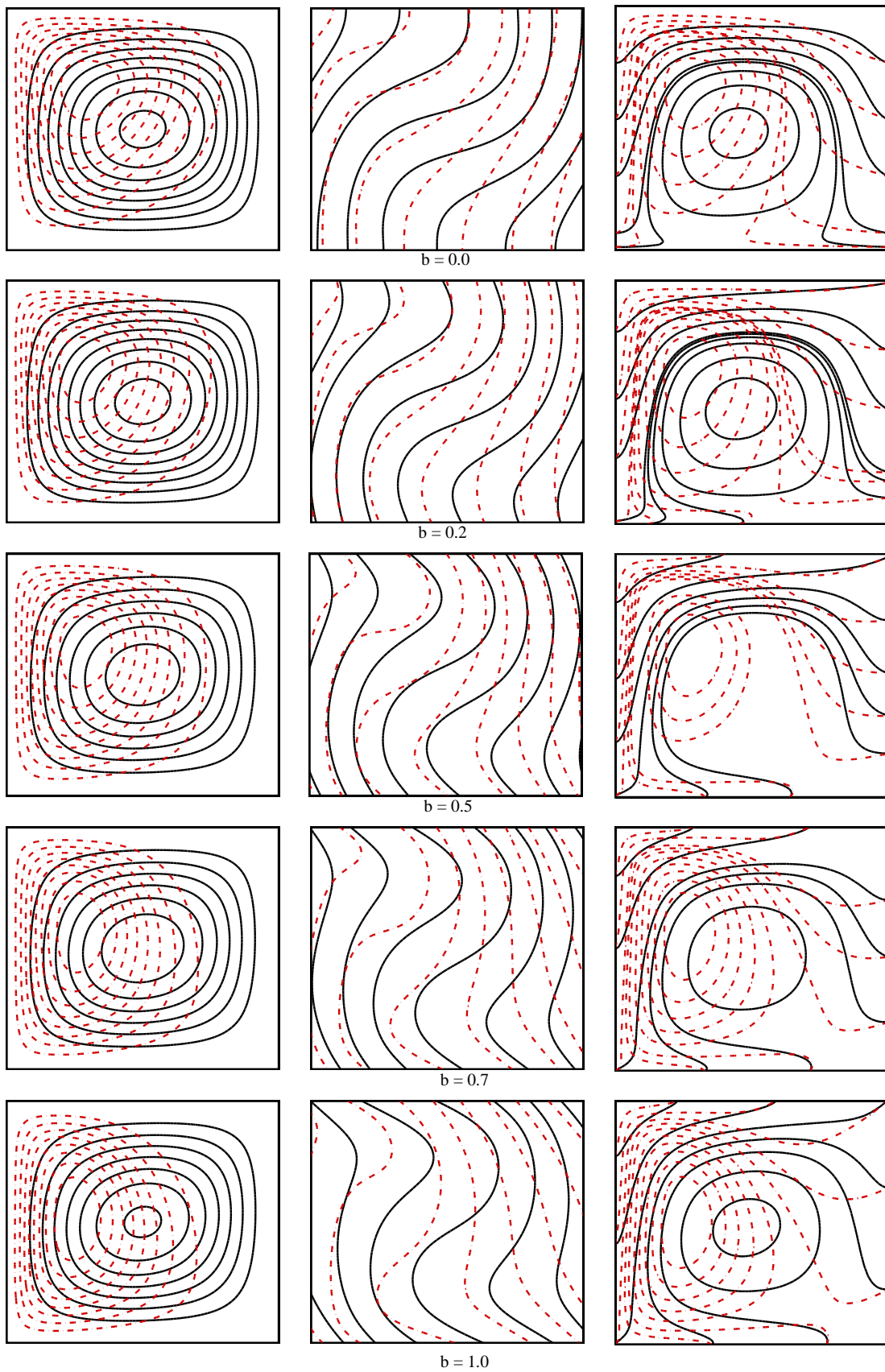


Figure 5.2 Carte d'isovaleurs en fonction de l'intensité de chauffage verticale b , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.0$, $Ra = 5 \cdot 10^3$, $a = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).

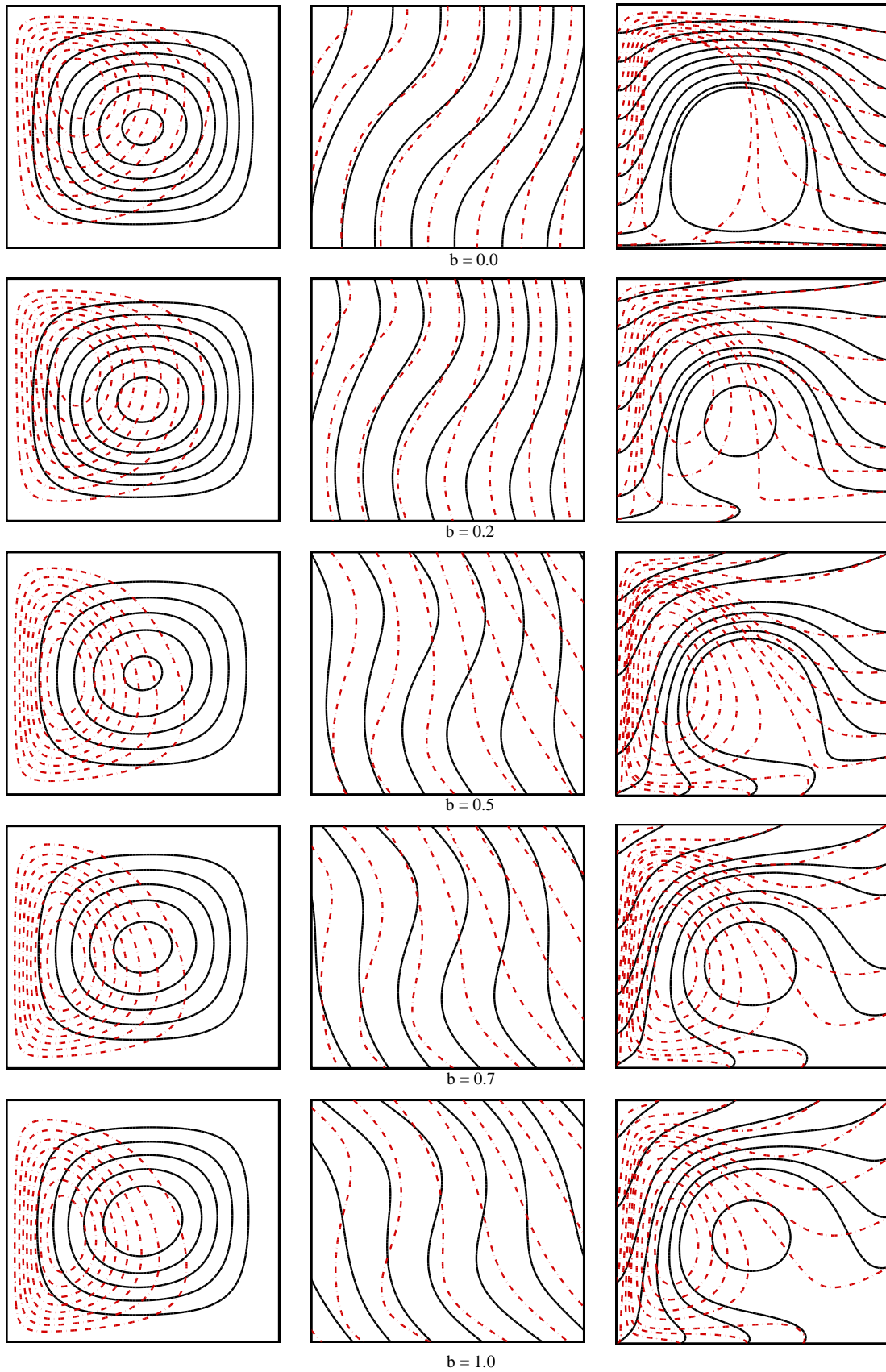


Figure 5.3 Carte d'isovaleurs en fonction de l'intensité de chauffage verticale b , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.4$, $Ra = 5.10^3$, $a = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).

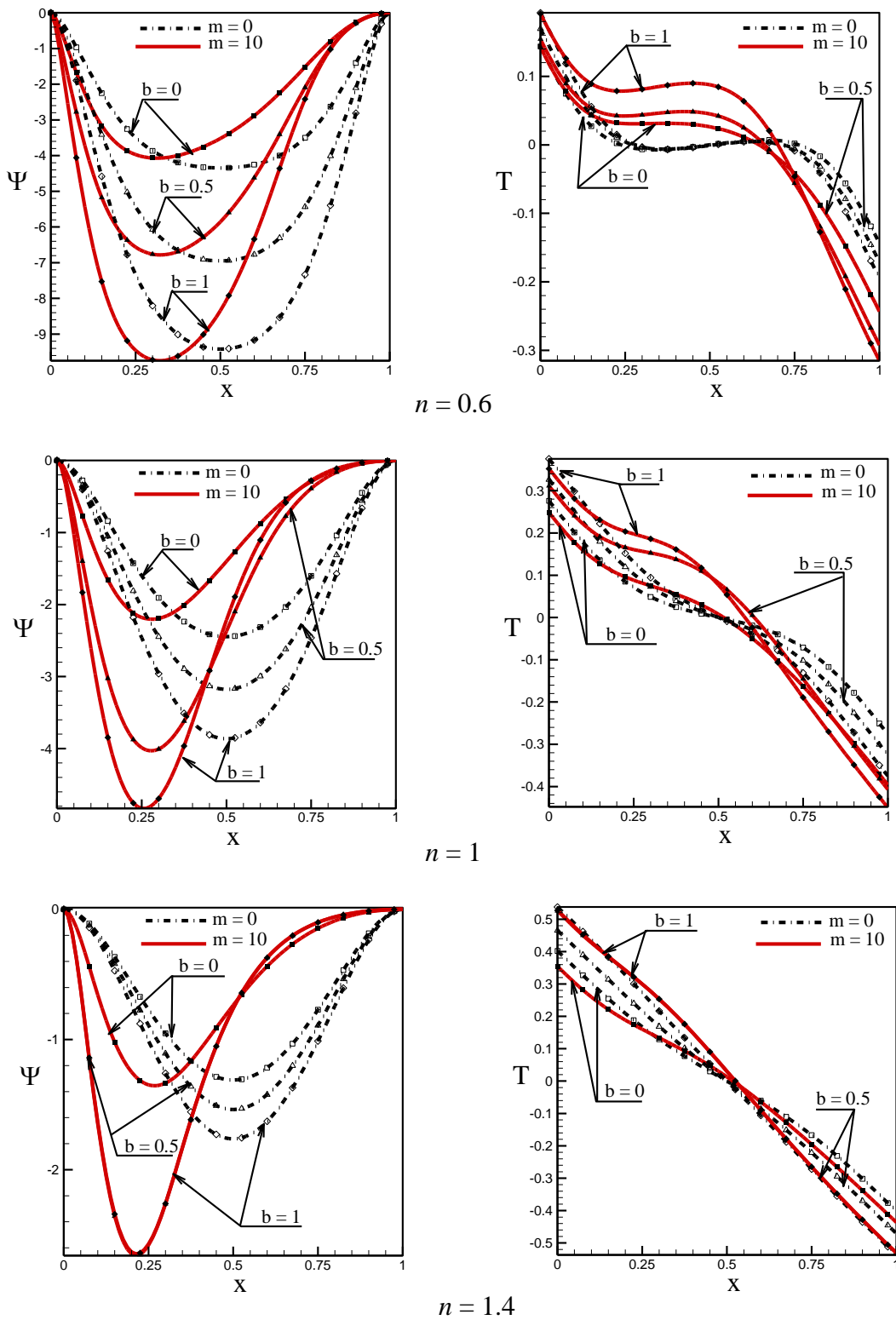


Figure 5.4: Profil de la fonction de courant $\Psi(x, y=1/2)$ (à gauche) et de la température $T(x, y=1/2)$ (à droite) pour $Ra = 5 \cdot 10^3$, $a = 1$ et différents valeurs de b , n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).

