

UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
BENI MELLAL

N° d'ordre : 34

U. F. R : GENIE ET SCIENCES DES MATERIAUX (G. S. M.)

THESE

Présentée à la faculté pour obtenir le Diplôme de
Doctorat National ès-Sciences Physiques

Spécialité : **Mécanique des Fluides et Transfert de Chaleur et de Masse**

***ETUDE ANALYTIQUE ET NUMERIQUE DE LA CONVECTION
DOUBLEMENT DIFFUSIVE DANS DES GEOMETRIES
RECTANGULAIRES CONFINANT DES FLUIDES NON-NEWTONIENS***

par :

Taoufik MAKAYSSI

(D.E.S.A : Mécanique des fluides et Energétique)

Soutenue le 30/03/2013, devant le jury d'examen :

Président : **M. HASNAOUI** Professeur, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech (Co-directeur de thèse)

A. BEN RICHO Professeur, Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal (Rapporteur)

A. SBAIBI Professeur, Faculté des Sciences et Techniques, Mohammedia (Rapporteur)

M. SRITI Professeur, Faculté Polydisciplinaire, Taza (Rapporteur)

M. NAÏMI Professeur, Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal (Directeur de thèse)

A. RAJI Professeur, Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal (Examinateur)

DEDICACES

Je remercie tout d'abord mes parents pour tout leur soutien et leur éducation avec lesquelles jusqu'à présent me permet d'aller de l'avant.

Je dédie ce modeste travail à mon cher père Salah pour tous ses sacrifices durant toutes mes études, ses conseils et ses directives m'ont été très bénéfiques tout au long de mon cursus. Qu'il trouve ici ma profonde et sincère gratitude.

A ma chère défunte mère Habiba, source de tendresse, qui par sa disparition a laissé une grande lacune que personne ne peut la combler, elle aussi par ses conseils, son amour de tous les jours et les sacrifices qu'une mère fait si fièrement pour ses enfants. Que dieu l'accueille dans son vaste paradis.

A mes très chères sœurs Hakima et Rajae pour leur soutien et leur tendresse.

A ma chère nièce Hiba fille de Hakima, je lui souhaite une bonne réussite dans ses études et un très bon avenir plein de bonheur.

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été préparée au Laboratoire des écoulements et des transferts LAMET de la faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal sous la direction du Professeur Mohamed NAIMI. Sa disponibilité permanente, ses idées originales qu'il m'a suggérées de développer dans cette thèse m'ont été décisives pour la compréhension et l'orientation de ce travail. Sa rigueur scientifique et ses qualités humaines m'ont profondément touché. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus cordiaux au Professeur Mohammed HASNAOUI, co-directeur de thèse pour avoir accepté de présider le jury d'examen de cette thèse. Je remercie également les Professeurs Abderrahim BEN RICHOU, Ahmed SBAIBI, Mohammed SRITI et Abdelghani RAJI pour avoir bien voulu participer à mon jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail de recherche, malgré leurs multiples occupations.

J'adresse mes remerciements au Professeur Mohammed SAJIEDDINE, chef de département de Physique et directeur de l'UFR dans laquelle j'étais inscrit pour l'aide qu'il m'a offert tout au long de la préparation de ce travail de recherche.

Je saisis cette occasion pour remercier tous mes collègues membres du Laboratoire LAMET, Mohammed LAMSAADI, Ahmed BAHLAOUI, Mourad KADDIRI et Hassan EL HARFI pour le climat de travail, d'amitié et de fraternité qu'ils ont pu créer au sein de ce Laboratoire.

Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Enfin, je remercie le bon Dieu qui m'a donné du courage, de l'endurance et de la volonté jusqu'à l'accomplissement de ce travail. Je dis : louange à dieu, Seigneur de l'univers.

AVANT PROPOS

- Prénom et Nom de l'auteur de la thèse : Taoufik MAKAYSSI
- Intitulé de la thèse : *Etude analytique et numérique de la convection doublement diffusible dans des géométries rectangulaires confinant des fluides non-Newtoniens*
- Prénom et Nom du directeur de la thèse : Mohamed NAÏMI (Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni-Mellal)
- Lieu de réalisation du travail : Laboratoire de Modélisation des Ecoulements et des Transferts (LAMET) de la Faculté des Sciences et Techniques de Béni-Mellal
- Prénom et Nom du codirecteur de la thèse : Mohammed HASNAOUI (Professeur à la Faculté des Sciences Semlalia de Marrakech)
- Date de commencement des travaux de la thèse : Septembre 2007

PUBLICATIONS

- [1] **M. Makayssi, M. Lamsaadi, M. Naïmi, M. Hasnaoui, A. Raji et A. Bahlaoui**, Effect of solutal buoyancy forces on thermal convection in confined non-newtonian power-law fluids, *The International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology*, N° 6 (62) 2008.
- [2] **M. Makayssi, M. Lamsaadi, M. Naïmi, M. Hasnaoui, A. Raji et A. Bahlaoui**, Natural double-diffusive convection in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated and salted from the side and filled with non-Newtonian power-law fluids: the cooperating case, *Energy Conversion and Management*, Vol. 49, pp. 2016-2025, 2008.
- [3] **T. Makayssi, M. Lamsaadi, M. Naïmi, M. Hasnaoui, A. Raji et A. Bahlaoui**, study of thermosolutal transfers by natural double diffusive convection in confined non-newtonian fluids, *Phys. Chem. News*, Vol 55, pp. 19-23, 2010.

- [4] **T. Makayssi, M. Naïmi, M. Lamsaadi et M. Hasnaoui**, Confined non-newtonian fluid flow and heat and mass transfer induced by both thermal and solutal buoyancy forces of equal intensities, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, Vol. 4, No. 1, pp. 97-106, 2011
- [5] **A. Bahlaoui, A. Raji, M. Hasnaoui, C. Ouardi, M. Naïmi et T. Makayssi**, Height Partition Effect on Combined Mixed Convection and Surface Radiation in a Vented Rectangular Cavity, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, Vol. 4, No. 1, pp. 89-96, 2011.
- [6] **A. Bahlaoui, A. Raji, M. Hasnaoui, R. El Ayachi, M. Naïmi, T. Makayssi et M. Lamsaadi**, Numerical study of mixed convection coupled with radiation in a vented partitioned enclosure, *The International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology*. N° 6 (62) 2008.
- [7] **A. Bahlaoui, A. Raji, M. Hasnaoui, M. Naïmi, T. Makayssi et M. Lamsaadi**, Mixed convection cooling combined with surface radiation in a partitioned rectangular cavity, *Energy Conversion and Management*, Vol. 50, pp. 626-635, 2009.
- [8] **M. Kaddiri, M. Naïmi, T. Makayssi, A. Raji et M. Hasnaoui**, Etude numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée confinant des fluides non-Newtoniens, *Revue de Mécanique Appliquée et Théorique*, Vol. 2, 1. 39-46 (2009).
- [9] **T. Makayssi, M. Lamsaadi, M. Naïmi, M. Hasnaoui, A. Raji et A. Bahlaoui**, numerical and analytical study of the onset of natural double diffusive convection of non-newtonian power-law fluids in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated and salted from below, projet d'article (en cours de rédaction).

- [10] **T. Makayssi, M. Lamsaadi, M. Naïmi, M. Hasnaoui, A. Raji et A. Bahlaoui**, multiple solutions for natural double diffusive convection in a shallow rectangular horizontal cavity salted from below and heated from all sides and filled with a non-Newtonian power law fluids, projet d'article (en cours de rédaction).

COMMUNICATIONS

- [1] **T. Makayssi, M. Lamsaadi, M. Naïmi et M. Hasnaoui**, Etude analytique et numérique de la convection thermosolutale au sein d'une cavité rectangulaire horizontale remplie d'un fluide non Newtonien, *12^{èmes} Journées Internationales de Thermique (JITH), Tanger (Maroc)*, 15-17 novembre 2005.
- [2] **T. Makayssi, M. Lamsaadi, M. Naïmi et M. Hasnaoui**, Etude des transferts thermique et solutal par convection naturelle doublement diffusive dans les fluides non-newtoniens confinés, *Rencontre Nationale des Jeunes Chercheurs en Physique, Casablanca (Maroc)*, 19-20 Décembre 2006.
- [3] **T. Makayssi, M. Lamsaadi, M. Naïmi et M. Hasnaoui**, Convection doublement diffusive dans une cavité rectangulaire horizontale remplie d'un fluide non-Newtonien, *8^{ème} Congrès de mécanique (CDM), El Jadida (Maroc)*, 17-20 avril 2007.
- [4] **T. Makayssi, M. Naïmi et M. Hasnaoui**, Convection thermosolutale coopérante dans les fluides non-newtoniens confinés, *Congrès international COMPLES'2K7 'Energie et environnement', Agadir (Maroc)*, 19-20 octobre 2007.
- [5] **T. Makayssi, M.Lamssadi, M. Naïmi, M. Hasnaoui, A. Raji et A. Bahlaoui**, Etude des transferts thermosolutaux par convection naturelle doublement diffusive dans les fluides non-newtoniens confinés, *JNPT'2008, Settat (Maroc)*, avril 2008.

- [6] **T. Makayssi, M. Naïmi, M. Lamssadi, A. Raji, A. Bahlaoui et M. Hasnaoui**, Natural double diffusive convection induced by opposing buoyancy forces in a shallow horizontal cavity filled with non-newtonian power-law fluids. *International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer (ICHMT), Marrakech (Maroc)*, 11-16 Mai (2008).
- [7] **T. Makayssi, M. Lamssadi, M. Naïmi et M. Hasnaoui**, Convection doublement diffusive pour les fluides non-Newtoniens à grand nombre de Lewis : Cas des forces de volume de même intensité, *9ème Congrès de mécanique (CDM), Marrakech (Maroc)*, 21-24 avril 2009.
- [8] **T. Makayssi, M. Naïmi, M. Lamssadi et M. Hasnaoui**, Comparaison entre la convection coopérante et la convection opposée pour les fluides non-newtoniens confinés : cas des forces de volume d'égales intensités, *Colloque International sur les Méthodes Mathématiques et Numériques en Mécanique des Fluides (CIMMNMF), Errachidia (Maroc)*, 28-29 Avril 2009.
- [9] **T. Makayssi, M. Naïmi, M. Lamssadi et M. Hasnaoui**, Convection thermosolutale opposée dans une cavité rectangulaire confinant des fluides non-Newtoniens, *10ème Congrès de mécanique (CDM), Oujda (Maroc)*, 19-22 avril 2011.
- [10] **A. Bahlaoui, A. Raji, M. Hasnaoui, M. Naïmi, T. Makayssi et M. Kaddiri**, Combined Mixed Convection and Surface Radiation in a Vented Partitioned Rectangular Cavity, *Colloque International sur les Méthodes Mathématiques et Numériques en Mécanique des Fluides (CIMMNMF), Errachidia (Maroc)*, 28-29 avril, 90-91 (2009).
- [11] **A. Bahlaoui, A. Raji, M. Hasnaoui, M. Naïmi, T. Makayssi et M. Lamsaadi**, Computation of Combined Mixed Convection and Surface Radiation

in a Partitioned Ventilated Rectangular Cavity, *International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer (ICHMT), Marrakech (Maroc)*, 11-16 Mai (2008).

[12] **M. Kaddiri, M. Naimi, T. Makayssi, M. Hasnaoui et A. Raji**, Etude numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée confinant des fluides non-Newtoniens, *9ème Congrès de mécanique (CDM), Marrakech (Maroc)*, 21-24 avril 2009.

TABLE DES MATIERES

NOMENCLATURE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
----------------------------	---

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTERATURE

1.1. Introduction.....	5
1.2. Convection naturelle doublement diffusive.....	5
1.3. Quelques exemples réels où la double diffusion se manifeste.....	6
1.4. Travaux antérieurs sur la double diffusion en milieux newtoniens	7
1.5. Travaux antérieurs sur la double diffusion en milieux non-newtoniens confinés....	10
1.6. Conclusion.....	11

CHAPITRE 2

FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME COMPTE TENU DU MODELE RHEOLOGIQUE ADOPTE

2.1. Introduction.....	12
2.2. Position du problème et géométrie considérée.....	12
2.3. Formulation mathématique.....	13
2.3.1. Equations générales.....	13
2.3.2. Loi de viscosité adoptée.....	14
2.3.3. Conditions aux limites.....	17
2.3.3.1. Conditions dynamiques.....	17
2.3.3.2. Conditions thermiques et massiques.....	17
2.4. Hypothèses simplificatrices.....	18
2.5. Equations adimensionnelles en formulation primitive	19
2.6. Equations adimensionnelles en formulation secondaire	21
2.7. Transfert de chaleur et de masse.....	22

2.7.1. Transfert de chaleur et de masse dans la direction horizontale.....	22
2.7.2. Transfert de chaleur et de masse dans la direction verticale.....	23

CHAPITRE 3

METHODES DE RESOLUTION

3.1. Méthode numérique.....	25
3.1.1. Méthode des différences finies.....	25
3.1.2. Discrétisation des équations.....	26
3.1.2.1. Termes transitoires.....	26
3.1.2.2. Termes convectifs.....	26
3.1.2.3. Termes diffusifs et de sources	26
3.1.3. Résolution des équations gouvernantes.....	27
3.1.3.1. Equations de la vorticité, de l'énergie et de la concentration.....	27
3.1.3.1.1. Schéma implicite en x et explicite en y.....	28
3.1.3.1.2. Schéma implicite en y et explicite en x.....	28
3.1.3.2. Equation de Poisson pour la fonction de courant.....	29
3.1.3.3. Conditions aux limites.....	30
3.1.4. Critère de convergence.....	31
3.1.5. Caractérisation du régime permanent.....	31
3.2. Méthode analytique.....	32
3.2.1. Introduction.....	32
3.2.2. Approximation de l'écoulement parallèle.....	32
3.2.2.1. Equations gouvernantes approximées.....	32
3.2.2.2. Intégration des équations approximées.....	33
3.2.2.3. Transfert de chaleur et de masse.....	36
3.2.2.4. Evaluation des constantes C_T , C_S , $\theta_T(0)$ et $\theta_S(0)$	36

CHAPITRE 4

CONVECTION NATURELLE DOUBLEMENT DIFFUSIVE DANS UNE CAVITE RECTANGULAIRE HORIZONTALE CHAUFFEE ET SALEE LATERALEMENT

4.1. Introduction.....	39
4.2. Choix du maillage.....	39
4.3. Valeur du nombre de Prandtl susceptible de caractériser les fluides considérés.....	40
4.4. Recherche du rapport d'aspect optimal de la cavité infiniment longue	41
4.5. Confrontations des solutions analytiques et numériques.....	42
4.6. Effet de l'indice de comportement.....	42
4.7. Effet du nombre de Rayleigh thermique.....	43
4.8. Effet du nombre de Lewis.....	43
4.9. Effet du rapport des forces de volume.....	44
4.10. Conclusion.....	45

CHPITRE 5

NAISSANCE DE LA CONVECTION NATURELLE DOUBLEMENT DIFFUSIVE DANS UNE CAVITE RECTANGULAIRE HORIZONTALE CHAUFFEE ET SALEE PAR LE BAS

5.1. Introduction.....	54
5.2. Validation de l'hypothèse de l'écoulement parallèle	54
5.3. Détermination du seuil d'apparition de la convection	55
5.4. Effet de l'indice de comportement	56
5.5. Effet du nombre de Rayleigh thermique	57
5.6. Effet du nombre de Lewis.....	57
5.7. Effet du rapport des forces de volume	58
5.8. Conclusion.....	58

CHAPITRE 6

CONVECTION NATURELLE DOUBLEMENT DIFFUSIVE DANS UNE CAVITE RECTANGULAIRE HORIZONTALE CHAUFFEE ET SALEE PAR LE BAS EN PRESENCE D'UN CHAUFFAGE LATERAL

6.1. Introduction.....	80
-------------------------------	-----------

6.2. Configuration des champs d'écoulement, de température et de concentration.....	80
6.3. Influence des paramètres gouvernants en présence d'un flux de chaleur latéral....	81
6.3.1. <i>Effet du nombre de Rayleigh thermique, Ra_T</i>	81
6.3.2. <i>Effet de l'intensité du flux de chaleur latéral, a</i>	82
6.3.3. <i>Influence du comportement rhéologique, n</i>	83
6.4. Comparaison entre les résultats numériques et analytiques	83
6.5. Conclusion.....	84
CONCLUSION GENERALE.....	101
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	104

NOMENCLATURE

A	rapport de forme ou d'aspect de la cavité, L'/H'
a	intensité du flux de chaleur horizontal, (nombre réel)
b	intensité du flux de chaleur vertical, (nombre réel)
c	intensité du flux de masse horizontal, (nombre réel)
d	intensité du flux de masse vertical, (nombre réel)
C_T	gradient horizontal adimensionnel de température, $(\partial T/\partial x)_{x=A/2}$
C_S	gradient horizontal adimensionnel de concentration, $(\partial S/\partial x)_{x=A/2}$
c_p	capacité calorifique à pression constante, J/(kg K)
D	diffusivité massique du fluide, m^2/s
G	accélération gravitationnelle, m/s^2
H'	hauteur de la cavité, m
\vec{I}	tenseur unité
j'	densité du flux de masse constant, $Kg/m^2 \cdot s$
k	indice de consistance pour un fluide d'Ostwald-De Waele, $Pa \cdot s^n$
L'	longueur de la cavité, m
Le	nombre de Lewis
N	rapport des forces de volume
n	indice de comportement ou de structure pour un fluide d'Ostwald-De Waele
Nu_h	nombre de Nusselt local dans la direction horizontale
\overline{Nu}_h	nombre de Nusselt moyen dans la direction horizontale
Nu_v	nombre de Nusselt local dans la direction verticale
\overline{Nu}_v	nombre de Nusselt moyen dans la direction verticale
P	pression adimensionnelle (Pa).
Pr	nombre de Prandtl généralisé
q'	densité du flux de chaleur constant, W/m^2
Ra_T	nombre de Rayleigh thermique généralisé

Ra_{TC}	valeur critique de Ra_T
S'_c	concentration de référence, Kg/m^3
S	concentration adimensionnelle
Sh_h	nombre de Sherwood local dans la direction horizontale
\overline{Sh}_h	nombre de Sherwood moyen dans la direction horizontale
Sh_v	nombre de Sherwood local dans la direction verticale
\overline{Sh}_v	nombre de Sherwood moyen dans la direction verticale
T	température adimensionnelle
T'_c	température de référence, K
(u, v)	composantes adimensionnelles de la vitesse
(x, y)	coordonnées adimensionnelles

Lettres grecques

α	diffusivité thermique du fluide, m^2/s
β_T	coefficient d'expansion volumétrique thermique à pression constante, $1/K$
β_s	coefficient d'expansion volumétrique solutal à pression constante, $m^3/K g$
ΔT^*	différence caractéristique de température, K
ΔS^*	différence caractéristique de concentration, Kg/m^2
$\dot{\gamma}$	tenseur des taux de cisaillement ou vitesses de déformation, s^{-1}
λ	conductivité thermique du fluide, $W/(m.K)$
μ	viscosité dynamique newtonienne, $Pa.s$
μ_a	viscosité apparente adimensionnelle pour un fluide d'Ostwald-De Waele
$\overline{\Sigma}$	tenseur des contraintes générales, Pa
$\overline{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses, Pa
Ω	vorticité adimensionnelle
ψ	fonction de courant adimensionnelle
ρ	densité du fluide

Exposants

' variables dimensionnelles

Indices

c valeur critique ou valeur relative au centre de la cavité $(x, y) = (A/2, 1/2)$

p paroi

Symboles mathématiques

$\vec{\nabla}$ opérateur Nabla

∇^2 opérateur Laplacien

:

produit dyadique

\otimes produit tensoriel

INTRODUCTION GENERALE

Le transfert combiné de chaleur et de masse par convection naturelle est présent dans pas mal de situations pratiques, et il est de ce fait l'un des domaines de recherche qui jouit d'une importance grandissante auprès des communautés scientifique et industrielle. La compréhension parfaite de l'ensemble des mécanismes qui le gouverne permet son contrôle et sa mise à profit.

Dans certains procédés naturels ou industriels, les fluides rencontrés exhibent un comportement rhéologique non-newtonien. Il convient de mentionner à cet égard :

- tout ce qui est mayonnaise, jus de fruits, yaourts, ..., dans les industries agro-alimentaires,
- les solutions de hauts polymères, polymères fondus,..., dans les industries chimiques,
- le pétrole et ses dérivées, dans les industries pétrochimiques,
- le sang, dans les industries biomédicales,
- la lave, en géophysique, et bien d'autres.

Ces fluides sont invariablement sujets à des processus d'échanges simultanés de chaleur et de matière par convection naturelle (thermosolutale), pendant leur préparation ou transformation jusqu'à l'état final. On est donc appelé à appréhender tous les problèmes qui en résultent si on veut parvenir à une optimisation des procédés industriels et à une meilleure conception des systèmes correspondants.

D'un point de vue scientifique, la convection thermosolutale dans les milieux purement fluides a fait l'objet de nombreuses investigations au cours des dernières décennies, en raison de son importance dans plusieurs processus naturels et applications industrielles. Néanmoins, la plupart des études antérieures portant sur ce phénomène, a attaché un intérêt particulier aux fluides newtoniens (ou non-newtoniens en milieux poreux). En revanche, très peu de travaux ont été consacrés à la convection naturelle doublement diffusive dans les fluides ayant un comportement rhéologique non-newtonien, bien que ceux-ci se trouvent au centre de pas mal d'applications industrielles. Ceci s'explique par la difficulté à appréhender physiquement les

mouvements convectifs thermo-solutaux pour ces types de fluides et à les modéliser mathématiquement. Les fluides qui ont retenu l'attention, dans ce travail, sont les pseudo-plastiques et les dilatants d'Ostwald-De Waele. Les fluides pseudo-plastiques sont nombreux et on en trouve comme exemples les suspensions de particules asymétriques, les solutions de hauts polymères (dérivées de cellulose), les ciments, la pâte à papier, les colles, les polymères fondus, le savon, les suspensions de détergents, le napalm et certaines peintures. Quant aux dilatants, ils sont moins fréquents en pratique et peuvent être incarnés par les suspensions hautement concentrées. Les solutions d'amidon, les sables mouillés compactés et les huiles polymériques en sont des exemples types. La compréhension des mécanismes gouvernant les transferts convectifs thermo-solutaux dans ces fluides constitue un terrain de recherche toujours fertile.

La présente thèse est, donc, dédiée à l'étude de la convection naturelle doublement diffusive dans une enceinte rectangulaire remplie d'un fluide, dont le comportement rhéologique est non-newtonien de type Ostwald-De Waele. La cavité est sollicitée sur ses frontières par des densités de flux uniformes de chaleur et de masse. Bien évidemment, et sans aucun doute, la configuration géométrique, les conditions aux limites et la rhéologie peuvent avoir un impact spécifique sur les champs d'écoulement, de température et de concentration ainsi que sur les transferts de chaleur et de masse qui en découlent, et on peut s'attendre à des résultats nouveaux par rapport à ce qui est plus au moins bien connu dans le domaine. De surcroît, le caractère visqueux des fluides, visés par la présente étude, et leur faible coefficient de diffusion massique laissent présager d'énormes difficultés pour les transferts massiques à atteindre rapidement un régime permanent, contrairement à leurs homologues thermiques, au sein de tels fluides.

Par ailleurs, les écoulements des fluides non-newtoniens sont, généralement, régis par un système d'équations différentielles couplées et fortement non linéaires dont la solution n'est possible, dans la majorité des cas, que par voie numérique. Toutefois, une solution analytique approchée, même rare, permet d'avoir un aperçu global sur la physique des phénomènes impliqués dans ce type de problèmes. Par conséquent, la recherche d'une telle solution est plus que jamais souhaitable.

Ce mémoire comporte six chapitres. Pour mieux situer le problème qui fait l'objet de cette étude par rapport aux travaux disponibles, et en l'absence de travaux sur la double diffusion dans les milieux purement fluides non-newtoniens en géométries confinées, le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique articulée essentiellement autour des travaux se rapportant à la convection naturelle et celle doublement diffusive respectivement dans les milieux susmentionnés et ceux newtoniens.

Le second chapitre introduit brièvement la notion de comportement rhéologique non-newtonien des fluides considérés où le choix d'une relation constitutive simple contenant peu de paramètres rhéologiques et permettant une approche réaliste, est une nécessité absolue. Une telle relation est ensuite injectée dans les équations régissant le phénomène de convection naturelle doublement diffusive, pour les types de fluides considérés, pour donner lieu aux équations de Navier-Stokes généralisées. D'autre part, compte tenu de certaines hypothèses, ces équations sont ensuite simplifiées, adimensionnalisées et écrites sous deux formulations différentes.

- ✓ La première formulation en variables primitives (vitesse, pression), dont l'utilité est évidente en termes de résolution analytique du problème unidimensionnel.

- ✓ La seconde formulation en variables secondaires (fonction de courant, vorticité) qui présente plus d'intérêt, particulièrement en terme de coût de calcul dans le cas d'un problème bidimensionnel, tel que le notre.

Le troisième chapitre fait état des méthodes de résolution mises en œuvre. Ainsi une méthode numérique du type différences finies, utilisée pour le problème complet, est intégralement exposée. Pour le problème simplifié, une approche pseudo-analytique dérivant du concept de l'écoulement parallèle est adoptée.

Les résultats des deux approches, évoquées ci-dessus, sont confrontés dans les chapitres quatre, cinq et six qui traitent respectivement les cas d'une cavité chauffée et salée latéralement, transversalement et transversalement en présence d'un flux de chaleur latéral. Dans ces chapitres, l'effet des paramètres adimensionnels gouvernant le problème sur les champs d'écoulement, de température et de concentration ainsi que sur les transferts de chaleur et de masse qui en résultent, est étudié. En outre, le

problème de multiplicité des solutions est discuté dans le sixième chapitre.

Enfin, une conclusion générale, qui rappelle les principaux résultats obtenus et met l'accent sur les points importants qui restent à examiner en perspective, vient clôturer ce mémoire.

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTERATURE

1.1. Introduction

Dans la mesure où cette thèse traite de la double diffusion, au sein d'un fluide non-newtonien confiné dans une cavité rectangulaire horizontale soumise à des densités de flux de chaleur et de masse uniformes, un rappel des travaux antérieurs relatifs à un tel phénomène s'impose, ne serait ce que pour situer le problème étudié dans le contexte bibliographique.

D'autre part, pour se rapprocher du phénomène convectif et savoir de son rôle crucial dans la nature et dans la pratique industrielle, on propose, au préalable, une définition de celui-ci tout en citant des exemples concrets s'y rapportant.

Aussi, en raison de la carence des contributions scientifiques en la matière, l'essentiel des références bibliographiques est orienté vers la convection naturelle d'origine thermique dans des milieux non-newtoniens et dans des milieux newtoniens en double diffusion.

1.2. Convection naturelle doublement diffusive

Le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle dans un milieu fluide est dû à la présence simultanée de gradients de température et de concentration. En effet, dans le champ de gravité terrestre ces gradients induisent une distribution non uniforme de la densité du mélange et donc une force de poussée statique du type Archimède qui engendre un écoulement dit de double diffusion avec transport de chaleur et de matière. Lorsque le rapport des forces de volume thermique et massique est positif, la convection doublement diffusive est dite coopérante, et elle est qualifiée d'opposée dans le cas contraire.

Plusieurs situations peuvent être envisagées :

✓ Dans le cas d'une couche fluide soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration, l'effet de seuil est inexistant lorsque le rapport des

forces de volume est positif et la configuration sans écoulement n'est jamais stable, ce qui confirme l'impossibilité d'équilibre statique du fluide dans une telle situation.

✓ Dans le cas d'une couche fluide soumise à des gradients verticaux de température et de concentration, le problème est tout à fait différent du précédent et deux états d'équilibre stable et instable peuvent exister en fonction du sens des gradients appliqués au fluide. Ainsi, pour une couche fluide chauffée et salée du bas, on se trouve dans une situation instable car les particules fluides de faible densité sont situées au-dessous de celles de forte densité. Contrairement au cas des gradients horizontaux, un mouvement du fluide n'apparaît que lorsque le gradient de densité excède une certaine valeur critique, appelée seuil d'instabilité. En revanche, pour une couche fluide chauffée et salée du haut, la stratification de la densité (fluide léger en haut) conduit à une situation incontestablement stable.

✓ Un autre cas susceptible d'être intéressant est celui de gradients croisés, dans lequel la stabilité de l'écoulement et l'existence de la multiplicité de solutions dépendent du conflit entre les deux gradients mis en jeu.

1.3. Quelques exemples réels où la double diffusion se manifeste

La double diffusion est couramment rencontrée tant dans la nature que dans l'industrie. Comme exemples, il convient d'en citer :

✓ les mouvements convectifs dans les océans qui sont dus, principalement, aux distributions non uniformes des températures et des concentrations du sel ;

✓ la diffusion des polluants dans l'atmosphère (gaz nocifs), dans le sol (déchets nucléaires) ;

✓ la migration de l'humidité ou des sels minéraux dans les sols ;

✓ la dispersion de contaminants dans la nappe phréatique ;

✓ l'obtention d'un monocristal à partir d'un mélange fondu lors de la croissance cristalline ;

✓ les mécanismes de changements de phases des métaux où la convection affecte directement la structure micrographique et les propriétés mécaniques et thermophysiques des alliages ;

- ✓ les procédés de séchage de différents produits industriels et domestiques ;
- ✓ les procédés thermochimiques et électrochimiques ;
- ✓ le stockage des gaz liquéfiés dans les pompes à chaleur, à absorption et à adsorption ;
 - ✓ dans les réacteurs chimiques ;
 - ✓ dans les procédés d'oxydation ou de traitements des surfaces métalliques ;
 - ✓ lors de la migration de l'humidité dans les fibres destinées à l'isolation thermique ;
 - ✓ etc...

1.4. Travaux antérieurs sur la double diffusion en milieux newtoniens.

La littérature sur la double diffusion montre que la majorité des travaux sont conduits en considérant des enceintes rectangulaires. Les ouvrages de Bejan (1983), Platten et Legros (1984), Nield et Bejan (1992) et Pop et Ingham (2001) constituent des références de base sur le sujet.

Différentes dispositions géométriques et configurations de gradients de température et de concentration ont été envisagées.

Pour ce qui est des gradients verticaux, il convient de mentionner les investigations de Nield, publiées en 1967, qui, du point de vue historique, comptent parmi les premières qui ont examiné le problème de stabilité dans une cavité rectangulaire soumise au niveau de ses faces horizontales à des gradients thermique et solutal verticaux et opposés. En utilisant l'analyse de stabilité linéaire, le seuil de la convection supercritique a été prédit pour divers types de conditions aux limites. Par ailleurs, lorsque le soluté et la chaleur jouent respectivement des rôles stabilisant et déstabilisant, des écoulements convectifs oscillants peuvent se déclencher à un nombre de Rayleigh bien inférieur à celui supercritique.

Similairement, les investigations théoriques et expérimentales de Turner (1968) sur les mouvements convectifs induits dans une couche fluide, initialement stratifiée avec un gradient de soluté et chauffée par le bas, ont révélé la formation successive de couches convectives.

De leur côté, Huppert et Moore (1976) ont étudié la transition à la convection oscillatoire à amplitude finie des écoulements stationnaires. Pour un nombre de Rayleigh solutal donné, des oscillations symétriques ont été observées au-dessous du seuil d'instabilité monotone. Quand le nombre de Rayleigh thermique augmente, l'amplitude des oscillations présentant un aspect asymétrique et aperiodique augmente et l'écoulement bifurque vers un état convectif stationnaire.

Quant à Deane et al. (1987), ils ont mis en évidence, par voies numérique et expérimentale, l'existence d'ondes progressives, stationnaires, modulées et chaotiques pour la convection thermosolutale dans une cavité différentiellement chauffée et salée dans la direction verticale. Aussi, ils ont examiné la transition entre la convection stationnaire et les différents types d'ondes observées. Dans les mêmes conditions, Moore et al. (1991) ont identifié différents types de bifurcations.

En considérant une cavité aplatie, Mamou et al. (2001) ont étudié la naissance et le développement de la double diffusion. Partant de l'état de repos, les seuils d'instabilité pour des convections stationnaire et oscillante à amplitude finie ont été déterminés explicitement en terme de paramètres mis en évidence. Pour le mode diffusif, où le soluté joue le rôle de stabilisant, les auteurs ont démontré que la sur-stabilité et la convection sous-critique prennent place pour un nombre de Rayleigh bien en deçà du seuil d'instabilité monotone lorsque le nombre de Lewis est supérieur à l'unité.

S'agissant de la configuration des gradients horizontaux, on peut citer le travail de Chang et al. (1993) qui ont étudié les caractéristiques de l'écoulement et des transferts de chaleur et de masse dans une enceinte carrée. Ainsi, un écoulement multicellulaire a été graduellement observé et l'analyse spectrale a révélé le comportement fortement instable de l'écoulement imputé au conflit entre les effets thermiques et solutaux.

La convection thermosolutale coopérante dans une cavité verticale, confinant un fluide binaire, a été étudiée dans un premier temps par Bennacer et Gobin (1996) et, puis, par Gobin et Bennacer (1996). Une analyse d'échelle a permis, dans la première contribution, de prédire la tendance d'évolution des taux de transfert de chaleur et de masse en fonction des paramètres gouvernants le problème. Dans la deuxième

contribution, quatre régimes d'écoulement ont été observés dépendamment du rapport des forces de volume.

Ghorayeb et Mojtabi (1997) ont étudié la double diffusion dans une cavité rectangulaire verticale contenant un fluide et ont révélé l'existence de diagrammes de bifurcation complexes. Dans le cas où le rapport de forces de volume solutale et thermique est égal à -1, ils ont prouvé l'existence d'une bifurcation transcritique en fonction du rapport de forme de la cavité.

Dans le cas d'une enceinte carrée, Bardan et Mojtabi (1998) ont examiné analytiquement la stabilité linéaire, faiblement linéaire et non linéaire de la double diffusion où les forces de volume thermique et massique sont d'égales intensités et de sens opposés. L'existence de deux types de solutions convectives stationnaires, sous-critique et supercritique a été mise en évidence ainsi que leurs seuils d'apparition.

Dans le même type d'enceinte, la naissance des écoulements oscillants, induits par la convection thermosolutale instationnaire, a fait l'objet d'investigations par Ghorayeb et al. (1999). Les auteurs ont montré que la transition du régime d'écoulement stationnaire vers un régime oscillant, pouvant être de nature symétrique ou asymétrique par rapport au centre de la cavité, se fait dépendamment du nombre de Lewis.

Pour une cavité élancée, Mamou et al. (1996) ont entrepris des investigations relatives à la double diffusion. Différentes voies ont été explorées pour décrire le comportement des transferts thermiques et solutaux. Les résultats issus de l'analyse d'échelle, de l'approximation de l'écoulement parallèle et de l'analyse numérique s'accordaient bien dans la limite des valeurs attribuées aux paramètres de contrôle.

Enfin, pour une configuration de gradients croisés, Paliwal et Chen (1980), en considérant une cavité inclinée soumise initialement à une stratification solutale dans la direction verticale et par la suite à un chauffage latéral, ont étudié expérimentalement et théoriquement l'effet de l'inclinaison sur le seuil de la convection thermosolutale. Celui-ci, se traduit par la formation périodique de cellules convectives dont la structure et le régime dépendent fortement de l'angle d'inclinaison.

L'étude de l'effet d'un gradient horizontal de température sur les régimes de convection stationnaire et oscillant dans une enceinte horizontale, soumise à des

gradients verticaux de température et de concentration a été menée par Sahai (1999). Les nombres de Rayleigh critiques correspondant à la naissance des solutions stationnaires et oscillantes ont été déterminés numériquement pour une large gamme des paramètres de contrôle. Le gradient horizontal de température a été trouvé stabilisant / (déstabilisant) pour les grandes / (faibles) valeurs du nombre de Prandtl. Pour des gradients thermiques horizontaux élevés, le système devint le siège de phénomènes oscillatoires avec une période diminuant avec le nombre de Rayleigh au-delà de sa valeur critique.

1.5. Travaux antérieurs sur la double diffusion en milieux non-newtoniens confinés.

Une recherche bibliographique profonde a permis de constater l'absence totale d'investigations antérieures sur la double diffusion pour des fluides non-newtoniens confinés. Tout au plus, on peut citer le travail de Benhadji et al. (2001) et récemment celui de Ben khelifa et al. (2012) bien que ceux-ci se rapportent au cas d'une couche poreuse saturée par un fluide non-newtonien à comportement régit par la loi de puissance d'Ostwald-De Waele.

Les premiers se sont penchés sur le problème de la double diffusion où la matrice poreuse est chauffée et salée soit horizontalement soit verticalement. Dans les deux situations, les auteurs sont parvenus à la conclusion d'un transfert de chaleur et de masse favorisé par le comportement pseudo-plastique et défavorisé par celui dilatant.

Les seconds ont examiné la convection doublement diffusive et l'effet Soret pour des flux de chaleur et de masse ascendants. L'accent a été mis essentiellement sur l'effet de l'indice de comportement sur les conditions d'apparition des différents régimes de convection et sur les transferts thermiques et solutaux à travers le milieu.

Autrement, tous les travaux relatifs aux milieux purement fluides non-newtoniens avaient trait à la convection naturelle d'origine thermique. A ce propos, le lecteur peut être renvoyé aux mémoires de thèses de Turki (1990) et Lamsaadi (2006) pour s'informer amplement sur la situation.

1.6. Conclusion

Au terme de cette étude bibliographique, on peut constater que la convection doublement diffusive en milieux fluides confinés est dominée essentiellement par l'aspect newtonien où un intérêt particulier a été accordé à la cavité rectangulaire.

Pour combler au moins partiellement, le manque de travaux sur l'aspect non-newtonien pour des cavités renfermées, le présent travail se propose d'aborder le problème d'une cavité rectangulaire horizontale remplie de fluides de type Ostwald-De Waele et soumise à des densités uniformes de flux de chaleur et de masse. D'autre part, en dépit de la simplicité de la géométrie considérée, la nature particulière des conditions aux limites thermiques et massiques combinées avec la non linéarité du comportement rhéologique peuvent donner lieu à des phénomènes dynamiques, thermiques et solutaux complexes qu'il convient de prédire afin de mieux comprendre la physique du problème étudié pour d'éventuelles applications pratiques.

CHAPITRE 2

FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME COMPTE TENU DU MODÈLE RHEOLOGIQUE ADOPTÉ

2.1. Introduction

Dans ce chapitre sont présentées les équations générales qui régissent la convection naturelle doublement diffusive dans les fluides non-newtoniens, de types Ostwald-De Waele. Après avoir précisé les hypothèses simplificatrices et les conditions aux limites associées au problème, ces équations sont écrites sous forme adimensionnelle dans un système de coordonnées cartésiennes compte tenu de la configuration géométrique étudiée. Deux formulations peuvent être employées à savoir la formulation en variables primitives (u, v, p, T, S) et celle en variables secondaires (ψ, Ω, T, S), c'est cette dernière qui est utilisée en raison des avantages qu'elle présente.

