N° d'ordre : ../2021

Université Sultan Moulay Slimane

Faculté des Sciences et Techniques

Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (LMACS)

Centre d'Études Doctorales: Sciences et Techniques

Formation doctorale: Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Abderrazak KASSIDI

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Étude de quelques problèmes elliptiques-paraboliques non linéaires et unilatéraux de type Dirichlet ou Neumann

---

Soutenue le Vendredi 28 Mai 2021 devant le jury composé de :

Pr. Lalla Saadia CHADLI	Professeur à la FST, Béni Mellal	Présidente, Rapporteur
Pr. Khalid HILAL	Professeur à la FST, Béni Mellal	Rapporteur
Pr. Zeriab Mohamed ES-SADEK	Professeur à l'ENSAM, Rabat	Rapporteur
Pr. Abdelmajid EL HAJAJI	Professeur à l'ENCG, El Jadida	Examinateur
Pr. Hicham MOUSSA	Professeur à la FST, Béni Mellal	Invité
Pr. Chakir ALLALOU	Professeur à la FST, Béni Mellal	Invité
Pr. Adil ABBASSI	Professeur à la FST, Béni Mellal	Encadrant

Remerciements

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme.

Je voudrais exprimer tous mes remerciements à mon professeur ADIL ABBASSI pour m'avoir proposé ce sujet de thèse ainsi que pour sa rigueur et son enthousiasme dans la direction de ce travail. Il m'a initié à l'univers des espaces avec poids et son soutien sans limite, ses encouragements, ainsi que son exigence de clarté m'ont beaucoup apporté. Je le remercie très sincèrement pour sa disponibilité et son accueil chaleureux.

Ma gratitude revient aussi au professeur CHAKIR ALLALOU, qui a toujours répondu patiemment à mes interrogations et m'a apporté maintes éclairages.

Je remercie respectueusement Madame la professeure LALLA SAADIA CHADLI, pour le temps qu'elle a consacré à rapporter cette thèse et pour l'honneur qu'elle m'a fait en présidant le jury.

Ce fut un grand honneur que les Professeurs ZERIAB MOHAMED ES-SADEK et KHALID HILAL aient accepté de rapporter sur cette thèse. Je les remercie du temps qu'ils ont consacré à la lecture du manuscrit, et pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail.

Mes professeurs ABDELMAJID EL HAJAJI et HICHAM MOUSSA me font un grand honneur en participant au jury de ma thèse.

Faire partie du Laboratoire Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (LMACS), même en tant que thésard, est sans doute un avantage, non seulement pour les conditions offertes, mais aussi grâce à la convivialité qui y règne. Que tous ses membres, qu'ils soient professeurs, thésards ou secrétaires, trouvent ici mes sincères remerciements.

Il me reste à adresser une pensée à ma chère famille: mes parents, mes frères et sœurs, ma femme sans qui rien n'aurait été possible et bien sur mon fils YAHYA dont le soutien est un ressource inestimable.

Pour finir, Toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'élaboration et à la réalisation de cette thèse, trouveront ici l'expression de mes sincères sentiments.

Liste des publications

1. A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi, Existence of weak solutions for nonlinear p-elliptic problem by topological degree, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, 20(3) (2020), 229-241.
2. A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi, Topological degree methods for a Neumann problem governed by nonlinear elliptic equation, Moroccan J. of Pure and Appl. Anal. (MJPAA), 6(2) (2020), 231-242.
3. A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi, Existence of Entropy Solutions for Anisotropic Elliptic Nonlinear Problem in Weighted Sobolev Space. In The International Congress of the Moroccan Society of Applied Mathematics. Springer, Cham, pp. 102-122 (2019).
4. A. Abbassi, C. Allalou & A. Kassidi: Existence of Entropy Solutions of the Anisotropic Elliptic Nonlinear Problem with Measure Data in Weighted Sobolev Space. Bol. Soc. Paran. Mat (2020) https://doi.org/10.5269/bspm.52541.
5. A. Abbassi, C. Allalou & A. Kassidi: Anisotropic Elliptic Nonlinear Obstacle Problem with Weighted Variable Exponent. J.Math.Study.(In press)
6. A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi, Existence Results For Some Nonlinear Elliptic Equations Via Topological Degree Methods. J. Elliptic Parabol. Equ. (2021) https://doi.org/10.1007/s41808-021-00098-w.
7. A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi, The Discontinuous Nonlinear Dirichlet boundary Value Problem with p-Laplacian. Azerbaijan Journal of Mathematics vol 11, no 2 (2021).

Papiers soumis :

1. A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi : Degenerate $p(x)-$ elliptic equation with L^1-data and without sign condition.
2. A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi : Entropy solutions to nonlinear elliptic anisotropic obstacle problem with weighted variable exponent.
3. A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi : Anisotropic elliptic nonlinear problem with L^1-data in weighted Sobolev space variable exponent.

4. A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi : On an elliptic equation of Kirchhoff type problem via topological degree.
5. A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi : Existence of solutions for Neumann elliptic problems with discontinuous nonlinearities via topological degree.
6. A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi : The topological degree methods for the fractional $p-$Laplacian problems with discontinuous nonlinearities.
7. A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi : A weak solution to a Kirchhoff type problem with discontinuous nonlinearities.
8. A. Abbassi, C. Allalou, A. Kassidi and H. E. Hammar : Existence of weak solutions for a parabolic problem of Kirchhoff type via topological degree.
9. H. E. Hammar, A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi : The topological degree methods for the fractional $p(\cdot)-$Laplacian problems with discontinuous nonlinearities.
10. A. Abbassi, C. Allalou, S. Yacini and A. Kassidi : Neumann problem with a nonlinear $p(x)-$elliptic equation solved by topological degree methods.
11. M. E. Ouaarabi, A. Abbassi, C. Allalou and A. Kassidi : Existence of weak solutions for same nonlinear elliptic problems in weighted Sobolev spaces via topological degree methods.

Notations

p.p.	Presque partout.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
$\hookrightarrow$	L'injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	L'injection compacte.
Ω	Ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
$\overline{\Omega}$, $\partial\Omega$	Fermeture, frontière topologique de Ω.
$x = (x_1, x_2, ...x_N)$	Point de $\mathbb{R}^N$.
$dx = dx_1 dx_2.......dx_N$	Mesure de Lebesgue sur Ω.
∇u	Gradient de u.
$supp(f)$	Support d'une fonction f.
f^+, f^-	$\max(f, 0), \min(f, 0)$.
T_k	Fonction troncature de niveau $k > 0$.
$C_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues nulles au bord de Ω.
$C^k(\Omega)$	Espaces des fonctions k-fois continument différentiables dans Ω.
$L^p(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$	Espaces de Lebesgue standards sur Ω d'exposants p et ∞.
p', $p'(.)$	L'exposant conjugué de $p > 1$, de $p(.)$.
$p(.)$	Fonction mesurable (exposent variable).
p^+, p^-	sup essentiel, inf essentiel de $p(.)$.
$L^{p(x)}(\Omega)$	Espaces de Lebesgue généralisé sur Ω d'exposant variable $p(x)$.
$W^{1,p(.)}(\Omega)$	Espace de Sobolev généralisé sur ω d'exposant $p(x)$.
$W^{1,p}(\Omega, w)$	Espace Sobolev avec poids.
$W_0^{1,p}(\Omega, \omega)$	Adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega, \omega)$.
$W^{-1,p'}(\Omega, \omega^*)$	Espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega, \omega)$.
$W_0^{1,p(.)}(\Omega, \omega)$	Adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(.)}(\Omega)$.
$W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{w})$	Espace Sobolev anisotrope avec poids.
$W^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$	Espace Sobolev anisotrope avec poids à exposant variable.
$\mathcal{T}_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$	Ensemble des fonction measurable tels que $T_k(u) \in W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$.

K_ψ	Classe convexe.
$W^{-1,\overrightarrow{p'}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w^*}(.))$	Le dual topologique de $W^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$.
$W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$	La fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$.
$\mathcal{V}=L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$	Espace des fonctions mesurable de $(0,T)$ à valeur dans $W^{1,p}(\Omega)$ tels que $\int_0^T \|f(t)\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}dt$ est fini.
$\mathcal{V}^*=L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$	Espace dual de $\mathcal{V}=L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$.

Résumé

Notre objectif dans cette thèse est l'étude de certains problèmes elliptiques ou paraboliques fortement non-linéaires unilatéraux ou non-local faisant intervenir un opérateur du type Leray-Lions où les données sont dans L^1 ou $L^1 + W^{-1,p'}$. Dans ce travail, nous présentons une classe d'opérateurs permettant de mettre en évidence le cadre fonctionnel des espaces de Lebesgue et de Sobolev avec poids, les espaces de Sobolev anisotropes avec poids, les espaces de Sobolev à exposants variables avec poids, les espaces de Sobolev anisotropes à exposants variables avec poids.

La première partie concerne l'étude des problèmes elliptiques non-linéaires de type Dirichlet et unilatéraux, en s'inspirant de la méthode de monotonie. Nous établissons un résultat d'existence, sous certaines conditions, des solutions faibles ou solutions entropiques.

La deuxième partie de cette recherche est consacrée à l'étude des problèmes elliptiques ou paraboliques non-linéaires sous conditions aux limites de type Dirichlet ou de Neumann. Nous avons établi une étude théorique où nous avons montré l'existence de solutions en se basant sur la théorie de degré topologique. Ensuite nous faisons une extension de ces résultats aux problèmes du type Kirchhoff, à savoir une classe de systèmes d'équations elliptiques ou paraboliques non-linéaires avec un terme non local dans $\mathbb{R}^N$.

Notons que Les difficultés rencontrées durant ce travail sont de deux sortes: une première difficulté due a l'absence des injections dans ces espaces qui jouent un rôle importante dans la résolution de ce type de problèmes, l'autre difficulté est associé au peu la régularité des solutions.

Mots clés : Solutions faibles, solutions entropiques, problèmes unilatéraux anisotropes, espaces de Sobolev avec poids, espaces de Sobolev à exposants variables, espaces de Sobolev anisotropes à exposants variables avec poids, espaces de Sobolev anisotropes avec poids, degré topologique, condition aux limites de Neumann, problèmes de type Kirchhoff, problèmes elliptiques non locaux, équation parabolique de type Kirchhoff.

Abstract

Our aim in this thesis is to study some strongly nonlinear unilateral or nonlocal elliptic or parabolic problems involving a Leray-Lions type operator where the data are in L^1 or $L^1 + W^{-1,p'}$. In this work, we present a class of operators that allow us to illustrate the functional framework of weighted Lebesgue and Sobolev spaces, weighted anisotropic Sobolev space, weighted variable exponent Sobolev space, weighted anisotropic variable exponent Sobolev space.

The first part concerns the study of nonlinear elliptic problems of Dirichlet type and unilateral, inspired by the monotonicity method. We establish a result of existence, under certain conditions, of weak solutions or entropy solutions.

The second part of this research is devoted to the study of non-linear elliptic or parabolic problems under Dirichlet or Neumann boundary conditions. We have proved a theoretical study where we have shown the existence of solutions based on the topological degree theory. Then we extend these results to the Kirchhoff type problems, namely a class of systems of nonlinear elliptic or parabolic equations with a nonlocal term in $\mathbb{R}^N$.

Let us note that the difficulties encountered during this work are of two kinds: a first difficulty due to the absence of embedding in these spaces which play an important role in the resolution of this type of problems, the other difficulty is associated with the little regularity of the solutions.

Keywords : Weak solution, entropy solutions, anisotropic unilateral problems, weighted Sobolev spaces, variable exponent Sobolev spaces, weighted anisotropic variable exponent Sobolev spaces, weighted anisotropic Sobolev spaces, topological degree, p-elliptic problems, Neumann boundary condition, Kirchhoff-type problems, nonlocal elliptic problems, Parabolic equation of Kirchhoff type, nonlocal parabolic problem.

Table des matières

Introduction générale

La formulation mathématique de nombreux problèmes de la physique ou de la chimie conduit à l'étude d'équations aux dérivées partielles. Des recherches actives et importantes ont ainsi été motivées qui, transposées dans un cadre plus général, ont fourni les outils puissants de la théorie actuelle.

Des méthodes particulières de résolution ont d'abord été élaborées (les travaux d'Euler, d'Alembert, de Lagrange et de Laplace [45], ou de Fourier) mais ce n'est qu'à la fin du 18$^{\text{ème}}$ siècle que l'on voit apparaître des résultats généraux : classification des opérateurs différentiels, théorèmes d'unicité, étude systématique de problèmes aux limites. Autrement dit, la notion de fonction ne permettant pas d'obtenir des résultats satisfaisants, l'étude des solutions faibles [42, 65, 102, 126], des équations aux dérivées partielles a amené Schwartz à l'élaboration de la théorie des distributions [127] qui constitue de nos jours le cadre naturel de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires mais aussi non linéaires : cet outil permet, entre autres, d'associer un cadre fonctionnel approprié, également d'y démontrer l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution.

L'objet de cette thèse est l'étude de certains problèmes elliptiques ou paraboliques fortement non-linéaires ou unilatéraux faisant intervenir un opérateur du type Leray-Lions où les données second membres sont dans L^1 ou $L^1 + W^{-1,p'}$. Ce type d'opérateur regroupent des problèmes dont les solutions se trouvent dans des espaces dépendant de la variable d'espace : il s'agit des espaces de Lebesgue et de Sobolev avec poids, les espaces de Sobolev anisotropes avec poids, les espaces de Sobolev à exposants variables avec poids, les espaces de Sobolev anisotropes à exposants variables avec poids.

Notons que les problèmes qui ont été abordés dans ce travail apparaissent dans de nombreux modèles issus de la modélisation mathématique des processus physiques et mécaniques en milieu continu anisotrope, les modèles de mécanique des fluides [26, 90], de diffusion non linéaire [2, 6, 119], l'élasticité non linéaire [20, 19, 94], les problèmes de la dynamique d'une corde en mouvement axial et la dynamique des populations, nous renvoyons le lecteur à [1, 17, 59, 82, 119] pour plus de détails.

Cette thèse se compose de deux parties, dans chacune nous montrons des résultats d'existence de solutions (faibles ou entropiques) basée essentiellement sur deux approches différentes, l'une sur la méthode de monotonie et les convergences fortes des troncatures et l'autre sur la théorie de degré topologique.

Première partie :

Dans la première partie, nous considérons des problèmes elliptiques fortement non-linéaires de type Dirichlet suivant:

$$\begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

où $Au = -div\, a(x, u, \nabla u)$ est de type Leray-Lions de X vers son dual X^* $\big($ i.e $X = W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{w})$ ou $X = W_0^{1,p(x)}(\Omega, \nu)$ ou $X = W_0^{1,\overrightarrow{p}(x)}(\Omega, \overrightarrow{w})$ $\big)$ tel que $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant des hypothèses du type Leray-Lions.

L'étude mathématique et analytique des équations aux dérivées partielles nous oblige à faire un choix adéquat des espaces fonctionnels.
Historiquement, au cours des dernières décennies, les travaux de SERGUEÏ SOBOLEV et WŁADYSŁAW ORLICZ ont joué un rôle important dans le domaine des équations aux dérivées partielles, le conduisant à une grande révolution scientifique. La définition des espaces de Sobolev consiste à utiliser les dérivées faibles et à donner un sens à l'affirmation suivante : pour une fonction donnée $u \in L^p$, ses dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ sont également dans L^p. Ces espaces peuvent aussi être définis, en introduisant la théorie de la distribution, comme

$$W^{m,p} = \{\, u \in L^p, D^\alpha u \in L^p \text{ dans le sens de la distribution pour tout } \alpha,\ |\alpha| \leq m \,\}.$$

En 1950, SCHWARTZ, à partir de l'extension de la classe des fonctions ordinaires à la classe des distributions, a présenté les solutions faibles des EDP dans le livre "La théorie des distributions". Il en va de même pour la multiplication par les fonctions C^∞, les dérivées, la convolution et la transformée de Fourier. En fait, la théorie des distributions devient un outil important dans les problèmes formulés en terme d'espaces de Sobolev.

Depuis l'émergence de la science appliquée non linéaire, les espaces de Lebesgue et de

Sobolev classiques ont montré leur incapacité dans certaines applications, ce qui conduit à introduire le cas des exposants variables. Les espaces de Lebesgue généralisés sont apparus pour la première fois dans l'article d'ORLICZ [118] de 1931. Plus précisément, il a considéré l'espace de fonctions suivant

$$L^{\varphi}(\Omega) = \left\{ u \, : \, \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \; \rho(\lambda u) = \int_{\Omega} \varphi(\lambda |u|) dx < \infty \right\}$$

où $\lambda > 0$ et φ satisfaisant certaines propriétés, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, mais il n'a pas inclus le cas $|u|^{p(x)}$. En 1950, NAKANO [117] a développé la théorie des espaces modulaires. Un espace modulaire est un espace vectoriel topologique muni d'une fonction modulaire généralisant une norme. Comme exemple d'espace modulaire, on se réfère aux espaces de Musielak-Orlicz

$$L_{\Phi(\cdot,\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \, : \, \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \; \int_{\Omega} \Phi\left(x, \frac{|u(x)|}{\lambda}\right) dx < \infty \right\}$$

qui sont les espaces d'Orlicz pour $\Phi(x,t) = \Phi(t)$, les espaces de Lebesgue à exposant variable pour $\Phi(x,t) = t^{p(x)}$, et les espaces de Lebesgue avec poids pour $\Phi(x,t) = t^{p(x)} w(x)$ (voir [69, 68]). Par conséquent, NAKANO a mentionné les espaces de Lebesgue à exposant variable comme un exemple d'espaces modulaires.

Ensuite, SHARAPUDINOV [129] a introduit la norme de Luxembourg pour les espaces de Lebesgue généralisés, et il a prouvé que cette dernière les rend réflexives pour $1 < p^- \leq p(.) \leq p^+ < \infty$, et quelques années plus tard, ZHIKOV [139] a commencé à étudier les intégrales variationnelles à croissance non standard dans les espaces à exposant variable. En 1991, les travaux les plus influents sur le développement des espaces à exposant variable ont été réalisés par KOVÁCIK et RÁKOSNIK [98]. Ils ont établi plusieurs propriétés de base des espaces de Lebesgue $L^{p(x)}$ et de Sobolev $W^{1,p(x)}$. Dix ans après, FAN et ZHAO [74, 75] étendent les résultats précédents pour introduire les espaces de Sobolev $W^{m,p(x)}$ pour un entier $m \in \mathbb{N}^*$, et EDMUNDS et RÁKOSNIK [70] ont montré des résultats d'injections et de densité de fonction lisse dans $W^{m,p(x)}$.

Ce genre du problème (0.1) est d'une façon générale mal posé dans le cadre des solutions faibles (c'est-à-dire des solutions au sens de distributions). Ce qui présente un défi qui attire l'attention des chercheurs, comme en témoignent les contributions immenses dans la littérature. Elles consistent à proposer différentes approches théoriques pour l'étude de cette classe de problèmes.

Plus précisément, l'existence et l'unicité de la solution faible du problème elliptique de type (0.1) a été étudié par BOCCARDO et GALLOUËT [38]. Pour le problème elliptique de type (0.1) la solution faible est dans les espaces de Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 < q < \dfrac{N(p-1)}{N-1}$ (ceci lorsque $p > 2 - \frac{1}{N}$, afin que les espaces en question soient bien définis). Or, quand p est proche de 1, ainsi, pour $1 < p \leq 2 - \dfrac{1}{N}$, p^* est inférieur ou égal à 1. Il est donc hors de question que la solution appartienne à l'espace $W_{loc}^{1,1}(\Omega)$, puisque le gradient de u au sens usuel n'existe pas et il n'est plus clair dans quel sens il faut résoudre le problème (0.1).

Pour surmonter cette difficulté, BÉNILAN, BOCCARDO, GALLOUËT, GARIEPY, PIERRE et VAZQUEZ ont introduit dans [29] un nouvel espace $\mathcal{T}_{loc}^{1,1}(\Omega)$ (qui est une extension de l'espace de Sobolev $W_{loc}^{1,1}(\Omega)$) dans lequel on peut donner un sens au gradient de u, qui n'est pas en général localement intégrable. L'idée consiste à considérer la troncature $T_k(u)$ de la solution u et à travailler avec la dérivée $\nabla T_k(u)$ (qui est localement intégrable) au lieu de ∇u.

Une autre difficulté concerne l'unicité des solutions. PRIGNET [121] montre que, même dans le cas linéaire $Au = -div(B(x)\nabla u)$ où $B(x)$ est une matrice uniformément coercive et bornée, il n'y a pas en général unicité des solutions faibles du problème (0.1) dans l'espace $W_0^{1,1}(\Omega)$, pour plus de détails voir les travaux de SERRIN [128], BÉNILAN et BOUHSSIS [30].

La notion de solution faible ne suffit donc pas à déterminer la solution physique observée car elle n'est pas unique. Il apparaît alors nécessaire de trouver un critère d'origine physique qui permet de sélectionner parmi toutes les solutions faibles, la solution physiquement admissible et qui permet d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité. Pour surmonter cette difficulté, trois approches ont été adoptées:

1. DALL'AGLIO [64] a montré que, même pour un problème non-linéaire, la méthode par approximation conduit à une unique solution appelée SOLA (Solution Obtenue comme Limite d'Approximations).
2. BÉNILAN et al [29] définissent la notion de solution entropique (ici $p > 2 - 1/N$ pour simplifier): Par exemple, pour le problème elliptique (0.1), où $Au = -div\, a(u, \nabla u)$, la solution entropique u est une fonction mesurable sur Ω vérifiant

$$\begin{cases} T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \forall k > 0 \text{ et} \\ \int_\Omega a(x, \nabla u)\nabla T_k(u-\varphi) \leq \int_\Omega f T_k(u-\varphi) \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

3. Enfin, la notion de solutions renormalisées a été introduite pour les équations du premier ordre et pour les équations de Boltzmann par DIPERNA et LIONS [66]. Parallèlement, MURAT [115, 116] a développé cette notion pour le problème elliptique, et s'est avéré,

pour de nombreux problèmes d'ailleurs, équivalent à celui de solutions entropiques, et les deux mènent à une unique solution. Ces solutions renormalisées vérifient

$$\begin{cases} T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \lim\limits_{h\to\infty} \int_{\{h\leq |u| \leq h+k\}} |Du|^p = 0 \quad \forall k > 0 \\ \int_\Omega a(u, Du) \cdot D(S(u)\phi) = \int_\Omega f S(u)\phi \end{cases}$$

pour tout $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et toute fonction régulière S à support compact.

Cette première partie est précédée par un chapitre préliminaires ou nous rappelons quelques outils de base et nous présentons quelques résultats préliminaires essentiels pour ce travail. Cette partie est composée de trois chapitres. Nous allons présenter ici d'une manière succincte le contenu de chacun d'entre eux.

Le chapitre 2 porte sur l'étude de l'existence de solutions entropique d'un problème unilatéral elliptique anisotrope non linéaire suivant

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \partial_i a_i(x, u, \nabla u) - div\phi(u) = \mu \quad \text{dans} \qquad \Omega \\ u = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

dans les espaces de Sobolev anisotrope avec poids $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$, où Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$, la donnée μ est une mesure qui se décompose dans $L^1(\Omega) + W^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega, \overrightarrow{\omega}^*)$, $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_N) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^N$, où $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions de Carathéodory, de plus nous allons supposer qu'elle satisfont les hypothèses du type Leray-Lions. L'approche adoptée pour prouver l'existence des solutions entropiques s'appuie sur la méthode de monotonie et convergence forte des troncatures(cf. [3]). De nombreux travaux ont été dédiés aux questions d'existence de solutions faibles ou renormalisées pour ce type de problèmes, citons par exemple les travaux de Y. AKDIM, C. ALLALOU et A. SALMANI [15], E. AZROUL, MB. BENBOUBKER et S. OUARO [23]. Dans le cas sans poids $\omega \equiv 1$, L. BOCCARDO ET AL dans [40] ont étudié l'existence de solutions faibles pour un problème elliptique non linéaire du type (0.2), où $Au = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)$, $\phi(u) \equiv 0$ et le second membre est une mesure bornée de Radon sur Ω, dans l'espace de Sobolev

$$W_0^{1,q_i}(\Omega) = \{v \in W_0^{1,1}(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^{q_i}(\Omega), \quad \forall i = 1, \cdots, N\},$$

où q_i (pour $i = 1, \cdots, N$) est un nombre réel quelconque supérieur à 1 tel que

$$1 < q_i < \frac{N(\overline{p}-1)}{\overline{p}(N-1)} p_i, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}.$$

Encore plus A. SALMANI, Y. AKDIM et H. REDWANE [125] ont étudié ce problème dans les espaces de Sobolev sans poids, ainsi par C. YAZOUGH, E. AZROUL et H. REDWANE [135] dans le cadre des espaces de Sobolev à exposant variable sans poids.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du problème $p(x)$-elliptique fortement non-linéaire dégénéré de type :

$$\begin{cases} Au + g(x,u,\nabla u) = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

où A est un opérateur de Leray-Lions défini de $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ vers son dual $W^{-1,p'(x)}(\Omega,\nu^*)$, avec $\nu^* = \nu^{1-p'(x)}$, par :

$$Au = -\text{div } a(x,u,\nabla u)$$

tel que $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory qui vérifie les hypothèses du type Leray-Lions, le terme $g(x,u,\nabla u)$ est fortement non linéaire vérifiant uniquement la condition de croissance avec second membre dans L^1. L'étude de ce problème est basée essentiellement sur la méthode de convergence forte des troncatures dans l'espaces Sobolev avec poids $\nu(x)$ à exposants variables $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$.

Ce problème a été initialement étudié par H. BREZIS et W. A. STRAUSS [47] dans le cas $f \in L^1(\Omega)$, ainsi par L. BOCCARDO et T. GALLOUËT [39] ont prouvé un résultat d'existence pour un problème de type (0.3), qui a été étendu à un cas unilatéral étudié par A. BENKIRANE et A. ELMAHI [32], T. DEL VECCHIO dans [134] a montré l'existence de solutions dans le cas où g ne dépend pas du gradient.

D'autre part, Y. AKDIM, E. AZROUL et A. BENKIRANE dans [16] ont traité un problème de type (0.3) dans le cadre des espaces Sobolev avec un poids $W_0^{1,p}(\Omega,\omega)$, mais en gardant p constant.

E. AZROUL, M. B. BENBOUBKER, H. HJIEJ et C. YAZOUGH [24] ont étudié les problèmes d'obstacles associés à l'équation de type (0.3), dans le cas non classique en considérant les espaces Sobolev anisotropes non standards sans poids $W_0^{1,\overrightarrow{p}(x)}(\Omega)$, ils prouvent un résultat d'existence sans condition de signe sur g. Voir aussi E. AZROUL, H. HJIEJ et A. TOUZANI [25] où l'existence et la régularité des solutions entropiques ont été obtenues pour l'équation (0.3) avec un second membre dégénéré.

Dans le chapitre 4, nous établissons un résultat d'existence de solutions entropiques au problème d'obstacle associé à l'équation du type :

$$\begin{cases} Au + g(x,u,\nabla u) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.4}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, A est un opérateur du type Leray-Lions défini de $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$ vers son dual $W_0^{-1,\overrightarrow{p}'(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}^*(.))$ avec second membre f appartient à L^1. De plus le terme non linéaire $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant seulement la condition de croissance.

Dans le cas particulier où le terme de non linéarité $g(x,u,\nabla u)$ est nul, le problème (0.4) a été étudié par L. BOCCARDO et T. GALLOUËT dans [36], plus précisément, ils ont considéré le second membre f est une mesure de Radon bornée sur Ω et $p \in \left]2 - \frac{1}{N}, N\right]$ et ont montré l'existence de solutions faible dans l'espaces de Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega)$ tel que $q < \dfrac{N(p-1)}{N-1}$ basé sur le théorème classique de J. L. Lions [105]. Dans l'ordre supérieur et g ne dépend pas du gradient M. CHRIF et S. EL MANOUNI [60] ont obtenu sur les espaces de Sobolev anisotropes avec poids des résultats d'existence de faible sans la condition de croissance sur g. Par contre A. ABBASSI, E. AZROUL et A. BARBARA [8] se sont intéressés à l'étude du problème de type (0.4) dans les espaces de Sobolev à exposant variable avec poids $W_0^{1,p(x)}(\Omega, \nu)$ pour lequel ils ont aussi prouvé l'existence de solutions faibles où $f \in L^1(\Omega)$.

Deuxième partie:

La deuxième partie de cette thèse est consacrée l'étude de l'existence des solutions faibles de certains problèmes non-linéaires en utilisant une autre approche basée sur la théorie les opérateurs de type (S_+) et les méthode de compacités, le degré topologique dans les espaces de Sobolev classiques ou dans les espaces de Sobolev avec poids.

Nous commençons par présenter cette innovation. La notion de degré topologique a été introduite explicitement par Brouwer [48] en 1912 dans le cas des espaces de dimension finie. La théorie topologique dans un espace de dimension infinie a été entamée dans un document célèbre publié en 1922 par G.D. BIRKHOFF et O.D. KELLOGG qui ont étendu à certains espaces de fonctions le fameux théorème du point fixe de Brouwer. Ils ont prouvé l'existence d'un point fixe au moins pour les applications continues définies d'un sous-ensemble convexe compact de $C([a, \; b]$ dans lui même. Le théorème du point fixe de Birkhoff-Kellogg a été étendu par J. SCHAUDER au cas d'un opérateur continu T appliquant un sous-ensemble convexe compact d'un

espace de Banach sur lui-même.
La topologie algébrique d'espaces de Banach et ses applications aux équations non linéaires a débuté par le travail de J. SCHAUDER durant la période 1927 − 1932 [101]. Schauder a identifié une classe importante d'opérateurs non linéaires dans un espace de Banach, les perturbations complètement continues de l'identité, pour lesquelles il pourrait généraliser deux résultats importants de BROUWER dans un espace de dimension finie : un théorème du point fixe et un théorème d'invariance de domaine. Le théorème du point fixe de Schauder est devenu au cours du temps un outil puissant pour étudier l'existence de solutions d'équations différentielles. Schauder a appliqué son théorème d'invariance de domaine pour considérer des problèmes elliptiques non linéaires dont l'unicité implique l'existence.
En 1933, J. SCHAUDER eu l'occasion de rencontrer J. LERAY à Paris, et une seconde période importante dans la topologie de dimension infinie a commencé à partir de leur collaboration. Leray et Schauder ont immédiatement convenu que la topologie des perturbations complètement continues de l'identité dans un espace de Banach était un cadre idéal pour développer la méthode de continuation de Leray pour les équations intégrales non linéaires (appelée méthode d'Arzela-Schmidt), et en particulier pour la libérer de l'unicité inutile et des hypothèses de régularité. Par conséquent, LERAY et SCHAUDER, dans leur article fondamental [103], ont étendu le degré de Brouwer à des perturbations compactes de l'identité dans un espace de Banach. BROWDER [49] a construit un degré topologique pour les opérateurs de type (S_+) dans les espaces Banach réflexifs à travers la méthode Galerkin. Ensuite, cette notion a été étendue par Berkovits [34] pour les opérateurs de type monotone généralisé. En effet, la classe d'opérateurs pour lequel le degré étendu est essentiellement obtenue en remplaçant la perturbation compacte d'opérateurs par une composition d'opérateurs de type monotone, pour plus de détails voir par exemple [11, 58, 96, 111, 131, 132, 137].

Dans la suite, la contribution principale de cette partie est composée en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous étudions le résultat d'existence des solutions faibles via le degré topologique de Berkovits pour l'équation p-elliptique non linéaire suivante(cf. [5]) :

$$-\,div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda|u|^{q-2}u + f(x,u,\nabla u) \tag{0.5}$$

dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$(ouvert borné) sous la condition de Dirichlet, où f est une fonction Carathéodory satisfaisant uniquement la condition de croissance.

L'approche de résolution proposée dans ce chapitre consiste à transformer ce problème elliptique non linéaires en un nouveau problème régi par une équation de Hammerstein. Puis, en utilisant la théorie du degré topologique pour les opérateurs de type (S_+), afin de montrer l'existence de solutions faibles, dans le cadre des espaces Sobolev avec poids $W^{1,p}(\Omega, w)$. Récemment, M. AIT HAMMOU, E. AZROUL et B. LAHMI [85, 86] ont étudié un problème de type (0.5) via le degré topologique dans le cadre des espaces de Sobolev à exposant variables. De plus, S. LIU [109] par la théorie de Morse, à établé l'existence de solutions faibles dans le cas $f(x, \nabla u)$ sous des conditions aux limites de Dirichlet. Lorsque le second membre est nul et $p = q$, J. G. MELIÁN ET AL dans [112] ont étudié le problème des valeurs propres, ils ont démontré pour la première fois la dérivabilité de la première valeur propre du p-Laplacien par rapport au domaine.

Le problème considéré dans le deuxième chapitre de cette partie consiste à chercher de solutions faibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ associé à l'équation elliptique non linéaire suivante (cf. [4]):

$$- div\big(a(x, u, \nabla u)\big) = b(x)|u|^{p-2}u + \lambda H(x, u, \nabla u) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{0.6}$$

dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, sous la condition de Neumann homogènes au bord et sous certaines conditions sur a et $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.
D'autre part, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ de frontière Lipschitzien $\partial\Omega$, $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$, p un réel tel que $2 < p < \infty$ et λ est un paramètre réel et $b \in L^\infty(\Omega)$, $b(x) > 0$ p.p. dans Ω.

Les problèmes avec conditions au bord de Neumann a été étudiés dans [13, 80, 83, 91, 71] où les différents auteurs montrent l'existence et l'unicité de la solution faible (nodal) par différentes approches. En particulier, la théorie de Morse, les méthodes variationnelles, la théorie des points critiques.

Dans le cas de p-Laplacien et le second membre égal $f(x, u)$, G. BONANNO, G. D'AGUÌ et A. SCIAMMETTA dans [43] ont étudié le problème (0.6)-(**??**) basé sur la théorie des points critiques. Lorsque $a(x, u, \nabla u) = A(x, \nabla u)$ et $H(x, u, \nabla u) = f(x, \nabla u) + s(x)|u|^{p^*-1}u$, T. HE et AL ont prouvé dans [88] que ce problème admet au moins trois solutions non triviales, deux de signe constant (une positive, l'autre négative) et la troisième nodale par une combinaison entre les méthodes variationnelles basées sur la théorie du point critique, les techniques de troncature appropriées et les arguments d'invariance de flux.

Dans les deux derniers chapitres de cette partie, nous étudions deux problèmes de type Kirchhoff, l'un elliptique et l'autre parabolique.

Ces dernières années, divers problèmes de type Kirchhoff ont été largement étudiées par de nombreux auteurs en raison de leur importance théorique et pratique. De tels problèmes sont souvent désignés comme étant non locaux en raison de la présence d'un terme intégral sur Ω ou $\mathbb{R}^N$ tout entier, qui implique que l'équation n'est plus une identité ponctuelle. En 1883, Kirchhoff a introduit dans [97] un modèle donné par l'équation:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Big(\frac{\rho_0}{h}+\frac{E}{2L}\int_0^L\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2dx\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{0.7}$$

modélisant les vibrations libres d'une corde fixée en ses extrémités. Plus précisément, Kirchhoff a proposé ce modèle comme une extension de l'équation d'onde de la classique d'Alembert en considérant les effets des variations de la longueur des cordes pendant les vibrations. Les paramètres de l'équation ci-dessus ont les significations suivantes: E est le module de Young du matériau, ρ la densité de masse, L la longueur de la chaîne, h la zone de section et ρ_0 la tension initiale, ce type de problème a suscité l'intérêt de nombreux auteurs, principalement après les travaux novateurs de Lions [106], dans lesquels une technique d'analyse fonctionnelle a été proposée pour l'attaquer, on peut citer notamment les travaux de M. CHIPOT [56, 57], F. J. S. A. CORRÊA et AL. [61, 62] et leurs références.

Premièrement, ce chapitre est dédié à l'étude du problème de type Dirichlet associé à l'équation elliptique non-linéaire suivante:

$$-M\Big(\int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx\Big)div\big(a(x,\nabla u)\big)-\lambda g(x,u,\nabla u)=b(x)|u|^{q-2}u \text{ dans } \quad \Omega, \tag{0.8}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $N\geq 1$, $2<q<p<\infty$, $-div\big(a(x,\nabla u)\big)$ est un opérateur de Leray-Lions, λ est un paramètre réel, M et g sont deux fonctions que nous préciserons dans la suite. De plus, nous mentionnons que la fonction b appartient à $L^\infty(\Omega)$.

De nombreux problèmes de type Kirchhoff ont été étudiés ces dernières années, dans le cas où $A(x,\xi)=\dfrac{1}{p}|\xi|^p$, alors nous obtenons l'opérateur p-Laplace ($a(x,\xi)=|\xi|^{p-2}|\xi|$, où $p\geq 2$). Ceci conduit en général aux problèmes dits p-Kirchhoff tels qu'ils ont été examinés dans [92, 104, 77, 107, 108] en utilisant la théorie de Morse, l'indice du point fixe, théorème de la fontaine. On renvoie le lecteur aux travaux [53, 54, 79, 89] pour plus d'explications dans cette direction.

Dans le cas le plus simple $M\equiv 1$, les problèmes de type (0.8) ont été résolus dans les espaces de Sobolev classiques par plusieurs auteurs, citons [67, 78, 110, 124]. La plupart de ces travaux ont été étendus au cas des espaces de Sobolev à exposants variables, citons à titre d'exemple

[50, 72, 100, 136].

Dans le dernier chapitre de cette partie, nous considérons le problème parabolique de type Kirchhoff dans les espaces appropriés suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - M\Big(\displaystyle\int_\Omega A(x,t,\nabla u)\,dx\Big)\, div\big(a(x,t,\nabla u)\big) = g(x,t) & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0 & \text{sur} \quad \partial Q = \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur} \quad \Omega. \end{cases} \tag{0.9}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ un ouvert borné de frontière régulière $\partial\Omega$, p un réel tel que $2 < p < \infty$, $-div\big(a(x,t,\nabla u)\big)$ est l'opérateur de Leray-Lions défini de $\mathcal{V} := L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ vers son dual $\mathcal{V}^* := L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ et le second membre g est supposé appartenir à $\mathcal{V}^*$. Nous étudions dans ce chapitre l'existence de solutions faibles dans le cadre des espaces de Sobolev classiques via la méthode des degrés topologiques [7, 10, 35].

Y. Han, W. Gao, Z. Sun et H. Li [87] ont étudié ce problème dans le cas où $A(x,\nabla u) = |\nabla u|^2$ et $f(x,t) = |u|^{q-1}u$, ils ont discuté l'existence globale et l'explosion en temps fini des solutions lorsque l'énergie initiale est sous-critique, critique ou super-critique avec coefficient de diffusion non local. Récemment dans le cas classique (i.e $M \equiv 1$) et $f \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$, L. Boccardo, A. Dall'Aglio, T. Gallouët et L. Orsina dans [37] se sont intéressés à certains résultats d'existence et de régularité pour les solutions de (0.9). B. Lahmi, K. El Haiti et A. Abbassi [99] ont étudié ce problème dans les espaces de Sobolev à exposant variable avec $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial b(x,u)}{\partial t}$ de même H. Redwane dans [122] le cadre des espaces d'Orlicz Sobolev. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur par exemple, aux références [18, 84] pour plus de détails.

Enfin, nous terminons cette thèse par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Cadre fonctionnel et propriétés

1.1 Espaces fonctionnels

Les espaces de Sobolev sont omniprésents dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques. Il s'avère donc judicieux d'en faire une brève présentation avant d'aborder ces équations. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de Kavian [93] et de Brezis [46], pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra aussi voir Adams [9].
Dans toute la suite, nous notons par $\Omega \subset \mathbb{R}^N \quad (N \geq 2)$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne.

1.1.1 Espaces de Lebesgue et Sobolev classiques

Soit $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables dont la p^{ieme} puissance est intégrable, au sens de Lebesgue. L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_p = \Big(\int_\Omega |u|^p \Big)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach, de plus, il est réflexif et séparable pour $1 < p < +\infty$ et son dual est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$ où p' est le conjugué de p défini par: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par:

$$W^{1,p}(\Omega) = \big\{ u \in L^p(\Omega),\ \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \big\},$$

muni de la norme
$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}},$$
l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.
On note pour $1 \leq p < +\infty$, $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$, $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω.
Pour $1 < p < +\infty$, on peut identifier le dual topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$ à un sous-espace de l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ par :
$$W^{-1,p'}(\Omega) = \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^*, \quad \text{où } \; p' = \frac{p}{p-1}.$$
Dans la manipulation des espaces de Sobolev, très souvent on fait appel à certaines injections dites de Sobolev. Nous rappelons en particulier une de ces injections donnée par le Théorème de Rellich-Kondrachov.

Théorème 1.1. *[46](Rellich-Kondrachov) On suppose Ω de classe C^∞ et $p < N$. Alors*
$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[\text{ où } p^* = \frac{Np}{N-p}.$$
En particulier, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty)$.