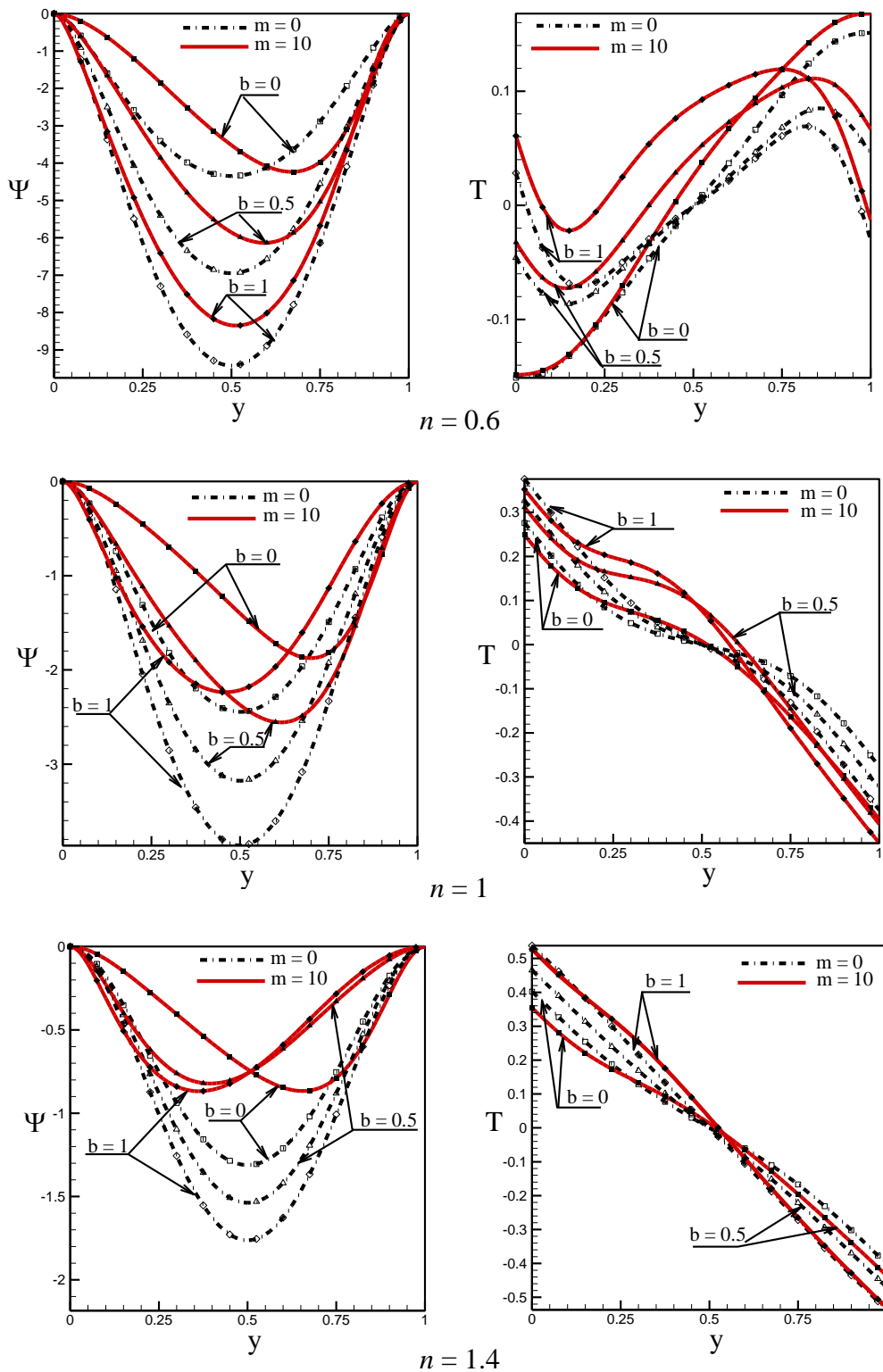


Figure 5.5: Profil de la fonction de courant $\Psi(x=1/2, y)$ (à gauche) et de la température $T(x=1/2, y)$ (à droite) pour $Ra = 5.10^3$, $a = 1$ et différents valeurs de b , n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).

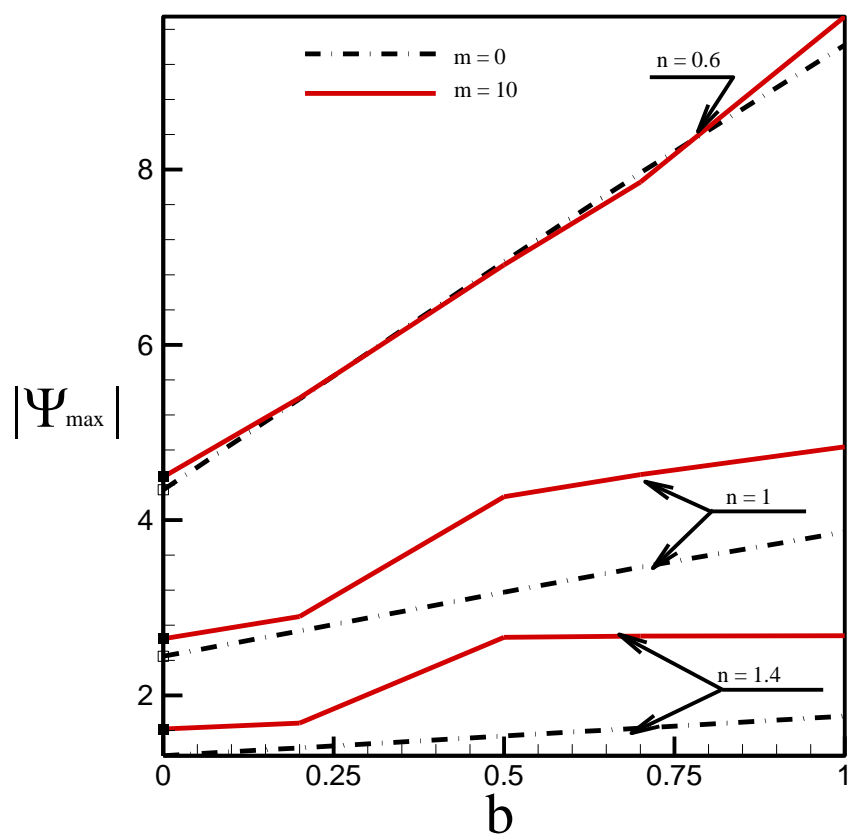
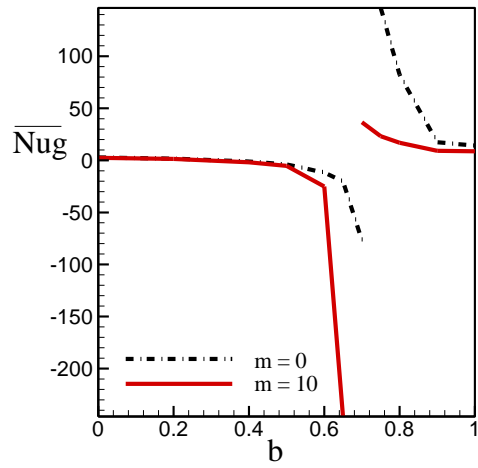
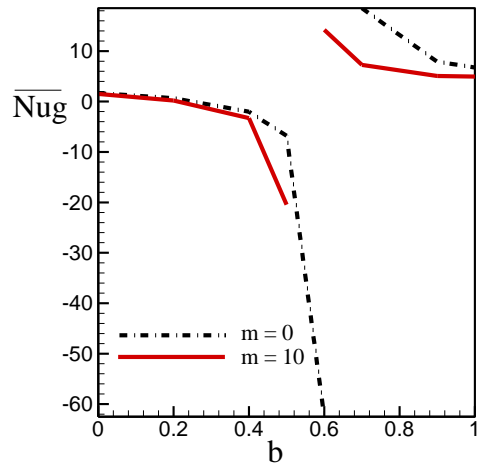


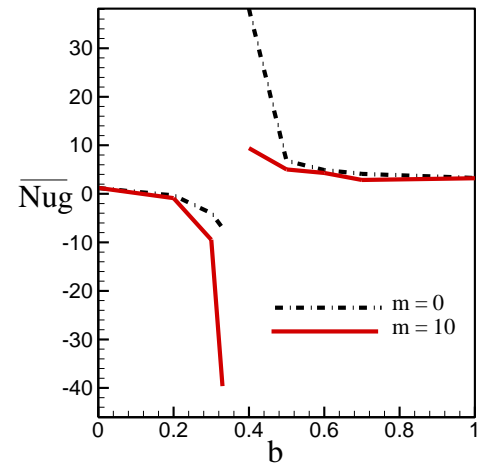
Figure 5.6: Evolution de l'intensité d'écoulement $|\psi_{\max}|$ en fonction de b pour $Ra = 5.10^3$, $a = 1$ et plusieurs valeurs de n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).



$n = 0.6$



$n = 1$



$n = 1.4$

Figure 5.7: Evolution du nombre de Nusselt global moyen \overline{Nu}_g en fonction de b pour $Ra = 5.10^3$, $a = 1$ et plusieurs valeurs de n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).