Par ailleurs, il est rare en général d'aboutir à une solution analytique exacte de ces équations, sauf si des simplifications importantes sont introduites, en raison de leur aspect couplé, de la forte non linéarité du comportement rhéologique et du confinement de la géométrie. Cependant, grâce aux développements technologiques, donnant lieu à des ordinateurs de plus en plus performants, les méthodes numériques se sont imposées, comme compléments indispensables ou parfois alternatives, aux méthodes expérimentales qui restent, en général, onéreuses et difficiles à réaliser. Dans le cadre de cette thèse, le choix d'une méthode aux différences finies a été jugé suffisant pour la résolution des équations écrites en variables secondaires (ψ, Ω, T, S).

2.2. Position du problème et géométrie considérée

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de la double diffusion dans un fluide non-newtonien de type Ostwald-De Waele confiné. La géométrie qui fait l'objet de cette étude est schématisée sur la figure 2.1. Il s'agit d'une cavité horizontale rectangulaire soumise au niveau de ses bords à des densités surfaciques uniformes de flux de chaleur et de masse. C'est l'une des plus expérimentées, choisie pour sa simplicité et la possibilité qu'elle offre en terme d'approximation bidimensionnelle de l'écoulement

réel. Trois configurations principales ont été examinées. Dans la première, la cavité est chauffée et salée latéralement, dans la seconde, la cavité est chauffée et salée transversalement et dans la troisième, la cavité est chauffée et salée transversalement en présence d'un flux de chaleur latéral.

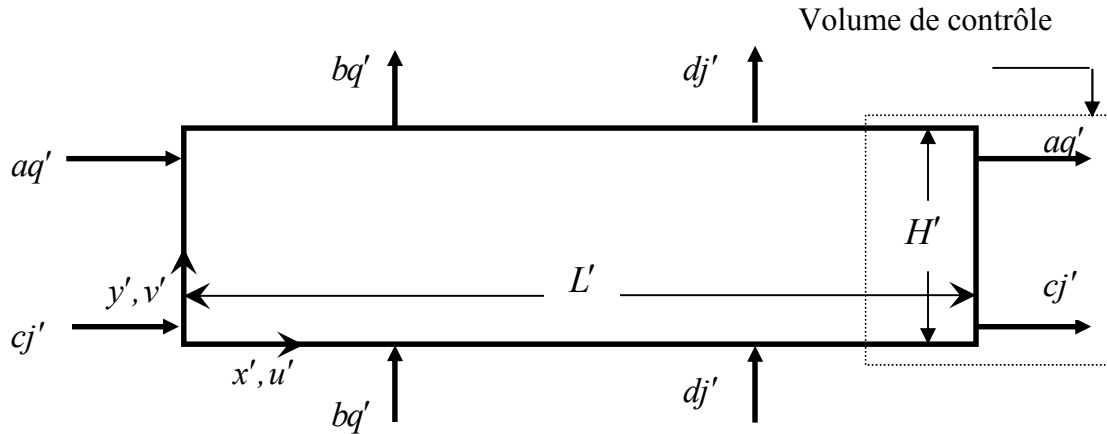


Figure 2.1 : Modèle physique et système de coordonnées

2.3. Formulation mathématique

2.3.1. Equations générales

Les équations gouvernant le processus de convection doublement diffusive sont obtenues à partir des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration. Pour résoudre le problème décrit par de telles équations, il revient à déterminer les grandeurs inconnues V' , p' , T' et S' y intervenant. En général, ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + \text{div}(\rho \vec{V}') = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{V}')}{\partial t'} + \text{div}\left[\rho \vec{V}' \otimes \vec{V}' - \vec{\Sigma}\right] = \rho \vec{f} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho c_p T')}{\partial t'} + \text{div}\left[\rho c_p T' \vec{V}' + \vec{q}\right] = \beta_T T' \frac{dp'}{dt'} + \vec{\tau} : \text{grad} \vec{V}' \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(\rho S')}{\partial t'} + \text{div}\left[\rho S' \vec{V}' + \vec{j}\right] = 0 \quad (2.4)$$

où c_p est la chaleur massique à pression constante et \vec{f} la résultante des forces de volume appliquées à l'unité de masse du fluide. La densité ρ , la pression p' , la température T' , la concentration S' et la vitesse \vec{V}' , sont les variables principales. Pour fermer le système, il faut établir des relations définissant le tenseur des contraintes générales $\vec{\Sigma}$, le tenseur des contraintes visqueuses $\vec{\tau}$, le vecteur flux de chaleur \vec{q} et le vecteur flux de matière \vec{j} , en fonction des variables du problème. Pour un fluide incompressible matériellement simple, $\vec{\Sigma}$ et $\vec{\tau}$ sont respectivement donnés par :

$$\vec{\Sigma} = -p \vec{I} + \vec{\tau} \quad (2.5)$$

$$\vec{\tau} = 2\mu'_a(\dot{\gamma}, T, P) \vec{\dot{\gamma}} \quad (2.6)$$

où \vec{I} est le tenseur unité, $\vec{\dot{\gamma}}$ est celui des vitesses de déformation et μ'_a est la viscosité apparente du fluide qui dépend de la vitesse de déformation généralisée $\dot{\gamma}$, de la température et éventuellement de la pression.

Quant à \vec{q} et \vec{j} , ils sont donnés respectivement par les lois phénoménologiques de Fourier et de Fick

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T' \quad \text{et} \quad \vec{j} = -D \vec{\nabla} S' \quad (2.7)$$

λ et D désignent respectivement la conductivité thermique et la diffusivité massique du fluide.

2.3.2. Loi de viscosité adoptée

Rappelons ici que les fluides non-newtoniens étudiés sont les fluides pseudo-plastiques et dilatants d'Ostwald-De Waele (1925), pour lesquels la viscosité apparente s'exprime par la loi de puissance (power-law) couramment adoptée :

$$\mu'_a(\dot{\gamma}) = k \dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.8)$$

Les deux paramètres empiriques n et k , sont, respectivement, les indices de comportement et de consistance.

D'autre part, trois situations peuvent être discutées selon la valeur du paramètre n :

- Pour $n=1$, on retrouve la loi de comportement d'un fluide newtonien de viscosité constante $\mu'_a = k$.

- Pour $0 < n < 1$, le comportement est pseudo-plastique car la viscosité apparente décroît avec le taux de déformation. Ce type de comportement, le plus fréquent, concerne les dispersions de particules asymétriques, les polymères de longue chaîne en solution dans l'eau ou à l'état fondu, les pâtes à papier, les colles, les ciments, les produits agroalimentaires, certaines peintures et bien d'autres.

- Pour $n > 1$, le comportement est qualifié de dilatant. Il est beaucoup moins fréquent et se caractérise par une augmentation de la viscosité apparente avec la vitesse de déformation. Il est spécifique des dispersions très concentrées, des solutions d'amidon, des sables mouillés compactés, de certaines huiles polymériques,...

La figure 2.2 ci-dessous illustre la variation de la contrainte de cisaillement en fonction du taux de déformation pour ces trois types de fluides.

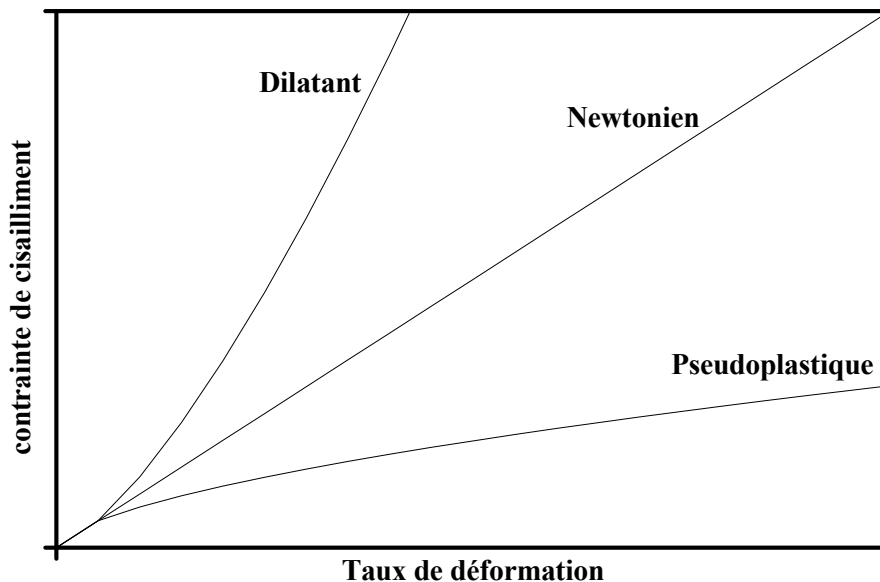


Figure 2.2: Comportement rhéologique des fluides non-newtoniens

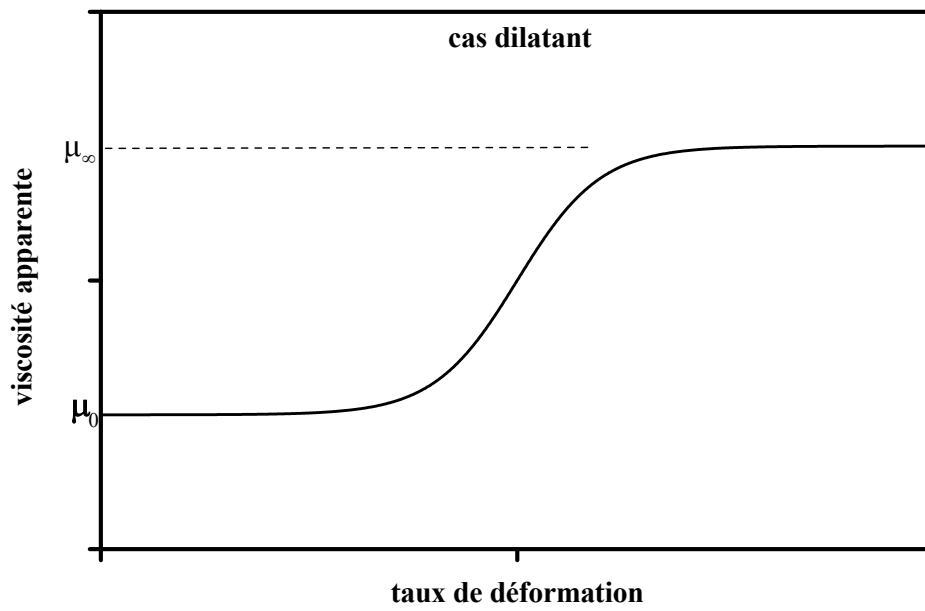


Figure 2.3

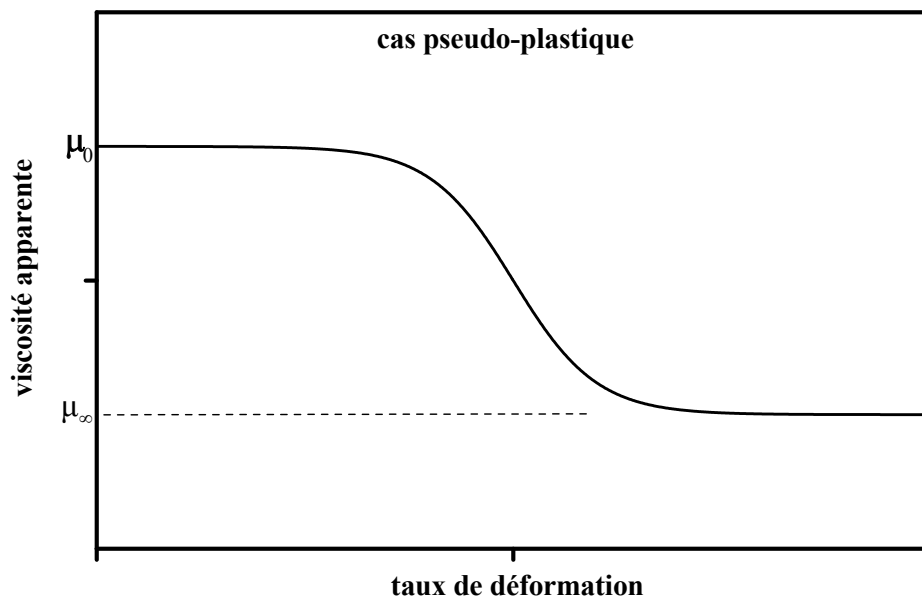


Figure 2.4

Notons, enfin, que la loi (2.8) combine des avantages et des inconvénients dans la mesure où elle s'éloigne de la réalité à faible et à fort taux de déformation (modèle tronqué), comme le montre les figures 2.3 et 2.4 qui correspondent respectivement au cas des fluides dilatants et pseudo-plastiques, on remarque l'existence de deux

plateaux newtoniens à faible et à forts taux de déformation. Entre les deux zones cette loi ajuste convenablement les mesures effectuées et offre, parfois par sa simplicité des développements analytiques, un modèle très convoité aussi bien dans la pratique que dans la théorie.

Par ailleurs, pour tenir compte des changements de la viscosité apparente avec les différents gradients de vitesses on introduit le taux de déformation composé ou généralisé comme suit :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \vec{\dot{\gamma}} : \vec{\dot{\gamma}}} = \sqrt{2 \sum_{ij} \dot{\gamma}_{ij}^2} \quad (2.9)$$

où $\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2}(V'_{i,j} + V'_{j,i})$ sont les composantes du tenseur des taux de déformation qui n'est autre que la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse (Agassant et al. 1989).

2.3.3. Conditions aux limites

Les conditions aux frontières associées au problème considéré sont de deux types.

2.3.3.1. Conditions dynamiques

Ces conditions expriment l'imperméabilité et le non-glissement des particules fluides sur les parois rigides de la cavité. Elles s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} u' = v' = 0 \text{ pour } x' = 0 \text{ et } x' = L' \\ u' = v' = 0 \text{ pour } y' = 0 \text{ et } y' = H' \end{cases} \quad (2.10)$$

2.3.3.2. Conditions thermiques et massiques

Sur toutes ses parois, la cavité est sollicitée par des densités de flux de chaleur et de masse uniformes (conditions de type Neumann), ce qui se traduit en termes de loi de Fourier et de Fick par :

$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial T'}{\partial x'} = aq' \text{ et } -D \frac{\partial S'}{\partial x'} = cj' \text{ pour } x' = 0 \text{ et } x' = L' \\ -\lambda \frac{\partial T'}{\partial y'} = bq' \text{ et } -D \frac{\partial S'}{\partial y'} = dj' \text{ pour } y' = 0 \text{ et } y' = H' \end{cases} \quad (2.11)$$

où a , b , c et d sont des paramètres qui permettent de régler respectivement les intensités relatives des flux horizontaux et verticaux de chaleur et de matière.

2.4. Hypothèses simplificatrices

Pour résoudre le système d'équations (2.1)-(2.4) auquel sont associées les conditions aux limites (2.10) et (2.11), un certain nombre d'hypothèses et d'approximations, généralement admises en convection naturelle, sont faites. Nous supposons alors que :

- Le vecteur \vec{f} de l'équation (2.2) se résume, dans notre cas, à la seule contribution de la pesanteur \vec{g} .

- Dans la plus part des problèmes de convection naturelle, les vitesses du fluide sont relativement faibles pour considérer l'écoulement comme laminaire, et ce à cause des gradients auxquels est soumise la cavité qui sont modérés (Siginer et Valenzuela-Rendon, 2000).

- Le fluide en écoulement est incompressible. Dans le domaine des pressions avoisinant la pression atmosphérique, les liquides constituent une très bonne approximation des milieux incompressibles.

- Le fluide est à comportement rhéologique non-newtonien pouvant être décrit par la relation constitutive (2.6).

- La production de chaleur due aux frottements visqueux, $\vec{\tau} : \text{grad} \vec{V}'$, dans l'équation (2.3) est négligeable. Ceci reste valable tant que la viscosité des fluides non-newtoniens considérés est relativement faible. Des calculs numériques effectués par Turki (1990) sur un problème de convection naturelle en considérant des fluides non-newtoniens confinés (solutions aqueuses de Carboxyméthylcellulose (CMC) à faible concentration), suivis d'une analyse d'ordre de grandeur, confirment bien la validité de cette hypothèse.

- La troisième dimension de la cavité est suffisamment grande par rapport aux deux autres de façon à ce que les effets de bouts deviennent négligeables. Ceci nous ramène alors à problème bidimensionnel (Siginer et Valenzuela-Rendon, 2000).

- Il n'y a ni réaction chimique ni source interne de chaleur ou de masse.

- Le transfert radiatif de chaleur est négligeable en raison des températures des parois qui sont modérées.
- Les interactions entre les transferts de chaleur et de masse, connues respectivement sous le nom d'effets Soret et Dufour, sont négligeables.
- Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes à l'exception de la densité qui varie linéairement avec la température et la concentration. Elle est donnée par la relation suivante (Gray et Giorgini, 1976) :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T' - T'_0) - \beta_S (S' - S'_0)] \quad (2.12)$$

Dans cette expression, β_T et β_S représentent respectivement les coefficients d'expansion thermique et solutal du fluide qui sont définis par :

$$\beta_T = -(1/\rho)(\partial\rho/\partial T')_{p',S'} \quad \text{et} \quad \beta_S = -(1/\rho)(\partial\rho/\partial S')_{p',T'} \quad (2.13)$$

2.5. Equations adimensionnelles en formulation primitive

Pour adimensionnaliser les équations (2.1)-(2.4) associées aux conditions aux limites (2.10) et (2.11), nous introduisons les variables suivantes:

$$\begin{aligned} t &= t'/(H'^2/\alpha), \quad (x, y) = 1/H'(x', y'), \quad (u, v) = H'/\alpha(u', v'), \\ T &= (T' - T'_c)/\Delta T^*, \quad S = (S' - S'_c)/\Delta S^*, \quad P = P'/\rho(\alpha/H')^2, \quad \Delta T^* = q'H'/\lambda \\ \Delta S^* &= j'H'/D, \quad \Omega = \Omega'/(\alpha/H'^2) \quad \text{et} \quad \psi = \psi'/\alpha \end{aligned} \quad (2.14)$$

T'_c et S'_c sont respectivement la température et la concentration de référence, ΔT^* et ΔS^* sont respectivement les différences caractéristiques de température et de concentration et α désigne la diffusivité thermique du fluide. Après les substitutions les équations deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \left[\mu_a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu_a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \left[\mu_a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \\ \left. + \frac{\partial \mu_a}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \text{Ra}_T (T + \text{NS}) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{\text{Le}} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) \quad (2.19)$$

où, μ_a est la viscosité apparente adimensionnelle qui a pour expression :

$$\mu_a = \left[2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.20)$$

Dans ces nouvelles équations nous notons la présence de quatre groupements adimensionnels, appelés nombres de Prandtl et de Rayleigh thermique généralisés, nombre de Lewis et rapport des forces de volume. Ils sont donnés respectivement par :

$$\text{Pr} = \frac{(k/\rho)H'^{2-2n}}{\alpha^{2-n}}, \quad \text{Ra}_T = \frac{g \beta_T H'^{2n+2} q'}{(k/\rho)\alpha^n \lambda}, \quad \text{Le} = \frac{\alpha}{D} \quad \text{et} \quad N = \frac{\beta_s \Delta S^*}{\beta_T \Delta T^*} \quad (2.21)$$

Ra_T mesure en fait l'importance relative de la poussée d'Archimède qui provoque le mouvement du fluide par rapport aux forces visqueuses et la diffusion thermique qui tendent à supprimer ce mouvement. Le nombre Pr compare les effets de la diffusion de la quantité de mouvement et celle de la chaleur. Le nombre Le compare les effets de la diffusion de quantité de la matière et celle de la chaleur. Quant au nombre N, il rapporte la force de volume d'origine solutale et celle d'origine thermique, N peut être positif ou négatif selon le signe de β_s . Lorsque N est positif, les gradients thermique et solutal coopèrent pour déstabiliser l'état de repos du fluide, dans ce cas la convection

doublément diffusive est qualifiée de coopérante alors que dans le cas contraire elle est dite opposée. Tous les résultats obtenus dans la présente thèse concernent le cas coopérant ($N > 0$).

Pour $n = 1$, Pr et Ra_T recouvrent leurs expressions newtoniennes pourvue que k soit remplacé par la viscosité newtonienne μ .

2.6 Equations adimensionnelles en formulation secondaire

En général en convection naturelle, la notion de pression est sans intérêt pratique. L'utilisation donc de la formulation fonction de courant-vorticité ($\psi - \Omega$), qui consiste à éliminer la pression, réduit le nombre d'équations de 5 à 4. Cette formulation est bénéfique car elle permet de réduire le temps de calcul. Elle présente aussi l'avantage de tracer directement les lignes de courant qui sont des courbes caractérisées par, $\psi =$ constante, et qui apportent de précieuses informations sur la structure de l'écoulement. Le principe repose sur le fait d'introduire, à partir des composantes horizontale et verticale de la vitesse, la fonction de courant, ψ , et la vorticité, Ω , telles que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.22)$$

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.23)$$

la vorticité représente la troisième composante du rotationnel de la vitesse qui est normal au plan (ox, oy).

En introduisant ces nouvelles variables, les équations adimensionnelles deviennent:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\Omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Omega)}{\partial y} = Pr \left[\mu_a \nabla^2 \Omega + 2 \left(\frac{\partial \mu_a}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \right] + S_\Omega \quad (2.24)$$

pour le transport de la vorticité,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (2.25)$$

pour l'énergie,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(uS)}{\partial x} + \frac{\partial(vS)}{\partial y} = \frac{1}{Le} \nabla^2 S \quad (2.26)$$

pour la concentration, et

$$\nabla^2 \psi = -\Omega \quad (2.27)$$

pour la fonction de courant, où le terme source, S_Ω , a pour expression :

$$\begin{aligned} S_\Omega = \text{Pr} \left[\left(\frac{\partial^2 \mu_a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu_a}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^2 \mu_a}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ + \text{Pr Ra}_T \left(\frac{\partial T}{\partial x} + N \frac{\partial S}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Les conditions aux frontières en forme adimensionnelle s'écrivent,

$$u = v = \psi = \frac{\partial T}{\partial x} + a = \frac{\partial S}{\partial x} + c = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = A \quad (2.29)$$

$$u = v = \psi = \frac{\partial T}{\partial y} + b = \frac{\partial S}{\partial y} + d = 0 \quad \text{pour } y = 0 \text{ et } y = 1 \quad (2.30)$$

Noter ici que les équations de transport de la vorticité, de l'énergie et de la concentration sont écrites sous forme conservative, compte tenu de l'hypothèse d'incompressibilité.

Aussi, les conditions aux limites demeurent celles données par (2.29) et (2.30), à l'exception de Ω qui est inconnue sur celles-ci et pour laquelle une approche numérique est proposée dans le chapitre 3.

2.7. Transfert de chaleur et de masse

Dans le domaine de l'ingénierie, la connaissance des quantités de chaleur et de matière, échangées ou transférées, est primordiale pour le dimensionnement des systèmes sièges d'échanges thermiques et massiques. Les groupements adimensionnels traduisant ces échanges sont le nombre de Nusselt et de Sherwood.

2.7.1. Transfert de chaleur et de masse dans la direction horizontale

Les nombres de Nusselt et de Sherwood, qui mesurent respectivement les transferts locaux de chaleur et de masse dans la direction horizontale, sont définis comme suit :

$$\text{Nu}_h(y) = a q' / (\lambda \Delta T'_h / L') = a A / \Delta T_h(y) = a / (\Delta T_h(y) / A) \quad (2.31)$$

$$\text{Sh}_h(y) = c j' / (D \Delta S'_h / L') = c A / \Delta S_h(y) = c / (\Delta S_h(y) / A) \quad (2.32)$$

où $\Delta T_h(y) = T(0,y) - T(A,y)$ et $\Delta S_h(y) = S(0,y) - S(A,y)$ représentent les différences adimensionnelles locales de température et de concentration entre les deux parois verticales pour $x = 0$ et $x = A$.

Cependant, les expressions (2.31) et (2.32) présentent l'inconvénient d'introduire des imprécisions dans les valeurs de Nu_h et de Sh_h , liées aux effets de bord. Pour améliorer la précision, Nu_h et Sh_h seront calculées sur la base d'une différence de température et de concentration entre deux sections verticales infiniment voisines (distances de δx) et symétriques par rapport à la section centrale, pour $x = A/2$, soit par analogie avec (2.31) et (2.32)

$$\text{Nu}_h(y) = a \lim_{\delta x \rightarrow 0} \delta x / \delta T = a \lim_{\delta x \rightarrow 0} 1 / (\delta T / \delta x) = -a / (\partial T / \partial x)_{x=A/2} \quad (2.33)$$

$$\text{Sh}_h(y) = c \lim_{\delta x \rightarrow 0} \delta x / \delta S = c \lim_{\delta x \rightarrow 0} 1 / (\delta S / \delta x) = -c / (\partial S / \partial x)_{x=A/2} \quad (2.34)$$

Quant aux transferts globaux dans la même direction, on utilise les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens donnés par :

$$\overline{\text{Nu}}_h = \int_0^1 \text{Nu}_h(y) dy \quad \text{et} \quad \overline{\text{Sh}}_h = \int_0^1 \text{Sh}_h(y) dy \quad (2.35)$$

2.7.2. Transfert de chaleur et de masse dans la direction verticale

Les nombres de Nusselt et de Sherwood, qui mesurent les transferts locaux de chaleur et de masse dans la direction verticale, sont définis par :

$$\text{Nu}_v(x) = b q' / (\lambda \Delta T'_v / H') = b / \Delta T_v(x) \quad (2.36)$$

$$\text{Sh}_v(x) = d j' / (D \Delta S'_v / H') = d / \Delta S_v(x) \quad (2.37)$$

où $\Delta T_v(x) = T(x,0) - T(x,1)$ et $\Delta S_v(x) = S(x,0) - S(x,1)$ ne sont autres que les différences adimensionnelles locales de température et de concentration entre les deux parois horizontales pour $y = 0$ et $y = 1$. A noter que, lorsque l'écoulement est parallèle, $Nu_v(x)$ et $Sh_v(x)$ demeurent inchangés dans la partie centrale de la cavité.

L'intégration de (2.36) et (2.37) le long de la paroi horizontale donne lieu aux nombres moyens de Nusselt et de Sherwood,

$$\overline{Nu}_v = \frac{1}{A} \int_0^A Nu_v(x) dx \quad \text{et} \quad \overline{Sh}_v = \frac{1}{A} \int_0^A Sh_v(x) dx \quad (2.38)$$

exprimant les taux globaux de transfert de chaleur et de masse dans la direction verticale.

3.1 Méthode numérique

3.1.1 Méthode des différences finies

Bien que la formulation (ψ, Ω, T, S) offre plus d'avantage au niveau de la réduction du nombre d'équations, qui forment un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires fortement couplées que seule la simulation numérique permet sa résolution.

La méthode des différences finies est la plus ancienne des méthodes numériques, qui a été introduite au 18^{ème} siècle par Euler, et s'avère la plus adaptée et la plus facile à utiliser pour des problèmes à géométrie simple. Celle-ci consiste en la discrétisation du domaine physique, par le biais d'un maillage uniforme (Figure 3.1), en un nombre fini de points appelés nœuds, dont chacun peut être identifié par un couple d'indice (i, j) . Ainsi, les valeurs des variables recherchées sont calculées sur chaque nœud. Les équations gouvernant le problème sont, donc, approximées par un système d'équations algébriques dans lesquelles les valeurs des variables aux nœuds sont les inconnues.

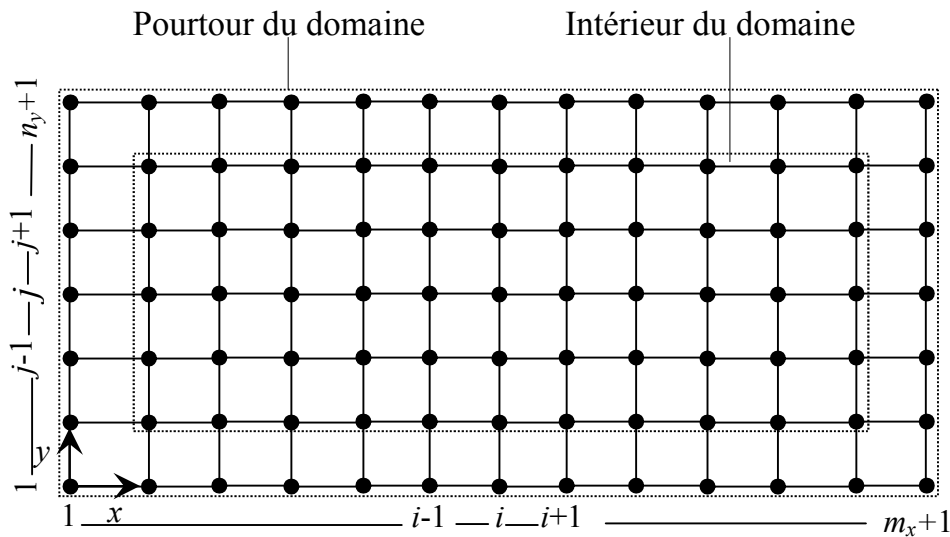


Figure 3.1 : Maillage en (i, j) et repère cartésien en (x, y)

3.1.2 Discrétisation des équations

A l'intérieur du domaine, les dérivées partielles spatiales, apparaissant dans les équations de base, sont discrétisées selon un schéma centré aux différences finies. Ce choix est lié à la nature du problème étudié : les informations sont connues à l'amont et à l'aval d'une cavité fermée et les termes diffusifs se trouvent pondérés par un facteur supérieur ou égal à l'unité.

3.1.2.1. Termes transitoires

Des différences finies, de premier ordre, avancées sont adoptées pour la discrétisation des dérivées temporelles. Ainsi, en considérant les valeurs d'une fonction scalaire f entre les instants $t_n = n\Delta t$ et $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, on obtient :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.1)$$

3.1.2.2. Termes convectifs

Les termes convectifs des équations (2.24)-(2.26) écrites sous une forme conservative sont approchés par :

$$\left. \frac{\partial(uf)}{\partial x} \right|_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n f_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n f_{i-1,j}^n}{2 \Delta x} \quad (3.2)$$

3.1.2.3. Termes diffusifs et de sources

A l'intérieur du domaine, les dérivées première, seconde et croisée, apparaissant dans les équations (2.20) et (2.22) à (2.28), sont approximées par :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2 \Delta x} \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (3.4)$$

et

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \quad (3.5)$$

Sur le pourtour du domaine, les dérivées partielles exprimant les conditions aux limites sont discrétisées, à l'ordre deux, à l'aide d'un schéma aux différences finies décentrées en amont,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i-2,j} - 4f_{i-1,j} + 3f_{i,j}}{2\Delta x} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j-2} - 4f_{i,j-1} + 3f_{i,j}}{2\Delta y} \quad (3.6)$$

ou en aval,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{4f_{i+1,j} - f_{i+2,j} - 3f_{i,j}}{2\Delta x} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{4f_{i,j+1} - f_{i,j+2} - 3f_{i,j}}{2\Delta y} \quad (3.7)$$

3.1.3 Résolution des équations gouvernantes

3.1.3.1. Equations de la vorticité, de l'énergie et de la concentration

La méthode implicite des directions alternées (ADI) est choisie comme outil de résolution des équations de la vorticité (2.24), de l'énergie (2.25) et de la concentration (2.26). Celle-ci, fréquemment utilisée dans le cas des fluides newtoniens, a été étendue avec succès au cas des fluides non-newtoniens par Ozoe et Churchill (1972), Turki (1990), Naïmi (2001) et Lamsaadi (2006) ou Amari et al. (1994) et Bian et al. (1994) et récemment Ben Khelifa et al. (2012). Elle donne lieu à deux systèmes matriciels tridiagonaux dans les deux directions. L'un est obtenu en discrétisant implicitement selon x et explicitement selon y , et vice-versa pour l'autre. Son principe consiste à écrire, au cours d'un premier demi-pas de temps $t_{n+1/2} = t_n + \Delta t/2$, les équations d'évolution pour les inconnues Ω , T et S de manière implicite dans une direction déterminée (les autres variables apparaissent explicitement). Par contre, pour l'intégration au cours du second demi-pas de temps $t_{n+1} = t_{n+1/2} + \Delta t/2$, une inversion de la direction des termes implicites permet d'obtenir finalement toutes les valeurs de Ω , T et S .

D'autre part, puisque les équations (2.24), (2.25) et (2.26) présentent des formes similaires, elles peuvent être écrites sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} = \Lambda \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] + 2 \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right] + S_f \quad (3.8)$$

□ Pour $\Lambda = \text{Pr} \mu_a$, $S_f = S_\Omega$ et $f = \Omega$, on retrouve l'équation de la vorticité.

- Pour $\Lambda = 1, S_f = 0$ et $f = T$, on recouvre l'équation de l'énergie.
- Pour $\Lambda = 1/Le, S_f = 0$ et $f = S$, on recouvre l'équation de la concentration.

3.1.3.1.1. Schéma implicite en x et explicite en y

C'est un schéma aux différences centrées, au temps $t_{n+1/2}$ pour les dérivées en x et au temps t_n pour les dérivées en y, la discrétisation des dérivées partielles est faite selon :

$$\begin{aligned} & \frac{f_{i,j}^{n+1/2} - f_{i,j}^n}{\Delta t/2} + \frac{u_{i+1,j} f_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j} f_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} f_{i,j+1}^n - v_{i,j-1} f_{i,j-1}^n}{2\Delta y} = \\ & \Lambda_{i,j} \left[\frac{f_{i+1,j}^{n+1/2} - 2f_{i,j}^{n+1/2} + f_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] + \\ & 2 \left[\frac{\Lambda_{i+1,j} - \Lambda_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{f_{i+1,j}^{n+1/2} - f_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \frac{\Lambda_{i,j+1} - \Lambda_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{f_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] + S_{f_{i,j}}^n \end{aligned} \quad (3.9)$$

où $f_{i,j}^n$ représente la valeur discrète de la fonction f à l'instant $t_n = n\Delta t$ et $f_{i,j}^{n+1/2}$ la valeur discrète intermédiaire qui servira pour la détermination de $f_{i,j}^{n+1}$ à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Ainsi, après réarrangement, on aboutit à un système d'équations implicites de la forme :

$$A_{i,j}^x f_{i-1,j}^{n+1/2} + B_{i,j}^x f_{i,j}^{n+1/2} + C_{i,j}^x f_{i+1,j}^{n+1/2} = D_{i,j}^x \quad (3.10)$$

3.1.3.1.2. Schéma implicite en y et explicite en x

C'est un schéma aux différences finies centrées, au temps $t_{n+1/2}$ pour les dérivées en x et au temps t_{n+1} pour les dérivées en y. La discrétisation des dérivées partielles étant faite selon :

$$\begin{aligned} & \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + \frac{u_{i+1,j} f_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j} f_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} f_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1} f_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} = \\ & \Lambda_{i,j} \left[\frac{f_{i+1,j}^{n+1/2} - 2f_{i,j}^{n+1/2} + f_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right] + \end{aligned}$$

$$2 \left[\frac{\Lambda_{i+1,j} - \Lambda_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{f_{i+1,j}^{n+1/2} - f_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \frac{\Lambda_{i,j+1} - \Lambda_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right] + S_{f_{i,j}}^n \quad (3.11)$$

où $f_{i,j}^{n+1/2}$ et $f_{i,j}^{n+1}$ désignent les valeurs discrètes de la fonction f aux instants respectifs $t_{n+1/2}$ et t_{n+1} . Là aussi, on peut arranger l'équation ci-dessus sous la forme :

$$A_{i,j}^y f_{i,j-1}^{n+1} + B_{i,j}^y f_{i,j}^{n+1} + C_{i,j}^y f_{i,j+1}^{n+1} = D_{i,j}^y \quad (3.12)$$

La résolution des systèmes d'équations (3.10) et (3.12), conduit généralement à l'inversion d'une matrice tridiagonale.

3.1.3.2. Equation de Poisson pour la fonction de courant

Une fois discrétisée à l'aide d'un schéma centré classique, l'équation de Poisson pour la fonction de courant (2.27), est résolue avec la méthode de sur-relaxation successive par point (PSOR), qui n'est autre que la méthode de Gauss-Seidel relaxée. La valeur de la fonction de courant aux nœuds est alors calculée à partir de

$$\psi_{i,j}^{\text{iter}+1} = (1 - \omega)\psi_{i,j}^{\text{iter}1} + \frac{\omega}{2(1 + \eta^2)} \left[\psi_{i+1,j}^{\text{iter}1} + \psi_{i-1,j}^{\text{iter}1} + \eta^2 \psi_{i,j+1}^{\text{iter}1} + \eta^2 \psi_{i,j-1}^{\text{iter}1} + \Delta x^2 \Omega_{i,j} \right] \quad (3.13)$$

où $\eta = \Delta x / \Delta y$ et ω est le coefficient de sur-relaxation, dont la valeur optimale est donnée par la relation de Frankel (1950) :

$$\omega_{\text{opt}} = 2 \frac{1 - \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta^2} \quad (3.14)$$

et

$$\zeta = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{m_x}\right) + \eta^2 \cos\left(\frac{\pi}{m_y}\right)}{1 + \eta^2} \quad (3.15)$$

Dans l'expression (3.15), valable uniquement pour un maillage rectangulaire uniforme, m_x et m_y désignent respectivement les nombres d'intervalles dans les directions x et y . A noter ici que pour $\omega = 1$, la procédure est identique à celle de Gauss-Seidel.

Dès lors, les composantes du champ de vitesse, $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$, et la viscosité apparente, $\mu_{ai,j}$, s'en déduisent :

$$u_{i,j}^{iter+1} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{iter+1} - \Psi_{i,j-1}^{iter+1}}{2\Delta y} \quad (3.16)$$

$$v_{i,j}^{iter+1} = -\frac{\Psi_{i+1,j}^{iter+1} + \Psi_{i-1,j}^{iter+1}}{2\Delta x} \quad (3.17)$$

$$\mu_{ai,j}^{iter+1} = \left[2 \left(\left(\frac{u_{i+1,j}^{iter+1} - u_{i-1,j}^{iter+1}}{2\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j+1}^{iter+1} - v_{i,j-1}^{iter+1}}{2\Delta y} \right)^2 \right) + \left(\frac{u_{i,j+1}^{iter+1} - u_{i,j-1}^{iter+1}}{2\Delta y} + \frac{v_{i+1,j}^{iter+1} - v_{i-1,j}^{iter+1}}{2\Delta x} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (3.18)$$

3.1.3.3. Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont discrétisées selon un schéma aux différences finies décentré avant ou arrière selon la paroi considérée.