1.1.2 Espaces de Lebesgue et de Sobolev avec poids

Soit p un réel et $\gamma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction poids sur Ω, c'est-à-dire, γ est une fonction mesurable et strictement positive p.p. dans Ω. On définit l'espace de Lebesgue avec poids par,
$$L^p(\Omega, \gamma) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable sur } \Omega, \quad u\gamma^{\frac{1}{p}} \in L^p(\Omega)\right\}$$
muni de la norme suivante
$$\|u\|_{L^p(\Omega,\gamma)} \equiv \|u\|_{p,\gamma} = \left(\int_\Omega |u|^p \gamma(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.1}$$
est un espace de Banach pour $1 \leq p < \infty$.
Soit $\omega = \{\omega_i(x),\ 0 \leq i \leq N\}$ un vecteur de fonctions poids, nous supposons pour tout $0 \leq i \leq N$

que

$$w_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \tag{1.2}$$
$$w_i^{\frac{-1}{p-1}} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega). \tag{1.3}$$

Dans le cas particulier $w_0(x) \equiv 1$ sur Ω, la condition (1.3) peut être généralisée sous la forme de la condition d'intégrabilité suivante:

$$\text{il existe } \ \nu \in \left]\frac{N}{p}, \infty\right[\cap \left[\frac{1}{p-1}, \infty\right[\ \text{ tel que } w_i^{-\nu} \in L^1(\Omega) \quad \forall i = 1, \cdots, N. \tag{1.4}$$

D'autre part, notons par $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ les dérivés aux sens de distributions.
L'espace Sobolev avec poids $W^{1,p}(\Omega, w)$ est défini comme suit:

$$W^{1,p}(\Omega, w) = \Big\{ u \in L^p(\Omega, w_0) \quad \text{et} \quad \partial_i u \in L^p(\Omega, w_i), \quad i = 1, ..., N \Big\}$$

est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{1,p,w} = \Big[\int_\Omega |u(x)|^p w_0(x)\, dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \Big|\partial_i u(x)\Big|^p w_i(x)\, dx \Big]^{1/p}. \tag{1.5}$$

La condition (1.2) implique que $C_0^\infty(\Omega)$ est un sous-espace de $W^{1,p}(\Omega, w)$, par conséquent, nous pouvons introduire le sous-espace $X = W_0^{1,p}(\Omega, w)$ de $W^{1,p}(\Omega, w)$ comme étant la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme (1.5). De plus, la condition (1.3) implique que $W^{1,p}(\Omega, w)$ et $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ sont des espaces Banach réflexifs.
On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$, où $w^* = \{w_i^* = w_i^{1-p'}, i = 0, \ldots, N\}$ et $p' = \frac{p}{p-1}$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega, w)$, pour $1 < p < \infty$. (voir [12, 16, 14]).

Théorème 1.2. *[69] Supposons que* (1.2) *et* (1.4) *ont lieu, Alors l'expression*

$$|||u|||_X = \Big(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u(x)|^p\, w_i(x)\, dx \Big)^{1/p}, \tag{1.6}$$

est une norme sur l'espace $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ qui est équivalente à la norme (1.5).

Introduisons l'hypothèse suivante:

(H_0) On suppose que l'expression $|||u|||_X = \left(\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i u(x)|^p\, w_i(x)\, dx\right)^{1/p}$ est une norme définie sur $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ équivalente à la norme usuelle (1.5).

Et qu'il existe une fonction poids σ sur Ω et un paramètre q, $1 < q < \infty$, tels que

$$\sigma^{1-q'} \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \sigma^{-p/(q-p)} \in L^1(\Omega) \tag{1.7}$$

où $q' = \frac{q}{q-1}$. Par suite, nous avons l'inégalité Hardy suivante: pour tout $u \in X$

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^q \sigma dx\right)^{1/q} \leq c\left(\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i u(x)|^p w_i(x) dx\right)^{1/p}, \tag{1.8}$$

où $c > 0$ une constante indépendante de u, alors l'injection

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega, \sigma), \tag{1.9}$$

exprimée par l'inégalité (1.8) est compacte.

Notons que sous les hypothèses (1.2), (1.3) et (H_0), $(X, |||\cdot|||_X)$ est un espace de Banach uniformément convexe (est donc réflexif).

Remarque 1.1. *[69, pp.30-31] Si on suppose $w_0(x) \equiv 1$, et que les fonctions poids $\omega = \{\omega_i(x),\ 0 \leq i \leq N\}$ satisfont les conditions d'intégrabilités (1.4).*

Alors,

$$|||u||| = \left(\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i u|^p\, w_i(x)\, dx\right)^{1/p} \tag{1.10}$$

est une norme définie sur $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ équivalent à (1.5). De plus, l'injection

$$W_0^{1,p}(\Omega, w) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \tag{1.11}$$

est compact pour tout $1 \leq q \leq p_1^*$ avec $p_1 = p\nu/\nu + 1$ et p_1^* est le conjugué de p_1 définie par

$$\begin{cases} p_1^* = \frac{Np_1}{N-p_1} = \frac{Np\nu}{N(\nu+1)-p\nu} & si \;\; p\nu < N(\nu+1) \\ p_1^* = \infty \quad si \;\; p\nu \geq N(\nu+1). \end{cases}$$

L'hypothèse (H_0) esr donc vérifiée (avec $\sigma \equiv 1$).

1.1.3 Espaces Lebesgue et Sobolev avec poids à exposant variables

Nous rappelons dans cette section quelques définitions et propriétés des espaces de Lebesgue et espaces de Sobolev à exposant variable [8, 63, 73, 76, 113].

Soit $p(\cdot) : \overline{\Omega} \to [1, +\infty[$ une fonction mesurable, que nous appelons l'exposant variable, nous supposons que $p(\cdot)$ et log-Hölder continue sur Ω, c'est-à-dire, il existe une constante C tel que

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{-log\,|x-y|} \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}, x \neq y \text{ avec } |x-y| < \frac{1}{2}.$$

De plus

$$p^- \leq p(x) \leq p^+ < +\infty$$

où

$$p^- := \operatorname{ess}\inf_{x\in\overline{\Omega}} p(x); \quad p^+ := \operatorname{ess}\sup_{x\in\overline{\Omega}} p(x).$$

Espaces Lebesgue avec poids à exposant variables

Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes :

$$C_+(\overline{\Omega}) = \left\{h \quad \text{log-Hölder continue sur } \overline{\Omega},\ h(x) > 1\right\}.$$

Soit $p \in C_+(\overline{\Omega})$ et ν une fonction poids dans Ω. On définit l'espace de Lebesgue avec poids à exposants variables $L^{p(x)}(\Omega, \nu)$ par

$$L^{p(x)}(\Omega, \nu) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ measurable, tel que } \rho_\nu(u) := \int_\Omega \nu(x)\,|u|^{p(x)} dx < \infty\},$$

muni de la norme de Luxembourg :

$$\|u\|_{p(x),\nu} = \inf\left\{\mu > 0 : \int_\Omega \nu(x) \left|\frac{u}{\mu}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.1. *L'espace* $\left(L^{p(x)}(\Omega, \nu), \|.\|_{p(x),\nu}\right)$ *est de Banach.*

Remarque 1.2. *Dans le cas simple* $\nu(x) = 1$, *on trouve l'espace de Lebesgue à exposants variables* $L^{p(x)}(\Omega)$ *et* $\rho_\nu(u) = \rho_1(u) := \rho(u) = \int_\Omega |u|^{p(x)} dx,$.

Lemme 1.1. *Soient* $u \in L^{p(x)}(\Omega, \nu)$ *et sous l'hypothèse* $p^+ < \infty$, *alors les assertions suivantes sont vraies:*

1. *Si* $\rho_\nu(u) > 1\ (= 1, < 1) \Leftrightarrow \|u\|_{p(x),\nu} > 1\ (= 1, < 1)$, *respectivement.*

2. *Si* $\|u\|_{p(x),\nu} > 1$, *alors* $\|u\|^{p_-}_{p(x),\nu} \leq \rho_\nu(u) \leq \|u\|^{p^+}_{p(x),\nu}$.
3. *Si* $\|u\|_{p(x),\nu} < 1$, *alors* $\|u\|^{p^+}_{p(x),\nu} \leq \rho_\nu(u) \leq \|u\|^{p_-}_{p(x),\nu}$.

Démonstration. Comme $\rho_\nu(u) = \rho(\nu^{\frac{1}{p(x)}} u)$ et $\|\nu^{\frac{1}{p(x)}} u\|_{p(x)} = \|u\|_{p(x),\nu}$ et par utilisation de [63], nous prouvons facilement le Lemme 1.1. □

Soit ν une fonction poids vérifiant les conditions d'intégrabilité suivantes

$$(w_1) \qquad \nu \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ et } \nu^{\frac{-1}{p(x)-1}} \in L^1_{loc}(\Omega).$$

$$(w_2) \quad \nu^{-s(x)} \in L^1_{loc}(\Omega) \quad \text{tel que } s(x) \in \left]\frac{N}{p(x)}, \infty\right[\cap \left[\frac{1}{p(x)-1}, \infty\right[.$$

Proposition 1.2. *Soit ν une fonction poids dans Ω. Si (w_1) est vérifié, alors $L^{p(x)}(\Omega, \nu) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$.*

Démonstration. Soit K un compact de Ω. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_K |u| dx &= \int_K |u| \nu^{\frac{1}{p(x)}} \nu^{\frac{-1}{p(x)}} dx \\
&\leq 2 \| |u| \nu^{\frac{1}{p(x)}} \|_{L^{p(x)}(K)} \| \nu^{\frac{-1}{p(x)}} \|_{L^{p'(x)}(K)} \\
&\leq 2 \|u\|_{p(x),\nu} \left(\int_K \nu^{\frac{-p'(x)}{p(x)}} dx + 1 \right)^{\frac{1}{p'_-}} \\
&\leq 2 \|u\|_{p(x),\nu} \left(\int_K \nu^{\frac{-1}{p(x)-1}} dx + 1 \right)^{\frac{1}{p'_-}}.
\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse (w_1) nous déduisons que $\int_K |u| dx \leq C \|u\|_{p(x),\nu}$. □

Espaces Sobolev avec poids à exposant variables

Soit $p \in C_+(\overline{\Omega})$ et ν une fonction poids dans Ω. Nous définissons l'espace de Sobolev avec poids à exposants variables noté $W^{1,p(x)}(\Omega, \nu)$ par

$$W^{1,p(x)}(\Omega, \nu) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p(x)}(\Omega, \nu), \quad i = 1, ..., N \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{1,p(x),\nu} = \|u\|_{p(x)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{p(x),\nu}$$

qui est équivalent à la norme Luxembourg

$$|||u||| = \inf\left\{\mu > 0 : \int_\Omega \left(\left|\frac{u}{\mu}\right|^{p(x)} + \nu(x) \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)} \right) dx \leq 1 \right\},$$

nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.3. *Soit ν une fonction poids dans Ω vérifiant la condition* (w_1)*. Alors l'espace* $\left(W^{1,p(x)}(\Omega,\nu), \|.\|_{1,p(x),\nu}\right)$ *est de Banach.*

Démonstration. Soient $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\left(W^{1,p(x)}(\Omega,\nu), \|.\|_{1,p(x),\nu}\right)$.
Par suite, $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^{p(x)}(\Omega)$ et $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)_n$ est suite de Cauchy dans $L^{p(x)}(\Omega,\nu)$ pour tout $i = 1, ..., N$.
D'après la Proposition 1.1, il existe $u, v_i \in L^{p(x)}(\Omega)$ tel que $u_n \to u$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$ et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow v_i$ dans $L^{p(x)}(\Omega,\nu)$ pour tout $i = 1, ..., N$.
Grâce à la Proposition 1.2, nous avons $L^{p(x)}(\Omega,\nu) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. Or $L^1_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$, alors pour tous $\varphi \in D(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle T_{v_i}, \varphi\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle T_{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}}, \varphi\rangle = -\lim_{n\to\infty} \langle T_{u_n}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle, \\
&= -\langle T_u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle = \langle T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $T_{v_i} = T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$, c'est-à-dire $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.
Par conséquent, $u \in W^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ et $u_n \to u$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$.
Finalement l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ est complet. □

D'autre part, puisque ν satisfait la condition (w_1), alors on montre facilement que $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ cela nous permet de définir l'espace $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ comme étant la fermeture de $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|.\|_{1,p(x),\nu}}$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$.

Proposition 1.4. *[8](Caractérisation de l'espace dual* $(W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu))^*$*)*
Soit $p(.) \in C_+(\overline{\Omega})$ *et* ν *une fonction poids satisfaisant la condition* (w_1)*. Pour tout* $G \in (W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu))^*$*, il existe un unique système de fonctions* $(g_0, g_1, ..., g_N) \in L^{p'(x)}(\Omega) \times (L^{p'(x)}(\Omega, \nu^{1-p'(x)}))^N$ *tel que pour tout* f *dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ *:*

$$G(f) = \int_\Omega f(x) g_0(x) dx - \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i(x) dx.$$

Démonstration. La preuve de cette proposition est similaire à celle de [98, Théorème 3.16]. □

Maintenant, introduisons la fonction p_s définie par

$$p_s(x) = \frac{p(x)s(x)}{s(x)+1},$$

où s est une fonction positive donné dans (w_2). Alors, nous avons $p_s(x) < p(x)$ p.p. dans Ω, et

$$\begin{cases} p_s^*(x) & = \frac{Np_s(x)}{N-p_s(x)} = \dfrac{Np(x)s(x)}{N(s(x)+1)-p(x)s(x)} \text{ si } p(x)s(x) < N(s(x)+1), \\ p_s^*(x) & \text{arbitraire, sinon .} \end{cases}$$

Proposition 1.5. [8] *Soit $p, s \in C_+(\overline{\Omega})$ et ν une fonction poids qui satisfait (w_1) et (w_2). Alors, $W^{1,p(x)}(\Omega,\nu) \hookrightarrow W^{1,p_s(x)}(\Omega)$.*

Démonstration. D'après l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v(x)|^{p_s(x)}dx = & \int_\Omega |v(x)|^{p_s(x)}\nu^{\frac{p_s(x)}{p(x)}}\nu^{\frac{-p_s(x)}{p(x)}}dx \\
\leq & \Big(\frac{1}{(\frac{p}{p_s})_-}+\frac{1}{(s+1)^-}\Big)\Big\||v(x)|^{p_s(x)}\nu^{\frac{p_s(x)}{p(x)}}\Big\|_{\frac{p(x)}{p_s(x)}}\Big\|\nu^{\frac{-p_s(x)}{p(x)}}\Big\|_{s(x)+1} \\
\leq & C_0\Big(\int_\Omega |v(x)|^{p(x)}\nu(x)dx\Big)^{\frac{1}{\gamma_1}}\Big(\int_\Omega \nu(x)^{-s(x)}dx\Big)^{\frac{1}{\gamma_2}} \\
\leq & C_0\Big(\int_\Omega |v(x)|^{p(x)}\nu(x)dx\Big)^{\frac{1}{\gamma_1}}\Big(\int_\Omega \nu(x)^{-s(x)}dx\Big)^{\frac{1}{\gamma_2}} \\
\leq & C_0\,C_1\Big(\int_\Omega |v(x)|^{p(x)}\nu(x)dx\Big)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \text{ d'après } (w_2).
\end{aligned}$$

Si nous prenons $v = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, nous obtenons alors

$$\int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_s(x)}dx \leq C_0C_1\Big(\int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p(x)}\nu(x)dx\Big)^{\frac{1}{\gamma_1}}$$

où

$$\gamma_1 = \begin{cases} \left(\frac{p}{p_s}\right)_- & \text{si } \Big\||v(x)|^{p_s(x)}\nu^{\frac{p_s(x)}{p(x)}}\Big\|_{\frac{p(x)}{p_s(x)}} \geq 1, \\ \left(\frac{p}{p_s}\right)^+ & \text{si } \Big\||v(x)|^{p_s(x)}\nu^{\frac{p_s(x)}{p(x)}}\Big\|_{\frac{p(x)}{p_s(x)}} < 1. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big\|^{\gamma_2}_{p_s(x)} \leq & \ C_0\,C_1\Big(\int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p(x)}\nu(x)dx\Big)^{\frac{1}{\gamma_1}} \\
\leq & \ C_0\,C_1\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big\|^{\frac{\gamma_3}{\gamma_1}}_{p(x),\nu}
\end{aligned}$$

où

$$\gamma_2 = \begin{cases} (p_s)_- & \text{si} \quad \left\|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right\|_{p_s(x)} \geq 1, \\ (p_s)^+ & \text{si} \quad \left\|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right\|_{p_s(x)} < 1, \end{cases} \quad \text{et } \gamma_3 = \begin{cases} p^+ & \text{si} \quad \left\|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right\|_{p(x),\nu} \geq 1, \\ p_- & \text{si} \quad \left\|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right\|_{p(x),\nu} < 1. \end{cases}$$

Ainsi

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{p_s(x)} \leq C_0\, C_1 \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{p(x),\nu}^{\frac{\gamma_3}{\gamma_1\gamma_2}}, \quad i = 1, 2, ..., N. \tag{1.12}$$

Comme

$$p_s(x) < p(x) \;\text{ p.p. dans }\; \Omega$$

alors, il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_{L^{p_s(x)}(\Omega)} \leq C \; \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$.
Nous concluons donc que $W^{1,p(x)}(\Omega,\nu) \hookrightarrow W^{1,p_s(x)}(\Omega)$. □

Corollaire 1.1. *Soient $p, s \in C_+(\overline{\Omega})$ et ν une fonction poids satisfaisant* **(w_1)** *et* **(w_2)***. Alors $W^{1,p(x)}(\Omega,\nu) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$, pour tout $1 \leq r(x) < p_s^*(x)$.*

Lemmes importants

Maintenant, nous rappelons quelques outils de base et nous présentons quelques résultats préliminaires essentiels pour l'étude du problème en question dans le chapitre 2.

Lemme 1.2. *[8] Soient γ une fonction poids dans Ω, $r(.) \in C_+(\overline{\Omega})$, $g \in L^{r(x)}(\Omega,\gamma)$ et $(g_n)_n \subset L^{r(x)}(\Omega,\gamma)$ tel que $\|g_n\|_{r(x),\gamma} \leq C$.*
Si $g_n \to g$ p.p. dans Ω, alors $g_n \rightharpoonup g$ faiblement $L^{r(x)}(\Omega,\gamma)$.

Pour tout $k > 0$ et $s \in \mathbb{R}$, la fonction de troncature $T_k(.)$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$T_k(s) = \begin{cases} s & \text{si} \quad |s| \leq k, \\ k\dfrac{s}{|s|} & \text{si} \quad |s| > k. \end{cases} \tag{1.13}$$

Il est clair que :

1. $T_k(-s) = -T_k(s)$,
2. $\left|T_k(s)\right| = \min\{|s|, k\}$,
3. $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(s) = s$
4. $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{1}{k} T_k(s) = sign(s)$.

Lemme 1.3. *Soit $(u_n)_n$ une suite de $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement en $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$. Alors $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$.*

Démonstration. Nous avons $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ et $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$, alors $u_n \longrightarrow u$ fortement dans $L^{p(x)}(\Omega)$ et p.p. dans Ω, donc $T_k(u_n) \to T_k(u_n)$ p.p. dans Ω.
D'autre part

$$\begin{aligned}\|T_k(u_n)\|_{p(x),\nu}^{\theta_1} &\leq \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\nu(x)dx,\\ &\leq \int_\Omega |T_k'(u_n)|^{p(x)}\,|\nabla u_n|^{p(x)}\nu(x)dx,\\ &\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}\,\nu(x)dx,\\ &\leq |u_n|_{p(x),\nu}^{\theta_2}\,,\end{aligned}$$

où

$$\theta_1=\begin{cases}p^+ & \text{si} \quad \|T_k(u_n)\|_{p(x),\nu}\leq 1,\\ p_- & \text{si} \quad \|T_k(u_n)\|_{p(x),\nu}>1,\end{cases} \quad \text{et} \quad \theta_2=\begin{cases}p^+ & \text{si} \quad \|u_n\|_{p(x),\nu}\geq 1,\\ p_- & \text{si} \quad \|u_n\|_{p(x),\nu}<1.\end{cases}$$

Ainsi, $(T_k(u_n))_n$ est borné dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$, par conséquent $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$. □

Définition 1.1. [68] *Soit X un espace Banach. Un opérateur A de X à son dual X^* est appelé de type (M), si pour toute suite $(u_n)_n \subset X$ satisfaisant :*

$$\begin{cases}(i) & u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } X\\ (ii) & Au_n \rightharpoonup \chi \text{ faiblement dans } X^*\\ (iii) & \limsup_{n\to\infty}\langle Au_n,u_n\rangle \leq \langle \chi,u\rangle,\end{cases}$$

alors $\chi = A\,u$.

Théorème 1.3. *Soit X un espace de Banach réflexif séparable. Soit A un opérateur de $X \to X'$ ayant les propriétés:*

1. *A est borné hémicontinu,*
2. *A est monotone,*
3. $\frac{(A(v),v)}{\|v\|} \to +\infty \quad si \quad \|v\| \to \infty.$

Alors A est surjectif de $X \to X'$, i. e. pour $f \in X'$, il existe $u \in X$ tel que

$$A(u) = f.$$

Remarque 1.3. *Ce Théorème reste valable si on remplace un opérateur monotone par un opérateur de type* (M).

1.1.4 Espace de Sobolev anisotrope avec poids

Soient $p_1, \dots, p_N$ des réels, nous définissons les vecteurs suivants: $\overrightarrow{p} = \{p_1, \dots, p_N\}$ est un vecteur d'exposant et $\overrightarrow{\omega} = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ est un vecteur de fonctions poids, c'est-à-dire, chaque composante ω_i est une fonction mesurable positive sur Ω qui satisfait, de plus, pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$(\mathbf{A_1}) \qquad \omega_i \in L^1_{loc}(\Omega) \qquad\qquad (\mathbf{A_2}) \qquad \omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}} \in L^1_{loc}(\Omega).$$

Dans la suite, nous indiquons

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, N,$$

$$p^- = \min\{p_1, \dots, p_N\}, \quad p^+ = \max\{p_1, \dots, p_N\}. \tag{1.14}$$

Maintenant, considérons l'espace de Sobolev anisotrope avec poids $W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{w})$ qui est défini comme suit

$$W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\Omega) \quad \text{et} \quad D^i u \in L^{p_i}(\Omega, \omega_i), \quad i = 1, ..., N \right\}.$$

L'espace $W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{w})$ est un espace de Banach muni de la norme suivante (voir [60])

$$\|u\|_{1,\overrightarrow{p},\overrightarrow{\omega}} = \| u \|_{L^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{p_i,\omega_i}. \tag{1.15}$$

Nous définissons l'espace fonctionnel $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$ comme étant la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$ par rapport à la norme (1.15). Par une méthode adaptée à celle d'Adams [9], en construisant une isométrie de $W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$ dans $\prod_{i=1}^{N} L^{p_i}(\Omega, \omega_i)$, nous pouvons montrer que $(W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}), \| \,.\, \|_{1,\overrightarrow{p},\overrightarrow{\omega}})$ est séparable (réflexif) si $1 \leq p_i < \infty$ $(1 < p_i < \infty,)$ respectivement, pour tout $i = 1, \dots, N$. Pour $p_i > 1$, on désigne par $W^{-1,\overrightarrow{p'}}(\Omega, \overrightarrow{\omega^*})$ le dual topologique de $W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$, où $\overrightarrow{p'}$ est le conjugué de $\overrightarrow{p}$, c'est-à-dire $p'_i = \dfrac{p_i}{p_i - 1}$ and $\overrightarrow{\omega^*} = \{\omega_i^* = \omega_i^{1-p'_i}, \ i = 1, \dots, N\}$, nous nous référons à [8, 9, 60] pour plus de détails.

Lemme 1.4. *[60] Supposons que* (A_1) *et* (A_2) *sont vérifiées et que* $\inf_{i=1,\dots,N} w_i(.) > 0$ *p.p. dans* Ω. *Alors*

1. *Si* $p^- < N$*, alors* $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour tout* $q \in [p^-, p^*[$*, où* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p^-} - \dfrac{1}{N}$.
2. *Si* $p^- = N$*, alors* $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad$ *pour tout* $q \in [p^-, +\infty[$*,*
3. *Si* $p^- > N$*, alors* $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$*.*

De plus, les injections sont compacts. La preuve de ce lemme découle des injections suivantes

$$W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}) \hookrightarrow W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p_-}(\Omega).$$

Remarque 1.4. *Une note concernant les espaces anisotropes* $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ *et leurs théorèmes d'injections, peut être trouvée dans [31].*

Nous considérons l'espace

$$\mathcal{T}_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}) := \left\{ u \text{ mesurable dans } \Omega,\ T_k(u) \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}),\ \text{ pour tout } k > 0 \right\},$$

où $T_k(s)$ est fonction troncature définie dans (1.13).
Maintenant, nous introduisons quelques lemmes techniques utiles pour prouver les résultats de l'existence dans le chapitre 4.

Lemme 1.5. *[8] Soit* $g \in L^r(\Omega, \gamma)$ *et* $g_n \subset L^r(\Omega, \gamma)$ *tel que* $\|g_n\|_{r,\gamma} \leq C,\ 1 < r < \infty$*, Si* $g_n(x) \to g(x)$ *p.p. dans* Ω *alors* $g_n \rightharpoonup g$ *faiblement dans* $L^r(\Omega, \gamma)$*.*

Lemme 1.6. *[16] Soit* $(u_n)_n$ *une suite de* $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$ *telle que* $u_n \rightharpoonup u$ *faiblement dans* $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$*. Alors* $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ *faiblement dans* $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$*.*

Lemme 1.7. *[16] Si* $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$*, alors* $\displaystyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega \partial_i u dx = 0$*.*

Démonstration. Comme $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$, alors il existe $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que $u_k \to u$ fortement dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$.
De plus, Comme $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ par la formule de Green, nous avons

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \partial_i u_k dx = \int_{\partial\Omega} u_k . \overrightarrow{n} ds = 0. \tag{1.16}$$

Puisque $\partial_i u_k \to \partial_i u$ fortement dans $L^{p_i}(\Omega, \omega_i)$, alors on a $\partial_i u_k \to \partial_i u$ fortement dans $L^1(\Omega)$.
Nous passons à la limite dans (1.16), nous concluons que $\displaystyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega \partial_i u dx = 0$. $\square$

1.1.5 Espaces de Lebesgue et Sobolev anisotrope avec poids à exposant variable

Dans cette section, nous énonçons quelques propriétés élémentaires de l'espaces de Lebesgue et Sobolev anisotrope avec poids et à exposant variable qui seront utilisées dans les prochains chapitres.

Soit $\overrightarrow{p}(.) = \{p_0(\cdot), \ldots, p_N(.)\}$, où $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_N(x)$ sont des exposants variables de $C_+(\overline{\Omega})$. Également, nous supposons que

$$p_0(x) \geq \max\{p_i(x), i = 1, 2, \ldots, N\}. \tag{1.17}$$

Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes :

$$\underline{p} = \min\{p_0^-, p_1^-, \ldots, p_N^-\} \quad \text{alors} \quad \underline{p} > 1, \tag{1.18}$$

où $p^- := \text{ess} \inf\limits_{x \in \overline{\Omega}} p(x)$. De plus, nous notons

$$D^0 u = u \quad \text{et} \quad D^i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, N,$$

et

$$\overrightarrow{w}(\cdot) = \{w_1(\cdot), \ldots, w_N(\cdot)\}$$

désigne un vecteur des fonctions poids.

On note par $L^{p(x)}(\Omega, \gamma)$ l'espace de Lebesgue avec poids et à exposant variable, qui était introduit dans la section précédente (voir par exemple [8, 76, 138]).

Nous présentons maintenant l'espace Sobolev anisotrope avec poids et à exposant variable qui forme le cadre fonctionnel de l'étude du problème elliptique unilatéral.

L'espace Sobolev anisotrope avec poids à exposant variable $W^{1,\overrightarrow{p}(x)}(\Omega, \overrightarrow{w}(x))$ est défini comme étant la collection de toutes les fonctions $u \in L^{p_0(x)}(\Omega)$ dont les dérivés $D^i u$ sont dans $L^{p_i(x)}(\Omega, w_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, N$. Munit de la norme

$$\|u\|_{1,\overrightarrow{p}(\,.\,),\overrightarrow{w}(.)} = \sum_{i=0}^{N} \|D^i u\|_{p_i(.),w_i(.)}. \tag{1.19}$$

l'espace $W^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$ est un espace de Banach (voir [60]).

Nous définissons l'espace fonctionnel $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$ comme étant la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans

$W^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$ par rapport à la norme (1.19). Son espace dual est noté par $W^{-1,\overrightarrow{p'}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w^*}(.))$, où $\overrightarrow{p'}(.)$ est le conjugué de $\overrightarrow{p}(.)$, c'est-à-dire, $p_i'(.) = \dfrac{p_i(.)}{p_i(.)-1}$ et

$$\overrightarrow{w^*}(.) = \left\{ w_i^*(.) = w_i^{1-p_i'(.)}(.), i = 1,\dots,N \right\}.$$

Par une méthode adaptée à celle d'Adams [9] en construisant un isométrique de $W^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(\,.\,))$ dans $\prod_{i=0}^{N} L^{p_i(.)}(\Omega, w_i(.))$, nous pouvons montrer que $\left(W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{w}(.)),\, \|\,.\,\|_{1,\overrightarrow{p}(\,.\,),\overrightarrow{w}(.))}\right)$ est séparable (réflexif) si pour tout $i = 1,\dots,N$ tel que $1 \le p_i(.) < \infty$ $(1 < p_i(.) < \infty)$. Introduisons maintenant la fonction p_s définie par

$$p_s(x) = \frac{\underline{p}(x)s(x)}{s(x)+1},$$

nous avons

$$p_s(x) < p(x) \ \text{ p.p. dans } \Omega,$$

où la fonction s est donnée dans **(w_2)** et

$$\begin{cases} p_s^*(x) & = \frac{Np_s(x)}{N-p_s(x)} \qquad \text{si } p(x)s(x) < N(s(x)+1), \\ p_s^*(x) & \text{arbitraire}, \qquad \text{sinon}. \end{cases}$$

Lemme 1.8. *Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, supposons que* **(w_1)** *et* **(w_2)** *sont satisfaits et soient $\inf\limits_{i=1,\dots,N} w_i(.) > 0$ p.p. dans Ω. Alors, on obtient les injections continu et compact suivant*

1. *Si $\underline{p} < N$, alors $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\ \overrightarrow{w}(.)) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(.)}(\Omega)$ pour tout $q \in \left[\underline{p}, p_s^*\right[$,*
2. *Si $\underline{p} = N$, alors $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.)) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(.)}(\Omega)$ pour tout $q \in [\underline{p}, +\infty[$,*
3. *Si $\underline{p} > N$, alors $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.)) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\infty}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

La preuve de ce lemme découle du fait que les injections

$$W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.)) \subset W_0^{1,\overrightarrow{p_s}(.)}(\Omega) \subset W_0^{1,\underline{p}}(\Omega)$$

sont continue et par le théorème d'injections compact de $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$ pour les espaces Sobolev.

En outre, nous considérons

$$\mathcal{T}_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.)) := \{u : \Omega \mapsto \mathbb{R},\ \text{measurable tels que } T_k(u) \in W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.)) \text{ pour tout } k > 0\},$$

où $T_k(s)$ est fonction troncature définie dans (1.13).

Nous introduisons un lemme technique utile dans la suite.

Lemme 1.9. *Soient* $(u_n)_n$ *une suite de* $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$ *tel que* $u_n \rightharpoonup u$ *faiblement dans* $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$*, alors* $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ *faiblement dans* $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$*.*

Démonstration.

On sait que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$ et $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.)(.)) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$, nous aurons $u_n \to u$ fortement dans $L^{q(x)}(\Omega)$ et p.p. dans Ω, donc $T_k(u_n) \to T_k(u_n)$ p.p. dans Ω.

D'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\|T_k(u_n)\|_{p_i(x),w_i(x)}^{\gamma_1} &\leq \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i T_k(u_n)|^{p_i(x)} w_i(x)dx,\\ &\leq \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i(x)} w_i(x)dx,\\ &\leq \sum_{i=1}^{N}|u_n|_{p_i(x),w_i(x)}^{\gamma_2},\end{aligned}$$

$$\text{où}\qquad \gamma_1=\begin{cases} p_i^+ & \text{if}\quad \|T_k(u_n)\|_{p_i(x),w_i(x)}\leq 1,\\ p_{i-} & \text{if}\quad \|T_k(u_n)\|_{p_i(x),w_i(x)}> 1,\end{cases}\qquad \text{et } \gamma_2=\begin{cases} p_i^+ & \text{if}\quad \|u_n\|_{p_i(x),w_i(x)}\geq 1,\\ p_{i-} & \text{if}\quad \|u_n\|_{p_i(x),w_i(x)}< 1.\end{cases}$$

Enfin, nous obtenons

$$\|T_k(u_n)\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)} \leq C\,\|u_n\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)},$$

où C est une constante positive. Ainsi $(T_k(u_n))_n$ est bornée dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$, par conséquent $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$. □

La deuxième partie de cette thèse utilise une technique dite de degré topologique, nous avons donc besoin de définir quelques classes d'opérateurs et quelques propriétés de la théorie du degré topologique.

1.2 Degrés topologiques

Cette section introductive à l'avantage de rappeler brièvement les définitions et les théorèmes de base sur la notion du degré topologique en dimension finie et infinie.

Les degrés topologiques les plus connus sont ceux de Brouwer pour les espaces de dimension finie, Leray-Schauder pour la dimension infinie voir le livre de CHO et CHEN [58]. Ces deux dernières notions ont été étendues pour une classe d'opérateurs $\mathcal{F}_B(X)$ par BERKOVITS, pour plus de détails voir [34].

Le problème initial est le suivant: Soient $y \in \mathbb{R}^N$ un ouvert, $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application continue et $y \in \mathbb{R}^N$. L'équation

$$f(x) = y, \tag{1.20}$$

admet-elle une solution ?

Lorsque f est linéaire, une condition suffisante évidente pour que l'équation ait une solution est que le déterminant est non nul (i.e $det(f) \neq 0$). Sinon on peut rien dire puisqu'il peut exister des solutions pour certaine y, mais ces solutions ne sont pas stables (si on perturbe y ou f, la solution peut ne plus exister).

Mais dans le cas où f est non linéaire c'est pas de la même simplicité, on estime développer un outil jouant, pour les applications non linéaires, ce rôle de déterminant pour les applications linéaires.

On appelle cet outil le degré, qui assure par sa non nullité que (1.20) a au moins une solution stable. Le degré dépendra de f, y et de l'ensemble sur lequel on cherche les solutions à (1.20).

1.2.1 Degré topologique de Brouwer

Cette section est consacrée à la définition et à l'étude des propriétés du degré topologique en dimension finie (degré de Brouwer).

Dimension 1

En dimension $N = 1$, les choses sont toujours plus simples. Considérons la situation suivante: soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue qui ne s'annule ni en 0 ni en 1, et notons

$$deg(f) = \frac{1}{2}(\text{signe}(f(1)) - \text{signe}(f(0))).$$

Si $deg(f) \neq 0$, alors $f(1)$ et $f(0)$ ont des signes différents donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [0,1]$ tel que

$$f(x) = 0. \tag{1.21}$$

L'entier $deg(f)$ (en fait toujours égal à $-1, 0$ ou 1) permet donc de s'assurer que (1.21) a au moins une solution dans $[0,1]$ (il suffit qu'il soit non-nul), il est de plus très simple à calculer: il ne demande qu'a estimer le signe de f au bord du domaine de définition. Si l'on perturbe légèrement f, alors comme f est non-nulle en 0 et 1, son signe en ces deux points ne change pas, donc $deg(f)$ reste constant, s'il était non-nul avant perturbation, il reste non-nul après perturbation et une solution à (1.21) continue donc à exister.

Si l'on souhaite un degré adapté à (1.20) (i.e. avec un second membre pas forcément nul) et qui prenne en compte l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ sur lequel on cherche les solutions, alors en décomposant Ω en ses composantes connexes $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I}]a_i, b_i[$ on peut définir

$$deg(f, \Omega, y) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I} \left(\text{signe} \left(f\left(b_i\right) - y \right) - \text{signe} \left(f\left(a_i\right) - y \right) \right) \tag{1.22}$$

lorsque $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas sur $\partial\Omega$ (comme Ω est borné, cette non-annulation implique que $f - y$ ne peut changer de signe que sur un nombre fini de composantes connexes de Ω, et que la somme sur I est en fait finie).

La formule (1.22) correspond bien, en dimension $N = 1$, au degré que nous allons étudier ci-dessous. En dimension supérieure, il n'y a malheureusement pas de formule aussi simple.

Dimension N

Soit $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est différentiable en x_0, on note par $J_f(x_0) = \det f'(x_0)$ le jacobien de f en x_0.

Définition 1.2. *Soit $f \in C^1(\overline{\Omega})$. On désigne par*

$$S := \{x \in \Omega;\ J_f(x) = 0\},$$

l'ensemble des points singuliers de f et on suppose que $y \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$. On définit alors le degré topologique de Brouwer par:

$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \textit{signe}\, J_f(x),$$

où $deg(f, \Omega, y) = 0$ si $f^{-1}(y) = \emptyset$.

Nous avons alors le résultat cité dans la référence [58], qui rappelle quelques propriétés du degré topologique de Brouwer.

Théorème 1.4. *Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ une application continue. Si $y \notin f(\partial\Omega)$, alors il existe un entier $deg(f, \Omega, y)$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *Normalité : $deg(I, \Omega, y) = 1$ si et seulement si $y \in \Omega$, où I est l'application identité;*
2. *Solvabilité : Si $deg(f, \Omega, y) \neq 0$, alors $f(x) = y$ admet au moins une solution dans Ω;*
3. *Invariance par homotopie : $\forall t \in [0,1]$ $f_t : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ est continue et $y \notin \cup_{t\in[0,1]} f_t(\partial\Omega)$, alors $deg(f_t, \Omega, y)$ ne dépend pas de $t \in [0,1]$;*
4. *Additivité : Supposons que Ω_1 et Ω_2 sont deux sous-ensembles disjoints et ouverts de Ω et $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash \Omega_1 \cup \Omega_2)$. Alors*

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega_1, y) + deg(f, \Omega_2, y);$$

5. *$deg(f, \Omega, y)$ est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{R}^d \backslash f(\partial\Omega)$.*

En 1934, Leray et Schauder (cf. [103]) ont généralisé le degré topologique de Brouwer à des espaces de Banach de dimension infinie. Ainsi, ils ont défini ce qu'on appelle le degré topologique de Leray-Schauder. Ce résultat est devenu un outil très efficace pour montrer des résultats d'existence pour différentes équations aux dérivées partielles non linéaires.

1.2.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Pour introduire cette notion du degré de Leray-Schauder, nous avons besoin de quelques résultats et définitions [58].

Lemme 1.10. *Soient E un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert borné et $F : \overline{\Omega} \mapsto E$ une application continue compacte. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un espace de dimension finie M_ε et une application continue $F_\varepsilon : \overline{\Omega} \mapsto M_\varepsilon$ telle que*

$$\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| < \varepsilon \qquad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

Définition 1.3. *Soient E un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert borné et $F : \overline{\Omega} \mapsto E$ une application continue compacte. Supposons maintenant que $0 \notin (I - F)(\partial\Omega)$. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, le degré de Brouwer $deg(I - F_\varepsilon, \Omega \cap M_\varepsilon, 0)$ est bien défini, où F_ε et M_ε sont définis comme dans le Lemme (1.10). Par conséquent, nous définissons le degré de Leray-Schauder par*

$$deg(I - F, \Omega, 0) = deg(I - F_\varepsilon, \Omega \cap M_\varepsilon, 0), \qquad \text{pour tout } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Théorème 1.5. *Le degré de Leray-Schauder possède les propriétés suivantes :*

1. *Normalité : $deg(I, \Omega, 0) = 1$ si et seulement si $0 \in \Omega$;*
2. *Solvabilité : Si $deg(I - F, \Omega, 0) \neq 0$ alors $F(x) = x$ admet au moins une solution dans Ω;*
3. *Invariance par homotopie : Soit $F_t : [0,1] \times \overline{\Omega} \mapsto E$ continu compact et $F_t(x) \neq x$ pour tout $(t, x) \in [0,1] \times \partial\Omega$. Alors $deg(I - F_t, \Omega, 0)$ ne dépend pas de $t \in [0,1]$;*
4. *Additivité: Soit Ω_1 et Ω_2 deux sous-ensembles disjoints ouverts de Ω et*

$$0 \notin (I - F)(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)).$$

   Alors

$$deg(I - F, \Omega, 0) = deg(I - F, \Omega_1, 0) + deg(I - F, \Omega_2, 0).$$

1.2.3 Classes d'opérateurs et degré topologique de Berkovits

Soit X un espace de Banach réflexif séparable et X^* son dual, on désigne par $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit de dualité entre X^* et X, soit Ω un ouvert non vide de X et notons que $\overline{\Omega}$ et $\partial\Omega$ sont respectivement la fermeture et la frontière de Ω. Le symbole $\rightarrow$ ($\rightharpoonup$) représente la convergence forte (faible).