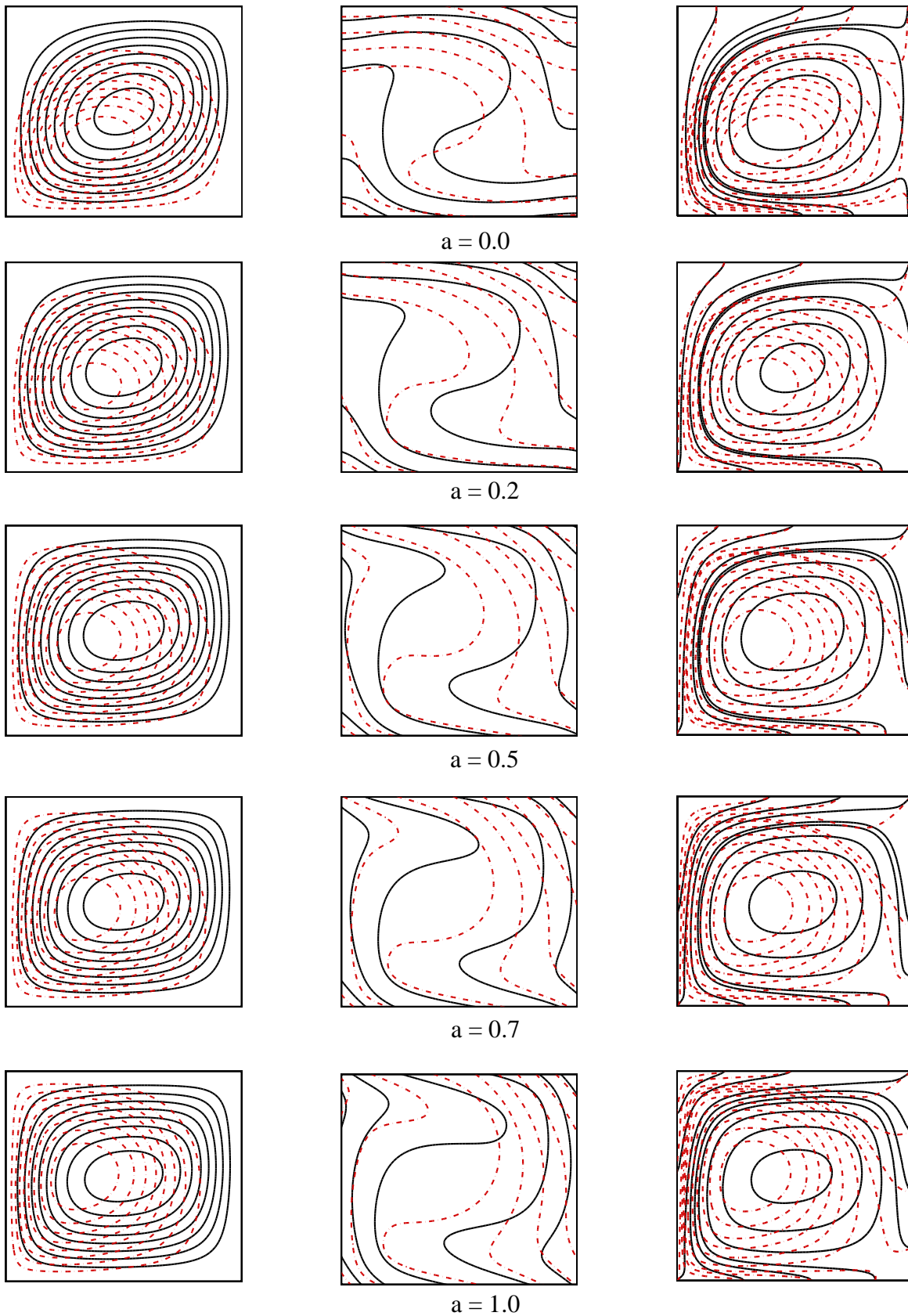


Figure 5.8: Carte d'isovaleurs en fonction de l'intensité de chauffage horizontal a , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 0.6$, $Ra = 5 \cdot 10^3$, $b = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).

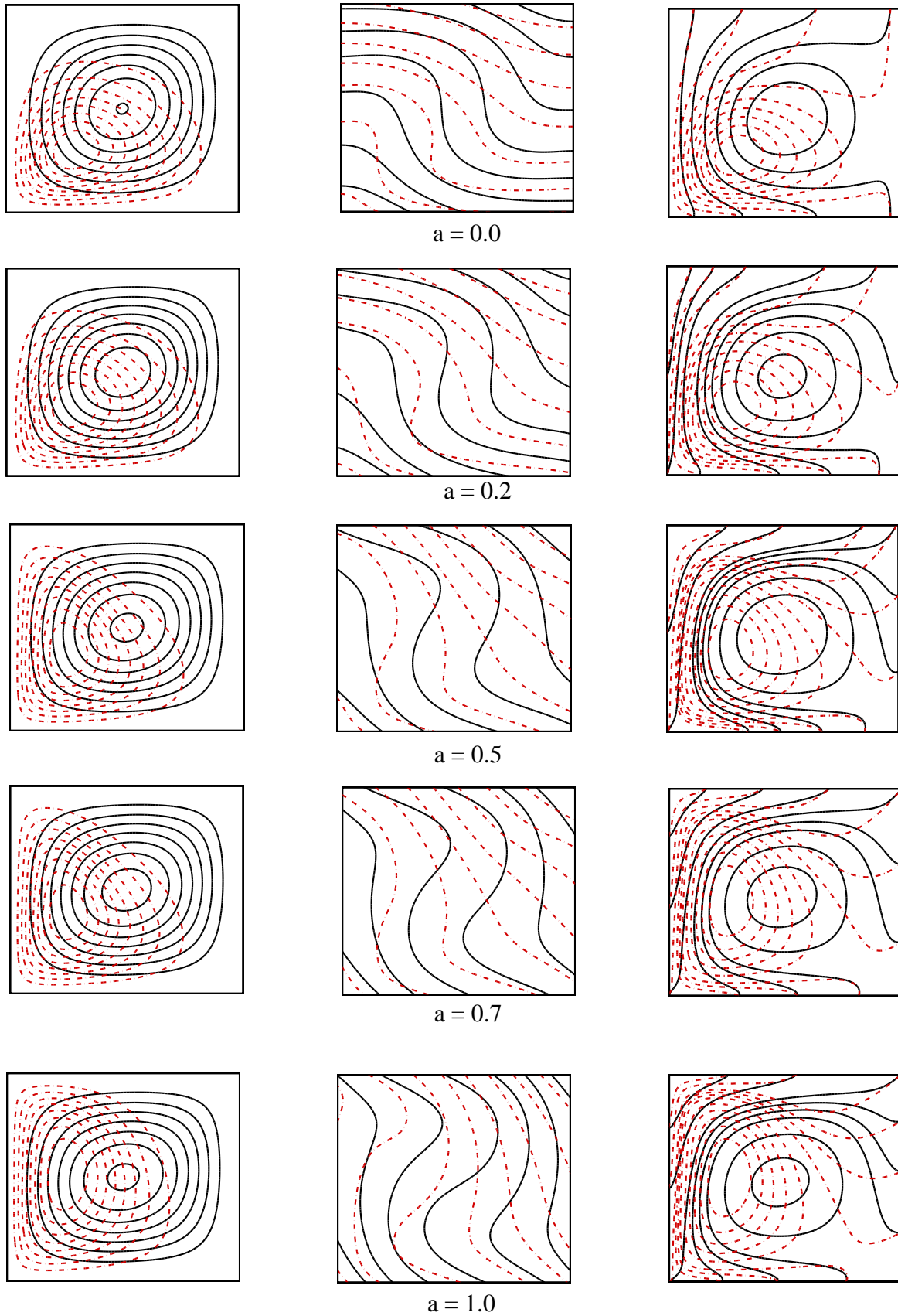


Figure 5.9: Carte d'isovaleurs en fonction de l'intensité de chauffage horizontale a , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.0$, $Ra = 5.10^3$, $b = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).

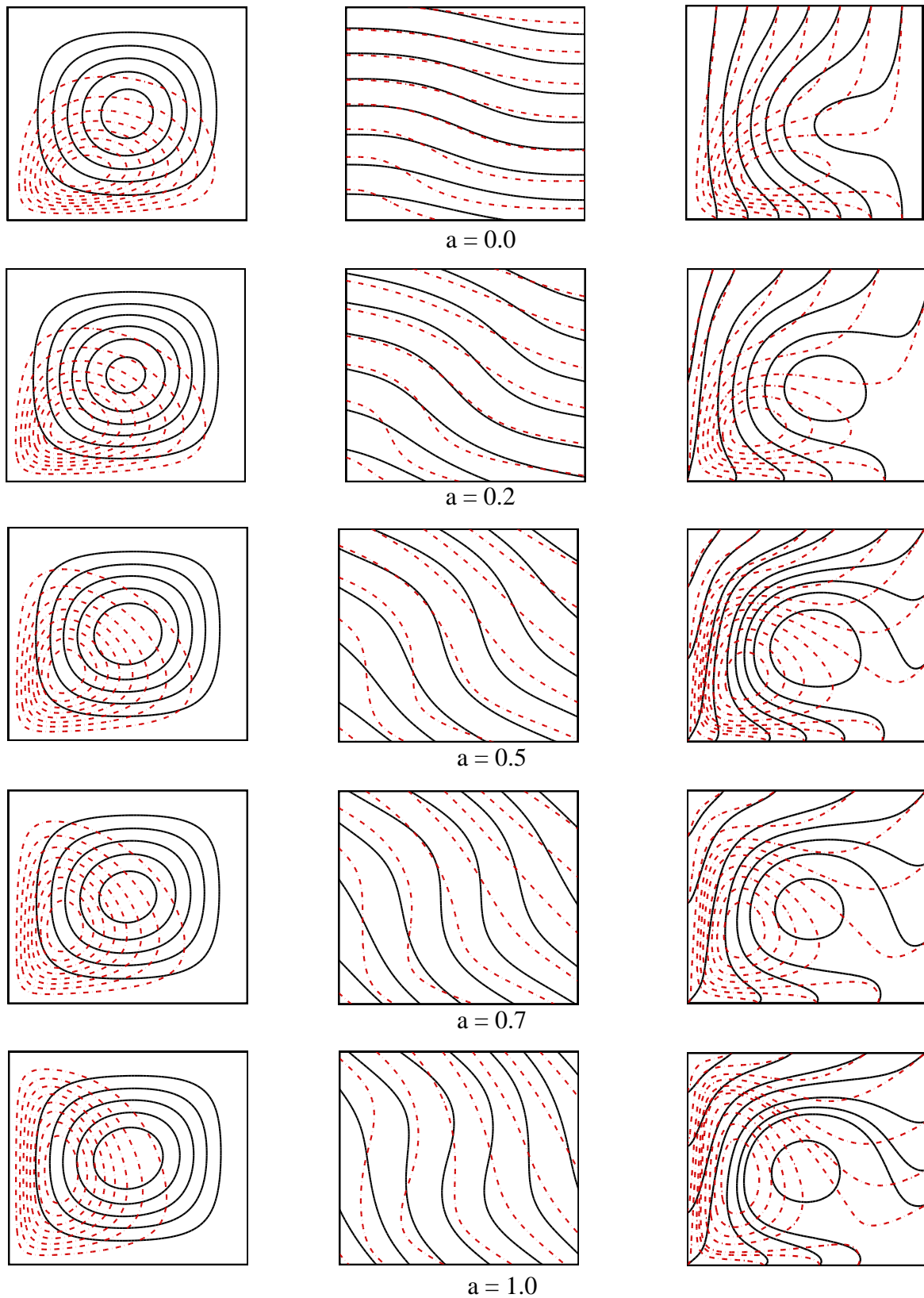


Figure 5.10: Carte d'isovaleurs en fonction de l'intensité de chauffage horizontale a , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.4$, $Ra = 5 \cdot 10^3$, $b = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).

