UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE

Faculté des Sciences et Techniques

Béni Mellal,Maroc

Centre des Études Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

ALI EL MFADEL

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques

Contribution à l'étude des équations différentielles floues intuitionistiques d'ordre fractionnaire

---

Thèse soutenue le vendredi 28 mai 2021 devant le jury composé de :

Pr. Mohamed OUKESSOU	Professeur à la FST, USMS, Béni Mellal	Président.
Pr. Khalid HILAL	Professeur à la FST, USMS, Béni Mellal	Rapporteur.
Pr. Adil ABBASSI	Professeur à la FST, USMS, Béni Mellal	Rapporteur.
Pr. Abdelmajid EL HAJAJI	Professeur à l'ENCG, UCD, El jadida	Rapporteur.
Pr. Zeriab Mohamed ES-SADEK	Professeur à l'ENSAM, UM5, Rabat	Examinateur.
Pr. Jalila EL GHORDAF	Professeur au CRMEF, USMS, Béni Mellal	Examinateur.
Pr. M'hamed ELOMARI	Professeur à la FP, USMS, Béni Mellal	Invité.
Pr. Said MELLIANI	Professeur à la FST, USMS, Béni Mellal	Encadrant.

Remerciements

Cette thèse est réalisée au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (LMACS) à la faculté des sciences et techniques de Beni mellal, en vue de l'obtention du diplôme de doctorat en mathématiques de l'université Sultan Moulay Slimane.
Dans ces lignes où il m'est donné l'occasion de remercier les personnes qui m'ont aidé d'une façon ou d'une autre dans l'élaboration de mon travail de thèse.

Je voudrais commencer par exprimer ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse monsieur le professeur **Said Melliani**, le directeur du laboratoire de recherche "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique" à la faculté des sciences et techniques de Béni Mellal, qui m'a donné l'opportunité de découvrir le monde passionnant de la recherche. Merci pour son aide, son soutien, ses qualités humaines et sa patience durant toutes les années de cette thèse.Je mesure mon privilège d'avoir pu travailler sous la supervision d'un directeur si impliqué et si talentueux.

Je remercie très chaleureusement monsieur le professeur **M'hamed Elomari** d'avoir co-encadré ce travail de thèse. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse.

J'exprime ensuite mes plus sincères remerciements à monsieur le professeur Khalid Hilal, à monsieur le professeur Adil Abbassi et à monsieur le professeur Abdelmajid El hajaji qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse, ils ont pris de leur temps pour lire et évaluer mon travail. Leurs remarques et leurs conseils m'ont permis d'envisager ce travail sous un autre angle ,pour tout cela je les en remercie vivement.

Tous mes remerciements vont également au professeur Mohamed Oukessou pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse me faisant ainsi un grand honneur.

Professeurs Zeriab Mohamed Es-Sadek et Jalila El Ghordaf me font l'honneur de participer au jury. Je voudrais leur remercier très chaleureusement pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour examiner mon travail.

Merci également à tous les enseignants et les doctorants du laboratoire "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique" pour leurs conseils et leurs aides pendant les années de cette thèse. je vous remercie du fond du cœur pour tout ce que vous m'avez apporté.

Finalement, je ne pouvais pas terminer ces remerciements sans remercier du fond du cœur mes parents, mes frère, mes sœurs et mes amis, en les remerciant pour leur confiance, leur patience et leur soutien indéfectible.

Table des matières

Résumé

Notre objectif dans cette thèse est l'étude de quelques équations différentielles floues intionistiques non linéaires comportant des dérivées fractionnaires en temps ou en espace. Nous nous sommes intéressés dans un premier temps à l'étude d'une équation différentielle floue non linéaire comportant une dérivée fractionnaire en temps définie au sens de Caputo, l'existence de sa solution est prouvée à l'aide du théorème de Peano. Ensuite nous avons penché sur l'étude du résultat de l'existence et de l'unicité de la solution de quelques classes des équations différentielles et aux dérivées partielles floues intuitionistiues d'ordre fractionnaire en utilisant quelques théorèmes du point fixe. Enfin, la dernière partie de cette thèse est consacrée à établir le résultat de la stabilité asymptotique de la solution d'un problème non linéaire flou intuitionistique comportant des dérivées fractionnaires en temps définies au sens de Caputo. Nous avons introduit une nouvelle notion de la stabilité pour les équations différentielles fractionnaires floues intuitionistique en étendant la méthode directe de Lyaponnov du cas ordinaire au cas fractionnaire.

Introduction générale

Dans un certain nombre de circonstances de la vie, nous devons agir dans des domaines oú l'incertitude et l'hésitation règnent. Dans ces circonstances, la tâche redoutable à accomplir consiste à prévoir un avenir incertain et programmer nos actions en conséquence. Tous les êtres humains sont habitués à douter de tout ce qui est autour d'eux et à se demander pourquoi ? parce qu'ils ne sont pas sûrs et que leurs informations sont incomplètes ou ne sont pas exactes. Par exemple, les personnes impliquées dans la gestion des activités à risques (exploitants de sites industriels, autorités de contrôle, compagnies d'assurance, organisations syndicales), sont confrontées à des incertitudes de différentes natures. Nous sommes effectivement dans un environnement où il y a des confusions à cause de toutes ces informations incomplètes. Dans la logique classique, les valeurs "vrai" et "faux" ou "zéro" et "un" sont des valeurs d'une décision en logique binaire. Mais avec une logique à valeurs multiples, cela ne fonctionnera pas bien avec la hiérarchie de la réalité. Un autre aspect de l'incertitude apparaît dans la logique multi-valeurs. En effet, il est beaucoup plus facile de dire si une personne est un homme ou une femme, mais il est difficile de dire si quelqu'un est beau (la notion de beauté est sujette à plusieurs discussion), ceci entre dans le cadre de la logique floue qui est une logique à valeurs multiples. Cette théorie qui était introduite par Zadeh [70] en 1965 est un pas vers un rapprochement entre la précision des mathématiques classiques et la subtile imprécision du monde réel. En effet, elle a pour but de permettre des gradations dans l'appartenance d'un élément à une classe, c'est-à-dire d'autoriser un élément à appartenir plus ou moins fortement à cette classe ; par exemple, un individu d'une taille donnée n'appartient pas du tout à la classe des "grands" s'il mesure 1,50 m, il y appartient tout à fait s'il mesure 1,80 m et plus sa taille se rapproche de 1,80 m, plus son appartenance à la classe des "grands" est forte. Cette notion permet l'utilisation de catégories aux limites mal définies (comme" vieux" ou "adulte"), de situations intermédiaires entre le tout et le rien ("presque vrai"), le passage progressif d'une propriété à une autre (passage de "tiède" à "chaud" selon la température), l'utilisation de valeurs approximatives ("environ douze ans"). Elle évite l'utilisation arbitraire de limites rigides à des classes, il serait aberrant, pour reprendre l'exemple évoqué, de considérer qu'un individu de 1,78 m est grand, mais qu'un individu de 1,775 m ne l'est pas du tout.

Récemment, l'analyse flou et les équations différentielles fractionnaires floues ont été proposées pour manipuler l'incertitude en raison des informations incomplètes qui apparaissent dans beaucoup de modèles mathématiques ou informatiques de quelques phénomènes du monde réel (médecine, biologie, écologie, économie, recherche scientifique...).