Définition 1.4. *Soit Y un autre espace Banach. Un opérateur $F : \Omega \subset X \to Y$ est dit*

1. *borné, si l'image d'un borné est borné.*
2. *demicontinu, si pour tout $(u_n) \subset \Omega,\ u_n \to u$, alors $F(u_n) \rightharpoonup F(u)$.*
3. *compact, s'il est continu et si l'image de tout ensemble borné est relativement compacte.*

Définition 1.5. *Un opérateur $F : \Omega \subset X \to X^*$ est dit*

1. *de type (S_+), si pour toute suite $(u_n) \subset \Omega$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ et $\limsup_{n\to\infty} \langle Fu_n, u_n - u\rangle \leq 0$, nous avons $u_n \to u$.*
2. *quasimonotone, si pour toute suite $(u_n) \subset \Omega$ tel que $u_n \rightharpoonup u$, nous avons $\limsup_{n\to\infty} \langle Fu_n, u_n - u\rangle \geq 0$.*

Définition 1.6. *Soit $T : \Omega_1 \subset X \to X^*$ un opérateur borné tel que $\Omega \subset \Omega_1$. Pour tout opérateur $F : \Omega \subset X \to X$, on dit que*

1. *F est de type $(S_+)_T$, si pour toute suite $(u_n) \subset \Omega$ tel que $u_n \rightharpoonup u$, $y_n := Tu_n \rightharpoonup y$ et $\limsup_{n\to\infty} \langle Fu_n, y_n - y\rangle \leq 0$, nous avons $u_n \to u$.*

2. *F satisfait la propriété $(QM)_T$, si pour toute suite $(u_n) \subset \Omega$ tel que $u_n \rightharpoonup u$, $y_n := Tu_n \rightharpoonup y$, nous avons* $\limsup_{n\to\infty} \langle Fu_n, y - y_n \rangle \geq 0$.

Soit $\mathcal{O}$ la collection de tous les ouverts bornés dans X. Pour tout $\Omega \subset X$, nous considérons les classes d'opérateurs suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1(\Omega) := \{F : \Omega \to X^* \mid F \text{ est borné, demicontinu et de type } (S_+)\},\\
&\mathcal{F}_{T,B}(\Omega) := \{F : \Omega \to X \mid F \text{ est borné, demicontinu et de type } (S_+)_T\},\\
&\mathcal{F}_T(\Omega) := \{F : \Omega \to X \mid F \text{ est demicontinu et de type } (S_+)_T\},\\
&\mathcal{F}_B(X) := \{F \in \mathcal{F}_{T,B}(\overline{\mathrm{G}}) | \mathrm{G} \in \mathcal{O}, \mathrm{T} \in \mathcal{F}_1(\overline{\mathrm{G}})\}.
\end{aligned}$$

Dans toute la suite, $T \in \mathcal{F}_1(\overline{\mathrm{G}})$ est appelé une application intérieure essentielle associé à F.

Lemme 1.11. *[34] Soit $T \in \mathcal{F}_1(\overline{\mathrm{G}})$ est continu et $S : D_S \subset X^* \to X$ est demicontinu tel que $T(\overline{\mathrm{G}}) \subset D_s$, où G est un ouvert borné de l'espace de Banach réflexif X. Alors les assertions suivantes sont vraies :*

1. *Si S est quasimonotone, alors $I + SoT \in \mathcal{F}_T(\overline{\mathrm{G}})$, où I est l'opérateur identité.*
2. *Si S est de type (S_+), alors $SoT \in \mathcal{F}_T(\overline{\mathrm{G}})$.*

Définition 1.7. *Soient G un ouvert borné de l'espace de Banach réflexif X, $T \in \mathcal{F}_1(\overline{\mathrm{G}})$ est continu et $F, S \in \mathcal{F}_T(\overline{\mathrm{G}})$.*
L'homotopie affine $H : [0,1] \times \overline{\mathrm{G}} \to X$ définie par

$$H(t,u) := (1-t)Fu + tSu \qquad \textit{pour tout} \qquad (t,u) \in [0,1] \times \overline{\mathrm{G}}$$

est appelée homotopie affine admissible liée à l'application intérieure essentielle continue T.

Remarque 1.5. *[34] L'homotopie affine ci-dessus est de type $(S_+)_T$.*

Nous introduisons le degré topologique de Berkovits pour la classe $\mathcal{F}_B(X)$, pour plus de détails voir [34].

Théorème 1.6. *Il existe une unique fonction de degré*

$$d : \{(F, G, h) | G \in \mathcal{O}, T \in \mathcal{F}_1(\overline{\mathrm{G}}), F \in \mathcal{F}_{T,B}(\overline{\mathrm{G}}), h \notin F(\partial G)\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

vérifiant les propriétés suivantes:

1. *<u>Normalisation</u> : Pour tout $h \in G$, nous avons $d(I, G, h) = 1$.*

2. <u>*Additivité*</u> *: Soit* $F \in \mathcal{F}_{T,B}(\overline{G})$*. Si* G_1 *et* G_2 *sont deux ouverts disjoints de* G *tels que* $h \notin F(\overline{G}\backslash(G_1 \cup G_2))$*, alors nous avons*

$$d(F, G, h) = d(F, G_1, h) + d(F, G_2, h).$$

3. <u>*Invariance par l'homotopie*</u> *: Si* $H : [0,1] \times \overline{G} \to X$ *est une homotopie affine admissible bornée lié à une application intérieure essentielle continue et* $h : [0,1] \to X$ *est un chemin continu dans* X *tel que* $h(t) \notin H(t, \partial G)$ *pour tout* $t \in [0,1]$*, alors la valeur de* $d(H(t,\cdot), G, h(t))$ *est constante pour tout* $t \in [0,1]$*.*

4. <u>*Existence*</u> *: Si* $d(F, G, h) \neq 0$*, alors l'équation* $Fu = h$ *admet une solution dans* G*.*

Première partie

Étude de quelques problèmes elliptiques par la méthode de monotonie

Chapitre 2

Solution entropique d'un problème anisotrope non linéaire avec second membre mesure

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude de l'existence de solutions entropiques d'un problème unilatéral elliptique anisotrope, on considère ici un problème non linéaire avec second membre une donnée mesure qui se décompose dans $L^1(\Omega) + W^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega, \overrightarrow{\omega}^*)$. Le cadre fonctionnel adéquat pour l'étude d'une telle équation sera les espaces anisotropes avec poids.

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème unilatéral elliptique anisotrope non linéaire, associé à une condition de Dirichlet:

$$\begin{cases} Au - div\phi(u) = \mu \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$, la donnée μ est une mesure qui se décompose dans $L^1(\Omega) + W^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega, \overrightarrow{\omega}^*)$, $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_N) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^N$, l'opérateur $Au = -\sum_{i=1}^{N} \partial_i a_i(x, u, \nabla u)$ est un opérateur anisotrope de Leray-Lions défini de $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$ vers son dual $W_0^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega, \overrightarrow{\omega}^*)$ où $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions de Carathéodory, de plus nous allons supposer qu'elle satisfont des hypothèses du type Leray-Lions (2.4)-(2.6) énoncées dans la section qui va suivre.

Dans cette étude, la difficulté principale vient du fait que le problème (2.1) est mal posé dans le cadre des solutions faibles (c'est-à-dire des solutions au sens de distributions) car, en général, la fonction ϕ n'appartient pas à $L^1_{loc}(\Omega)$. Ce qui conduit à montrer l'existence de solutions d'entropique. Dans le cas d'une donnée $\mu \in L^1(\Omega)$ l'existence de solutions d'entropique est traitée par Salmani et al [125]. Par ailleurs, ce problème a été étudié dans le cas où $\phi \equiv 0$ par Boccardo et al dans [41], où A est un opérateur monotone défini sur $W^{1,p}(\Omega)$, ils ont prouvé l'existence et l'unicité d'une solution entropique pour une mesure de Radon sur Ω qui ne charge pas les ensembles de p-capacite nulle.
L'objectif de ce chapitre est d'étudier le problème elliptique anisotropique unilatéral non linéaire associé au problème non linéaire (2.1). Plus précisément, nous établissons uniquement l'existence de solutions entropique pour le problème anisotrope unilatéral suivant,

$$\begin{cases} u \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega, \\ T_k(u) \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}) \qquad \forall k > 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x,u,\nabla u)\partial_i T_k(u-v)dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi_i(u)\partial_i T_k(u-v)dx \\ \qquad\qquad \leq \displaystyle\int_\Omega f T_k(u-v)dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega F_i \partial_i T_k(u-v)dx, \\ \forall v \in K_\psi \cap L^\infty(\Omega), \end{cases} \tag{2.2}$$

dans la classe convexe $K_\psi := \{u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}(x)}(\Omega, \overrightarrow{\omega}(x)), u \geq \psi \quad \text{p.p. dans } \Omega\}$, où ψ est une fonction mesurable sur Ω telle que

$$\psi^+ \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}) \cap L^\infty(\Omega), \tag{2.3}$$

et

$$\mu = f - div(F), \; \mu \in L^1(\Omega) \; \text{ et } \; F \in W_0^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega, \overrightarrow{\omega}^*).$$

2.2 Hypothèses de base

Nous énonçons les hypothèses prises pour assurer l'existence de solutions du problème (2.2).
Les fonctions $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions de Carathéodory $\big($ mesurables par rapport

à x dans Ω pour chaque (s, ξ) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et continue par rapport à (s, ξ) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ presque pour chaque x dans Ω) qui remplissent les conditions ci-dessous:
Pour tout $i = 1, \ldots, N$, $s \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^N, \xi' \in \mathbb{R}^N$ et p.p. dans $x \in \Omega$,

$$a_i(x, s, \xi)\, \xi_i \geq \alpha\, \omega_i\, |\xi_i|^{p_i} \tag{2.4}$$

$$|a_i(x, s, \xi)| \leq \beta \omega_i^{\frac{1}{p_i}} \left(R_i(x) + \omega_i^{\frac{1}{p_i'}} |s|^{\frac{p_i}{p_i'}} + \omega_i^{\frac{1}{p_i'}} |\xi_i|^{p_i - 1}\right) \tag{2.5}$$

$$(a_i(x, s, \xi) - a_i(x, s, \xi'))(\xi_i - \xi_i') > 0 \quad \text{pour} \quad \xi_i \neq \xi_i', \tag{2.6}$$

où $R_i(\,.\,)$ est une fonction positive de $L^{p_i'(\,.\,)}(\Omega)$ et $\alpha, \beta > 0$. De plus, nous supposons que

$$\phi_i \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.7}$$

et

$$\mu \in L^1(\Omega) + W_0^{-1, \overrightarrow{p}'}(\Omega, \overrightarrow{\omega}^*). \tag{2.8}$$

De plus, on suppose que chaque composante de vecteur poids $\overrightarrow{\omega} = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ satisfait pour tout $i = 1, \ldots, N$,

$$\omega_i \in L^1_{loc}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad \omega_i^{\frac{-1}{p_i - 1}} \in L^1_{loc}(\Omega). \tag{2.9}$$

2.3 Définition de solutions entropiques et résultats d'existence

Dans cette section, nous formulons et prouvons un résultat d'existence de solutions entropiques du problème (2.2), nous commençons par définir les solutions entropiques pour du problème unilatéral.

Définition 2.1. *Une fonction mesurable u est dite solution entropique du problème unilatéral (2.1), si $u \in \mathcal{T}_0^{1, \overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$ tel que $u \geq \psi$ p.p. dans Ω et*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left[a_i(x, u, \nabla u)\partial_i T_k(u - \varphi) + \phi_i(u)\partial_i T_k(u - \varphi)\right] dx \leq \int_\Omega f T_k(u - \varphi) dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega F_i \partial_i T_k(u - \varphi) dx, \tag{2.10}$$

pour tout $\varphi \in K_\psi \cap L^\infty(\Omega)$.

Théorème 2.1. *Supposons que les hypothèses (2.4) − (2.9) sont vérifiées. Alors, il existe au moins une solution entropique du problème (2.1).*

Lemme 2.1. *[16] Supposons que (2.4)-(2.6) sont vérifiés. Soit $(u_n)_n$ une suite dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})$ et $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})$, si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})$, et*

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}(a_i(x,u_n,\nabla u_n)-a_i(x,u,\nabla u))\partial_i(u_n-u)dx \to 0,$$

alors $u_n \longrightarrow u$ fortement dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})$.

Démonstration. La preuve du Théorème 2.1 sera divisée en plusieurs étapes.

Étape l: Problèmes approximatifs.

Nous considérons le problème approximatif suivants

$$\begin{cases} u_n \in K_\psi, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i(u_n-v)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\phi_i^n(u_n)\partial_i(u_n-v)dx \\ \qquad \displaystyle\leq \int_{\Omega} f_n(u_n-v)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}F_i\partial_i(u_n-v)\,dx \\ \qquad \forall v \in K_\psi \quad \text{ et pour tout } k>0, \end{cases} \tag{2.11}$$

où $f_n = T_n(f)$ et $\phi_i^n(s) = \phi_i(T_n(s))$.

Nous définissons les opérateurs Φ_n de K_ψ dans $W_0^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega,\overrightarrow{\omega}^*)$ par :

$$\langle \Phi_n u, v\rangle = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\phi_i(T_n(u))\partial_i v dx \quad \text{pour tout } u \in K_\psi \text{ et } v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega}).$$

Lemme 2.2. *L'opérateur $B_n = A + \Phi_n$ est pseudo-monotone et coercif dans le sens suivant, il existe $v_0 \in K_\psi$ tel que*

$$\frac{\langle B_n v, v-v_0\rangle}{\|v\|_{1,\overrightarrow{p},\overrightarrow{\omega}}} \longrightarrow +\infty \qquad si \quad \|v\|_{1,\overrightarrow{p},\overrightarrow{\omega}} \to +\infty \qquad pour \quad v \in K_\psi.$$

Démonstration. Tout d'abord, nous prouvons que l'opérateur B_n est pseudo-monotone. Soit $(u_k)_k$ une suite dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})$ telle que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}) \\ B_n u_k \rightharpoonup \chi & \text{faiblement dans } W_0^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega, \overrightarrow{\omega}^*) \\ \limsup\limits_{k \to +\infty} < B_n u_k, u_k > \leq < \chi, u > . \end{cases}$$

Montrons que $\chi = B_n u$ et que $< B_n u_k, u_k > \longrightarrow < \chi, u >$ quand $k \to +\infty$.
Puisque $(u_k)_k$ borné dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$ et $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p^-}(\Omega)$, alors $u_k \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^{p^-}(\Omega)$ et p.p. dans Ω pour une sous-suite notée encore $(u_k)_k$. D'après (2.5), nous avons $(a_i(x, u_k, \nabla u_k))_k$ borné dans $L^{p'_i}(\Omega, \omega_i^*)$.
Par suite, il existe une fonction $\varphi_i \in L^{p'_i}(\Omega, \omega_i^*)$ tel que

$$a_i(x, u_k, \nabla u_k) \to \varphi_i \text{ dans } L^{p'_i}(\Omega, \omega_i^*) \quad \text{quand} \quad k \to +\infty. \tag{2.12}$$

De plus, puisque $(\phi_i^n(u_k))_k$ borné dans $L^{p'_i}(\Omega, \omega_i^*)$ et $\phi_i^n(u_k) \to \phi_i^n(u)$ p.p. dans Ω, on a

$$\phi_i^n(u_k) \to \phi_i^n(u) \quad \text{fortement dans} \quad L^{p'_i}(\Omega, \omega_i) \quad \text{lorsque} \quad k \to +\infty. \tag{2.13}$$

En utilisant (2.12) et (2.13), on obtient pour tout $v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$

$$\begin{aligned} < \chi, v > &= \lim_{k \to +\infty} < B_n u_k, v > \\ &= \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x, u_k, \nabla u_k) \partial_i v dx + \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^N \int_\Omega \phi_i^n(u_k) \partial_i v dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \varphi_i \partial_i v dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \phi_i^n(u) \partial_i v dx. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \limsup_{k \to +\infty} < B_n u_k, u_k > &= \limsup_{k \to +\infty} \Big[\sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x, u_k, \nabla u_k) \partial_i u_k dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \phi_i^n(u_k) \partial_i u_k dx \Big] \\ &= \limsup_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x, u_k, \nabla u_k) \partial_i u_k dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \phi_i^n(u) \partial_i u dx \\ &\leq < \chi, u >= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \varphi_i \partial_i u \, dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \phi_i^n(u) \partial_i u \, dx \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\limsup_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x, u_k, \nabla u_k) \partial_i u_k dx \leq \sum_{i=1}^N \int_\Omega \varphi_i \partial_i u dx. \tag{2.14}$$

Grâce à (2.6), nous avons

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}(a_i(x,u_k,\nabla u_k)-a_i(x,u_k,\nabla u))(\partial_i u_k-\partial_i u)dx>0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}a_i(x,u_k,\nabla u_k)\partial_i u_k dx \geq -\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}a_i(x,u_k,\,\nabla u)\partial_i u\,dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}a_i(x,u_k,\nabla u_k)\partial_i u dx\\ +\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}a_i(x,u_k,\nabla u)\partial_i u_k\,dx.\end{aligned}$$

Par (2.12), nous obtenons

$$\liminf_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}a_i(x,u_k,\nabla u_k)\partial_i u_k\,dx\geq\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\varphi_i\partial_i u\,dx. \tag{2.15}$$

En utilisant (2.14) et (2.15), nous avons

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}a_i(x,u_k,\nabla u_k)\partial_i u_k dx=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\varphi_i\partial_i u dx. \tag{2.16}$$

Ce qui implique que,

$$\lim_{k\to+\infty}<B_n u_k,u_k>=\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}a_i(x,u_k,\nabla u_k)\partial_i u_k dx+\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\phi_i^n(u_k)\partial_i u_k dx,$$

ainsi

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}<B_n u_k,u_k> &=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\varphi_i\partial_i u dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\phi_i^n(u)\partial_i u dx\\ &=<\chi,u>.\end{aligned}$$

De plus, comme $a_i(x,u_k,\nabla u)$ converge vers $a_i(x,u,\nabla u)$ fortement dans $L^{p_i'}(\Omega,\omega_i)$ et d'aprés (2.16), on obtient

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}(a_i(x,u_k,\nabla u_k)-a_i(x,u_k,\nabla u))(\partial_i u_k-\partial_i u)dx=0.$$

En utilisant le Lemme 2.1, nous avons u_k converge vers u fortement dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})$ et p.p. dans Ω, alors $a_i(x,u_k,\nabla u)$ converge vers $a_i(x,u,\nabla u)$ faiblement dans $L^{p_i'}(\Omega,\omega_i)$ et $\phi_i^n(u)$ converge vers $\phi_i^n(u)$ fortement dans $L^{p_i'}(\Omega,\omega_i)$.

Par suite pour tout $v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$ on obtient

$$\begin{aligned}
< \chi, v > &= \lim_{k\to+\infty} < B_n u_k, v > \\
&= \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u_k, \nabla u_k)\partial_i v dx + \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi_i(u_k)\partial_i v\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u, \nabla u)\partial_i v dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi_i(u)\partial_i v dx \\
&=< B_n u, v >
\end{aligned}$$

ce qui implique que $B_n u = \chi$.

D'autre part, il reste à montrer que l'opérateur B_n est coercif.

Par l'inégalité Hölder, nous avons pour tous $u, v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$

$$\begin{aligned}
\left|\langle \Phi_n u, v\rangle\right| &\leq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi_i(T_n(u))\partial_i v \omega_i^{\frac{-1}{p_i}}(x)\, \omega_i^{\frac{1}{p_i}}(x) dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega |\phi_i(T_n(u))\omega_i^{\frac{-1}{p_i}}(x)|^{p_i'} dx\Big)^{\frac{1}{p_i'}} \Big(\int_\Omega |\partial_i v \omega_i^{\frac{1}{p_i}}(x)|^{p_i}\, dx\Big)^{\frac{1}{p_i}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega \sup_{|s|\leq n} |\phi_i(s)|^{p_i'} \omega_i^{\frac{-p_i'}{p_i}}(x) dx\Big)^{\frac{1}{p_i'}} \Big(\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} \omega_i(x) dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}, \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega (\sup_{|s|\leq n} |\phi_i(s)| + 1)^{p_i'} \omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}(x) dx\Big)^{\frac{1}{p_i'}} \Big(\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} \omega_i(x) dx\Big)^{\frac{1}{p_i}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \big(\sup_{|s|\leq n} |\phi_i(s)| + 1\big) \Big(\int_\Omega \omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}(x) dx\Big)^{\frac{1}{p_i'}} \Big(\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} \omega_i(x) dx\Big)^{\frac{1}{p_i}} \\
&\leq C(n) \|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})},
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{| < \Phi_n u, v > |}{||v||_{1,\overrightarrow{p},\overrightarrow{\omega}}} \leq C(n).$$

Soit $v_0 \in K_\psi$, grâce à l'inégalité de Hölder et (2.5) et les injections continus suivantes $W_0^{1,p_i}(\Omega, \omega_i) \hookrightarrow L^{p_i}(\Omega, \omega_i)$, nous avons

$$\begin{aligned}
| < Av, v_0 > | &\leq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, v, \nabla v)\partial_i v_0 \omega_i^{\frac{-1}{p_i}}(x) \omega_i^{\frac{1}{p_i}}(x) dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega |a_i(x, v, \nabla v)\omega_i^{\frac{-1}{p_i}}(x)|^{p_i'} dx\Big)^{\frac{1}{p_i'}} \Big(\int_\Omega |\partial_i v_0 \omega_i^{\frac{1}{p_i}}(x)|^{p_i} dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}
\end{aligned}$$

par suite,

$$
\begin{aligned}
|< Av, v_0 >| &\leq \beta \sum_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega R_i^{p'_i}(x) + |v|^{p_i}\omega_i(x) + |\partial_i v|^{p_i}\omega_i(x)dx \Big)^{\frac{1}{p'_i}} \Big(\int_\Omega |\partial_i v_0|^{p_i}\omega_i(x)dx \Big)^{\frac{1}{p_i}} \\
&\leq \beta \sum_{i=1}^{N} \Big(C_1 + C_2 \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i(x)dx + \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i(x)dx \Big)^{\frac{1}{p'_i}} \Big(\int_\Omega |\partial_i v_0|^{p_i}\omega_i(x)dx \Big)^{\frac{1}{p_i}} \\
&\leq \beta \sum_{i=1}^{N} C_1^{\frac{1}{p'_i}} \Big(1 + \frac{C_2+1}{C_1} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i dx \Big)^{\frac{1}{p'_i}} \Big(\int_\Omega |\partial_i v_0|^{p_i}\omega_i(x)dx \Big)^{\frac{1}{p_i}} \\
&\leq \beta C_4 \sum_{i=1}^{N} \Big(1 + \frac{C_2+1}{C_1} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i dx \Big)^{\frac{1}{p'_-}} \Big(\int_\Omega |\partial_i v_0|^{p_i}\omega_i(x)dx \Big)^{\frac{1}{p_i}} \\
&\leq \beta C_4 \sum_{i=1}^{N} \Big(1 + C_3 \Big(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i(x)dx \Big)^{\frac{1}{p'_-}} \Big) \Big(\int_\Omega |\partial_i v_0|^{p_i}\omega_i(x)dx \Big)^{\frac{1}{p_i}} \\
&\leq \beta C_4 \Big(1 + C_3 \Big(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i(x)dx \Big)^{\frac{1}{p'_-}} \Big) \sum_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega |\partial_i v_0|^{p_i}\omega_i(x)dx \Big)^{\frac{1}{p_i}} \\
&\leq \beta C_4 \Big(1 + C_3 \Big(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i(x)dx \Big)^{\frac{1}{p'_-}} \Big) \|v_0\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})}.
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que,

$$
\begin{aligned}
\frac{|< Av, v - v_0 >|}{\|v\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})}} \geq \alpha \frac{\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i(x)dx}{\|v\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})}} &- \frac{\beta C_4 \|v_0\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})}}{\|v\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})}} \\
&\times \frac{-\beta C_4 C_3}{\|v\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})}} \Big(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\, \omega_i(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{p'_-}} \|v_0\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})}.
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
\frac{|< Av, v - v_0 >|}{\|v\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})}} \geq \alpha \frac{\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i(x)dx}{\|v\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})}} &\Big[1 - \frac{\beta}{\alpha} C_4 C_3 \Big(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} dx \Big)^{\frac{1}{p'_-}-1} \\
&\times \|v_0\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})} \Big] - \frac{\beta C_4 \|v_0\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})}}{\|v\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})}}. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Grâce à l'inégalité de Jensen, nous obtenons

$$
\|v\|^{p_-^+}_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega,\vec{\omega})} = \Big(\sum_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i(x)dx \Big)^{\frac{1}{p_i}} \Big)^{p_-^+} \leq \Big(\sum_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i dx \Big)^{\frac{1}{p_-^+}} \Big)^{p_-^+},
$$

ainsi,

$$\|v\|^{p^+_-}_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})} \leq C\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i(x)dx,$$

où

$$p^+_- = \begin{cases} p^- & \text{si } \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega,\omega_i)} \geq 1, \\ p^+ & \text{si } \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega,\omega_i)} < 1. \end{cases}$$

Alors,

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i dx}{\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})}} \to +\infty \text{ et } \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\omega_i dx \to +\infty \text{ lorsque } \|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})} \to +\infty.$$

En utilisant (2.17), nous avons $\dfrac{|< Av, v-v_0| >}{\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})}} \to +\infty$ lorsque $\|v\|_{1,\overrightarrow{p},\overrightarrow{\omega}} \to +\infty$.

Comme $\dfrac{< \Phi_n v, v >}{\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})}}$ et $\dfrac{< \Phi_n v, v_0 >}{\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})}}$ sont bornés, alors on obtient

$$\frac{< B_n v, v, -v_0 >}{\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})}} = \frac{< Av, v-v_0 >}{\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})}} + \frac{< \Phi_n v, v, -v_0 >}{\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})}} \to +\infty,$$

quand $\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})} \longrightarrow +\infty$.
Finalement, nous concluons que l'opérateur $B_n = A + \Phi_n$ est coercif. □

Proposition 2.1. *Sous les hypothèses* (2.4) − (2.8), *le problème* (2.11) *admet au moins une solution.*

Démonstration. Grâce au Lemme 2.2 et au Théorème 8.2 chapitre 2 dans [105], il existe au moins une solution du problème (2.11). □

Étape 2 : Estimation a priori.

Proposition 2.2. *Supposons que les conditions* (2.4) − (2.8) *sont vérifiées, et soit u_n une solution du problème approximatif* (2.11). *Alors, il existe une constante positive C telle que*

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i T_k(u_n)|^{p_i}\omega_i(x)dx \leq C(k+1) \qquad \forall k > 0.$$

Démonstration. Soit $v = u_n - \eta T_k(u_n^+ - \psi^+)$ où $\eta \geq 0$. Puisque $v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})$ et pour tout η assez petit, on obtient $v \in K_\psi$. Nous choisissons v comme fonction test dans le problème (2.11), nous avons

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,\ u_n, \nabla u_n)\partial_i T_k(u_n^+ - \psi^+)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} \phi_i^n(u_n)\partial_i T_k(u_n^+ - \psi^+)dx$$
$$\leq \int_{\Omega} f_n T_k(u_n^+ - \psi^+)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} F_i\partial_i T_k(u_n^+ - \psi^+)dx. \quad (2.18)$$

Ce qui implique que

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x, u_n\,,\ \nabla u_n)\partial_i T_k(u_n^+ - \psi^+)dx \leq \int_{\Omega} f_n T_k(u_n^+ - \psi^+)dx$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} F_i\partial_i T_k(u_n^+ - \psi^+)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} |\phi_i^n(u_n)||\partial_i T_k(u_n^+ - \psi^+)|dx.$$

Puisque $\partial_i T_k(u_n^+ - \psi^+) = 0$ sur $\{u_n^+ - \psi^+ > k\}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} a_i(x, u_n, \nabla u_n)\partial_i(u_n^+ - \psi^+)dx \leq \int_{\Omega} f_n T_k(u_n^+ - \psi^+)dx$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} F_i\,\partial_i T_k(u_n^+ - \psi^+)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} |\phi_i^n(u_n)||\partial_i(u_n^+ - \psi^+)|dx.$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} a_i(x, u_n^+, \nabla u_n^+)\partial_i u_n^+ dx$$
$$\leq \int_{\Omega} |f_n T_k(u_n^+ - \psi^+)|dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} |F_i||\partial_i u_n^+|\,\omega_i^{\frac{-1}{p_i}}(x)\omega_i^{\frac{1}{p_i}}(x)dx$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} |F_i\partial_i\psi^+|dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} |\phi_i^n(u_n)||\partial_i u_n^+|\omega_i^{\frac{-1}{p_i}}(x)\omega_i^{\frac{1}{p_i}}(x)dx$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} |\phi_i^n(u_n)||\partial_i\psi^+|dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} |a_i(x, u_n^+, \nabla u_n^+)\partial_i\psi^+|dx.$$

Par l'inégalités de Young, on obtient pour une constante positive λ

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} a_i(x, u_n^+, \nabla u_n^+)\partial_i u_n^+ dx \leq \int_{\Omega} f_n T_k(u_n^+ - \psi^+)dx$$
$$+ C_1(\alpha)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} |\phi_i^n(T_{k+\|\psi\|_\infty}(u_n))|^{p_i'}\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}(x)dx + \frac{\alpha}{6}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} |\partial_i u_n^+|^{p_i}\omega_i dx$$
$$+ C_2(\alpha)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} |F_i|^{p_i'}\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}dx + \frac{\alpha}{6}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+ - \psi^+ \leq k\}} |\partial_i u_n^+|^{p_i}\omega_i(x)dx$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|F_i\partial_i\psi^+|dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|\phi_i^n(T_{k+\|\psi\|_\infty}(u_n))||\partial_i\psi^+|dx$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda^{p_i'}}{p_i}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|a_i(x,u_n,\nabla u_n)|^{p_i'}\omega_i^{1-p_i'}dx+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i\lambda^{p_i}}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|\partial_i\psi^+|^{p_i}\omega_i dx.$$

En utilisant (2.5) et en prenant $\lambda=\left(\frac{p_i'\alpha}{6\beta}\right)^{1/p_i'}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n^+dx\le\int_\Omega f_nT_k(u_n^+-\psi^+)dx$$
$$+C_1(\alpha)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|\phi_i^n(T_{k+\|\psi\|_\infty}(u_n))|^{p_i'}\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}(x)dx+\frac{\alpha}{6}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|\partial_i u_n^+|^{p_i}\omega_i(x)dx$$
$$+C_2(\alpha)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|F_i|^{p_i'}\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}(x)dx+\frac{\alpha}{6}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|\partial_i u_n^+|^{p_i}\omega_i(x)dx$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|F_i\partial_i\psi^+|dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|\phi_i^n(T_{k+\|\psi\|_\infty}(u_n))||\partial_i\psi^+|dx$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha}{6}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}R_i(x)|^{p_i'}dx+\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha}{6}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|u_n^+|^{p_i}\omega_i(x)dx$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha}{6}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|\partial_i u_n^+|^{p_i}\,\omega_i(x)\,dx+\sum_{i=1}^{N}\frac{(6\beta)^{p_i-1}}{p_i(p_i'\alpha)^{p_i-1}}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|\partial_i\psi^+|^{p_i}\omega_i(x)dx.$$

Grâce à l'inégalité de Jensen, (2.3)-(2.6) et $(\mathbf{A_1})$, $(\mathbf{A_2})$, nous avons

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}}|\partial_i u_n^+|^{p_i}\,\omega_i(x)\,dx\le Ck+C'. \tag{2.19}$$

Puisque $\{x\in\Omega,u^+\le k\}\subset\{x\in\Omega,u^+-\psi^+\le k\}$, alors

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega|\partial_i T_k(u_n^+)|^{p_i}\omega_i(x)dx=\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u^+\le k\}}|\partial_i u_n^+|^{p_i}\omega_i(x)dx\le\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u^+-\psi^+\le k\}}|\partial_i u_n^+|^{p_i}\omega_i(x)dx.$$

Par suite, en utilisant (2.19), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega|\partial_i T_k(u_n^+)|^{p_i}\,\omega_i(x)\,dx\le kC+C'\quad\forall k>0. \tag{2.20}$$

De même, en prenant $v=u_n+T_k(u_n^-)$ comme fonction test dans le problème approximatif (2.11), on obtient

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega|\partial_i T_k(u_n)|^{p_i}\omega_i(x)dx\le C''(k+1). \tag{2.21}$$

Par (2.20) et (2.21), nous avons $\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial T_k(u_n)|^{p_i} \omega_i(x) dx \leq (k+1)C' \quad \forall k > 0.$ □

Étape 3: Convergence forte des troncatures

Proposition 2.3. *Soit u_n une solution du problème approximatif (2.11). Alors, il existe une fonction mesurable u et une sous-suite de u_n telle que*

$$T_k(u_n) \to T(u) \quad \textit{fortement dans} \quad W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}).$$

Démonstration. En utilisant la proposition 2.2, on obtient

$$\|T_k(u_n)\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})} \leq C(k+1)^{\frac{1}{p^-}}. \tag{2.22}$$

D'une part, nous allons prouver que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy en mesure dans Ω. Pour tout $\lambda > 0$, nous obtenons

$$\{|u_n - u_m| > \lambda\} \subset \{|u_n| > k\} \cup \{|u_m| > k\} \cup \{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \lambda\},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \text{mes}\{|u_n - u_m| > \lambda\} \leq\ & \text{mes}\ \{|u_n| > k\} + \text{mes}\ \{|u_m| > k\} \\ & + \text{mes}\ \{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \lambda\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Par l'inégalité de Hölder, Lemme 1.4 et (2.22), nous avons

$$\begin{aligned} k\ \text{mes}\{|u_n| > k\} = \int_{\{|u_n|>k\}} |T_k(u_n)| dx &\leq \int_{\Omega} |T(u_n) dx \\ &\leq \left(\text{mes}(\Omega)\right)^{\frac{1}{p^-}} \|T_k(u_n)\|_{L^{p^-}(\Omega)} \\ &\leq C\left(\text{mes}(\Omega)\right)^{\frac{1}{p^-}} \|T_k(u_n)\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})} \\ &\leq C(k+1)^{\frac{1}{p^-}}. \end{aligned}$$

Alors $\text{mes}\{|u_n| > k\} \leq C\left(\frac{1}{k^{-1+p^-}} + \frac{1}{k^{p^-}}\right)^{\frac{1}{p^-}} \to 0$ lorsque $k \to +\infty$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que $\forall k > k_0$, on obtient

$$\text{mes}\{|u_n| > k\} \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \text{mes}\{|u_m| > k\} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.24}$$

Puisque la suite $(T_k(u_n))_n$ est bornée dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$, alors il existe une sous-suite $(T_k(u_n))_n$ telle que $T(u_n)$ converge vers v_k p.p. dans Ω, faiblement dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega})$ et fortement dans $L^{p^-}(\Omega)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Alors $(T_k(u_n))_n$ est une suite de Cauchy en mesure dans Ω. Donc, pour tout $\lambda > 0$, il existe n_0 tel que

$$\text{mes}\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \lambda\} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \forall n, m \geq n_0. \tag{2.25}$$

En utilisant (2.23), (2.24) et (2.25), alors pour tous $\lambda, \varepsilon > 0$ nous avons

$$\text{mes}\{|u_n - u_m| > \lambda\} \leq \varepsilon \qquad \forall n, m \geq n_0.$$

Ce qui implique que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy en mesure dans Ω, ensuite, il existe une sous-suite notée encore $(u_n)_n$ telle que u_n converge vers une fonction mesurable u p.p. dans Ω et

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T(u) \quad \text{faiblement dans } W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{\omega}) \text{ et p.p. dans } \Omega \quad \forall k > 0. \tag{2.26}$$

D'autre part, nous montrerons que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega [a_i(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - a_i(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))](\partial_i T_k(u_n) - \partial_i T_k(u))dx = 0. \tag{2.27}$$

Choisissons $v = u_n + T_1(u_n - T_m(u_n))^-$ comme fonction test dans le problème approximatif (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u_n, \nabla u_n)\partial_i T_1(u_n - T_m(u_n))^- dx - \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi_i^n(u_n)\partial_i T_1(u_n - T_m(u_n))^- dx \\ \leq -\int_\Omega f_n T_1(u_n - T_m(u_n))^- dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega F_i \partial_i T_1(u_n - T_m(u_n))^- dx. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \int_{\{-(m+1)\leq u_n \leq -m\}} a_i(x, u_n, \nabla u_n)\partial_i u_n dx + \sum_{i=1}^{N} \int_{\{-(m+1)\leq u_n \leq -m\}} \phi_i(u_n)\partial_i u_n dx \\ \leq -\int_\Omega f_n T_1(u_n - T_m(u_n))^- dx + \sum_{i=1}^{N} \int_{\{-(m+1)\leq u_n \leq -m\}} F_i \partial_i u_n dx. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Posons $\Phi_i^n(s) = \int_0^s \phi_i^n(t)\chi_{\{-(m+1)\leq t \leq -m\}} dt$.
En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}\phi_i(u_n)\partial_i u_n\,dx=\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \partial_i\Phi_i^n(u_n)dx=0.$$

Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n dx\leq -\int_\Omega f_nT_1(u_n-T_m(u_n))^- dx$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}F_i\partial_i u_n dx.$$

Par l'inégalité de Jensen, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i\, u_n dx\leq -\int_\Omega f_nT_1(u_n-T_m(u_n))^- dx$$
$$+C(\alpha)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}|F_i|^{p_i'}\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}(x)\,dx+\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}|\partial_i u_n|^{p_i}\omega_i(x)dx.$$

D'aprés (2.4), nous avons

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n\leq -\int_\Omega f_nT_1(u_n-T_m(u_n))^-$$
$$+C(\alpha)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}|F_i|^{p_i'}\,\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}(x)\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n.$$

Ce qui implique que

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n dx\leq -\int_\Omega f_nT_1(u_n-T_m(u_n))^- dx$$
$$+C(\alpha)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}|F_i|^{p_i'}\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}(x)dx.$$

Selon le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega f_nT_1(u_n-T_m(u_n))^-\,dx=0,$$

et

$$\lim_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}|F_i|^{p_i'}\,\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}(x)\,dx=0.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\lim_{m\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n\,dx = 0. \tag{2.29}$$

De même, si on prend $v = u_n - \eta T_1(u_n - T_m(u_n))^+$ comme fonction test dans le problème approximatif (2.11), nous avons

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{\{m\leq u_n\leq m+1\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n dx = 0. \tag{2.30}$$

Définissons la fonction réelle $h_m(s)$ pour tout $m > k$ comme suit :

$$h_m(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s| \leq m \\ 0 & \text{si } |s| \geq m+1 \\ m+1-|s| & \text{si } m \leq |s| \leq m+1. \end{cases}$$

Maintenant, considérons $v = u_n - \eta(T_k(u_n) - T(u))^+ h_m(u_n)$ comme fonction test dans le problème approximatif (2.11), nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i(T_k(u_n)-T(u))^+ h_m(u_n)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega a_i(x,u_n,\nabla u_n)(T_k(u_n)-T_k(u))^+\partial_i u_n h'_m(u_n)dx \\
&+\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \phi_i(u_n)\partial_i(T_k(u_n)-T_k(u))^+ h_m(u_n)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \phi_i(u_n)\partial_i u_n(T_k(u_n)-T_k(u))^+ h'_m(u_n)dx \\
&\leq \int_\Omega f_n(T_k(u_n)-T_k(u))^+ h_m(u_n)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega F_i\partial_i(T_k(u_n)-T(u))^+ h_m(u_n)dx \\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega (T_k(u_n)-T_k(u))^+ F_i\partial_i u_n h'_m(u_n)dx.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

En combinant (2.29) et (2.30), nous avons la deuxième intégrale dans (2.31) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$.

Puisque $h_m(u_n) = 0$ si $|u_n| > m+1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \phi_i(u_n)\partial_i(T_k(u_n)-T_k(u))^+ h_m(u_n)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \phi_i(T_{m+1}(u_n))h_m(u_n)\partial_i(T_k(u_n)-T_k(u))^+ dx.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons $\phi_i(T_{m+1}(u_n))h_m(u_n) \to \phi_i(T(u))h_m(u)$ dans $L^{p'_i}(\Omega,\omega_i^*)$ et $\partial_i T_k(u_n) \rightharpoonup \partial_i T(u)$ faiblement dans $L^{p_i}(\Omega,\omega_i(x))$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors la troisième intégrale de (2.31) converge vers zéro lorsque n et m tendent vres $+\infty$.