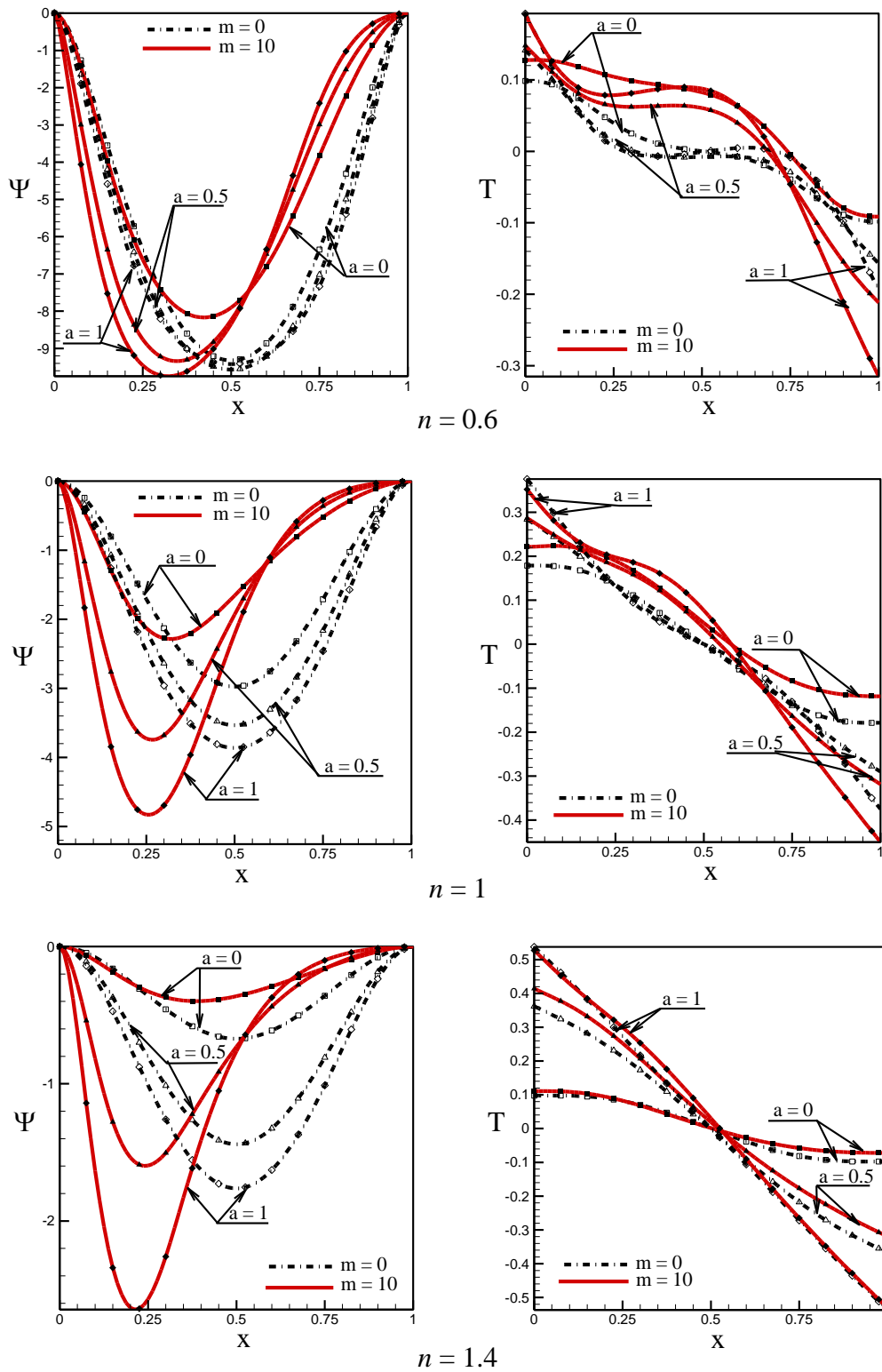


Figure 5.11: Profil de la fonction de courant $\Psi(x, y=1/2)$ (à gauche) et de la température $T(x, y=1/2)$ (à droite) pour $Ra = 5 \cdot 10^3$, $b = 1$ et différents valeurs de a , n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).

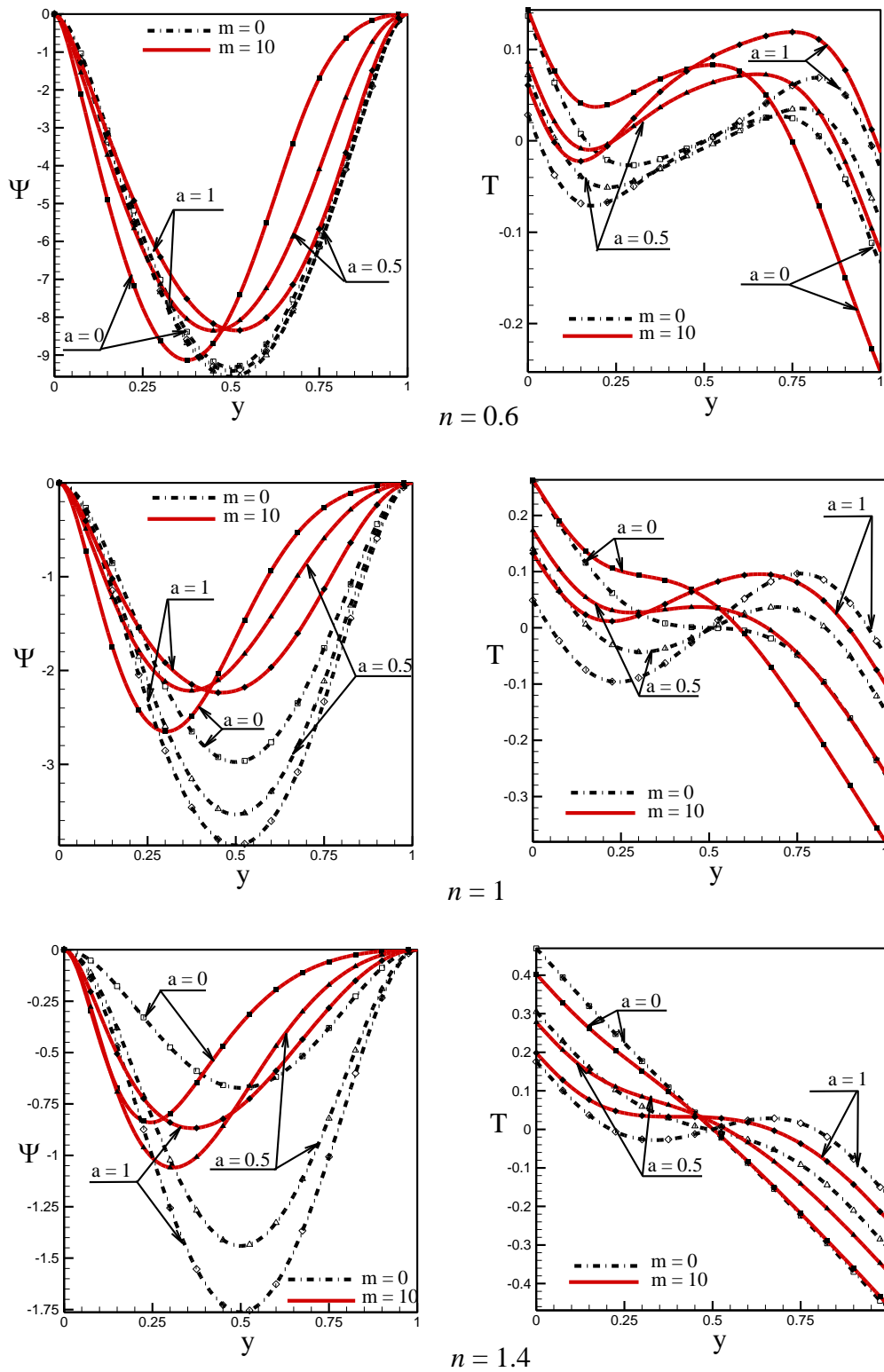


Figure 5.12: Profil de la fonction de courant $\Psi(x=1/2, y)$ (à gauche) et de la température $T(x=1/2, y)$ (à droite) pour $Ra = 5 \cdot 10^3$, $b = 1$ et différents valeurs de a , n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).

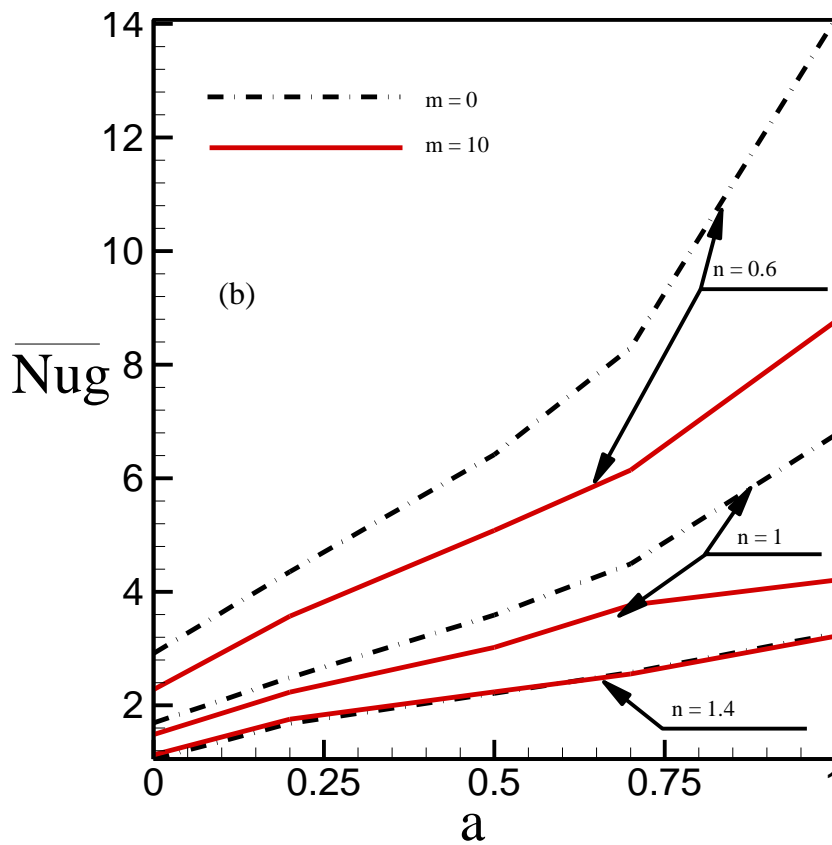
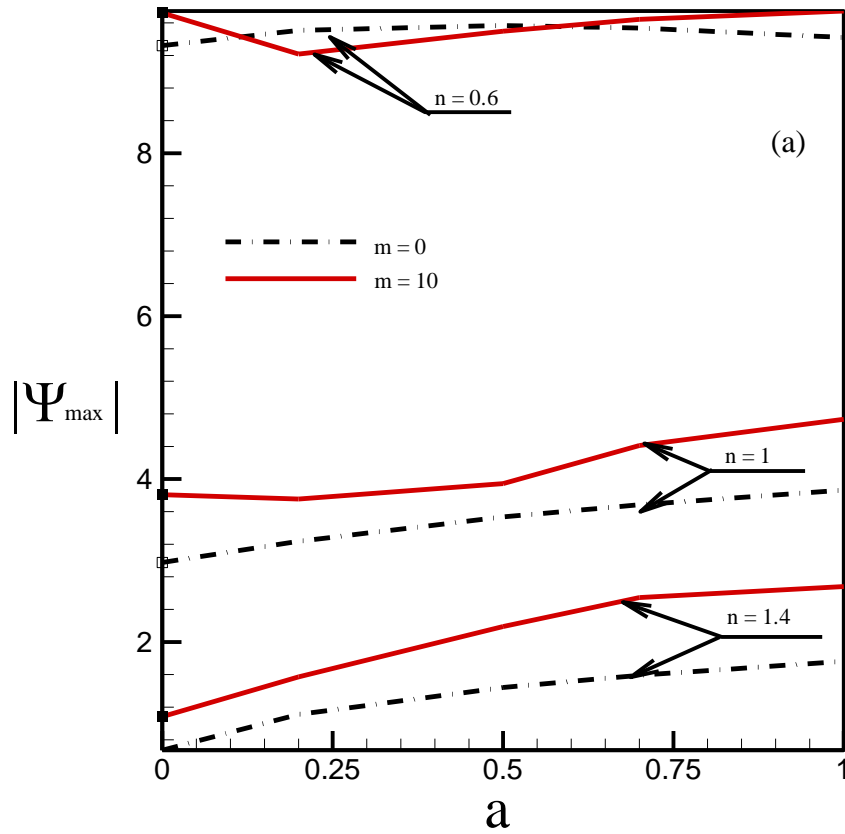


Figure 5.13: Evolution de l'intensité d'écoulement $|\psi_{\max}|$, (a), et du nombre de Nusselt global moyen \overline{Nu}_g , (b), en fonction de a pour $Ra = 5 \cdot 10^3$, $b = 1$ et plusieurs valeurs de n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).