Le calcul différentiel fractionnaire flou est l'une des branches de l'analyse mathématique qui étudie les propriétés et les applications des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Ces dérivées et ces intégrales fractionnaires ne sont pas seulement utiles pour décrire de nombreux phénomènes et les propriétés des matériaux, mais il est clair que c'est une nouvelle modélisation beaucoup plus appropriée et précise que la modélisation qui utilise les dérivées d'ordre entier. Par exemple la modélisation des propriétés mécaniques des matériaux, à savoir la déformation des roches, les oscillations non linéaires des tremblements de terre, la dynamique des turbulences, la physique des plasmas, la biologie et l'électrochimie etc. Ces dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux à savoir les matériaux viscoélastiques ou polymères. Elles procurent un excellent moyen pour la description de la propriété de mémoire de plusieurs matériaux et processus. En effet la dérivée fractionnaire d'une fonction tient compte de tout l'historique de la fonction et ne reflète pas uniquement des caractéristiques locales comme dans le cas de la dérivée d'ordre entier. Les équations différentielles fractionnaires floues apparaissent aussi en automatique, notamment dans la commande du régulateur des systèmes dynamiques à contrôler. Dans cette direction, le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt. Agarwal [2] a introduit le calcul fractionnaire flou dans les systèmes différentiels d'ordre fractionnaire avec des valeurs initiales incertaines. Arshad [5] a prouvé l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles fractionnaires avec incertitude.Par la suite, Allahviranloo [4] a utilisé dans ses premiers travaux la notion de la différentiabilité généralisée de Hukuhara

(Hg-différentiabilité) afin de résoudre les équations différentielles fractionnelles floues et il a présenté de nouveaux résultats sous cette notion. Salahshour[60] a appliqué la technique de la transformée de Laplace floue pour résoudre certains types des équations différentielles contenants les dérivées fractionnaires floues de Riemann-Liouville. Les autres chercheurs sont intéressés par l'analyse de la stabilité qui est également l'une des questions les plus importantes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire pendant de nombreuses années. Dans ce cadre, la stabilité de Lyapunov est un outil important pour analyser le comportement asymptotique des solutions des systèmes différentiels non linéaires. Cette méthode qui consiste à trouver une fonction candidate de Lyapunov pour un système non linéaire donné, est appelée souvent la méthode directe de Lyapunov. Pour plus de détails sur les résultats de stabilité et les méthodes disponibles pour analyser la stabilité des équations différentielles fractionnaires, le lecteur peut se référer aux travaux récents [2, 39, 40, 42, 52].

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le cadre d'étude qualitative des équations différentielles et aux dérivées partielles floues et intuitionistiques non linéaires d'ordre fractionnaire. En effet, notre objectif dans cette thèse est de prouver dans un premier temps l'existence et l'unicité des solutions de ce type des équations en utilisant quelques théorèmes du point fixe. Dans un deuxième temps nous étudierons et analyserons le comportement asymptotique de ces solutions en introduisant une nouvelle définition de la stabilité de Mittag-Lefller qui généralise la stabilité de Lyaponov [40] du cas entier au cas fractionnaire.

Dans le but d'aborder les différents aspects traités dans cette thèse, nous avons organisé ce travail en cinq chapitres suivis par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires, les développements et les démonstrations de quelques résultats sur la théorie des ensembles flous [23, 70] et quelques généralités sur la théorie des ensembles flous intuitionistiques [6].

Chapitre 2 : Le deuxième chapitre à pour but d'étudier le résultat d'existence de la solution d'une équation différentielle fractionnaire floue non linéaire en utilisant le théorème de Peano.

Chapitre 3 : Le troisième chapitre, est consacré à l'étude de quelques problèmes aux limites associés aux équations différentielles floues intuitionistiques d'ordre fractionnaire. Le résultat d'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites local et non local fractionnaire flou intuitionistique d'ordre fractionnaire, est prouvé á l'aide du théorème de point fixe de

Schaefer.
Chapitre 4 : Dans ce chapitre, on établit quelques nouveaux résultats sur l'existence et l'unicité de la solution d'une équation aux dérivées partielles floues intuitionistiques d'ordre fractionnaire qui est l'objet de notre travail [24].

Chapitre 5 : Le cinquième chapitre est consacré à l'étude de la stabilité de la solution d'un système différentiel fractionnaire flou intuitionistique, nous proposons une nouvelle définition et un résultat de la stabilité au sens de Mittag Lefller pour les équations différentielles floues intuitionistiques d'ordre fractionnaire en étendant la méthode directe de Lyaponnov au cas fractionnaire (cf,voir notre article [50]).
Enfin, nous terminons cette thèse par une conclusion et quelques perspectives du futur.

Notations générales

Dans toute cette thèse, on utilisera les notations suivantes :

$\mathbb{N}$: L'ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{Z}$: L'ensemble des nombres relatifs.

$\mathbb{Q}$: L'ensemble des nombres rationnels.

$\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.

E^1 : L'ensemble des nombres flous.

$\mathbb{IF}^1$: L'ensemble des nombres flous intuitionistiques.

$\Gamma(z)$: La fonction Gamma d'Euler.

$B(z)$: La fonction Beta.

$E_\alpha(z)$: La fonction de Mittag-Lefler.

$L([a,b],E^1)$: L'espace des fonctions floues intégrable sur $[a,b]$.

$C([a,b],E^1)$: L'espace des fonctions floues continues sur $[a,b]$.

$AC([a,b])$: L'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.

$\mathcal{C}^1([a,b],E^1)$: L'espace des fonctions floues de classe C^1 sur $[a,b]$.

$L([a,b],\mathbb{IF}^1)$: L'espace des fonctions floues intuitionistiques intégrable sur $[a,b]$.

$C([a,b],\mathbb{IF}^1)$: L'espace des fonctions floues intionistiques continues sur $[a,b]$.

$\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{IF}^1)$: L'espace des fonctions floues intuitionistiques de classe C^1 sur $[a,b]$.

I^q : L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre q.

${}^{R}D^q$: La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre q.

${}^{c}D^q$: La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre q.

$\mathcal{P}_c(\mathbb{R})$: Les sous ensembles compacts de $\mathbb{R}$.

Chapitre 1

Théorie des ensembles flous et flous intuitionistiques

1.1 Théorie des ensembles flous

Le concept de l'ensemble flou permet de considérer des classes d'objets dont les frontières ne sont pas clairement déterminées, par l'introduction d'une fonction d'appartenance des objets á une classe prenant des valeurs entre 0 et 1, contrairement aux ensembles booléens dont la fonction caractéristique ne prend que deux valeur 0 ou 1.
Les classes d'objets rencontrées dans le monde réel ne possèdent pas de critères d'appartenance bien définis. Ces classes d'objets permettent de souligner le fossé qui sépare les représentations mentales de la réalité par des modèles mathématiques(équations différentielles). Ces classes auxquelles Zadeh fait allusion n'existe qu'á travers de ces représentations mentales et correspondent aux termes vagues du langage naturel comme la température élevée. La notion de l'ensemble classique est mal adaptée pour présenter ce type de classes, par exemple si l'on prend le concept de "jeune homme" il est difficile de déterminer un seuil en dessous duquel un homme sera considéré "jeune".
L'idée de Zadeh a été de proposer au lieu d'un seuil unique pour l'appartenance á l'ensemble des âges "jeune" dans un contexte donné il semblait plus réaliste de considérer deux seuil S_1 et S_2 tels que $S_1 < S_2$ ou le terme "jeune" s'applique parfaitement aux âges plus petits que S_1 (par exemple 19 ans), et ne s'applique plus du tout au dessus de S_2. Les âges plus petits que S_1 aurons le degré d'appartenance maximale (supposé égale 1), tandis que les âges plus

grand que S_2 (par exemple 40 ans) auront un degré d'appartenance minimale (supposé égale 0). Entre S_1 et S_2 les degrés d'appartenance á la classe "jeune" seront intermédiaires, par convention ils varient entre 0 et 1.