On pose $\Phi_i(u_n) = \int_0^{u_n} \phi_i(t)(T_k(t) - T_k(u))^+ \chi_{\{m \leq |t| \leq m+1\}} dt.$
Selon le Lemme 1.7, on obtient la quatrième intégrale de (2.31) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$.
D'autre part, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons la première intégrale de second membre dans (2.31) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$. De plus, puisque $F_i h_m(u_n) \to F_i h_m(u)$ dans $L^{p_i'}(\Omega, \omega_i^*)$ et $\partial_i (T_k(u_n) - T_k(u)) \rightharpoonup 0$ faiblement dans $L^{p_i}(\Omega, \omega_i)$, on obtient la deuxième intégrale de second membre dans (2.31) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$.
Par l'inégalité de Young, nous avons

$$
\begin{aligned}
\Big| \sum_{i=1}^N \int_\Omega F_i (T_k(u_n) - T_k(u))^+ \partial_i u_n h_m'(u_n) \Big| &\leq \Big| - \sum_{i=1}^N \int_{\{m \leq u_n \leq m+1\}} F_i (T_k(u_n) - T_k(u))^+ \partial_i u_n \omega_i^{\frac{-1}{p_i}} \omega_i^{\frac{1}{p_i}} \Big| \\
&\quad + \Big| \sum_{i=1}^N \int_{\{-(m+1) \leq u_n \leq -m\}} F_i (T_k(u_n) - T_k(u))^+ \partial_i u_n \omega_i^{\frac{-1}{p_i}} \omega_i^{\frac{1}{p_i}} \Big| \\
\leq \sum_{i=1}^N C(\alpha) \int_{\{m \leq u_n \leq m+1\}} |F_i|^{p_i'} (T_k(u_n) - T_k(u))^+ \omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}} &+ \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\{m \leq u_n \leq m+1\}} \Big| \partial_i u_n \Big|^{p_i} \omega_i (T_k(u_n) - T_k(u))^+ \\
+ \sum_{i=1}^N C(\alpha) \int_{\{-(m+1) \leq u_n \leq -m\}} |F_i|^{p_i'} (T_k(u_n) - T_k(u))^+ \omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}} & \\
+ \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\{-(m+1) \leq u_n \leq -m\}} |\partial_i u_n|^{p_i} \omega_i (T_k(u_n) - T_k(u))^+. &
\end{aligned}
$$

Comme

$$
0 \leq \int_{\{m \leq u_n \leq m+1\}} |F_i|^{p_i'} (T_k(u_n) - T_k(u))^+ \omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}} \leq \int_\Omega |F_i|^{p_i'} (T_k(u_n) - T_k(u))^+ \omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}} dx,
$$

et $T_k(u_n) \to T_k(u)$ p.p. dans Ω lorsque $n \to \infty$ et

$$
\Big| F_i \Big|^{p_i'} (T_k(u_n) - T_k(u))^+ \omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}} \leq 2k \Big| F_i \Big|^{p_i'} \omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}} \in L^1(\Omega).
$$

Alors, nous avons

$$
\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^N \int_{\{m \leq u_n \leq m+1\}} |F_i|^{p_i'} (T_k(u_n) - T_k(u))^+ \omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}} = 0. \tag{2.32}
$$

De même, nous avons

$$
\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^N \int_{\{-(m+1) \leq u_n \leq -m\}} |F_i|^{p_i'} (T_k(u_n) - T_k(u))^+ \omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}} = 0. \tag{2.33}
$$

En utilisant (2.4), (2.29), (2.30) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\le u_n\le -m\}}|\partial_i u_n|^{p_i}(T_k(u_n)-T_k(u))^+\,\omega_i(x)\,dx=0, \tag{2.34}$$

et

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{m\le u_n\le m+1\}}|\partial_i u_n|^{p_i}(T_k(u_n)-T_k(u))^+\,\omega_i\,dx=0. \tag{2.35}$$

En combinant (2.32)-(2.35), nous avons la troisième intégrale de second membre dans (2.31) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$. Nous concluons

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i(T_k(u_n)-T_k(u))^+h_m(u_n)dx\le 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}&\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\ge 0,|u_n|\le k\}}a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i(T_k(u_n)-T_k(u))h_m(u_n)dx\\&-\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\ge 0,|u_n|>k\}}a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_iT_k(u)h_m(u_n)\,dx\le 0.\end{aligned}$$

Or $h_m(u_n)=0$ dans $\{|u_n|>m+1\}$, alors nous avons

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\ge 0,|u_n|>k\}}a_i(x,u_n,\,\nabla u_n)\partial_iT_k(u)h_m(u_n)dx\\&=\sum_{i=1}^{N}\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\ge 0,|u_n|>k\}}a_i(x,T_{m+1}(u_n),\nabla T_{m+1}(u_n))\partial_iT_k(u)h_m(u_n)dx.\end{aligned}$$

Puisque $\big(a_i(x,T_{m+1}(u_n),\nabla T_{m+1}(u_n))\big)_{n\ge 0}$ est borné dans $L^{p_i'}(\Omega,\omega_i^*)$, nous avons $a_i(x,T_{m+1}(u_n),\nabla T(u))$ converge vers Y_m^i faiblement dans $L^{p_i'}(\Omega,\omega_i^*)$. Donc

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}&\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\ge 0,|u_n|>k\}}a_i(x,T_{m+1}(u_n),\nabla T_{m+1}(u_n))\partial_iT_k(u)h_m(u_n)\,dx\\&=\lim_{m\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{|u|>k\}}Y_m^i\partial_iT_k(u)h_m(u)dx=0,\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\ge 0\}}a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\partial_i(T_k(u_n)-T_k(u))h_m(u_n)dx\le 0. \tag{2.36}$$

De plus, nous avons $a_i(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))h_m(u_n) \to a_i(x, T_k(u), \nabla T_k(u))h_m(u)$ dans $L^{p_i'}(\Omega, \omega_i^*)$ et $\partial_i(T_k(u_n) - T_k(u))$ converge vers 0 faiblement dans $L^{p_i}(\Omega, \omega_i)$, alors

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\geq 0\}} a_i(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))\partial_i(T_k(u_n) - T_k(u))h_m(u_n)dx = 0. \tag{2.37}$$

En utilisant (2.6), (2.36) et (2.37), nous déduisons

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\geq 0\}} \left[a_i(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - a_i(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))\right] \times \partial_i(T_k(u_n) - T_k(u))h_m(u_n)dx = 0. \tag{2.38}$$

De même, nous considérons $\varphi = u_n + (T_k(u_n) - T_k(u))^- h_m(u_n)$ comme fonction test dans le problème approximatif (2.11), nous avons

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\leq 0\}} \left[a_i(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - a_i(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))\right] \times \partial_i(T_k(u_n) - T_k(u))h_m(u_n)dx = 0. \tag{2.39}$$

En utilisant (2.38) et (2.39), on obtient

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} \left[a_i(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - a_i(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))\right] \times \partial_i(T_k(u_n) - T_k(u))h_m(u_n)dx = 0. \tag{2.40}$$

Maintenant, nous prouvons

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} \left[a_i(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - a_i(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))\right] \times \partial_{\mathrm{i}}(T_k(u_n) - T_k(u))(1 - h_m(u_n))dx = 0. \tag{2.41}$$

Soit $\varphi = u_n + T_k(u_n)^-(1 - h_m(u_n))$ une fonction test dans le problème approximatif (2.1), nous avons

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x, u_n, \nabla u_n)\partial_i T_k(u_n)^-(1 - h_m(u_n))dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x, u_n, \nabla u_n)\partial_i u_n T_k(u_n)^- h_m'(u_n)dx \\ &\quad -\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} \phi_i(u_n)\partial_i T_k(u_n)^-(1 - h_m(u_n))dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} \phi_i(u_n) T_k(u_n)^- \partial_i u_n\, h_m'(u_n)dx \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\leq -\int_\Omega f_n T_k(u_n)^-(1-h_m(u_n))dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega F_i \partial_i T_k(u_n)^-(1-h_m(u_n))dx$$
$$+\sum_{i=1}^N \int_\Omega F_i T_k(u_n)^- \partial_i u_n h'_m(u_n)dx.$$

selon (2.29) et (2.30), nous avons

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n T_k(u_n)^- h'_m(u_n)dx = 0.$$

Ensuite, la deuxième intégrale de (2.42) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$. Puisque $\partial_i T_k(u_n)^- \rightharpoonup \partial_i T_k(u)^-$ dans $L^{p_i}(\Omega,\omega_i)$ et $\phi_i(T_k(u_n))(1-h_m(u_n)) \to \phi_i(T_k(u))(1-h_m(u))$ fortement dans $L^{p'_i}(\Omega,\omega_i^*)$, on obtient

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^N \int_\Omega \phi_i(u_n)\partial_i T_k(u_n)^-(1-h_m(u_n))dx$$
$$= \lim_{m\to+\infty}\sum_{i=1}^N \int_\Omega \phi_i(T_k(u))\partial_i T_k(u)^-(1-h_m(u))dx.$$

Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{i=1}^N \int_\Omega \phi_i(T_k(u))\partial_{\mathrm{i}} T_k(u)^-(1-h_m(u))dx = 0.$$

Ainsi, la troisième intégrale de (2.42) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$. Posons $\Phi_i^n(t) = \int_0^t \phi_i(s)T_k(s)^- h'_m(s)ds$. En appliquant la formule de Green, nous avons

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \phi_i^n(u_n)\partial_i u_n T_k(u_n)^- h'_m(u_n)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \partial_i \Phi_i^n(u_n)dx = 0.$$

Par suite, la quatrième intégrale de (2.42) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$. En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons l'intégrale de second membre dans (2.42) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$. Comme $F_i(1-h_m(u_n)) \to F_i(1-h_m(u))$ dans $L^{p'_i}(\Omega,\omega_i^*)$ et $\partial_i T_k(u_n) \rightharpoonup \partial_i T_k(u)$ dans $L^{p_i}(\Omega,\omega_i)$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^N \int_\Omega F_i \partial_i T_k(u_n)^-(1-h_m(u_n)) = \sum_{i=1}^N \int_\Omega F_i \partial_i T_k(u)^-(1-h_m(u)).$$

Aussi, nous avons $F_i(1-h_m(u)) \to 0$ en $L^{p'_i}(\Omega,\omega_i^*)$ lorsque m tend vers $+\infty$ et $\partial_i T_k(u)^- \in L^{p_i}(\Omega,\omega_i)$ donc la deuxième intégrale de second membre dans (2.42) converge vers zéro lorsque

n et m tendent vers $+\infty$.

En utilisant l'inégalité de Young et (2.4), on obtient

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} F_i\partial_i u_n T_k(u_n)^- h'_m(u_n)\,\omega_i^{\frac{-1}{p_i}}\,\omega_i^{\frac{1}{p_i}}| \\
&\leq C(\alpha)\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|F_i|^{p'_i}T_k(u_n)^- h'_m(u_n)\,\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}} + \alpha\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\omega_i|\partial_i u_n|^{p_i}T_k(u_n)^- h'_m(u_n) \\
&\leq C(\alpha)\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|F_i|^{p'_i}T_k(u_n)^-\chi_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}}\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}} + k\sum_{i=1}^{N}\int_{\{-(m+1)\leq u_n\leq -m\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n.
\end{aligned}
$$

En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue et (2.29), nous obtenons la troisième intégrale de second membre dans (2.42) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$, nous concluons

$$
\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n\leq 0\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i T_k(u_n)(1-h_m(u_n))dx = 0. \tag{2.43}
$$

Ainsi, pour η assez petit, nous choisissons $\varphi = u_n - \eta T_k(u_n^+ - \psi^+)(1-h_m(u_n))$ comme fonction test dans le problème approximatif (2.11), nous avons

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i T_k(u_n^+-\psi^+)(1-h_m(u_n))dx - \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n T_k(u_n^+-\psi^+)h'_m(u_n)dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\phi_i(u_n)\partial_i T_k(u_n^+-\psi^+)(1-h_m(u_n))dx - \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\phi_i(u_n)\partial_i u_n T_k(u_n^+-\psi^+)h'_m(u_n)dx \\
&\quad \leq \int_{\Omega} f_n T_k(u_n^+-\psi^+)(1-h_m(u_n))dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}F_i\partial_i T_k(u_n^+-\psi^+)(1-h_m(u_n))dx \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}F_i\partial_i u_n T_k(u_n^+-\psi^+)h'_m(u_n)dx
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

grâce à (2.29) et (2.30), nous avons la deuxième intégrale de l'expression à gauche dans (2.44) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$. Pour la troisième intégrale de l'expression à gauche dans (2.44), on obtient grâce à l'inégalité de Hölder, (2.4), (2.29) et (2.30)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\phi_i(u_n)\partial_i T_k(u_n^+-\psi^+)(1-h_m(u)) &= \sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}\phi_i(u_n)\partial_i u_n^+(1-h_m(u_n)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}\phi_i(u_n)\partial_i\psi^+(1-h_m(u_n)).
\end{aligned}
$$

On pose $\Phi_i(s) = \displaystyle\int_0^s \phi_i(t)(1-h_m(t))\chi_{\{t-\psi^+\leq k\}}\cdot\chi_{\{t>0\}}dt.$

Par le Lemme 1.7, nous avons

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}\phi_i(u_n)\partial_i u_n^+(1-h_m(u_n))=0,$$

grâce au théorème de Lebesgue et à (2.7), on obtient

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}\phi_i(u_n)\partial_i u_n T_k(u_n^+-\psi^+)h'_m(u_n)dx=0.$$

Ensuite, la quatrième intégrale de l'expression gauche dans (2.44) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$.

De plus, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons la première intégrale de second membre dans (2.44) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$. En utilisant l'inégalité de Jensen, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}F_i\partial_i T_k(u_n^+-\psi^+)(1-h_m(u)) &= \sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}F_i\partial_i u_n^+\omega_i^{\frac{-1}{p_i}}\omega_i^{\frac{1}{p_i}}(1-h_m(u_n))\\
&\quad-\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}F_i\partial_i\psi^+(1-h_m(u_n))\\
&\leq c(\alpha)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}|F_i|^{p'_i}\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}(1-h_m(u_n))+\alpha\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}|\partial_i u_n^+|^{p_i}\omega_i(1-h_m(u_n))\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}F_i\partial_i\psi^+(1-h_m(u_n))\\
&\leq c(\alpha)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}|F_i|^{p'_i}\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}(1-h_m(u_n))+\alpha\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i T_{k+\|\psi\|_\infty}(u_n^+)|^{p_i}\omega_i(1-h_m(u_n))\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}F_i\partial_i\psi^+(1-h_m(u_n)).
\end{aligned}$$

Selon le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}|F_i|^{p'_i}\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}}(1-h_m(u_n))=0$$

et

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\leq k\}}F_i\partial_i\psi^+(1-h_m(u_n))=0$$

Puisque

$$\partial_i T_{k+\|\psi\|_\infty}(u_n^+)\rightharpoonup\partial_i T_{k+\|\psi\|_\infty}(u^+)\quad\text{faiblement dans}\quad L^{p_i}(\Omega,\omega_i)$$

et $(1-h_m(u_n)) \to (1-h_m(u))$ fortement dans $L^{p_i'}(\Omega,\omega_i^*)$. Alors, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i T_{k+\|\psi\|_\infty}(u_n^+)|^{p_i}\omega_i(1-h_m(u_n)) = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i T_{k+\|\psi\|_\infty}(u^+)|^{p_i}\omega_i(1-h_m(u)).$$

Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i T_{k+\|\psi\|_\infty}(u^+)|^{p_i}\omega_i(1-h_m(u)) = 0.$$

Ainsi, la deuxième intégrale de secend membre dans (2.44) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$.

De plus, par l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega F_i\partial_i u_n T_k(u_n^+-\psi^+)h_m'(u_n)\Big| &= \Big|-\sum_{i=1}^{N}\int_{\{m\le u_n\le m+1\}} F_i\omega_i^{\frac{-1}{p_i}}\omega_i^{\frac{1}{p_i}}\partial_i u_n T_k(u_n^+-\psi^+)\Big| \\ \le c(\alpha)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{m\le u_n\le m+1\}} |F_i|^{p_i'}\omega_i^{\frac{-1}{p_i-1}} T_k(u_n^+-\psi^+) &+ \alpha\sum_{i=1}^{N}\int_{\{m\le u_n\le m+1\}} |\partial_i u_n|^{p_i}\omega_i T_k(u_n^+-\psi^+).\end{aligned}$$

Selon (2.4) et (2.30), le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la troisième intégrale de second membre dans (2.44) converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$.

Ainsi, la première intégrale de second membre dans (2.44) satisfait à la condition suivante

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i T_k(u_n^+-\psi^+)(1-h_m(u_n)) \le \varepsilon_1(n,m),$$

alors, nous avons

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n^+(1-h_m(u_n)) \\ &\qquad\le \varepsilon_1(n,m)+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i\psi^+(1-h_m(u_n)).\end{aligned}$$

En utilisant (2.4), l'inégalité de Young et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+-\psi^+\le k\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n^+(1-h_m(u_n)) \le \varepsilon_1(n,m)+\varepsilon_2(n,m).$$

Ainsi, puisque $\{u_n^+\le k\}\subset\{u_n^+-\psi^+\le k\}$, on obtient

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u_n^+\le k\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i u_n^+(1-h_m(u_n)) = 0,$$

ce qui implique que

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{0\leq u_n\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i T_k(u_n)(1-h_m(u_n)) = 0. \tag{2.45}$$

En utilisant (2.43) et (2.45), nous avons

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\partial_i T_k(u_n)(1-h_m(u_n)) = 0. \tag{2.46}$$

D'autre part, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}(a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)) - a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))(\partial_i T_k(u_n)-\partial_i T_k(u))\\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}(a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)) - a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)))(\partial_i T_k(u_n)-\partial_i T_k(u))h_m(u_n)\\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}(a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)))\partial_i T_k(u_n)(1-h_m(u_n))\\
&\qquad - \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}(a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)))\partial_i T_k(u)(1-h_m(u_n))\\
&\qquad\qquad - \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}(a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)))(\partial_i T_k(u_n)-\partial_i T_k(u))(1-h_m(u_n)).
\end{aligned}$$

En combinant (2.40) et (2.46), la première et la deuxième intégrale dans le terme à droite convergent vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$.

Puisque $(a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)))_n$ bornée dans $L^{p_i'}(\Omega,\omega_i^*)$ et $\partial_i T_k(u)(1-h_m(u))$ convergent vers zéro dans $L^{p_i}(\Omega,\omega_i)$ lorsque n et m tendent vers $+\infty$. Alors, la troisième intégrale dans le terme à droite converge vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$.

De plus, puisque $a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))(1-h_m(u)) \longrightarrow a_i(x,T_k(u),\nabla T_k(u))(1-h_m(u))$ fortement dans $L^{p_i'}(\Omega,\omega_i^*)$ et $\partial_i T_k(u_n) \rightharpoonup \partial_i T_k(u)$ faiblement dans $L^{p_i}(\Omega,\omega_i)$. Alors, on obtient la quatrième intégrale de droite convergeant vers zéro lorsque n et m tendent vers $+\infty$. Nous obtenons donc (2.27).

Finalement, par (2.26), (2.27) et le Lemme 2.1, nous avons

$T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega,\overrightarrow{\omega})$ et p.p. dans Ω $\quad\forall k>0$. □

Étape 4 : Passage à la limite

Soit $\varphi \in K_\psi \cap L^\infty(\Omega)$, choisissons $v = u_n - T_k(u_n-\varphi)$ comme fonction test dans le problème approximatif (2.11), pour n assez grand ($n > k + \|\varphi\|_\infty$), nous avons

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u_n, \nabla u_n) \partial_i T_k(u_n - \varphi) dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi_i^n(u_n) \partial_i T_k(u_n - \varphi) dx \\ \leq \int_\Omega f_n T_k(u_n - \varphi) dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega F_i \partial_i T_k(u_n - \varphi) dx,$$

par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_{k+\|\varphi\|_\infty}(u_n), \nabla T_{k+\|\varphi\|_\infty}(u_n)) \partial_i T_k(u_n - \varphi) dx \\ + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi_i(T_{k+\|\varphi\|_\infty}(u_n)) \partial_i T_k(u_n - \varphi) dx \leq \int_\Omega f_n T_k(u_n - \varphi) dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega F_i \, \partial_i T_k(u_n - \varphi) dx.$$

Comme $T_k(u_n) \to T(u)$ fortement dans $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega, \vec{\omega})$ et p.p. dans Ω pour tout $k > 0$, alors on obtient

$$a_i(x, T_{k+\|\varphi\|_\infty}(u_n), \nabla T_{k+\|\varphi\|_\infty}(u_n)) \rightharpoonup a_i(x, T_{k+\|\varphi\|_\infty}(u), \nabla T_{k+\|\varphi\|_\infty}(u)) \text{ faiblement dans } L^{p_i'}(\Omega, \omega_i^*)$$

et

$$\phi_i(T_{k+\|\varphi\|_\infty}(u_n)) \to \phi_i(T_{k+\|\varphi\|_\infty}(u)) \quad \text{fortement dans} \quad L^{p_i'}(\Omega, \omega_i^*),$$

de plus,

$$\partial_i T_k(u_n - \varphi) \to \partial_i T_k(u - \varphi) \quad \text{fortement dans} \quad L^{p_i}(\Omega, \omega_i).$$

Nous pouvons passer à la limite dans

$$\begin{cases} u_n \in K_\psi \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u_n, \nabla u_n) \partial_i T_k(u_n - \varphi) dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi_i^n(u_n) \partial_i T_k(u_n - \varphi) dx \\ \qquad \leq \displaystyle\int_\Omega f_n T_k(u_n - \varphi) dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega F_i \partial_i T_k(u_n - \varphi) dx, \\ \forall \varphi \in K_\psi \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall k > 0, \end{cases}$$

ceci complète la preuve du Théorème 2.1. $\square$

Chapitre 3

Problème $p(x)$-elliptique dégénérée fortement non linéaire sans condition de signe

Nous traitons dans ce chapitre un problème elliptique fortement non-linéaire faisant intervenir l'opérateur de Leray-Lions dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$, l'espaces Sobolev avec poids $\nu(x)$ à exposants variables $p(x)$. Le but essentiel de ce travail est de montrer que notre problème admet au moins une solution $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$, et ceci sans prendre d' hypothèses, ni sur la condition de signe ni sur la condition de coercivité, sur le terme dégénéré g. Le second membre est supposé appartenir à $L^1(\Omega)$.

3.1 Position du problème

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$, $p(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ et ν une fonction poids sur Ω, c'est-à-dire : ν mesurable et strictement positive sur Ω. Nous prendrons, dans la suite (voir section 2), plus de conditions sur les fonctions poids.
Nous cherchons à montrer l'existence de solutions du problème $p(x)$-elliptique fortement non linéaire dégénéré de type :

$$\begin{cases} Au + g(x,u,\nabla u) = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où A est un opérateur de Leray-Lions défini de $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ vers son dual $W^{-1,p'(x)}(\Omega,\nu^*)$, avec $\nu^* = \nu^{1-p'(x)}$, par :

$$Au = -\text{div } a(x,u,\nabla u),$$

avec $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait les hypothèses d'intégrabilité, de strict monotonie et de coercivité suivantes :

$$|a(x,r,\zeta)| \leq \beta \nu^{\frac{1}{p(x)}} \left[b(x) + |r|^{\frac{p(x)}{p'(x)}} + \nu^{\frac{1}{p'(x)}} |\zeta|^{p(x)-1} \right], \tag{3.2}$$

$$[a(x,r,\zeta) - a(x,r,\overline{\zeta})]\,(\zeta - \overline{\zeta}) > 0, \quad \forall \zeta \neq \overline{\zeta} \in \mathbb{R}^N. \tag{3.3}$$

$$a(x,s,\zeta)\zeta \geq \alpha \nu |\zeta|^{p(x)}, \tag{3.4}$$

avec $b(x)$ est une fonction positive dans $L^{p'(x)}(\Omega)$ et α, β sont deux constantes strictement positives.

D'autre part notons que le terme non linéaire $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory vérifiant uniquement presque pour tout $x \in \Omega$ et tout $r \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{R}^N$ la condition de croissance suivante:

$$|g(x,r,\zeta)| \leq h(|r|)\nu(x)|\zeta|^{p(x)} + c(x). \tag{3.5}$$

où $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue, croissante et positive, de plus $c(x)$ est une fonction positive dans $L^1(\Omega)$. Le seconde membre est supposé vérifier:

$$f \in L^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Dans le cas particulier du p-Laplacien, à exposant constant et sans poids, ce problème a été étudié par A. Porretta [120], plus précisément, il considère le problème elliptique non linéaire suivant:

$$\begin{cases} -\triangle_p u + g(u)|\nabla u|^p = \mu & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

et démontre un résultat d'existence sans condition de signe sur g avec second membre mesure. Lorsque le second membre f appartient à $W^{-1,p'}(\Omega)$, A. Bensoussan, L. Boccardo et F. Murat [33] ont prouvé l'existence d'une solution du problème elliptique non linéaire

$$Au + g(x,u,\nabla u) = h(x),$$

où A est un opérateur de Leray-Lions de $W_0^{1,p}(\Omega)$ a valeurs dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ et où g est un terme non linéaire à croissance en ∇u, qui satisfait la condition de signe $g(x,u,\zeta)u \geq 0$ mais dont la croissance en u n'est pas limitée.

3.2 Résultat d'existence

Dans cette section, nous présentons une approche basée sur des estimations a priori pour résoudre le problème (3.1). Nous montrons l'existence de la solution faible du problème approximatif, ensuite nous prouvons la convergence d'une sous suite de solution fiable du problème approximatif vers la solution du problème (3.1).
Le résultat principal de cette section est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Supposons que les hypothèses* (3.2) $-$ (3.6) *et* (w_1), (w_2) *sont vérifiées, alors le problème* (3.1) *admet au moins une solution* $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$.

Remarque 3.1. *[36] Le résultat du Théorème 3.1 n'est pas vrai quand* $g(x,r,\zeta) = 0$, *comme dans le cas non dégénéré avec* $p(x) = p$ *constant,* $p \leq N$, *et* $f \in L^1(\Omega)$, *une solution de* $Au = f$ *n'appartient pas à* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *mais appartient à* $\bigcap\limits_{1<q<\frac{N(p-1)}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$.

Remarque 3.2. *Si* $f \in W^{-1,p'(x)}(\Omega,\nu^*)$, *alors nous avons* $g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$.
Mais si $f \in L^1(\Omega)$, *nous n'avons pas nécessairement* $g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$.

Contre exemple. *[39]*
Considérons $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, *la boule ouverte l'unité de* $\mathbb{R}^2$, *laissons* $\lambda \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$, *nous avons alors* $u(x) = ln^{\lambda}(\frac{1}{|x|}) \in H_0^1(\Omega)$; *et* $-\Delta u \in L^1(\Omega)$, *tel que* $-\Delta u \geq 0,\ u|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$ *et* $|u|^2|\nabla u|^2$ *n'appartient pas à* $L^1(\Omega)$.

Lemme 3.1. *[8] Supposons que* (3.2), (3.3), (3.4) *sont vérifiées, soient* $(u_n)_n$ *une suite dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ *et* $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$, *si* $u_n \rightharpoonup u$ *faiblement dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ *et*

$$\int_{\Omega} \Big(a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla u)\Big)(\nabla u_n - \nabla u)dx \to 0,$$

alors $u_n \longrightarrow u$ *fortement dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$.

La démonstration se fait par passage à la limite dans le problème approché étudié dans la sous section suivantes.

3.2.1 Problème approximatif

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions régulières telle que $f_n \longrightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$ et $\|f_n\| \leq \|f\| = C_1$. Considérons le problème approximatif suivant :

$$(\mathcal{P}_n) \qquad \begin{cases} Au_n + g_n(x, u_n, \nabla u_n) = f_n \quad \text{dans } \Omega, \\ u_n \in W_0^{1,p(x)}(\Omega, \nu), \end{cases}$$

où $g_n(x,r,\zeta) = \dfrac{g(x,r,\zeta)}{1 + \frac{1}{n}|g(x,r,\zeta)|}\chi_{\Omega_n}$, avec χ_{Ω_n} est la fonction caractéristique de Ω_n où Ω_n est une suite de sous-ensembles compacts qui converge vers Ω.

Nous avons $\qquad |g_n(x,r,\zeta)| \leq |g(x,r,\zeta)|$ et $|g_n(x,r,\zeta)| \leq n$.

Nous définissons l'opérateur $G_n : W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega,\nu^*)$ par

$$\langle G_n u, v\rangle = \int_\Omega g_n(x,u,\nabla u)v dx, \qquad u,v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu).$$

Proposition 3.1. *L'opérateur G_n est borné.*

Démonstration. Soient u et φ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$, selon l'inégalité Hölder, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle G_n u, \varphi\rangle &= \int_\Omega g_n(x,u,\nabla u)\varphi dx \leq \int_\Omega |g_n(x,u,\nabla u)|\nu(x)^{\frac{-1}{p(x)}}\nu(x)^{\frac{1}{p(x)}}\varphi dx, \\ &\leq (\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-})\||g_n(x,u,\nabla u)|\nu(x)^{\frac{-1}{p(x)}}\|_{p'(x)}\|\varphi\, \nu(x)^{\frac{1}{p(x)}}\|_{p(x)}, \\ &\leq C\left(\int_\Omega |g_n(x,u,\nabla u)|^{p'(x)}\nu(x)^* dx\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\|\varphi\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)} \\ &\leq C\left(\int_\Omega n^{p'(x)}\nu(x)^* dx\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\|\varphi\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)} \\ &\leq Cn^{\frac{p'_+}{\gamma_1}}\left(\int_\Omega \nu(x)^* dx\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\|\varphi\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)} \\ &\leq C'\|\varphi\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)}. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2. [8] *: L'opérateur $A + G_n : W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu) \longrightarrow W^{-1,p'(x)}(\Omega,\nu^*)$ définit pour tous $u,v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ par*

$$\langle (A+G_n)u, v\rangle = \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla v dx + \int_\Omega g_n(x,u,\nabla u)v dx,$$

est borné, coercif, hémicontinu et de type (M).

Grâce à [27, 105], le problème approximatif $(\mathcal{P}_n)$ admet au moins une solution u_n appartenant à $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$.

3.2.2 Preuve du Théorème 3.1

Étape 1 : Estimations a priori

Proposition 3.3. *Il existe une constante C (ne dépend pas de n et k) telle que*

$$\|T_k(u_n)\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)} \leq C\,k, \qquad \textit{pour tout } k > 0.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu) \cap L^\infty(\Omega)$, avec $\varphi > 0$.
Choisissons $v = \exp(G(u_n))\varphi$ comme fonction test dans $(\mathcal{P}_n)$, où $G(s) = \displaystyle\int_0^s \frac{h(r)}{\alpha}dr$.
La fonction h apparaît dans (3.5). Alors, nous avons

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla(\exp(G(u_n))\varphi)dx + \int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(u_n))\varphi dx \\ = \int_\Omega f_n \exp(G(u_n))\varphi dx.$$

De (3.5), nous obtenons

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \frac{h(u_n)}{\alpha}\exp(G(u_n))\varphi dx \\ + \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(u_n))\nabla\varphi dx \leq \int_\Omega c(x)\exp(G(u_n))\varphi dx \\ + \int_\Omega f_n \exp(G(u_n))\varphi dx + \int_\Omega h(u_n)|\nabla u_n|^{p(x)}\nu(x)\exp(G(u_n))\varphi dx, \quad (3.7)$$

en utilisant (3.4), on obtient pour tout $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu) \cap L^\infty(\Omega)$, avec $\varphi > 0$

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(u_n))\nabla\varphi dx \leq \int_\Omega (c(x)+f_n)\exp(G(u_n))\varphi dx. \quad (3.8)$$

D'autre part, en prenant $v = \exp(-G(u_n))\varphi$ comme fonction test dans $(\mathcal{P}_n)$, on déduit comme dans (3.8), pour tous $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu) \cap L^\infty(\Omega)$, avec $\varphi > 0$ que

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\exp(-G(u_n))\nabla\varphi dx + \int_\Omega c(x)\exp(-G(u_n))\varphi dx \geq \int_\Omega f_n \exp(-G(u_n))\varphi dx. \quad (3.9)$$

Prenons maintenant $\varphi = T_k(u_n)^+$ dans (3.8), puisque $G(u_n) \leq \dfrac{\|h\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\alpha}$, nous obtenons

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla T_k(u_n)^+) \exp(G(u_n)) \nabla T_k(u_n)^+ dx \leq k \exp\left(\frac{\|h\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\alpha}\right) \times \left[\|c\|_{L^1(\Omega)} + \|f_n\|_{L^1(\Omega)}\right] \leq C_1 k, \quad (3.10)$$

en utilisant (3.4), nous avons

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)^+|^{p(x)} \nu(x) \exp(G(u_n)) dx \leq C_2 k. \quad (3.11)$$

Comme dans (3.11), on prend cette fois $\varphi = T_k(u_n)^-$ dans (3.9), on en déduit que

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)^-|^{p(x)} \nu(x) \exp(G(u_n)) dx \leq C_3 k. \quad (3.12)$$

En combinant (3.11) et (3.12), nous concluons que

$$\|T_k(u_n)\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)} \leq C_4 k,$$

où $C_1,\ C_2,\ C_3$ et C_4 sont des constantes indépendantes de n. Ce qui implique que la suite $T_k(u_n)_n$ est borée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega, \nu)$. $\square$

D'autre part, pour chaque k, la suite $\big(T_k(u_n)\big)_n$ converge presque partout dans Ω, en utilisant le même argument que [22, 99], en déduire que (u_n) est une suite de Cauchy en mesure et converge presque partout pour une sous-suite vers une fonction mesurable quelconque u.

Par conséquent, nous avons $u_n \to u \quad$ p.p. dans Ω.

En déduire du Lemme 1.3 que

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \qquad \text{dans} \quad W_0^{1,p(x)}(\Omega, \nu),$$

D'aprés (3.4). Pour tout $k > 0$, il existe $\varphi_k \in (L^{p'(x)}(\Omega, \nu^*))^N$ tel que

$$a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) \rightharpoonup \varphi_k \qquad \text{dans} \quad (L^{p'(x)}(\Omega, \nu^*))^N. \quad (3.13)$$

En utilisant le même argument que [24] nous montrons que

$$\lim_{j\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\{j \leq |u_n| \leq j+1\}} a(x, u_n, \nabla u_n) \nabla u_n dx = 0. \quad (3.14)$$

Étape 2 : La convergence forte des troncatures

Soit j un paramètre réel positif et $\psi_j(s) = 1 - |T_1(s - T_j(s))|$, en choisissant $\varphi = T_k(u_n)^+(1 - \psi_j(u_n))$ comme fonction test dans (3.8), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\{j\leq|u_n|\leq j+1\}} & a(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(u_n))\nabla u_n T_k(u_n)^+ dx \\ & + \int_{\{T_k(u_n)\geq 0\}} a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\exp(G(u_n))(1-\psi_j(u_n))dx \\ & \leq \int_\Omega (c(x)+f_n)\exp(G(u_n))T_k(u_n)^+(1-\psi_j(u_n))dx. \end{aligned} \tag{3.15}$$

En utilisant (3.4) et (3.14), nous avons

$$\lim_{j\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{j\leq|u_n|\leq j+1\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(u_n))\nabla u_n T_k(u_n)^+ dx = 0,$$

D'aprés le Théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous déduisons que le côté droit de (3.15) tend vers zéro. Ainsi,

$$\lim_{j\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{T_k(u_n)\geq 0\}} a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))(1-\psi_j(u_n))dx = 0.$$

Symétriquement, en prenant $\varphi = T_k(u_n)^-(1-\psi_j(u_n))$ comme fonction test dans (3.9), on obtient

$$\lim_{j\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{T_k(u_n)\leq 0\}} a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))(1-\psi_j(u_n))dx = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{j\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))(1-\psi_j(u_n))dx = 0. \tag{3.16}$$

D'autre part, en choisissant $\varphi = (T_k(u_n) - T_k(u))^+\psi_j(u_n)$ comme fonction test dans (3.8), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\geq 0\}} & a(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(u_n))\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\psi_j(u_n)dx \\ & - \int_{\{j\leq|u_n|\leq j+1\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(u_n))\nabla u_n(T_k(u_n)-T_k(u))^+ dx \\ & \leq \int_\Omega (c(x)+f_n)\exp(G(u_n))(T_k(u_n)-T_k(u))^+\psi_j(u_n)dx. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Par suite,

$$\left|\int_{\{j\leq|u_n|\leq j+1\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(u_n))\nabla u_n(T_k(u_n)-T_k(u))^+dx\right|$$
$$\leq 2k\exp\left(\frac{\|h\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\alpha}\right)\int_{\{j\leq|u_n|\leq j+1\}}|a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n|\,dx$$

Grâce à (3.14), nous avons

$$\lim_{j\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\{j\leq|u_n|\leq j+1\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(u_n))\nabla u_n(T_k(u_n)-T_k(u))^+dx=0,$$

En utilisant le Théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous en déduisons que le côté droit tend également vers zéro. Ainsi,

$$\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\geq 0\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(u_n))\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\psi_j(u_n)dx\leq\varepsilon_1(j,n). \tag{3.18}$$

où les fonctions $\varepsilon_i(j,n),\quad i=1,2,3$ tendent vers zéro quand j et n tendent vers l'infini. Comme

$$\left|\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\geq 0,|u_n|>k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(u_n)\nabla T_k(u)\psi_j(u_n)dx\right|$$
$$\leq C_1\int_{\{\{T_k(u_n)-T_k(u)\geq 0,|u_n|>k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_k(u)\psi_j(u_n)dx\to 0 \tag{3.19}$$

lorsque $n\to\infty$, ce qui implique que

$$\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\geq 0,|u_n|\leq k\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(u_n))\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\psi_j(u_n)dx\leq\varepsilon_2(j,n)$$

cela signifie que

$$\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\geq 0\}} a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\psi_j(u_n)dx\leq\varepsilon_3(j,n). \tag{3.20}$$

Ensuite

$$\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\geq 0\}}[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\psi_j(u_n)dx$$
$$+\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\geq 0\}} a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\psi_j(u_n)dx\leq\varepsilon_3(j,n) \tag{3.21}$$

Or $a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))_n$ converge dans $(L^{p'(x)}(\Omega,v^*))^N$ et $T_k(u_n)\rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega,v)$, alors la dernière intégrale tend vers zéro lorsque $n\to\infty$.

Donc

$$\lim_{j\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\geq 0\}}[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]$$
$$\times\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\psi_j(u_n)dx=0. \quad (3.22)$$

Symétriquement, en choisissant $\varphi=(T_k(u_n)-T_k(u))^-\psi_j(u_n)$ comme fonction test dans (3.9), on obtient de la même manière

$$\lim_{j\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\{T_k(u_n)-T_k(u)\leq 0\}}[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]$$
$$\times\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\psi_j(u_n)dx=0. \quad (3.23)$$

En combinant (3.22) et (3.23), on obtient

$$\lim_{j\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\psi_j(u_n)dx=0. \quad (3.24)$$

En utilisant la décomposition suivante

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\right]\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))dx\\
&\quad=\int_\Omega[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\psi_j(u_n)dx\\
&\quad=\int_\Omega[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_j(u_n))dx\\
&\quad+\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)(1-\psi_j(u_n))dx-\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)\\
&\qquad\times(1-\psi_j(u_n))dx-\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_j(u_n))dx.
\end{aligned}$$

Selon (3.24) et (3.16), les première et deuxième intégrales du côté droit convergent vers 0 lorsque j et n tendent vers $+\infty$.

D'autre part, $(a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)))_n$ est bornée dans $\left(L^{p'(x)}(\Omega,\nu^*)\right)^N$ et $\nabla T_k(u)(1-\psi_j(u_n))$ convergent vers 0 lorsque $j,n\to\infty$. La dernière intégrale converge également vers 0, car $T_k(u_n)\rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $\left(L^{p(x)}(\Omega,\nu)\right)^N$.

Finalement

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left[a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\right]\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))dx=0 \quad (3.25)$$

Grâce à (3.1), nous avons pour chaque k,

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \quad \text{fortement dans} \quad W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$$

et $u_n \to u$ p.p. dans Ω, ce qui implique que

$$a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)) \rightharpoonup a(x,T_k(u),\nabla T_k(u)) \quad \text{dans } (L^{p'(x)}(\Omega,\nu^*))^N.$$

Étape 3 : Equi-intégrabilité de $(g_n(x,u_n,\nabla u_n))_n$

Nous montrerons que $g_n(x,u_n,\nabla u_n) \to g(x,u,\nabla u)$ fortement dans $L^1(\Omega)$.