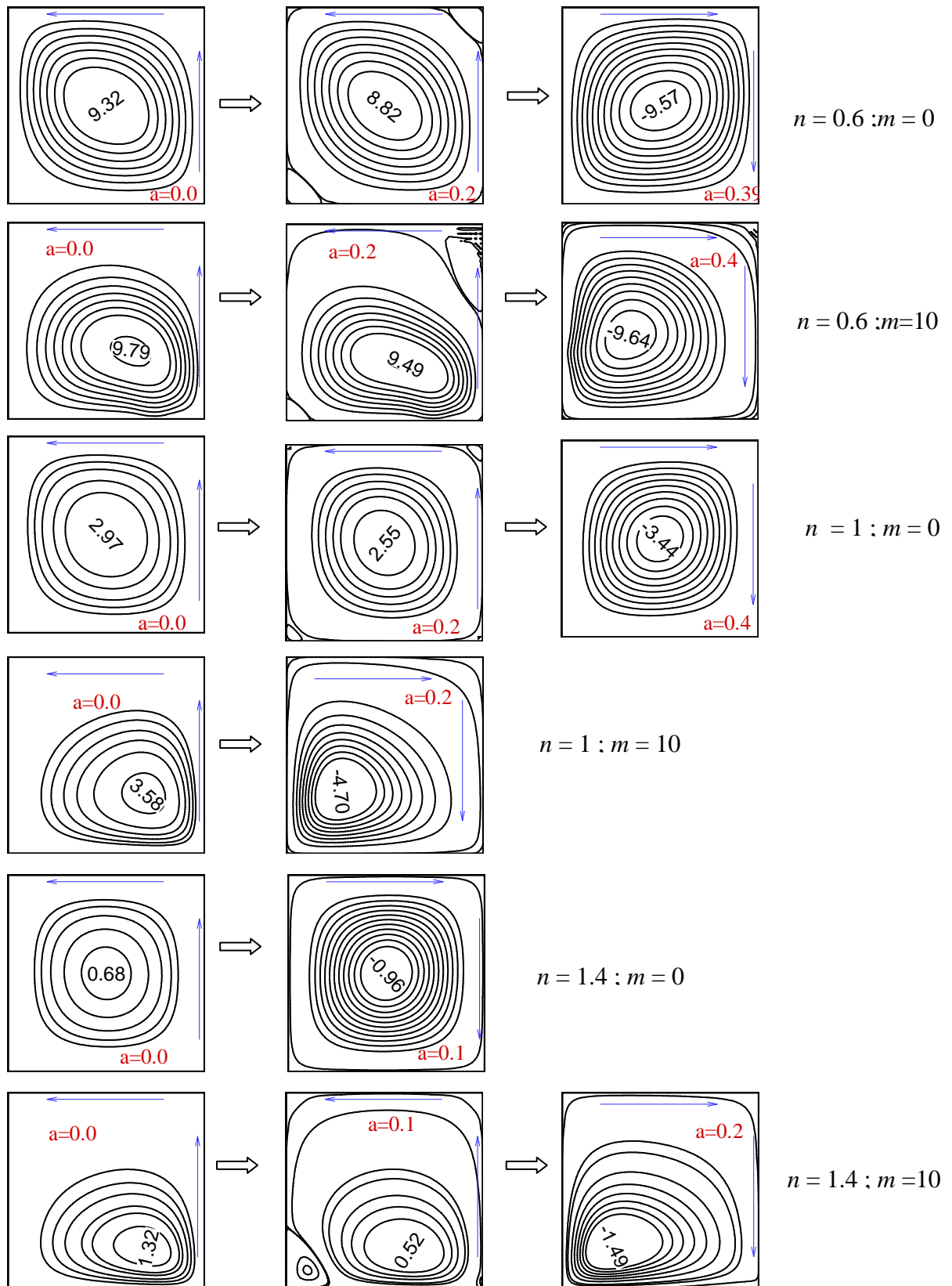


Figure 5.14: Influence de a sur la structure de l'écoulement pour le cas initié par un écoulement antihoraire, pour $b = 1$, $Ra = 5 \cdot 10^3$ et différents valeurs de n et de m .

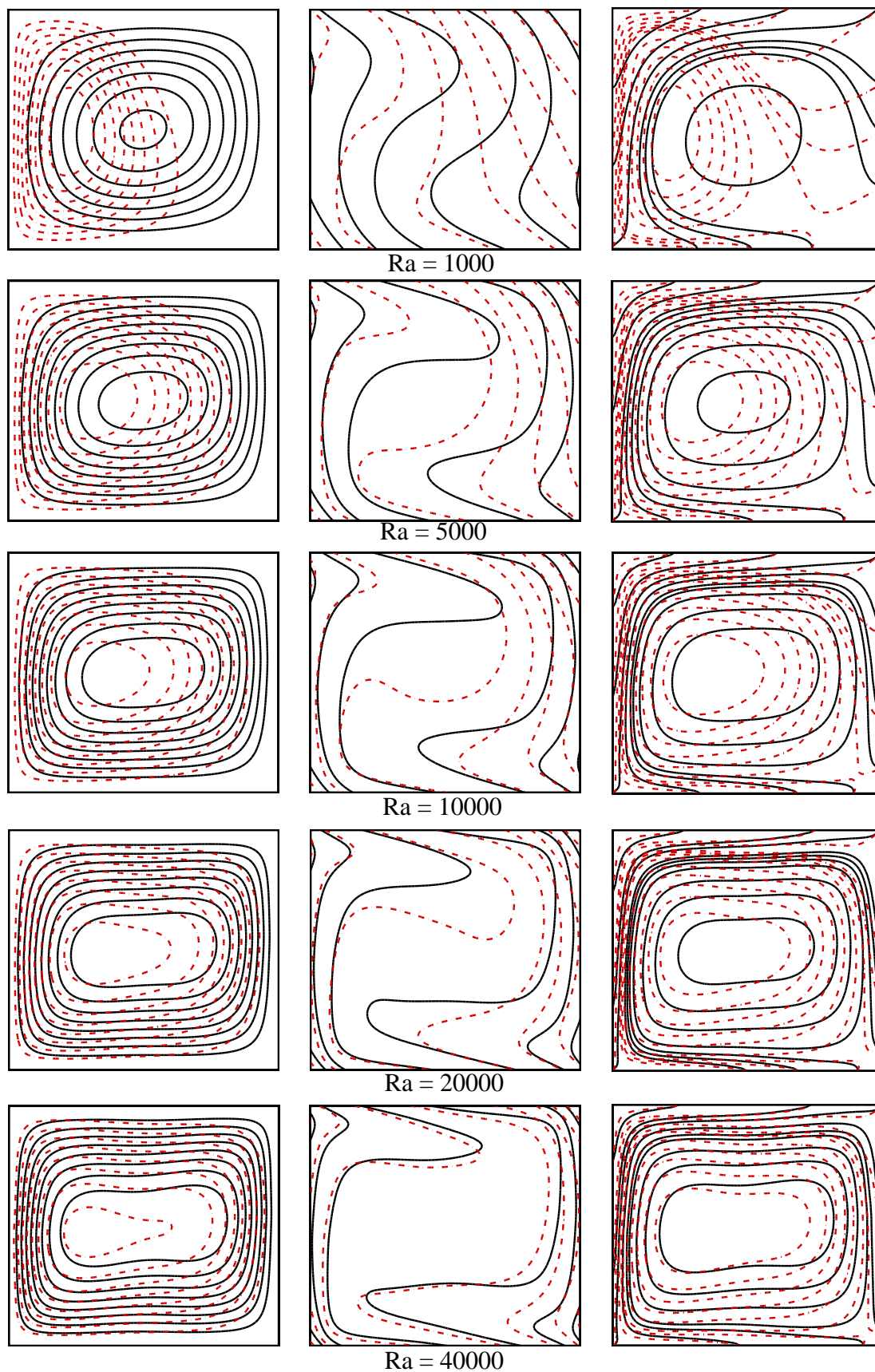


Figure 5.15: Carte d'isovaleurs en fonction de Ra , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 0.6$, $a = 1$, $b = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).

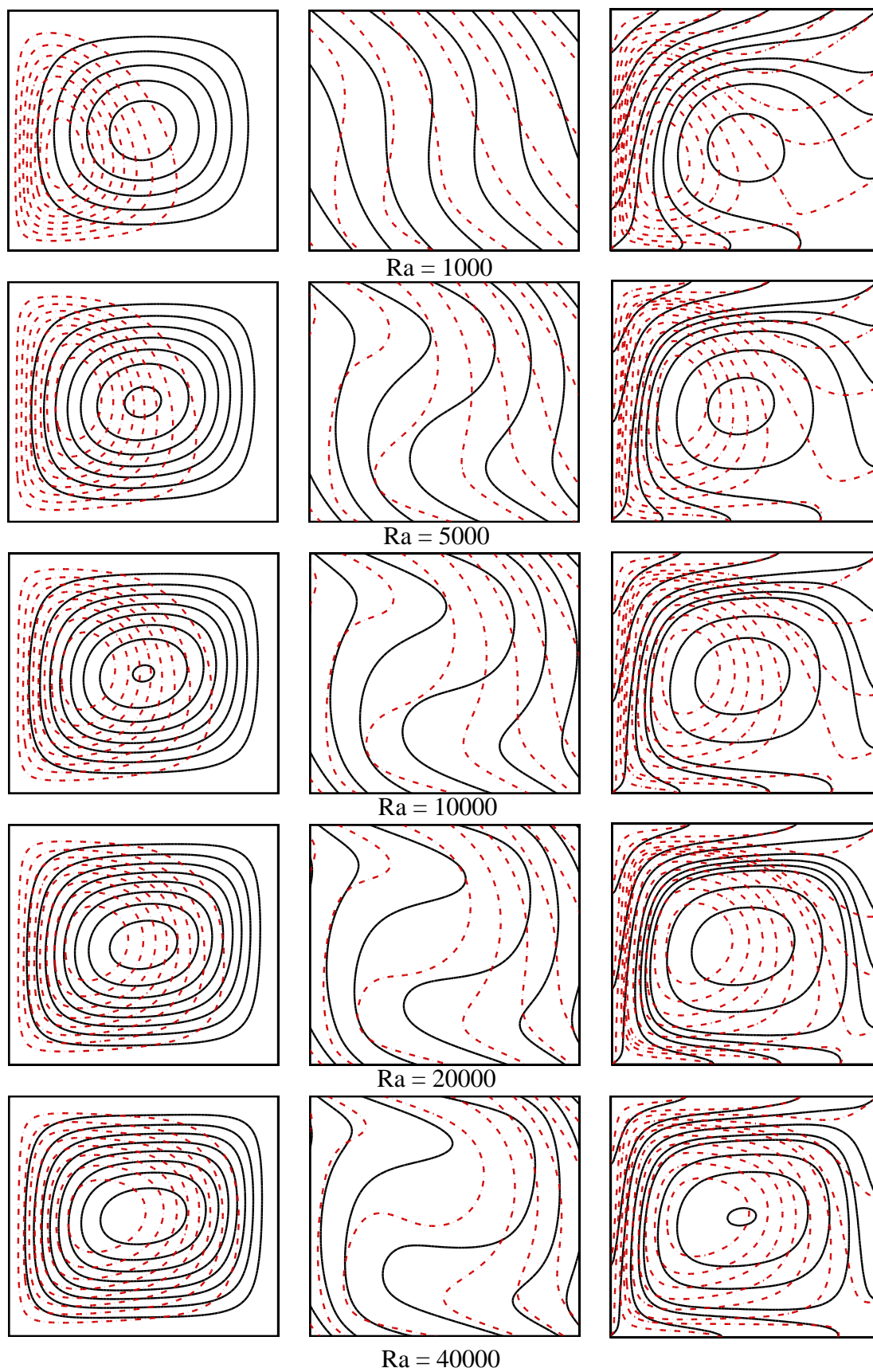


Figure 5.16: Carte d'isovaleurs en fonction de Ra , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.0$, $a = 1$, $b = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).