1.1.1 Définitions et exemples

Soit X un univers.

Définition 1.1. *[70] On définit un sous-ensemble A de X par la donnée d'une fonction*

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1],$$

Cette fonction est appelée "fonction d'appartenance" de A.
On peut aussi représenter le sous-ensemble flou A par la notation suivante :

$$A = \{(x, \mu_A(x)),\ x \in X\}.$$

On note par $\mathbb{F}(X)$ la collection de tous les sous-ensembles flous de X.

Remarque 1.1. *Un ensemble classique M est un sous-ensemble flou. En effet il suffit de considérer sa fonction d'appartenance μ_M égale à sa fonction caractéristique χ_M.*

$$\mu_M = \chi_M.$$

Définition 1.2. *Soit A un sous-ensemble flou de X.*

1) On appelle Support de A noté $S(A)$, $Supp(A)$, l'ensemble

$$S(A) = \Big\{x \in X, \quad \mu_A(x) > 0\Big\}.$$

2) On appelle noyau de A noté $N(A)$, l'ensemble

$$N(A) = \Big\{x \in X, \quad \mu_A(x) = 1\Big\}.$$

3) On dit que A est normal, s'il existe $x_0 \in X$ tel que

$$\mu_A(x_0) = 1.$$

4) On appelle hauteur de A notée $h(A)$ le réel

$$h(A) = \sup\Big\{\mu_A(x), \quad x \in X\Big\}.$$

Remarque 1.2. *Le* sup *n'est pas forcement atteint par la fonction d'appartenance μ_A. En prenant l'exemple de la fonction tangente hyperbolique* $(\forall x \in X \, , \, \mu_A(x) = \tanh(x))$.

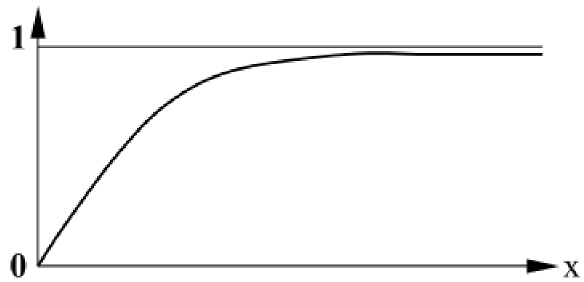


FIGURE 1.1 – Tangente hyperbolique.

- $h(A) = 1$ *sans qu'il soit atteint .*
- *N(A)=*$\emptyset$.
- $Supp(A) = \mathbb{R}_+^*$.

1.1.2 α-coupe d'un ensemble flou

Il est souvent intéressant de se référer à des sous-ensembles classiques correspondants d'une façon approximative à des sous-ensembles flous donnés, afin d'établir des critères de prise de décision. La façon la plus simple de réaliser cette approximation est de fixer une limite inférieure notée α aux degrés d'appartenance. On construit ainsi le sous-ensemble ordinaire A_α de X associé au sous-ensemble flou A appartenant à $\mathbb{F}(X)$ pour le seuil α, en sélectionnant tous les éléments de X qui appartiennent à A avec un degré au moins égal à la valeur du réel α.

Définition 1.3. *[70] On appelle la α-coupe ou sous-ensemble de niveau α, le sous-ensemble ordinaire A_α ou A^α défini par l'application Γ_α.*

$$\begin{array}{rccl} \Gamma_\alpha : & \mathbb{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X), \\ & A & \longmapsto & \Gamma_\alpha(A). \end{array}$$

Tel que $\Gamma_\alpha(A) = A_\alpha = A^\alpha = \{x \in X : \ \mu_A(x) \ \geq \alpha\}$, *avec* $0 \leq \alpha \leq 1$.

Lorsqu'on construit une α-coupe A_α d'un sous-ensemble flou A, on peut dire que α représente le seuil d'appartenance, relativement à la définition de A. Plus on est exigeant sur la notion d'appartenance, plus on augmente ce seuil.

Propriétés 1.1. *Soient $\mu, \nu \in \mathbb{F}(X)$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in [0,1]^2$. Alors on a*

1) $\mu \subseteq \nu \Rightarrow \mu_{\alpha_1} \subseteq \nu_{\alpha_1}, \forall \alpha_1 \in [0,1]$.

2) $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow \mu_{\alpha_2} \subseteq \mu_{\alpha_1}, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in [0,1]^2$.

Démonstration. Soient $\mu, \nu \in \mathbb{F}(X)$, et $(\alpha_1, \alpha_2) \in [0,1]^2$.

1) On suppose que $\mu \subseteq \nu$.

Montrons que $\mu_{\alpha_1} \subseteq \nu_{\alpha_1}$.

On a

$$\begin{aligned} (x \in \mu_{\alpha_1}) &\Leftrightarrow (x \in X,\ \mu(x) \geq \alpha_1), \\ &\Rightarrow (x \in X,\ \nu(x) \geq \alpha_1), \\ &\Rightarrow (x \in \nu_{\alpha_1}), \qquad \textit{car } \mu \subseteq \nu, \end{aligned}$$

donc $\mu_{\alpha_1} \subseteq \nu_{\alpha_1}$.

2) On suppose que $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Montrons que $\mu_{\alpha_2} \subseteq \nu_{\alpha_1}$.

On a

$$\begin{aligned} (x \in \mu_{\alpha_2}) &\Leftrightarrow (x \in X,\ \mu(x) \geq \alpha_2), \\ &\Rightarrow (x \in X,\ \mu(x) \geq \alpha_1), \\ &\Rightarrow (x \in \mu_{\alpha_1}), \end{aligned}$$

donc $\mu_{\alpha_2} \subseteq \nu_{\alpha_1}$.

□

Le théorème de décomposition suivant affirme que tout sous ensemble flou peut être décomposé selon ses $\alpha - coupes$.

Théorème 1.1. *(Théorème de décomposition) Soit A un sous ensemble flou de X de fonction d'appartenance μ_A alors on a*

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha \chi_{A_\alpha}(x) \quad \forall x \in X.$$

Démonstration. On multiplie la fonction caractéristique χ_{A_α} par α on obtient

$$\alpha\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha \quad si \quad \mu_A(x) > \alpha, \\ 0 \qquad\qquad sinon. \end{cases}$$