Soit $m>0$, en choisissant $\varphi = \int_0^{u_n} h(s)\chi_{\{s>m\}}ds$ comme fonction test dans (3.8), on obtient:

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n h(u_n)\chi_{\{u_n>m\}}\exp(G(u_n))dx \\ \le \exp\left(\frac{\|h\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\alpha}\right)\left[\|c\|_{L^1(\Omega)}+\|f_n\|_{L^1(\Omega)}\right]\int_m^\infty h(s)ds,\end{aligned} \tag{3.26}$$

en utilisant (3.4), nous avons

$$\alpha\int_{\{u_n>m\}}|\nabla u_n|^{p(x)}\nu(x)h(u_n)\exp(G(u_n))dx \le \exp\left(\frac{\|h\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\alpha}\right)\left[\|c\|_{L^1(\Omega)}+\|f_n\|_{L^1(\Omega)}\right]\int_m^\infty h(s)ds. \tag{3.27}$$

D'après $h\in L^1(\mathbb{R})$, nous déduisons que

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\{u_n>m\}}|\nabla u_n|^{p(x)}\nu(x)h(u_n)dx = 0.$$

De même, en prenant $\varphi = \int_0^{u_n} h(s)\chi_{\{s<-m\}}ds$ comme fonction test dans (3.9), on en déduit que

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\{u_n<-m\}}|\nabla u_n|^{p(x)}\nu(x)h(u_n)dx = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\{|u_n|>m\}}|\nabla u_n|^{p(x)}\nu(x)h(u_n)dx = 0.$$

Ce qui implique, pour m assez grand et pour un sous-ensemble E de Ω,

$$\begin{aligned}\lim_{mes(E)\to 0}\int_E|\nabla u_n|^{p(x)}\nu(x)h(u_n)dx \le \|h\|_\infty \lim_{mes(E)\to 0}\int_E|\nabla T-m(u_n)|^{p(x)}\nu(x)dx \\ +\int_{\{|u_n|>m\}}|\nabla u_n|^{p(x)}\nu(x)h(u_n)dx,\end{aligned} \tag{3.28}$$

donc la suite $\left(h(u_n)|\nabla u_n|^{p(x)}\nu(x)\right)_n$ est équi-intégrable. Par (3.5), en déduire que la suite $\left(g_n(x,u_n,\nabla u_n)\right)_n$ est équi-intégrable. Or $g_n(x,u_n,\nabla u_n) \to g(x,u,\nabla u)$ p.p. dans Ω, alors d'aprés le Théorème de Vitali, nous déduisons que $g_n(x,u_n,\nabla u_n) \to g(x,u,\nabla u)$ fortement dans $L^1(\Omega)$.

Étape 4 : Passage à la limite

On sait que $(u_n)_n$ est borné dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu)$ et grâce à (3.2), nous concluons que $(a(x,u_n,\nabla u_n))_n$ est bornée dans $(L^{p'(x)}(\Omega,\nu^*))^N$. Comme $a(x,u_n,\nabla u_n) \to a(x,u,\nabla u)$ p.p. dans Ω, alors selon le Lemme 1.2, on obtient

$$a(x,u_n,\nabla u_n) \rightharpoonup a(x,u,\nabla u) \text{ faiblement dans } (L^{p'(x)}(\Omega,\nu^*))^N.$$

En faisant $n \to \infty$, on obtient pour tous $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\nu) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\langle Au, v\rangle + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)v\,dx = \int_\Omega fv\,dx.$$

3.2.3 Exemple

Nous présentons dans cette section un exemple de fonctions qui satisfont aux conditions du Théorème 3.1

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ et $p(\,.\,),\ q(\,.\,) \in C_+(\overline{\Omega})$.

Posons:

$$a(x,r,\zeta) = \nu(x)|\zeta|^{p(x)-1}sgn(\zeta_i) \text{ et } g(x,r,\zeta) = \varrho r|r|^{q(x)}\nu(x)|\zeta|^{p(x)}, \qquad \varrho > 0,$$

où $\nu(x) = d^\lambda(x)$ est une fonction poids dans Ω.

La fonction a satisfaisant les hypothèses du Théorème (3.2), (3.3) et (3.4), ainsi que la fonction g vérifiant seulement (3.5), avec $|s| \geq \varrho_1 = 1$ et $\varrho_2 = \rho > 0$, par conséquent les hypothèses du Théorème 3.1 sont satisfaites, pour $f \in L^1(\Omega)$, le problème suivant:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(d^\lambda(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-1} sgn\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) + \varrho u|u|^{q(x)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} d^\lambda(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)} = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega, d^\lambda(x)) \quad \text{ et } \quad \varrho u|u|^{q(x)} \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} d^\lambda(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)} \in L^1(\Omega), \end{cases}$$

admet au moins une solution $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega, d^\lambda(x))$.

Chapitre 4

Problème d'obstacle non linéaire anisotrope avec poids et à exposant variable

Dans ce chapitre, nous établissons un résultat d'existence de solutions entropiques au problème d'obstacle associé à l'équation du type :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} Au + g(x,u,\nabla u) = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, A est un opérateur du type Leray-Lions défini de $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$ vers son dual $W_0^{-1,\overrightarrow{p}'(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}^*(.))$ avec second membre f appartient à L^1. De plus le terme non linéaire $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant seulement la condition de croissance.

4.1 Introduction

Notre objectif est de prouver l'existence de solutions de problème d'obstacle non linéaire anisotropique avec poids à exposant variable suivants:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} D^i a_i(x,u,\nabla u) + g(x,u,\nabla u) \ = \ f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

dans la classe convexe $K_\psi := \{u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}(x)}(\Omega, \overrightarrow{w}(x)), u \geq \psi \ \text{ p.p dans } \Omega\}$, où $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction d'obstacle fixe, telle que

$$\psi^+ \in W_0^{1,\overrightarrow{p}(x)}(\Omega,\ \overrightarrow{w}(x)) \cap L^\infty(\Omega). \tag{4.1}$$

Soit ν une fonction poids vérifiant les conditions d'intégrabilité suivantes

$$\nu \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ et } \nu^{\frac{-1}{p(x)-1}} \in L^1_{loc}(\Omega). \tag{4.2}$$

$$\nu^{-s(x)} \in L^1_{loc}(\Omega) \quad \text{tel que } s(x) \in \left]\frac{N}{p(x)}, \infty\right[\cap \left[\frac{1}{p(x)-1}, \infty\right[. \tag{4.3}$$

Nous supposons que les fonctions $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions de Carathéodory pour tout $i = 1, 2, \ldots, N$, (mesurables par rapport à x de Ω pour chaque (s, ξ) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et continu par rapport à (s, ξ) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ presque pour chaque x de Ω) satisfaisant les hypothèses suivantes : Pour tout $i = 1, \ldots, N$

$$a_i(x, s, \xi)\, \xi_i \geq \alpha\, w_i \left|\xi_j\right|^{p_i(x)}, \tag{4.4}$$

$$\left|a_i(x, s, \xi)\right| \leq \beta w_i^{\frac{1}{p_i(x)}} \left(M_i(x) + |s|^{p_i(x)-1} + w_i^{\frac{1}{p_i'(x)}}\, |\xi_i|^{p_i(x)-1}\right), \tag{4.5}$$

pour tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ et $\xi' = (\xi_1', \ldots, \xi_N')$, nous avons

$$(a_i(x, s, \xi) - a_i(x, s, \xi'))(\xi_i - \xi_i') > 0 \quad \text{pour} \quad \xi_i \neq \xi_i', \tag{4.6}$$

presque pour tout $x \in \Omega$ et tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, où $M_i(\,.\,)$ est une fonction positive de $L^{p_i'(\,.\,)}(\Omega)$ et $\alpha, \beta > 0$.

Le terme non linéaire $g(x, s, \xi)$ est une fonction Carathéodory qui satisfait seulement la condition de croissance

$$|g(x, s, \xi)| \leq c(x) + b(|s|) \sum_{i=1}^{N} w_i\ |\xi_i|^{p_i(x)} \tag{4.7}$$

où $b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ est une fonction positive continue de $L^1(\mathbb{R})$ et $c(x) \in L^1(\Omega)$.

De nombreux modèles physiques tels que les applications de l'élasticité qui font intervenir des équations qui modélisent la forme d'une membrane élastique qui est poussée par un obstacle sur un côté affectant sa forme, entrent dans le cadre des équations de type $(\mathcal{P})$.

L'étude du problème d'obstacle associé à $(\mathcal{P})$ dans le cas des puissances variables a été faite dans [23] où ils obtiennent, pour une donnée $f \in L^1(\Omega)$, des solutions dans des espaces de Sobolev généralisés, sans supposer la condition de signe sur le terme la non-linéarité g via des méthodes de pénalisation. Également, dans le cas sans poids, Yazough et al. [135] ont prouvé l'existence de solutions entropiques d'un problème de type

$$\begin{cases} Au + H(x,u,\nabla u) - \operatorname{div}(\phi(u)) = f - \operatorname{div}(F) \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $Au = -div(a(x,u,\nabla u))$ est un opérateur de Leray-Lions défini sur $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. La fonction ϕ est supposée être continue sur ϕ avec des valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et le terme non linéaire $H(x,s,\xi)$ satisfait les conditions de croissance et de signe suivantes

$$|g(x,s,\xi)| \leq b(|s|)\left(c(x) + |\xi|^{p(x)}\right),$$
$$g(x,0,\xi) = 0.$$

Les données f et F appartiennent respectivement à $L^1(\Omega)$ et $(L^{p'(x)}(\Omega))^N$.

Nous avons choisi d'étudier le problème $(\mathcal{P})$ dans le cadre des solutions entropiques qui semblent particulièrement adaptées aux données mesures. Nous démontrons le résultat d'existence formulé pour notre modèle. La preuve consiste à considérer un problème approché, à obtenir des estimations a priori, et à passer à la limite dans ce problème.

4.2 Énoncé du résultat

Cette section est consacrée à l'existence de la solution entropique du problème d'obstacle elliptique $(\mathcal{P})$. Pour cela, on introduit le problème approximatif qui nous permet de contourner les difficultés de régularité.

Une solution entropique du problème d'obstacle elliptique $(\mathcal{P})$ est définie de la façon suivante.

Définition 4.1. *Une fonction mesurable u est dite solution entropique du problème d'obstacle $(\mathcal{P})$, si $u \in \mathcal{T}_0^{1,\vec{p}(.)}(\Omega, \vec{w}(.))$ tel que $u \geq \psi$ p.p. dans Ω et*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x,u,\nabla u) D^i T_k(u-\varphi)dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u) T_k(u-\varphi)dx \leq \int_\Omega f T_k(u-\varphi)dx, \quad \forall \varphi \in K_\psi \cap L^\infty(\Omega), \tag{4.8}$$

Théorème 4.1. *Supposons que (4.1) − (4.7) et (1.17) sont vérifiées et $f \in L^1(\Omega)$, alors le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution entropique.*

4.3 Preuve d'existence de la solution entropique

La preuve se fera en plusieurs étapes :

Étape 1 : problème approximatif

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^∞ telles que $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$ avec $|f_n| \leq |f|$. Nous considérons la suite de problèmes approximatifs suivant :

$$(\mathcal{P}_n) \quad \begin{cases} u_n \in K_\psi, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_n(u_n), \nabla u_n)(D^i u_n - D^i v)dx + \int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n)(u_n - v)dx \\ \qquad \leq \displaystyle\int_\Omega f_n(u_n - v)dx \qquad \forall v \in K_\psi, \end{cases}$$

où

$$g_n(x, s, \xi) = \frac{g(x, s, \xi)}{1 + \frac{1}{n}|g(x, s, \xi)|}.$$

Notons que $g_n(x, s, \xi)$ satisfait les conditions suivantes,

$$|g_n(x, s, \xi)| \leq |g(x, s, \xi)| \quad \text{et} \quad |g_n(x, s, \xi)| \leq n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $V = K_\psi$ et définissons les opérateurs A_n et G_n de V à valeurs dans V^* par :

$$\langle A_n\, u, v\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_n(u_n), \nabla u_n) D^i v dx \quad \text{et} \quad \langle G_n u, v\rangle = \int_\Omega g_n(x, u, \nabla u) v dx.$$

Lemme 4.1. *L'opérateur G_n est borné.*

Démonstration. En utilisant l'inégalité Hölder, nous avons pour tout $u, v \in V$,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega g_n(x, u, \nabla u) v dx \right| &\leq \int_\Omega |g_n(x, u, \nabla u)| w_i^{\frac{1}{p_i(x)}}(x) w_i^{\frac{-1}{p_i(x)}}(x) v dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{p_{i-}} + \frac{1}{p'_{i-}} \right) \| |g_n(x, u, \nabla u)| w_i(x)^{\frac{-1}{p_i(x)}} \|_{p'_i(x)} \| v w_i(x)^{\frac{1}{p_i(x)}} \|_{p_i(x)}, \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} C_i \left(\int_\Omega |g_n(x, u, \nabla u)|^{p'_i(x)} w_i^*(x) dx \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \|v\|_{1, \overrightarrow{p}(.), \overrightarrow{w}(.)} \\ &\leq C\, n^{\frac{p'_+}{\theta_1}} \left(\int_\Omega w_i^*(x) dx \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \|v\|_{1, \overrightarrow{p}(.), \overrightarrow{w}(.)} \leq C' \|v\|_{1, \overrightarrow{p}(.), \overrightarrow{w}(.)} \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\text{où} \qquad \theta_1 = \begin{cases} (\frac{p_i}{p_{s_i}})_- & \text{si} \quad \left\| |v(x)|^{p_{s_i}(x)} v^{\frac{p_{s_i}(x)}{p_i(x)}} \right\|_{\frac{p_i(x)}{p_{s_i}(x)}} \geq 1, \\ (\frac{p_i}{p_{s_i}})^+ & \text{si} \quad \left\| |v(x)|^{p_{s_i}(x)} v^{\frac{p_{s_i}(x)}{p_i(x)}} \right\|_{\frac{p_i(x)}{p_{s_i}(x)}} < 1. \end{cases}$$

□

Lemme 4.2. *[8] Supposons que (4.4)-(4.6) sont satisfaites, soient $(u_n)_n$ une suite $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$ et $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$, si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$, et*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} (a_i(x, u_n, \nabla u_n) - a_i(x, u_n, \nabla u))(D^i u_n - D^i u)dx \to 0,$$

alors $u_n \longrightarrow u$ fortement dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$.

Lemme 4.3. *L'opérateur $S_n = A_n + G_n : W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.)) \longrightarrow W_0^{-1,\overrightarrow{p'}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w^*}(.))$ est pseudo-monotone et coercif dans le sens suivant : il existe $v_0 \in K_\psi$ tel que*

$$\frac{\langle S_n v, v - v_0 \rangle}{\|v\|_{1,\overrightarrow{p}(\cdot),\overrightarrow{w}(\cdot)}} \longrightarrow +\infty \qquad si \quad \|v\|_{1,\overrightarrow{p}(\cdot),\overrightarrow{w}(\cdot)} \to +\infty \qquad pour \quad v \in K_\psi.$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Hölder et la condition de croissance (4.5), nous pouvons prouver que l'opérateur A_n est borné, grâce au Lemme 4.1 nous concluons que S_n est aussi borné. Nous montrons que S_n est un opérateur pseudo-monotone. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$, telle que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.)), S_n u_k \rightharpoonup \chi_n \quad \text{dans} \quad W_0^{-1,\overrightarrow{p'}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w^*}(.)), \\ \limsup\limits_{k\to\infty} \langle S_n u_k, u_k \rangle \leq \langle \chi_n, u \rangle. \end{cases} \tag{4.10}$$

Nous prouvons que

$$\chi_n = S_n u \quad \text{et} \quad \langle S_n u_k, u_k \rangle \to \langle \chi_n, u \rangle \quad \text{lorsque} \quad k \to +\infty.$$

Comme $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.)) \hookrightarrow L^{\underline{p}}(\Omega)$, alors il existe une sous-suite notée encore $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $u_k \rightharpoonup u$ dans $L^{\underline{p}}(\Omega)$.

Or $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$, alors par la condition de croissance $\big(a_i(x, T_n(u_k), \nabla u_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{p_i'(.)}(\Omega, w_i^*(.))$, par suite, il existe une fonction $\phi_{i,n} \in$

$L^{p'_i(.)}(\Omega, w_i^*(.))$ telle que

$$a_i(x,\, T_n(u_k),\, \nabla u_k) \longrightarrow \varphi_{i,n} \quad \text{dans} \quad L^{p'_i(.)}(\Omega, w_i^*(.)) \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty. \tag{4.11}$$

De la même manière, nous avons $\big(g_n(x,u,\nabla u)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est borné dans $L^{\underline{p}'}(\Omega)$, alors il existe une fonction $\varphi_n \in L^{\underline{p}'}(\Omega)$ telle que

$$g_n(x,u,\nabla u) \longrightarrow \varphi_n \quad \text{dans} \quad L^{\underline{p}'}(\Omega) \qquad \text{quand} \quad k \to \infty. \tag{4.12}$$

Pour tout $v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.))$, nous avons

$$\begin{aligned}\langle \chi_n, v\rangle &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_n u_k, \nabla u_k) D^i v dx + \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_n(x, u_k, \nabla u_k) v dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi_{i,n} D^i u dx + \int_\Omega \varphi_n v dx. \end{aligned} \tag{4.13}$$

À partir des relations (4.10) et (4.13), on obtient

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \langle S_n u_k, u_k\rangle &= \limsup_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_n u_k, \nabla u_k) D^i u_k dx + \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_n(x, u_k, \nabla u_k) u_k dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi_{i,n} D^i\, u\, dx + \int_\Omega \varphi_n v dx. \end{aligned} \tag{4.14}$$

De (4.12), on obtient

$$\int_\Omega g_n(x, u_k, \nabla u_k) u_k\, dx \longrightarrow \int_\Omega \varphi_n u dx. \tag{4.15}$$

Par conséquent,

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_n(u_k), \nabla u_k) D^i\, u_k dx \leq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi_{i,n} D^i\, u\, dx. \tag{4.16}$$

D'autre part, de (4.6) nous avons $\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \big[a_i(x, T_n(u_k), \nabla u_k) - a_i(x, T_n(u_k), \nabla u)\big](D^i u_k - D^i u) dx \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_n(u_k), \nabla u_k)\, D^i\, u_k\, dx \geq{}& \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_n(u_k), \nabla u_k) D^i u dx \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_n(u_k), \nabla u)(D^i u_k - D^i u) dx. \end{aligned} \tag{4.17}$$

En appliquant le Lemme 1.9, nous avons $T_n(u_k) \to T(u)$ dans $L^{p_i(.)}(\Omega, w_i)$, alors

$$a_i(x, T_n(u_k), \nabla u) \to a_i(x, T_n(u), \nabla u) \quad \text{dans } L^{p_i'(.)}(\Omega, w_i).$$

Au moyen de (4.11) − (4.12), on obtient

$$\liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} a_i(x, T_n(u_k), \nabla u_k) D^i u_k dx \geq \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \phi_{i,n} D^i u dx. \tag{4.18}$$

Grâce à (4.16) et (4.18), on a

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} a_i(x, T_n(u_k), \nabla u_k) D^i u_k \, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \phi_{i,n} D^i u \, dx. \tag{4.19}$$

D'après (4.13), (4.15) et (4.19), on obtient

$$\langle S_n \, u_k, u_k \rangle \longrightarrow \langle \chi_n, u \rangle \qquad \text{quand} \qquad k \to \infty. \tag{4.20}$$

De (4.19) nous montrerons que

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left[a_i(x, T_n(u_k), \nabla u_k) - a_i(x, T_n(u_k).\nabla u)\right] (D^i u_k - D^i u) dx = 0,$$

D'après le Lemme 4.2, on obtient

$$u_k \longrightarrow u \qquad \text{dans} \quad W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.)) \quad \text{et} \quad D^i u_k \longrightarrow D^i u \qquad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

Par suite,

$$a_i(x, T_n(u_k), \nabla u_k) \longrightarrow a_i(x, T_n(u), \nabla u) \text{ dans } L^{p_i'(.)}(\Omega, w_i^*(.)) \text{ pour } i = 1, \ldots, N \quad \text{et}$$

$$g_n(x, u_k, \nabla u_k) \to g_n(x, u, \nabla u) \quad \text{dans} \quad L^{p_i'(.)}(\Omega, w_i^*()).$$

Enfin, nous pouvons conclure que $\chi_n = S_n u$.

Il reste à montrer que S_n est coercif, soit $v_0 \in K_\psi$, pour tout $v \in K_\psi$ nous avons

$$\begin{aligned}
\langle A_n v, v_0 \rangle &= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} a_i(x, T_n(v), \nabla v) D^i v_0 dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |a_i(x, T_n(v), \nabla v)| w_i^{\frac{1}{p_i(x)}}(x) w_i^{\frac{-1}{p_i(x)}}(x) D^i v_0 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_\Omega \big(w_i^{\frac{-1}{p_i(x)}}(x)|a_i(x,T_n(v),\nabla v)|\big)^{p_i'(x)}dx\Big)^{\frac{1}{(p_i')^-}}\|w_i^{\frac{1}{p_i(x)}}(x)D^iv_0\|_{p_i(\cdot)}\\
&\leq 2\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_\Omega w_i^*(x)\big(|a_i(x,T_n(v),\nabla v)|\big)^{p_i'(x)}dx\Big)^{\frac{1}{(p_i')^-}}\|v_0\|_{1,\overrightarrow{p}(\cdot),\overrightarrow{w}(\cdot)}\\
&\leq C_1\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_\Omega M_i^{p_i'(x)}(x)+n^{p_i(x)}+w_i(x)|D^iv|^{p_i(x)}dx+1\Big)^{\frac{1}{(p_i')^-}}\|v_0\|_{1,\overrightarrow{p}(\cdot),\overrightarrow{w}(\cdot)}
\end{aligned}$$

et

$$\langle A_nv,v\rangle=\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega a_i(x,T_n(v),\nabla v)\,D^iv\,dx\geq\alpha\sum_{i=0}^{N}\int_\Omega w_i(x)|D^iv|^{p_i(x)}\,dx.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\frac{A_nv,v-v_0}{\|v\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}}\geq\frac{\alpha}{\|v\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}}\sum_{i=0}^{N}\int_\Omega w_i(x)|D^iv|^{p_i(x)}dx-\frac{C_1\|v_0\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}}{\|v\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}}\\
&\times\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_\Omega M_i^{p_i'(x)}(x)+n^{p_i(x)}+w_i(x)|D^iv|^{p_i(x)}dx+1\Big)^{\frac{1}{(p_i')^-}}\to\infty,\ \text{ quand } \|v\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}\to\infty.
\end{aligned}\tag{4.21}$$

D'autre part, grâce à (4.9), nous avons

$$\begin{aligned}
\langle G_nv,v-v_0\rangle&=\int_\Omega g_n(x,v,\nabla v)v,dx-\int_\Omega g_n(x,v,\nabla v)v_0\,dx\\
&\geq -C'\big(\|v\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}+\|v_0\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}\big).
\end{aligned}\tag{4.22}$$

Nous concluons que

$$\frac{\langle S_nv,v-v_0\rangle}{\|v\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}}=\frac{\langle A_nv,v-v_0\rangle}{\|v\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}}+\frac{\langle G_nv,v,-v_0\rangle}{\|v\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}}\to\infty\ \text{ lorsque } \|v\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}\to\infty.\qquad\square$$

L'opérateur S_n est pseudo-monotone et coercif. D'après [105, Théorème 8.2], le problème approximatif $(\mathcal{P}_n)$ admet au moins une solution $u_n\in W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$.

Étape 2 : Estimations a priori

Soit $v=u_n-\eta\,\exp(G(|u_n|))T_k(u)$ ou $G(s)=\displaystyle\int_0^s\frac{b(t)}{\alpha}dt$ et $\eta\geq 0$, on obtient $v\in W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$, et pour η assez petit nous déduisons que $v\geq\psi$. Ainsi, v est une fonction test admissible dans $(\mathcal{P}_n)$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega a_i(x,T_n(u_n),\nabla u_n)D^i(\exp(G(|u_n|))T_k(u_n))dx+\int_\Omega g_n(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(|u_n|))T_k(u_n)dx\\
\leq\int_\Omega f_n\exp(G(|u_n|))T_k(u_n)dx,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,T_n(u_n),\nabla u_n)D^i\, u_n\frac{b(|u_n|)}{\alpha}\exp(G(|u_n|))|T_k(u_n)|dx\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))D^iT_k(u_n)\exp(G(|u_n|))dx\\
&\le \int_{\Omega}|g_n(x,u_n,\nabla u_n)|\exp(G(|u_n|))|T_k(u_n)|\,dx+\int_{\Omega} f_n\exp(G(|u_n|))T_k(u_n)dx\\
&\le \int_{\Omega}(|f_n|+|c(x)|)\exp(G(|u_n|))|T_k(u_n)|dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} b(|u_n|)|D^iu_n|^{p_i(x)}\exp(G(|u_n|))|T_k(u_n)|dx.
\end{aligned}$$

D'après (4.4), nous avons

$$\alpha\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\,w_i(x)D^iT_k(u_n)|^{p_i(x)}dx\le(\|f\|_{L^1(\Omega)}+\|c(x)\|_{L^1(\Omega)})\exp\left(\frac{\|b(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\alpha}\right)k\le C_1k,$$

par conséquent

$$\sum_{i=0}^{N}\int_{\Omega} w_i(x)|D^iT_k(u_n)|^{p_i(x)}\,dx\le C_2k\quad\text{pour}\quad k\,\ge\,1,$$

où C_2 est une constante qui ne dépend pas de n. Par suite,

$$\|T_k(u_n)\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}=\sum_{i=0}^{N}\|D^iT_k(u_n)\|_{p_i(.),w_i(.)}\;\le\;C_3\,k^{\frac{1}{\underline{p}}}. \tag{4.23}$$

Maintenant, nous allons montrer que

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\{j\le|u_n|<j+1\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)D^iu_ndx=0. \tag{4.24}$$

En effet, il faut considérer la fonction $v=u_n-\eta\exp(G(|u_n|))T_1(u_n-T_j(u_n))$.
Pour η assez petit, nous pouvons déduire que $v\ge\psi$ et comme $v\in W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$, alors v est une fonction test admissible dans $(\mathcal{P}_n)$, ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,T_n(u_n),\nabla u_n)D^iT_1(u_n-T_j(u_n))\exp(G(|u_n|))dx\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,T_n(u_n),\nabla u_n)D^iu_n\frac{b(|u_n|)}{\alpha}\exp(G(|u_n|))|T_1(u_n-T_j(u_n))|dx\\
&\qquad\quad+\int_{\Omega} g_n(x,u_n,\nabla u_n)\exp(G(|u_n|))T_1(u_n-T_j(u_n))dx\\
&\qquad\qquad\le\int_{\Omega} f_n\exp(G(|u_n|))T_1(u_n-T_j(u_n))dx.
\end{aligned}$$

En utilisant la condition de croissance (4.7), nous déduisons que

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{\{j\leq|u_n|<j+1\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)D^i u_n \exp(G(|u_n|))dx$$
$$\leq \exp\left(\frac{\|b(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\alpha}\right)\int_{\Omega}(|c(x)|+|f_n|)|T_1(u_n-T_j(u_n))|dx.$$

Puisque $T_1(u_n-T_j(u_n))\longrightarrow 0$ faible $\star$ dans $L^\infty(\Omega)$ lorsque j tends vers l'infini, alors le côté droit tend vers zéro lorsque j tend vers ∞. Ensuite, nous avons (4.24).

Étape 3 : La convergence Faible des troncatures

Premièrement, nous prouvons que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy en mesure dans Ω.

Grâce à (4.23), le Lemme 1.8 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
k\,\text{mes}\{|u_n|>k\} &= \int_{\{|u_n|>k\}}|T_k(u_n)|dx \leq \int_{\Omega}|T_k(u_n)|dx\\
&\leq \left(\frac{1}{p_0^-}+\frac{1}{(p_0')^-}\right)\|1\|_{p_0'(\cdot)}\|T_k(u_n)\|_{p_0(\cdot)}\\
&\leq 2\big(\text{mes}(\Omega)+1\big)^{\frac{1}{(p_0')^-}}\|T_k(u_n)\|_{1,\overrightarrow{p}(.),\overrightarrow{w}(.)}\\
&\leq C_4 k^{\frac{1}{\underline{p}}},
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\text{mes}\{|u_n|>k\}\leq C_4\frac{1}{k^{1-\frac{1}{\underline{p}}}}\longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad k\to\infty. \tag{4.25}$$

Pour tout $\lambda>0$, nous avons

$$\text{mes}\{|u_n-u_m|>\lambda\}\leq \text{mes}\{|u_n|>k\}+\text{mes}\{|u_m|>k\}+\text{mes}\{|T_k(u_n)-T_k(u_m)|>\lambda\}. \tag{4.26}$$

De (4.25) et pour tout $\varepsilon>0$, il existe $k_0>0$ tel que

$$\text{mes}\{|u_n|>k\}\leq\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \text{mes}\{|u_m|>k\}\leq\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } k\geq k_0. \tag{4.27}$$

D'autre part, comme la suite $(T_k(u_n))_n$ est bornée dans $W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$, alors il existe une sous-suite notée encore $(T_k(u_n))_n$ telle que

$$T_k(u_n)\rightharpoonup \mu_k \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.)) \quad \text{lorsque} \quad n\longrightarrow\infty,$$

en utilisant l'injection compact, nous déduisons que

$$T_k(u_n) \to \mu_k \quad \text{dans} \quad L^{\underline{p}}(\Omega) \ \text{ et p.p. dans } \ \Omega,$$

alors, on peut supposer que $(T_k(u_n))_n$ est une suite de Cauchy en mesure dans Ω. Ainsi, pour tout $k > 0$ et $\lambda, \epsilon > 0$, il existe $n_0 = n_0(k, \lambda, \varepsilon)$ tel que

$$\text{mes}\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \lambda\} \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout} \quad n, m \geq n_0(k, \lambda, \varepsilon). \tag{4.28}$$

En utilisant (4.27) et (4.28), nous concluons que : pour tout $\lambda, \varepsilon > 0$, il existe $n_0 = n_0(\lambda, \varepsilon)$ tel que

$$\text{mes}\{|u_n - u_m| > \lambda\} \leq \varepsilon \quad \text{pour chaque} \quad n, m \geq n_0(\lambda, \varepsilon),$$

ce qui implique que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy en mesure, alors on a la convergence presque partout pour une sous-suite vers une fonction mesurable quelconque u. Par conséquent, on obtient

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega, \overrightarrow{w}(.)), \tag{4.29}$$

en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \quad \text{dans} \quad L^{p_0(\cdot)}(\Omega). \tag{4.30}$$

Étape 4 : Convergence du gradient

Soit $j \geq k > 0$ et $h_j(u_n) = 1 - |T_1(u_n - T_j(u_n))|$, on considère

$$v = u_n - \eta \, \exp(G(|u_n|))(T_k(u_n) - T_k(u))h_j(u_n).$$

Choisissons η assez petit tel que $v \in K_\psi$. Puisque $h_j(u_n) = 1$ sur $\{|u_n| \leq k\}$ et $T_k(u_n) - T_k(u)$ ont le même signe que u_n sur l'ensemble $\{|u_n| > k\}$. Ensuite, en prenant v comme fonction test dans $(\mathcal{P}_n)$, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_n(u_n), \nabla u_n) D^i(\exp(G(|u_n|))(T_k(u_n) - T_k(u))h_j(u_n))dx \\ + \int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n) \exp(G(|u_n|))(T_k(u_n) - T_k(u))h_j(u_n)dx \\ \leq \int_\Omega f_n \exp(G(|u_n|))(T_k(u_n) - T_k(u))h_j(u_n)dx.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Selon (4.4) et (4.7), on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\int_{\{|u_n|\leq k\}} a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))(D^iT_k(u_n)-D^iT_k(u))\exp(G(|u_n|))dx\\
&\quad\leq \int_{\Omega}(|c(x)|+|f_n|)|T_k(u_n)-T_k(u)|\exp(G(|u_n|))dx\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{k<|u_n|\leq j+1\}} |a_i(x,T_{j+1}(u_n),\nabla T_{j+1}(u_n))|\,|D^jT_k(u)|\exp(G(|u_n|))dx \qquad (4.32)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{j<|u_n|\leq j+1\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)D^iu_n|T_k(u_n)-T_k(u)|\exp(G(|u_n|))dx.
\end{aligned}$$

Puisque $T_k(u_n)\to T_k(u)$ faible* dans $L^\infty(\Omega)$, alors le premier terme à droite de (4.32) tend vers 0. Puisque $\left(|a_i(x,T_{j+1}(u_n),\nabla T_{j+1}(u_n))|\right)_n$ est borné dans $L^{p_i'(\cdot)}(\Omega,w_i^*(.))$, alors il existe $\zeta_i\in L^{p_i'(\cdot)}(\Omega,w_i^*(.))$ tel que

$$|a_i(x,T_{j+1}(u_n),\,\nabla T_{j+1}(u_n))|\longrightarrow\zeta_i \quad \text{dans} \quad L^{p_i'(\cdot)}(\Omega,w_i^*(.)).$$

Par suite, le deuxième terme à droite de (4.32), devient

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\int_{\{k<|u_n|\leq j+1\}} |a_i(x,T_{j+1}(u_n),\nabla T_{j+1}(u_n))|\,|D^iT_k(u)|\exp(G(|u_n|))dx\\
&\leq \exp\left(\frac{\|b(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\alpha}\right)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{\{k<|u_n|\leq j+1\}} |a_i(x,T_{j+1}(u_n),\nabla T_{j+1}(u_n))|\,|D^iT_k(u)|\,dx \qquad (4.33)\\
&\longrightarrow \exp\left(\frac{\|b(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\alpha}\right)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{k<|u|\leq j+1\}} \zeta_i\,|D^iT_k(u)|\,dx=0 \quad \text{lorsque} \quad n\longrightarrow\infty.
\end{aligned}$$

D'autre part, selon (4.24), nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\int_{\{j\leq|u_n|\leq j+1\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)D^iu_n|T_k(u_n)-T_k(u)|\exp(G(|u_n|))dx\\
&\qquad\leq 2k\exp\left(\frac{\|b(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\alpha}\right)\sum_{i=1}^{N}\int_{\{j\leq|u_n|\leq j+1\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)\,D^iu_ndx\\
&\qquad\longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad j\longrightarrow\infty. \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

Notons par $\varepsilon_1(n),\ \varepsilon_2(n),\ldots$ les différentes suites de nombres réels qui convergent vers zéro lorsque n tend vers l'infini (respectivement pour $\varepsilon_i(j,\,n)$).

En utilisant (4.32) $-$ (4.34), on obtient

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{\{|u_n|\leq k\}} a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))(D^iT_k(u_n)-D^iT_k(u))\exp(G(|u_n|))\,dx \leq \varepsilon_1(j,n), \tag{4.35}$$

alors,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}&\left[a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\right](D^iT_k(u_n)-D^iT_k(u))\exp(G(|u_n|))dx\\ &\leq -\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))(D^iT_k(u_n)-D^iT_k(u))\exp(G(|u_n|))dx\\ &\quad-\sum_{i=1}^{N}\int_{\{|\mathrm{u}_n|>k\}}a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))D^iT_k(u)\exp(G(|u_n|))dx+\varepsilon_2(j,n).\end{aligned}\tag{4.36}$$

En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons $T_k(u_n) \longrightarrow T_k(u)$ dans $L^{p_0}(\Omega)$ et comme $D^iT_k(u_n) \longrightarrow D^iT_k(u)$ dans $L^{p_i(\cdot)}(\Omega,w_i(.))$, alors, les termes à droite de (4.36) tendent vers 0 lorsque n tends vers l'infini. Donc, nous déduisons, lorsque $n\to\infty$, que

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}(a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a_i(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u)))(D^jT_k(u_n)-D^jT_k(u))dx \longrightarrow 0. \tag{4.37}$$

En utilisant le Lemme 4.2, nous concluons que

$$T_k(u_n)\longrightarrow T_k(u)\ \text{ dans } W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))\ \text{ et }\quad \nabla u_n\longrightarrow \nabla u\quad \text{p.p. dans }\ \Omega. \tag{4.38}$$

Étape 5 : L'équi-intégrabilité de $g_n(x,u_n,\nabla u_n)$

Dans cette étape, nous montrerons que

$$g_n(x,u_n,\nabla u_n)\longrightarrow g(x,u,\nabla u)\quad \text{fortement dans}\quad L^1(\Omega). \tag{4.39}$$

Soit $v=u_n-\eta\exp(2G(|u_n|))T_1(u_n-T_h(u_n))$, on obtient $v\in W_0^{1,\overrightarrow{p}(.)}(\Omega,\overrightarrow{w}(.))$. En choisissant η assez petit pour que $v\geq\psi$, alors v est une fonction test admissible dans $(\mathcal{P}_n)$, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}&a_i(x,T_n(u_n),\nabla u_n)D^i(\exp(2G(|u_n|))T_1(u_n-T_h(u_n))dx\\ &+\int_{\Omega}g_n(x,u_n,\nabla u_n)\exp(2G(|u_n|))T_1(u_n-T_h(u_n))dx\\ &\qquad\leq\int_{\Omega}f_n\exp(2G(|u_n|))T_1(u_n-T_h(u_n))dx.\end{aligned}$$

Grâce à (4.4) et (4.7), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,T_n(u_n),\nabla u_n)D^i u_n \frac{b(|u_n|)}{\alpha}\exp(2G(|u_n|))|T_1(u_n-T_h(u_n))|\,dx$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{h<|u_n|\leq h+1\}} a_i(x,u_n,\nabla u_n)D^i u_n \exp(2G(|u_n|))\,dx$$
$$\leq \exp\left(2\frac{\|b(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\alpha}\right)\int_{\Omega}(|c(x)|+|f_n|)|T_1(u_n-T_h(u_n))|\,dx,$$

ce qui implique que

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{h+1\leq|u_n|\}} b(|u_n|)|D^i u_n|^{p_i(x)}w_i(x)dx \leq \exp\left(2\frac{\|b(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\alpha}\right)\int_{\{h\leq|u_n|\}}(|c(x)|+|f|)dx,$$

par suite, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $h(\varepsilon)>0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{h+1\leq|u_n|\}} b(|u_n|)|D^i u_n|^{p_i(x)}\,w_i(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall h\geq h(\varepsilon). \tag{4.40}$$

D'autre part, pour chaque sous-ensemble mesurable $E\subset\Omega$, nous avons

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{E} b(|u_n|)\,|D^i\,u_n|^{p_i(x)}\,w_i(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{N}\int_{E} b(|T_{h+1}(u_n)|)|D^i\,T_{h+1}(u_n)|^{p_i(x)}\,w_i(x)\,dx$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\{|u_n|\geq h+1\}} b(|u_n|)|D^i u_n|^{p_i(x)}w_i(x)dx. \tag{4.41}$$

Selon (4.38), il existe $\lambda(\varepsilon)>0$ tel que pour tout $E\subset\Omega$ avec $\text{mes}\,(E)\leq\lambda(\varepsilon)$, nous avons

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{E} b(|T_{h+1}(u_n)|)|D^i T_{h+1}(u_n)|^{p_i(x)}\,w_i(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.42}$$

En utilisant (4.40), (4.41) et (4.42), pour tout $E\subset\Omega$ tel que $\text{mes}\,(E)\leq\lambda(\varepsilon)$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{E} b(|u_n|)\,|D^i u_n|^{p_i(x)}\,w_i(x)\,dx \leq \varepsilon. \tag{4.43}$$

Ainsi, de (4.7) la suite $(g_n(x,u_n,\nabla u_n))_n$ est équi-intégrabile. Grâce à (4.38), nous avons

$$g_n(x,u_n,\nabla u_n)\to g(x,u,\nabla u) \qquad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Finalement, en appliquant le théorème de Vitali, nous prouvons (4.39).