- Paroi verticale gauche ($x = 0$) :

$$u_{1,j} = v_{1,j} = \Psi_{1,j} = 0, \quad T_{1,j} = \frac{4T_{2,j} - T_{3,j} + 2a\Delta x}{3} \quad \text{et} \quad S_{1,j} = \frac{4S_{2,j} - S_{3,j} + 2c\Delta x}{3} \quad (3.19)$$

- Paroi verticale droite ($x = A$) :

$$u_{m+1,j} = v_{m+1,j} = \Psi_{m+1,j} = 0, \\ T_{m+1,j} = \frac{4T_{m,j} - T_{m-1,j} - 2a\Delta x}{3} \quad \text{et} \quad S_{m+1,j} = \frac{4S_{m,j} - S_{m-1,j} - 2c\Delta x}{3} \quad (3.20)$$

- Paroi horizontale inférieure ($y = 0$) :

$$u_{i,1} = v_{i,1} = \Psi_{i,1} = 0, \quad T_{i,1} = \frac{4T_{i,2} - T_{i,3} + 2b\Delta y}{3} \quad \text{et} \quad S_{i,1} = \frac{4S_{i,2} - S_{i,3} + 2d\Delta y}{3} \quad (3.21)$$

- Paroi horizontale supérieure ($y = 1$) :

$$u_{i,n+1} = v_{i,n+1} = \Psi_{i,n+1} = 0, \\ T_{i,n+1} = \frac{4T_{i,n} - T_{i,n-1} - 2b\Delta y}{3} \quad \text{et} \quad S_{i,n+1} = \frac{4S_{i,n} - S_{i,n-1} - 2d\Delta y}{3} \quad (3.22)$$

Pour ce qui est de la vorticité, Ω , aux bords, n'y étant pas explicitement donnée, elle constitue l'une des principales difficultés de la formulation $\psi - \Omega$. Pour remédier à

ce problème, l'approche de Woods (1954), fréquemment utilisée pour sa précision, s'impose. Soit

$$\Omega_p = -\frac{1}{2}\Omega_{p+1} - \frac{3}{\Delta n^2}(\psi_{p+1} - \psi_p) \quad (3.23)$$

où p désigne la paroi et Δn le pas d'espace dans la direction normale à cette paroi.

D'autre part, l'inconvénient majeur du modèle d'Ostwald-De Waele réside dans le fait que, pour $0 < n < 1$, il conduit à une viscosité apparente infinie lorsque les gradients de vitesse tendent vers zéro, ce qui rend impossible toute résolution numérique. Pour pallier ceci, une meilleure alternative consiste à utiliser une valeur moyenne pour la viscosité aux coins de la cavité, là où toutes les vitesses s'annulent, obtenue par extrapolation de cette grandeur intrinsèque le long des deux frontières, ce qui présente l'avantage de garantir aussi la stabilité des calculs.

3.1.4. Critère de convergence

A chaque pas de temps, Δt , qui varie dans cette étude entre 10^{-7} et 10^{-4} dépendamment des paramètres gouvernants, la fonction de courant, ψ , est calculée à partir du champ de vorticité et comparée à celle obtenue à l'itération précédente. Ce processus est répété jusqu'à ce que le critère de convergence

$$\sum_{i,j} |\psi_{i,j}^{\text{iter}+1} - \psi_{i,j}^{\text{iter}}| < \varepsilon_c \sum_{i,j} |\psi_{i,j}^{\text{iter}+1}| \quad (3.24)$$

soit satisfait. A signaler que le paramètre ε_c , dont le choix n'est pas libre, doit être suffisamment petit de sorte que de grandes erreurs de troncature ne puissent s'introduire, tout en restant au-dessus des erreurs d'arrondis ($10^{-5} < \varepsilon_c < 10^{-4}$).

3.1.5 Caractérisation du régime permanent

Pour le problème traité, le régime permanent est atteint lorsque le critère

$$|\mathbf{f}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{f}_{i,j}^n| < \varepsilon_p |\mathbf{f}_{i,j}^{n+1}| \quad (3.25)$$

est vérifié pour toute variable indépendante, \mathbf{f} , pouvant être T , S , Ω ou ψ , ε_p étant de l'ordre de 10^{-4} .

3.2 Méthode analytique

3.2.1. Introduction

Les équations de la convection, présentées dans le chapitre 2, sont tellement couplées et non linéaires qu'il est pratiquement impossible de les résoudre analytiquement, surtout lorsque le milieu fluide est confiné. Cependant, il existe des situations particulières, dépendant des conditions aux limites thermiques et massiques et du rapport d'aspect, pour lesquels lesdites équations se simplifient considérablement pour donner lieu à une solution analytique approximée du problème (Cf. Chapitres 4, 5 et 6). Celle-ci, bien qu'elle s'applique à des cas rarement rencontrés dans la pratique, elle permet de donner un aperçu général et une description qualitative des phénomènes observés, tout en permettant, grâce à sa flexibilité et à sa manipulation aisée, une compréhension rapide de ceux-ci.

En outre, cette solution analytique, lorsqu'elle existe, constitue, à titre de validation, une référence incontestablement fiable pour le code numérique utilisé.

3.2.2. Approximation de l'écoulement parallèle

Cette approximation exploite, dans le cas d'une cavité de grand rapport d'aspect ($A \gg 1$), le parallélisme de l'écoulement et la stratification de la température et de la concentration qui se traduisent, respectivement, loin des bords latéraux par :

$$u(x,y) = u(y), \quad v(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x,y) = \psi(y) \quad (3.26)$$

$$T(x,y) = C_T(x - A/2) + \theta_T(y) \quad \text{et} \quad S(x,y) = C_S(x - A/2) + \theta_S(y) \quad (3.27)$$

où les constantes $C_T = (\partial T / \partial x)_{x=A/2}$ et $C_S = (\partial S / \partial x)_{x=A/2}$ ne sont autres que les gradients longitudinaux de température et de concentration.

3.2.2.1. Equations gouvernantes approximées

Moyennant les hypothèses ci-dessus, les équations (2.24)-(2.26), du chapitre 2, se simplifient pour devenir,

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[\left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} \right] = \frac{d^2}{dy^2} \left[\left| \frac{d^2\psi}{dy^2} \right|^{n-1} \frac{d^2\psi}{dy^2} \right] = Ra_T (C_T + NC_S) = Ra_T E \quad (3.28)$$

$$C_T u = C_T \frac{d\psi}{dy} = \frac{d^2\theta_T}{dy^2} \quad (3.29)$$

$$C_S u = C_S \frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{Le} \frac{d^2\theta_S}{dy^2} \quad (3.30)$$

les conditions aux limites associées à ces équations sont alors

$$u = \frac{d\psi}{dy} = \psi = \frac{d\theta_T}{dy} + b = \frac{d\theta_S}{dy} + d = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } 1 \quad (3.31)$$

auxquelles s'ajoute la condition de l'écoulement de retour

$$\int_0^1 u(y) dy = 0 \quad (3.32)$$

qui traduit la conservation de la matière.

3.2.2.2. Intégration des équations approximées

L'intégration des équations (3.28), (3.29) et (3.30), associées aux conditions aux limites (3.31) et à la condition (3.32), est complexe et requiert un traitement numérique spécial. En effet, la non linéarité du comportement et le changement du signe du gradient de vitesse, dû à l'écoulement de retour, imposent que les expressions de la vitesse, et par conséquent celles de la fonction de courant, de la température et de la concentration, soient différentes selon que $0 \leq y \leq y_0$, $y_0 \leq y \leq y_1$ ou $y_1 \leq y \leq 1$, où y_0 et y_1 sont les valeurs de y pour lesquelles $du/dy = 0$. Pour simplifier les expressions des variables recherchées, il est utile d'introduire la fonction $f(y) = y^2/2 - y/2 + y_0 y_1/2$. Ainsi, pour $0 \leq y \leq y_0$,

$$u(y) = E^{1/n} Ra_T^{1/n} \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] \quad (3.33)$$

$$\psi(y) = E^{1/n} Ra_T^{1/n} \left[\int_0^y \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] \quad (3.34)$$

$$\theta_T(y) = C_T E^{1/n} \text{Ra}_T^{1/n} \left[\int_0^y \left[\int_0^y \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy \right] - b y + \theta_T(0) \quad (3.35)$$

pour $y_0 \leq y \leq y_1$

$$u(y) = E^{1/n} \text{Ra}_T^{1/n} \left[\int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + \int_y^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \right] \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \psi(y) = E^{1/n} \text{Ra}_T^{1/n} & \left[(y - y_0) \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + \int_{y_0}^y \left[\int_y^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right. \\ & \left. + \int_0^y \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] \quad (3.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_T(y) = C_T E^{1/n} \text{Ra}_T^{1/n} & \left[\frac{(y - y_0)^2}{2} \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + \int_{y_0}^y \left[\int_{y_0}^y \left[\int_y^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy \right. \\ & \left. + (y - y_0) \int_0^y \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy + \int_0^{y_0} \left[\int_0^y \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy \right] - b y + \theta_T(0) \quad (3.38) \end{aligned}$$

et pour $y_1 \leq y \leq 1$

$$u(y) = E^{1/n} \text{Ra}_T^{1/n} \left[\int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + \int_{y_1}^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy + \int_{y_1}^y [f(y)]^{1/n} dy \right] \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \psi(y) = E^{1/n} \text{Ra}_T^{1/n} & \left[(y - y_0) \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + (y - y_1) \int_{y_1}^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \right. \\ & \left. + \int_{y_0}^{y_1} \left[\int_y^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \right] dy + \int_0^{y_0} \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy + \int_{y_1}^y \left[\int_{y_1}^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] \quad (3.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_T(y) = & C_T E^{1/n} \text{Ra}_T^{1/n} \left[\frac{1}{2} (y - y_1)(y + y_1 - 2) \left[\int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + \int_{y_1}^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \right] \right. \\
& + \int_{y_1}^y \left[\int_1^y \left[\int_{y_1}^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy + \int_{y_0}^{y_1} \left[\int_{y_0}^y \left[\int_y^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy \\
& + \frac{1}{2} (y_1 - y_0)^2 \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + (y_1 - y_0) \int_0^{y_0} \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \\
& \left. + \int_0^{y_0} \left[\int_0^y \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy \right] - b y + \theta_T(0) \tag{3.41}
\end{aligned}$$

En utilisant les deux équations (3.29) et (3.30) et les conditions aux limites (3.31), l'expression de $\theta_s(y)$ se déduit de celle donnant $\theta_T(y)$ par l'expression

$$\theta_s(y) = \text{Le} \frac{C_s}{C_T} \theta_T(y) + \left[b \text{Le} \frac{C_s}{C_T} - d \right] \left[y - \frac{1}{2} \right] \tag{3.42}$$

En injectant (3.33), (3.36) et (3.39) dans (3.32) et en exploitant la relation $y_0 + y_1 = 1$, traduisant la symétrie centrale du problème, y_0 et y_1 sont calculées à l'aide d'une procédure numérique combinant les méthodes itératives de Regula-Falsi (appelée encore méthode de la corde ou de la fausse position) et Wegstein (ou méthode des substitutions successives améliorée par introduction du promoteur de convergence de Wegstein) (Gourdin et Boumahrat, 1989) et la méthode d'intégration de Gauss-Legendre (Sibony et Mardon, 1982).

L'introduction de y_0 et y_1 dans la présente analyse théorique est liée au changement du signe de du/dy , dû à l'effet de recirculation, qui, avec le caractère non linéaire de (3.28), font que l'intégration de cette dernière ne peut être effectuée directement et il apparaît, donc, nécessaire de considérer trois régions caractérisées par des signes, de du/dy , opposés de part et d'autre de y_0 et y_1 . Pour un fluide newtonien ($n=1$), le problème susmentionné ne se pose guère et l'intégration de (3.28) est directe.

Dans le tableau 3.1, sont reportées les valeurs de y_0 en fonction des celles de n .

	n				
	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
y_0	0.199	0.206	0.211	0.216	0.219

Tableau 3.1: Dépendance de y_0 de n.

Une grandeur essentielle dans l'analyse de l'écoulement est la fonction de courant au centre de la cavité. Elle mesure l'intensité du courant de convection et qui a pour expression :

$$\begin{aligned} \psi_c = \psi(A/2, 1/2) = E^{1/n} \text{Ra}_T^{1/n} & \left[(1/2 - y_0) \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy \right. \\ & \left. + \int_0^{y_0} \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy + \int_{y_0}^{1/2} \left[\int_y^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.2.2.3. Transfert de chaleur et de masse

En prenant en considération la nature centro-symétrique du problème, les nombres de Nusselt et de Sherwood définis dans le chapitre 2, qui caractérisent les transferts de chaleur et de masse dans les directions horizontale et verticale, prennent les formes simples suivantes :

$$\text{Nu}_h = -a/C_T = \overline{\text{Nu}}_h \quad \text{et} \quad \text{Sh}_h = -c/C_S = \overline{\text{Sh}}_h \quad (3.44)$$

$$\text{Nu}_v = b/2\theta_T(0) \quad \text{et} \quad \text{Sh}_v = d/2\theta_S(0) \quad (3.45)$$

3.2.2.4. Evaluation des constantes C_T , C_S , $\theta_T(0)$ et $\theta_S(0)$

Pour déterminer les constantes C_T et C_S , une procédure, due originellement à Bejan (1983), est utilisée. Elle consiste en l'intégration des équations de l'énergie (2.25) et de la concentration (2.26), sur le volume de contrôle choisi arbitrairement dans la figure 1.1, en prenant en compte les conditions aux frontières (3.31) et la condition (3.32) et en raccordant avec la région de l'écoulement parallèle, soit :

$$C_T + a = \int_0^1 u(y) \theta_T(y) dy \text{ et } C_S + c = Le \int_0^1 u(y) \theta_S(y) dy \quad (3.46)$$

D'autre part, en exploitant la symétrie centrale de l'écoulement il vient :

$$\begin{aligned} \theta_T(0) = & b/2 - C_T E^{1/n} Ra^{1/n} \left[\frac{(1/2 - y_0)^2}{2} \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy \right. \\ & + \int_{y_0}^{1/2} \left[\int_{y_0}^y [-f(y)]^{1/n} dy \right] dy \left. + (1/2 - y_0) \int_0^{y_0} \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right. \\ & \left. + \int_0^{y_0} \left[\int_0^y \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy \right] - C_T A/2 = b/2 - C_T E^{1/n} Ra^{1/n} G_n \end{aligned} \quad (3.47)$$

Ou G_n a pour expression :

$$\begin{aligned} G_n = & \left[\frac{(1/2 - y_0)^2}{2} \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + \int_{y_0}^{1/2} \left[\int_{y_0}^y [-f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right. \\ & \left. + (1/2 - y_0) \int_0^{y_0} \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right. \\ & \left. + \int_0^{y_0} \left[\int_0^y \left[\int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy \right] - A/2 Ra_T^{-1/n} E^{-1/n} \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.42), la valeur de $\theta_S(0)$ se déduit de celle donnant $\theta_T(0)$ par :

$$\theta_S(0) = Le \frac{C_S}{C_T} \theta_T(0) + \frac{1}{2} \left[d - b Le \frac{C_S}{C_T} \right] \quad (3.48)$$

En remplaçant $u(y)$, $\theta_T(y)$ et $\theta_S(y)$ par leurs expressions dans les équations (3.46), on obtient les expressions suivantes pour les coefficients C_T et C_S :

$$C_T = \frac{a - b B_n Ra_T^{1/n} E^{1/n}}{A_n Ra_T^{2/n} E^{2/n} - 1} \quad \text{et} \quad C_S = \frac{c - d Le B_n Ra_T^{1/n} E^{1/n}}{Le^2 A_n Ra_T^{2/n} E^{2/n} - 1} \quad (3.49)$$

En portant ces expressions dans $E = C_T + NC_S$, on obtient l'équation non linéaire transcendante en E suivante,

$$\begin{aligned} & Le^2 A_n^2 Ra_T^{4/n} E^{1+4/n} + (bLe^2 + NdLe) A_n B_n Ra_T^{3/n} E^{3/n} - (Le^2 + 1) A_n Ra_T^{2/n} E^{1+2/n} \\ & - (aLe^2 + Nc) A_n Ra_T^{2/n} E^{2/n} - (b + NdLe) B_n Ra_T^{1/n} E^{1/n} + E + a + Nc = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

où A_n et B_n sont des coefficients définis par :

$$A_n = \int_0^1 \left[\frac{u(y)}{E^{1/n} Ra_T^{1/n}} \right] \left[\frac{\theta_T(y) - \theta_T(0) + by}{C_T E^{1/n} Ra_T^{1/n}} \right] dy \quad \text{et} \quad B_n = - \int_0^1 \frac{y u(y)}{E^{1/n} Ra_T^{1/n}} dy \quad (3.51)$$

et calculés en utilisant la méthode d'intégration numérique de Gauss-Legendre. Le tableau 3.2 donne leurs valeurs en fonction de celles de n .

	n				
	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
A_n	$-0.485 \cdot 10^{-7}$	$-0.599 \cdot 10^{-6}$	$-0.276 \cdot 10^{-5}$	$-0.768 \cdot 10^{-5}$	$0.160 \cdot 10^{-4}$
B_n	$0.186 \cdot 10^{-3}$	$0.651 \cdot 10^{-3}$	$0.139 \cdot 10^{-2}$	$0.231 \cdot 10^{-2}$	$0.333 \cdot 10^{-2}$

Tableau 3.2 : Dépendance des coefficients A_n et B_n avec n .

Partant de ceci, les valeurs de E sont obtenues en résolvant numériquement (3.50), pour des valeurs données de a , b , c , d , n , Le , N et Ra_T , par la mise en œuvre de la méthode itérative de Regula-Falsi dont le résultat est utilisé en tant qu'estimé initial pour démarrer le processus itératif avec une méthode plus précise telle que celle de Wegstein.

Il convient de noter qu'en régime de diffusion pure qui correspond à $Ra_T \rightarrow 0$, les équations (3.47), (3.48) et (3.49) se simplifient et deviennent respectivement $\theta_T(0) \rightarrow b/2$, $\theta_s(0) \rightarrow d/2$, $C_T \rightarrow -a$ et $C_s \rightarrow -c$, et en se référant à (3.44) et (3.45), les quantités Nu_h , Sh_h , Nu_v et Sh_v tendent tous vers l'unité.

CHAPITRE 4

CONVECTION NATURELLE DOUBLEMENT DIFFUSIVE DANS UNE CAVITE RECTANGULAIRE HORIZONTALE CHAUFFEE ET SALEE LATERALEMENT

4.1. Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse au cas d'une cavité soumise à des densités uniformes de flux horizontaux de chaleur et de masse sur ses faces verticales, celles horizontales étant supposées adiabatiques et imperméables ($a = c = 1$ et $b = d = 0$). On examine l'influence des paramètres adimensionnels intervenant dans le problème étudié sur les champs d'écoulement, de température et de concentration ainsi que sur les différents transferts qui en résultent.

4.2. Choix du maillage

La précision des résultats numériques est liée au choix du maillage, lequel dépend du rapport d'aspect de la cavité, A , et de la nature de la solution. Comme le laisse prédire la nature des conditions aux limites thermiques et massiques, pour $A \gg 1$ le problème peut avoir une solution analytique loin des bords latéraux. Pour trouver un compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats, des essais numériques préliminaires ont été conduits avec des grilles de maillage de tailles variées pour $A = 24$, $Ra_T = 10^5$, $Le = 10$, $N = 1$ et différentes valeurs de n (Les raisons du choix de la valeur de A sont précisées ci-dessous). La procédure adoptée consiste à raffiner le maillage jusqu'au recouvrement des résultats analytiques avec une précision raisonnable (Tableau 4.1). Ainsi, le maillage devient presque sans influence à partir d'une grille de taille (321,81) où l'erreur n'excède pas 5% pour les quantités ψ_c , Nu_h et Sh_h par comparaison à leurs valeurs analytiques. Le tableau 4.2 montre qu'une telle grille est suffisante pour modéliser convenablement la double diffusion au sein de la cavité considérée.

4.3. Valeur du nombre de Prandtl susceptible de caractériser les fluides considérés

Pour les fluides non-newtoniens considérés dans cette étude, les valeurs rencontrées pour le nombre de Prandtl, Pr , sont très élevées ce qui rend négligeable la contribution des termes convectifs dans l'équation de transport de la vorticité (2.24). Par conséquent, la convection devient insensible à toute variation des grandes valeurs de ce paramètre. Cet effet a été mis en évidence numériquement par un certain nombre d'auteurs dont Lamsaadi (2006) qui a considéré $Pr = 1000$ comme valeur asymptotique dans son étude concernant la convection naturelle dans une cavité rectangulaire horizontale, mais il a fini par faire tendre Pr à l'infini étant donné l'avantage que cela présente en termes de temps de calcul. Dans la présente étude, nous avons opté pour ce choix.

		$ \psi_c $				
n	Grilles	(281,81)	(301,81)	(321,61)	(321,81)	(321,101)
0.6		18.34	19.29	18.72	19.1	19.00
1.0		8.17	8.59	8.34	8.51	8.48
1.4		4.38	4.61	4.48	4.57	4.56
		Nu_h				
n	Grilles	(281,81)	(301,81)	(321,61)	(321,81)	(321,101)
0.6		134.746	141.71	137.56	140.3	139.56
1.0		29.335	30.854	29.95	30.549	30.441
1.4		9.267	9.747	9.46	9.652	9.641
		Sh_h				
n	Grilles	(281,81)	(301,81)	(321,61)	(321,81)	(321,101)
0.6		14133.20	14560.36	12555.37	13500.4	13459.88
1.0		2905.28	2999.99	2622	2850	2792.99
1.4		844.80	890.70	794.87	863.99	829.43

Tableau 4.1 : Effet du maillage sur la fonction de courant, le nombre de Nusselt et le nombre de Sherwood pour $A = 24$, $Ra_+ = 10^5$, $Le = 10$, $N = 1$ et différentes valeurs de n .

n	Solution analytique			Solution numérique		
	$ \psi_c $	Nu_h	Sh_h	$ \psi_c $	Nu_h	Sh_h
0.6	18,78	145,30	14431,40	19,1	140,3	13500,4
1.0	8,55	30,74	2975,99	8,51	30,45	2850
1.4	4,67	9,72	873,88	4,57	9,65	863,99

Tableau 4.2 : Tests de comparaison justifiant le choix de 321×81 comme taille de grille optimale pour $A = 24$, $Ra_T = 10^5$, $Le = 10$, $N = 1$ et différentes valeurs de n .

4.4. Recherche du rapport d'aspect optimal de la cavité infiniment longue

Le but de ce paragraphe est de déterminer numériquement la plus petite des valeurs du rapport d'aspect A permettant d'avoir des résultats concordant avec ceux analytiques. Pour ce faire, les grandeurs ψ_c , Nu_h et Sh_h , calculés numériquement au centre de la cavité, sont représentées en fonction de A pour $Ra_T = 10^5$, $Le = 10$, $N = 1$ et différentes valeurs de n (figures 4.1, 4.2 et 4.3). Comme on peut le voir, une augmentation de A conduit à un comportement asymptotique de la convection où les quantités précitées deviennent insensibles à toute augmentation de ce paramètre. Il est à remarquer que, dans la limite des valeurs assignées à n , ψ_c et Nu_h atteignent cet état à partir de $A = 20$, alors que pour Sh_h cela se réalise au-delà de $A = 24$, en raison de la lenteur de la diffusion massique ($Le = 10$) en particulier pour $n = 0.6$ là où la convection est prononcée. En effet, plus n diminue, plus il est nécessaire d'augmenter A afin d'atteindre le régime asymptotique. Il en résulte, ainsi, que la valeur minimale de A , communément convenable aux situations étudiées et pouvant raisonnablement satisfaire l'approximation du grand rapport d'aspect est 24. En l'absence de transfert de masse, Lamsaadi (2006) a trouvé pour A une valeur asymptotique de 8, ce qui est largement inférieure à la notre et montre à l'évidence le rôle retardateur d'un gradient solutal vis-à-vis du régime asymptotique. La figure 4.4 confirme bien cet état de fait, dans la mesure où les isothermes sont plus organisées et plus stratifiées que les iso-concentrations.

4.5. Confrontations des résultats analytiques et numériques

Pour différencier les résultats numériques de ceux analytiques, les premiers sont désignés par des cercles pleins et les seconds par des traits continus. La figure 4.4 montre les comparaisons des profils de vitesse horizontale, de température et de concentration, obtenus dans la section transversale au milieu de la cavité, pour $A = 24$, $Ra_T = 10^5$, $Le = 10$, $N = 1$ et diverses valeurs de n . Comme on peut le constater, les deux résultats affichent un accord parfait, ce qui valide mutuellement l'approximation de l'écoulement parallèle et le code numérique développé. Les figures 4.6, 4.7 et 4.8, qui montrent les évolutions respectives de $|\psi_c|$, Nu_h et Sh_h avec les différents paramètres gouvernant le problème confirment bien cet accord pour une large plage des valeurs de ces paramètres.

Par ailleurs, de tels résultats confortent bien le choix d'une grille de taille 321×81 et un rapport d'aspect $A = 24$ pour la modélisation du phénomène étudié.

4.6. Effet de l'indice de comportement

Des informations précieuses, concernant l'influence du comportement rhéologique non-newtonien sur les champs d'écoulement, de température et de concentration, peuvent être tirées de la figure 4.5. Bien que les lignes de courant ne montrent pas un changement qualitatif dans la structure globale de l'écoulement, qui garde un aspect unicellulaire parallèle dans la région centrale de la cavité, l'intensité de l'écoulement, ψ_c , subit des variations quantitatives importantes avec n . En effet, celle-ci chute de 19.1 à 4.57 quand n augmente de 0.6 à 1.4, ce qui signifie qu'une augmentation de n ralentit la circulation de l'écoulement à l'intérieur de la cavité. D'ailleurs, les profils de vitesse de la figure 4.5a soutiennent bien cette tendance. En revanche, les isothermes et les iso-concentrations correspondantes paraissent beaucoup plus affectées par la rhéologie dans la mesure où celles-ci deviennent de moins en moins inclinées dans la direction horizontale en augmentant n , ce qui vient confirmer la diminution de l'intensité de l'écoulement avec ce paramètre. Ce type de réaction, vis-à-vis de n , est retrouvé au niveau des taux de transferts de chaleur et de masse,

Nu_h et Sh_h , dont les valeurs chutent respectivement de 140.3 à 9.65 et de 13500.4 à 863.99 lorsque n passe de 0.6 à 1.4.

Pour expliquer la réduction des intensités de l'écoulement et des transferts de chaleur et de masse avec n , il faut revenir à l'équation (2.8). En effet, une augmentation de n provoque un accroissement de la viscosité apparente dont le rôle en terme de ralentissement du mouvement du fluide est bien évident. Inversement, une diminution de n conduit à l'effet contraire.

Par référence au cas newtonien ($n=1$), le comportement pseudo-plastique ($0 < n < 1$) amplifie la convection doublement diffusive alors que celui dilatant ($n > 1$) la réduit. Des observations analogues ont été rapportées par Benhadji et al. (2001) dans leur étude numérique et analytique de la convection thermosolutale au sein d'une couche poreuse saturée par un fluide ayant le même comportement rhéologique que celui utilisé dans cette étude.

4.7. Effet du nombre de Rayleigh thermique

L'influence du nombre de Rayleigh thermique Ra_T sur l'intensité de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse est illustrée sur la figure 4.6 pour $Le=10$, $N=1$ et différentes valeurs de n . Aux faibles valeurs de Ra_T ($Ra_T < 10$), on peut noter que les transferts sont assurés essentiellement par diffusion puisque $5 \times 10^{-2} < |\psi_c| < 10^{-1}$, $Nu_h \approx 1$ et $1 \leq Sh_h < 2$. En dehors de cette zone, une augmentation de Ra_T entraîne une croissance de ψ_c et de Sh_h sans affecter dans un premier temps Nu_h qui ne connaît de réelle progression qu'à partir, pratiquement, de $Ra_T = 100$. Autrement, pour des valeurs élevées de Ra_T toutes ces grandeurs augmentent de façon monotone. Il faut également noter que le transfert convectif solutal demeure plus intense que celui thermique en raison de la valeur du nombre de Lewis ($Le = 10$).

4.8. Effet du nombre de Lewis

Les variations des quantités $|\psi_c|$, Nu_h et Sh_h avec le nombre de Lewis, reportées sur la figure 4.7 pour $Ra_T = 10^5$, $N=1$ et diverses valeurs de n , montrent :

- deux paliers, supérieur et inférieur, pour $|\psi_c|$ et Nu_h dont l'étendue dépend de n . Le premier peut être attribué à une convection thermique dominante, vis-à-vis de la conduction thermique et de la convection solutale, compte tenu des faibles valeurs de Le . Le second traduit une convection solutale dominant celle thermique qui devient moindre avec le concours de la diffusion thermique, vu les valeurs élevées de Le ;

- une descente entre ces deux paliers indiquant que le régime thermique est en train de céder son rôle dominateur à celui solutal ;

- un seul palier pour Sh_h aux faibles valeurs de Le ($\leq 10^{-1}$) dont la taille diminue lorsque n augmente, caractérisé par $Sh_h \approx 1$, indiquant que le transfert solutal est pratiquement diffusif ;

- une montée de Sh_h pour des valeurs de $Le \geq 10^{-1}$ synonyme d'un transfert solutal prédominant.

4.9. Effet du rapport des forces de volume

Les évolutions de $|\psi_c|$, Nu_h et Sh_h avec le rapport des forces de volume, N , présentées sur la figure 4.8 pour $Ra_T = 10^5$, $Le = 10$ et diverses valeurs de n , font apparaître trois régimes convectifs, à savoir :

- un régime de forces de volume thermiques dominantes ($N < 10$) pour lequel $|\psi_c|$,
,

Nu_h et Sh_h sont indifférents vis-à-vis des variations de N , étant donné la faible contribution des effets solutaux dans la convection ;

- un régime intermédiaire, couvrant la plage $10 < N < 100$, pour lequel l'augmentation de $|\psi_c|$, Nu_h et Sh_h commence à se faire sentir.

- un régime de forces de volume solutales prépondérantes pour $N > 100$ dans lequel $|\psi_c|$, Nu_h et Sh_h augmentent d'une façon monotone et prononcée avec N , traduisant ainsi l'apport important des effets solutaux dans la convection.

A noter qu'au-delà de $N = 1000$, tout résultat numérique reste impossible à obtenir avec le code de calcul élaboré.

4.10. Conclusion

L'étude de la convection doublement diffusive, initiée en imposant des densités de flux de chaleur et de masse aux parois verticales d'une cavité rectangulaire horizontale confinant un fluide newtonien et non-newtonien, a été conduite par voies numérique et analytique. Les principaux résultats se résument comme suit :

- pour une cavité allongée ($A \geq 24$), contenant un fluide à grand nombre de Prandtl ($Pr \rightarrow \infty$), la double diffusion est essentiellement gouvernée par l'indice de comportement, n , le nombre de Rayleigh thermique, Ra_T , le nombre de Lewis, Le , et le rapport des forces de volume, N ;

- l'écoulement présente un aspect unicellulaire et se développe à la moindre petite valeur de Ra_T . Toutefois, l'influence de ce paramètre ne se fait sentir que pour les valeurs modérées ou élevées de celui-ci ;

- pour des faibles valeurs de Le , la double diffusion est pratiquement insensible à ce paramètre. Cependant, pour des valeurs assez grandes, une augmentation de Le réduit les grandeurs thermo-convectives et favorise celles solutales.

- l'effet de N sur la double diffusion n'apparaît qu'à partir d'une certaine valeur supérieure à 10.

- par comparaison au cas newtonien ($n = 1$), l'augmentation de n ($n > 1$, fluide dilatant) est de nature à réduire la convection doublement diffusive, alors qu'une diminution de n ($0 < n < 1$, fluide pseudo-plastique) produit l'effet inverse.

- les résultats issus de l'approximation de l'écoulement parallèle sont en bon accord avec ceux numériques, ce qui constitue une validation mutuelle des deux approches adoptées dans la limite des valeurs explorées des paramètres gouvernants.

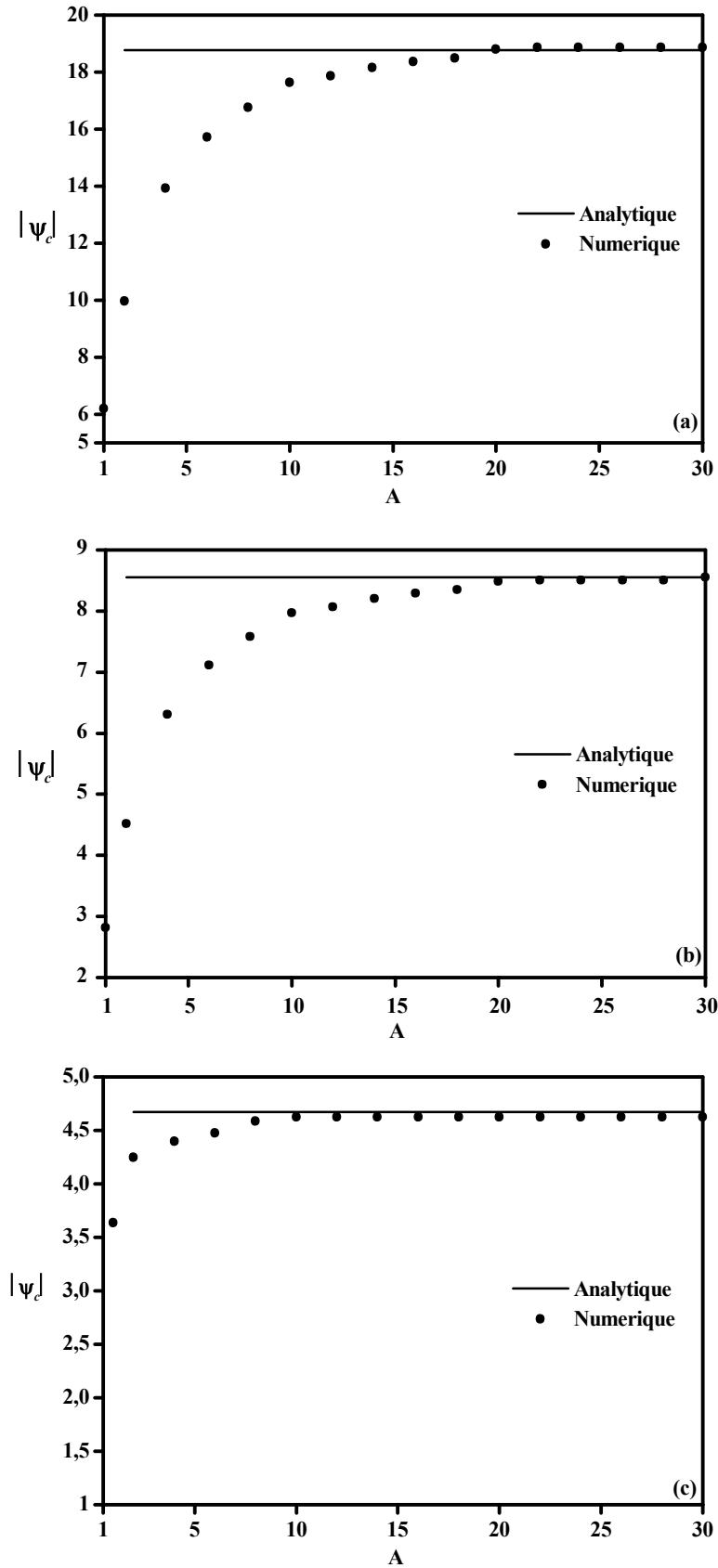


Figure 4.1 : Evolution de $|\psi_c|$, en fonction du rapport de forme A , pour $Ra_T = 10^5$, $Le = 10$, $N = 1$ et différentes valeurs de n , (a) $n = 0.6$, (b) $n = 1.0$ et (c) $n = 1.4$.

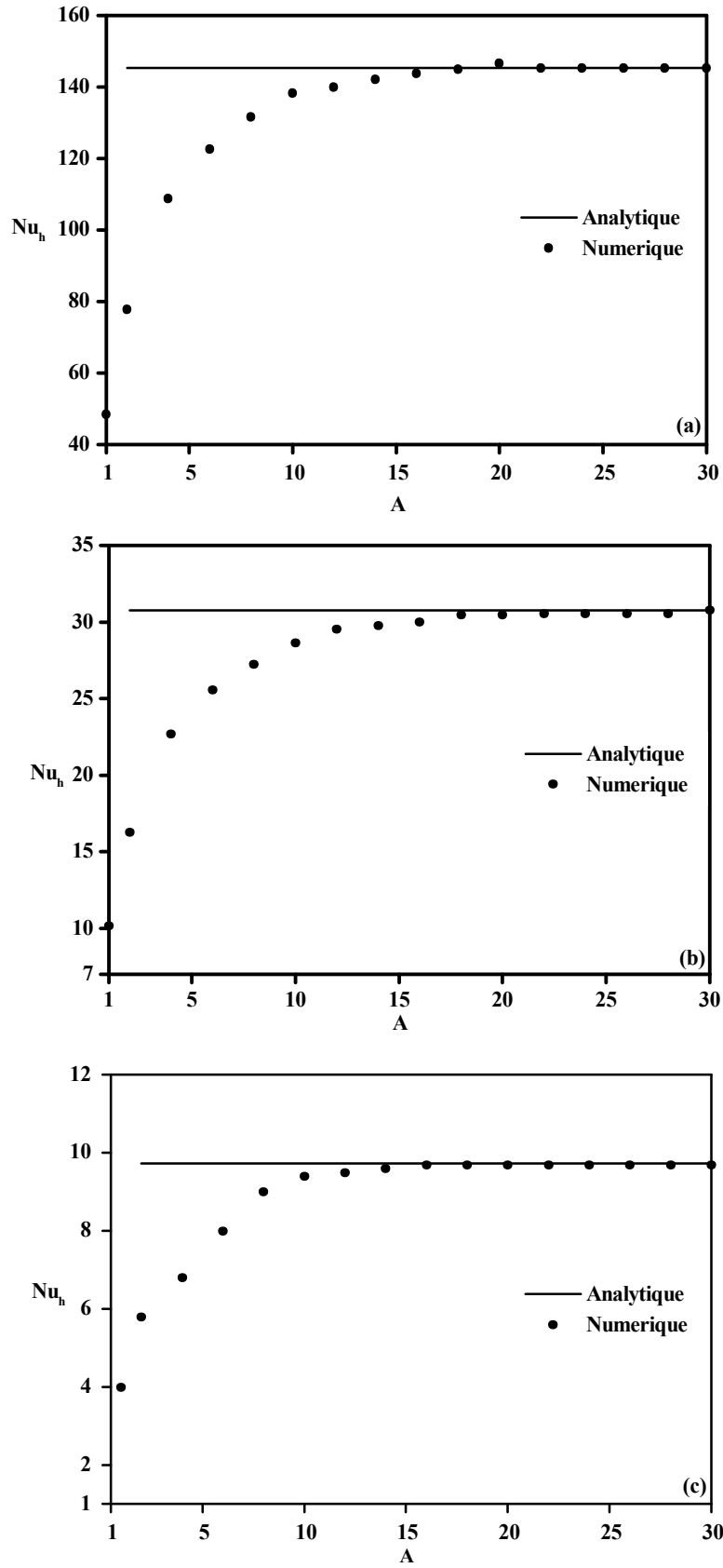


Figure 4.2 : Evolution de Nu_h en fonction du rapport de forme A , pour $Ra_T = 10^5$, $Le = 10$, $N = 1$ et différentes valeurs de n , (a) $n = 0.6$, (b) $n = 1.0$ et (c) $n = 1.4$.