On passe au Sup on obtient

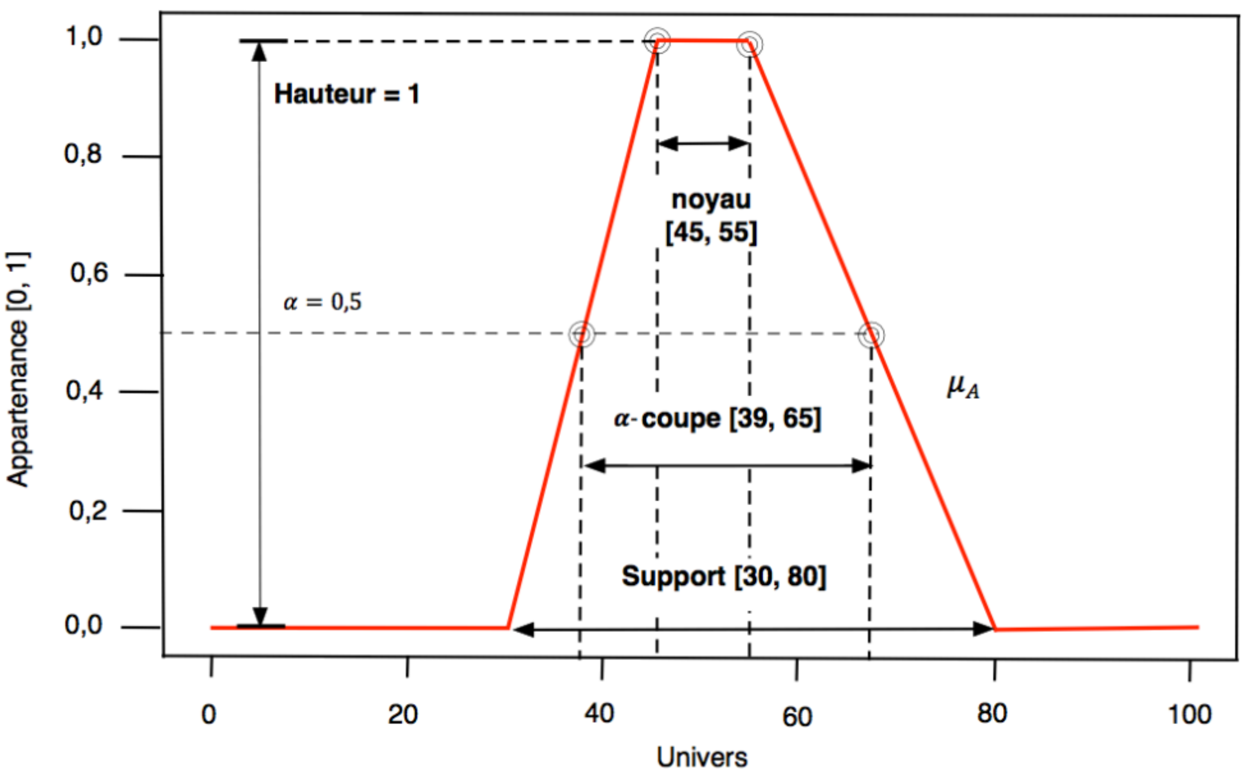
$$\sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\chi_{A_\alpha}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \{\mu_A(x) > \alpha\} = \sup_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha < \mu_A(x)\}.$$

Par la caractérisation de la borne supérieure ($S = \sup(B)$ ssi $\forall b \in B, b < S$) on a

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\chi_{A_\alpha}(x) = \mu_A(x).$$

□

Exemple 1.1. *Les caractéristiques d'un ensemble flou : noyau,support,hauteur et la coupe au niveau α.*



Théorème 1.2. *Soit* $\{\mu_i \;/\; i \in I\} \subseteq \mathbb{F}(X)$*. Alors,* $\forall \alpha \in [0,1]$*, on a*

1. $\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_\alpha \subseteq (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_a$.
2. $\bigcap_{i\in I}(\mu_i)_\alpha = (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_a$.

Démonstration. Soient $\{\mu_i \;/\; i \in I\} \subseteq \mathbb{F}(X)$ et soit $\alpha \in [0,1]$.

1. Montrons que $\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_\alpha \subseteq (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_a$.

$$
\begin{aligned}
\textit{Soit} \quad x \in \bigcup_{i\in I}(\mu_i)_\alpha \;&\Leftrightarrow\; \exists i \in I \;\; : x \in (\mu_i)_\alpha, \\
&\Leftrightarrow\; \exists i \in I \;:\; \mu_i(x) \geq \alpha, \\
&\Leftrightarrow\; \bigvee\nolimits_{i\in I}\mu_i(x) \geq \alpha \\
&\Leftrightarrow\; (\bigcup_{i\in I}\mu_i)(x) \geq \alpha, \\
&\Leftrightarrow\; x \in (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_\alpha.
\end{aligned}
$$

Donc, $\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_\alpha \subseteq (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_\alpha$.

2. Montrons que $\bigcap_{i\in I}(\mu_i)_\alpha = (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_a$.

$$
\begin{aligned}
\textit{Soit} \quad x \in \bigcap_{i\in I}(\mu_i)_\alpha \;&\Leftrightarrow\; \forall i \in I \;:\; x \in (\mu_i)_\alpha, \\
&\Leftrightarrow\; \forall i \in I \;:\; \mu_i(x) \geq \alpha, \\
&\Leftrightarrow\; \bigwedge_{i\in I}\mu_i(x) \geq \alpha, \\
&\Leftrightarrow\; (\bigcap_{i\in I}\mu_i)(x) \geq \alpha, \\
&\Leftrightarrow\; x \in (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_\alpha.
\end{aligned}
$$

Donc, $\bigcap_{i\in I}(\mu_i)_\alpha = (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_\alpha$.

□

Remarque 1.3. *Si* I *est finie alors on a l'égalité* $\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_\alpha = (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_\alpha$.

Remarque 1.4. *Si* $\forall x \in X$*,* $\mu(x) \leq \nu(x)$*, on dit que* μ *est contenu dans* ν *(ou* ν *contient* μ*) et on écrit :* $\mu \subseteq \nu$ *.*

Si $\mu \subseteq \nu$ *et* $\nu \neq \mu$ *alors, on dit que* μ *est contenu entièrement dans* ν *et on écrit* $\mu \subset \nu$*.*

$\subseteq$ *est une relation d'ordre partiel dans* $\mathbb{F}(X)$*.*

Démonstration. Montrons que $\subseteq$ est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{F}(X)$.

Réflexivité :

Soit $\mu \in \mathbb{F}(X)$.

On a $\mu = \mu \Rightarrow \mu \subseteq \mu$,

donc, $\subseteq$ est Réflexive dans $\mathbb{F}(X)$.

Antisymétrie :

Soient $\mu, \nu \in \mathbb{F}(X)$ On a

$$\begin{aligned}
((\mu \subseteq \nu) \ et \ (\nu \subseteq \mu)), \quad &\Leftrightarrow \quad ((\forall x \in X \ : \ \mu(x) \ \leq \nu(x)) \ et \ (\forall x \in X \ : \ \nu(x) \ \leq \mu(x))), \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in X : \mu(x) = \nu(x)), \\
&\Leftrightarrow \quad (\mu = \nu),
\end{aligned}$$

donc, $\subseteq$ est antisymétrique dans $\mathbb{F}(X)$.

Transitivité :

Soient $\mu, \nu, \xi \in \mathbb{F}(X)$, on a

$$\begin{aligned}
(\mu \subseteq \nu \ et \ \nu \subseteq \xi) \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in X, \ \mu(x) \ \leq \nu(x) \ et \ \nu(x) \ \leq \xi(x)), \\
&\Rightarrow \quad (\forall x \in X : \ \mu(x) \ \leq \xi(x)), \\
&\Leftrightarrow \quad \mu \subseteq \xi.
\end{aligned}$$

donc, $\subseteq$ est transitive dans $\mathbb{F}(X)$.

Par conséquent, $\subseteq$ est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{F}(X)$. $\square$

1.1.3 Principe d'extension de Zadeh

Le principe d'extension a été décrit par L.A.Zadeh [70]. Il nous permet de donner un sens à l'extension du domaine d'une application ou d'une relation définie sur un ensemble X aux sous ensembles flous de X.

L'application du principe d'extension aux ensembles flous peut être regardée comme une application de ce principe aux α-coupes de l'ensemble flou en question.

En général, si

$$f : X \times Y \longrightarrow Z.$$

et si A et B sont des sous ensembles flous respectifs de X et Y, respectivement, on obtient

$$\Big(f\,(A,B)\Big)_{\alpha} = f\Big(A_\alpha, B_\alpha\Big).$$

où A_α, B_α et $(f(A,B))_\alpha$ sont respectivement les α-coupes de A, B et $f(A,B)$.