Étape 6 : Passage à la limite

Soit $\varphi \in K_\psi \cap L^\infty(\Omega)$ et $M = k + \|\varphi\|_\infty$, et en choisissant $v = u_n - \eta T_k(u_n - \varphi)$ comme fonction test dans $(\mathcal{P}_n)$, on obtient

$$\begin{cases} u_n \in K_\psi, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_n(u_n), \nabla u_n)\, D^i T_k(u_n - \varphi)dx + \int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n) T_k(u_n - v)dx \\ \qquad \displaystyle\leq \int_\Omega f_n\, T_k(u_n - v)dx. \end{cases}$$

Si $|u_n| > M$ alors $|u_n - \varphi| \geq |u_n| - \|\varphi\|_\infty > k$, alors $\{|u_n - \varphi| \leq k\} \subseteq \{|u_n| \leq M\}$, d'où

$$\begin{aligned} \int_\Omega a_i(x, T_n(u_n), \nabla u_n) D^i T_k(u_n - \varphi)dx &= \int_\Omega a_i(x, T_M(u_n), \nabla T_M(u_n))(D^i T_M(u_n) - D^i\varphi)\chi_{\{|u_n - \varphi| \leq k\}}dx \\ &= \int_\Omega (a_i(x, T_M(u_n), \nabla T_M(u_n)) - a_i(x, T_M(u_n), \nabla\varphi))(D^i T_M(u_n) - D^i\varphi)\chi_{\{|u_n-\varphi|\leq k\}}dx \\ &\quad + \int_\Omega a_i(x, T_M(u_n), \nabla\varphi)(D^i T_M(u_n) - D^i\varphi)\chi_{\{|u_n-\varphi|\leq k\}}dx. \end{aligned} \tag{4.44}$$

En utilisant le Lemme de Fatou, nous obtenons

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega a_i(x, T_n(u_n), \nabla u_n) D^i T_k(u_n - \varphi)dx &\geq \int_\Omega \big(a_i(x, T_M(u), \nabla T_M(u)) - a_i(x, T_M(u), \nabla\varphi)\big) \\ \times (D^i T_M(u) - D^i\varphi)\chi_{\{|u-\varphi|\leq k\}}dx &+ \lim_{n\to\infty} \int_\Omega a_i(x, T_M(u_n), \nabla\varphi)(D^i T_M(u_n) - D^i\varphi)\chi_{\{|u_n-\varphi|\leq k\}}dx. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Le deuxième terme à droite de (4.45) est égal à $\int_\Omega a_i(x, T_M(u), \nabla\varphi)(D^i T_M(u) - D^i\varphi)\chi_{\{|u-\varphi|\leq k\}}dx$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_n(u_n), \nabla u_n) D^i T_k(u_n - \varphi)dx &\geq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, T_M(u), \nabla T_M(u)) \\ \times (D^i T_M(u) - D^i\varphi)\chi_{\{|u-\varphi|\leq k\}}dx &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u, \nabla u) D^i T_k(u - \varphi)dx. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons $T_k(u_n - \varphi) \longrightarrow T_k(u - \varphi)$ faible * dans $L^\infty(\Omega)$ et utilisons (4.39), on obtient
$\int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n) T_k(u_n - \varphi)dx \to \int_\Omega g(x, u, \nabla u) T_k(u - \varphi)dx$, et $\int_\Omega f_n T_k(u_n - \varphi)dx \to \int_\Omega f T_k(u - \varphi)dx$.

Finalement, la preuve du Théorème 4.1 est complète.

Deuxième partie

Degré topologique pour l’étude de quelques problèmes elliptiques ou paraboliques de type Dirichlet ou Neumann

Chapitre 5

Existence de solutions faibles d'un problème p-élliptique non linéaires via le degré topologique

Dans ce chapitre, nous établissons un résultat d'existence de solution faible via le degré topologique de Berkovits pour le problème p-elliptique non linéaire suivant:

$$- div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda|u|^{q-2}u + f(x,u,\nabla u), \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \tag{5.1}$$

associé à la condition de Dirichlet, où f est une fonction Carathéodory satisfaisant uniquement la condition de croissance. L'étude des problèmes de type (5.1) est motivée par l'apparition de ces dérniers dans nombreuses applications à savoir les modèles de mécanique des fluides (voir par exemple [20, 26, 59, 82]), de diffusion non linéaire [119] et d'élasticité non linéaire [19], d'ailleurs, pour rester dans le cas élastique l'hypothèse $p > 2$ est supposée, sinon, pour $1 < p < 2$, il s'agirait des modèles élastiques-plastiques.

5.1 Introduction

Soient $p,\ q$ deux réels tels que $2 < q < p < \infty$, et $w = \{w_i(x), 0 \leq i \leq N\}$ un vecteur de fonctions poids sur Ω. Nous prouvons l'existence de solutions faibles au problème p-elliptique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -div(a(x,\nabla u)) = \lambda|u|^{q-2}u + f(x,u,\nabla u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

où $a(x, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ une fonction de type Carathéodory vérifiant la condition suivante: pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et presque partout $x \in \Omega$:

$$a(x,\xi) \cdot \xi \geq \gamma \sum_{i=1}^{N} w_i |\xi_i|^p, \tag{5.3}$$

tel que γ est une constante positive, et λ est un paramètre réel. La fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory satisfait uniquement la condition de croissance, presque partout $x \in \Omega$ et tous $(\eta, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$,

$$|f(x,\mu,\xi)| \leq \beta(M(x) + \sigma^{\frac{1}{p'}} |\mu|^{\frac{q}{p'}} + \sum_{j=1}^{N} w_j^{\frac{1}{p'}} |\xi_j|^{p-1}), \tag{5.4}$$

où β est une constante positive, $M \in L^{p'}(\Omega)$ tel que $M(x) \geq 0$ et q est un nombre réel vérifiant $2 < q < p$.

Dans [67], Dong et Xu montrent à l'aide de la théorie du degré topologique et de la théorie du point critique l'existence de solutions faibles pour le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{dans } \ \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset R^n (n \geqslant 1)$ est un ouvert borné de frontière régulière $\partial\Omega, p \in (1, \infty)$ et $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$ est le $p-$Laplacien. Le terme de non-linéarité f est une fonction continue sur $\Omega \times \mathbb{R}$ et a une croissance sous-critique, c'est-à-dire, il existe $c_1 > 0$ et $r \in (1, p^*)$ tels que

$$|f(x,t)| \leqslant c_1 \left(|t|^{r-1} + 1\right), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

p^* est appelé l'exposant critique de Sobolev et il est défini par

$$p^* := \begin{cases} np/(n-p) & \text{si } p < n, \\ \infty \quad \text{si} \quad p > n. \end{cases}$$

Parallèlement dans [109], Liu a établi l'existence de solutions faibles du problème de Dirichlet lié à l'équation $\triangle_p u = f(x,u)$ via la théorie Morse, où $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait la condition de croissance

$$|f(x,u)| \leq C\left(1 + |u|^{q-1}\right),$$

pour tout $u \in \mathbb{R}, x \in \Omega$, et pour une constante positive C, où $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$ si $N \geq p+1$, et $1 \leq q < \infty$ si $1 \leq N < p$.

5.2 Notion de solution et propriétés de l'opérateur p-Laplace

Dans cette section, nous donnons la définition d'une solution faible pour le problème (5.2), et nous discutons quelque propriétés de l'opérateur p-Laplace $\quad \triangle_p u := div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$.

Définition 5.1. *Un point $u \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$ est dit solution faible du problème (5.2), si*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega (\lambda |u|^{q-2}u + f(x, u, \nabla u))v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega, w).$$

Considérons l'opérateur suivant : $\quad Ku = \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u|^p dx, \quad u \in X := W_0^{1,p}(\Omega, w).$
D'après [55], nous avons $K \in C^1(X, \mathbb{R})$, et l'opérateur p-Laplace est dérivable au sens de Fréchet dans K, sa dérivé définie l'opérateur $L = K' : X \to X^*$ comme suit:

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx \qquad \forall v, u \in X. \tag{5.5}$$

Lemme 5.1. *i) $L : X \to X^*$ est un opérateur continu, borné et strictement monotone.*

ii) L est un opérateur de type (S_+).

iii) $L : X \to X^*$ est un homéomorphisme.

Démonstration. i) Il est évident que L est continu et borné. Pour tous $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, nous obtenons l'inégalité suivante (voir [95]), qui permet d'obtenir la stricte monotonie de L,

$$(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta)(\xi - \eta) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^p |\xi - \eta|^p, \qquad p \geq 2. \tag{5.6}$$

ii) En appliquant (i), si $u_n \rightharpoonup u$ et $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle Lu_n, u_n - u\rangle \leq 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\langle Lu_n, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Lu_n - Lu, u_n - u\rangle = 0.$$

Grâce à (5.6), ∇u_n converge en mesure vers ∇u dans Ω, il existe une sous-suite notée encore ∇u_n satisfaisant $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$, p.p. $x \in \Omega$.
Puisque $u_n \rightharpoonup u$ dans $X = W_0^{1,p}(\Omega, w)$, alors $(u_n)_n$ est borné. Par conséquent, la suite

$(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n)_n$ est bornée dans $\prod_{i=1}^{N} L^{p'}(\Omega, w_i^*)$ et $|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \to |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ p.p. dans Ω, selon le Lemme 2.1 dans [16], nous avons

$$|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2}\nabla u \quad \text{dans} \quad \prod_{i=1}^{N} L^{p'}(\Omega, w_i^*) \quad \text{et p.p. dans } \Omega.$$

Posons $\overline{y}_n = |\nabla u_n|^p$ et $\overline{y} = |\nabla u|^p$. Comme dans [68, Lemme 5], nous avons

$$\overline{y}_n \to \overline{y} \quad \text{dans } L^1.$$

Par (5.3), nous obtenons

$$\gamma \sum_{i=1}^{N} w_i |\partial_i u_n|^p \leq |\nabla u_n|^p.$$

Soit $z_n = \sum_{i=1}^{N} w_i |\partial_i u_n|^p$, $z = \sum_{i=1}^{N} w_i |\partial_i u|^p$, $y_n = \dfrac{\overline{y}_n}{\gamma}$ et $y = \dfrac{\overline{y}}{\gamma}$. Par suite, en utilisant le Théorème de Fatou, on obtient

$$\int_\Omega 2y dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega y + y_n - |z_n - z| dx,$$

c'est-à-dire, $0 \leq -\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |z_n - z| dx$. Alors

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |z_n - z| dx \leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |z_n - z| dx \leq 0.$$

Cela implique que

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{in} \quad \prod_{i=1}^{N} L^p(\Omega, w_i).$$

Donc $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$, d'où L est de type (S_+).

iii) Par la stricte monotonie, L est une injection. Puisque

$$\lim_{|||u|||\to\infty} \frac{\langle Lu_n, u_n - u\rangle}{|||u|||} = \lim_{|||u|||\to\infty} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{|||u|||} = \infty,$$

L est coercif, donc L est une surjection grâce au du Théorème de Minty−Browder [137, Théorème 26 A], on a l'opérateur L est inversible. Par suite, la continuité de L^{-1} est suffisante pour assurer que L un homéomorphisme.

Soient $f_n, f \in X^*$, tel que $f_n \to f$. Posons $u_n = L^{-1}f_n$, $u = L^{-1}f$, Ainsi $Lu_n = f_n$, $Lu = f$.

Par conséquent $(u_n)_n$ est borné dans X. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$u_n \rightharpoonup u_0$. Puisque $f_n \to f$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \langle Lu_n - Lu_0, u_n - u_0 \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, u_n - u_0 \rangle = 0. \tag{5.7}$$

Puisque L est du type (S_+), $u_n \to u_0$, nous concluons que $u_n \to u$, donc L^{-1} est continu. □

5.3 Existence de solutions

Dans cette section, nous étudions le problème fortement non linéaire (5.2) basé sur la théorie de degrés topologique introduite dans le chapitre préliminaires.

Lemme 5.2. *Sous les hypothèses* (5.4) *et* (H_0), *l'opérateur* $S : W_0^{1,p}(\Omega, w) \to W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$ *définie par*

$$\langle Su, v \rangle = -\int_\Omega (\lambda |u|^{q-2}u + f(x, u, \nabla u)) v dx, \qquad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$$

est compact.

Démonstration. Dans la preuve de ce résultat, nous introduisons deux opérateurs auxiliaires dans les étapes suivants:

Étape 1

Soit $\psi : W_0^{1,p}(\Omega, w) \to L^{p'}(\Omega)$ l'opérateur défini par

$$\psi u(x) := -\lambda |u(x)|^{q-2} u(x) \quad \text{pour} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega, w) \quad \text{et} \quad x \in \Omega.$$

Il est évident que ψ est continu.

D'une part, nous montrons que ψ est borné.

Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$, posons $\alpha = (q-1)p'$ alors $1 < \alpha < p$.

En utilisant l'injection continu $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^\alpha(\Omega)$ et l'inégalité Hölder et d'après hypothèse de Hardy (H_0), nous avons

$$\begin{aligned}
\|\psi\, u\|_{p'}^{p'} &= \int_\Omega |-\lambda |u|^{q-2} u|^{p'} dx \leq \lambda^{p'} \int_\Omega |u|^{(q-1)p'} dx \\
&\leq C\,\lambda^{p'} \int_\Omega |u|^p dx \leq C\,\lambda^{p'} \int_\Omega |u|^p \sigma^{\frac{p}{q}} \sigma^{-\frac{p}{q}} dx \\
&\leq C\,\lambda^{p'} \left(\int_\Omega |u|^q \sigma dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega \sigma^{-\frac{p}{q-p}} dx \right)^{\frac{q-p}{q}}
\end{aligned}$$

$$\leq c'\Big(\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \Big|\partial_i u\Big|^p w_i\,dx\Big)\Big(\int_\Omega \sigma^{-\frac{p}{q-p}}dx\Big)^{\frac{q-p}{q}}$$
$$\leq C'\||u|\|^p. \quad (\text{ D'aprés } (1.7))$$

Cela implique que

$$\|\psi\, u\|_{p'} \leq C'\ \||u|\|^{p-1}.$$

D'où ψ est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$.

Étape 2

Soit $\varphi : W_0^{1,p}(\Omega, w) \to L^{p'}(\Omega)$ un opérateur défini par

$$\varphi u(x) := -f(x, u, \nabla u) \quad \text{pour tout} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega, w).$$

Nous montrons que φ est borné et continu.

Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$, En utilisant la condition de croissance (5.4) et l'inégalité Hardy (1.8), nous avons

$$\begin{aligned}
\|\varphi\, u\|_{p'} &\leq \Big(\int_\Omega |f(x,u_n,\nabla u_n)|^{p'}dx\Big)^{\frac{1}{p'}}\\
&\leq \beta\left(\int_\Omega (M(x)+\sigma^{\frac{1}{p'}}|u|^{\frac{q}{p'}}+\sum_{i=1}^{N} w_i^{\frac{1}{p'}}|\partial_i u|^{p-1})^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\leq C_1\beta\left(\int_\Omega (M(x))^{p'}dx+\int_\Omega |u|^q\sigma dx+\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i u|^p w_i\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (5.8)\\
&\leq C_1\beta\left(\int_\Omega (M(x))^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}+C_1\beta\left(\int_\Omega |u|^q\sigma dx+\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i u|^p w_i\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\leq C_3\left(\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i u|^p w_i\,dx+\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i u|^p w_i\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\leq C_4\||u|\|^{\frac{p}{p'}}.
\end{aligned}$$

Cela implique que φ est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$.

D'autre part, nous prouvons que φ est continu, soit $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$. Alors $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega, w_0)$ et $\nabla u_n \to u$ dans $L^p(\Omega, w)$. Par suite, ils existent une sous-suite notée encore (u_n) et deux fonctions mesurables h dans $L^p(\Omega, w_0)$ et g dans $\prod_{i=1}^{N} L^{p_i}(\Omega, w_i)$ tels que

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{et} \quad \nabla u_n(x) \to \nabla u(x),$$

$$|u_n(x)| \leq h(x) \quad \text{et} \quad |\nabla u_n(x)| \leq |g(x)|,$$

presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque f satisfait la condition croissance, nous obtenons

$$f(x, u_n(x), \nabla u_n(x)) \to f(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \tag{5.9}$$

Selon (5.4), nous obtenons

$$|f(x, u_n(x), \nabla u_n(x))| \leq \beta(M(x) + \sigma^{\frac{1}{p'}} |h(x)|^{\frac{q}{p'}} + \sum_{j=1}^{N} w_j^{\frac{1}{p'}} |g_j(x)|^{p-1})$$

presque partout $x \in \Omega$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$. En utilisant

$$M(x) + \sigma^{\frac{1}{p'}} |h(x)|^{\frac{q}{p'}} + \sum_{j=1}^{N} w_j^{\frac{1}{p'}} |g_j(x)|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega),$$

et (5.9), nous avons

$$\int_{\Omega} |f(x, u_k(x), \nabla u_k(x)) - f(x, u(x), \nabla u(x))|^{p'} dx \longrightarrow 0.$$

Le Théorème de convergence dominé implique que

$$\varphi u_k \to \varphi u \quad \text{in} \quad L^{p'}(\Omega).$$

Ainsi, la suite entière (φu_n) converge vers φu dans $L^{p'}(\Omega)$, par suite φ est continue.

Étape 3

Comme l'injection $I : W_0^{1,p}(\Omega, w) \to L^{p'}(\Omega)$ est compact, on sait que l'opérateur adjoint $I^* : L^{p'}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$ est également compact.

Par conséquent, les compositions $I^* o \psi$ et $I^* o \varphi : W_0^{1,p}(\Omega, w) \to W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$ sont compactes.

Nous concluons que $S = I^* o \varphi + I^* o \psi$ est compact.

Ce qui achève la preuve du Lemme. □

Théorème 5.1. *Sous les hypothèses* (5.4) *et* (H_0). *Le problème* (5.2) *admet au moins une solution faible* u *dans* $W_0^{1,p}(\Omega, w)$.

Démonstration. Soient S, L les opérateurs définies de $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ à valeurs dans $W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$ dans le Lemme (5.5) et Lemme 5.2 respectivement.

La fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$ est une solution faible de (5.2) si et seulement si

$$Lu = -Su. \tag{5.10}$$

Grâce aux propriétés de l'opérateur L donné dans Lemme 5.1 et le Théorème de Minty-Browder [137, Théorème 26 A], l'opérateur inverse $T := L^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega, w)$ est borné, continu et de type (S_+). De plus, notons que par le Lemme (5.2) l'opérateur S est borné, continu et quasi-monotone.

Par conséquent, l'équation (5.10) est équivalente à l'équation suivante appelée équation abstraite de Hammerstein:

$$u = Tv \quad \text{et} \quad v + SoTv = 0. \tag{5.11}$$

Selon [137], l'équation $v + SoTv = 0$ est une équation abstraite de Hammerstein dans l'espace de Banach réflexif $W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$.

Pour résoudre l'équation (5.11), nous appliquons la théorie de degrés déjà introduite dans le chapitre préliminaire.

Tout d'abord, nous montrons que l'ensemble

$$B := \Big\{ v \in W^{-1,p'}(\Omega, w^*) | v + tSoTv = 0 \quad \text{pour certains} \quad t \in [0,1]$$

est borné.

Soit $v \in B$. On pose $u := Tv$.

Selon (5.3), (1.7), (1.8) et (5.8), l'inégalité Hölder, l'inégalité Young et l'injection continu $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}
|||Tv|||^p = |||u|||^p &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^p w_i dx \\
&\leq \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^p dx = \frac{1}{\gamma} \langle Lu, u \rangle = \frac{1}{\gamma} \langle v, Tv \rangle \\
&\leq \frac{t}{\gamma} |\langle S \circ Tv, Tv \rangle| \\
&\leq \frac{t\lambda}{\gamma} \int_\Omega |u|^q dx + \frac{t}{\gamma} \int_\Omega |f(x, u, \nabla u)| u dx \\
&\leq C_1 \int_\Omega |u|^p dx + C_2 \Big(\int_\Omega |f(x, u, \nabla u)|^{p'} dx \Big)^{\frac{1}{p'}} + C_3 \Big(\int_\Omega |u|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_1 \int_\Omega |u|^p \sigma^{\frac{p}{q}} \sigma^{-\frac{p}{q}} dx + C_2 \Big(\int_\Omega |f(x, u, \nabla u)|^{p'} dx \Big)^{\frac{1}{p'}} + C_3 \Big(\int_\Omega |u|^p \sigma^{\frac{p}{q}} \sigma^{-\frac{p}{q}} dx \Big)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1\Big(\int_\Omega |u|^q\sigma dx\Big)^{\frac{p}{q}}\Big(\int_\Omega \sigma^{\frac{-p}{q-p}}dx\Big)^{\frac{q-p}{q}}+C_2\|\varphi\, u\|_{p'}+C_3\Big(\int_\Omega |u|^q\sigma dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_\Omega \sigma^{\frac{-p}{q-p}}dx\Big)^{\frac{q-p}{pq}}\\
&\leq C_1'\sum_{i=1}^N\int_\Omega |\partial_i u|^p w_i dx+C_2'\||||Tv|\|^{\frac{p}{p'}}+C_3'\Big(\sum_{i=1}^N\int_\Omega |\partial_i u|^p w_i dx\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C_1'\||Tv|\|^p+C_2'\||Tv|\|^{\frac{p}{p'}}+C_3'\||Tv|\|.
\end{aligned}$$

Par suite l'ensemble $\{Tv \mid v\in B\}$ est borné.

Comme l'opérateur S est borné et (5.11), il est évident que l'ensemble B est borné dans $W^{-1,p'}(\Omega,w^*)$.

Par conséquent, nous pouvons maintenant choisir une constante positive R telle que

$$\|v\|_{W^{-1,p'}(\Omega,w^*)}<R \quad \text{pour tout} \quad v\in B.$$

Cela signifie que

$$v+tSoTv\neq 0 \quad \text{pour tout} \quad v\in\partial B_R(0) \quad \text{et tout} \quad t\in[0,1].$$

En utilisant le Lemme 1.11, nous avons

$$I+SoT\in\mathcal{F}_T(\overline{B_R(0)}) \quad \text{et} \quad I=LoT\in\mathcal{F}_T(\overline{B_R(0)}).$$

Comme les opérateurs I,S et T sont bornés, alors $I+SoT$ est également borné. Nous concluons que

$$I+SoT\in\mathcal{F}_{T,B}(\overline{B_R(0)}) \quad \text{et} \quad I\in\mathcal{F}_{T,B}(\overline{B_R(0)}).$$

Considérons l'homotopie affine $H:[0,1]\times\overline{B_R(0)}\to W^{-1,p'}(\Omega,w^*)$ donnée par

$$H(t,v):=v+tSoTv \quad \text{for} \quad (t,v)\in[0,1]\times\overline{B_R(0)}.$$

D'après la propriété d'invariance par l'homotopie et de normalisation du degré d donnée dans le Théorème 1.6, nous avons

$$d(I+SoT,B_R(0),0)=d(I,B_R(0),0)=1,$$

alors il existe un point $v\in B_R(0)$ tel que

$$v+SoTv=0.$$

Finalement, nous déduisons que $u = Tv$ est une solution faible de (5.2). Ce qui complète la preuve. $\square$

Exemple : Considérons le cas particulier suivant:

$$a(x, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u \quad \text{et} \quad f(x, s, \xi) = \sum_{i=1}^{N} w_i|\xi_i|^{p-1} sign(\xi_i).$$

Il est facile de montrer que la fonction de Carathéodory $f(x, s, \xi)$ satisfait la condition de croissance (5.4). En particulier, utilisons une fonction de poids spéciale w, exprimée en termes de distance par rapport aux bords $\partial\Omega$.

Noté $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$ et posons $w(x) = d^{\varrho(x)}, \sigma(x) = d^{\mu}(x)$.

Finalement, les hypothèses du Théorème 5.1 sont satisfaites. Par conséquent, le problème suivant:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (\lambda |u|^{q-2}u + f(x, u, \nabla u))v \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega, w),$$

admet au moins une solution faible.

Chapitre 6

Problème de Neumann régi par une équation elliptique non linéaire

Dans ce chapitre, nous allons considérer un problème elliptique non linéaire pour l'opérateur de Leray-Lions avec une condition au bord de type Neumann homogène. Sous certaines hypothèses sur les deux fonctions de Carathéodory, nous montrons l'existence de solutions faibles, en se basant sur la méthode de compacité qui consiste à appliquer le degré topologique de Berkovits sur l'équation abstraite de Hammerstein obtenue.

6.1 Notations et position du problème

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ de frontière Lipschitzien $\partial\Omega$, $\eta = \big(\eta_1, \cdots, \eta_n\big)$ la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$, p un réel tel que $2 < p < \infty$ et λ est un paramètre réel.
Le problème considéré dans ce chapitre consiste à chercher des solutions faibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ associées à l'équation elliptique non linéaire suivante :

$$- \, div\big(a(x, u, \nabla u)\big) = b(x)|u|^{p-2}u + \lambda H(x, u, \nabla u) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{6.1}$$

dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, sous la condition de Neumann homogène au bord, i.e

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x, u, \partial_i u) \cdot \eta_i = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \tag{6.2}$$

Dans l'étude du problème (6.1)-(6.2), nous aurons besoin de préciser quelques notations relatives au problème considéré et de supposer quelques hypothèses utiles pour obtenir les résultats visés.

Hypothèses

Considérons l'opérateur non linéaire F défini de $W^{1,p}(\Omega)$ à son dual par

$$Fu = -\operatorname{div} a(x, u, \nabla u),$$

par suite

$$\langle Fu, v\rangle = \int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla v\, dx,$$

pour tout v dans $W^{1,p}(\Omega)$,

où $a\ :\ \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory (mesurable par rapport à $x \in \Omega$ pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et continue par rapport à $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ presque partout x de Ω) satisfaisant les hypothèses suivantes : presque partout de $x \in \Omega$ et pour tout $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N,\ (\xi \neq \xi')$ et $s \in \mathbb{R}$

(A_1) $\quad a(x, s, \xi)\,\xi \geq \alpha\ |\xi|^p$,

(A_2) $\quad |a(x, s, \xi)| \leq \beta\left(k(x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right)$,

(A_3) $\quad (a(x, s, \xi) - a(x, s, \xi'))(\xi - \xi') > 0$,

avec $\alpha,\ \beta$ sont deux constantes positives et $k(x)$ est une fonction positive dans $L^{p'}(\Omega)(p'$ est l'exposant conjugué de p).

De plus, le terme non linéaire $H\ :\ \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui vérifie seulement la condition de croissance, c'est-à-dire :

pour tout $t \in \mathbb{R}^N$ et $s \in \mathbb{R}$

(H_1) $\quad |H(x, s, t)| \leq \varrho(e(x) + |s|^{p-1} + |t|^{p-1}), \qquad$ p.p. $x \in \Omega$

telles que ϱ est une constante positive, $e(x)$ est une fonction positive dans $L^{p'}(\Omega)$.

Enfin, nous supposons que

$$b \in L^\infty(\Omega),\ b(x) > 0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

L'étude du cas particulier du p-Laplacien, cas où

$$a(x, s, \xi) = |\xi|^{p-2}|\xi|, \text{ où } \quad p \geq 2,$$

on obtient l'opérateur p-Laplace $\triangle_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ est bien motivé par des intérêts physiques. En effet, de nombreux problèmes non linéaires dans le domaine de la physique, de la mécanique, des sciences technologiques et de l'ingénierie sont formulés dans des équations qui contiennent le p-Laplacien. Suivant ce modèle Lui et al dans [110] démontrent à l'aide du principe alternatif de Leray-Schauder, la méthode de sous-supersolution, la régularité non linéaire, les techniques de troncature l'existence de solutions pour le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = f(x, u(x), \nabla u(x)) + g(x, u(x)) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la Section II nous définissons ce qu'est une solution faible de problème (6.1)-(6.2), ensuite nous donnons quelques lemmes auxiliaires qui seront l'outil essentiel permettant de démontrer le résultat principal. En dernier lieu, nous démontrons le résultat d'existence de solutions en se basant sur la théorie de degré topologique présentée au chapitre 1.

6.2 Notions de solutions et les Lemmes techniques

Dans cette section, nous donnons la définition d'une solution faible pour le problème (6.1)-(6.2), et nous introduisons quelques lemmes auxiliaires utiles pour prouver le résultat d'existence.

Définition 6.1. *Une fonction mesurable u est dite solution faible de* (6.1)-(6.2)*, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est vérifie*

$$\int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla v dx = \int_\Omega b(x)|u|^{p-2}uv dx + \lambda \int_\Omega H(x, u, \nabla u)v dx, \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Nous démontrons ensuite deux lemmes que nous utiliserons par la suite pour la preuve de notre résultat principal.

Lemme 6.1. *Supposons que $(A_1) - (A_3)$ les hypothèses sont satisfaites, alors l'opérateur F est borné, coercif, continu et de type (S_+).*

Démonstration. Tout d'abord, nous prouvons que l'opérateur F est borné.
Soient $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, en utilisant l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\langle Fu, v\rangle = \int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla v dx \leq C\Big(\int_\Omega |a(x, u, \nabla u)|^{p'} dx\Big)^{1/p'}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\Big)^{1/p}.$$

D'autre part, à partir de (A_2), nous pouvons facilement montrer que $\|a(x, u, \nabla u)\|_{p'}$ est borné pour tout u dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Par conséquent,

$$\langle Fu, v\rangle \leq C'\Big(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\Big)^{1/p} \leq const\|v\|,$$

comme résultat l'opérateur F est borné.

Deuxièmement, nous prouvons que F est coercif.

Soit $v \in W^{1,p}(\Omega)$, nous obtenons de (A_1)

$$\frac{\langle Fv, v\rangle}{\|v\|} = \frac{\displaystyle\int_\Omega a(x, v, \nabla v)\nabla v dx}{\|v\|} \geq \alpha \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \int_\Omega |v|^p dx - \int_\Omega |v|^p dx}{\|v\|}$$
$$\geq \alpha\|v\|^{p-1} - \alpha\frac{\|v\|_p}{\|v\|} \geq \alpha\|v\|^{p-1} - C. \quad (\text{ Du fait que } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega))$$

Par conséquent,

$$\frac{\langle Fv, v\rangle}{\|v\|} \to \infty \quad \text{as} \quad \|v\| \to \infty.$$

Donc F est coercif.

Maintenant, nous montrons que F est continu, soit $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $\big(L^p(\Omega)\big)^N$. Il existe donc une sous-suite (u_k) de (u_n) et deux fonctions mesurables h dans $L^p(\Omega)$ et g dans $(L^p(\Omega))^N$ telles que

$$u_k(x) \to u(x) \quad \text{et} \quad \nabla u_k(x) \to \nabla u(x),$$
$$|u_k(x)| \leq h(x) \quad \text{et} \quad |\nabla u_k(x)| \leq |g(x)|,$$

presque tout $x \in \Omega$ et tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque a satisfait la condition de Carathéodory, on obtient

$$a(x, u_k, \nabla u_k) \to a(x, u, \nabla u) \qquad \text{p.p. } x \text{ dans } \Omega. \tag{6.3}$$

D'après (A_2), nous avons

$$|a(x, u_k, \nabla u_k)| \leq \beta(k(x) + |h(x)|^{p-1} + |g(x)|^{p-1}),$$

presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque

$$\big(k(x) + |h(x)|^{p-1} + |g(x)|^{p-1}\big) \in L^{p'}(\Omega),$$

de plus, en utilisant (6.3) nous avons

$$\int_\Omega |a(x, u_k, \nabla u_k) - a(x, u, \nabla u)|^{p'} dx \longrightarrow 0.$$

Le théorème de convergence dominée implique que

$$a(x, u_k, \nabla u_k) \to a(x, u, \nabla u) \qquad \text{dans} \quad \left(L^{p'}(\Omega)\right)^N.$$

Ainsi, la suite entière $a(x, u_n, \nabla u_n)$ converge vers $a(x, u, \nabla u)$ dans $\left(L^{p'}(\Omega)\right)^N$.

Par conséquent, pour tout $v \in W^{1,p}(\Omega)$, on obtient $\langle Fu_n, v\rangle \to \langle Fu, v\rangle$, ce qui implique que l'opérateur F est continu.

Il reste à prouver que l'opérateur F est de type (S_+).

Soit $(u_n)_n$ une suite de $W^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{dans } W^{1,p}(\Omega) \\ \limsup_{n\to\infty} \langle Fu_n, u_n - u\rangle \leq 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

On veut montrer que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

La première partie de (6.4) implique qu'il existe $M_1 > 0$ tel que

$$\|\nabla u_n\|_p \leq M_1 \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Par suite, en combinant (A_3) et (6.4), on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \langle Fu_n, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Fu_n - Fu, u_n - u\rangle = 0. \tag{6.5}$$

Par conséquent,

$$D_n \to 0 \quad \text{dans } L^1(\Omega),$$

où

$$D_n = \left[a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u_n, \nabla u)\right]\left(\nabla u_n - \nabla u\right).$$

En utilisant $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, nous pouvons trouver une sous-suite toujours notée u_n telle que

$$\begin{cases} u_n \to u & \text{p.p. dans } \Omega, \\ D_n \to 0 & \text{p.p. dans } \Omega. \end{cases}$$

Alors, il existe un sous-ensemble B de Ω, de mesure nulle, tel que pour tout $x \in \Omega\backslash B$, $|u(x)| < \infty$, $|\nabla u(x)| < \infty$, $|k(x)| < \infty$, $u_n(x) \to u(x)$, $D_n(x) \to 0$.

Si on pose $\xi_n = \nabla u_n,\ \xi = \nabla u$, alors on a

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \big[a(x,u_n,\xi_n) - a(x,u_n,\xi)\big].(\xi_n - \xi)\\
&= a(x,u_n,\xi_n)\xi_n + a(x,u_n,\xi)\xi - a(x,u_n,\xi_n)\xi - a(x,u_n,\xi)\xi_n\\
&\geq \alpha|\xi_n|^p + \alpha|\xi|^p - \beta\big(k(x) + |u_n|^{p-1} + |\xi_n|^{p-1}\big)|\xi| - \beta\big(k(x) + |u_n|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\big)|\xi_n|\\
&\geq \alpha|\xi_n|^p - C_x[1 + |\xi_n|^{p-1} + |\xi_n|],
\end{aligned}$$

où C_x est une constante qui dépend de x, mais ne dépend pas de n.

Puisque $u_n(x) \to u(x)$, nous avons $|u_n(x)| \leq M_x$, où M_x est une constante positive. Puis par un argument standard $|\xi_n|$ est uniformément borné par rapport à n, on en déduit que

$$D_n(x) \geq |\xi_n|^p\Big(\alpha - \frac{C_x}{|\xi_n|^p} - \frac{C_x}{|\xi_n|} - \frac{C_x}{|\xi_n|^{p-1}}\Big).$$

Si $|\xi_n| \to \infty$ (pour une sous-suite), alors $D_n(x) \to \infty$ ce qui donne une contradiction.

Maintenant, soit ξ^* un point d'accumulation de ξ_n. Comme $|\xi^*| < \infty$ et par la continuité de a, alors nous avons

$$\big[a(x,u_n,\xi^*) - a(x,u_n,\xi)\big](\xi^* - \xi) = 0.$$

D'après (A_3), on obtient $\xi^* = \xi$, ce qui implique que

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x) \qquad \text{p. p. dans } \Omega.$$

D'autre part, puisque la suite $\big(a(x,u_n,\nabla u_n)\big)$ est bornée dans $\big(L^{p'}(\Omega)\big)^N$, Puisque $a(x,u_n,\nabla u_n)$ converge vers $a(x,u,\nabla u)$ a.e. dans Ω. Alors, d'après le Lemme 1.5, on a

$$a(x,u_n,\nabla u_n) \rightharpoonup a(x,u,\nabla u) \quad \text{dans } (L^{p'}(\Omega))^N \quad \text{et p. p. dans } \Omega. \tag{6.6}$$

Si on pose $\overline{y}_n = a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n$ et $\overline{y} = a(x,u,\nabla u)\nabla u$. Alors, on peut écrire

$$\overline{y}_n \to \overline{y} \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

D'après (A_1), nous avons

$$\alpha|\nabla u_n|^p \leq a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n.$$

Soient $z_n = |\nabla u_n|^p,\ z = |\nabla u|^p,\ y_n = \dfrac{\overline{y}_n}{\alpha}$, et $y = \dfrac{\overline{y}}{\alpha}$.

Grâce au lemme de Fatou, on obtient

$$\int_\Omega 2\, y\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega y + y_n - |z_n - z| dx,$$

c'est-à-dire $0 \leq -\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |z_n - z| dx$. Alors

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |z_n - z| dx \leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |z_n - z| dx \leq 0,$$

ceci implique

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \quad \text{in} \quad \big(L^p(\Omega)\big)^N. \tag{6.7}$$

Nous avons à partir de l'injection compact de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ et notre hypothèses $\|u_n\|_p \to \|u\|_p$ quand $n \to \infty$. De plus, $\|u_n\| \longrightarrow \|u\|$ (voir (6.7)).
Comme $W^{1,p}(\Omega)$ satisfait la propriété de Kadec-Klee [114, Remarque 2.47(a),(c)], $u_n \rightharpoonup u$ et $\|u_n\| \longrightarrow \|u\|$, alors $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ quand $n \to \infty$, ce qui complète la preuve. □

Lemme 6.2. *Supposons que l'hypothèse (H_1) est vérifiée. Alors l'opérateur $S : W^{1,p}(\Omega) \to \big(W^{1,p}(\Omega)\big)^*$ défini par*

$$\langle Su, v\rangle = -\int_\Omega \big(b(x)|u|^{p-2}u + \lambda H(x,u,\nabla u)\big) v dx, \qquad \forall u, v \in W^{1,p}(\Omega)$$

est compact.

Démonstration. Nous divisons la preuve en trois étapes.

Étape 1

Soit $\phi : W^{1,p}(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$ un opérateur défini par

$$\phi u(x) := -b(x)|u(x)|^{p-2}u(x) \;\text{ pour tout } \quad u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{ et } \quad x \in \Omega.$$

Il est évident que ϕ est continu. Par suite, nous montrons que ϕ est borné.
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, en utilisant l'injection compacte $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\phi\, u\|_{p'}^{p'} = \int_\Omega |-b(x)|u|^{p-2}u|^{p'} dx \leq \|b^{p'}\|_\infty \int_\Omega |u|^{(p-1)p'} dx \\ \leq \|b^{p'}\|_\infty \int_\Omega |u|^p dx \leq C\|u\|^p.\end{aligned}$$

Cela implique que ϕ est borné sur $W^{1,p}(\Omega)$.

Étape 2

Dans cette étape, nous montrons que l'opérateur ψ défini de $W^{1,p}(\Omega)$ à valeur dans $L^{p'}(\Omega)$ par

$$\psi u(x) := -\lambda H(x, u, \nabla u) \quad \text{pour} \quad u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad x \in \Omega$$

est borné et continu.

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, en utilisant la condition de croissance (H_1) on obtient

$$\begin{aligned}
\|\psi u\|_{p'}^{p'} &\leq \int_\Omega |\lambda H(x, u, \nabla u)|^{p'} dx \\
&\leq (\varrho\lambda)^{p'} \int_\Omega \left(|e(x)|^{p'} + |u|^{(p-1)p'} + |\nabla u|^{(p-1)p'}\right) dx \\
&\leq (\varrho\lambda)^{p'} \int_\Omega |e(x)|^{p'} dx + (\varrho\lambda)^{p'} \int_\Omega |u|^p + |\nabla u|^p dx \\
&\leq (\varrho\lambda)^{p'} \|e\|_{p'}^{p'} + (\varrho\lambda)^{p'} \|u\|^p \\
&\leq C_m \Big(\|u\|^p + 1 \Big),
\end{aligned} \tag{6.8}$$

où $C_m = \max\left((\varrho\lambda)^{p'} \|e\|_{p'}^{p'}, (\varrho\lambda)^{p'}\right)$. (Du fait que $e(x)$ est une fonction positive dans $L^{p'}(\Omega)$)

Par conséquent, ψ est borné sur $W^{1,p}(\Omega)$.

D'autre part, on montre que ψ est continu.

Soit $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, alors $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $\left(L^p(\Omega)\right)^N$. Donc, il existe une sous-suite notée encore (u_n) et deux fonctions mesurables φ dans $L^p(\Omega)$ et σ dans $\left(L^p(\Omega)\right)^N$ telles que

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{et} \quad \nabla u_n(x) \to \nabla u(x),$$

$$|u_n(x)| \leq |\varphi(x) \quad \text{et} \quad |\nabla u_n(x)| \leq |\sigma(x)|,$$

presque tout $x \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque H satisfait la condition de Carathéodory, nous obtenons

$$H(x, u_n(x), \nabla u_n(x)) \to H(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \tag{6.9}$$

Grâce à (H_1), on obtient

$$|H(x, u_n(x), \nabla u_n(x))| \leq \varrho\big(e(x) + |\varphi(x)|^{p-1} + |\sigma(x)|^{p-1}\big)$$

presque partout $x \in \Omega$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Comme

$$e(x) + |\varphi(x)|^{p-1} + |\sigma(x)|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega),$$

et d'après (6.9), on obtient

$$\int_\Omega |H(x,u_k(x),\nabla u_k(x)) - H(x,u(x),\nabla u(x))|^{p'} dx \longrightarrow 0.$$

Grâce au théorème de convergence dominée, nous avons

$$\psi u_k \to \psi u \quad \text{dans} \quad L^{p'}(\Omega).$$

Ainsi la suite entière (ψu_n) converge vers ψu dans $L^{p'}(\Omega)$.
D'où ψ est continue.