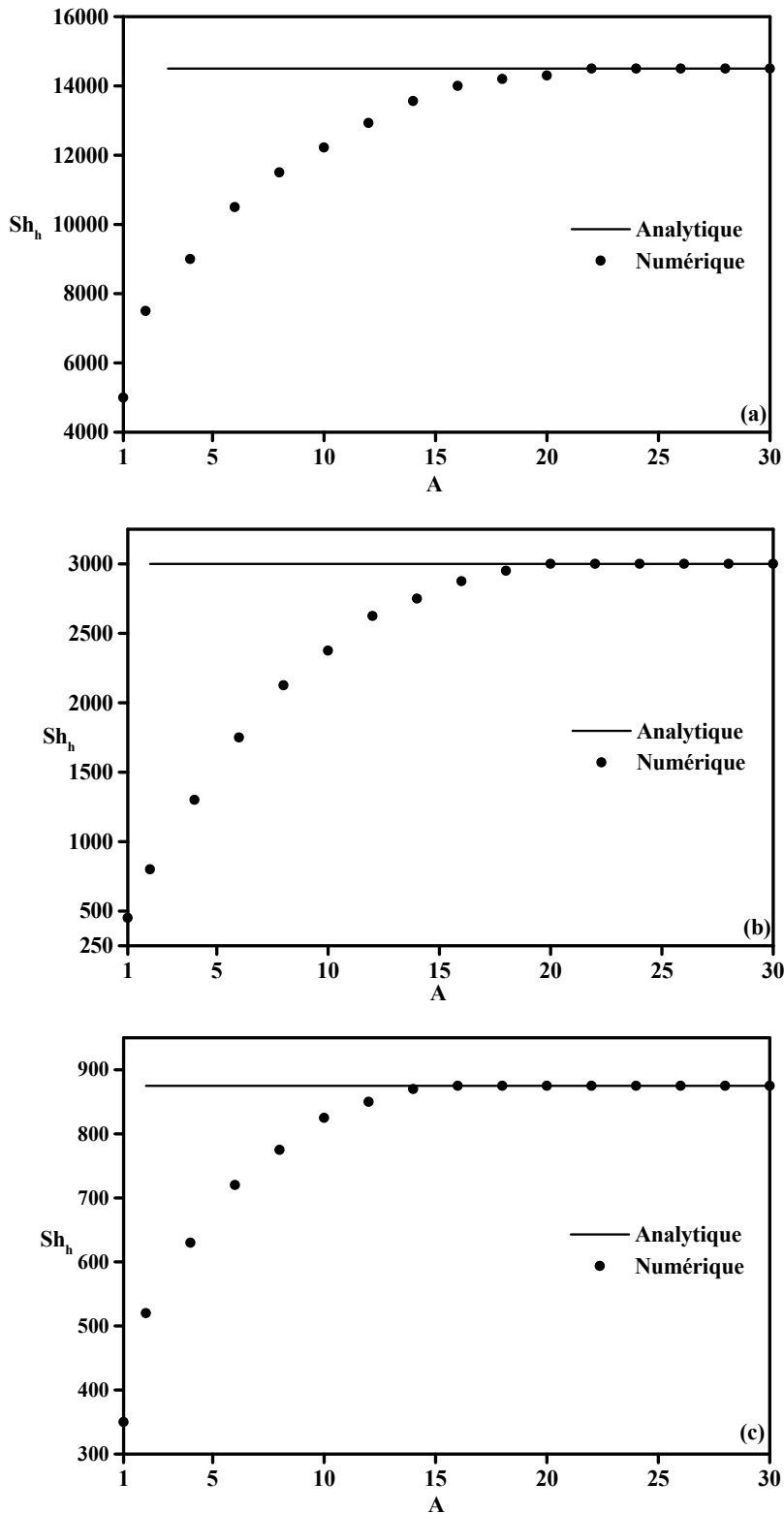


Figure 4.3 : Evolution de Sh_h en fonction du rapport de forme A , pour $Ra_T = 10^5$, $Le = 10$, $N = 1$ et différentes valeurs de n , (a) $n = 0.6$, (b) $n = 1.0$ et (c) $n = 1.4$.

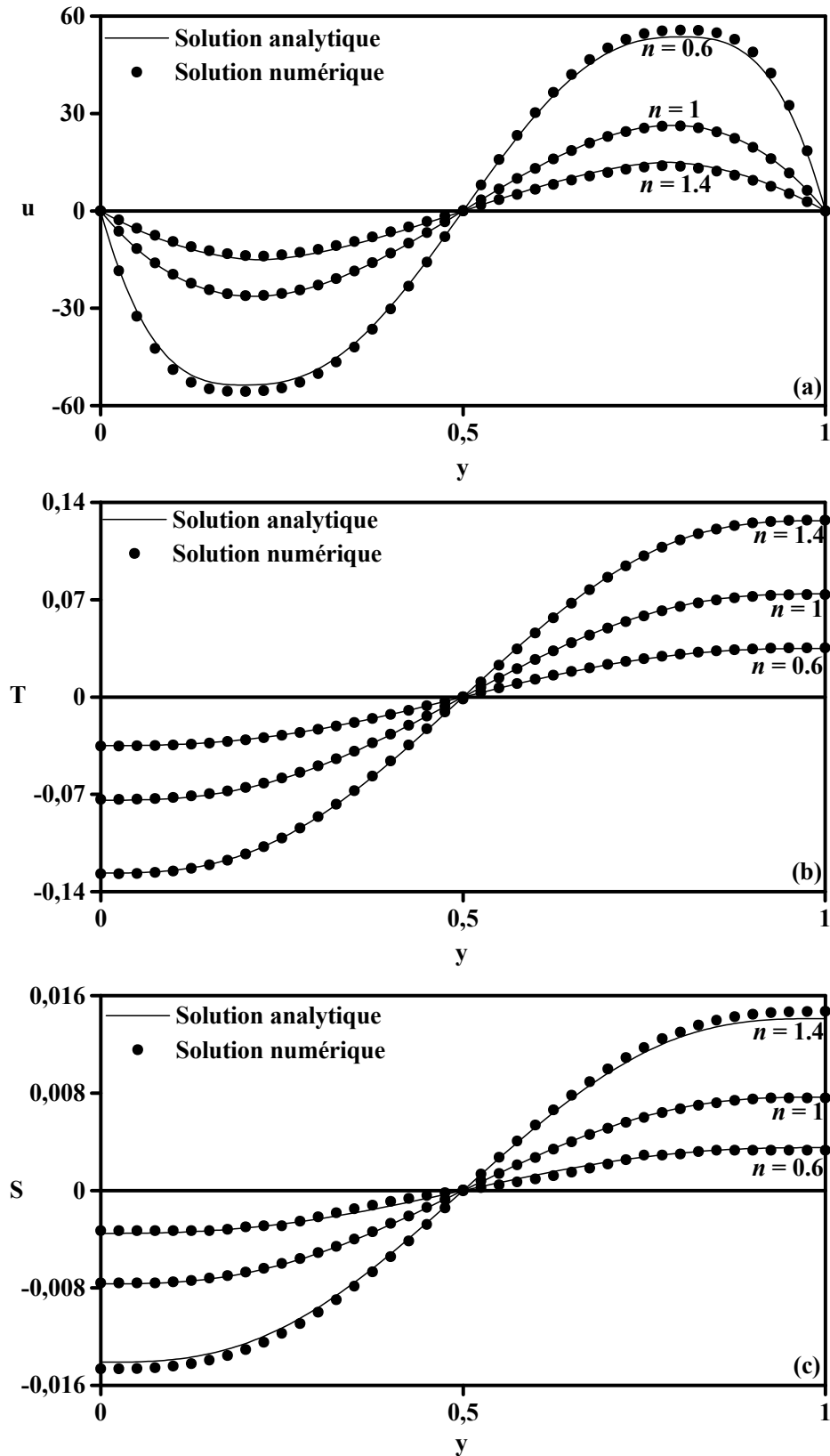
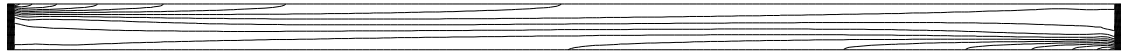
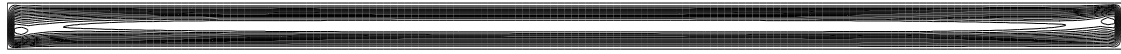
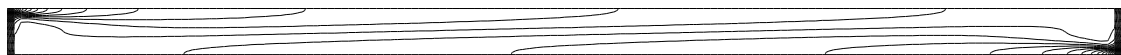


Figure 4.4 : Profils de vitesse horizontale (a), de température (b) et de concentration (c) au centre de la cavité le long de la coordonnée verticale pour $A = 24$, $Ra_T = 10^5$, $Le = 10$, $N = 1$ et différentes valeurs de n .



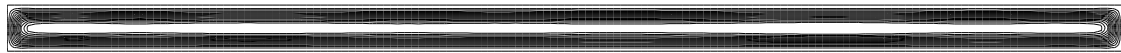
$$\psi_c = -19,1, \text{Nu}_h = 140,3, \text{Sh}_h = 13500,4$$

(a)



$$\psi_c = -8,51, \text{Nu}_h = 30,45, \text{Sh}_h = 2850$$

(b)



$$\psi_c = -4,57, \text{Nu}_h = 9,65, \text{Sh}_h = 863,99$$

(c)

Figure 4.5 : Lignes de courant (en haut), isothermes (au milieu) et iso-concentrations (en bas) pour $A = 24$, $Ra_T = 10^5$, $Le = 10$, $N = 1$ et différentes valeurs de n , (a) $n = 0.6$, (b) $n = 1.0$ et (c) $n = 1.4$.

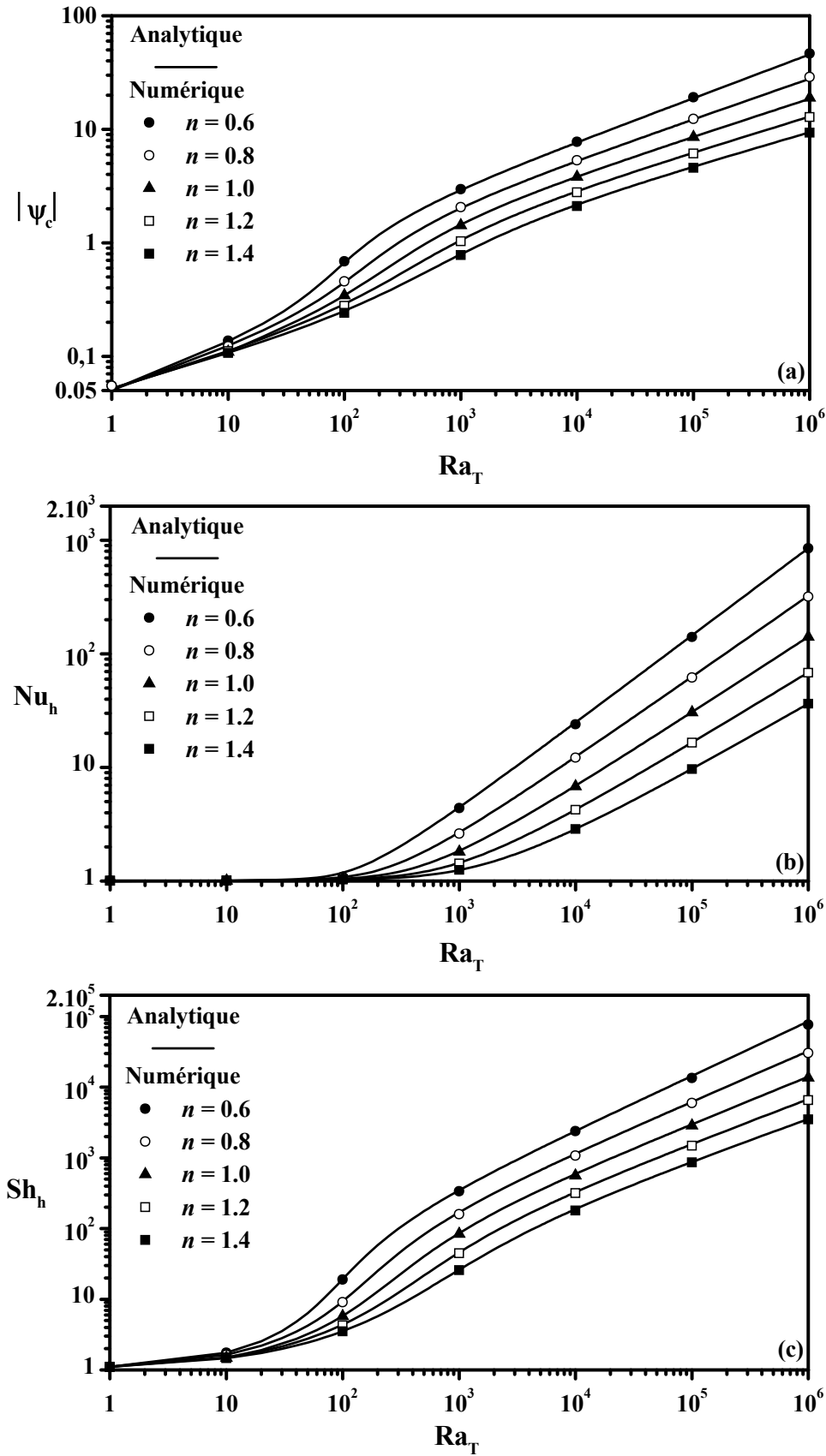


Figure 4.6 : Evolution de la fonction de courant au centre de la cavité (a), du nombre de Nusselt (b) et du nombre de Sherwood (c) avec le nombre de Rayleigh thermique pour $A = 24$, $Le = 10$, $N = 1$ et différentes valeurs de n .

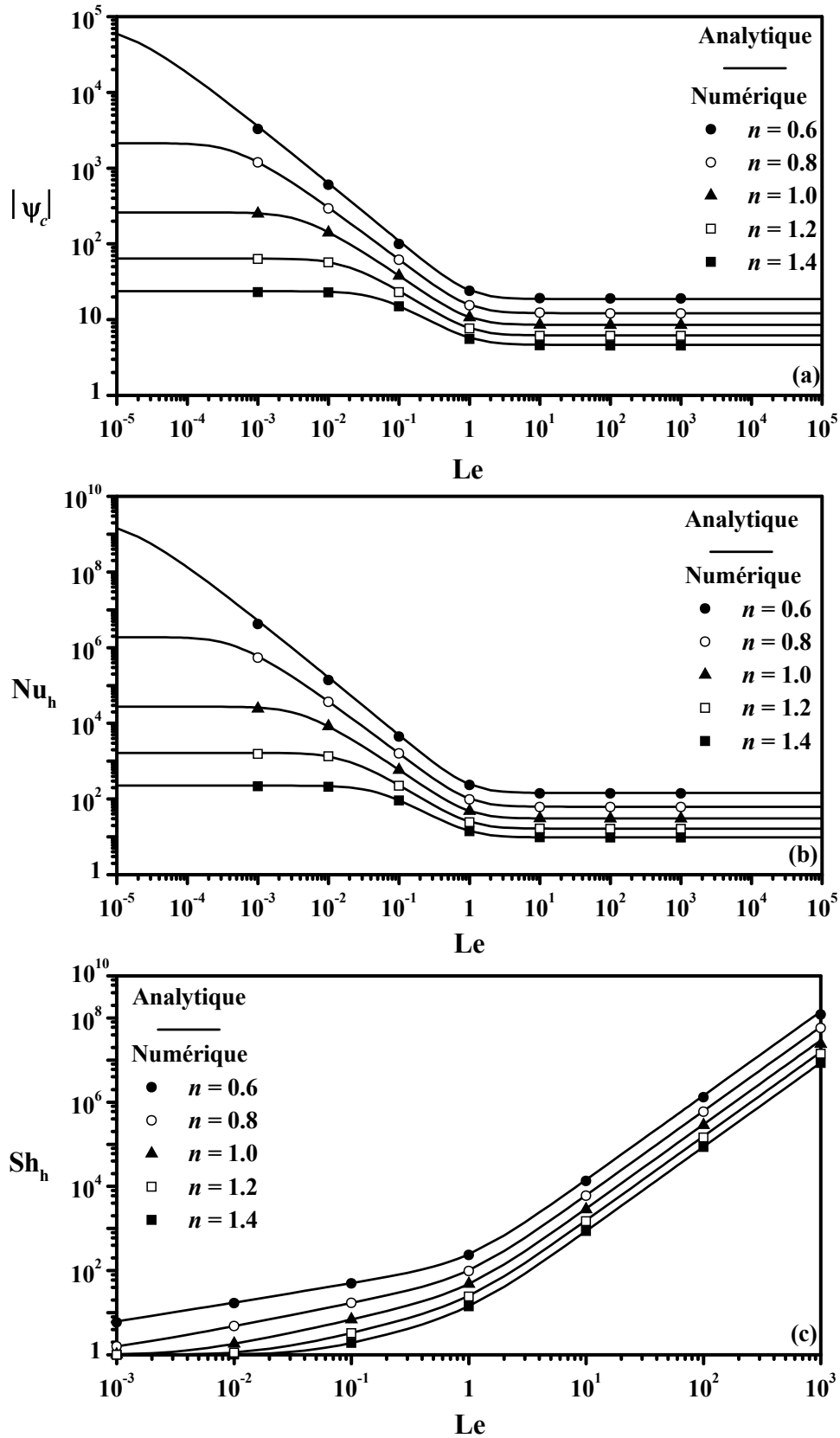


Figure 4.7 : Evolution de la fonction de courant au centre de la cavité (a), du nombre de Nusselt (b) et du nombre de Sherwood (c) avec le nombre de Lewis pour $A = 24$, $Ra_T = 10^5$, $N = 1$ et différentes valeurs de n .

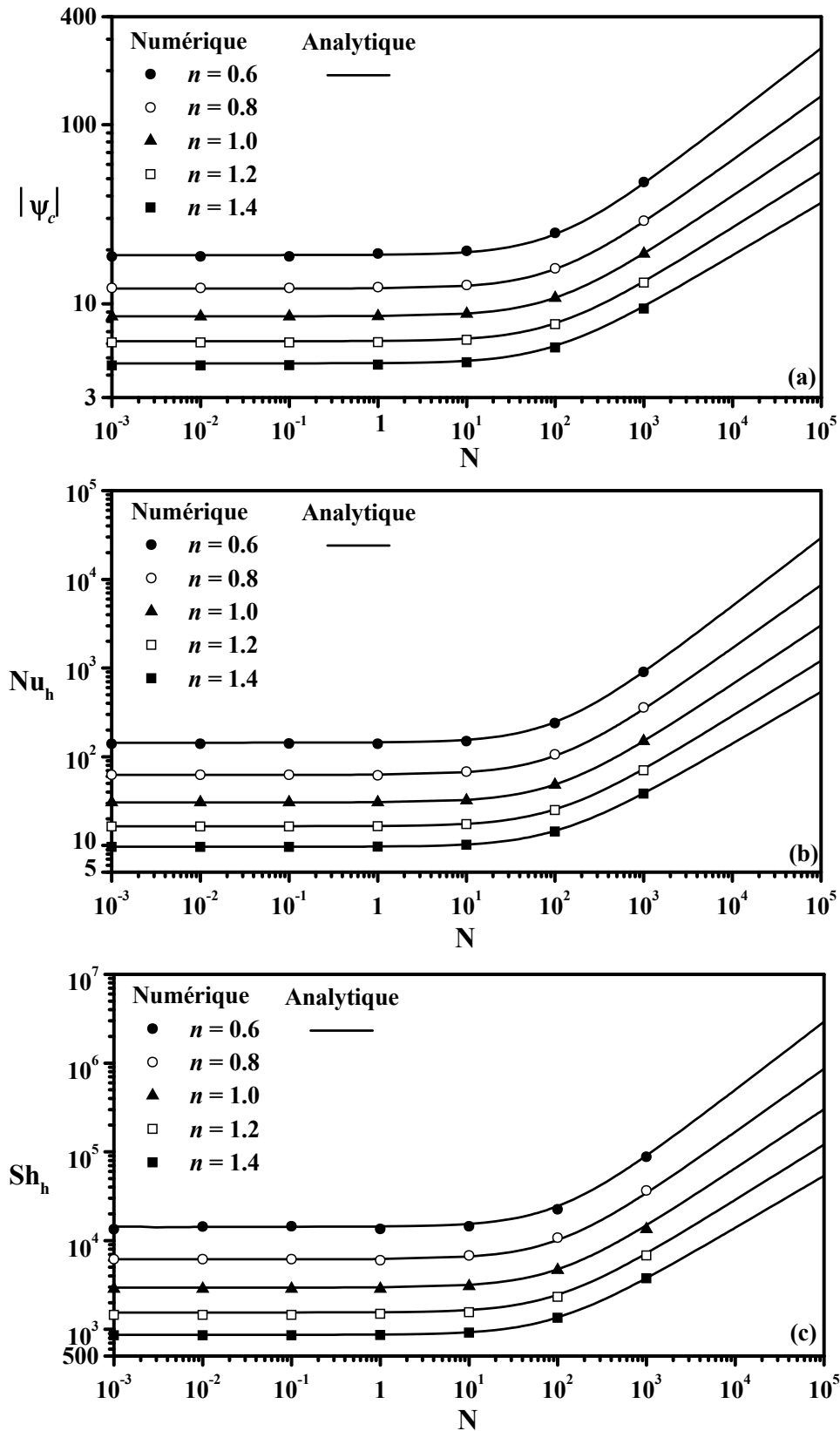


Figure 4.8 : Evolution de la fonction de courant au centre de la cavité (a), du nombre de Nusselt (b) et du nombre de Sherwood (c) avec le rapport des forces de volume pour $A = 24$, $Ra_T = 10^5$, $Le = 10$ et différentes valeurs de n .

CHAPITRE 5

CONVECTION NATURELLE DOUBLEMENT DIFFUSIVE DANS UNE CAVITE RECTANGULAIRE HORIZONTALE CHAUFFEE ET SALEE PAR LE BAS

5.1. Introduction

Dans ce chapitre, la cavité précédemment considérée est, cette fois-ci, exposée à des densités de flux verticaux de chaleur et de masse ($a = c = 0$ et $b = d = 1$). Les mêmes démarches que celles décrites au chapitre 4 sont adoptées. D'un point de vue numérique, un maillage uniforme de 321×81 est jugé suffisant pour modéliser la convection doublement diffusive dans une cavité horizontale de rapport de forme $A = 24$. Cette valeur de A permet de retrouver les résultats analytiques, issus de l'approximation de l'écoulement parallèle valable dans la limite d'une cavité allongée ($A \gg 1$) dans la gamme de variation des paramètres physiques tels que, le nombre de Rayleigh thermique généralisé, Ra_T , le nombre de Lewis, Le , le rapport des forces de volume, N et l'indice de comportement, n . Notons que pour les raisons discutées au chapitre 4, on prend une valeur infinie pour le nombre de Prandtl, Pr . Enfin, l'influence des paramètres précités, sur la structure de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse, est examinée.

5.2. Validation de l'hypothèse de l'écoulement parallèle

L'examen des figures 5.1-5.3, qui illustrent les lignes de courant, les isothermes et les iso-concentrations obtenues pour $A = 24$, $Ra_T = 10^4$, $Le = 10$ et différentes valeurs de N et n , permet de prouver l'existence d'une solution analytique pour le présent problème, étant donné le parallélisme des lignes de courant et la stratification des champs de température et de concentration dans la région excluant les bords latéraux de la cavité. La figure 5.4, comparant les résultats analytiques (traits continus) et numériques (cercles pleins), en terme de profils transversaux de la vitesse horizontale, de la température et de la concentration, rend bien compte de l'excellent accord entre les résultats des deux approches adoptées et démontre, de ce fait, la

validation réciproque de l'hypothèse de l'écoulement parallèle et du code numérique utilisé.

Une confirmation générale de l'accord enregistré peut être donnée par les figures (5.5)-(5.13), (5.14)-(5.16) et (5.17)-(5.19), montrant les évolutions de ψ_c , Nu_v et Sh_v respectivement en fonction de Ra_T , de Le et de N .

5.3. Détermination du seuil d'apparition de la convection

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer les conditions d'apparition de la convection doublement diffusive. Pour le présent problème, le mouvement du fluide démarre à partir d'une valeur critique du nombre de Rayleigh thermique appelée seuil de convection. Celle-ci peut se manifester soit sous forme d'un régime multicellulaire (avec des températures et des concentrations imposées constantes) ou unicellulaire (avec des flux de chaleur et de masse imposés constants comme c'est le cas ici). A ce propos, des essais numériques ont été effectués pour différentes valeurs de Le , Ra_T , N et n . Les résultats présentés dans le tableau 5.1 et dans les figures 5.5 à 5.13, pour $A = 24$ et différentes valeurs de Le , N et n , ont été obtenus selon la procédure qui consiste à suivre l'évolution de ψ_c en diminuant graduellement Ra_T jusqu'à une valeur critique, Ra_{TC} , appelée seuil de convection, caractérisée par $\psi_c \approx 0$, $Nu_v \approx 1$ et $Sh_v \approx 1$ (régime de diffusion pure). Comme il apparaît sur le tableau 5.1, pour une valeur donnée de Le et N , Ra_{TC} augmente avec n , montrant à l'évidence une naissance précoce de la convection dans le cas d'un comportement pseudo-plastique ($0 < n < 1$) par comparaison à celui dilatant ($n > 1$).

Pour $n=1$, il est aisé d'établir explicitement l'expression de Ra_{TC} à partir de l'état de repos. Ainsi, en faisant $E \rightarrow 0$ dans l'équation (3.50), on obtient $Ra_{TC} = 720/(1 + NLe)$, ce qui est impossible à obtenir pour $n \neq 1$, en raison de la forte non linéarité de cette équation. En outre, étant tronqué, le modèle en loi de puissance d'Ostwald-De Waele n'est pas valable aux taux de cisaillements faibles ou nuls, ce qui constitue une difficulté supplémentaire quant à la recherche de Ra_{TC} . Devant ceci, une démarche similaire à celle utilisée par Ozoe et Churchill (1972) et Lamsaadi (2006) s'est imposée, qui consiste à déterminer Ra_{TC} par extrapolation des courbes

d'évolution de Nu_v avec Ra_T , à $Nu_v = 1$. Ce choix est dicté par des raisons de précision.

Pour différentes valeurs de n , les variations de Ra_{TC} avec Le pour $N=1$ et avec N pour $Le=10$, sont représentées, respectivement, sur les figures 5.20 et 5.21. Comme on peut le constater, Ra_{TC} diminue suivant la même tendance indépendamment de la valeur de n .

Par ailleurs, pour $n=1$, lorsque $N \rightarrow 0$ (convection thermique pure), Ra_{TC} tend vers 720, valeur déjà trouvée par Lamsaadi (2006).

Le	N	n				
		0.6	0.8	1	1.2	1.4
0.1	0.1	302	497	712	758	800
	1	271	452	655	695	732
	10	115	232	360	382	402
1	0.1	276	457	655	696	732
	1	152	252	360	382	402
	10	28	45	65	70	73
10	0.1	115	250	360	420	442
	1	27	44	65	83	87
	10	3	5	7	9	10

Tableau 5.1 : Valeurs du nombre de Rayleigh thermique critique pour $A = 24$ et différentes valeurs de Le , N et n .

5.4. Effet de l'indice de comportement

Si l'on se réfère à la figure (5.4) sur laquelle sont présentés les profils transversaux de la vitesse horizontale, de la température et de la concentration, les conclusions tirées dans le cas des flux horizontaux de chaleur et de masse (Cf. chapitre 4), demeurent valables pour la présente configuration de flux. Quant à l'influence de n , la convection doublement diffusive est favorisée par la pseudo-plasticité ($0 < n < 1$),

défavorisée par la dilatance ($n > 1$) et le comportement newtonien ($n = 1$) jouant un rôle intermédiaire.

5.5. Effet du nombre de Rayleigh thermique

Tous les résultats relatifs à l'influence du nombre de Rayleigh thermique, Ra_T , s'accordent sur le rôle bénéfique de ce paramètre dans la promotion de la convection doublement diffusive. Cela semble bien évident si l'on se réfère à l'équation (2.28), dans laquelle Ra_T fait partie intégrante du terme source, S_Ω , qui est le moteur de la convection. Toutefois, bien que l'effet de Ra_T soit positif, il diffère selon l'indice de comportement n . En fait, comme en témoignent les figures (5.5)-(5.13), la convection est beaucoup plus sensible à tout changement dans la valeur de Ra_T pour $0 < n < 1$ (comportement pseudo-plastique) que pour $n > 1$ (comportement dilatant), ce qui met en exergue les effets opposés de n et de Ra_T et ce, dans la limite des valeurs explorées de Le et de N .

5.6. Effet du nombre de Lewis

L'effet de Le sur les quantités ψ_c , Nu_v et Sh_v est illustré sur les figures (5.14)-(5.16), pour $Ra_T = 10^3$, $N = 10$ et différentes valeurs de n . En général les évolutions de ψ_c , Nu_v avec Le présentent des allures semblables se caractérisant par :

- un premier palier, aux faibles valeurs de Le , dont l'étendue se réduit sérieusement en diminuant n ;
- un maximum dont l'amplitude et la position augmente et diminue, respectivement, quand n diminue ;
- un deuxième palier, aux valeurs élevées de Le , dont l'étendue diminue en augmentant le paramètre n .

Tout ceci traduit les effets conjugués de Le et n où la contribution de Le dans l'écoulement et le transfert thermique, ne se fait sentir qu'en augmentant la valeur de n .

Pour ce qui est de l'évolution de Sh_v , on peut constater:

- un palier inférieur synonyme d'une diffusion massique pure ($Sh_v \approx 1$) et ce malgré la domination des forces solutales ($N = 10$) qui sont censées promouvoir la convection. Ce palier prend de l'ampleur avec l'accroissement de n qui joue le rôle retardateur du comportement dilatant vis-à-vis de la convection ;
- une montée de plus en plus rapide en augmentant n qui exprime l'apport progressif de la convection solutale dans le transfert de masse par le biais de Le ;
- un palier supérieur, dont l'amplitude diminue légèrement avec n , où la convection massique nettement dominante n'apporte rien au transfert correspondant.

5.7. Effet du rapport des forces de volume

Les variations de ψ_c , Nu_v et Sh_v en fonction de N sont présentées sur la figure (5.17)- (5.19), pour $Le = 10$, $Ra_T = 10^3$ et différentes valeurs de n . La transition du régime thermique dominant ($N \ll 1$) vers celui solutal dominant ($N \gg 1$) est clairement illustrée. D'après ces courbes, lorsque N augmente de 10^{-3} à 10^3 , différentes tendances se manifestent :

- ψ_c demeure constante jusqu'à une certaine valeur de N , qui diminue avec n , puis croît d'une façon monotone. La constance de ψ_c s'explique par la nette domination des forces de volume d'origine thermique, quant à sa croissance elle est due aux forces de volume d'origine solutales qui viennent apporter leur contribution à la promotion de l'écoulement de façon progressive.
- Nu_v et Sh_v suivent dans leur évolution deux paliers inférieur et supérieur articulés par une montée intermédiaire, dont l'étendue augmente avec n . Ces trois comportements expriment, respectivement, l'entière domination des forces thermiques, l'apport graduel des forces solutales et la totale prépondérance de ces dernières.

5.8. Conclusion

La convection naturelle doublement diffusive dans une cavité rectangulaire horizontale, remplie d'un fluide newtonien et non-newtonien de type Ostwald-de Waele, chauffée et salée verticalement à l'aide de densités uniformes de flux de

chaleur et de masse, est entreprise analytiquement et numériquement. Les principaux résultats sont résumés dans les points suivants :

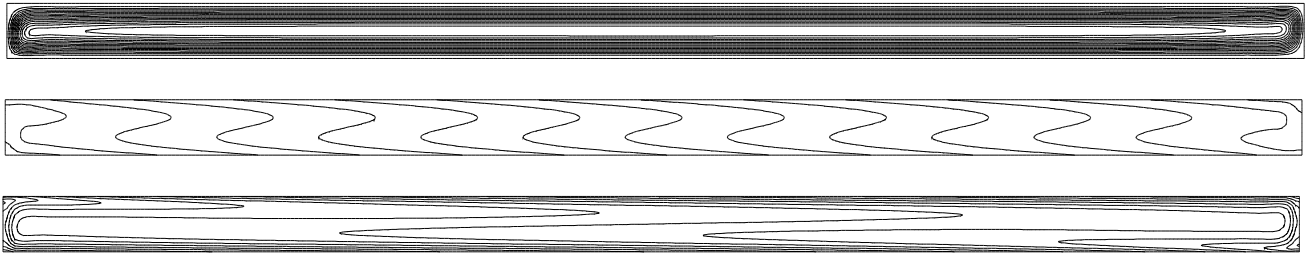
- l'existence d'une valeur seuil pour le nombre de Rayleigh thermique qui marque la naissance de la convection, contrairement au cas des flux horizontaux de chaleur et de masse étudié dans le chapitre 4. Ce seuil dépend des paramètres Le , N et n .

- les champs d'écoulement, de température et de concentration ainsi que les transferts thermiques et solutaux résultants sont sensibles au comportement du fluide. Ainsi, pour des valeurs données de Le et N , comparées au cas newtonien ($n = 1$), une diminution de n (cas pseudo-plastique, $0 < n < 1$) précipite l'apparition de la convection doublement diffusive, alors qu'une augmentation de n (cas dilatant, $n > 1$) retarde cette apparition.

- la convection doublement diffusive ne se trouve affectée significativement par le rapport des forces de volume N qu'à partir d'une certaine valeur de celui-ci, laquelle dépend de n .

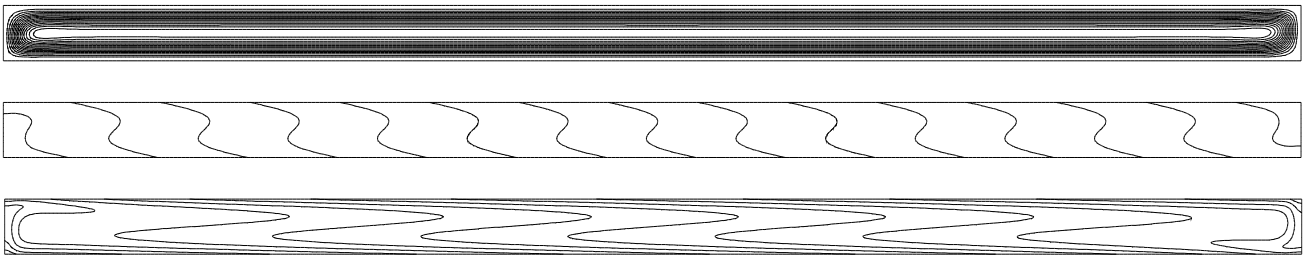
- l'existence de deux valeurs seuils pour le nombre de Lewis, Le , marquant respectivement la fin et le début de deux paliers limites, qui dépendent de n . Les grandeurs thermo-solutales varient avec Le et en dehors desquelles ces grandeurs restent constantes.

- tous les résultats de la solution analytique, sont en accord avec ceux obtenus numériquement pour une grille de 321×81 et un rapport d'aspect $A = 24$.



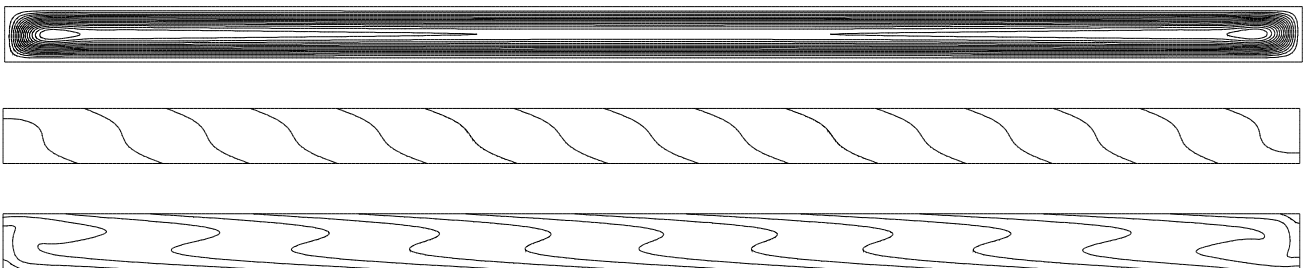
$$\psi_c = -18.95, \text{Nu}_v = 3.43, \text{Sh}_v = 3.48$$

(a)



$$\psi_c = -5.66, \text{Nu}_v = 2.85, \text{Sh}_v = 3.32$$

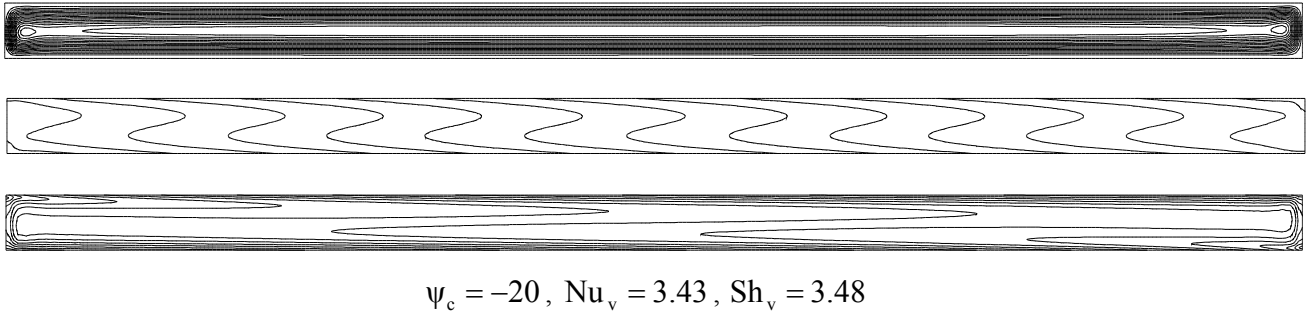
(b)



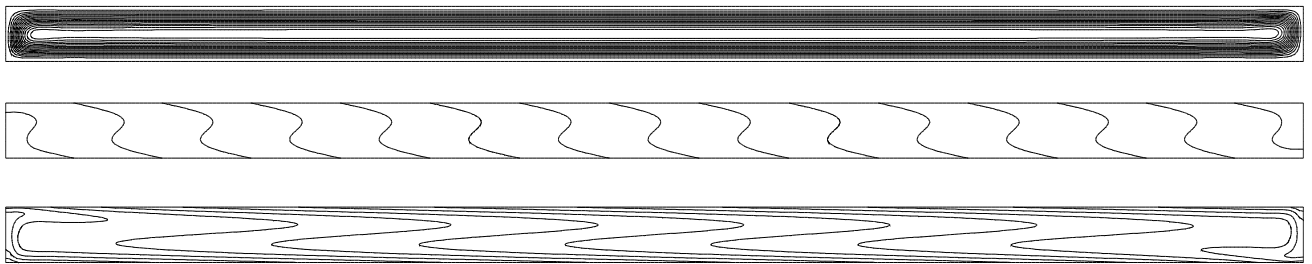
$$\psi_c = -2.33, \text{Nu}_v = 1.90, \text{Sh}_v = 3.23$$

(c)

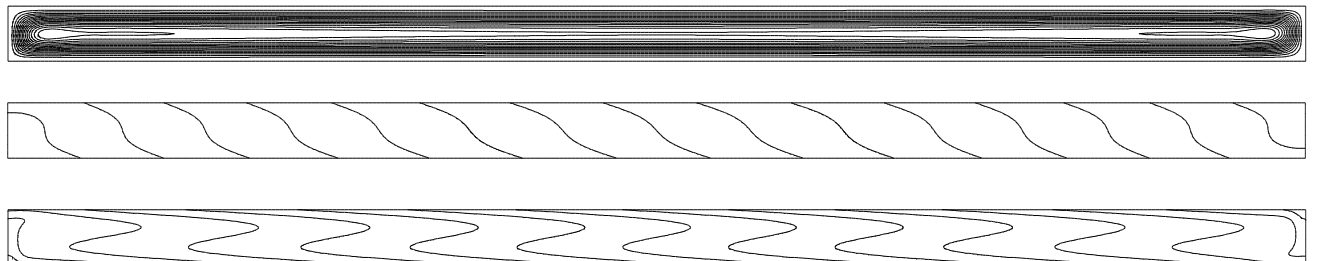
Figure 5.1 : Lignes de courant, isothermes et iso-concentrations pour $A=24$, $Ra_T=10^4$, $Le=10$, $N=0.1$ et différentes valeurs de n : (a) $n=0.6$, (b) $n=1.0$ et (c) $n=1.4$.