Définition 1.4. *[23] Soit $f : X \longrightarrow Y$, et $A \in \mathbb{F}(X)$ et $B \in \mathbb{F}(Y)$, alors l'ensemble flou $f(A)$ est défini, via le principe d'extension, par*

$$f(A) \in \mathbb{F}(Y) \qquad et \qquad \mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x).$$

Ainsi on définit $f^{-1}(B)$ par :

$$\forall x \in X,\ f^{-1}(B)(x) = \mu_B(f(x)).$$

$f(A)$ s'appelle l'image directe de A par f.
$f^{-1}(B)$ s'appelle l'image réciproque de B par f.

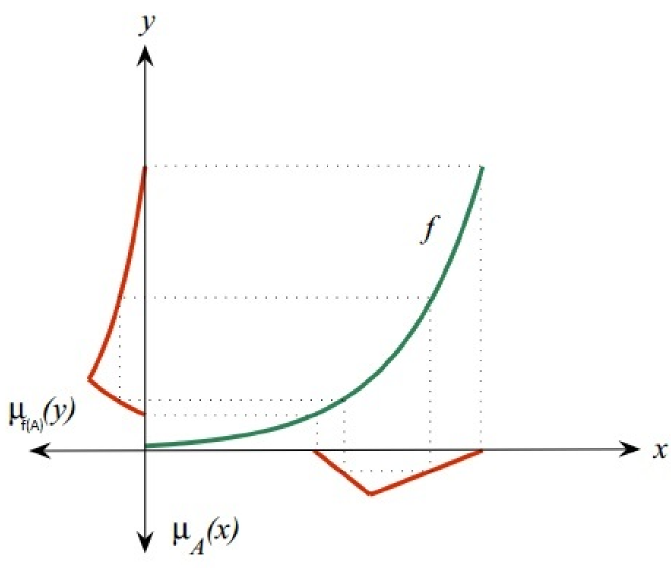


Figure 1.2 – Principe d'extension

Remarque 1.5. *Dans l'ordre d'appliquer ce principe aux applications floues, on reécrit sous la forme équivalente suivante :*

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x\in X} \min\Big(\mu_A(x), \chi_{\{f(x)\}}(y)\Big).$$

Théorème 1.3. *Soit f une application de X dans Y. Alors,*

1. $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{F}(X)\ \ \mu_1 \subseteq \mu_2 \Rightarrow f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2)$.
2. *Pour tout $\mu_i \in\ \mathbb{F}(X)$ et $i \in I$. On a :*

$$f(\bigcup_{i\in I} \mu_i) = \bigcup_{i\in I} f(\mu_i).$$

.

3. *Pour tout $\nu_j \in\ \mathbb{F}(Y)$ et $j \in J$. On a :*

$$f^{-1}(\bigcup_{j\in J} \nu_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(\nu_j),$$

.

4. *Pour tout $\nu_i \in\ \mathbb{F}(Y)$ et $i \in J$. On a :*

$$f^{-1}(\bigcap_{j\in J} \nu_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(\nu_j),$$

.

5. $\forall \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{F}(Y) :\ \nu_1 \subseteq \nu_2 \Rightarrow f^{-1}(\nu_1) \subseteq f^{-1}(\nu_2)$.
6. $\forall \mu \in \mathbb{F}(X) : \mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$.
7. *Si f est une application injective de X dans Y, alors*

$$\forall \mu \in \mathbb{F}(X)\ :\ \mu = f^{-1}(f(\mu)).$$

8. *Si f est une application injective de X dans Y, alors,*

$$\begin{aligned} \psi :\ \ \mathbb{F}(X) &\longrightarrow \mathbb{F}(Y), \\ \mu &\longmapsto f(\mu). \end{aligned}$$

est injective.

9. *Si f est une application injective de X dans Y, alors,*

$$\begin{aligned} \phi :\ \ \mathbb{F}(Y) &\longrightarrow \mathbb{F}(X), \\ \nu &\longmapsto f^{-1}(\nu). \end{aligned}$$

est surjective.

10. $\forall \nu \in \mathbb{F}(Y): \ f(f^{-1}(\nu)) \subseteq \nu$.

11. Si f *est une application surjective, alors*

$$\forall \nu \in \mathbb{F}(Y): \ f(f^{-1}(\nu)) = \nu.$$

12. Si f *est une application surjective, alors,* ψ *est surjective.*

13. Si f *est une application surjective, alors,* ϕ *est injective.*

14. $\forall \mu \in \mathbb{F}(X), \ \forall \nu \in \mathbb{F}(Y): \ f(\mu) \subseteq \nu \Leftrightarrow \mu \subseteq f^{-1}(\nu)$.

15. $\forall \mu \in \mathbb{F}(X)$, *on a* $g(f(\mu)) = (g \circ f)(\mu)$.

16. $\forall \xi \in \mathbb{F}(Z)$, *on a* $f^{-1}(g^{-1}(\xi)) = (g \circ f)^{-1}(\xi)$.

Démonstration. En utilisant le principe d'extension (Définition 1.4) et les définitions de la réunion et l'intersection flou, on peut montrer les assertions de (1) jusqu'au (5) .

6. Montrons que : $\forall \mu \in \mathbb{F}(X)$, on a $\mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$.

Soient $\mu \in \mathbb{F}(X)$ et $x \in X$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(\mu))(x) &= f(\mu)(f(x)), \\ &= \bigvee\{\mu(x')/x' \in X; \ f(x') = f(x)\}, \\ &\geq \mu(x). \end{aligned}$$

Donc $\mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$. En particulier, si f est une injection, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(\mu))(x) &= f(\mu)(f(x)), \\ &= \bigvee\{\mu(x')/x' \in X; \ f(x') = f(x)\}, \\ &= \bigvee\{\mu(x')/x' \in X; \ x' = x\}, \\ &= \mu(x). \end{aligned}$$

Donc, (7) est vrai.

Par suite l'application ψ est injective et l'application ϕ est surjective, d'où on a (8) et (9).

Pour prouver (10). Soit $\nu \in \mathbb{F}(Y)$, alors,

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(\nu))(y) &= \bigvee\{f^{-1}(\nu)(x)/x \in X; \ f(x) = y\}, \\ &= \bigvee\{\nu(f(x))/x \in X; \ f(x) = y\}, \\ &= \nu(y) \quad si f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ &= 0 \quad sinon. \end{aligned}$$

$\forall y \in Y$. Donc $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$ si f est une surjection. Par suite on a les assertions de (11) à (13) sont vrais.

L'assertion (14) est une conséquence immédiate des affirmations (1) à (13).

15. Montrons que $g(f(\mu)) = (g \circ f)(\mu)$. Soit $z \in Z$

$$\begin{aligned} g(f(\mu))(z) &= \bigvee\{f(\mu)(y)/y \in Y;\ g(y) = z\}, \\ &= \bigvee\{\bigvee\{\mu(x)/x \in X\ f(x) = y\}\ /y \in Y;\ g(y) = z\}, \\ &= \bigvee\{\mu(x)/x \in X;\ g(f(x)) = z\}, \\ &= \bigvee\{\mu(x)/x \in X;\ (g \circ f)(x) = z\}, \\ &= (g \circ f)(z). \end{aligned}$$

Donc $g(f(\mu)) = (g \circ f)(z)$.

16. Soit $\xi \in \mathbb{F}(Z)$ Montrons que $f^{-1}(g^{-1}(\xi)) = (gof)^{-1}(\xi)$. Soit $x \in X$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(g^{-1}(\xi)) &= \xi(g(f(x))), \\ &= g^{-1}(\xi)(f(x)), \\ &= f^{-1}((g^{-1}(\xi))(x)), \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(g^{-1}(\xi)) = (g \circ f)^{-1}(\xi)$.