Étape 3

Puisque l'injection $I : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ est compact, alors son adjoint $I^* : L^{p'}(\Omega) \to (W^{1,p}(\Omega))^*$ est également compact. Par conséquent, les compositions $I^* o\phi$ et $I^* o\psi$ de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $(W^{1,p}(\Omega))^*$ sont compactes. Nous déduisons que $S = I^* o\phi + I^* o\psi$ est compact. Ce qui complète la preuve. □

6.3 Existence de solutions faibles

Nous étudions dans cette partie la question d'existence de solutions faibles pour le problème non linéaire (6.1)-(6.2), en se basant sur la théorie de degré topologique introduit dans le chapitre 1. Nous commençons d'abord par énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 6.1. *Sous les hypothèses $(A_1) - (A_2)$ et (H_1), le problème* (6.1)-(6.2) *admet au moins une solution faible u dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration. Soit F, S deux opérateurs de $W^{1,p}(\Omega)$ dans son dual, qui sont définis respectivement dans les Lemmes 6.1 et 6.2. Alors $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est une solution faible du problème (6.1)-(6.2) si et seulement si

$$Fu = -Su. \tag{6.10}$$

D'après le lemme 6.2, l'opérateur S est borné, continu et quasimonotone.
D'autre part, Comme F est strictement monotone et vérifiée les propriétés données dans le Lemme 6.1, alors en utilisant le théorème de Minty-Browder (voir [137], Théorème 26 A), on montre que F est inversible et son inverse $G := F^{-1}:(W^{1,p}(\Omega))^* \to W^{1,p}(\Omega)$ est borné, continu et de type (S_+).

Par conséquent, l'équation (6.10) est équivalente à l'équation abstraite de Hammerstein

$$u = Gv \quad \text{et} \quad v + SoGv = 0. \tag{6.11}$$

Pour résoudre l'équation (6.11), nous utilisons le degré topologique de Berkovits. Pour cela, nous prouvons d'abord que l'ensemble

$$B := \left\{ v \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^* \setminus \quad v + tSoGv = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,1] \right\}$$

est borné. En effet, soit $v \in B$ et $u := Gv$.

En combinant (A_1), (H_1), (6.8), l'inégalité de Young et l'injection compact $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|Gv\|^p &= \int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega |\nabla u|^p dx \le \int_\Omega |u|^p dx + \frac{1}{\alpha}\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u dx \\
&\le \int_\Omega |u|^p dx + \frac{1}{\alpha}\langle Fu, u\rangle = \int_\Omega |u|^p\, dx + \frac{1}{\alpha}\langle v, Gv\rangle \\
&\le \int_\Omega |u|^p dx + \frac{t}{\alpha}|\langle S \circ Gv, Gv\rangle| \\
&\le \int_\Omega |u|^p dx + \frac{t}{\alpha}\int_\Omega b(x)|u|^p dx + \frac{t}{\alpha}\int_\Omega |H(x,u,\nabla u)| u dx \\
&\le \int_\Omega |u|^p dx + \frac{t\|b\|_\infty}{\alpha}\int_\Omega |u|^p dx + \frac{t}{\alpha}C_{p'}\int_\Omega |H(x,u,\nabla u)|^{p'} dx + \frac{t}{\alpha}C_p\int_\Omega |u|^p dx \\
&\le C_1\int_\Omega |u|^p dx + C_2\|u\|^{p/p'} \le Cst\left(\|Gv\|^p + \|Gv\|^{p-1}\right).
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\left\{Gv \setminus v \in B\right\}$ est borné.

Puisque l'opérateur S est borné, d'après (6.11) il est évident que l'ensemble B est borné dans $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^*$.

Par conséquent, nous pouvons choisir une constante positive R telle que

$$\|v\|_{\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^*} < R \quad \text{pour tout} \quad v \in B.$$

Par suite

$$v + tSoGv \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad v \in \partial B_R(0) \quad \text{et tout} \quad t \in [0,1].$$

Grâce au Lemme 1.11, nous obtenons

$$I + SoG \in \mathcal{F}_T(\overline{B_R(0)}) \quad \text{et} \quad I = FoG \in \mathcal{F}_T(\overline{B_R(0)}).$$

Puisque les opérateurs I, S et G sont bornés, alors $I + SoG$ est également borné. Nous concluons que

$$I + SoG \in \mathcal{F}_{T,B}(\overline{B_R(0)}) \quad \text{et} \quad I \in \mathcal{F}_{T,B}(\overline{B_R(0)}).$$

Considérons l'homotopie affine $\Lambda : [0,1] \times \overline{B_R(0)} \to W^{-1,p'}(\Omega)$ donnée par

$$\Lambda(t,v) := v + tSoGv \quad \text{pour} \quad (t,v) \in [0,1] \times \overline{B_R(0)}.$$

En appliquant le Théorème 1.6, nous avons

$$d(I + SoG, B_R(0), 0) = d(I, B_R(0), 0) = 1$$

alors, il existe un point $v \in B_R(0)$ tel que

$$v + SoGv = 0.$$

Ce qui montre que $u = Gv$ est une solution faible de (6.1)-(6.2). Ceci complète la preuve. □

Chapitre 7

Sur une équation elliptique du problème de type Kirchhoff

Ce chapitre est dédié à l'étude de l'existence de solutions faibles pour un problème de Dirichlet non linéaire faisant intervenir le terme de Kirchhoff. Cette étude et faite en appliquant la théorie des degrés topologiques pour les opérateurs de type (S_+), dans le cadre des espaces de Sobolev avec poids. Les techniques utilisées sont basées sur la transformation de ce problème elliptique non local en un nouveau problème régi par une équation de Hammerstein.

7.1 Introduction et motivation

De nombreux modèles physiques et biologiques tels que les problèmes de la densité de population et les problèmes de la dynamique d'une corde en mouvement axial entrent dans le cadre des équations de type :

$$-M\Big(\int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx\Big)div\big(a(x,\nabla u)\big)-\lambda g(x,u,\nabla u)=b(x)|u|^{q-2}u \text{ dans } \quad \Omega, \tag{7.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $N\geq 1$, $2<q<p<\infty$, $-div\big(a(x,\nabla u)\big)$ est un opérateur de Leray-Lions, λ est un paramètre réel, M et g sont deux fonctions que nous préciserons dans la suite.

Nous mentionnons dans le second membre, que la fonction b appartient à $L^\infty(\Omega)$ et satisfait:

$$|b(x)|\leq\gamma\sigma(x), \tag{7.2}$$

où γ est une constante positive et σ est une fonction poids sur Ω.
Le problème (7.1) est appelé non local en raison de la présence du terme $M\Big(\int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx\Big)$, ce qui provoque certaines difficultés mathématiques. En générale, notre problème n'a pas de structure variationnelle, en effet, la fonction de non-linéarité g dépend du gradient de la solution. Ce fait crée de plus des sérieuses difficultés techniques. Plus précisément, on ne peut pas utiliser les méthodes variationnelles. Ceci émet donc l'idée que les méthodes de compacités peuvent être utilisées pour la résolution du problème (7.1).
L'équation de Kirchhoff fait référence à Gustav Kirchhoff [97] physicien du $18^{\text{éme}}$ siècle, en 1883 dans l'étude des oscillations de cordes tendues et de plaques. Plus précisément, Kirchhoff a proposé un modèle donné par l'équation

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Big(\frac{\rho_0}{h}+\frac{E}{2L}\int_0^L\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2dx\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

où $\rho,\ \rho_0,\ h,\ E,\ L$ sont des constantes, cette équation est proposée comme une version étendue de l'équation d'onde classique de d'Alembert en prenant en compte les effets des changements de longueur de la corde pendant les vibrations.
Ensuite, après le célèbre article de Lions [106], ce type de problème a attiré l'attention de plusieurs auteurs. Par exemple M. Chipot et J.-F. Rodrigues [56] ont prouvé l'existence de solutions faibles pour le problème non local suivant

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega u\right)\Delta u+\lambda u=f & \text{dans } \Omega,\\ \partial_n u+\gamma\left(\int_{\Omega'} u\right)=0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{7.3}$$

où $\partial_n u=\nabla u\cdot\mathbf{n}$ est la dérivée normale, f désignent la production due à des sources extérieures. Notamment Corrêa et al. [61] ont démontré un résultat d'existence d'une solution positive pour un problème elliptique non local

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega u\right)\Delta u=f(x,u) & \text{dans } \Omega\\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.4}$$

sous les hypothèses

(f_1) $f:\bar\Omega\times\mathbb{R}\to(0,\infty)$ est donnée par $f(x,t)=\alpha(x)+\beta(x)$ tel que $\alpha,\beta\in C(\bar\Omega)$, $\alpha,\beta>0$ dans $\bar\Omega$

(a_1) $s\to sa(s)$ est une fonction inversible,

(a_2) $\quad 0 < m = \inf_{s\in\mathbb{R}} a(s) \leqslant M = \sup_{s\in\mathbb{R}} a(s), \dfrac{1}{m} < \lambda_1(\alpha)$ où $\lambda_1(\alpha)$ est la première valeur propre du problème

$$-\Delta u = \lambda \alpha(x) u \quad \text{dans } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

L'équation (7.1) est considérée avec une condition au bord de type Dirichlet:

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega.$$

7.2 Hypothèses de base et théorème principal

Dans cette section, nous allons présenter notre théorème principal. Pour cela, nous donnons nos hypothèses associées au problème (7.1), qui sont utilisées dans la suite pour montrer le résultat d'existence.

Soit $a(x,\xi) : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction vectorielle de Carathéodory, telle que $a(x,\xi) = \nabla_\xi A(x,\xi)$, où $A(x,\xi) : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Supposons que a et A sont vérifiés les hypothèses suivantes, presque partout $x \in \Omega$ et pour tous $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$ tel que $\xi \neq \xi'$

$$(A_1) \qquad A(x,0) = 0,$$

$$(A_2) \qquad a(x,\xi)\cdot\xi \geq \alpha \sum_{i=1}^{N} w_i |\xi_i|^p,$$

$$(A_3) \qquad |a_i(x,\xi)| \leq \beta w_i^{1/p}\big(k(x) + \sum_{j=1}^{N} w_j^{1/p'} |\xi_j|^{p-1}\big) \qquad \text{pour tout } i = 1,\cdots,N.$$

$$(A_4) \qquad [a(x,\xi) - a(x,\xi')]\cdot(\xi - \xi') > 0,$$

où $\alpha,\ \beta$ sont des constantes positives et $k(x)$ est une fonction positive dans $L^{p'}(\Omega)$(p' est l'exposant conjugué de p).

D'autre part, soit g une fonction de Carathéodory définie de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ à valeur dans $\mathbb{R}$ satisfait uniquement la condition de croissance suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, $s \in \mathbb{R}$ et p. p. $x \in \Omega$

$$(H_1) \qquad |g(x,s,\eta)| \leq \varrho\sigma^{1/q}\big(e(x) + \sigma^{1/q'}|s|^{q/q'} + \sum_{j=1}^{N} w_j^{1/q'} |\eta_j|^{p/q'}\big),$$

où ϱ est une constante positive, $e(x)$ est une fonction positive dans $L^{q'}(\Omega)$.

Finalement, la fonction de non localité $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction qui vérifie la condition suivante:

(M_0) continue et croissante. De plus, il existe deux constantes positives m_0 et m_1 telles que $m_0 \leq M(t) \leq m_1$ pour tout $t \in [0,+\infty[$.

La notion de solution faible pour le problème

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx\Big) \operatorname{div} a(x,\nabla u) - \lambda g(x,u,\nabla u) = b(x)|u|^{q-2}u & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

est définie de manière standard comme suit:

Définition 7.1. *Nous disons qu'une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$ est une solution faible du problème (7.1) si*

$$M\Big(\int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx\Big) \int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla v\,dx - \lambda \int_\Omega g(x,\,u,\nabla u)v\,dx = \int_\Omega b(x)|u|^{q-2}uvdx,$$

pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$.

Maintenant, nous présentons notre résultat principal.

Théorème 7.1. *Supposons que les hypothèses $(A_1) - (A_4)$, (7.2), (H_0), (H_1) et (M_0) sont vérifiées. Alors, il existe au moins une solution faible u dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ du problème (7.1).*

7.3 Preuve du théorème principal

Dans cette section, nous donnons la preuve du théorème principal. Pour cela, nous transformons ce problème fortement non linéaire de type Kirchhoff (7.1) avec condition aux limites de Dirichlet en un nouveau problème régi par une équation de Hammerstein. Ensuite, en utilisant la théorie des degrés topologiques introduite dans le chapitre 1, nous montrons donc l'existence de solutions faibles au problème (7.1).
Tout d'abord, nous donnons le lemme suivante qui a d'un grand utilité dans la démonstration du théorème principal.

Lemme 7.1. *[16] Supposons que (A_2)-(A_4) sont valables, soit $(u_n)_n$ une suite dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ et*

$$\int_\Omega \big[a(x,\nabla u_n) - a(x,\nabla u)\big]\nabla(u_n - u)dx \longrightarrow 0, \tag{7.5}$$

alors $u_n \longrightarrow u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$.

Démonstration. Soit $D_n = \big[a(x,\nabla u_n) - a(x,\nabla u)\big].(\nabla u_n - \nabla u)$.
D'après (A_4) et (7.5), nous avons $D_n \to 0$ dans $L^1(\Omega)$. Par suite, on peut extraire une sous-suite,

encore notée u_n, en utilisant la (1.9), on obtient

$$u_n \to u \quad \text{et} \quad D_n \to 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Comme $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ et p.p. dans Ω, il existe alors un sous-ensemble B de Ω, de mesure nulle, tel que pour tout $x \in \Omega \backslash B$, $|u(x)| < \infty$, $|\nabla u(x)| < \infty$, $k(x) < \infty$, $u_n(x) \to u(x)$, $D_n(x) \to 0$.

Si l'on pose $\xi_n = \nabla u_n$ et $\xi = \nabla u$, on obtient

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \big[a(x,\xi_n) - a(x,\xi)\big].(\xi_n - \xi) \\
&\geq \alpha \sum_{i=1}^{N} w_i |\xi_n^i|^p + \alpha \sum_{i=1}^{N} w_i |\xi^i|^p - \sum_{i=1}^{N} \beta w_i^{1/p} \Big(k(x) + \sum_{j=1}^{N} w_j^{1/p'} |\xi_n^j|^{p-1}\Big) |\xi^i| \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} \beta w_i^{1/p} \Big(k(x) + \sum_{j=1}^{N} w_j^{1/p'} |\xi^j|^{p-1}\Big) |\xi_n^i|, \\
&\geq \alpha \sum_{i=1}^{N} w_i |\xi_n^i|^p - C_x [1 + \sum_{j=1}^{N} w_j^{1/p'} |\xi_n^j|^{p-1} + \sum_{i=1}^{N} w_i^{1/p} |\xi_n^i|],
\end{aligned}$$

où C_x est une constante qui dépend que de x, mais ne dépend pas de n.

Comme $u_n(x) \to u(x)$ on obtient $|u_n(x)| \leq M_x$, où M_x est une certaine constante positive.

Par un argument standard $|\xi_n|$ est borné uniformément par rapport à n. Par suite, en déduit que

$$D_n(x) \geq \sum_{i=1}^{N} |\xi_n^i|^p \Big(\alpha w_i - \frac{C_x}{N|\xi_n^i|^p} - \frac{C_x w_i^{1/p'}}{|\xi_n^i|} - \frac{C_x w_i^{1/p}}{|\xi_n|^{p-1}}\Big).$$

Si $|\xi_n| \to \infty$ (pour une sous-suite), alors $D_n(x) \to \infty$ ce qui est absurde.

Soit ξ^* un point d'accumulation de ξ_n, nous avons alors $|\xi^*| < \infty$. En utilisant la continuité de a nous obtenons

$$\big[a(x,\xi_n) - a(x,\xi)\big]\big(\xi^* - \xi\big) = 0.$$

D'après (A_4), on a $\xi^* = \xi$. Comme le point d'accumulation est unique, alors ce qui implique que $\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x) \quad$ p.p. dans Ω.

Puisque la suite $\big(a(x, \nabla u_n)\big)$ est bornée dans $\prod_{i=1}^{N} L^{p'}(\Omega, w_i^*)$, et $a(x, \nabla u_n)$ converge vers $a(x, \nabla u)$ p.p. dans Ω, en utilisant alors le lemme 1.5, nous obtenons

$$a(x, \nabla u_n) \rightharpoonup a(x, \nabla u) \quad \text{dans } \prod_{i=1}^{N} L^{p'}(\Omega, w_i^*) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Si on prend $\overline{y}_n = a(x, \nabla u_n)\nabla u_n$ et $\overline{y} = a(x, \nabla u)\nabla u$. Alors, on peut écrire

$$\overline{y}_n \to \overline{y} \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

Grâce à (A_2), nous avons

$$\alpha \sum_{i=1}^{N} w_i |\partial_i u_n|^p \leq a(x, \nabla u_n)\nabla u_n \,.$$

Soit $z_n = \alpha \sum_{i=1}^{N} w_i |\partial_i u_n|^p,\ z = \alpha \sum_{i=1}^{N} w_i |\partial_i u|^p,\ y_n = \dfrac{\overline{y}_n}{\alpha}$ et $y = \dfrac{\overline{y}}{\alpha}$.

En utilisant le lemme de Fatou, nous obtenons

$$\int_\Omega 2\, y\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega y + y_n - |z_n - z| dx,$$

Ainsi $\quad 0 \leq -\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |z_n - z| dx$. Alors

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |z_n - z|\, dx \leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |z_n - z|\, dx \leq 0,$$

ceci implique que

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \quad \text{dans } \prod_{i=1}^{N} L^p(\Omega, w_i).$$

Finalement, nous déduisons que $u_n \longrightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$, ce qui complète la preuve. □

Considérons maintenant la fonctionnelle suivante

$$\mathcal{E}(u) = \widehat{M}\Big(\int_\Omega A(x, \nabla u) dx \Big), \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$$

où $\widehat{M} : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est la primitive de la fonction M, définie par

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(\xi) d\xi.$$

Il est bien connu que $\mathcal{E}$ est bien défini et continûment Gâteaux-différentiable au point $u \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$ et la fonctionnelle $\mathcal{E}'(u) \in W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$ donnée par

$$\langle \mathcal{E}'(u)\, ,\, v \rangle = \langle Fu\, ,\, v \rangle \quad \text{pour tout} \quad u, v \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$$

où l'opérateur F est défini de $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ à son dual $W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$ par

$$\langle Fu\,,\,v\rangle = M\Big(\int_\Omega A(x,\nabla u)dx\Big)\int_\Omega A(x,\nabla u)\nabla v dx \tag{7.6}$$

pour tout $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$.

Proposition 7.1. *Supposons que (M_0), (H_0), $(A_1)-(A_4)$ sont vérifiés, alors F est*

(i) un opérateur borné, strictement monotone, coercif et continu.

(ii) de type (S_+).

Démonstration. $i)$ Il est clair que F est continu, car F est la dérivée de Fréchet de $\mathcal{E}$.

Maintenant, nous prouvons que l'opérateur F est borné.

Soit $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$, par l'inégalité de Hölder et (M_0), on obtient

$$\begin{aligned}
< Fu, v > &= M\Big(\int_\Omega A(x,\nabla u)dx\Big)\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla v dx\\
&\le m_1 \sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i(x,\nabla u) w_i^{-1/p}\, \partial_i v\, w_i^{1/p} dx\\
&\le m_1 \sum_{i=1}^N \Big(\int_\Omega |a_i(x,\nabla u)\, w_i^{-1/p}|^{p'} dx\Big)^{1/p'} \Big(\int_\Omega |\partial_i v w_i^{1/p}|^p dx\Big)^{1/p}\\
&\le m_1 \Big(\sum_{i=1}^N \int_\Omega \big|a_i(x,\nabla u)\, w_i^{-1/p}\big|^{p'} dx\Big)^{1/p'} \Big(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i v|^p w_i dx\Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Grâce à la condition de Hardy (H_0) et la condition de croissance (A_2), nous démontrons facilement que $\Big(\sum_{i=1}^N \int_\Omega \big|a_i(x,\nabla u)\, w_i^{-1/p}\big|^{p'} dx\Big)^{1/p'}$ est borné pour tout u dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$. Par conséquent,

$$\langle Fu, v\rangle \le const\Big(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i v|^p w_i dx\Big)^{1/p} \le const\|v\|,$$

par conséquent, l'opérateur F est borné.

Ensuite, nous prouvons que F est un opérateur strictement monotone.

Pour cela, nous considérons la fonctionnelle $L : W_0^{1,p}(\Omega, w) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$L(u) = \int_\Omega A(x,\nabla u)dx \quad \text{pour tout} \quad u \in V,$$

donc $L \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,p}(\Omega, w), \mathbb{R})$ et

$$\langle L'(u), v\rangle = \int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla v dx \qquad \text{pour tout } u,\, v \in V.$$

En utilisant (A_4), on obtient pour tout $u,\, v \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$ avec $u \neq v$

$$\langle L'(u) - L'(v), u - v\rangle > 0.$$

Ce qui implique que L' est strictement monotone. Ainsi, par la Prop. 25.10 dans [137], L est strictement convexe. De plus, comme M est croissante, alors $\widehat{M}$ est convexe dans $[0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $u, v \in X$ avec $u \neq v$ et pour tout $s, t \in (0,1)$ avec $s + t = 1$, on a

$$\widehat{M}(L(su + tv)) < \widehat{M}(sL(u) + tL(v)) \leq s\widehat{M}(L(u)) + t\widehat{M}(L(v)).$$

Ceci prouve que $\mathcal{E}$ est strictement convexe. Puisque $\mathcal{E}'(u) = F(u)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$, alors en déduit que F est strictement monotone dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$.
Il reste à montrer que l'opérateur F est coercif.
Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$, d'après (A_2) et (M_0), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\langle Fv, v\rangle}{\|v\|} &= \frac{M\Big(\int_\Omega A(x, \nabla u)dx\Big)\int_\Omega a(x, \nabla u)\nabla v dx}{\|v\|}\\ &\geq \alpha\, m_0\, \frac{\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\nabla v|^p\, w_i dx}{\|v\|} \geq \alpha\, m_0 \|v\|^{p-1},\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\dfrac{\langle Fv, v\rangle}{\|v\|} \to \infty \quad$ quand $\quad \|v\| \to \infty.$
Par conséquent, F est coercif.

$ii)-$ Ensuite, on montre que l'opérateur F est de type (S_+).
Soit $(u_n)_n$ une suite dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ telle que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{in } W_0^{1,p}(\Omega, w)\\ \limsup\limits_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0. \end{cases}$$

On veut montrer que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$.
D'une part, comme $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$, alors $(u_n)_n$ est une suite bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$, donc il existe une sous-suite notée encore $(u_n)_n$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$, sous la monotonicité stricte de F on obtient

$$0 = \limsup_{n\to\infty}\langle F_u n - Fu,\ u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle F_u n - Fu,\ u_n - u\rangle.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle Fu_n, u_n - u\rangle = 0,$$

ce qui signifie que

$$\lim_{n\to\infty} M\Big(\int_\Omega A(x,\nabla u_n)dx\Big)\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla(u_n-u)dx = 0. \tag{7.7}$$

D'autre part, par (A_1), on a pour tout $x\in\Omega$ et $\xi\in\mathbb{R}^n$, la formule suivante

$$A(x,\xi) = \int_0^1 \frac{d}{ds}A(x,s\xi)ds = \int_0^1 a(x,s\xi)\xi ds.$$

En combinant (A_3), le théorème de Fubini et l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A(x,\nabla u_n)dx &= \int_\Omega\int_0^1 a(x,s\nabla u_n)\nabla u_n ds dx = \int_0^1\int_\Omega a(x,s\nabla u_n)\nabla u_n dx\, ds\\
&= \int_0^1\Big[\sum_{i=1}^N\int_\Omega a_i(x,s\nabla u_n)w_i^{-1/p}\partial_i u_n w_i^{1/p}dx\Big]ds\\
&\leq \int_0^1\Big[C_{p'}\sum_{i=1}^N\int_\Omega |a_i(x,s\nabla u_n)w_i^{-1/p}|^{p'}dx + C_p\sum_{i=1}^N\int_\Omega|\partial_i u_n|^p w_i dx\Big]ds\\
&\leq C_1 + C'\int_0^1\sum_{i=1}^N\int_\Omega |s\,\partial_i u_n|^p w_i\,dx\,ds + C_p\|u_n\|^p\\
&\leq C_1 + C_2\sum_{i=1}^N\int_\Omega|\partial_i u_n|^p w_i\,dx + C_p\|u_n\|^p \leq C\big(\|u_n\|^p+1\big).
\end{aligned}$$

Alors, nous déduisons que $\Big(\int_\Omega(A(x,\nabla u_n)dx\Big)_{n\geq1}$ est borné.
Comme M est continu, pour une sous-suite, il existe alors $t_0\geq 0$ tel que

$$M\Big(\int_\Omega(A(x,\nabla u_n)dx\Big) \longrightarrow M(t_0)\geq m_0 \qquad \text{quand} \quad n\to\infty. \tag{7.8}$$

D'après (7.7) et (7.8), on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla(u_n-u)dx = 0.$$

À la lumière du Lemma 7.1, nous obtenons

$$u_n \longrightarrow u \qquad \text{fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega,w),$$

ce qui implique que F est de type (S_+). □

Lemme 7.2. *Sous les conditions* (H_0), (H_1) *et* (7.2), *l'opérateur* $S : W_0^{1,p}(\Omega, w) \to W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$ *défini par*

$$\langle Su, v\rangle = -\int_\Omega b(x)|u|^{q-2}u\, v dx - \lambda \int_\Omega g(x, u, \nabla u) v dx \quad \textit{pour tout } u,\ v \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$$

est compact.

Démonstration. La preuve se fait en trois étapes.

Étape 1 **:**
Considérons l'opérateur $\phi : W_0^{1,p}(\Omega, w) \to L^{q'}(\Omega, \sigma^*)$ défini comme suit

$$\phi u(x) := -b(x)|u(x)|^{q-2}u(x) \quad \text{pour tout} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega, w) \text{ et } x \in \Omega.$$

Il est clair que ϕ est continu. De plus, nous prouvons que ϕ est borné.
Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$, grâce à l'inégalité de Hardy et la condition (7.2) nous avons

$$\begin{aligned}
\|\phi\, u\|_{q',\sigma^*}^{q'} &= \int_\Omega \left| - b(x)|u|^{q-2}u\right|^{q'} \sigma^* dx = \gamma^{q'} \int_\Omega \left|\sigma|u|^{q-2}u\right|^{q'} \sigma^{1-q'} dx \\
&\le \gamma^{q'} \int_\Omega |u|^{(q-1)q'} \sigma dx = \gamma^{q'} \int_\Omega |u|^q \sigma dx \\
&\le C' \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^p\, w_i\, dx = C'\|u\|^p.
\end{aligned}$$

Cela implique que ϕ est borné sur $W_0^{1,p}(\Omega, w)$.

Étape 2 **:**
Dans cette étape, nous montrons que l'opérateur ψ défini de $W_0^{1,p}(\Omega, w)$ à valeurs dans $L^{q'}(\Omega, \sigma^*)$ par

$$\psi u(x) := -\lambda g(x, u, \nabla u) \quad \text{pour tout} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega, w)) \quad \text{et} \ \ x \in \Omega$$

est borné et continu. Pour cela, soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$, en utilisant la condition de croissance (H_1) nous avons

$$\begin{aligned}
\|\psi\, u\|_{q',\sigma^*}^{q'} &\le \int_\Omega |\lambda g(x, u, \nabla u)|^{q'} \sigma^* dx \\
&\le (\varrho\lambda)^{q'} \int_\Omega \sigma^{q'/q}\big(e(x) + |u|^q\sigma + \sum_{i=1}^N w_i|\partial_i u|^p\big)\sigma^{1-q'} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\varrho\lambda)^{q'} \int_\Omega e(x)^{q'} dx + (\varrho\lambda)^{q'} \Big(\int_\Omega |u|^q \sigma dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^p w_i dx \Big) \\
&\leq (\varrho\lambda)^{q'} \int_\Omega e(x)^{q'} dx + C_H \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^p w_i \, dx + (\varrho\lambda)^{q'} \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^p w_i dx \\
&\leq (\varrho\lambda)^{q'} \|e\|_{q'}^{q'} + C_H \|u\|^p + (\varrho\lambda)^{q'} \|u\|^p \\
&\leq C_m \big(\|u\|^p + 1 \big),
\end{aligned}$$

où $C_m = \max\big((\varrho\lambda)^{q'} \|e\|_{q'}^{q'}, (\varrho\lambda)^{q'} + C_H \big)$.

Donc ψ est borné sur $W_0^{1,p}(\Omega, w)$.

Il reste à prouver que ψ est continu.

Soit $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega, w)$, alors $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega, w_0)$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $\prod_{i=1}^N L^p(\Omega, w_i)$.

Par conséquent, il existe une sous-suite notée (u_n) et deux fonctions mesurables θ de $L^p(\Omega, w_0)$ et ς dans $\prod_{i=1}^N L^p(\Omega, w_i)$ tels que

$$\begin{aligned}
u_n(x) \to u(x) \quad &\text{et} \quad \nabla u_n(x) \to \nabla u(x), \\
|u_n(x)| \leq \theta(x) \quad &\text{et} \quad |\nabla u_n(x)| \leq |\varsigma(x)|,
\end{aligned}$$

presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque g satisfait la condition de Carathéodory, nous obtenons

$$g(x, u_n(x), \nabla u_n(x)) \to g(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{p. p. } x \in \Omega. \tag{7.9}$$

Grâce à (H_1), nous obtenons

$$|g(x, u_n(x), \nabla u_n(x))| \leq \varrho \sigma^{1/q} \Big(e(x) + \sigma^{1/q'} |\theta(x)|^{q/q'} + \sum_{i=1}^N w_i^{1/q'} |\varsigma(x)|^{p/q'} \Big)$$

presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Comme nous avons

$$\varrho \sigma^{1/q} \Big(e(x) + \sigma^{1/q'} |\theta(x)|^{q/q'} + \sum_{i=1}^N w_i^{1/q'} |\varsigma(x)|^{p/q'} \big) \in L^{q'}(\Omega, \sigma^*) \Big),$$

alors, en utilisant (7.9), on obtient

$$\int_\Omega |g(x, u_k(x), \nabla u_k(x)) - g(x, u(x), \nabla u(x))|^{p'} \sigma^* dx \longrightarrow 0.$$

En appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\psi u_k \to \psi u \quad \text{dans } L^{q'}(\Omega, \sigma^*).$$

Alors, la suite entière (ψu_n) converge vers ψu dans $L^{q'}(\Omega, \sigma^*)$. Ce qui implique que ψ est continue.

Étape 3 **:**

Puisque l'injection $I : W_0^{1,p}(\Omega, w) \hookrightarrow L^{q'}(\Omega, \sigma^*)$ est compacte et grâce à [123, Théorème 4.19] alors, l'opérateur adjoint $I^* : L^{q'}(\Omega, \sigma^*) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$ est également compact.
Par suite, l'opérateur $S = I^* o\phi + I^* o\psi$ est compact. □

Nous donnons maintenant la preuve du Théorème 7.1.

Preuve du Théorème 7.1

Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega, w)$. La fonction u est une solution faible du problème (7.1) si et seulement si

$$Fu = -Su, \tag{7.10}$$

où $F,\ S$ sont deux opérateurs définis respectivement dans (7.6) et dans le Lemme 7.2.
D'une part, d'après la Proposition 7.1, l'opérateur F est strictement monotone, borné, continu, coercif et satisfait la condition (S_+). Alors, en utilisant le théorème de Minty-Browder (voir [137], Théorème 26 A), l'opérateur inverse $T := F^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega, w^*) \to W_0^{1,p}(\Omega, w)$ existe et borné. De plus, elle est continue et satisfait la condition (S_+).
D'autre part, par le Lemma 7.2 que l'opérateur S est borné, quasimonotone et continu.
Par conséquent, l'équation (7.10) est équivalente à l'équation abstraite de Hammerstein

$$u = Tv \quad \text{et} \quad v + SoTv = 0. \tag{7.11}$$

Pour résoudre l'équation (7.11), nous allons utiliser le degré topologique de Berkovits vu dans le chapitre préliminaires. En suite, nous considérons l'ensemble

$$B := \{v \in W^{-1,p'}(\Omega, w^*) \setminus \quad v + tSoTv = 0 \quad \text{pour tout } t \in [0,1]\}.$$

Tout d'abord, nous montrons que l'ensemble B est borné dans $W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$.
Soit $v \in B$, on pose $u := Tv$. D'après (7.2), (A_2), (H_1) et par l'inégalité de Hardy et l'inégalité de

Young, on obtient

$$\begin{aligned}
\|Tv\|^p &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\nabla u|^p w_i \, dx \le \frac{1}{\alpha} M\Big(\int_\Omega A(x,\nabla u)\, dx\Big) \int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla v \, dx = \frac{1}{\alpha}\langle Fu, u\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha}\langle v, Tv\rangle \ \le \ \frac{t}{\alpha} |\langle S\circ Tv, Tv\rangle| \\
&\le \frac{t}{\alpha}\int_\Omega |b(x)||u|^q dx + \frac{t}{\alpha}\int_\Omega |g(x,u,\nabla u)| u \, dx \\
&\le \frac{\gamma t}{\alpha}\int_\Omega |u|^q \sigma dx + \frac{t}{\alpha}\int_\Omega \varrho \sigma^{1/q}(e(x) + \sigma^{1/q'}|u|^{q/q'} + \sum_{i=1}^N w_i^{1/q'} |\partial_i u|^{p/q'}) u dx \\
&\le \frac{\gamma t}{\alpha}\int_\Omega |u|^q \sigma dx + C_{q'}\Big(\int_\Omega |e(x)|^{q'} + |u|^q\sigma + \sum_{i=1}^N |\partial_i u|^p w_i dx\Big)^{1/q'} + C_q\Big(\int_\Omega |u|^q \sigma dx\Big)^{1/q} \\
&\le C_1 \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^p w_i dx + C_2\Big(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^p w_i dx\Big)^{1/q'} \\
&\quad + C_3\Big(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\nabla u|^p w_i dx\Big)^{1/q'} + C_4\Big(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^p w_i dx\Big)^{1/p} \\
&\le Cst\big(\|Tv\|^p + \|Tv\|^{p/q'} + \|Tv\|\big).
\end{aligned}$$

Par conséquent $\{Tv \setminus v \in B\}$ est borné.

Comme l'opérateur S est borné et d'après (7.11), alors l'ensemble B est borné dans $W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$. Par suite, il existe une constante positive R telle que $\|v\|_{W^{-1,p'}(\Omega,w^*)} < R$ pour tout $v \in B$. Ainsi, $v + tSoTv \neq 0$ pour tout $v \in \partial B_R(0)$ pour tout $t \in [0,1]$.

En utilisant le Lemme 1.11, on obtient

$I + SoT \in \mathcal{F}_T(\overline{B_R(0)})$ et $I = FoT \in \mathcal{F}_T(\overline{B_R(0)})$.

Maintenant, on définit une homotopie affine Λ de $[0,1] \times \overline{B_R(0)}$ à valeur dans $W^{-1,p'}(\Omega, w^*)$ par

$$\Lambda(t,v) := v + tSoTv \quad \text{pour} \quad (t,v) \in [0,1] \times \overline{B_R(0)}.$$

En suite, par la propriété d'invariance par l'homotopie et de normalisation du degré d énoncée dans le théorème 1.6, nous avons

$$d(I + SoT, B_R(0), 0) = d(I, B_R(0), 0) = 1.$$

Par conséquent, nous pouvons trouver un point $v \in B_R(0)$ tel que

$$v + SoTv = 0.$$

Donc $u = Tv$ est une solution faible de (7.1). Ceci termine la preuve. □

Chapitre 8

Étude d'un problème parabolique de type Kirchhoff

Dans ce chapitre, nous utilisons les méthodes de degré topologique pour montrer l'existence de solutions faibles pour une classe de problèmes paraboliques non linéaires de type Kirchhoff dans l'espace $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$. Notre approche consiste à transformer ce problème parabolique non local en un nouveau problème régi par une équation d'opérateur de la forme $Lu + Fu = g$, où F est un opérateur borné demi-continu de type (S_+) par rapport au domaine de L, de plus, L est un opérateur monotone maximal linéaire de domaine dense.

8.1 Position de problème et motivation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ un ouvert borné de frontière régulière $\partial\Omega$, et p un réel tel que $2 < p < \infty$. Pour $T > 0$, on désigne par Q le cylindre $\Omega \times (0,T)$ et par ∂Q la surface latérale $\partial\Omega \times (0,T)$.
On considère par la suite le problème parabolique de type Kirchhoff ci-dessous dans les espaces appropriés (voir section 2)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - M\Big(\displaystyle\int_\Omega A(x,t,\nabla u)\,dx\Big)\,div\big(a(x,t,\nabla u)\big) = g(x,t) & \text{dans} \quad Q, \\ u(x,t) = 0 & \text{sur} \quad \partial Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur} \quad \Omega. \end{cases} \tag{8.1}$$

où $-div\big(a(x,t,\nabla u)\big)$ est un opérateur de Leray-Lions défini de $\mathcal{V} := L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ vers son dual $\mathcal{V}^* := L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$. Le second membre g est supposé appartenir à $\mathcal{V}^*$.
Le problème (8.1) est basé sur l'équation parabolique de Kirchhoff [130], qui a connu un succès

important dans l'étude de la dynamique des populations ces dernières années [133], avec le coefficient de diffusion $M(\cdot)$ exprimant la dépendance de la population à la densité globale dans l'environnement plutôt qu'à la densité à un endroit spécifique. De nombreux autres phénomènes, comme l'élasticité non linéaire, les fluides non stationnaires, la récupération d'images, etc., peuvent être modélisés à l'aide des équations de type (8.1) (voir [21, 51, 52]). Ensuite, comme la première équation du système (8.1) contient une intégrale sur Ω, ce n'est plus une identité ponctuelle, donc généralement ce type de problème est appelé non-local, ce qui provoque certaines difficultés mathématiques et rend aussi l'étude d'un tel problème particulièrement intéressante.

Dans le cas le plus simple $M = 1$, Lions dans [105] a prouvé l'existence d'une solution $u \in \mathcal{V}$ pour le problème de Cauchy-Dirichlet parabolique non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - div\big(a(x,t,u,\nabla u)\big) = f(x,t), & (x,t) \in Q, \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \Gamma, \end{cases} \tag{8.2}$$

où $-div\big(a(x,t,u,\nabla u)\big)$ est un opérateur pseudo-monotone, coercitif, uniformément elliptique de $\mathcal{V}$ à valeurs dans $\mathcal{V}^*$, de plus f appartient à $\mathcal{V}^*$.

Dans [81], Y. Fu et M. Xiang ont étudié le problème parabolique non locales (de type Kirchhoff) impliquant un exposant variable suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Big[a + b\Big(\displaystyle\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x,t)}}{p(x,t)}dx\Big)^{r(t)}\Big] div\big(|\nabla u|^{p(x,t)-2}\nabla u\big) + |u|^{p(x,t)-2}u & \\ \qquad\qquad\qquad = f(x,t,u), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Ici a, b sont deux constantes positives données, $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ est un ouvert borné de frontière régulière $\partial\Omega$. En se basant sur des conditions appropriées sur u_0 et des hypothèses sur les fonctions $r,\ p,\ f$. Les auteurs ont prouvé l'existence locale de solutions faibles au moyen de la méthode d'approximation de Galerkin.

8.2 Notations et préliminaires

Dans cette partie, nous présentons le cadre fonctionnel requis pour étudier le problème (8.1), ainsi que les définitions et les théorèmes fondamentaux de la théorie de degrés topologique qui sont pertinents pour notre objectif.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de frontière régulière. Pour tout $p \geq 2$, on considérer l'espace fonctionnel suivant:

$$\mathcal{V} := L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (T > 0)$$

muni de la norme

$$|u|_{\mathcal{V}} = \Big(\int_0^T \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} dt \Big)^{1/p} \tag{8.3}$$

est un espace de Banach séparable et réflexif (voir [44, 46]).

D'autre part, par l'inégalité de Poincaré, l'expression donnée par

$$\|u\|_{\mathcal{V}} = \Big(\int_0^T \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} dt \Big)^{1/p}$$

est une norme définie sur $\mathcal{V}$ équivalente à la norme usuelle (8.3).

Nous donnons maintenant quelques résultats et propriétés de la théorie de degré de Berkovits et Mustonen pour les opérateurs démicontinus de type (S_+).

Dans toute la suite X désigne un espace de Banach réflexif séparable et X^* son dual, on note par $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit de dualité entre X^* et X.