(a)

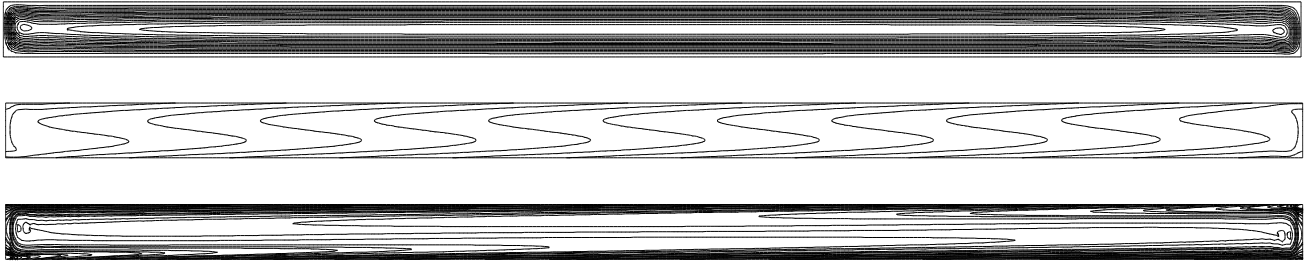


(b)



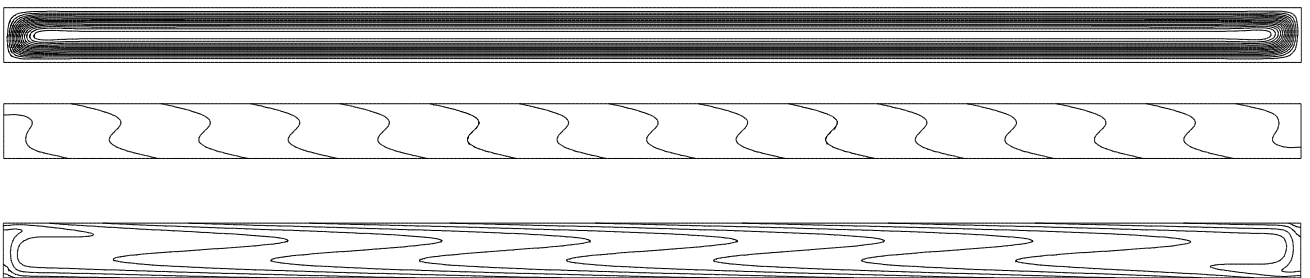
(c)

Figure 5.2 : Lignes de courant, isothermes et iso-concentrations pour $A=24$, $Ra_T=10^4$, $Le=10$, $N=1$ et différentes valeurs de n : (a) $n=0.6$, (b) $n=1.0$ et (c) $n=1.4$.



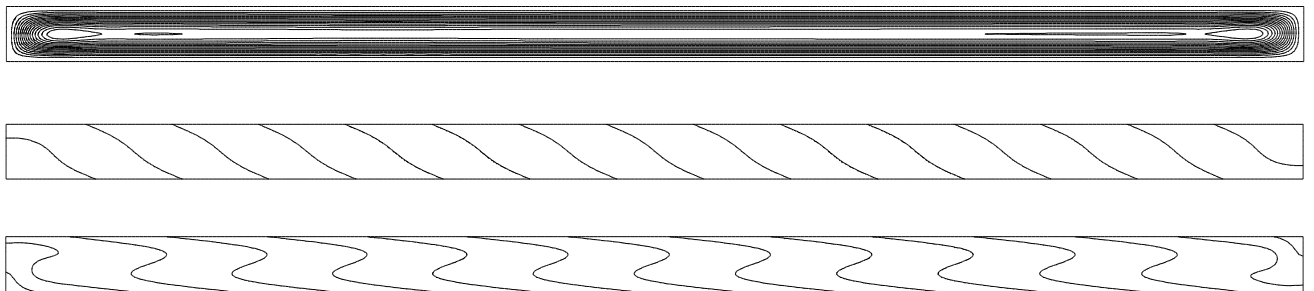
$$\psi_c = -29.14, \text{Nu}_v = 3.46, \text{Sh}_v = 3.48$$

(a)



$$\psi_c = -8.19, \text{Nu}_v = 3.07, \text{Sh}_v = 3.33$$

(b)



$$\psi_c = -3.48, \text{Nu}_v = 2.35, \text{Sh}_v = 3.25$$

(c)

Figure 5.3 : Lignes de courant, isothermes et iso-concentrations pour $A=24$, $Ra_T=10^4$, $Le=10$, $N=10$ et différentes valeurs de n : (a) $n=0.6$, (b) $n=1.0$ et (c) $n=1.4$.

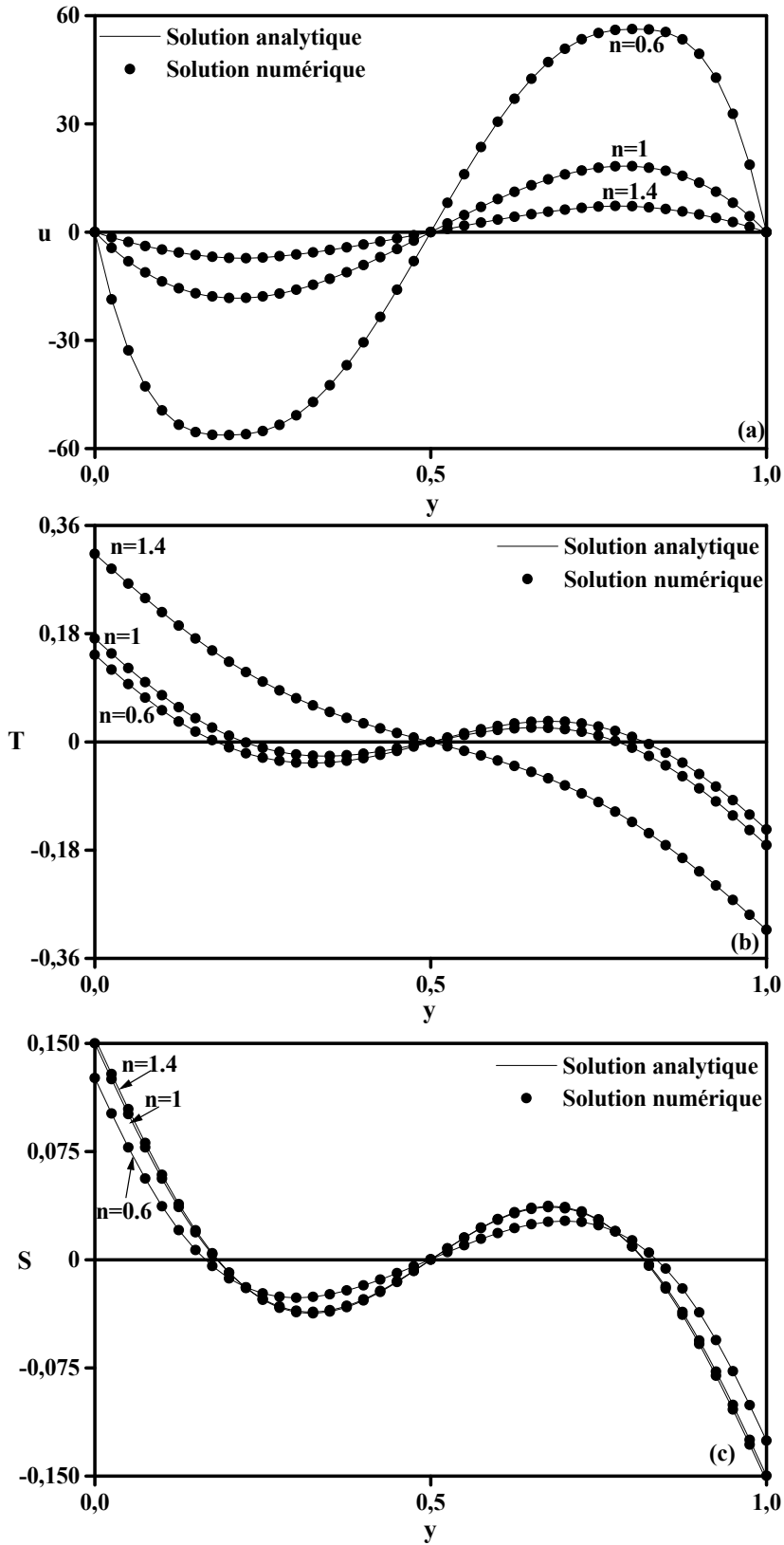


Figure 5.4 : Profils de vitesse horizontale (a), de température (b) et de concentration (c) à mi-longueur de la cavité, le long de la coordonnée verticale pour $A = 24$, $Ra_T = 10^4$, $Le = 10$, $N = 1$ et différentes valeurs de n .

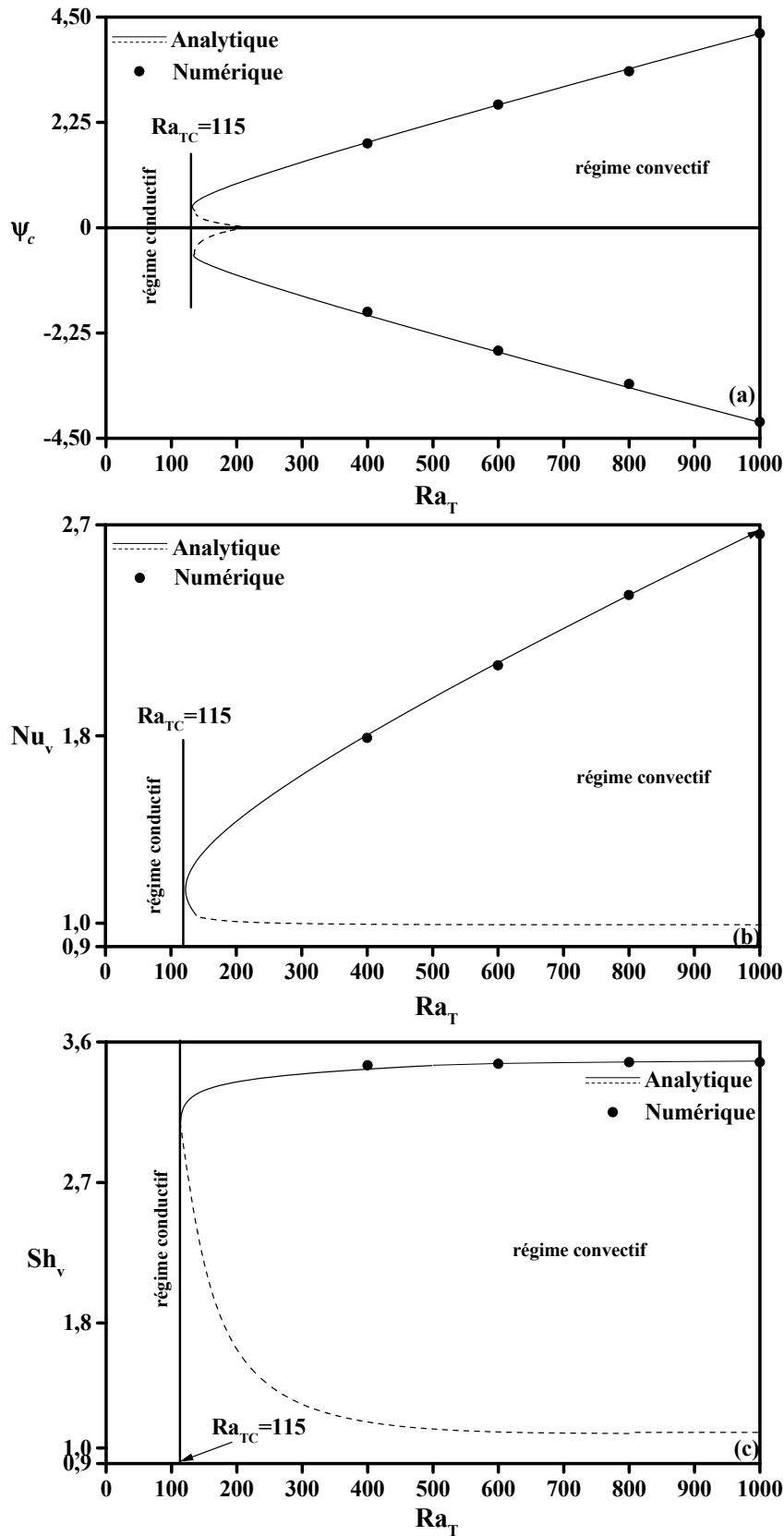


Figure 5.5 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b) et de Sh_v (c) avec le nombre de Rayleigh thermique pour $A = 24$, $Le = 10$, $N = 0.1$ et $n = 0.6$.

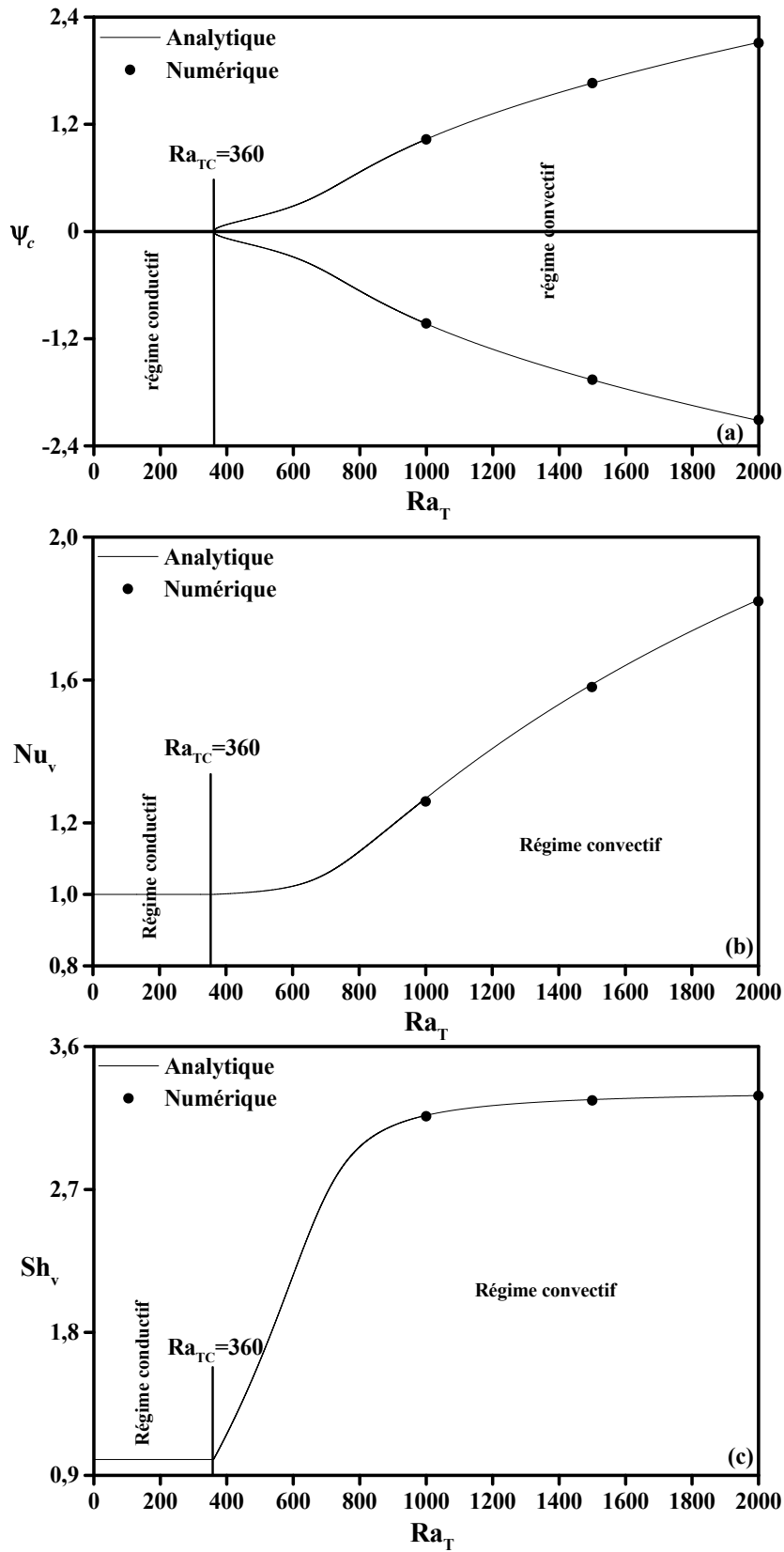


Figure 5.6 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b) et de Sh_v (c) avec le nombre de Rayleigh thermique pour $A = 24$, $Le = 10$, $N = 0.1$ et $n = 1$.

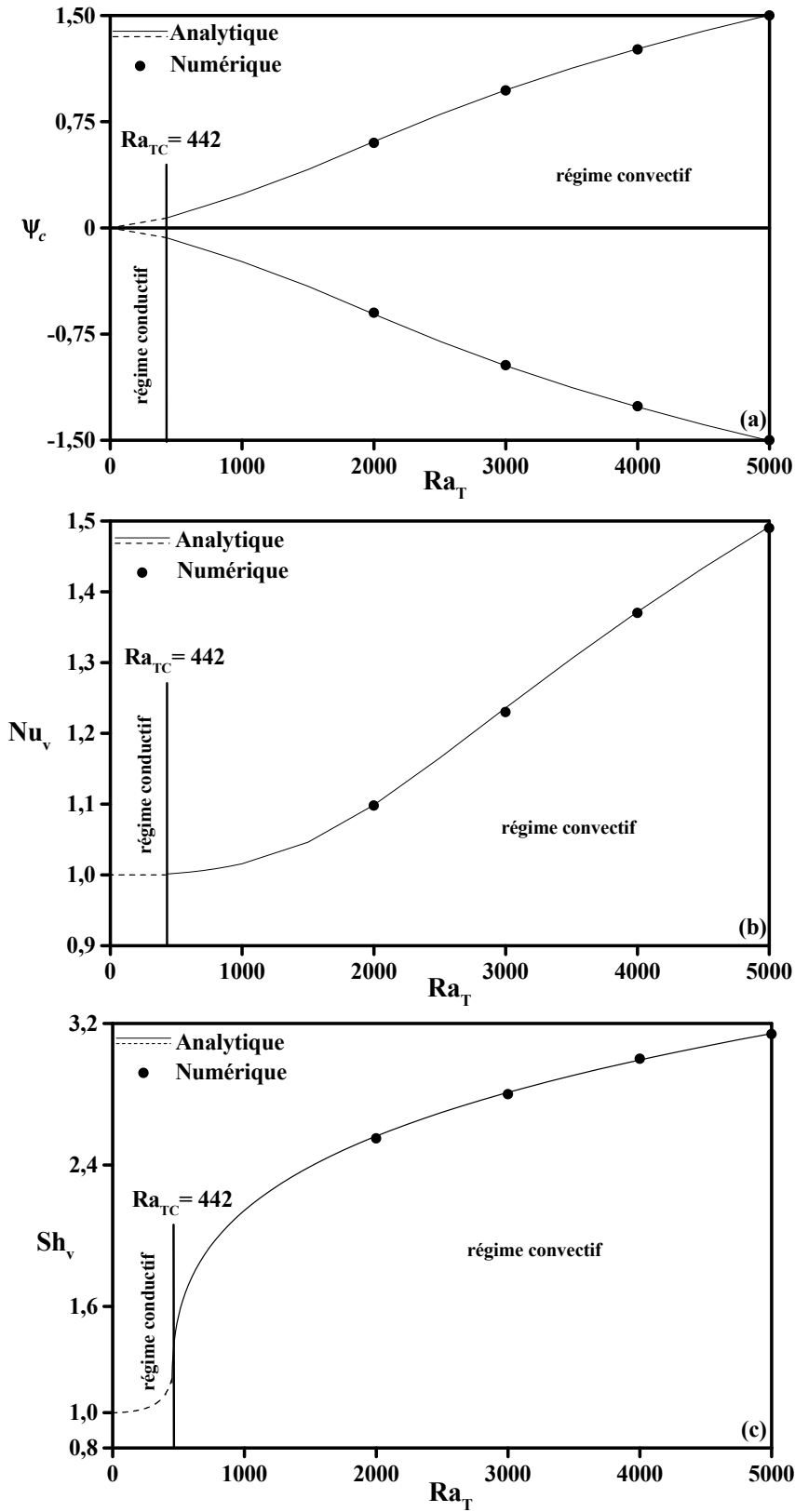


Figure 5.7 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b) et de Sh_v (c) avec le nombre de Rayleigh thermique pour $A = 24$, $Le = 10$, $N = 0.1$ et $n = 1.4$.

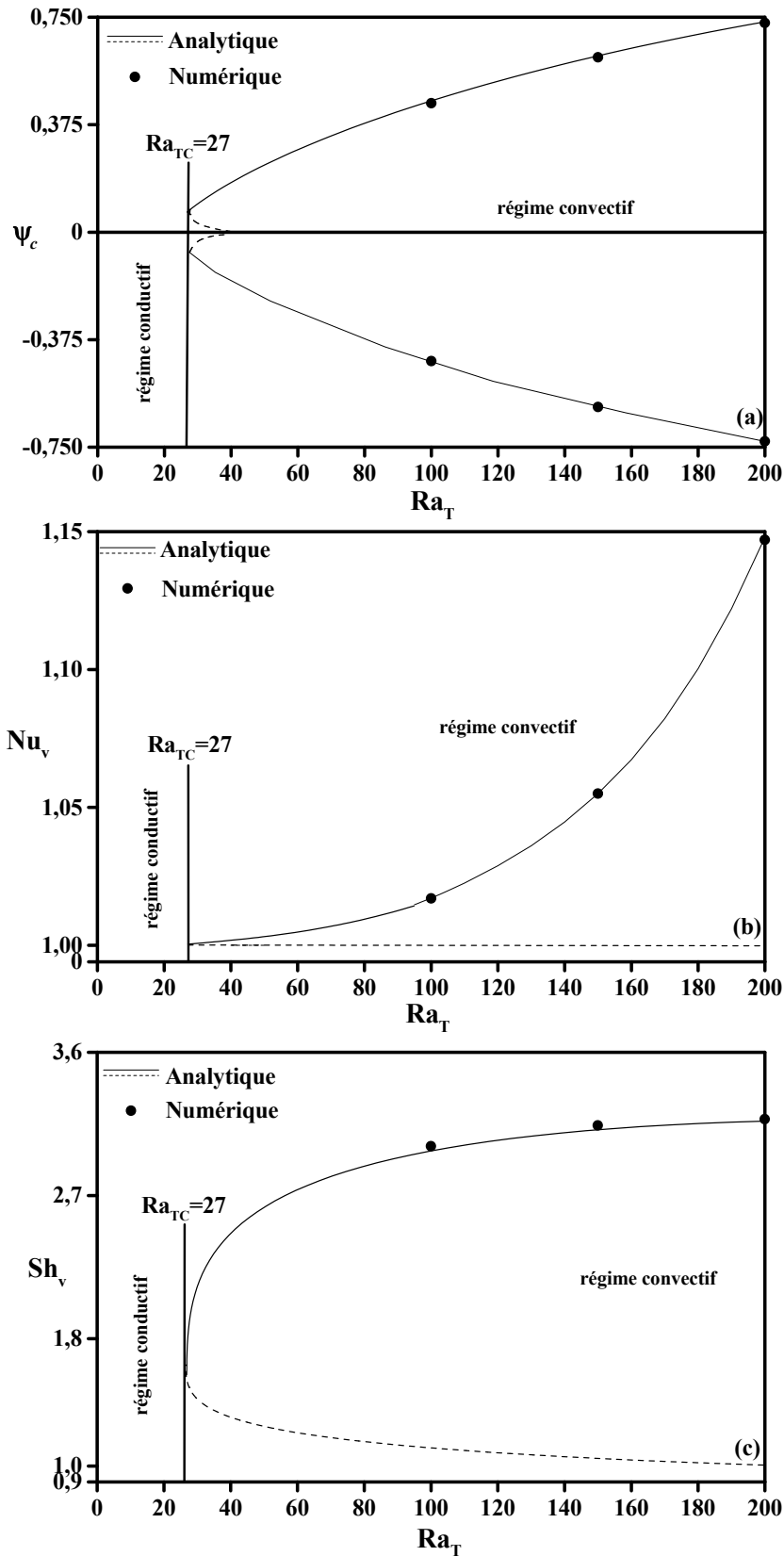


Figure 5.8 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b) et de Sh_v (c) avec le nombre de Rayleigh thermique pour $A = 24$, $Le = 10$, $N = 1$ et $n = 0.6$.

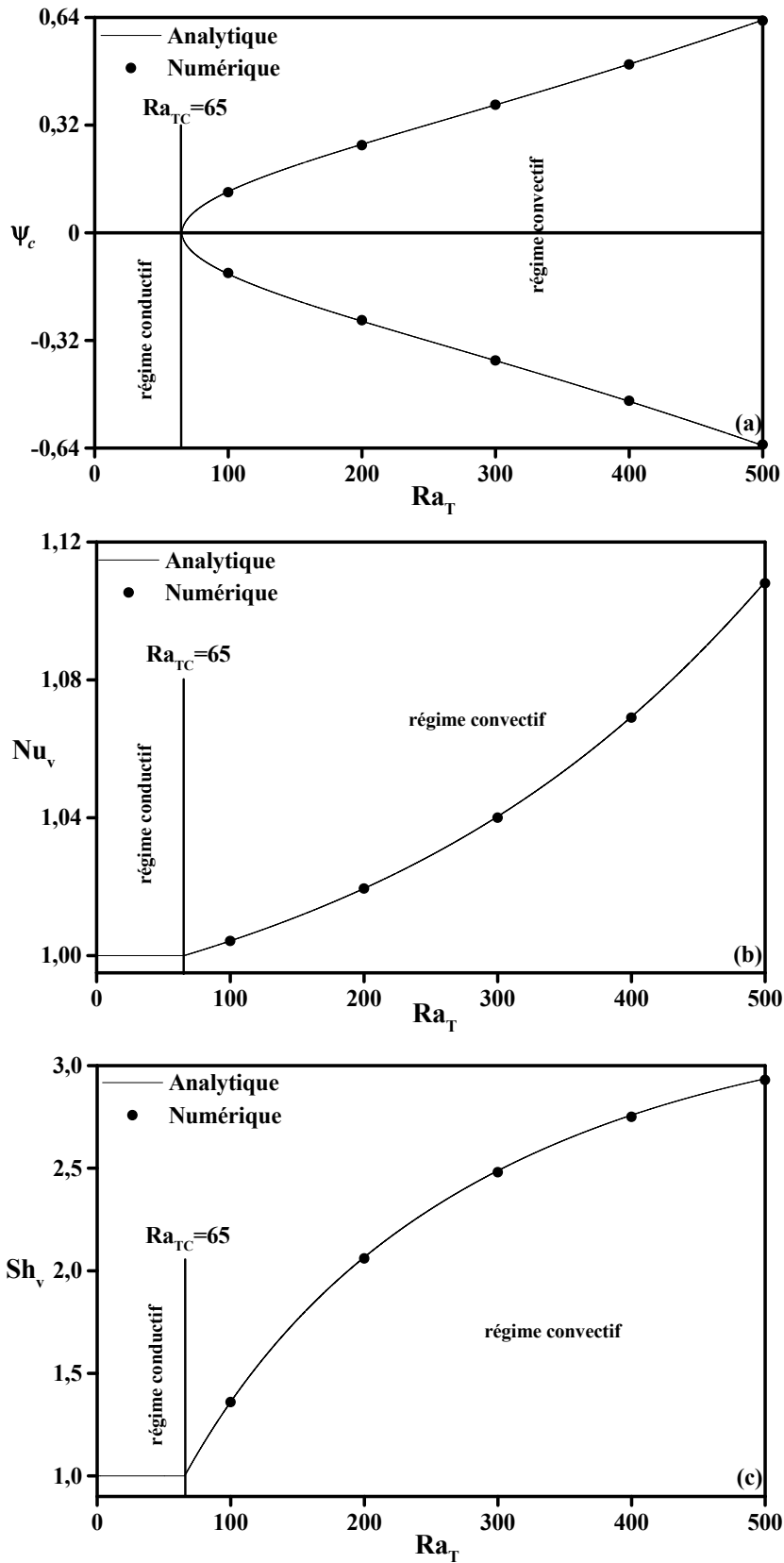


Figure 5.9 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b) et de Sh_v (c) avec le nombre de Rayleigh thermique pour $A = 24$, $Le = 10$, $N = 1$ et $n = 1$.

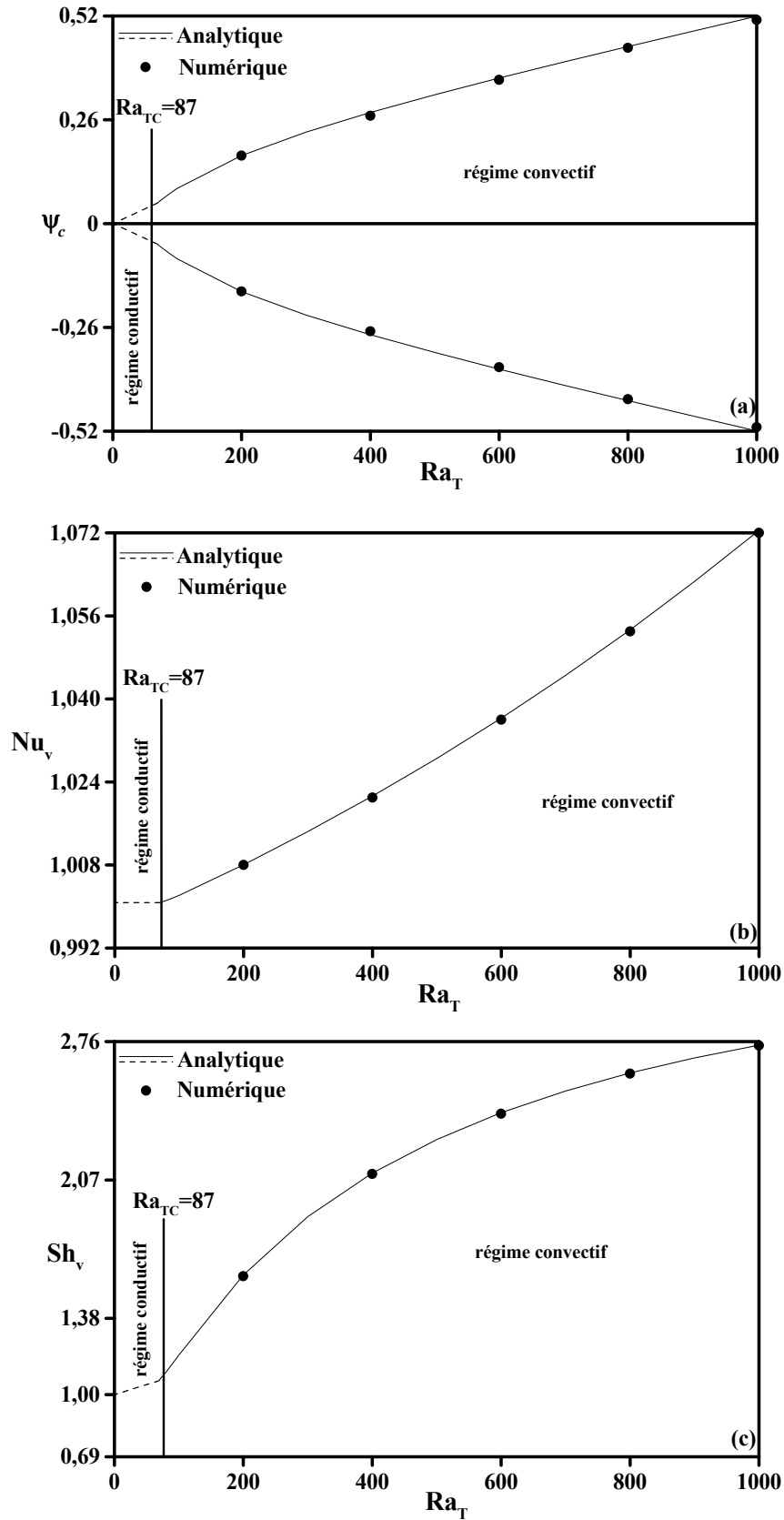


Figure 5.10 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b) et de Sh_v (c) avec le nombre de Rayleigh thermique pour $A = 24$, $Le = 10$, $N = 1$ et $n = 1.4$.

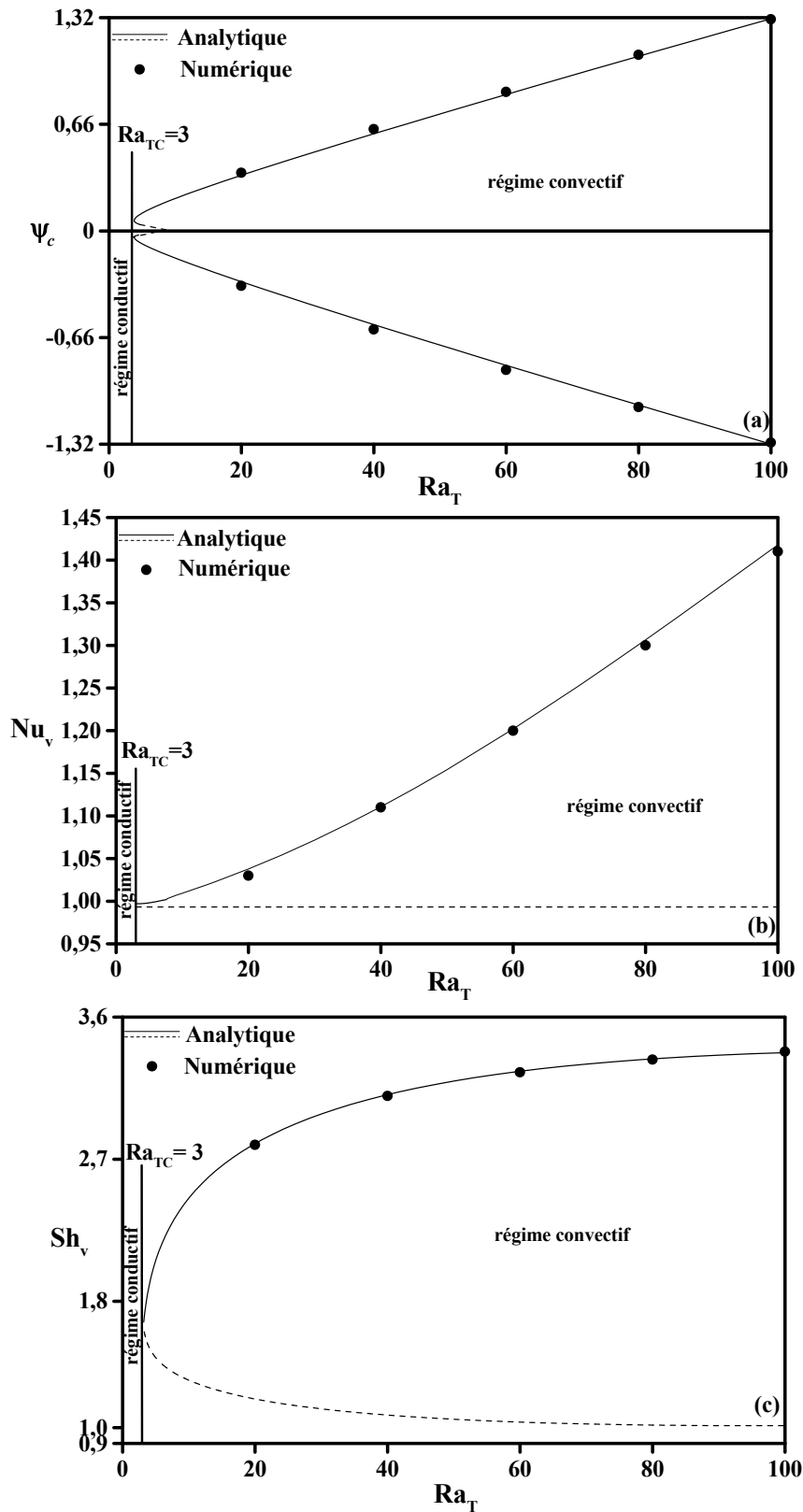


Figure 5.11 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b) et de Sh_v (c) avec le nombre de Rayleigh thermique pour $A = 24$, $Le = 10$, $N = 10$ et $n = 0.6$.