□

Définition 1.5. *Soit*

$$\begin{aligned} g :\quad & X_1 \times ... \times X_n \longrightarrow Y, \\ & (x_1, ..., x_n) \longmapsto g(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

On lui associée la fonction $\widehat{g}$ définie par

$$\begin{aligned} \widehat{g}\quad & \mathbb{F}(X_1) \times ... \times \mathbb{F}(X_n) \longrightarrow \mathbb{F}(Y), \\ & (A_1, ..., A_n) \longrightarrow \widehat{g}(A_1, ..., A_n). \end{aligned}$$

avec

$$\mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) = \sup_{(x_1,...,x_n) \in A_1 \times ... \times A_n, g(x_1,...,x_n) = y} \min(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)).$$

Si l'ensemble $\Big\{(x_1, ..., x_n),\ g(x_1, ..., x_n) = y\Big\}$ *est vide, alors on pose par définition*

$$\mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) = 0.$$

Remarque 1.6. *Soit* $x = (x_1, ..., x_n)$*, alors on a*

$$\mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}(x_1, ..., x_n) = \min\Big(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\Big).$$

Ainsi, d'après le principe d'extension donné par la Définition 1.4, on obtient

$$\mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) = \sup \mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}(g^{-1}(y)).$$

Théorème 1.4. *Soient* $f : X \longrightarrow Y$ *et* $g : Y \longrightarrow Z$ *alors, d'après le principe d'extension on obtient :*
$$\widehat{g} \circ \widehat{f} = \widehat{g \circ f}.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{F}$ et $z \in Z$, alors on a,

$$\begin{aligned}
\mu_{\widehat{g \circ f}}(z) &= \sup \mu_A \Big((g \circ f)^{-1}(z)\Big), \\
&= \sup \mu_A \Big(f^{-1}(g^{-1}(z))\Big), \\
&= \sup \bigcup_{y \in g^{-1}(z)} \mu_A \Big(f^{-1}(y)\Big), \\
\mu_{\widehat{g} \circ \widehat{f}} &= \sup \mu_{\widehat{f}(A)}(g^{-1}(z)), \\
&= \sup \Big\{\sup \mu_A \Big(f^{-1}(y)\Big),\ y \in g^{-1}(z)\Big\}.
\end{aligned}$$

□

1.1.4 Opérations sur les ensembles flous

Les opérations sur les sous-ensembles flous sont généralement des extensions des opérations connues sur les ensembles classiques (égalité, réunion, intersection, complément, etc.). Elles s'appliquent d'ailleurs aux ensembles classiques lorsque les fonctions d'appartenance se réduisent à des fonctions caractéristiques.

Soit $\alpha \in]0, 1]$, rappelons que l'ensemble α-coupe de A est défini par :

$$A_\alpha = \Big\{x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha\Big\}.$$

Si $A, B \in \mathbb{F}(X)$, alors par définition,

$$A = B \quad si \quad et \quad seulement \quad si \quad \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in X.$$

Si $A, B \in \mathbb{F}(X)$, alors

$$A = B \quad si \quad et \quad seulement \quad si \quad A_\alpha = B_\alpha, \quad \forall \alpha \in]0,1].$$

Il est facile de voire que

$$Supp(A) = \bigcup_{\alpha \in]0,1]} A_\alpha.$$

D'autre part, on a

$$\forall x \in X, \; \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \Big(\alpha \chi_{A_\alpha}(x) \Big).$$

– **Complémentaire** : Soit $A \in \mathbb{F}(X)$ caractérisé par la fonction d'appartenance μ_A. Le complémentaire de A est un sous-ensemble flou, noté $\overline{A}$, et caractérisé par la fonction d'appartenence $\mu_{\overline{A}}$, définie par :

$$\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

– **Réunion** : Pour tout $A, B \in \mathbb{F}(X)$, la réunion de A et B est un sous-ensemble flou de X, noté $A \cup B$, et

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max \Big(\mu_A(x), \mu_B(x) \Big), \qquad \forall x \in X.$$

– **Intersection** Pour tout $A, B \in \mathbb{F}(X)$, l'intersection de A et B est un sous-ensemble flou de X, noté $A \cap B$, et on a

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min \Big(\mu_A(x), \mu_B(x) \Big), \quad \forall x \in X.$$

1.1.5 Nombres flous

1.1.5.1 Définitions et exemples

Définition 1.6. *[32]*
Un nombre flou est la donnée d'une application $u : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ telle que

1. *u est semi continue supérieure,*
2. *u est normal,c-á-d il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = 1$,*

3. *u est convexe flou, c-á-d* $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in [0,1]$,
4. $\overline{\{x \in \mathbb{R},\ u(x) > 0\}}$ *est compact.*

Notation.

1) On note par E^1 la collection de tous les nombres flous.

2) On note aussi l'élément nul de E^1 par la formule suivante :

$$0_{E^1}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0, \\ 0 & \quad sinon. \end{cases}$$

Exemple 1.2. *Soit u le sous ensemble flou décrit par sa fonction d'appartenance suivante*

$$u(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0, \\ x^3 & si \quad x \in [0,1[, \\ 1 & si \quad x \in [1, 1.5], \\ (2,5-x)^3 & si \quad x \in [1.5, 2.5], \\ 0 & si \quad x > 2.5. \end{cases}$$

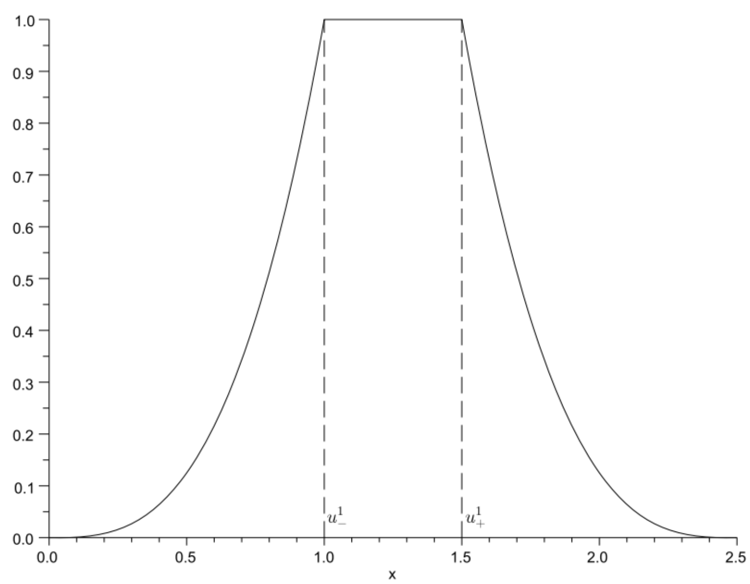


FIGURE 1.3 – Exemple d'un nombre flou et sa coupe au niveau 1 .

u est un nombre flou dont le support est $Supp(u) =]0, 2.5[$ et sa coupe au niveau 1 est $u^1 = [1, 1.5]$.

Exemple 1.3. *Soit v sous ensemble flou décrit par sa fonction d'appartenance suivante .*

$$v(x) = \begin{cases} x - 1 & pour \quad x \in [1, 2], \\ -x + 3 & pour \quad x \in [2, 3], \\ 0 & \qquad ailleurs. \end{cases}$$

v est un nombre flou dont le support est $supp(v) =]1, 3[$ et sa coupe au niveau 1 est $v^1 = \{2\}$.