Soit T un opérateur multivoque défini de X à valeurs dans 2^{X^*}. Nous désignons par $Gr(T)$ le graphe de T, c'est-à-dire

$$Gr(T) = \big\{ (u,v) \in X \times X^* \ : \ v \in T(u) \big\}.$$

Définition 8.1. *L' opérateur multivoque T est dit*

1. *monotone, si pour tout paire d'éléments $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2)$ dans $Gr(T)$, alors on a l'inégalité suivante:*

$$\langle \theta_1 - \theta_2, \eta_1 - \eta_2 \rangle \geq 0.$$

2. *maximal monotone, si T un opérateur monotone pour lequel l'inégalité $\langle \theta_0 - \theta, \eta_0 - \eta \rangle \geq 0$ pour tout $(\eta, \theta) \in Gr(T)$ entraîne $(\eta_0, \theta_0) \in Gr(T)$.*

De cette définition, on voit que T est maximal monotone si et seulement si son graphe est maximal

par rapport à l'inclusion dans l'ensemble des graphes des applications monotones i.e. si T' monotone et $Gr(T) \subset Gr(T')$ alors $T = T'$.
Soit $L : D(L) \subset X \to X^*$ un opérateur linéaire maximale monotone tel que $D(L)$ est dense dans X, où

$$D(L) = \{v \in \mathcal{V} : v' \in \mathcal{V}^*, v(0) = 0\}.$$

Dans la suite, pour tout ouvert borné G de X, nous considérons les deux classes d'opérateurs suivantes:

$$\mathcal{F}_G(\Omega) := \{L + S : \overline{G} \cap D(L) \to X^* \mid S \text{ est borné, demi-continu et de type } (S_+) \text{ par rapport à } D(L) \text{ de } G \text{ à valeus dans } X^*\},$$

$$\mathcal{H}_G := \{L + S(t) : \overline{G} \cap D(L) \to X^* \mid S(t) \text{ est une homotopie bornée de type } (S_+) \text{ par rapport à } D(L) \text{ de } \overline{G} \text{ à valeus dans } X^*\}.$$

Remarque 8.1. *[35] Remarquons que la classe $\mathcal{H}_G$ contient toute les homotopies affines*

$$L + (1-t)S_1 + tS_2 \quad \text{où} \quad (L + S_i) \in \mathcal{F}_G, \qquad i = 1, 2.$$

Nous donnons maintenant le degré topologique de Berkovits et Mustonen pour une classe d'opérateurs démicontinus vérifiant la condition (S_+), pour plus de détails, voir [35].

Théorème 8.1. *Soit L un opérateur linéaire maximal monotone à domaine dense défini de $D(L) \subset X$ à valeurs dans X^* et*

$$M = \{(F, G, h) : F \in \mathcal{F}_G, \ G \text{ un ouvert borné de } X, \ h \notin F(\partial G \cap D(L))\}.$$

Alors, il existe une unique fonction degré $d : M \longrightarrow \mathbb{Z}$ satisfait les propriétés suivantes:

1. *Normalisation : $L + J$ est un opérateur de normalisation, où J est l'application de dualité définie de X à valeurs dans X^*, c'est-à-dire, $d(L + J, G, h) = 1$, quand $h \in (L + J)(G \cap D(L))$.*
2. *Additivité : Soit $F \in \mathcal{F}_G$. Si G_1 et G_2 sont deux ouverts disjoints de G tels que $h \notin F\big((\overline{G} \backslash (G_1 \cup G_2)) \cap D(L)\big)$, alors nous avons*

$$d(F, G, h) = d(F, G_1, h) + d(F, G_2, h).$$

3. *Invariance par l'homotopie : Si $F(t) \in \mathcal{H}_G$ et $h(t) \notin F(t)(\partial G \cap D(L))$ pour chaque $t \in [0,1]$, où $h(t)$ est une courbe continue dans X^*, alors*

$$d(F(t), G, h(t)) = \text{ constant}, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

4. *Existence : Si $d(F, G, h) \neq 0$, alors l'équation $Fu = h$ a une solution dans $G \cap D(L)$.*

Lemme 8.1. *Soit $L + S \in \mathcal{F}_X$ et $h \in X^*$. Supposons qu'il existe $R > 0$ tel que*

$$\langle Lu + Su - h, u \rangle > 0, \tag{8.4}$$

pour tout $u \in \partial B_R(0) \cap D(L)$. Alors

$$(L + S)(D(L)) = X^*. \tag{8.5}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, $t \in [0,1]$ et

$$F_\varepsilon(t, u) = Lu + (1-t)Ju + t(Su + \varepsilon Ju - h).$$

Comme $0 \in L(0)$ et d'après la condition aux limites (8.4), nous avons

$$\begin{aligned} \langle F_\varepsilon(t,u), u \rangle &= \langle t(Lu + Su - h, u \rangle + \langle (1-t)Lu + (1-t+\varepsilon)Ju, u \rangle \\ &\geq \langle (1-t)Lu + (1-t+\varepsilon)Ju, u \rangle \\ &= (1-t)\langle Lu, u \rangle + (1-t+\varepsilon)\langle Ju, u \rangle \\ &\geq (1-t+\varepsilon)\|u\|^2 = (1-t+\varepsilon)R^2 > 0. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que $0 \notin F_\varepsilon(t,u)$. Puisque J et $S + \varepsilon J$ sont bornés, continus et de type (S_+), or $\{F_\varepsilon(t,\cdot)\}_{t \in [0,1]}$ est une homotopie admissible. Par conséquent, en utilisant la propriété de normalisation et de l'invariance par homotopie, nous obtenons

$$d(F_\varepsilon(t,\cdot), B_R(0), 0) = d(L + J, B_R(0), 0) = 1.$$

Par suite, il existe $u_\varepsilon \in D(L)$ tel que $0 \in F_\varepsilon(t,\cdot)$.
Si on pose $t = 1$ et en faisant tendre ε vers 0^+ on obtient alors que $h \in Lu + Su$ pour un certain $u \in D(L)$. Puisque $h \in X^*$ est arbitraire, on en déduit que $(L+S)(D(L)) = X^*$. □

8.3 Existence de solutions faibles

Dans le but de prouver l'existence de solutions faibles de problème (8.1), nous aurons besoin des hypothèses suivantes:

Soit $a(x,t,\xi) : Q \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory, telle que $a(x,t,\xi) = \nabla_\xi A(x,t,\xi)$, où $A(x,t,\xi) : Q \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. En outre, on suppose, presque partout $(x,t) \in Q$ et pour tous $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$, $(\xi \neq \xi')$, que a et A sont satisfaites les hypothèses suivantes:

(A_1) $\quad A(x,t,0) = 0,$

(A_2) $\quad a(x,t,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi_i|^p,$

(A_3) $\quad |a(x,t,\xi)| \leq \beta\left(d(x,t) + |\xi|^{p-1}\right),$

(A_4) $\quad [a(x,t,\xi) - a(x,t,\xi')]\cdot(\xi - \xi') > 0,$

où $\alpha,\ \beta$ sont deux constantes positives et $k(x,t)$ est une fonction positive dans $L^{p'}(Q)$ (p' est l'exposant conjugué de p).

D'autre part, on suppose que le coefficient de diffusion $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifie la condition suivante:

(M_0) continue et croissante, de plus, qu'il existe deux constantes positives m_0 et m_1 telles que $m_0 \leq M(s) \leq m_1$ pour tout $s \in [0, +\infty[$.

Maintenant, nous présentons notre résultat principal.

Théorème 8.2. *sous les hypothèses $(A_1) - (A_4)$ et (M_0). Pour tout $g \in \mathcal{V}^*$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, le problème (8.1) admet au moins de solutions faibles $u \in D(L)$ dans le sens suivant:*

$$-\int_Q uv_t dxdt + \int_0^T M\Big(\int_\Omega A(x,t,\nabla u)dx\Big)\int_\Omega a(x,t,\nabla u)\nabla v dxdt = \int_Q gv dxdt, \tag{8.6}$$

pour tout $v \in \mathcal{V}$.

8.4 Démonstration du résultat principal

Dans cette section, nous présentons la preuve du théorème principal. Pour cela, nous transformons ce problème parabolique non linéaire de type Kirchhoff (8.1) avec condition aux limites de Dirichlet en un nouveau problème régi par une équation opérateur de la forme $Lu + Fu = g$. Ensuite, en utilisant la théorie des degrés topologiques introduite dans la section précédente, nous montrons l'existence de solutions faibles au problème d'état.

Nous commençons par donner et démontrer quelque lemmes axillaires :

Lemme 8.2. *[28] Supposons que les hypothèses (A_2)-(A_4) sont vérifiées. Pour tout suite $(u_n)_n$ dans $\mathcal{V}$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $\mathcal{V}$ et*

$$\int_Q \big[a(x,t,\nabla u_n) - a(x,t,\nabla u)\big]\nabla(u_n - u)dx \longrightarrow 0, \tag{8.7}$$

alors $u_n \longrightarrow u$ fortement dans $\mathcal{V}$.

Considérons la fonctionnelle suivante

$$\mathcal{E}(u) = \int_0^T \widehat{M}\Big(\int_\Omega A(x,t,\nabla u)dx\Big)dt, \qquad \text{pour tout } u \in \mathcal{V}$$

où $\widehat{M} : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ est la primitive de la fonction M, définie par

$$\widehat{M}(s) = \int_0^s M(\xi)d\xi.$$

Il est bien connu que $\mathcal{E}$ est bien défini et continuellement Gâteaux différentiable au point $u \in \mathcal{V}$ et la fonctionnelle $\mathcal{E}'(u) \in \mathcal{V}^*$ définie par

$$\langle \mathcal{E}'(u)\,,\, v\rangle = \langle Fu\,,\, v\rangle, \qquad \text{pour tout } u,v \in \mathcal{V}$$

où l'opérateur F défini de $\mathcal{V}$ à son dual $\mathcal{V}^*$ par

$$\langle Fu\,,\, v\rangle = \int_0^T M\Big(\int_\Omega A(x,t,\nabla u)dx\Big)\int_\Omega a(x,t,\nabla u)\nabla v dxdt \tag{8.8}$$

pour tout $u,v \in \mathcal{V}$.

Proposition 8.1. *Sous les hypothèses (M_0),$(A_1) - (A_4)$, l'opérateur F est*

(i) borné, strictement monotone, continu.

(ii) de type (S_+).

Démonstration. i) Il est clair que F est continu, car F est la dérivée de Fréchet de $\mathcal{E}$.
Tout d'abord, prouvons que l'opérateur F est borné.
Soit $u,v \in \mathcal{V}$, par l'inégalité de Hölder et la condition (M_0), on obtient

$$\begin{aligned} |< Fu,v >| &= \Big|\int_0^T M\Big(\int_\Omega A(x,t,\nabla u)dx\Big)\int_\Omega a(x,t,\nabla u)\nabla v dxdt\Big| \\ &\leq \int_0^T m_1 \int_\Omega |a(x,t,\nabla u)\nabla v|dxdt, \end{aligned}$$

ainsi,

$$| < Fu, v > | \leq m_1 \int_0^T \|a(x,t,\nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} dt.$$

À partir de la condition de croissance (A_3), nous démontrons facilement que $\|a(x,t,\nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)}$ est borné pour tout u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Donc

$$|\langle Fu, v\rangle| \leq const \int_0^T \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} dt.$$

Selon l'injection continu $\mathcal{V} \hookrightarrow L^1(0,T,W_0^{1,p}(\Omega))$, nous avons

$$|\langle Fu, v\rangle| \leq const \, \|\nabla v\|_{\mathcal{V}},$$

par conséquent, l'opérateur F est borné.

Ensuite, nous prouvons que F est un opérateur strictement monotone.

Pour cela, nous considérons la fonctionnelle $B : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$B(u) = \int_\Omega A(x,t,\nabla u) dx \quad \text{pour tout} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

donc $B \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,p}(\Omega, w), \mathbb{R})$ et

$$\langle B'(u), v\rangle = \int_\Omega a(x,t,\nabla u)\nabla v dx \qquad \text{pour tout } \; u, \, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En utilisant (A_4), on obtient pour tout u, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $u \neq v$

$$\langle B'(u) - B'(v), u - v\rangle > 0.$$

Ce qui implique que B' est strictement monotone. Ainsi, par la Prop. 25.10 dans [137], B est strictement convexe. De plus, comme M est croissant, alors $\widehat{M}$ est convexe dans $[0, +\infty[$.

Par suite, pour tout s, $r \in (0,1)$ tel que $s + r = 1$, on a

$$\widehat{M}(B(su + rv)) < \widehat{M}(sB(u) + rB(v)) \leq s\widehat{M}(B(u)) + r\widehat{M}(B(v)), \qquad \forall u, v \in X \text{ tel que } u \neq v.$$

Ceci prouve que $\mathcal{E}$ est strictement convexe, puisque $\mathcal{E}'(u) = F(u)$ dans $\mathcal{V}^*$, alors l'opérateur F est strictement monotone dans $\mathcal{V}$.

$ii)-$ Il reste à montrer que l'opérateur F est de type (S_+).

Soit $(u_n)_n$ une suite dans $D(F)$ telle que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \qquad \text{dans } \mathcal{V} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \langle Fu_n, u_n - u\rangle \leq 0. \end{cases}$$

On veut montrer que $u_n \to u$ dans $\mathcal{V}$.

D'une part, comme $u_n \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{V}$, alors $(u_n)_n$ est une suite bornée dans $\mathcal{V}$, donc il existe une sous-suite notée encore $(u_n)_n$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{V}$.

Sous la condition de stricte monotonie de F, on obtient

$$0 = \limsup_{n\to\infty} \langle Fu_n - Fu,\ u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Fu_n - Fu,\ u_n - u\rangle.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle Fu_n,\ u_n - u\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \langle Fu,\ u_n - u\rangle = 0,$$

ce qui signifie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T M\Big(\int_\Omega A(x,t,\nabla u_n)dx\Big) \int_\Omega a(x,t,\nabla u_n)\nabla(u_n - u)dxdt = 0, \tag{8.9}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T M\Big(\int_\Omega A(x,t,\nabla u)dx\Big) \int_\Omega a(x,t,\nabla u)\nabla(u_n - u)dxdt = 0. \tag{8.10}$$

D'une part, d'après (M_0) on obtient

$$\begin{aligned} m_0 \int_Q a(x,t,\nabla u)\nabla(u_n - u)dxdt & \\ \leq \int_0^T M\Big(\int_\Omega A(x,t,\nabla u)dx\Big) & \int_\Omega a(x,t,\nabla u)\nabla(u_n - u)dxdt \\ & \leq m_1 \int_Q a(x,t,\nabla u)\nabla(u_n - u)dxdt. \end{aligned} \tag{8.11}$$

En combinant (8.10) et (8.11) nous déduisons que

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q a(x,t,\nabla u)\nabla(u_n - u)dxdt = 0. \tag{8.12}$$

D'autre part, d'après (A_1), on a pour tout $x \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, la formule suivante

$$A(x,t,\xi) = \int_0^1 \frac{d}{ds} A(x,t,s\xi)ds = \int_0^1 a(x,t,s\xi)\xi ds.$$

En utilisant (A_3), le théorème de Fubini et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A(x,t,\nabla u_n)dx &= \int_\Omega \int_0^1 a(x,t,s\nabla u_n)\nabla u_n ds dx \\
&= \int_0^1 \int_\Omega a(x,t,s\nabla u_n)\nabla u_n dx ds \\
&\leq \int_0^1 \beta \int_\Omega \big(d(x,t)|\nabla u_n| + |s\nabla u_n|^p\big) dx ds \\
&\leq \beta \int_\Omega |d(x,t)||\nabla u_n| dx + \int_0^1 \int_\Omega s^p |\nabla u_n|^p) dx ds \\
&\leq C_1 \|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + C' \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \\
&\leq C \|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Alors $\left(\displaystyle\int_\Omega (A(x,t,\nabla u_n)dx\right)_{n\geq 1}$ est borné.
Comme M est continu, pour une sous-suite, il existe $s_0 \geq 0$ tel que

$$M\Big(\int_\Omega (A(x,t,\nabla u_n)dx\Big) \longrightarrow M(s_0) \geq m_0 \qquad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{8.13}$$

Par (8.9), (8.13), (A_2), (A_3) et du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x,t,\nabla u_n)\nabla(u_n - u) dx dt = 0. \tag{8.14}$$

D'après (8.12) et (8.14), nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q \big[a(x,t,\nabla u_n) - a(x,t,\nabla u)\big]\nabla(u_n - u) dx = 0.$$

À la lumière du Lemma 8.2, nous obtenons

$$u_n \longrightarrow u \qquad \text{fortement dans } \mathcal{V},$$

ce qui implique que F est de type (S_+). □

***Preuve du Théorème** 8.2.*

Considérons l'opérateur L défini à partir de $\mathcal{V} \supset D(L)$ dans son dual $\mathcal{V}^*$ par

$$\langle Lu, v\rangle = -\int_Q uv dx dt, \qquad \text{pour tout } u \in D(L),\ v \in \mathcal{V}.$$

Par conséquent, l'opérateur L est généré par $\partial/\partial t$ au moyen de la relation suivante:

$$\langle Lu, v\rangle = \int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle dt, \ \text{ pour tout } u \in D(L),\ v \in \mathcal{V}.$$

Nous pouvons confirmer, comme dans [137] que L est un opérateur maximal monotone à domaine dense.

En combinant la condition de connectivité (A_4) et la monotonie de L $\big(i.e\ \langle Lu, u\rangle \geq 0$ pour tout $u \in D(L)\big)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle Lu + Fu, u\rangle &\geq \langle Fu, u\rangle \\
&= \int_0^T M\Big(\int_\Omega A(x,t,\nabla u)dx\Big)\int_\Omega a(x,t,\nabla u)\nabla u dxdt \\
&\geq \int_0^T m_0 \int_\Omega a(x,t,\nabla u)\nabla u dxdt \\
&\geq m_0 \int_Q a(x,t,\nabla u)\nabla u dxdt \\
&\geq m_0 \int_Q |\nabla u|^p dxdt \\
&= C'\|u\|^p_{\mathcal{V}}
\end{aligned} \tag{8.15}$$

pour tout $u \in \mathcal{V}$.

Puisque le second membre dans (8.15) tend vers ∞ quand $\|u\|_{\mathcal{V}} \to \infty$, alors pour chaque $g \in \mathcal{V}^*$ il existe $R = R(g)$ pour lequel $\langle Lu + Fu - g, u\rangle > 0$ pour tout $u \in B_R(0) \cap D(L)$.

En appliquant le lemme 8.1, nous déduisons que l'équation $Lu + Fu = g$ est solvable dans $D(L)$. Ce qui implique que le problème (8.1) admet au moins une solution faible. Ceci termine la preuve.

$\square$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude de certains problèmes elliptiques, paraboliques fortement non-linéaire dégénérés de type Dirichlet ou Neumann faisant intervenir des données peu régulières (L^1 ou mesure). Nous avons ainsi utilisé deux approches pour la résolution de ces problèmes dans différent cadre fonctionnel: il s'agit des espaces de Sobolev avec poids, les espaces de Sobolev anisotrope avec poids, les espaces de Sobolev exposants variables avec poids, les espaces de Sobolev anisotropes à exposants variables avec poids.

La première approche consiste à reformuler ces problèmes en des problèmes approchées dans le but d'appliquer la méthode de monotonie, en effet, nous avons établi des résultats d'existence des solutions faibles et solutions entropiques, en utilisant la méthode de convergence forte des troncatures dans les espaces de Sobolev $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega, \overrightarrow{w})$ ou $W_0^{1,p(x)}(\Omega, \nu)$ ou $W_0^{1,\overrightarrow{p}(x)}(\Omega, \overrightarrow{w})$.

La deuxième approche se base sur une reformulation de ces problèmes de en un nouveau problème associé à l'équation de Hammerstien abstraite. Sous la méthode de compacité et la théorie de degré topologique, nous avons étudié la question d'existence de solutions faibles associées à ces problèmes.

Les difficultés rencontrées sont de natures différentes: l'absence des injections dans ces espaces, les équations sont d'une façon générale mal posées dans le cadre des solutions faibles et l'absence de condition de signe du terme dégénéré non-linéaire g.

En perspective, nous souhaitons étendre ces résultats pour d'autres espaces fonctionnels à titre d'exemple l'espace Orlicz, l'espace de Musielak-Orlicz, l'espace de Besov, et nous comptons éventuellement développer de nouvelles approches liées au théorie des dérivées fractionnaires pour la résolution de ces problèmes.

Bibliographie

[1] A. Abbassi, C. Allalou, and A. Kassidi. Anisotropic elliptic nonlinear obstacle problem with weighted variable exponent. *J.Math.Study*, In press.

[2] A. Abbassi, C. Allalou, and A. Kassidi. Existence of entropy solutions of the anisotropic elliptic nonlinear problem with measure data in weighted sobolev space. *Bol. Soc. Paran. Mat*, https://doi.org/10.5269/bspm.52541.

[3] A. Abbassi, C. Allalou, and A. Kassidi. Existence of entropy solutions for anisotropic elliptic nonlinear problem in weighted sobolev space. In *The International Congress of the Moroccan Society of Applied Mathematics*, pages 102–122. Springer, 2019.

[4] A. Abbassi, C. Allalou, and A. Kassidi. Existence of weak solutions for nonlinear p-elliptic problem by topological degree method. *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, 6(2):231–242, 2020.

[5] A. Abbassi, C. Allalou, and A. Kassidi. Topological degree methods for a neumann problem governed by nonlinear elliptic equation. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 20(3):229–241, 2020.

[6] A. Abbassi, C. Allalou, and A. Kassidi. The discontinuous nonlinear dirichlet boundary value problem with p-laplacian. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 11(2), 2021.

[7] A. Abbassi, C. Allalou, and A. Kassidi. Existence results for some nonlinear elliptic equations via topological degree methods. *Journal of Elliptic and Parabolic Equations*, pages 1–16, 2021.

[8] A. Abbassi, E. Azroul, and A. Barbara. Degenerate $p(x)$-elliptic equation with second membre in L^1. *Adv. Sci. Technol. Eng. Syst. J*, 2(5):45–54, 2017.

[9] R. Adams and J. Fournier. Sobolev spaces, acad. *Press, New York*, 19(5), 1975.

[10] D. R. Adhikari, T. M. Asfaw, and E. Stachura. A topological degree theory for perturbed ag (s+)-operators and applications to nonlinear problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 497(2):124912, 2021.

[11] R. P. Agarwal, M. Meehan, and D. O'regan. *Fixed point theory and applications*, volume 141. Cambridge university press, 2001.

[12] L. Aharouch, E. Azroul, and A. Benkirane. Quasilinear degenerated equations with L^1 datum and without coercivity in perturbation terms. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2006(19):1–18, 2006.

[13] S. Aizicovici, N. S. Papageorgiou, V. Staicu, et al. Nodal solutions for nonlinear nonhomogeneous neumann equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 43(2):421–438, 2014.

[14] Y. Akdim and C. Allalou. Existence and uniqueness of renormalized solution of nonlinear degenerated elliptic problems. *Anal. Theory Appl*, 30(3):318–343, 2014.

[15] Y. Akdim, C. Allalou, and A. Salmani. Existence of solutions for some nonlinear elliptic anisotropic unilateral problems with lower order terms. *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, 4(2):171–188, 2018.

[16] Y. Akdim, E. Azroul, and A. Benkirane. Existence of solutions for quasilinear degenerate elliptic equations. *Electronic Journal of Differential Equations(EJDE)*, 2001:1–19, 2001.

[17] C. Alves, F. Corrêa, and T. F. Ma. Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of kirchhoff type. *Computers & Mathematics with Applications*, 49(1):85–93, 2005.

[18] T. M. Asfaw. A degree theory for compact perturbations of monotone type operators and application to nonlinear parabolic problem. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2017. Hindawi, 2017.

[19] C. Atkinson and C. Champion. Some boundary value problems for the equation $\nabla.(|\nabla\phi|^N\nabla\phi) = 0$. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 37:401–419, 1984.

[20] C. Atkinson and C. Jones. Similarity solutions in some non-linear diffusion problems and in boundary-layer flow of a pseudo-plastic fluid. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 27(2):193–211, 1974.

[21] G. Autuori, P. Pucci, and M. C. Salvatori. Global nonexistence for nonlinear kirchhoff systems. *Archive for rational mechanics and analysis*, 196(2):489–516, 2010.

[22] E. Azroul, A. Barbara, H. Hjiaj, et al. Strongly nonlinear $p(x)$-elliptic problems with L^1-data. *African Diaspora Journal of Mathematics. New Series*, 16(2):1–22, 2014.

[23] E. Azroul, M. Benboubker, and S. Ouaro. The obstacle problem associated with nonlinear elliptic equations in generalized sobolev spaces. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, 14(3):223–242, 2014.

[24] E. Azroul, M. B. Benboubker, H. Hjiaj, and C. Yazough. Existence of solutions for a class of obstacle problems with L^1-data and without sign condition. *Afrika Matematika*, 27(5):795–813, 2016.

[25] E. Azroul, H. Hjiaj, and A. Touzani. Existence and regularity of entropy solutions for strongly nonlinear $p(x)$-elliptic equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013(68):1–27, 2013.

[26] J. Baranger and K. Najib. Numerical-analysis of quasi-newtonian flow obeying the power low or the carreau flow. *Numerische Mathematik*, 58(1):35–49, 1990.

[27] M. B. Benboubker, E. Azroul, and A. Barbara. Quasilinear elliptic problems with nonstandard growth. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only]*, 2011:Paper–No, 2011.

[28] M. B. Benboubker, C. Yazough, E. Azroul, and H. Redwane. Renormalized solutions for a class of nonlinear parabolic equations without sign condition involving nonstandard growth. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 41(1):69–87, 2014.

[29] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, and J. L. Vázquez. An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 22(2):241–273, 1995.

[30] P. Bénilan and F. Bouhsiss. Une remarque sur l'unicité des solutions pour l'opérateur de serrin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325(6):611–616, 1997.

[31] A. Benkirane, M. Chrif, and S. El Manouni. Existence results for strongly nonlinear elliptic equations of infinite order. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 26(3):303, 2007.

[32] A. Benkirane and A. Elmahi. Strongly nonlinear elliptic unilateral problems having natural growth terms and L^1-data. *Rendiconti di Matematica, Serie VII vol*, 18:289–303, 1998.

[33] A. Bensoussan, L. Boccardo, and F. Murat. On a non linear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 5, pages 347–364. Elsevier, 1988.

[34] J. Berkovits. Extension of the leray–schauder degree for abstract hammerstein type mappings. *Journal of differential equations*, 234(1):289–310, 2007.

[35] J. Berkovits and V. Mustonen. Topological degree for perturbations of linear maximal monotone mappings and applications to a class of parabolic problems. *Rend. Mat. Appl.*, 12(3):597–621, 1992.

[36] I. Boccardo and T. Gallouët. Nonlinear elliptic equations with right hand side measures. *Communications in Partial Differential Equations*, 17(3-4):189–258, 1992.

[37] L. Boccardo, A. Dall'Aglio, T. Gallouët, and L. Orsina. Existence and regularity results for some nonlinear parabolic equations. *Adv. Math. Sci. Appl*, 9(2):1017–1031, 1999.

[38] L. Boccardo and T. Gallouët. Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data. *Journal of Functional Analysis*, 87(1):149–169, 1989.

[39] L. Boccardo and T. Gallouët. Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms and L^1-data. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 19(6):573–579, 1992.

[40] L. Boccardo, T. Gallouët, P. Marcellini, et al. Anisotropic equations in L^1. *Differential and Integral Equations*, 9(1):209–212, 1996.

[41] L. Boccardo, T. Gallouët, and L. Orsina. Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 13, pages 539–551. Elsevier, 1996.

[42] S. Bochner. Linear partial differential equations, with constant coefficients. *Annals of Mathematics*, pages 202–212, 1946.

[43] G. Bonanno, G. D'Agui, and A. Sciammetta. Nonlinear elliptic equations involving the p-laplacian with mixed dirichlet-neumann boundary conditions. *Opuscula Mathematica*, 39(2), 2019.

[44] H. Brezis. *Opeérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. Elsevier, 1973.

[45] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[46] H. Brezis, P. G. Ciarlet, and J. L. Lions. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*, volume 91. Dunod Paris, 1999.

[47] H. Brézis and W. A. Strauss. Semi-linear second-order elliptic equations in L^1. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 25(4):565–590, 1973.

[48] L. E. J. Brouwer. Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische annalen*, 71(1):97–115, 1911.

[49] F. E. Browder. Fixed point theory and nonlinear problems. *Proc. Sym. Pure. Math*, 39:49–88, 1983.

[50] E. Cabanillas, A. Aliaga, W. Barahona, and G. Rodriguez. Existence of solutions for a class of p (x)-kirchhoff type equation viatopological methods. *J. Adv. Appl. Math. and Mech*, 2(4):64–72, 2015.

[51] T. Caraballo, M. Herrera-Cobos, and P. Marín-Rubio. Robustness of nonautonomous attractors for a family of nonlocal reaction–diffusion equations without uniqueness. *Nonlinear Dynamics*, 84(1):35–50, 2016.

[52] A. S. Carasso, J. G. Sanderson, and J. M. Hyman. Digital removal of random media image degradations by solving the diffusion equation backwards in time. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15(2):344–367, 1978.

[53] M. M. Chaharlang, M. A. Ragusa, and A. Razani. A sequence of radially symmetric weak solutions for some nonlocal elliptic problem in ^{n}. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 17(2):1–12, 2020.

[54] M. M. Chaharlang and A. Razani. Two weak solutions for some kirchhoff-type problem with neumann boundary condition. *Georgian Mathematical Journal*, 1(ahead-of-print), 2020.

[55] K.-C. Chang. Critical point theory and its applications. *Shanghai Kexue Jishu Chubanshe, Shanghai*, 1986.

[56] M. Chipot and B. Lovat. Some remarks on non local elliptic and parabolic problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 30(7):4619–4627, 1997.

[57] M. Chipot and J.-F. Rodrigues. On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 26(3):447–467, 1992.

[58] Y. J. Cho and Y.-Q. Chen. *Topological degree theory and applications*. CRC Press, 2006.

[59] S.-S. Chow. Finite element error estimates for non-linear elliptic equations of monotone type. *Numerische Mathematik*, 54(4):373–393, 1989.

[60] M. Chrif and S. El Manouni. Anisotropic equations in weighted sobolev spaces of higher order. *Ricerche di matematica*, 58(1):1–14, 2009.

[61] F. J. Corrêa, S. D. Menezes, and J. Ferreira. On a class of problems involving a nonlocal operator. *Applied Mathematics and Computation*, 147(2):475–489, 2004.

[62] F. J. S. Corrêa and R. G. Nascimento. On a nonlocal elliptic system of p-kirchhoff-type under neumann boundary condition. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(3-4):598–604, 2009.

[63] X. J. Q. D. Zhao and X. L. Fan. On generalized orlicz spaces $L^{p(x)}(\Omega)$. *J. Gansu Sci*, 9(2):1–7, 1997.

[64] A. Dall'Aglio. Approximated solutions of equations with l 1 data. application to the h-convergence of quasi-linear parabolic equations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 170(1):207–240, 1996.

[65] J. Dieudonné. Elements d'analyse tome 4. 1969.

[66] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. On the cauchy problem for boltzmann equations: global existence and weak stability. *Annals of Mathematics*, pages 321–366, 1989.

[67] W. Dong and J. Xu. Existence of weak solutions for a p-laplacian problem involving dirichlet boundary condition. *Applied Mathematics and Computation*, 248:511–518, 2014.

[68] P. Drabek, A. Kufner, and V. Mustonen. Pseudo-monotonicity and degenerated or singular elliptic operators. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 58(2):213–221, 1998.

[69] P. Drábek, A. Kufner, and F. Nicolosi. *Nonlinear Elliptic Equations: Singular and Degenerate Case*. University of West Bohemia in Pilsen, 1996.

[70] D. E. Edmunds and J. Rákosník. Density of smooth functions in $W^{k,p(x)}(\Omega)$. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 437(1899):229–236, 1992.

[71] S. El Manouni, N. S. Papageorgiou, and P. Winkert. Parametric nonlinear nonhomogeneous neumann equations involving a nonhomogeneous differential operator. *Monatshefte für Mathematik*, 177(2):203–233, 2015.

[72] H. Fan. Multiple positive solutions for a class of kirchhoff type problems involving critical sobolev exponents. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 431(1):150–168, 2015.

[73] X. Fan and D. Zhao. On the generalized orlicz-sobolev space $W^{k,p(x)}$, j. *Gansu Educ. College*, 12(1):1–6, 1998.

[74] X. Fan and D. Zhao. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263(2):424–446, 2001.

[75] X. Fan, Y. Zhao, and D. Zhao. Compact imbedding theorems with symmetry of strauss–lions type for the space $W^{1,p(x)}(\Omega)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 255(1):333–348, 2001.

[76] X.-L. Fan and Q.-H. Zhang. Existence of solutions for $p(x)$-laplacian dirichlet problem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 52(8):1843–1852, 2003.

[77] F. Faraci and C. Farkas. On a critical kirchhoff-type problem. *Nonlinear Analysis*, 192:111679, 2020.

[78] G. Figueiredo and D. de Morais Filho. Existence of positive solution for indefinite kirchhoff equation in exterior domains with subcritical or critical growth. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 103(3):329–340, 2017.

[79] G. M. Figueiredo. Existence of a positive solution for a kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 401(2):706–713, 2013.

[80] M. E. Filippakis and N. S. Papageorgiou. Nodal solutions for neumann problems with a nonhomogeneous differential operator. *Funkcialaj Ekvacioj*, 56(1):63–79, 2013.

[81] Y. Fu and M. Xiang. Existence of solutions for parabolic equations of kirchhoff type involving variable exponent. *Applicable Analysis*, 95(3):524–544, 2016.

[82] J. García Azorero and I. Peral Alonso. Existence and nonuniqueness for the p-laplacian. *Communications in Partial Differential Equations*, 12(12):126–202, 1987.

[83] L. Gasiński and N. S. Papageorgiou. Multiple solutions for a class of nonlinear neumann eigenvalue problems. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 13(4):1491, 2014.

[84] M. A. HAMMOU and E. AZROUL. Existence of weak solutions for a nonlinear parabolic equations by topological degree. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Application*, 4(4):292–298.

[85] M. A. Hammou, E. Azroul, and B. Lahmi. Existence of solutions for p(x)-laplacian dirichlet problem by topological degree. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Mathematics, Informatics, Physics. Series III*, 11(2):29–38, 2018.

[86] M. A. Hammou, E. Azroul, and B. Lahmi. Topological degree methods for a strongly nonlinear p(x)-elliptic problem. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 53(1):27–39, 2019.

[87] Y. Han, W. Gao, Z. Sun, and H. Li. Upper and lower bounds of blow-up time to a parabolic type kirchhoff equation with arbitrary initial energy. *Computers & Mathematics with Applications*, 76(10):2477–2483, 2018.

[88] T. He, Z.-a. Yao, and Z. Sun. Multiple and nodal solutions for parametric neumann problems with nonhomogeneous differential operator and critical growth. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 449(2):1133–1151, 2017.

[89] S. Heidarkhani, G. A. Afrouzi, J. Henderson, S. Moradi, and G. Caristi. Variational approaches to p-laplacian discrete problems of kirchhoff-type. *Journal of Difference Equations and Applications*, 23(5):917–938, 2017.

[90] A. Hirn. Approximation of the p-stokes equations with equal-order finite elements. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 15(1):65–88, 2013.

[91] S. Hu and N. S. Papageorgiou. Nonlinear neumann problems with indefinite potential and concave terms. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 14(6):2561, 2015.

[92] N. B. Huy and B. T. Quan. Positive solutions of logistic equations with dependence on gradient and nonhomogeneous kirchhoff term. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 444(1):95–109, 2016.

[93] O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques: et applications aux problèmes elliptiques*, volume 13. Springer, 1993.

[94] B. Kawohl. On a familiy of torsional creep problems. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1990(410):1–22, 1990.

[95] S. Kichenassamy and L. Véron. Singular solutions of the p-laplace equation. *Mathematische Annalen*, 275(4):599–615, 1986.

[96] I.-S. Kim. Topological degree and applications to elliptic problems with discontinuous nonlinearity. *Journal of Nonlinear Sciences & Applications (JNSA)*, 10(2), 2017.

[97] G. Kirchhoff. Vorlesungen\huber. *Mechanik, Leipzig, Teubner*, 1883.

[98] O. Kováčik and J. Rákosník. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 41(4):592–618, 1991.

[99] B. Lahmi, K. El Haiti, and A. Abbassi. Existence of renormalized solution for a class of doubly nonlinear parabolic equation with nonstandard growth. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 42(2):300–317, 2015.

[100] E. C. Lapa, J. B. B. Barros, R. J. de la Cruz Marcacuzco, and Z. H. Segura. Existence of solutions for a class of p(x)-kirchhoff type equation with dependence on the gradient. *Kyungpook Mathematical Journal*, 58(3):533–546, 2018.

[101] J. Leray. Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. 1933.

[102] J. Leray et al. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta mathematica*, 63:193–248, 1934.

[103] J. Leray and J. Schauder. Topologie et équations fonctionnelles. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 51, pages 45–78, 1934.

[104] Q. Li and Z. Yang. Existence of positive solutions for a quasilinear elliptic systems of p-kirchhoff type. *Differ. Equ. Appl*, 6:73–80, 2014.

[105] J. L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires. 1969.

[106] J.-L. Lions. On some questions in boundary value problems of mathematical physics. In *North-Holland Mathematics Studies*, volume 30, pages 284–346. Elsevier, 1978.

[107] D. Liu. On a p-kirchhoff equation via fountain theorem and dual fountain theorem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(1):302–308, 2010.

[108] D. Liu and P. Zhao. Multiple nontrivial solutions to a p-kirchhoff equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75(13):5032–5038, 2012.

[109] S. Liu. Existence of solutions to a superlinear p-laplacian equation. 2001.

[110] Z. Liu, D. Motreanu, and S. Zeng. Positive solutions for nonlinear singular elliptic equations of p-laplacian type with dependence on the gradient. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 58(1):28, 2019.

[111] J. Mawhin et al. Leray-schauder degree: a half century of extensions and applications. *Topological methods in nonlinear analysis*, 14(2):195–228, 1999.

[112] J. G. Melián and J. S. de Lis. On the perturbation of eigenvalues for the p-laplacian. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 332(10):893–898, 2001.

[113] V. Monetti and L. Randazzo. Existence results for nonlinear elliptic equations with p-growth in the gradient. *Ricerche di Matematica*, 49(1):163, 2000.

[114] D. Motreanu, V. V. Motreanu, and N. S. Papageorgiou. *Topological and variational methods with applications to nonlinear boundary value problems*, volume 1. Springer, 2014.

[115] F. Murat. Soluciones renormalizadas de edp elipticas no lineales. *Preprint*, 93023, 1993.

[116] F. Murat. Équations elliptiques non linéaires avec second membre l1 ou mesure. *Actes du*, 26:A12–A24, 1994.

[117] H. Nakano. *Modulared semi-ordered linear spaces*. Maruzen Company, 1950.

[118] W. Orlicz. Über konjugierte exponentenfolgen. *Studia Mathematica*, 3(1):200–211, 1931.

[119] J. Philip. N-diffusion. *Aust. J. Phiys.*, 14:1–13, 1961.

[120] A. Porretta. Nonlinear equations with natural growth terms and measure data. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only]*, 2002:183–202, 2002.

[121] A. Prignet. *Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right-hand side measures*. Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1995.

[122] H. Redwane. Existence results for a class of nonlinear parabolic equations in orlicz spaces. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2010(2):1–19, 2010.

[123] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill Science, Engineering & Mathematics, 1991.

[124] M. Sabouri and M. Dehghan. A hk mortar spectral element method for the p-laplacian equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 76(7):1803–1826, 2018.

[125] A. Salmani, Y. Akdim, and H. Redwane. Entropy solutions of anisotropic elliptic nonlinear obstacle problem with measure data. *Ricerche di Matematica*, pages 1–31, 2019.

[126] L. Schwartz. Sur certaines familles non fondamentales de fonctions continues. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 72:141–145, 1944.

[127] L. Schwartz. *Théorie des distributions. T 1 et 2 (1950)*. Hermann, 1950.

[128] J. Serrin. Pathological solutions of elliptic differential equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 18(3):385–387, 1964.

[129] I. Sharapudinov. Topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 26(4):796–806, 1979.

[130] R. Showalter. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 6(1):25–42, 1975.

[131] I. Skrypnik. Nonlinear elliptic equations of higher order,(russian) gamoqeneb. *Math. Inst. Sem. Mosen. Anotacie*, 7:51–52, 1973.

[132] I. V. Skrypnik. *Methods for analysis of nonlinear elliptic boundary value problems*, volume 139. American Mathematical Soc., 1994.

[133] N. H. Tuan. On an initial and final value problem for fractional nonclassical diffusion equations of kirchhoff type. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, 2020.

[134] T. D. Vecchio. Nonlinear elliptic equations with measure data. *Potential Analysis*, 4:185–203, 1995.

[135] C. Yazough, E. Azroul, and H. Redwane. Existence of solutions for some nonlinear elliptic unilateral problems with measure data. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2013(43):1–21, 2013.

[136] Z. Yucedag and R. Ayazoglu. Existence of solutions for a class of kirchhoff-type equation with nonstandard growth. *Univ. J. App. Math*, 2(5):215–221, 2014.

[137] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: II/B: Nonlinear Monotone Operators*. Springer Science & Business Media, 2013.

[138] D. Zhao, X. Qiang, and X. Fan. On generalized orlicz spaces $L^{p(x)}(\Omega)$. *J. Gansu Sci*, 9(2):1–7, 1997.

[139] V. V. Zhikov. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 29(1):33, 1987.