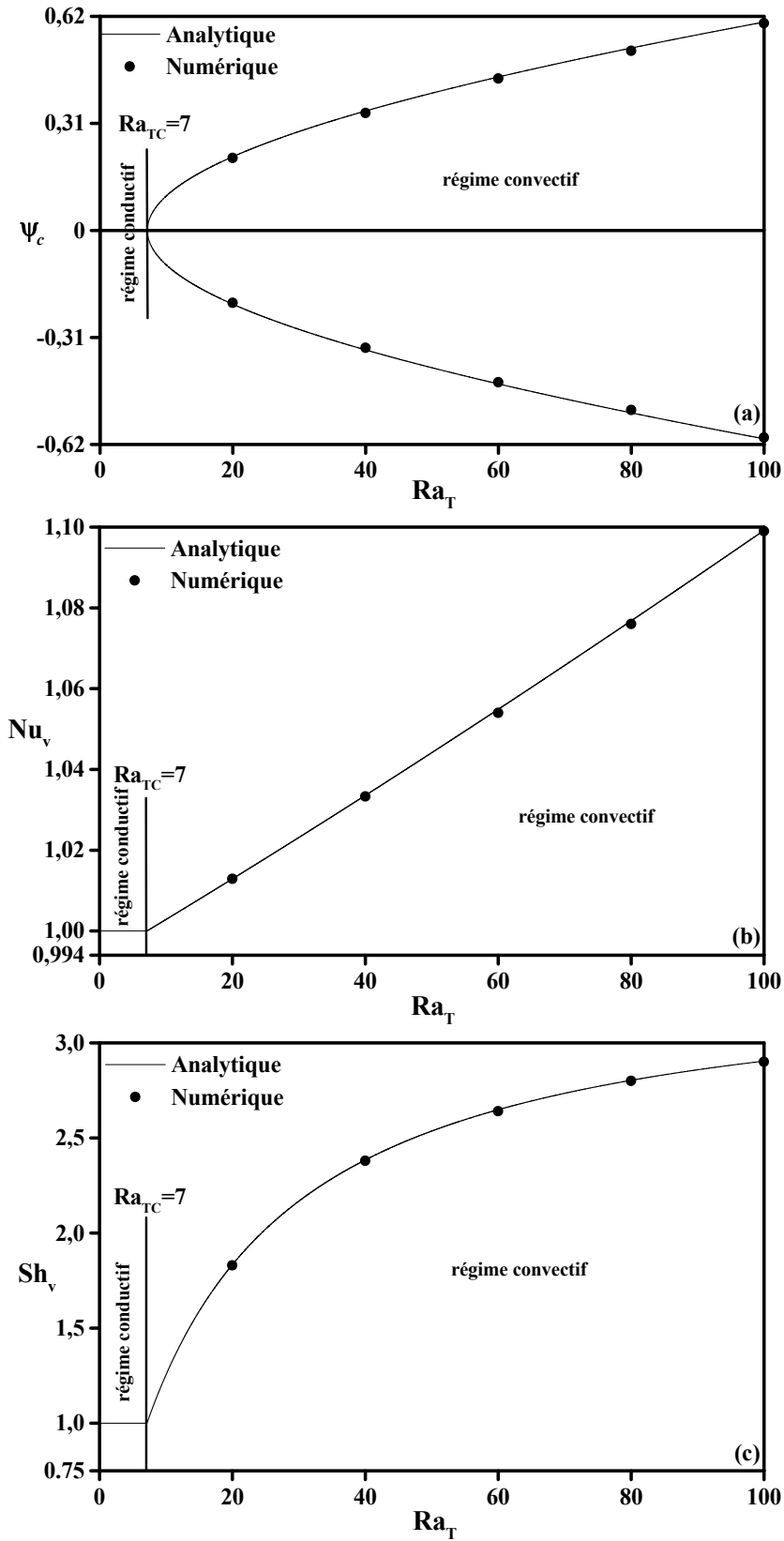


Figure 5.12 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b) et de Sh_v (c) avec le nombre de Rayleigh thermique pour $A = 24$, $Le = 10$, $N = 10$ et $n = 1$.

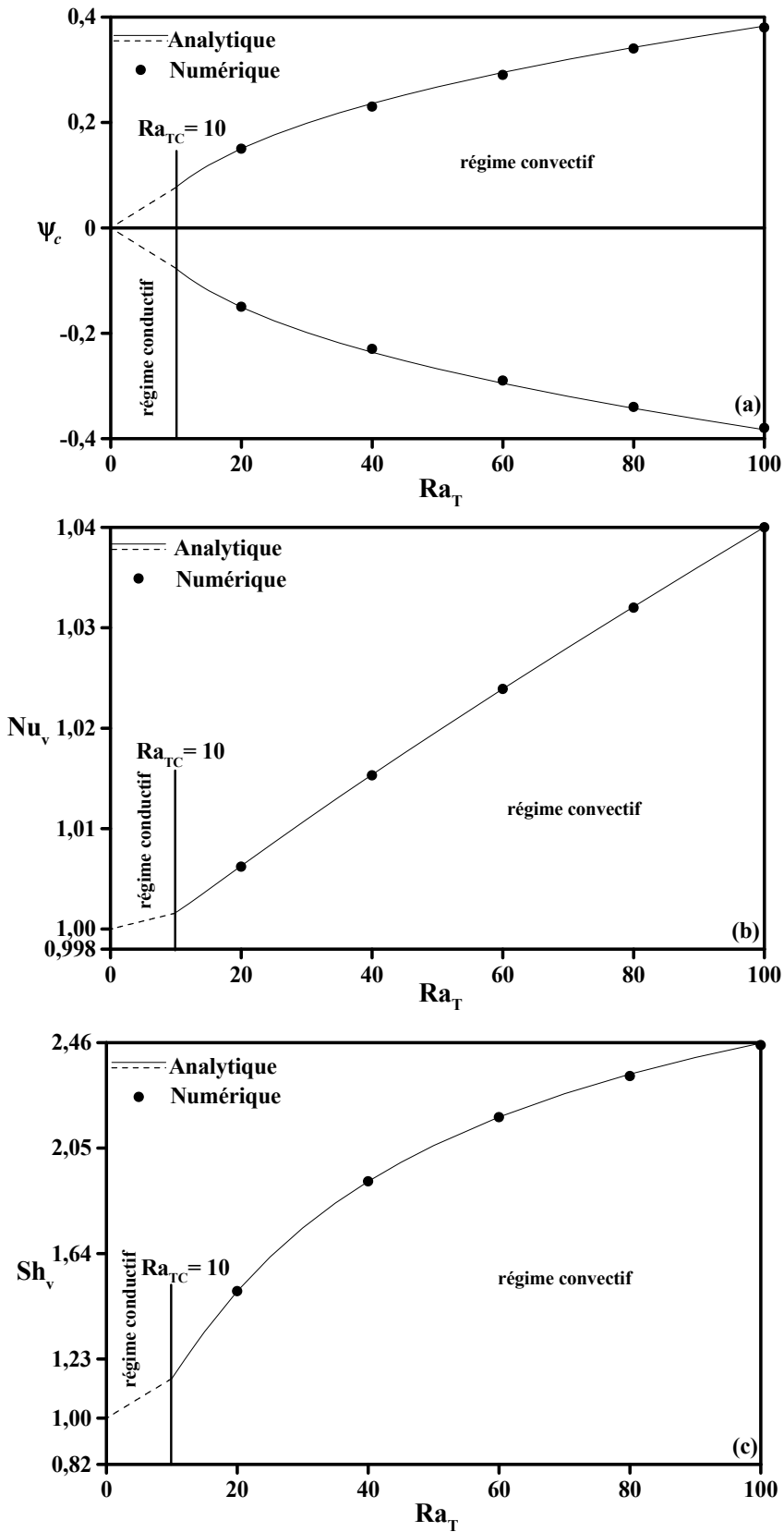


Figure 5.13 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b) et de Sh_v (c) avec le nombre de Rayleigh thermique pour $A = 24$, $Le = 10$, $N = 10$ et $n = 1.4$.

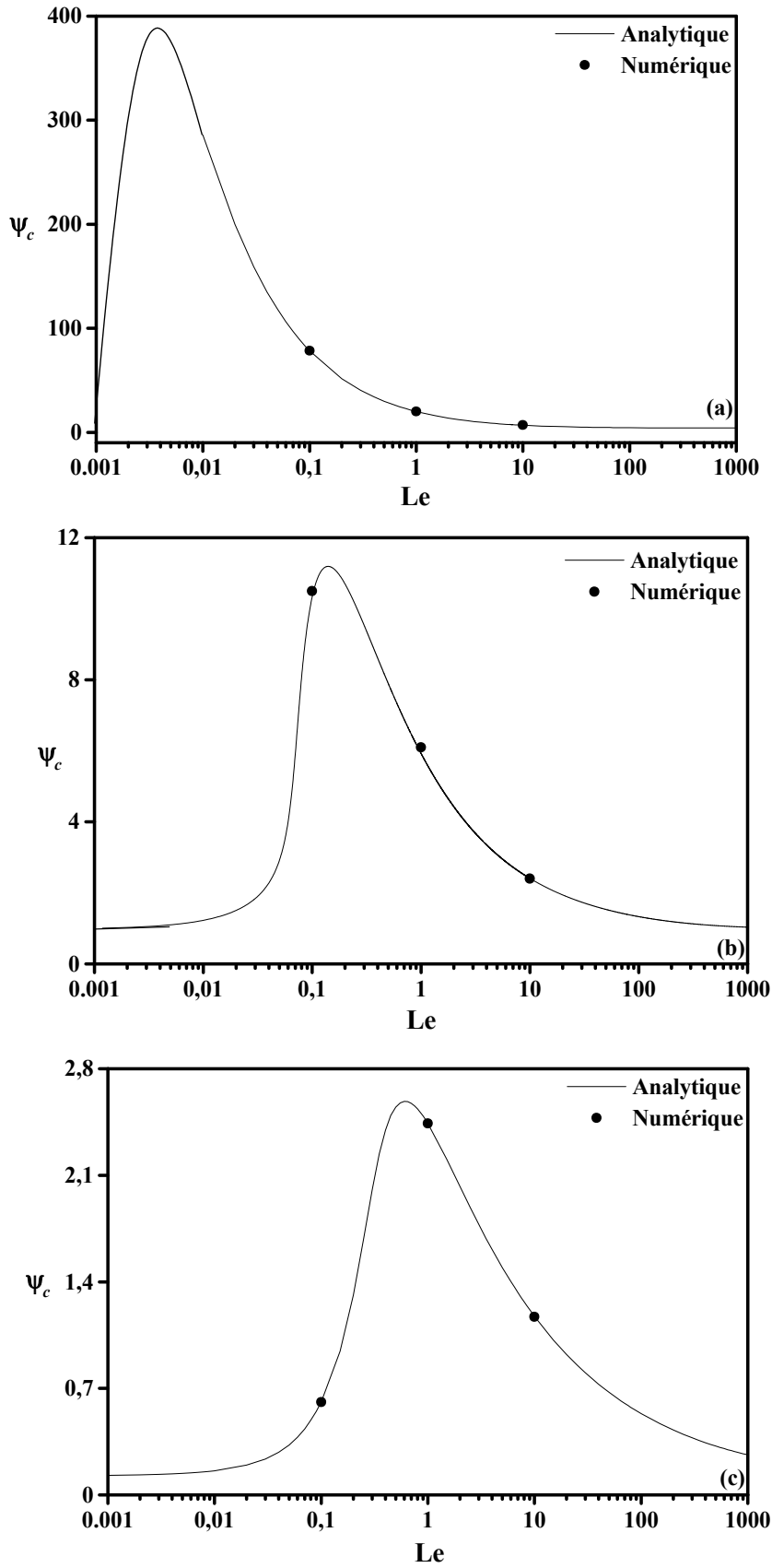


Figure 5.14 : Effet du nombre de Lewis sur ψ_c pour $A = 24$, $Ra_T = 10^3$, $N = 10$ et différentes valeurs de n , (a) $n = 0.6$, (b) $n = 1$ (c) $n = 1.4$.

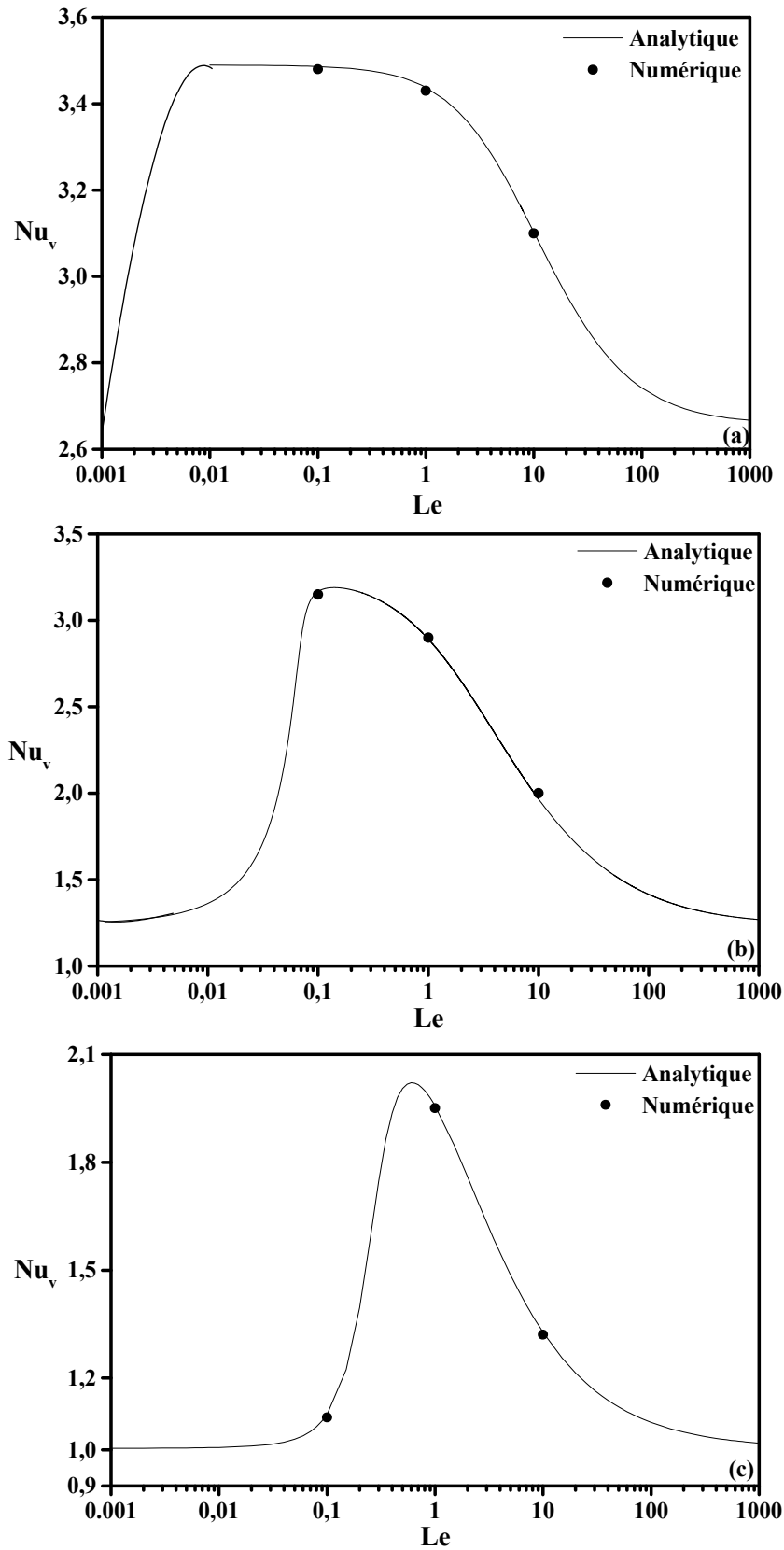


Figure 5.15 : Effet du nombre de Lewis sur Nu_v pour $A = 24$, $Ra_T = 10^3$, $N = 10$ et différentes valeurs de n , (a) $n = 0.6$, (b) $n = 1$ (c) $n = 1.4$.

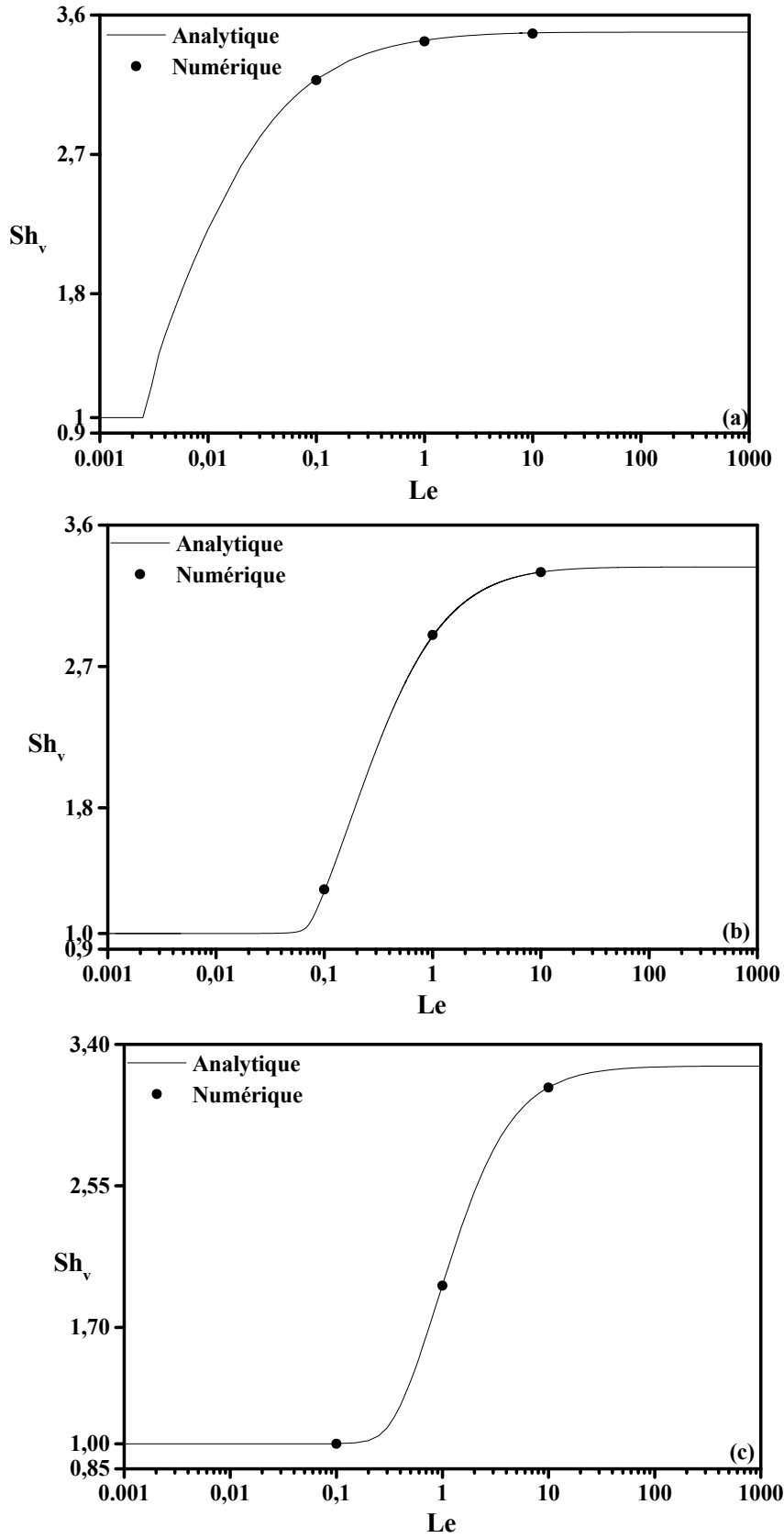


Figure 5.16 : Effet du nombre de Lewis sur Sh_v pour $A = 24$, $Ra_T = 10^3$, $N = 10$ et différentes valeurs de n , (a) $n = 0.6$, (b) $n = 1$ (c) $n = 1.4$.

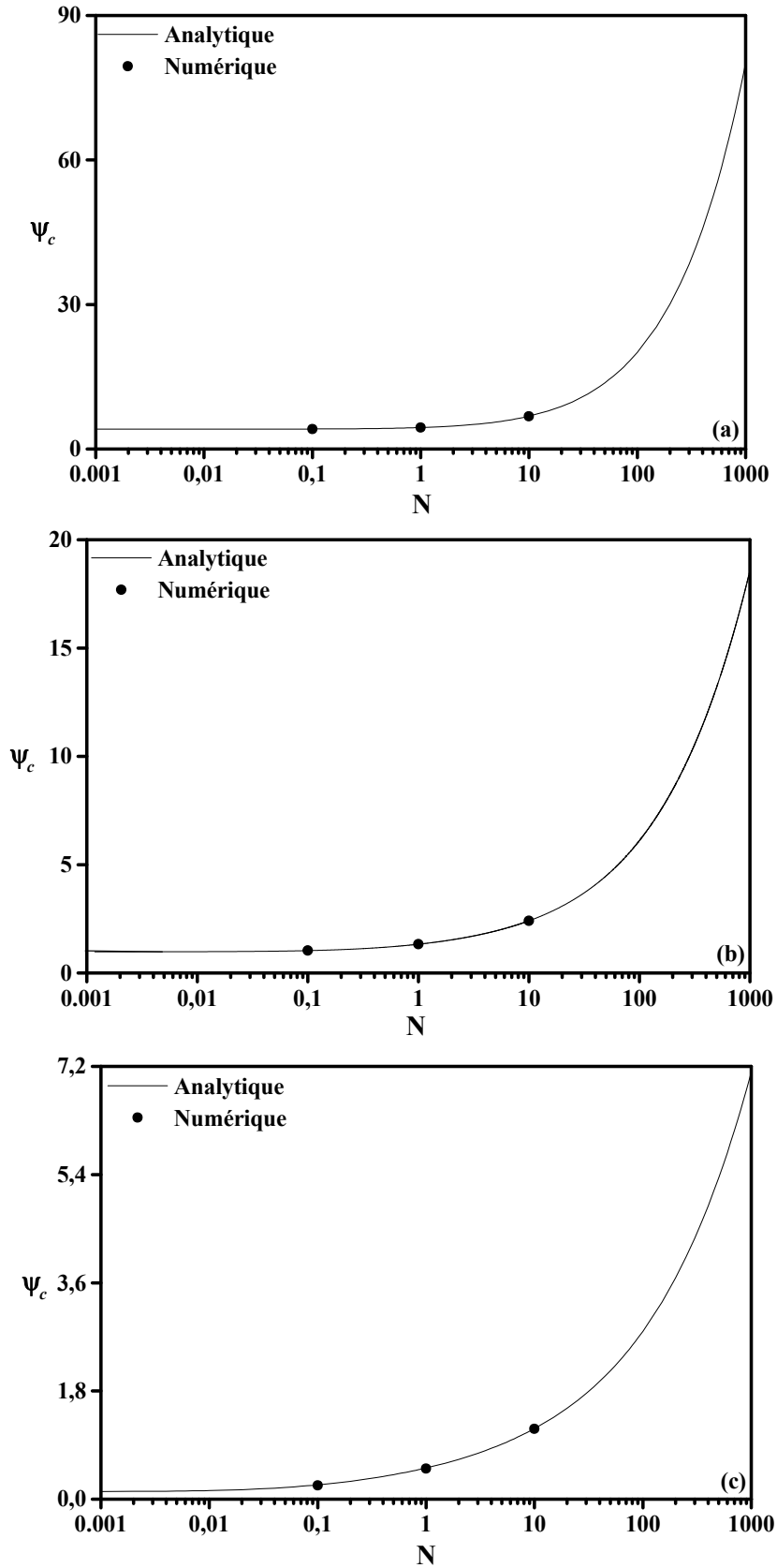


Figure 5.17 : Effet du rapport des forces de volume sur ψ_c pour $A = 24$, $Ra_T = 10^3$, $Le = 10$ et différentes valeurs de n , (a) $n = 0.6$, (b) $n = 1$ (c) $n = 1.4$.

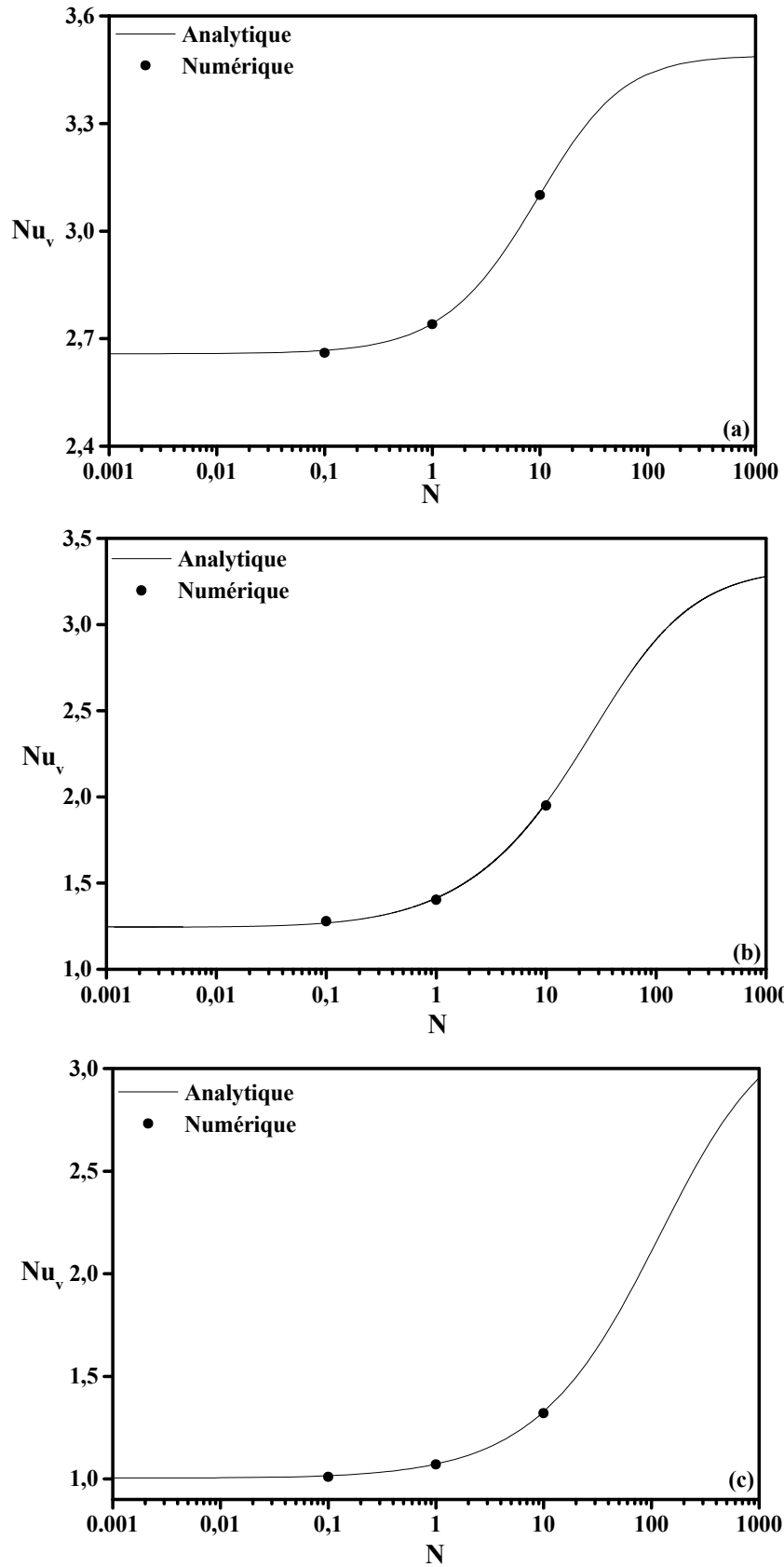


Figure 5.18 : Effet du rapport des forces de volume sur Nu_v pour $A=24$, $Ra_T = 10^3$, $Le = 10$ et différentes valeurs de n , (a) $n = 0.6$, (b) $n = 1$ (c) $n = 1.4$.

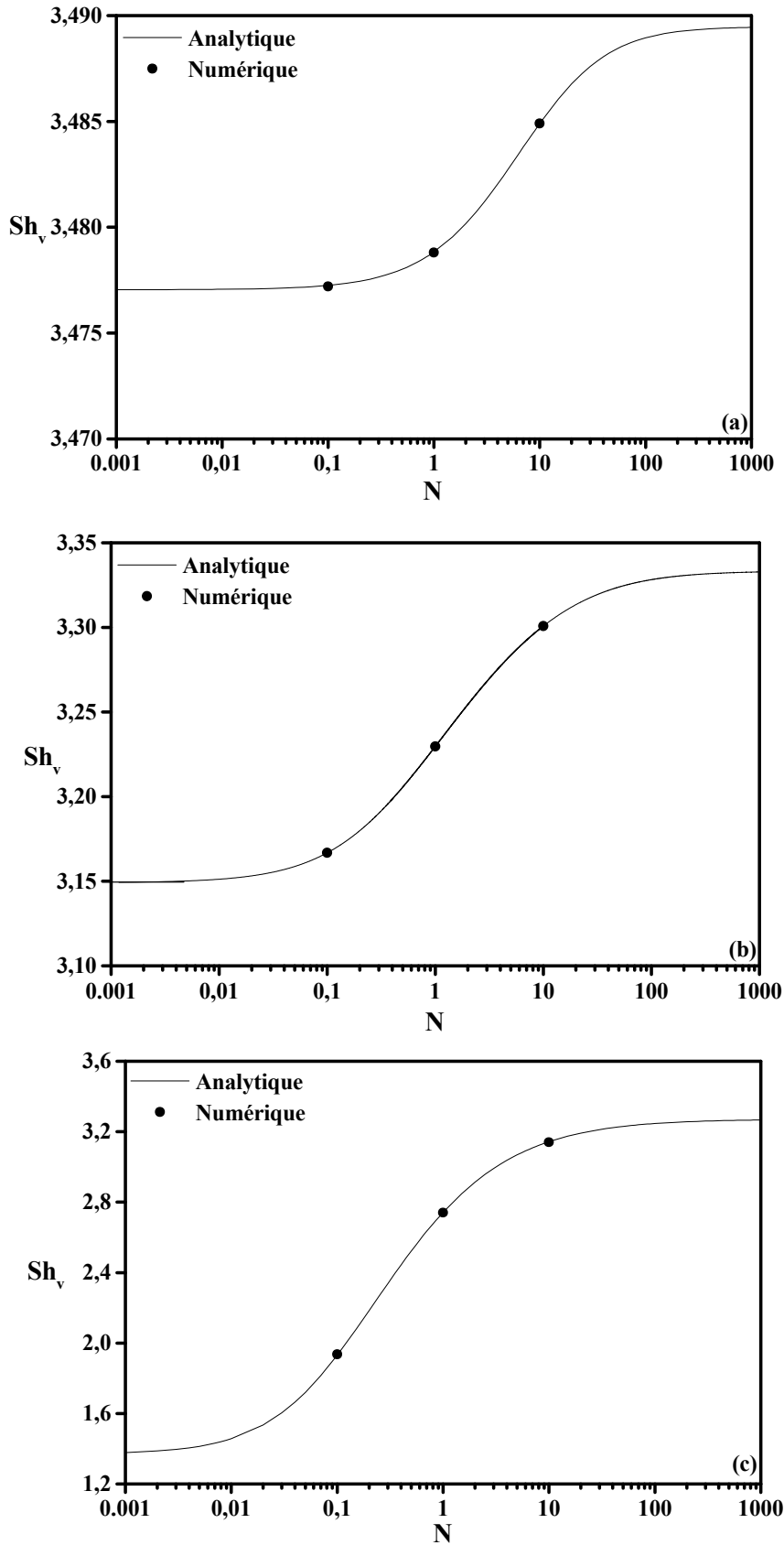


Figure 5.19 : Effet du rapport des forces de volume sur Sh_v pour $A=24$, $Ra_T=10^3$, $Le=10$ et différentes valeurs de n , (a) $n=0.6$, (b) $n=1$ (c) $n=1.4$.

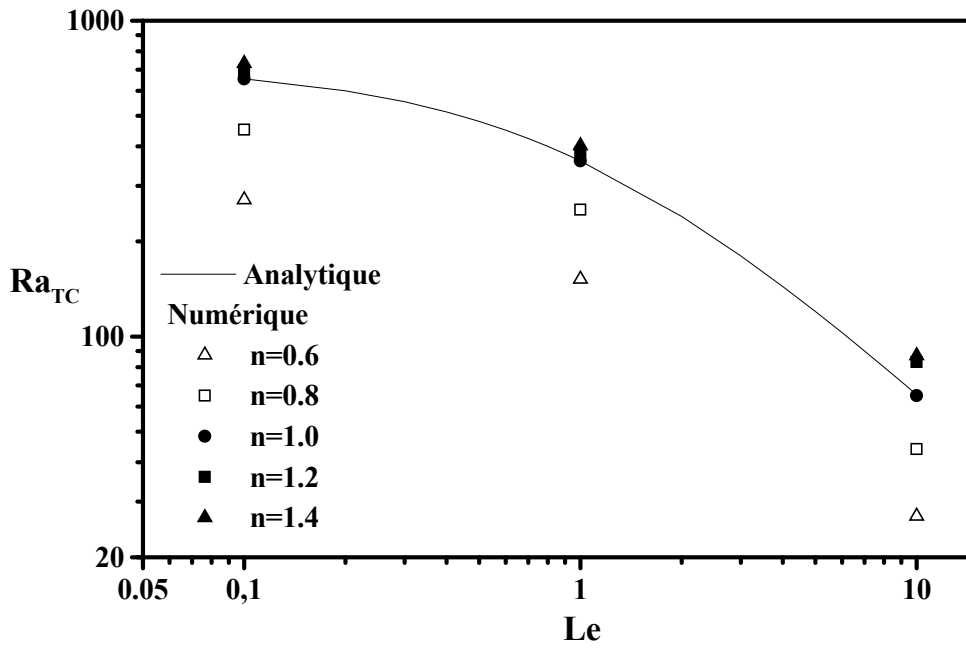


Figure 5.20 : Variations du nombre de Rayleigh thermique critique en fonction du nombre de Lewis pour $N = 1$ et différentes valeurs de n .

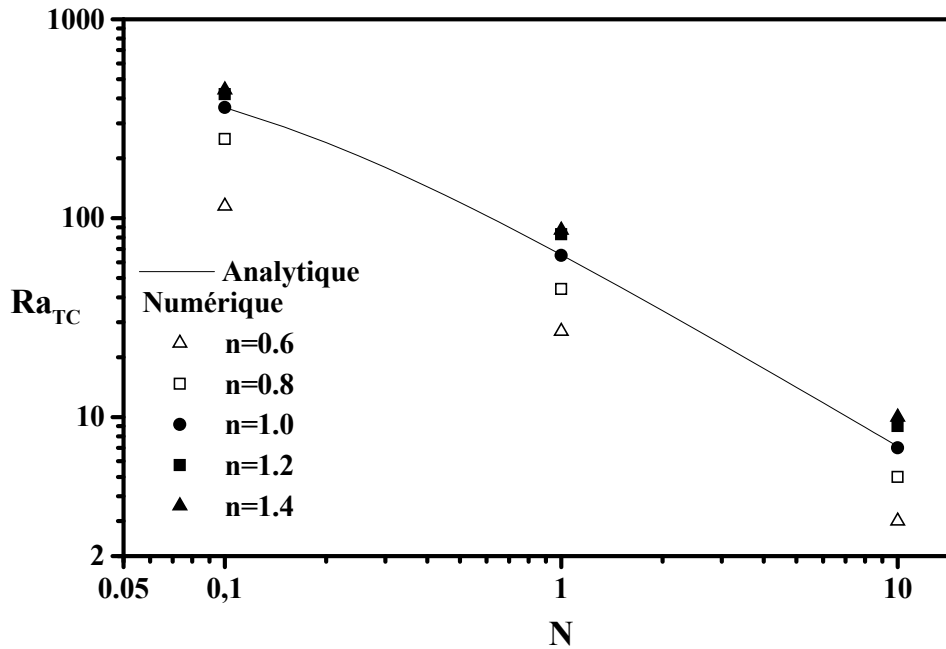


Figure 5.21: Variations du nombre de Rayleigh thermique critique en fonction du rapport des forces de volume pour $Le = 10$ et différentes valeurs de n .

CHAPITRE 6

CONVECTION NATURELLE DOUBLEMENT DIFFUSIVE DANS UNE CAVITE RECTANGULAIRE HORIZONTALE CHAUFFEE ET SALEE PAR LE BAS EN PRESENCE D'UN FLUX DE CHALEUR LATERAL

6.1. Introduction

Dans ce chapitre, en plus des flux verticaux de chaleur et de masse, la cavité horizontale est chauffée latéralement avec une densité de flux uniforme d'intensité variable a , ($b = d = 1$ et $c = 0$). Cette configuration est envisagée pour tenir compte des déperditions thermiques qui peuvent avoir lieu au niveau des parois verticales en regard des deux autres qui sont chauffées et refroidies puisqu'une isolation thermique parfaite n'existe pas réellement.

On s'intéresse, en particulier, à l'impact de l'interaction entre le flux de chaleur latéral et les flux verticaux de chaleur et de masse sur les champs d'écoulement, de température et de concentration ainsi que sur les transferts qui en découlent.

Pour les mêmes raisons qu'auparavant (Cf. chapitres 4 et 5), on retient la valeur infinie pour le nombre de Prandtl, un rapport d'aspect $A = 24$ et une grille uniforme de 381×81 .

Tous les calculs, aussi bien numériques qu'analytiques, sont effectués ici avec $Le = 2$, $N = 1$ et différentes valeurs de a , n et Ra_T . Le choix des valeurs de Le et N est dicté par la rapidité des simulations numériques, mais reste arbitraire dans les gammes garantissant un écoulement parallèle. Le choix d'autres valeurs n'affecte pas les tendances d'évolution des résultats obtenus.

Par ailleurs, compte tenu de la nature des conditions aux limites considérées dans le présent chapitre, l'éventualité de la multiplicité de solutions est examinée.

6.2. Configuration des champs d'écoulement, de température et de concentration

Les figures 6.1-6.3 illustrant les lignes de courant, les isothermes et les iso-concentrations en régimes naturel et anti-naturel, indiquent clairement que lorsque

toutes les parois sont thermiquement actives ($a \neq 0$ et $b \neq 0$), la structure qualitative de l'écoulement n'est pas affectée et demeure unicellulaire, à symétrie centrale, avec un aspect parallèle et des stratifications thermique et solutale dans la direction horizontale dans le cœur de la cavité. Les terminologies "naturel" et "anti-naturel" sont introduites pour simplement indiquer si le chauffage latéral est favorable à la rotation de l'écoulement dans une direction "naturelle" ou "anti-naturelle". Pour un écoulement naturel, la circulation du fluide s'effectue dans le sens horaire pour $a > 0$ (en haut des figures 6.1a, 6.2a et 6.3a) alors que pour un écoulement anti-naturel la rotation du fluide se fait dans le sens antihoraire (en bas des figures 6.1a, 6.2a et 6.3a). Pour $a < 0$, les solutions obtenues sont des images à travers un miroir vertical de celles correspondant à $a > 0$ et les définitions se permutent.

6.3. Influence des paramètres gouvernants en présence d'un flux de chaleur latéral

Pour étudier l'effet du flux de chaleur latéral, en présence des flux transversaux de chaleur et de masse, différentes valeurs sont attribuées au paramètre a . Par comparaison au cas $a = c = 0$ et $b = d = 1$, étudié dans le chapitre 5, ce choix permet de voir les modifications possibles que peut introduire $a \neq 0$. Pour examiner le rôle de l'intensité a dans la convection doublement diffusive, pour les valeurs considérées de n , on peut suivre l'évolution des quantités ψ_c , Nu_v , Sh_v et Nu_h en fonction de a et de Ra_T .

6.3.1. Effet du nombre de Rayleigh thermique, Ra_T

Dans les figures 6.4-6.6, sont représentées les évolutions, numérique (cercles vides et pleins) et analytique (traits continus et discontinus), des quantités ψ_c , Nu_v , Sh_v et Nu_h avec Ra_T pour $n = 0.6$ (Figure 6.4), $n = 1.0$ (Figure 6.5) et $n = 1.4$ (Figure 6.6), a étant considéré comme paramètre.

Comme il a été observé au chapitre 5 pour $a = 0$ (absence du flux latéral de chaleur), le mouvement n'a lieu qu'au-delà d'une valeur critique Ra_{TC} . La convection, dans une telle situation, est caractérisée par une cellule convective pouvant tourner

aussi bien dans le sens horaire que celui anti-horaire suivant des conditions initiales. Dans un sens tout comme dans l'autre, les intensités de circulation et des transferts sont identiques, ce qui signifie qu'il s'agit d'un problème à solutions doubles et symétriques.