Exemple 1.4. *Le sous ensemble flou A représenté dans la figure suivante n'est pas un nombre flou car il n'est pas convexe flou.*

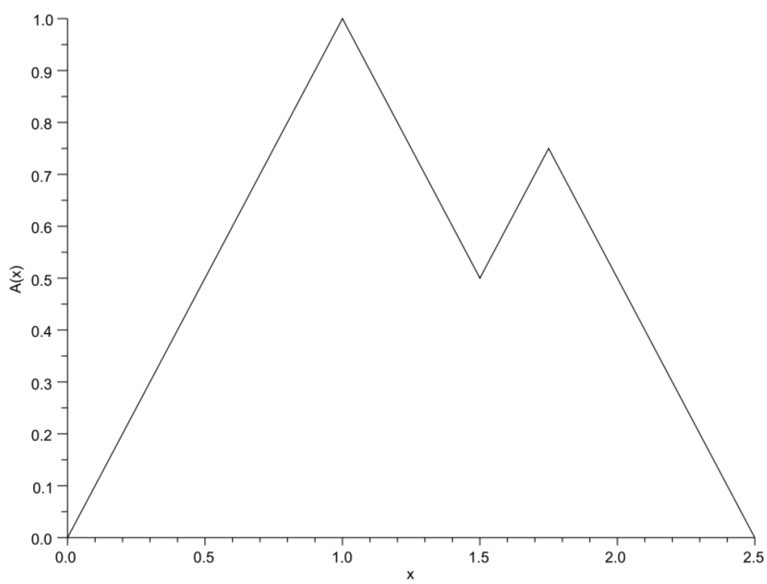


FIGURE 1.4 – Exemple d'un sous ensemble flou qui n'est pas un nombre flou .

Remarque 1.7. *Soit r un nombre réel alors on peut considérer que r comme étant un élément de E^1 par la correspondance suivant.*

$$r \to \tilde{r}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t = r, \\ 0 & \qquad sinon. \end{cases}$$

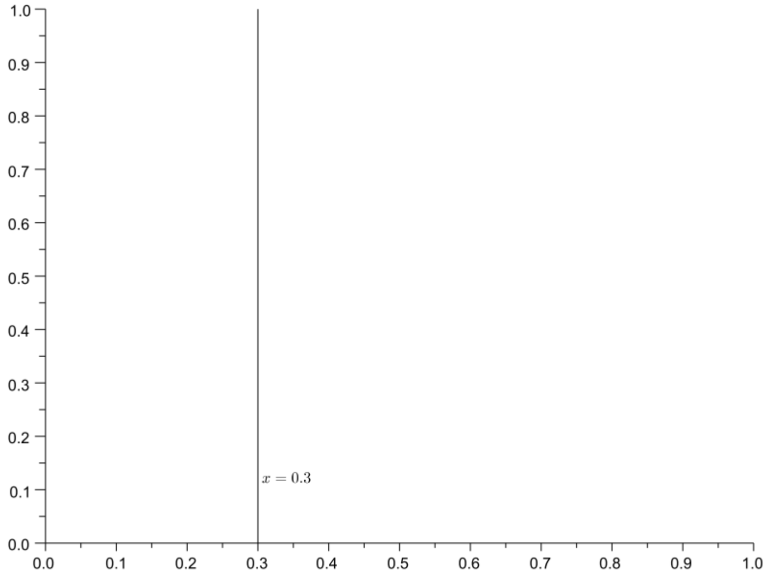


FIGURE 1.5 – Exemple d'un singleton flou.

1.1.5.2 Opérations algébriques sur les nombres flous

Soient A et B deux sous ensemble compact non vides de $\mathbb{R}$ et λ un nombre réel.
On définit l'addition et la multiplication par un scalaire de Minkowski par :

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

et

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

En général, $A + (-1)A \neq \{0\}$.
En effet si on pose $A = [0, 1]$, alors $(-1)A = [-1, 0]$, par suite

$$A + (-1)A = A - A = [0, 1] + [-1, 0] = [-1, 1] \neq \{0\}.$$

La différence de Hukuhara noté par $\ominus_H$, nous permet de répondre á ce problème.

Définition 1.7. *Soient $u, v \in E^1$, s'il existe $w \in E^1$ tel que, $u = v + w$ alors w est dit la différence de Hukuhara de u et v notée par $u \ominus_H v$.*

Exemple 1.5. *Soient* $u, v \in E^1$ *et* $\alpha \in [0,1]$, *tels que* $[u]^\alpha = [0,1]$ *et* $[w]^\alpha = [-1,1]$, *alors on a*

$$[-1,1] \ominus_H [-1,0] = [0,1] \quad et \quad [-1,1] \ominus_H [1,0] = [-1,0].$$

donc $[u]^\alpha \ominus_H [u]^\alpha = \{0\}$,
par suite $u \ominus_H u = 0_{E^1}$.

Propriétés 1.2. *[32]Soient* $u, v \in E^1$, *alors*

1) *Si* $u \ominus_H v$ *existe, alors elle est unique.*
2) $u \ominus_H u = 0_{E^1}$.
3) $(u + v) \ominus_H v = u$.

Remarque 1.8. *La différence de Hukuhara* $u \ominus_H v$ *est unique, mais elle n'existe pas toujours. Une condition nécessaire pour que* $u \ominus_H v$ *existe il faut que* u *contient une translation* $a + v$ *de* v.
La généralisation de la différence de Hukuhara (H-différence) donnée dans la définition suivant permet de répondre á cette situation.

Définition 1.8. *Soient* $u, v \in E^1$, *la différence de Hukuhara généralisée (gH-différence) de* u *et* v *est un nombre flou* w *s'il existe tel que*

$$u \ominus_{gH} v = w \Leftrightarrow \begin{cases} i) \quad u = v + w, \\ ou \\ ii) \quad v = u + (-1)w. \end{cases}$$

Propriétés 1.3. *[11] Soient* u *et* v *deux nombres flous alors on a*

- *1)* $u \ominus_{gH} u = 0_{E^1}$.
- *2)La différence de Hukuhara généralisée (gH-différence) existe est unique.*
- *3) Si* $u \ominus_{gH} v$ *existe dans le sens* $i)$ *alors* $u \ominus_{gH} v$ *existe dans le sens* $ii)$ *et vice versa .*
- *4)* $(u + v) \ominus_{gH} v = u$.
- *5)* $u \ominus_{gH} v = 0_{E^1} \Leftrightarrow u = v$.

Définition 1.9. *Soient* u *et* v *deux nombres flous et* $k \in \mathbb{R}$.
D'après le principe de l'extension de Zadeh on a :

$$(u + v)(z) = \max_{z=x+y} min\{u(x), v(y) = \max_x min\{u(x), v(z - x)\}.$$

$$(-u)(z) = \max_{z=-x} min\{u(x), v(-z)\}.$$

$$(k.u)(x) = \begin{cases} u(x/k) & , k > 0, \\ \widetilde{0} & , k = 0. \end{cases}$$

Remarque 1.9. *Soient* $u, v \in E^1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in [0,1]$ *alors, on a*

1 - $[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$.

2 - $[u-v]^\alpha = [u_1^\alpha - v_2^\alpha, u_2^\alpha - v_1^\alpha]$.

3 - $[\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha = \begin{cases} [\lambda u_1^\alpha, \lambda u_2^\alpha] & si \quad \lambda \geq 0. \\ [\lambda u_2^\alpha, \lambda u_1^\alpha] & si \quad \lambda < 0. \end{cases}$

4 - $[uv]^\alpha = [min\{u_1^\alpha v_1^\alpha, u_1^\alpha v_2^\alpha, u_2^\alpha v_1^\alpha, u_2^\alpha v_2^\alpha\}, max\{u_1^\alpha v_1^\alpha, u_1^\alpha v_2^\alpha, u_2^\alpha v_1^\alpha, u_2^\alpha v_2^\alpha\}]$.