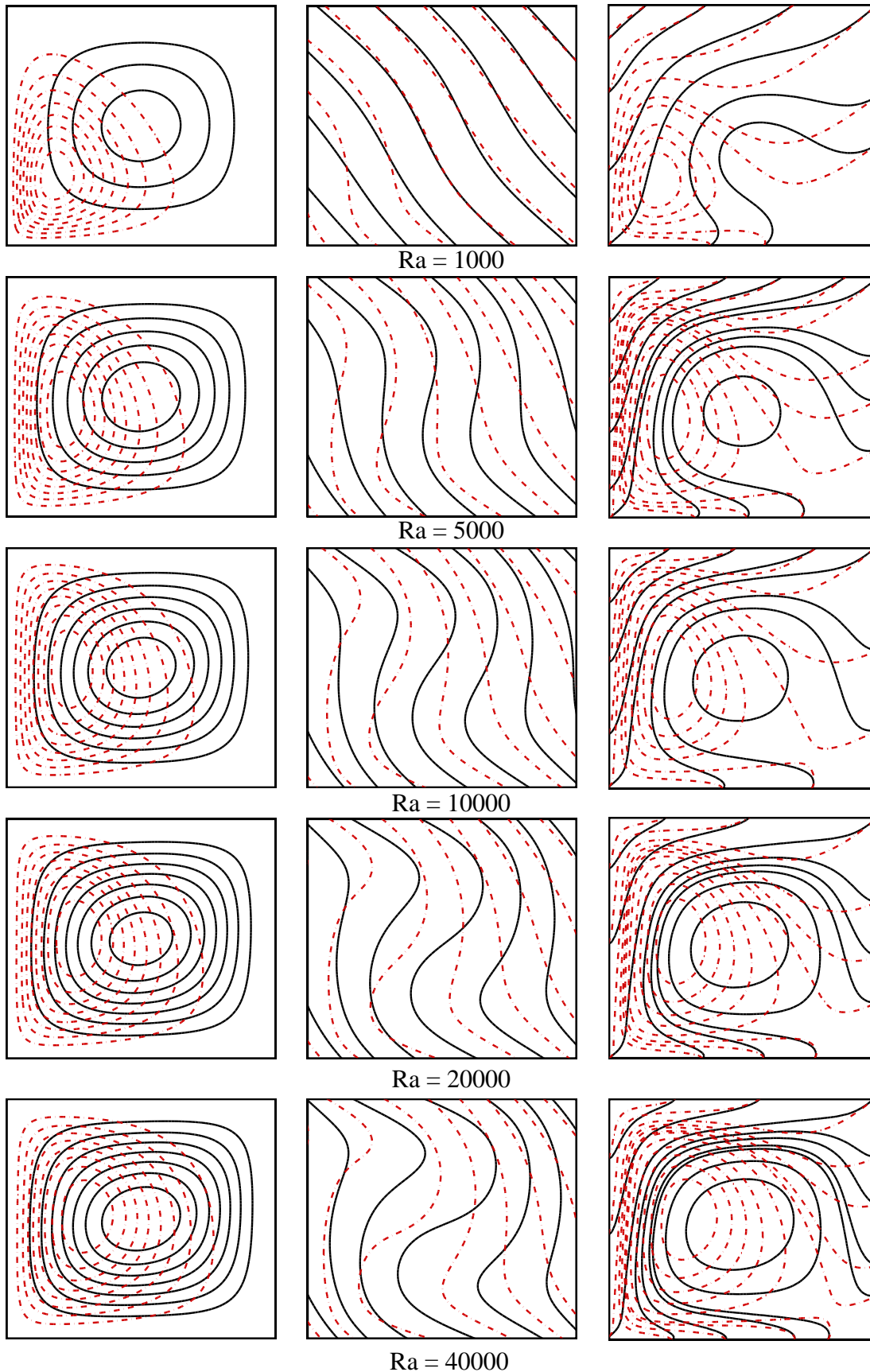


Figure 5.17: Carte d'isovaleurs en fonction de Ra , isocourant (gauche), isotherme (milieu) et lignes de flux de chaleur (droite) pour $n = 1.4$, $a = 1$, $b = 1$, $m = 0$ (traits continus noirs) et $m = 10$ (traits interrompus rouges).

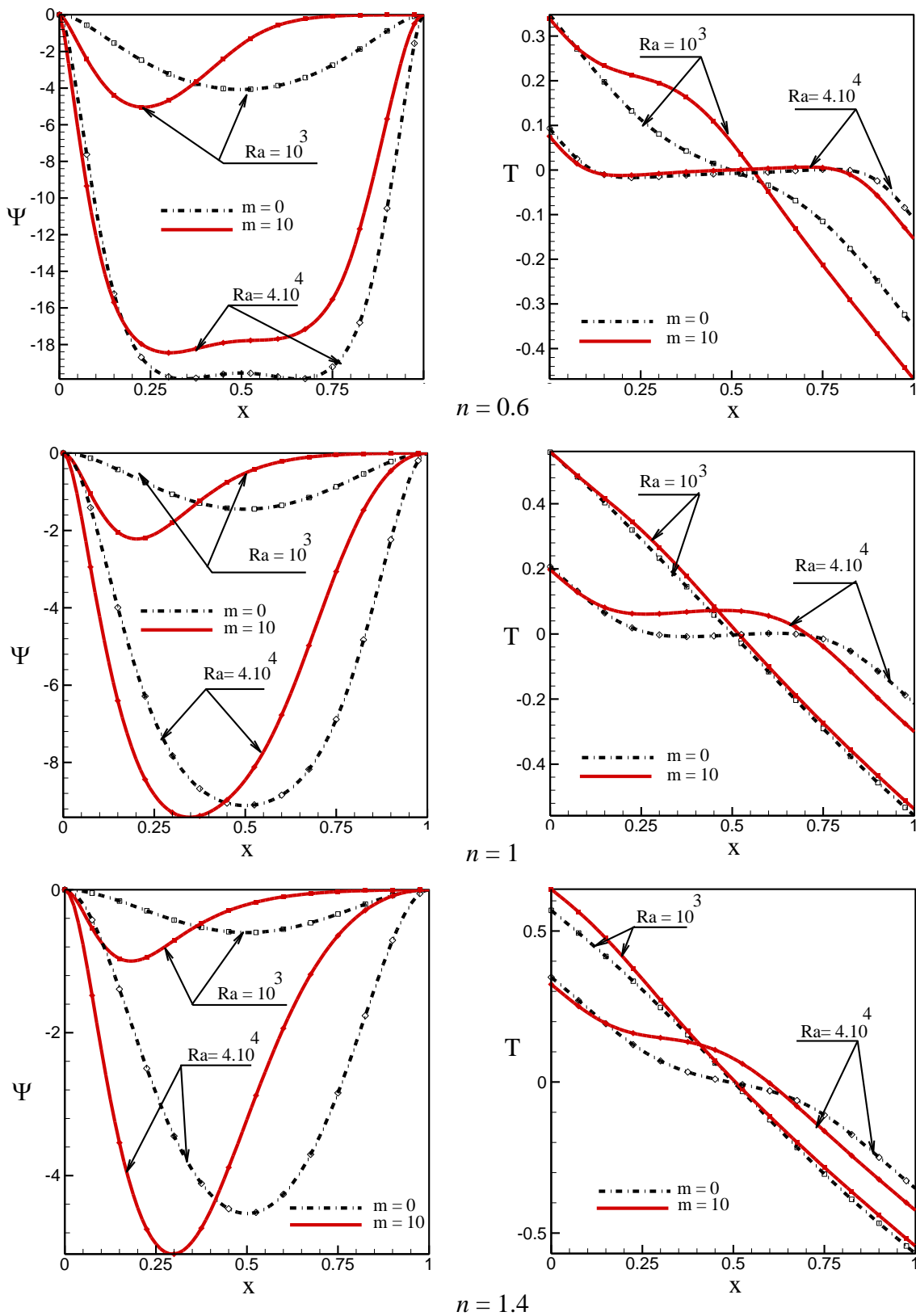


Figure 5.18: Profil de la fonction de courant $\Psi(x, y = 1/2)$ (à gauche) et de la température $T(x, y = 1/2)$ (à droite) pour $a = 1, b = 1$ et différents valeurs de Ra, n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).

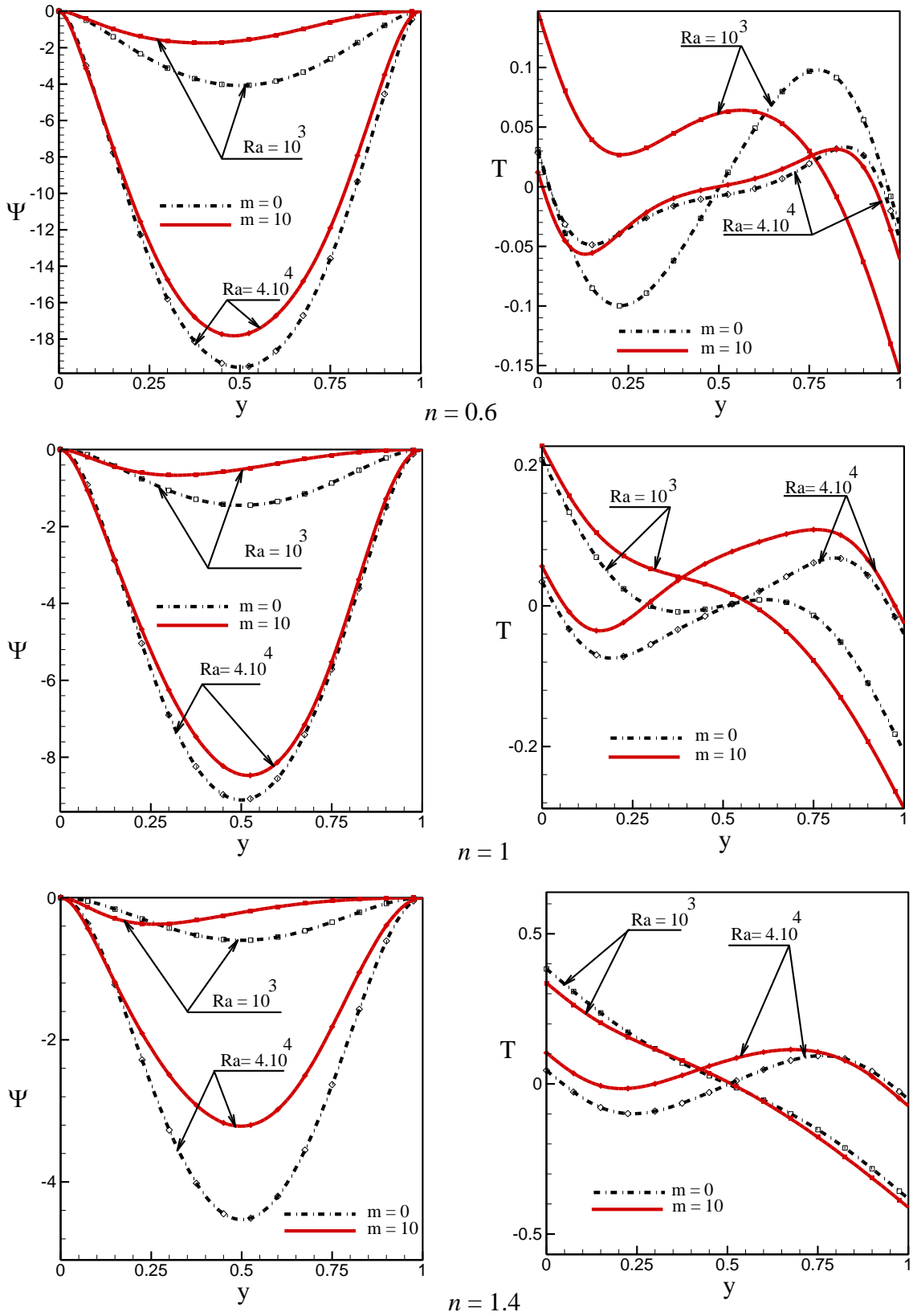


Figure 5.19: Profil de la fonction de courant $\Psi(x=1/2, y)$ (à gauche) et de la température $T(x=1/2, y)$ (à droite) pour $a = 1, b = 1$ et différents valeurs de Ra, n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).