Pour $a \neq 0$ (présence du flux latéral de chaleur), trois solutions sont possibles dès que $Ra_T > Ra_{TC}$. Les courbes avec une seule branche correspondent à l'état naturel alors que celles avec deux branches sont relatives à l'état anti-naturel, qui se manifeste à partir d'un seuil critique, $Ra_a > Ra_{TC}$, dépendant de a pour une valeur donnée de n . D'autre part, les portions de courbes en discontinu sont inaccessibles numériquement, malgré de nombreux essais effectués avec des conditions initiales favorables qui sont, de ce fait, qualifiées d'instables. Les courbes en continu, sont validées numériquement (cercles vides) pour $a = \pm 0.2$ et $a = \pm 0.4$, avec Ra_T variant dans les gammes $125 < Ra_T \leq 2000$ (pour $n = 0.6$), $240 < Ra_T \leq 1500$ (pour $n = 1$) et $270 < Ra_T \leq 3000$ (pour $n = 1.4$). Des constatations similaires ont été rapportées par Kalla et al. (1999) et par Lamsaadi (2006).

Par ailleurs, pour une valeur donnée de $a \neq 0$, les quantités ψ_c , Nu_v , Sh_v et Nu_h ne suivent pas le même type d'évolution avec Ra_T . En fait, en régime naturel, ψ_c , Nu_v et Sh_v sont des fonctions croissantes de Ra_T alors que Nu_h diminue à partir de l'unité pour atteindre un minimum et augmente par la suite. Dans le cas anti-naturel, on enregistre, au niveau de la branche stable, une augmentation de ψ_c , Nu_v , Sh_v et Nu_h avec Ra_T , alors que pour la branche instable, si on excepte l'évolution de Nu_h avec Ra_T qui est caractérisée par une augmentation rapide, celles de ψ_c , Nu_v et Sh_v diminuent avec Ra_T .

6.3.2. Effet de l'intensité du flux de chaleur latéral, a

Pour examiner l'effet du paramètre a sur la convection doublement diffusive, les résultats numériques et analytiques des quantités ψ_c , Nu_v , Sh_v et Nu_h , sont reportées sur les figures 6.7 (pour $n = 0.6$), 6.8 (pour $n = 1$) et 6.9 (pour $n = 1.4$) en fonction de a , avec Ra_T comme paramètre. En analysant ces figures, un changement du signe de a

n'affecte que celui de ψ_c . D'autre part, contrairement à Nu_h et Sh_v , les variations de Nu_v avec a , en régime naturel, présentent une discontinuité, puisque Nu_v tend vers l'infini au voisinage d'une certaine valeur de a , pour laquelle $\theta_T(0) \rightarrow 0$ (voir expression 3.45). Cette situation peut être imputée à une inversion du signe de la température au niveau des parois horizontales. Pour ce qui est du régime anti-naturel, Nu_v semble tendre asymptotiquement vers l'unité au fur et à mesure que a s'éloigne de zéro. Quant à Nu_h , la situation diffère avec n et il est intéressant d'observer l'évolution spectaculaire de cette grandeur avec a , en passant du comportement pseudo-plastique ($n = 0.6$) à celui dilatant ($n = 1.4$). Toutefois, on peut généralement enregistrer une augmentation de Nu_h avec $|a|$ pour la branche stable, témoignant ainsi de l'apport positif de toute augmentation de l'intensité du flux de chaleur latéral dans l'échange thermique.

Il est important de signaler aussi que pour un couple (n, Ra_T) donné, il existe une valeur critique, $|a_a|$, de $a \neq 0$, qui est une fonction décroissante/(croissante) de $n/(Ra_T)$, pour l'apparition de l'état anti-naturel. Pour les évolutions de ψ_c et Nu_v avec a , des tendances similaires ont été observées par Lamsaadi (2006).

6.3.3. Influence du comportement rhéologique, n

Ici, en se référant aux figures (6.4)-(6.10), on peut dégager des conclusions similaires à celles tirées dans les chapitres 4 et 5 en ce qui concerne l'effet du comportement rhéologique sur la convection doublement diffusive. En effet les grandeurs ψ_c , Nu_v , Sh_v et Nu_h , caractérisant la convection, augmentent lorsque n diminue et vice-versa.

6.4. Comparaison entre les résultats numériques et analytiques

La figure 6.10 illustre les profils de la vitesse horizontale, de la température et de la concentration pour les deux types d'écoulements, naturel (cercles pleins) et anti-naturel (cercles vides), obtenus dans la section transversale au milieu de la cavité pour $A = 24$, $Ra_T = 5000$, $a = 0.4$ et différentes valeurs de n . Comme on peut le constater,

les courbes en continu (solution analytique) et les cercles (solution numérique) affichent un parfait accord.

6.5. Conclusion

Dans ce chapitre, la convection doublement diffusive dans une cavité rectangulaire horizontale, remplie d'un fluide newtonien et non-newtonien et soumise à des densités de flux de chaleur croisés et à un flux de masse vertical est étudiée par voies analytique et numérique. On retient les principaux résultats suivants:

- avec des flux de chaleur uniformes imposés sur toutes les parois de la cavité étudiée, la structure de l'écoulement parallèle est maintenue dans la région centrale pour un rapport d'aspect assez large, dans la limite des valeurs des paramètres considérées.

- En comparaison au cas newtonien, le comportement pseudo plastique ($0 < n < 1$) améliore la circulation du fluide et les transferts de chaleur et de masse alors que celui dilatant ($n > 1$) conduit à l'effet contraire.

- pour le cas $a = 0$, le problème admet deux solutions qui se manifestent par deux mouvements convectifs naturels symétriques à partir d'une valeur seuil de Ra_T .

- pour les cas $a \neq 0$, le problème admet trois solutions qui se manifestent par l'existence de mouvements convectifs unicellulaires non symétriques, naturel et anti-naturel pour des gammes spécifiques des paramètres a et Ra_T .

- les résultats de l'approche analytique sont en excellent accord avec ceux issus de l'approche numérique, excepté pour le régime anti-naturel instable où toute validation numérique reste impossible.

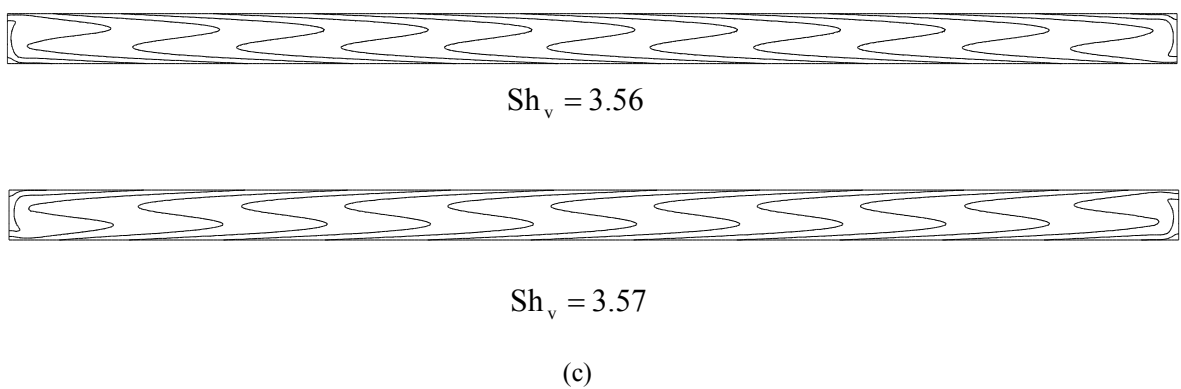
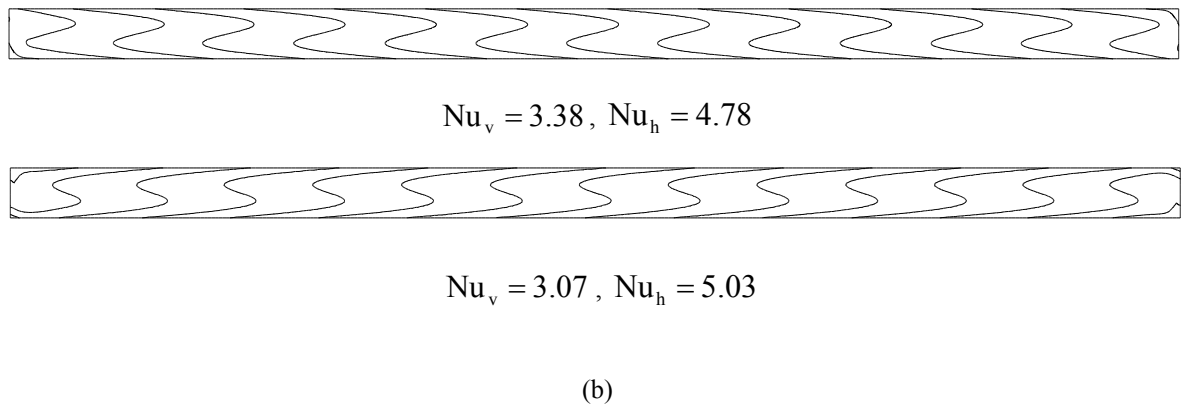
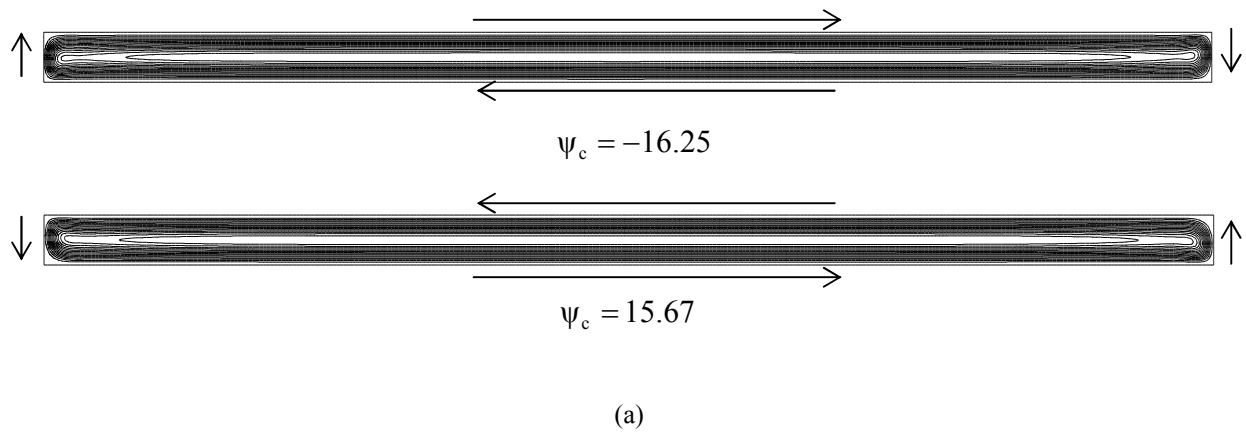


Figure 6.1 : (a) Lignes de courant naturelles (en haut) et anti-naturelles (en bas), (b) isothermes naturelles (en haut) et anti-naturelles (en bas) et (c) iso-concentrations naturelles (en haut) et anti-naturelles (en bas) pour $a = 0.4$, $A = 24$, $Ra_T = 5000$ et $n = 0.6$.

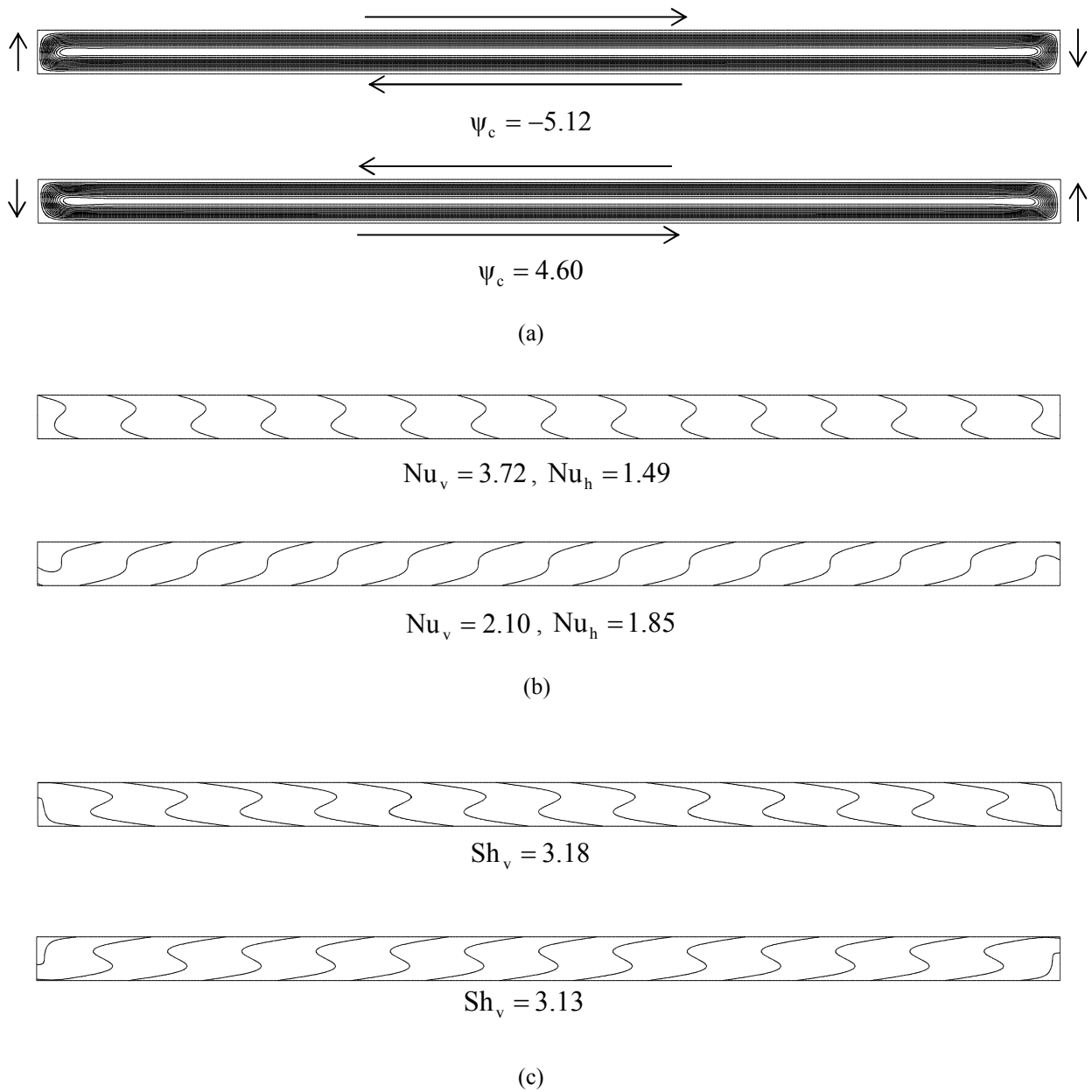


Figure 6.2 : (a) Lignes de courant naturelles (en haut) et anti-naturelles (en bas), (b) isothermes naturelles (en haut) et anti-naturelles (en bas) et (c) iso-concentrations naturelles (en haut) et anti-naturelles (en bas) pour $a = 0.4$, $A = 24$, $Ra_T = 5000$ et $n = 1$.

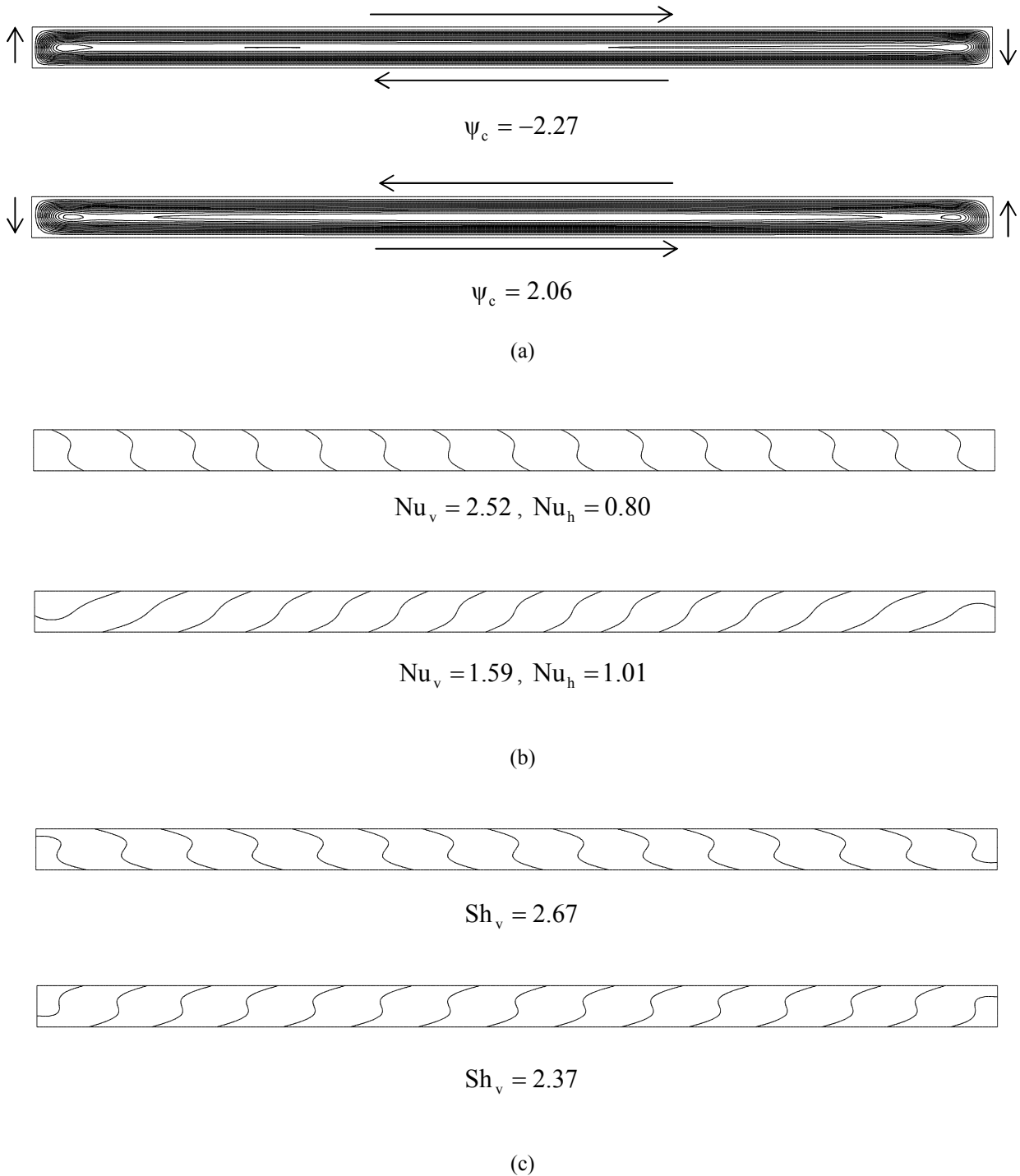
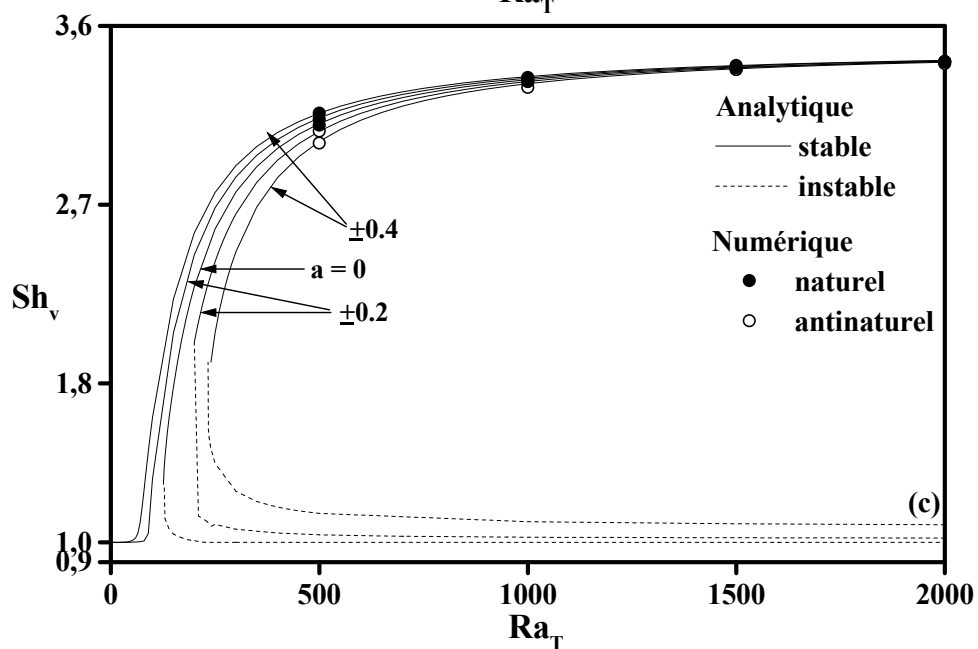
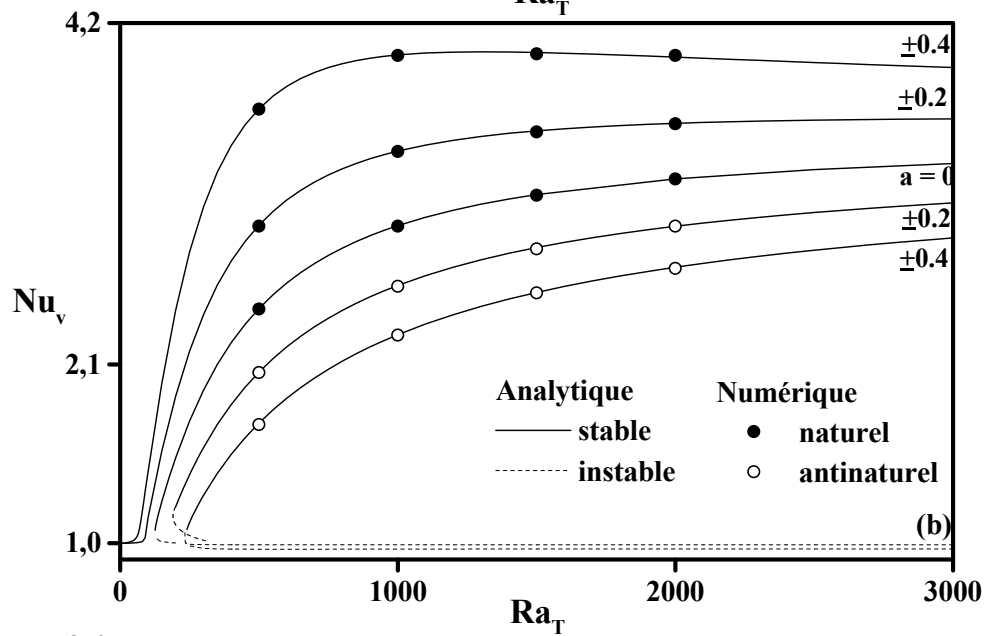
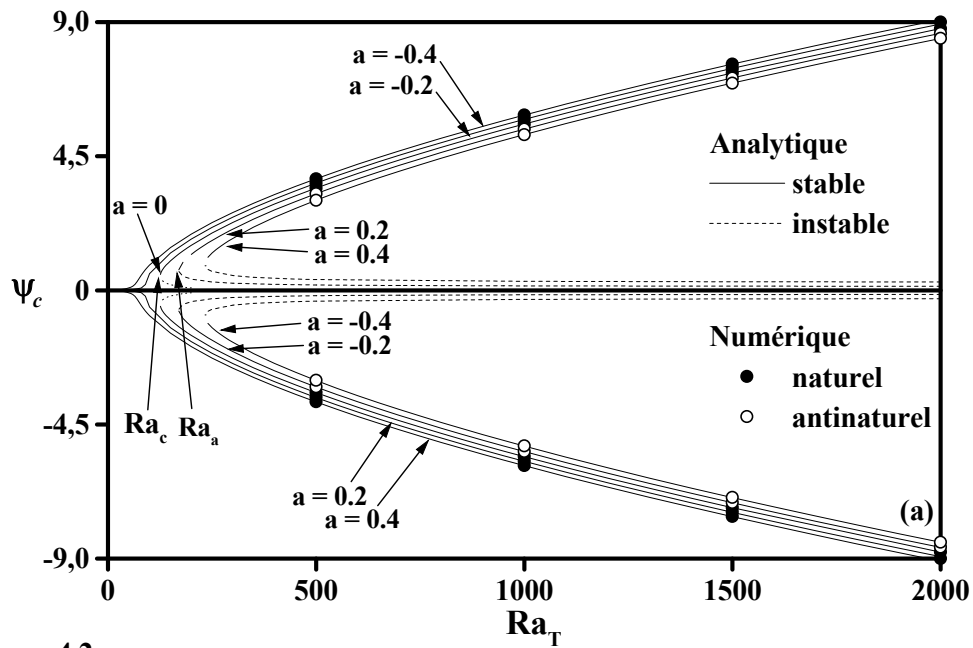


Figure 6.3 : (a) Lignes de courant naturelles (en haut) et anti-naturelles (en bas), (b) isothermes naturelles (en haut) et anti-naturelles (en bas) et (c) iso-concentrations naturelles (en haut) et anti-naturelles (en bas) pour $a = 0.4$, $A = 24$, $Ra_T = 5000$ et $n = 1.4$.



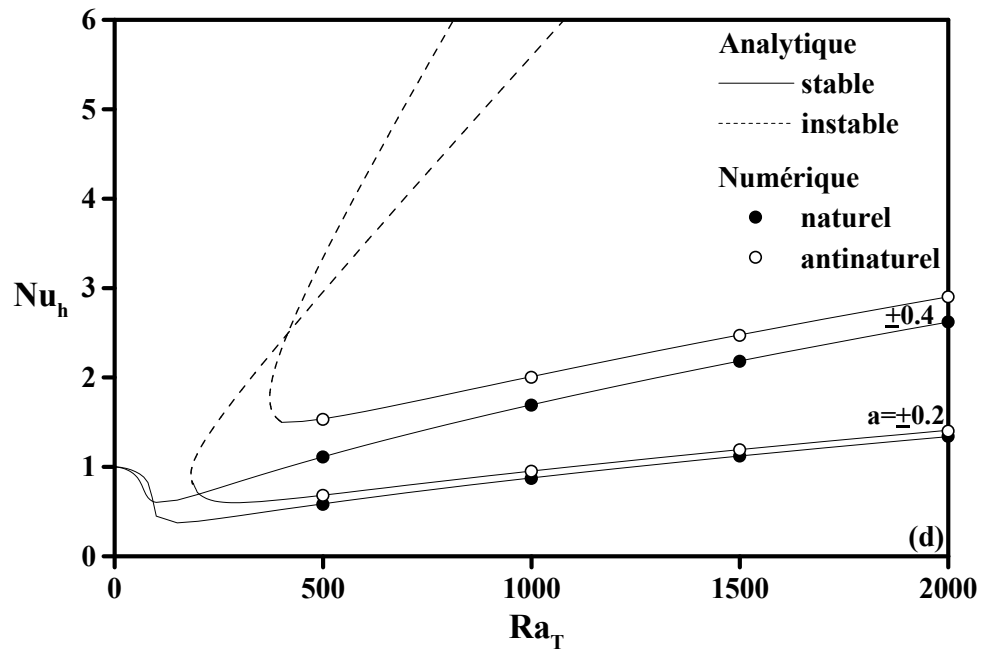
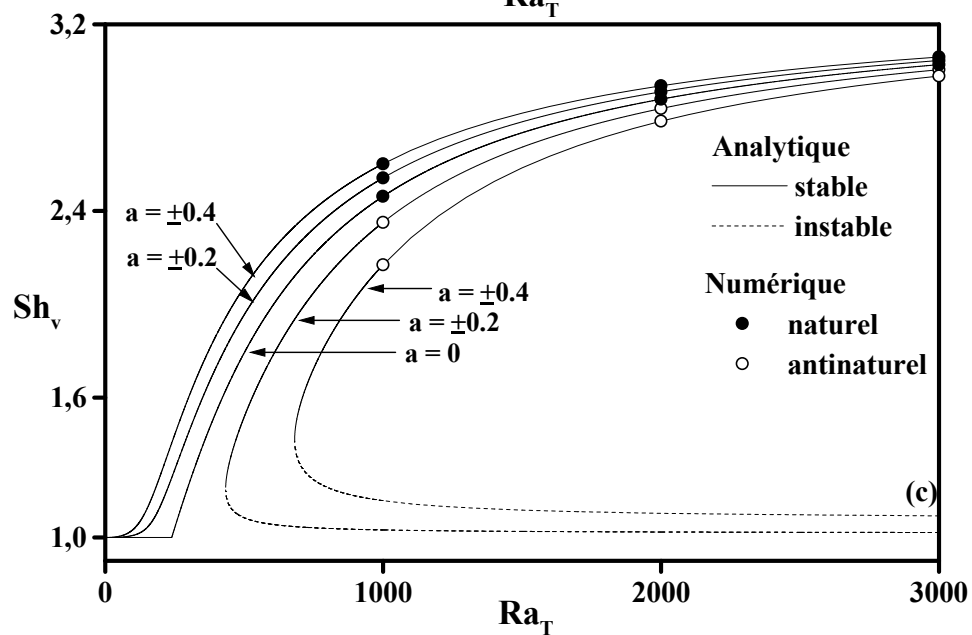
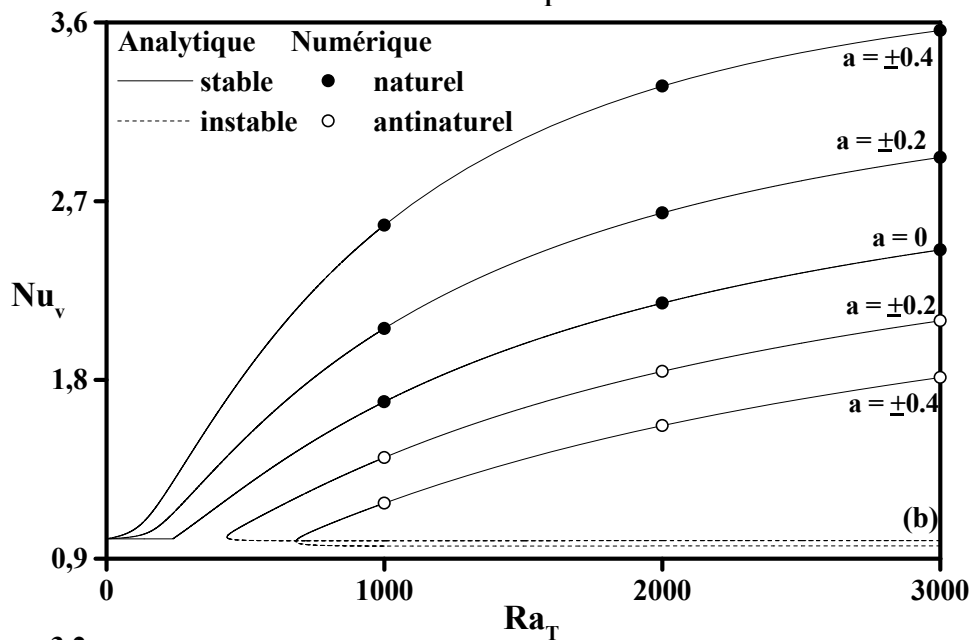
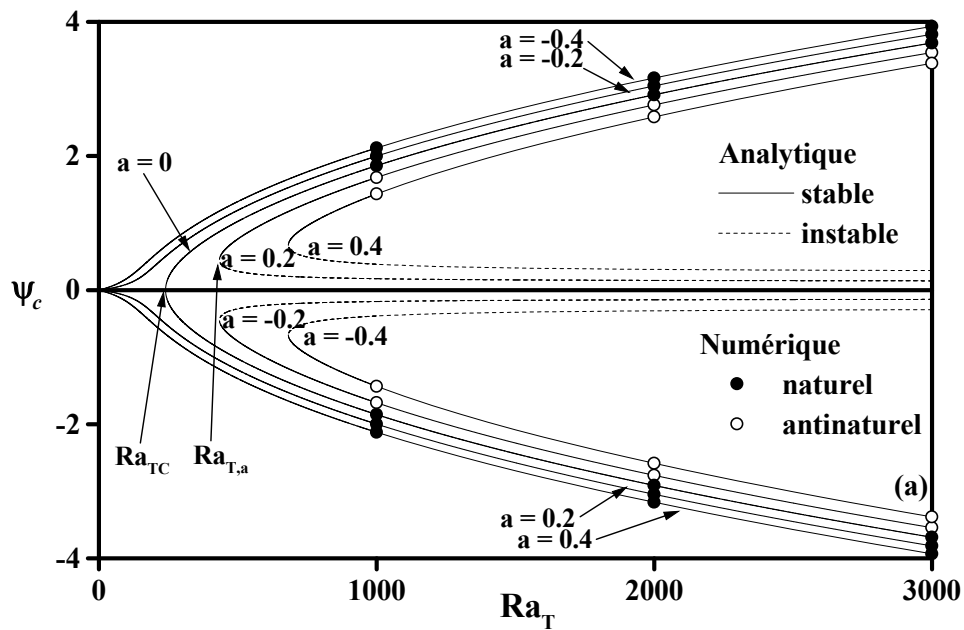


Figure 6.4 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b), de Sh_v (c) et de Nu_h (d), en fonction de Ra_T pour $n = 0.6$ et différentes valeurs de a .



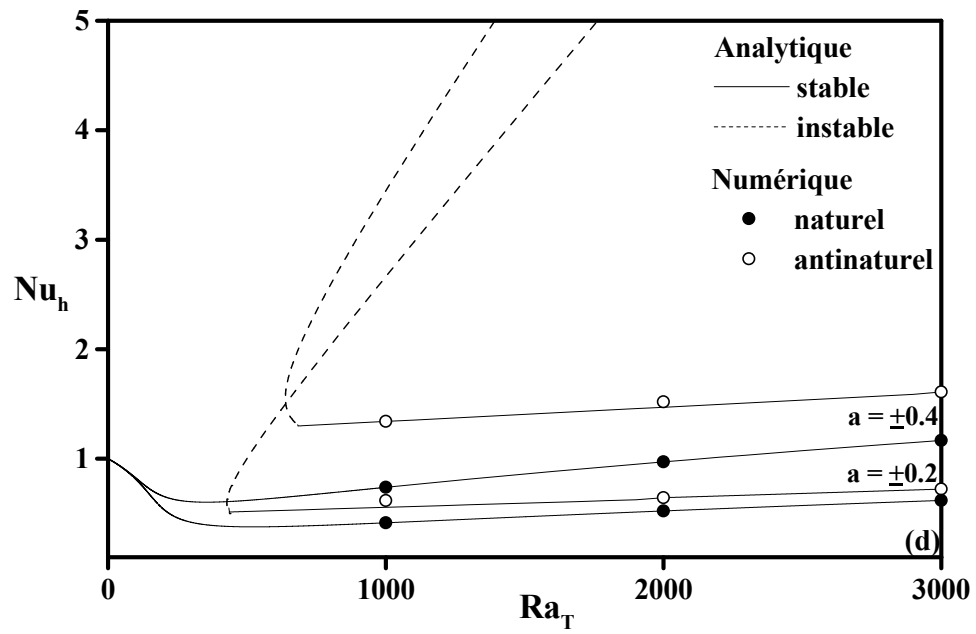
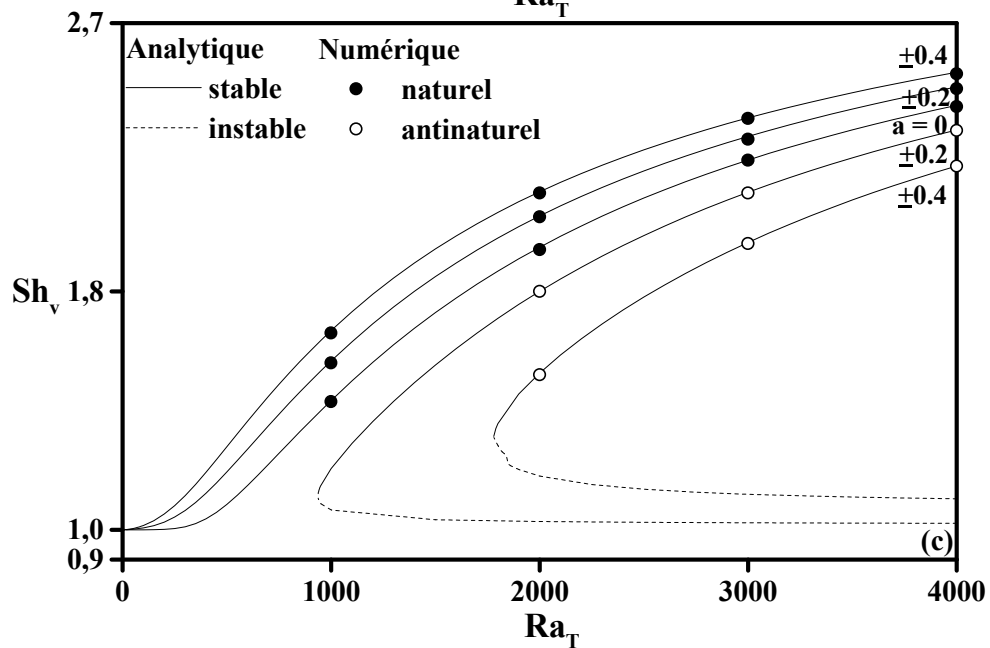
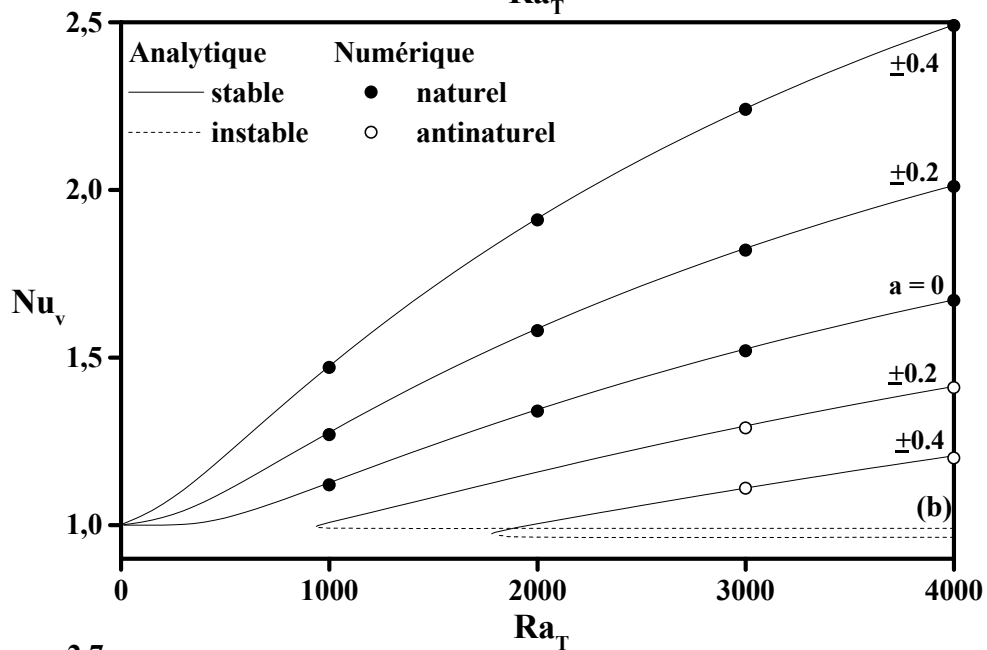
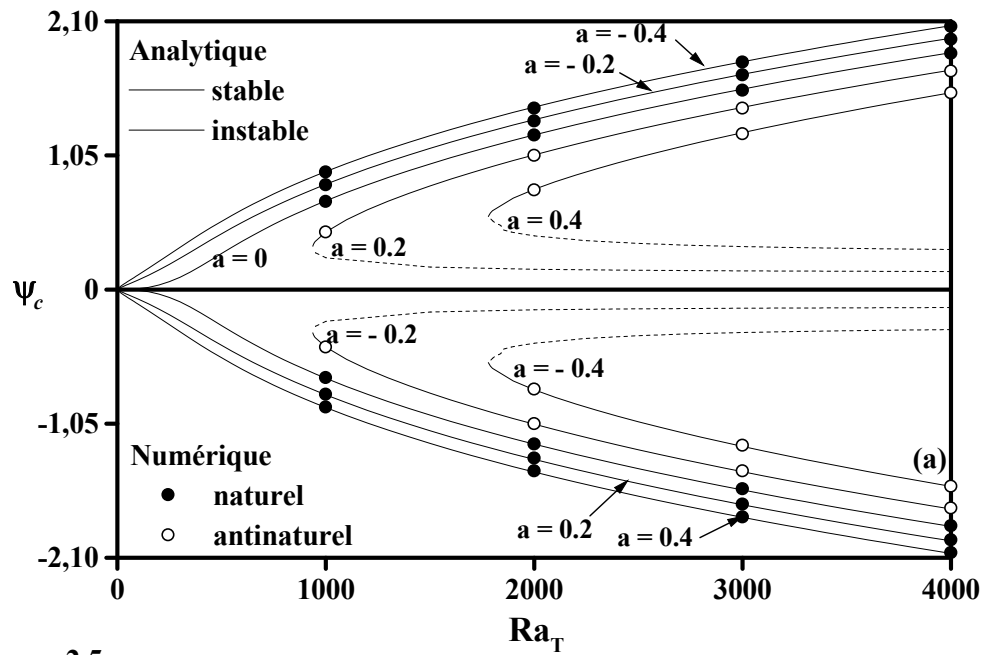


Figure 6.5 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b), de Sh_v (c) et de Nu_h (d), en fonction de Ra_T pour $n = 1$ et différentes valeurs de a .



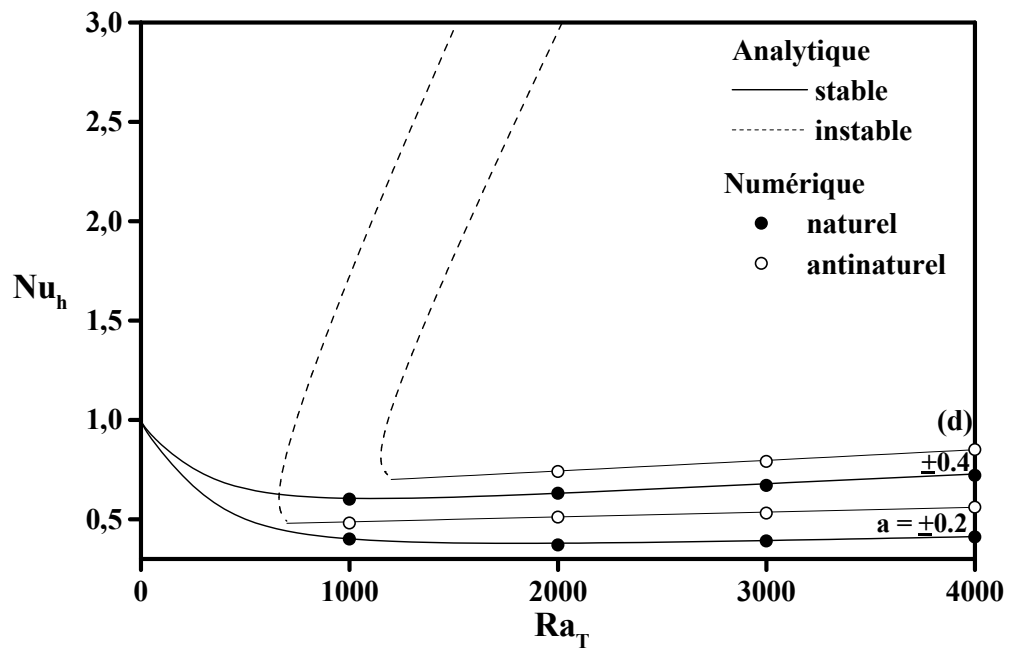
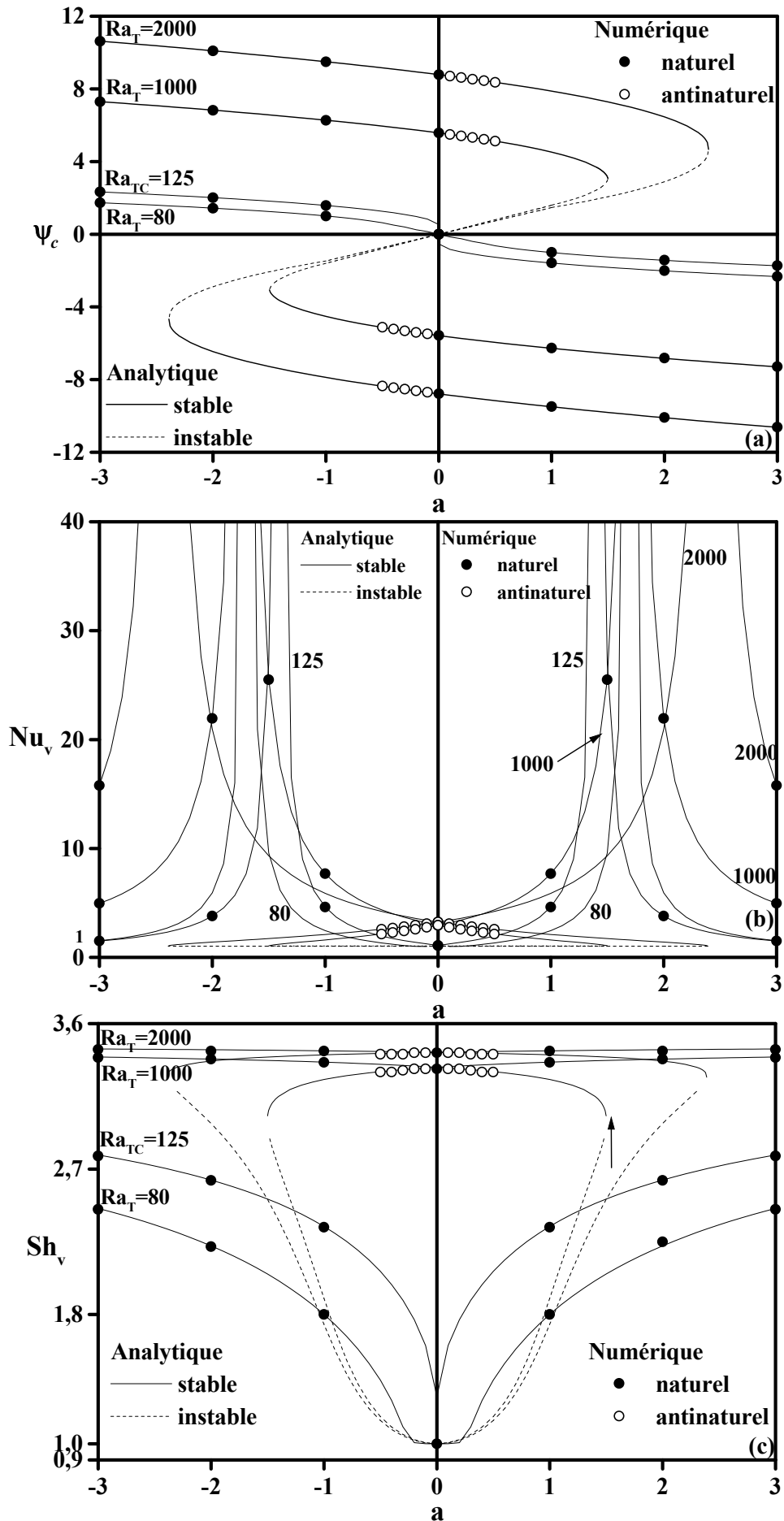


Figure 6.6 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b), de Sh_v (c) et de Nu_h (d), en fonction de Ra_T pour $n = 1.4$ et différentes valeurs de a .



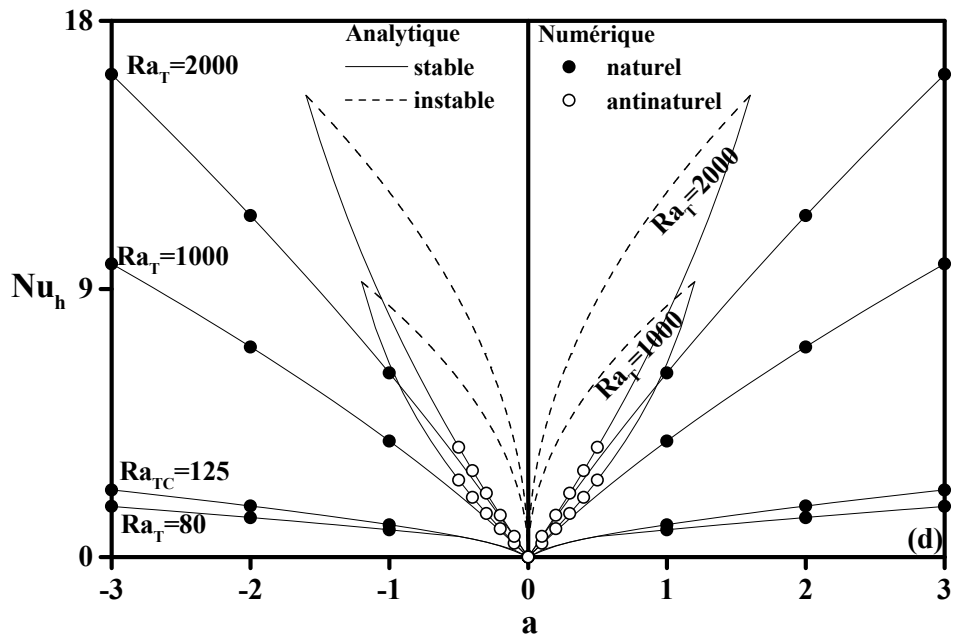
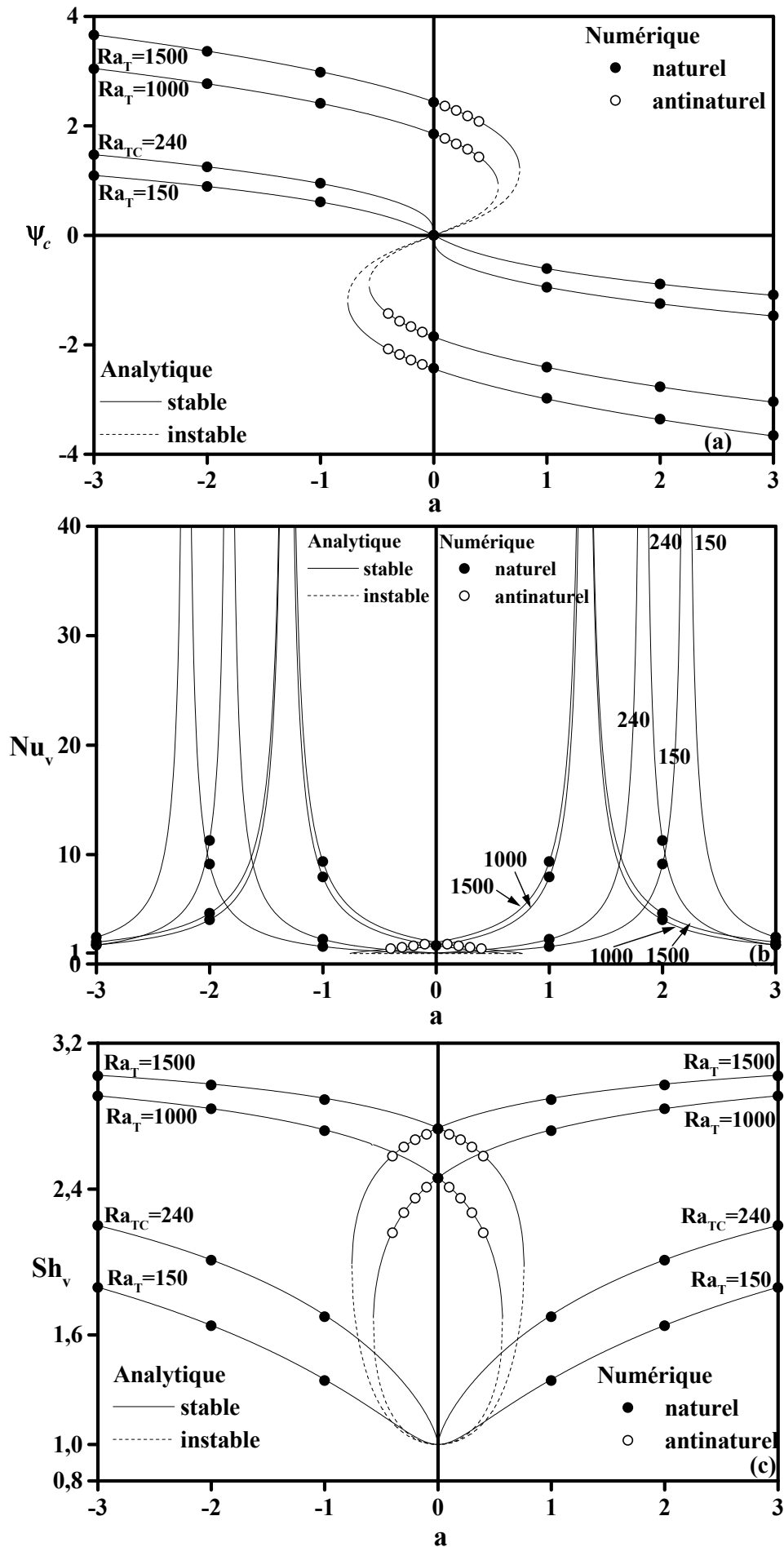


Figure 6.7 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b), de Sh_v (c) et de Nu_h (d), en fonction de a pour $n = 0.6$ et différentes valeurs de Ra_T .



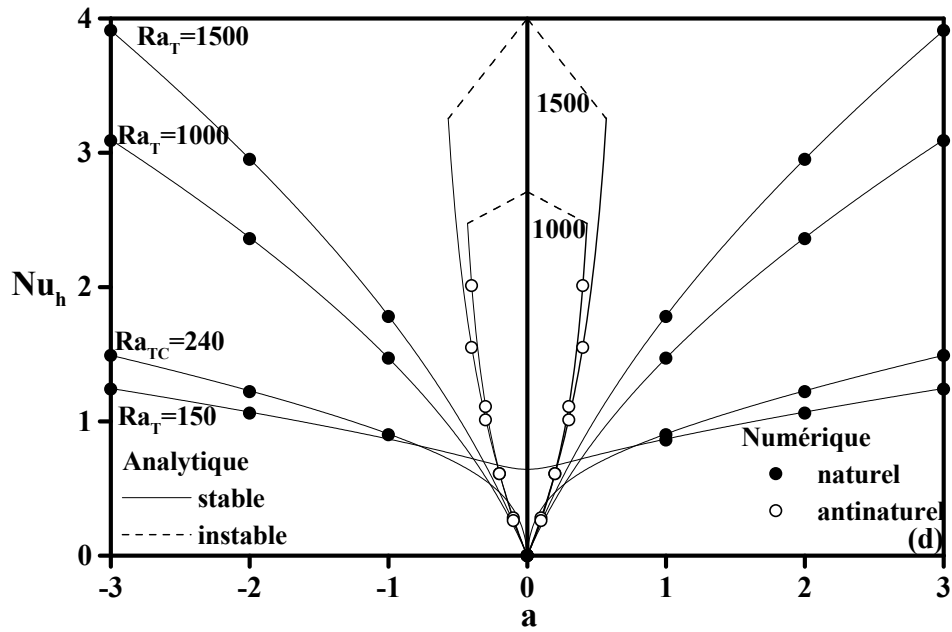
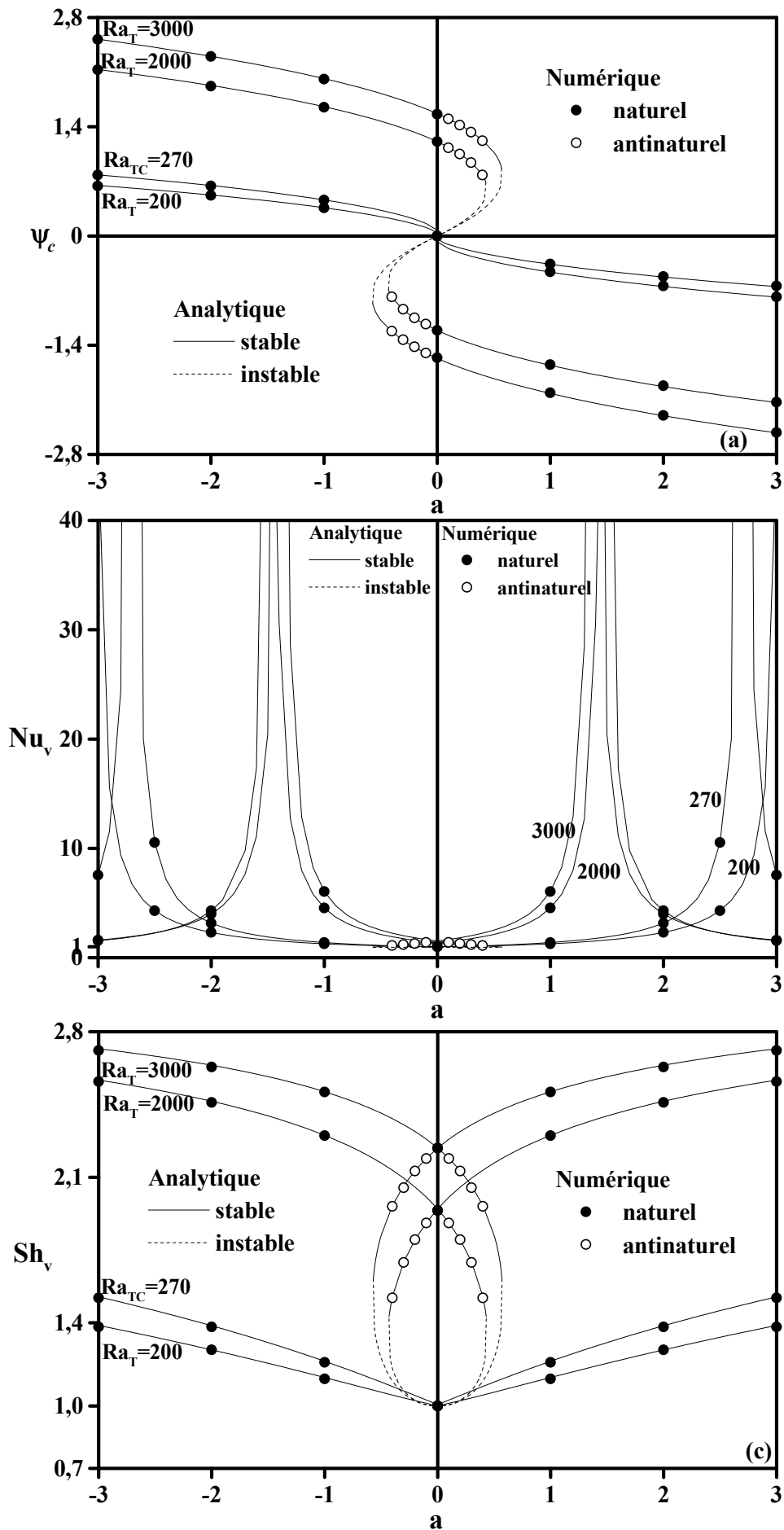


Figure 6.8 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b), de Sh_v (c) et de Nu_h (d), en fonction de a pour $n = 1$ et différentes valeurs de Ra_T .



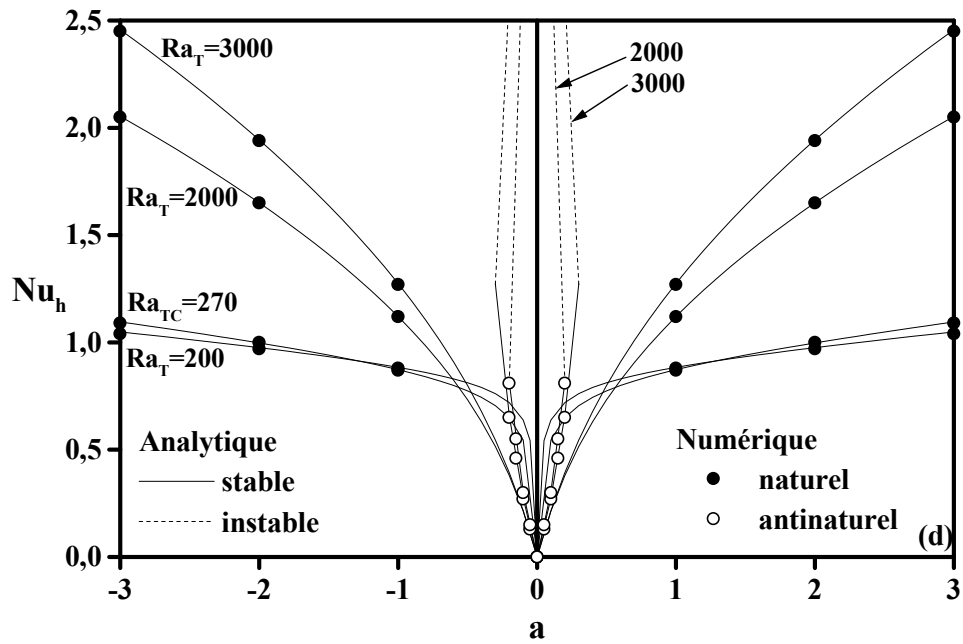


Figure 6.9 : Evolution de ψ_c (a), de Nu_v (b), de Sh_v (c) et de Nu_h (d), en fonction de a pour $n = 1.4$ et différentes valeurs de Ra_T .

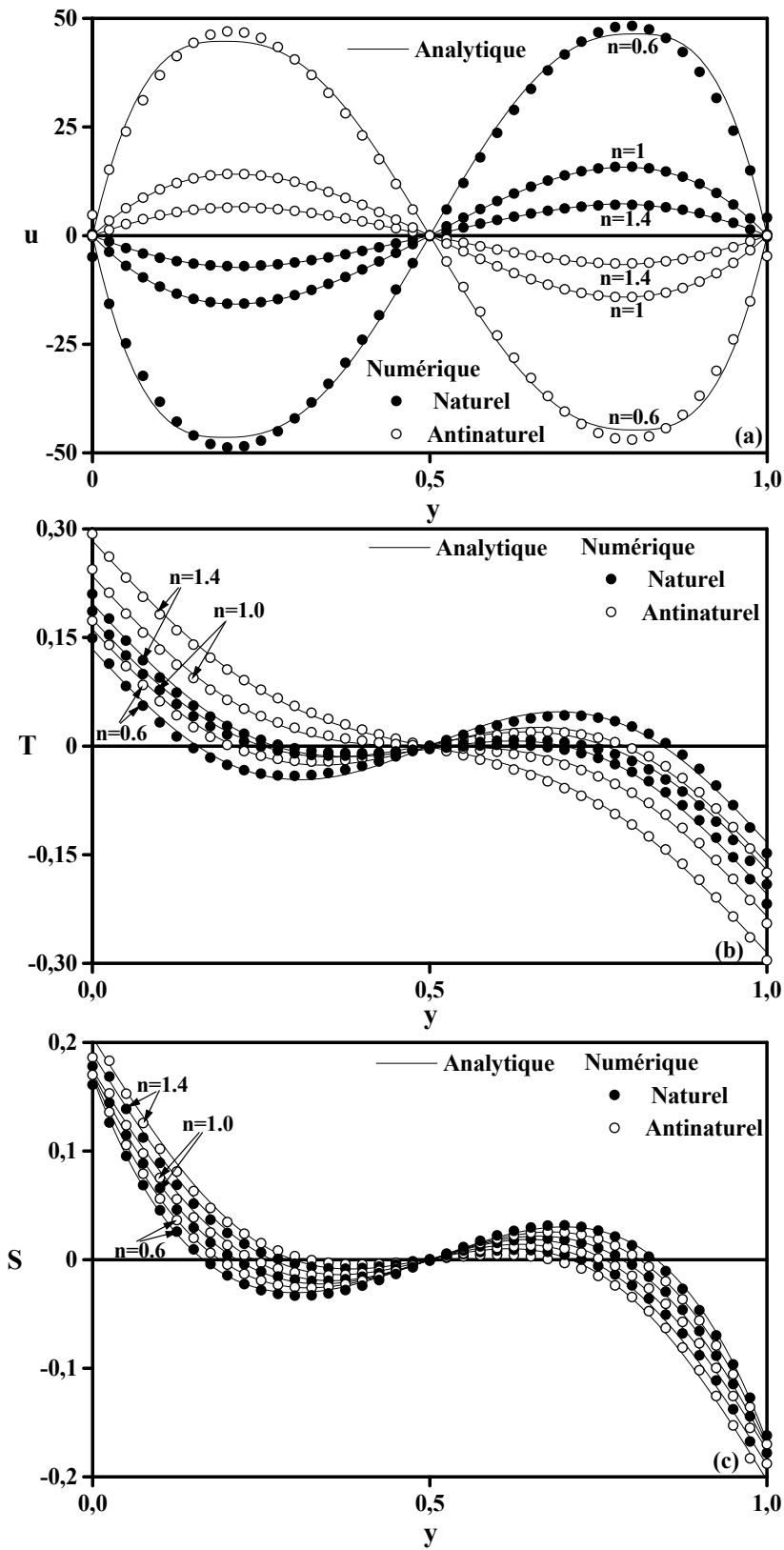


Figure 6.10 : Profils naturels et anti-naturels de la vitesse horizontale (a), de la température (b) et de la concentration (c) dans la direction y pour $A = 24$, $Ra_T = 5000$, $a = 0.4$ et différentes valeurs de n .

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'étude des écoulements et des transferts de chaleur et de masse, engendrés par double diffusion en présence du champ de gravité, au sein d'une cavité rectangulaire horizontale confinant des fluides newtoniens et non-newtoniens. La formulation mathématique du problème a été développée en adoptant le modèle d'Ostwald-De Waele, pour le comportement rhéologique, et l'approximation de Boussinesq pour le terme de poussée d'Archimède. La convection a été initiée en imposant des densités de flux de chaleur et de masse uniformes aux frontières rigides de l'enceinte rectangulaire. A cet égard, trois situations ont été examinées selon que la géométrie est chauffée et salée horizontalement ou verticalement avec ou sans flux latéral de chaleur. Dans le but de résoudre numériquement les équations adimensionnelles régissant, écrites en formulation de variables secondaires, un code de calcul instationnaire, s'appuyant sur la méthode des différences finies centrées au second ordre, a été élaboré. L'écoulement et les transferts de chaleur et de masse sont analysés en fonction des valeurs des paramètres gouvernant le problème, à savoir le rapport de forme de la cavité, A , l'indice de comportement du fluide n , le nombre de Lewis, Le , le rapport des forces de volume, N et le nombre de Rayleigh thermique généralisé Ra_T . Par ailleurs, dans la limite d'une cavité allongée ($A \gg 1$), une solution analytique, basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle, a été introduite pour prédire qualitativement les caractéristiques de l'écoulement et des transferts thermiques et solutaux. Les principales conclusions de la présente étude peuvent être résumées comme suit :

- pour $A \geq 24$, les caractéristiques de l'écoulement et des transferts de chaleur et de masse sont apparues indifférentes vis-à-vis de toute augmentation de A . Il en ressort que pour les fluides non-newtoniens considérés dans cette étude, la convection naturelle doublement diffusive dans une cavité allongée est essentiellement contrôlée par les paramètres Le , N , n et Ra_T ;

- pour des conditions aux limites thermiques et massiques de type Newman (flux uniformes de chaleur et de masse imposés) et dans la limite des valeurs considérées

des paramètres étudiés, il a été observé que l'écoulement présente un aspect parallèle et des stratifications thermique et solutale loin des bords latéraux de la cavité lorsque le rapport de forme de la cavité est assez large, ce qui prouve l'existence d'une solution analytique pour le problème étudié ;

- pour les configurations de flux de chaleur et de masse considérées, par comparaison au cas $n=1$ (fluide newtonien), l'augmentation de n ($n > 1$, fluide dilatant) est de nature à réduire l'intensité de l'écoulement et les taux des transferts thermique et massique et donc à affaiblir la convection, alors que la diminution de n ($0 < n < 1$, fluide pseudo-plastique) agit dans le sens contraire ;

- les résultats issus de l'approche analytique ont été trouvés en excellent accord avec ceux obtenus numériquement, pour les valeurs de n , Le , N et Ra_T garantissant un écoulement parallèle dans la région centrale de la cavité, ce qui valide l'hypothèse de l'écoulement parallèle ;

- pour une cavité chauffée et salée latéralement et isolée transversalement ($a = c = 1$ et $b = d = 0$), la convection doublement diffusive se développe de façon unicellulaire à la moindre petite de valeur de Ra_T et le problème est à solution unique ;

- pour une cavité chauffée et salée par le bas et isolée au niveau des côtés latéraux ($a = c = 0$ et $b = d = 1$), la convection s'établit au-delà d'un seuil critique Ra_{TC} , qui dépend de n , de Le et de N . Dans une telle situation, le problème présente deux solutions permanentes, caractérisées par des mouvements fluidiques dans le sens horaire ou antihoraire, dépendamment des conditions initiales ;

- enfin, pour une cavité soumise à des densités de flux verticaux de chaleur et de masse uniformes et à une densité uniforme de flux latéral de chaleur d'intensité a quelconque ($b = d = 1, c = 0$), le problème admet trois solutions étant donné l'existence de mouvements convectifs unicellulaires non symétriques, naturel et anti-naturel, au-delà de certaines conditions critiques et pour des gammes spécifiques des paramètres a et Ra_T . Une variante des deux mouvements anti-naturels observés est cependant jugée instable car inaccessible numériquement.

D'un point de vue pratique, ces résultats originaux constituent donc une banque de données utiles pour compléter les acquis dans le domaine du traitement industriel

des fluides complexes. Ils permettent, en fait, de contribuer à la compréhension des mécanismes de base gouvernant la convection naturelle doublement diffusive dans les milieux non-newtoniens et présentent un intérêt pour les procédés industriels des matériaux liquides à comportement rhéologique complexe.

Dans la présente étude, la cavité rectangulaire disposée horizontalement, n'est qu'une configuration géométrique parmi d'autres, aussi les investigations numériques et analytiques ont été effectuées pour le cas coopérant ($N > 0$) et sans effet Soret. Il faudra donc envisager en perspective d'examiner l'effet de l'inclinaison, la convection opposée ($N < 0$) et l'effet Soret et ce pour les mêmes types de fluides et avec des conditions aux limites similaires. Ceci permettra de voir de près le rôle de ces effets combinés avec celui du comportement rhéologique et des conditions aux limites, sur la convection doublement diffusive.

Tout au long de ce travail, le modèle rhéologique d'Ostwald-de Waele, à deux paramètres, est adopté. Toutefois, en dépit de sa simplicité, celui-ci présente l'handicape de ne pas rendre compte du comportement newtonien aux faibles et forts taux de cisaillement. Dans ces conditions, un modèle disposant de plus de paramètres doit être essayé et les résultats issus confrontés à ceux relatifs au premier pour déterminer d'éventuelles différences liées à la raison susmentionnée. Bien sûr, cela nécessite la connaissance de ces paramètres dont seule l'expérience peut en déterminer les valeurs.

D'autre part, en dépit de l'originalité des résultats obtenus, ce travail reste académique en l'absence de résultats expérimentaux susceptibles de rendre réaliste les conclusions de cette étude. Il serait donc souhaitable de conduire des expériences avec des fluides non-newtoniens, dont le comportement rhéologique peut être représenté par le modèle d'Ostwald-de Waele, et d'en confronter les résultats expérimentaux avec les prédictions des simulations numériques et de l'analyse théorique. Bien entendu, ceci reste un défi en l'absence de moyens expérimentaux nécessaires. Par ailleurs, des laboratoires spécialisés dans le domaine expérimental, en ce qui concerne les écoulements et les transferts dans les milieux non-newtoniens, peuvent prendre l'initiative pour répondre à la question. C'est un sujet qui reste ouvert à l'expérience.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Agassant, J.-F., Avenas, P. et Sergent, J.-Ph. (1989), La mise en forme des matières plastiques, TEC. et Doc.-Lavoisier, Paris.

Amari, B., Vasseur, P. et Bilgen, E. (1994), Natural convection of non-Newtonian fluids in a horizontal porous layer, *Wärme-und-Stoffübertragung*, Vol. 29, pp. 185-193.

Bardan, G., Mojtabi, A. (1998). Stabilité des écoulements de convection thermosolutale en cavité carrée. *C. R. Acad. Sci. T. 326, sérieII b*, p. 851-857

Bejan, A. (1983), The boundary layer regime in a porous layer with uniform heat flux from the side, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 1339-1346.

Bejan, A. (1984), *Convection heat transfer*, John Wiley&Sons.

Benhadji, K., Vasseur, P. (2001), Double Diffusive Convection in a Shallow Cavity Filled with non-Newtonian Fluid, *International Communication in Heat and Mass Transfer*, vol. 28, No.6, pp 763-772.

Ben Khelifa, N., Alloui, Z, Beji, H., Vasseur, P. (2012), Natural convection in a horizontal porous cavity filled with a non-Newtonian binary fluid of power-law type, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 169–170 (2012) 15–25.

Bennacer, R., Gobin, D. (1996), Cooperating thermosolutal convection in enclosure-I. Scale analysis and mass transfer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 2671-2681,

Bian, W., Vasseur, P. et Bilgen, E. (1994), Natural convection of non-Newtonian fluids in an Inclined porous layer, *Chem. Eng. Comm.*, Vol. 129, pp. 79-97.

- Chang, J., Lin, T. F. et Chien, C. H. (1993)** Unsteady thermosolutal opposing convection of a liquid-water mixture in a square cavity: I flow formation and heat and mass characteristics, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 1315-1331.
- Deane, A.E., Knobloch, E. et Toomre, J. (1987)**. Travelling waves and chaos in thermosolutal convection, *Physical Review A*, Vol. 36, pp. 2862-2868,.
- Frankel, S.P. (1950)**, Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations, *Math. Tables aids compt.*, Vol. 4, pp. 65-75.
- Ghorayeb, K., Khallouf, H. et Mojtabi, A. (1999)**. Onset of oscillatory flow in double diffusive convection. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 629-643,.
- Ghorayeb, K. et Mojtabi, A. (1997)**. Etude de la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire verticale fluide. *C. R. Acad. Sci. T. 324, série II b*, p. 19-27.
- Gobin, D. et Bennacer R (1996)**, Cooperating thermosolutal convection in enclosure-II. Heat transfer and flow structure, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 2683-2697.
- Gourdin, A. et Boumahrat, M. (1989)**, *Méthodes numériques appliquées*, TEC. et Doc.-Lavoisier, Paris.
- Gray, D.D. et Giorgini, A. (1976)**, The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 545-551.
- Huppert, H. E. et Moore, D.R (1976)**. Nonlinear double-diffusive convection, *J.Fluid Mech.*, Vol. 78, pp. 821-854,.

Kalla, L., Mamou, M., Vasseur, P. et Robillard, L. (1999), Multiple steady states for natural convection in a shallow porous cavity subject to uniform heat fluxes, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 26, No 6, pp. 761-770.

Lamsaadi, M. (2006), Contribution à l'étude numérique et analytique des transferts thermiques par convection naturelle dans les fluides non-Newtonien confinés, Thèse de Doctorat Nationale, Université Cadi Ayyad, Faculté des sciences et Techniques, Béni Mellal, Maroc.

Mamou. M. (1998), Convection thermosolutale dans des milieux fluides et poreux confinés, Thèse de Doctorat. École Polytechnique de Montréal, Canada.

Moore, D.R., Weiss, N.O. et Wilkins, J.M. (1991). Asymmetric oscillations in thermosolutal convection, *J. Fluid Mech.*, Vol. 233, pp. 561-585,.

Naïmi, M. (2001), Contribution a l'étude de l'effet Marangoni thermique dans les fluides non-Newtoniens en conditions de gravite et de microgravité, Thèse de Doctorat d'état, Université Cadi Ayyad, Faculté des sciences Semlalia, Marrakech, Maroc.

Nield, D.A. et Bejan, A. (1992). *Convection in Porous Media*, Springer Verlag,.

Nield, D.A. (1967), The thermohaline Rayleigh-Jeffreys Problem, *J. Fluid Mech.*, Vol. 29, pp. 545-558.

Ostwald, W. (1925), *Kolloïd z.*, Vol. 36, pp. 99-117.

Ozoe, H. et Churchill, S.W. (1972), Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwald-De Waele and Ellis fluids: the development of a numerical solution, *AIChE J.*, Vol. 18, No. 6, pp. 1196.

Paliwal, R. C. et Chen, C. F. (1980). Double diffusive instability in an inclined fluid layer. Part1. Experimental investigation. *J. Fluid Mechanics*, 98, 755-768.

Platten, J.K. et Legros, J.C. (1984), *Convection in Liquids*, Springer-Verlag.

Pop, I. et Ingham, D.B. (2001). *Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational Modeling of Viscous Fluids and Porous Media*, Oxford, UK: Elsevier Science & Technology Books (Pergamon).

Sahai, A. K. (1999). Thermosolutal convection in the presence of both vertical and horizontal temperature gradients, *J. Applied Mechanics*, Vol. 66, pp. 181-196 ,.

Sibony, M. et Mardon, J.-Cl. (1982), *Analyse numérique II, approximation et équations différentielles*, Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, Paris.

Siginer, DA. et Valenzuela-Rendon, A. (2000), On the laminar free convection and stability of grade fluids in enclosures. *Int J Heat Mass Transfer*; 43:3391–405.

Turki, S. (1990), Contribution à l'étude numérique des transferts par convection naturelle et par convection mixte dans les fluides non-newtoniens confinés, Thèse de Doctorat, CNAM, Paris, France.

Turner, J. S. (1968). The behaviour of a stable salinity gradient heated from below. *J. Fluid mechanics*, 33, 183-200

Woods, L.C. (1954), A note of numerical solution of fourth differential equations, *Aero. Q.*, Vol. 5, pp. 176-184.