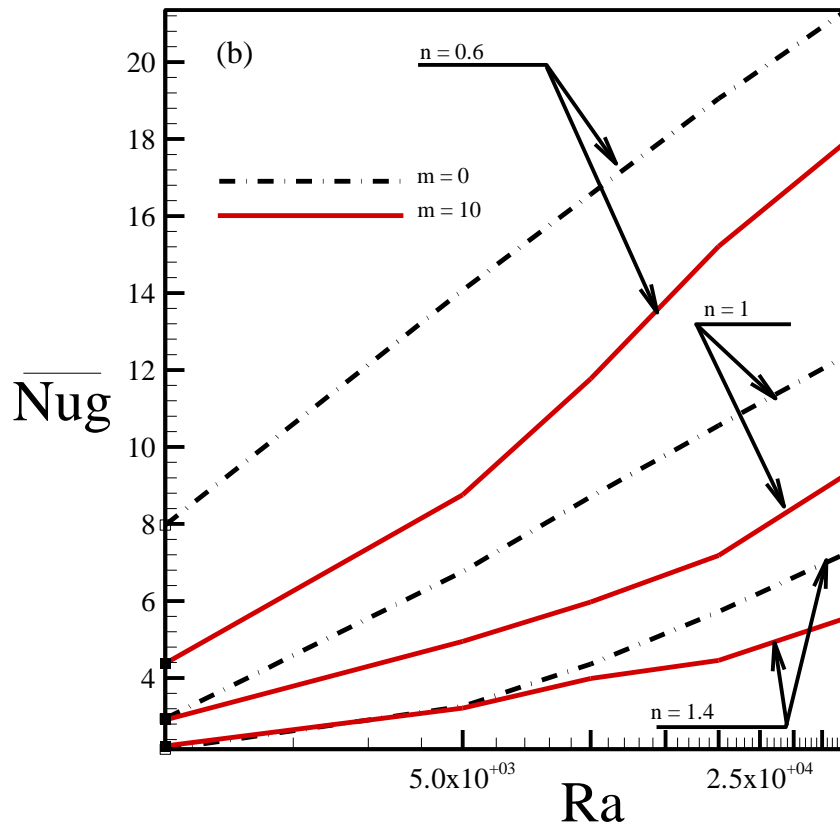
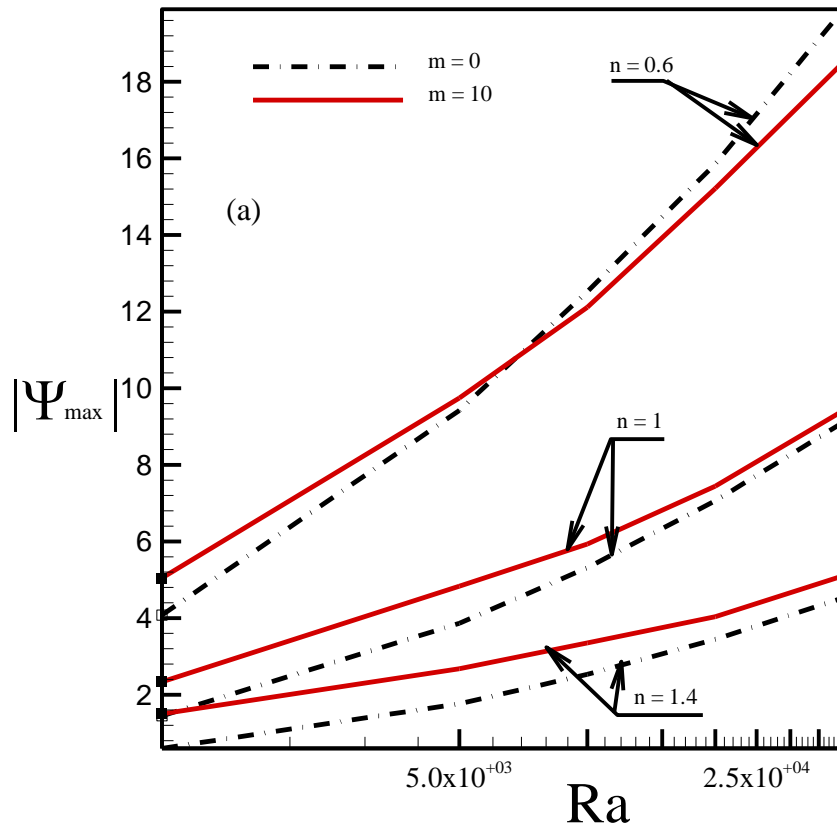


Figure 5.20: Evolution de l'intensité d'écoulement $|\psi_{\max}|$, (a), et du nombre de Nusselt global moyen \overline{Nu}_g , (b), en fonction de Ra pour $a = 1$, $b = 1$ et plusieurs valeurs de n et m . $m = 0$. (lignes interrompues noires) et $m = 10$. (lignes continues rouges).

CONCLUSION GENERALE

Au cours de ce travail de thèse sont étudiés les écoulements et les transferts de chaleur par convection naturelle au sein d'une cavité carrée occupée par des fluides non-Newtoniens. Ces derniers sont choisis à comportement rhéologique pouvant être du type pseudo-plastique (rhéofluidifiant) ou dilatant (rhéoépaississant) et affichant une dépendance de leur viscosité vis-à-vis de la température (thermo-dépendance). Pour exprimer de telles tendances comportementales, un modèle thermo-rhéologique combinant la loi puissance d'Ostwald-De Waele (traduisant les variations de la viscosité avec la vitesse de déformation) et celle, exponentielle, de Frank-Kamenetski-Reynolds (traduisant les variations de la viscosité avec la température) est adopté. La convection est initiée en imposant des densités de flux de chaleur uniformes aux frontières rigides et imperméables de l'enceinte (conditions aux limites de type Neuman). Dans ces conditions, trois situations sont examinées selon que la géométrie est chauffée horizontalement, verticalement ou dans les deux directions (densités de flux croisées). Moyennant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices (approximation de Boussinesq, bidimensionnalité de l'écoulement, ...) et en prenant en compte le modèle thermo-rhéologique évoqué ci-dessus, les équations régissant la convection thermique sont adimensionnalisées et écrites en formulation de variables secondaires (fonction de courant-vorticité) dans un système de coordonnées cartésiennes, étant donnée la nature de la géométrie. Par ailleurs, la forte non linéarité des équations gouvernantes et le confinement géométrique font que seule la simulation numérique peut déterminer les transferts thermo-convectifs. C'est ainsi qu'un code numérique préexistant, basé sur l'approche aux différences finies centrées au second ordre, est adapté au problème considéré et validé en comparant les résultats avec des travaux disponibles dans la littérature. De l'analyse dimensionnelle du problème sont

dégagées des grandeurs adimensionnelles susceptibles de le gouverner. Ce sont les intensités des densités de flux de chaleur horizontale, a , et verticale, b , le nombre de Pearson pour la thermo-dépendance, m , l'indice de comportement rhéologique ou d'écoulement, n , le nombre de Prandtl généralisé, Pr , et celui de Rayleigh, Ra . Toutefois, bien que la grandeur Pr soit écartée de l'étude pour son rôle inexistant, dû à sa grande valeur très élevée pour les fluides considérés, les autres restent en grand nombre pour rendre tout à fait compliquées l'organisation et l'analyse des situations en présence. En dépit de ceci, un effort est consenti pour une présentation, la plus claire possible, des résultats obtenus. Finalement, l'écoulement et le transfert de chaleur sont analysés en fonction des valeurs des paramètres adimensionnels susmentionnés et on peut résumer ce qu'il en ressort dans ce qui suit.

- En général, une augmentation de n défavorise la convection thermique, alors qu'une diminution de ce paramètre conduit à l'effet opposé. De ce fait, les fluides pseudo-plastique ($n < 1$) s'annoncent favorables aux transferts thermo-convectifs contrairement à ceux dilatants ($n > 1$), comme cela a été observé pour la convection en général (interne, externe, libre, forcée ou mixte) dans de tels milieux.

- Le comportement thermo-dépendant des fluides considérés divise l'écoulement, à travers les variations de la viscosité avec la température, en deux régions dont l'une, appelée sous-couche rhéologique, confine la convection et l'autre, dénommée zone morte ou couvercle conducteur selon la configuration de chauffage en présence, où le fluide est presque inerte. Une telle situation physique a pour conséquences une brisure de la symétrie des champs d'écoulement et de température, une intensification de l'écoulement dans la région dynamiquement active (sous-couche rhéologique) et une détérioration du transfert de chaleur. A ce propos, le concept de fonction de flux de chaleur s'avère d'un intérêt évident pour expliquer les raisons de cette dégradation. Nonobstant, ce résultat reste typique à la convection naturelle, puisqu'en

convection forcée, dans une conduite chauffée par les parois, les choses se présentent autrement. En effet, le chauffage pariétal diminue la viscosité et augmente, de ce fait, le gradient de vitesse près de celles-ci, ce qui réduit l'épaisseur de la couche limite thermique et donc la résistance incarnée par celle-ci et amplifie, par voie de conséquence, le transfert de chaleur.

- Lorsque la convection présente un seuil, celui-ci se trouve anticipé en situation de viscosité thermo-dépendante, ce qui démontre le rôle déstabilisant de la thermo-dépendance.

- Les variations de la viscosité avec la température ne peuvent se manifester de façon délibérée, mais doivent composer avec les effets d'inertie, du à la poussée d'Archimède, et ceux du comportement rhéologique, symbolisé par la dépendance de la viscosité des conditions d'écoulement.

Pratiquement parlant, l'étude effectuée projette quelques lumières sur le problème de thermisation des fluides à comportement rhéologique complexe et apporte des éléments nouveaux à ce sujet, ce qui peut donc aider à la compréhension des mécanismes gouvernant la convection thermique dans de tels milieux.

Finalement, comme perspectives, il serait intéressant d'examiner le cas d'une cavité rectangulaire de grand rapport d'aspect pour tenter de voir comment le comportement thermo-dépendant du fluide peut affecter l'organisation de l'écoulement parallèle et ce, pour différentes dispositions géométriques de la cavité. Aussi, dans un bon nombre de situations physiques, naturelles (géophysiques, ...) ou industrielles (pétrochimiques, ...), la convection thermo-solutale ne présente pas moins d'importance que celle d'origine purement thermique, et il conviendrait, dans ce cas, de procéder à l'extension de la présente étude au cas de la double diffusion avec ou sans effet Soret dans une cavité sujette simultanément à des gradients de température et de concentration.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Agassant, J.-F., Avenas, P. et Sergent, J.-Ph. (1989), La mise en forme des matières plastiques, TEC. Doc.-Lavoisier, Paris.

Amari, B., Vasseur, P. et Bilgen, E. (1994), Natural convection of non-Newtonian fluids in a horizontal porous layer, *Wärme-und-Stoffübertragung*, 29, 185-193.

Balmforth, N.J. et Provenzale, A. (2001), Geophysical aspects of non-Newtonian fluid mechanics, Springer-Verlag, 582, 34-51.

Batoul, A. (1995), Simulation numérique d'écoulements thermocapillaires en croissance cristalline, Thèse de Doctorat, Université de Paris XI, Orsay, France.

Ben Amara, S. (2005), Ecoulement et transferts thermiques en convection naturelle dans les milieux macro-poreux alimentaires : Application aux réfrigérateurs ménagers, Thèse de Doctorat, Institut National Agronomique Paris-Grignon, France.

Benard, H. (1900), Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Générale Des Sciences Pures Et Appliquées*, 11, 1261–1271.

Bian, W., Vasseur, P. et Bilgen, E. (1994), Natural convection of non-Newtonian fluids in an Inclined porous layer, *Chem. Eng. Comm.*, 129, 79-97.

Booker, J.R. (1976), Thermal convection with strongly temperature dependent viscosity, *J. Fluid Mech*, 76, 741–754.

Busse, F.H. (1967), The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle, *J. Fluid Mech.*, 30, 625-649.

Busse, F.H. et Frick, H. (1985), Square-pattern convection in fluids with strongly temperature-dependent viscosity, *Journal of Fluid Mechanics*, 150, 451-465.

Cardon, X. (1989), Etude expérimentale de la convection naturelle au sein d'une cavité rectangulaire, dans un fluide de type Ostwald-de-Waele à propriétés thermo-dépendantes, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, France.

Carey, V. P. et Mollendorf, J. C. (1978), Natural convection in liquids with temperature dependent viscosity, *Proc. 6th Int. Heat Transfer Con& Toronto*, Hemisphere, Washington, DC., 2, 211-217.

Christensen, U.R. (1984), Heat transport by variable viscosity convection and implications for the Earth's thermal evolution, *Phys. Earth Planet. Int.*, 35, 264-282.

Cotter, A. et Charles, E. (1993), Transient cooling of petroleum by natural convection in cylindrical storage tanks: 1-Development and testing of a numerical simulator, *Int. J. Heat Mass Transfer.*, 36, 2165-2174.

Couarraze, G. et Grossiord, J.L. (1991), Initiation à la rhéologie, TEC. Doc.-Lavoisier.

Davaille, A. et Jaupart, C. (1993), Transient high-Rayleigh-number thermal convection with large viscosity variations, *J. Fluid Mech.*, 253, 141-166.

De Vahl Davis, G. (1983), Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution, *Int. J. Num. Method Fluids.*, 3, 249-264.

Deschamps, F. (1997), Convection de Rayleigh-Bénard à viscosité variable. Applications géophysiques et planétologiques, Thèse de Doctorat, Université de PARIS XI, France.

Dumuloin, C., Doin, M.P. et Fleitout, L. (1999), Heat transport in stagnant lid convection with temperature and pressure dependent Newtonian or non-Newtonian rheology, *J. Geophys. Res.* 104, 12759–12777.

Essafi, S. (1995), Etude du panache issu d'un câble chauffant horizontal : Application de la prévention du gel dans les vignobles, Thèse de Doctorat, Université de Reims, France.

Foster, T.D. (1969), Convection in a variable viscosity fluid heated from within, *J. Geophys. Res.*, 74, 685-693.

Fowler, A.C. (1985), Fast thermo-viscous convection, *Stud. Appl. Math.*, 72, 189-219.

Frankel, S.P. (1950), Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations, *Math. Tables aids compt.*, 4, 65-75.

Frick, H., Busse, F.H. et Clever, R.M. (1983), Steady three-dimensional convection at high Prandtl numbers, *J. Fluid Mech.*, 127, 141-153.

Gebhart, Y., Jaluria, R.L., Mahajan, et Sammakia, B. (1988), Buoyancy-Induced Flows and Transport, Hemisphere, Washington, Chapter 16, 857-890.

Giannandrea, E. et Christensen, U. (1993), Variable viscosity convection experiments with a stress free upper boundary and implications for the heat transport in the Earth's mantle, *Phys. Earth Planet. Int.*, 78, 139-152.

Gray, D.D. et Giorgini, A. (1976), The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 545-551.

Hyun, J. M. et Lee, J. W. (1988), Transient natural convection in a square cavity of a fluid with temperature-dependent viscosity, *Int. J. Heat Fluid Flow.*, 9, 278-285.

Inaba, H., Daib, C. et Horibe, A. (2003), Natural convection heat transfer of micro-emulsion phase-change-material slurry in rectangular cavities heated from below and cooled from above, *Int. J. Heat and Mass Transfer.*, 46, 4427-4438.

Jaluria, Y. (2003), Thermal processing of materials: From basic research to engineering, *Journal of Heat Transfer.*, 125, 957-979.

Khezzar, L., Siginer, D. et Vinogradov, I. (2012), Natural convection of power law fluids in inclined cavities, *International Journal of Thermal Sciences.*, 53, 8-17.

Kim, G.B., Hyun, J. M. et Kwak, H.S. (2003), Transient buoyant convection of a power-law non-Newtonian fluid in an enclosure, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46, 3605–3617.

Kimura, S. et Bejan, A. (1983), The Heatline Visualization of Convective Heat Transfer, *ASME J. Heat Transfer*, 105, 916–919.

Lamsaadi, M. (2006), Contribution à l'étude numérique et analytique des transferts thermiques par convection naturelle dans les fluides non-Newtonien confines, Thèse de Doctorat Nationale, Université Cadi Ayyad, Faculté des sciences et Techniques, Béni Mellal, Maroc.

Midoux, N. (1993), Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique, TEC. Doc.-Lavoisier.

Moresi, L.-N. et Solomatov, V.S. (1995), Numerical investigation of 2D convection with extremely large viscosity variations, *Phys. Fluids*, 7, 2154-2162.

Naïmi, M. (2001), Contribution a l'étude de l'effet Marangoni thermique dans les fluides non-Newtoniens en conditions de gravite et de microgravité, Thèse de Doctorat d'état, Université Cadi Ayyad, Faculté des sciences Semlalia, Marrakech, Maroc.

Nouar, C. (2005), Thermal convection for a thermo-dependent yield stress fluid in an axisymmetric horizontal duct, *Int. J. heat Mass Transfer*, 48, 5520-5535.

Ogawa, M., Schubert, G. et Zebib, A. (1991), Numerical simulations of three-dimensional thermal convection in a fluid with strongly temperature-dependent viscosity, *J. Fluid Mech.*, 233, 299- 328.

Ohta , Mi., Ohta, Mas., Akiyoshi, M. et Obata, E. (2002), A numerical study on natural convective heat transfer of pseudo-plastic fluids in a square cavity, *Num. Heat Transfer, Part A*, 41, 4, 357-372.

Ostrach, S. (1988), Natural Convection in Enclosures, *J. Heat Transfer*, 110, 1175-1190,

Ostwald, W. (1925), *Kolloid z.*, 36, 99-117.

Otero, J., Wittenberg, R.W., Worthing, R.A. et Doering, C.R. (2002), Bounds on Rayleigh-Bénard convection with an imposed heat flux, *J. Fluid Mech.*, 473, 191-199.

Ouertatani, N., Cheikh, N.-B., Beya, B.-B., Lili, T. (2008), Numerical simulation of two dimensional Rayleigh-Bénard convection in an enclosure, *C.R. Mécanique.*, 336, 464–470.

Ozoe, H. et Churchill, S.W. (1972), Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwald-De Waele and Ellis fluids: the development of a numerical solution, *AIChE J.*, 18, 6, 1196-1207.

Palm, E. (1960), On the tendency towards hexagonal cells in steady convection. *J. Fluid Mech.* 8, 183-192.

Piau, J.-M. (1970), Convection naturelle laminaire en régime permanent dans les liquides. Influence des variations des Propriétés Physique avec la Température, C.R.Hebd. Séan, Acad. Science, Paris 271, 935-956.

Piau, J.-M. (1974), Influence des variations des propriétés physiques et de la stratification en convection naturelle, Int. J. Heat Mass Transfer., 17, 416-465.

Prud'homme, M., Hung Nguyen, T. et Bougherara, H. (2003), Stability of convection flow in a horizontal layer heated by uniform heat fluxes, Int. Comm. Heat ass Transfer, 30, 2, 163-172.

Rahman, M. et Sharif, M. A. R. (2003), Numerical study of laminar natural convection in inclined rectangular enclosures of various aspect ratio, Num. Heat Transfer, Part A, 44, 355-373.

Rayleigh, L. (1916), On the convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the underside. Phil. Mag., 32, 529–546.

Richardson, L. et Straughan, B. (1993), A nonlinear energy stability analysis of convection with temperature dependent viscosity, Acta Mechanica., 97, 41-49.

Richter, F.M., (1978), Experiments on the stability of convection rolls in fluids whose viscosity depends on temperature. J. Fluid Mech., 89, 553-560.

Richter, F.M., Nataf, H.C. et Daly, S.F. (1983), Heat transfer and horizontally averaged temperature of convection with large viscosity variations, J. Fluid Mech., 129, 173–192.

Roache, P.J. (1982), Computational fluid dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico.

Scirocco, V., Devienne, R. et Lebouché, M. (1985), Ecoulement laminaire et transfert de chaleur pour un fluide pseudo-plastique dans la zone d'entrée d'un tube, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28, 1, 91-99.

Shin S. et Cho, Y.I. (1994), Laminar heat transfer in a rectangular duct with a non-Newtonian fluid with temperature dependent viscosity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37, 1, 19-30.

Siginer, D. A. et Valenzuela-Rendon A. (2000), On the laminar free convection and stability of grade fluids in enclosures, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 43, 3391-3405.

Solomatov, V.S. (1995), Scaling of temperature- and stress-dependent viscosity convection, *Phys. Fluids*, 7, 266-274.

Solomatov, V.S. (2012), Localized subcritical convective cells in temperature-dependent viscosity fluids, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 200-201, 63-71.

Solomatov, V.S. et Barr, A.C. (2006), Onset of convection in fluids with strongly temperature-dependent, power-law viscosity, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 155, 140-145.

Solomatov, V.S. et Barr, A.C. (2007), Onset of convection in fluids with strongly temperature-dependent, power-law viscosity: Dependence on the initial perturbation (2). *Physics of the Earth and Planetary Interiors.*, 165, 1–13.

Solomatov, V.S. et Moresi, L.-N. (1997), Three regimes of mantle convection with non-Newtonian viscosity and stagnant lid convection on the terrestrial planets, *Geophys. Res. Lett.*, 24, 1907-1910.

Solomatov, V.S. et Moresi, L.-N. (2000), Scaling of time dependent stagnant lid convection: application to small scale convection on Earth and other terrestrial planets, *J. Geophys. Res.*, 105, 21795–21817.

Stengel, K.C., Oliver, D.S. et Booker, J.R. (1982), Onset of convection in a variable-viscosity fluid, *J. Fluid Mech.*, 120, 411-431.

Tien, C., Tsuei, H.S. et Sun, Z.S. (1969), Thermal instability of a horizontal layer of a non-Newtonian fluid heated from below, *Int. J. Heat Mass Transfer, Shorter Communications*, 12, 1173.

Torrance, K.E. et Turcotte, D.L. (1971), Thermal convection with large viscosity variations, *J. Fluid Mech.*, 47, 113-125.

Turan, O., Sachdeva, A., Poole, R.J. et Chakraborty, N. (2011), Laminar natural convection of Bingham fluids in a square enclosure with vertical walls subjected to constant heat flux, *Numer. Heat Trans. A*, 60, 381–409.

Turki, S. (1990), Contribution à l'étude numérique des transferts par convection naturelle et par convection mixte dans les fluides non-newtoniens confinés, Thèse de Doctorat, CNAM, Paris, France.

Vola, D., Boscardin, L. et Latché, J.C. (2003), Laminar unsteady flows of Bingham fluids: a numerical strategy and some benchmark results, *J. Comp. Physics.*, 187, 441–456.

White, D.B. (1988), The planforms and onset of convection with a temperature-dependent viscosity, *J. Fluid Mech.*, 191, 247–286.

Woods, L.C. (1954), A note of numerical solution of fourth differential equations, *Aero. Q.*, 5, 176-184.