Définition 1.10. *Soient* $u \in E^1$ *et* $r \in [0,1]$.

La forme paramétrique du nombre flou u est la donnée d'un couple de fonctions $(\underline{u}(r), \overline{u}(r))$, *tel que*

1. $\underline{u}(r)$ *est un fonction bornée, croissante, continue á gauche sur* $]0,1]$ *et continue á droit de* 0,
2. $\overline{u}(r)$ *est un fonction bornée, décroissante et continue á gauche sur* $]0,1]$ *et continue á droit de* 0,
3. $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r)\ \forall r \in [0,1]$.

Proposition 1.1. *Soient* $r \in [0,1]$ *et* $x = (\underline{x}(r), \overline{x}(r)), y = (\underline{y}(r), \overline{y}(r)) \in E^1$, *alors on a*

1. $x = y \Leftrightarrow (\underline{x}(r) = \underline{y}(r))$ *et* $(\overline{x}(r) = \overline{y}(r))$.
2. $(x \oplus y)(r) = (\underline{x}(r) + \underline{y}(r), \overline{x}(r) + \overline{y}(r))$.
3. $(x \ominus y)(r) = (\underline{x}(r) - \overline{y}(r), \overline{x}(r) - \underline{y}(r))$.
4. $(k \odot x)(r) = (k\underline{x}(r), k\overline{x}(r)) si \quad k \geq 0$.
5. $(k \odot x)(r) = (k\overline{x}(r)), k\underline{x}(r)) si \quad k < 0$.

1.1.5.3 Distance entre deux nombres flous

Définition 1.11. *[55] Soient* $u, v \in E^1$ *et* $\alpha \in [0,1]$, *on définit la distance entre les deux nombres flous u et v par :*

$$D(u,v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d([u]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Tel que d est la distance de Hausdorff définie sur $P_c(\mathbb{R}^n)$ qui est l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2. *[55] D une métrique sur E^1 et elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$(E^1; D)$ est un espace métrique complet.*
2. *$D(u+w, v+w) = D(u,v)$, $\forall u, v, w \in E^1$.*
3. *$D(ku, kv) = |k|D(u,v)$, $\forall u, v \in E^1$ et $k \in \mathbb{R}$.*
4. *$D(u+w, v+z) \leq D(u,v) + D(w,z)$, $\forall u, v, w, z \in E^1$.*

Proposition 1.3. *[32] Soit $u \in E^1$ alors on a*

1. *$[u]^\alpha \in P_c(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha \in [0,1]$.*
2. *$[u]^\beta \subset [u]^\alpha$ si $0 \leq \alpha \leq \beta$.*
3. *Si $\alpha_n \subset [0,1]$ est une suite croissante vers α, alors $[u]^\alpha = \bigcap_{n \geq 1} [u]^{\alpha_n}$.*
   ***Inversement**, si $A^\alpha = \{[u_1^\alpha, u_2^\alpha]; \alpha \in [0,1]\}$ est une famille des intervalles fermés de $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés $(1)-(3)$, alors A^α définit un nombre flou $u \in E^1$ tel que $[u]^\alpha = A^\alpha$ et $[u]^\alpha = \cup_{0<\alpha\leq 1} A^\alpha$.*

Démonstration. Soit A^α est une famille des intervalles fermés de $\mathbb{R}$ telle que A^α vérifie les propriétés $(1)-(3)$, alors on pose

$$u(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin M_0, \\ sup\{\alpha \in [0,1] : x \in M_\alpha\} & si \quad x \in M_0. \end{cases}$$

-Montrons que u est convexe flou.
Soit x un élément fixé dans l'intervalle $[a,b]$ tel que $[a,b] \subseteq A^0$.
Posons

$$u(a) = r_a = sup\{\alpha \mid a \in M_\alpha\}.$$

et

$$u(b) = r_b = sup\{\alpha \mid b \in M_\alpha\}.$$

On suppose que $r_a \leq r_b$,donc d'aprés 2) on a $A^{r_b} \subset A^{r_a}$ par suite $b \in A^{r_b} \subset A^{r_a}$.
Or $a, b \in A^{r_a}$ et A^{r_a} est un intervalle fermé alors $[a,b] \subset A^{r_a}$, par suite

$$u(x) \geq r_a = u(a) = \min\{u(a), u(b)\}.$$

De la même manière on montre que $r_a \geq r_b$.
Montrons que $u^\alpha = A^\alpha$.
Soient $\alpha_0 \in]0, 1]$ et $x \in A^{\alpha_0}$, alors $x \in \{\alpha \mid x \in A^\alpha\}$, par suite on a

$$u(x) = \sup\{\alpha \mid x \in A^\alpha\} \geq \alpha_0,$$

Ce qui implique que $x \in u^{\alpha_0}$,
D'où $A^{\alpha_0} \subset u^{\alpha_0}$.
Montrons l'inclusion inverse : $u^{\alpha_0} \subset A^{\alpha_0}$.
Soit $x \in u^{\alpha_0}$, alors $u(x) \geq \alpha_0$.
Si on Suppose que $u(x) > \alpha_0$ donc $\sup\{\alpha \mid x \in A^\alpha\} > \alpha_0$, par suite il existe $\alpha_1 > \alpha_0$ tel que $x \in A^{\alpha_1}$,
Comme $A^{\alpha_1} \subset A^{\alpha_0}$ alors $x \in A^{\alpha_0}$.
Maintenant si on suppose que $u(x) = \alpha_0 = \sup\{\alpha \mid x \in A^\alpha\}$, alors il existe un suite α_n qui converge vers α_0 tel que $x \in A^{\alpha_n}$ pour tout $n \geq 1$.
D'après 3), on a

$$x \in \bigcap_{n\geq 1} [A]^{\alpha_n} = A^{\alpha_0}.$$

Par suite $u^{\alpha_0} \subset A^{\alpha_0}$. Finalement $u^{\alpha_0} = A^{\alpha_0}$.
-Montrons que u est semi continue supérieure .
Puisque $u^\alpha = A^\alpha$ et l'ensemble A^α est un fermé, alors l'ensemble $\mathbb{R} - A^\alpha$ est un ouvert, ce qui montre que u est semi continue supérieure.
-Montrons que le support de u est compact.
Il est facile de voir que

$$u_0 = \overline{\{x \in \mathbb{R},\ u(x) > 0\}} = \overline{\cup_{n\geq 1}^{\infty}\{x \in \mathbb{R},\ u(x) > \alpha_n\}} = \overline{\cup_{n\geq 1}^{\infty} A^{\alpha_n}},$$

Donc $u_0 = A^0$, par suite u_0 est sous ensemble borné de $\mathbb{R}$,donc il est compact.
Finalement, u définit un nombre flou.

□

1.2 Théorie des ensembles flous intuitionistiques

Le développement de la théorie des ensembles flous, a été spectaculaire dans les trois dernières décennies. Néanmoins, il y a des problèmes qui pour une meilleure analyse exigent une philosophie semblable à la notion floue, dans lequel non seulement le degré d'appartenance d'un élément à un ensemble est pris en considération, mais aussi bien son degré de non-appartenance à cet ensemble. Dans cette direction, en 1984, La notion des ensembles flous intuitionistiques (IFS) a été introduite par K.Atanassov [6] comme une généralisation de la notion des ensembles flous (FS) qui a été décrite par Zadeh [70].

1.2.1 Motivations

Deux personnes "x" et "y" ont acheté une boîte de chocolat, cette boîte contient 10 pièces. 7 ont été mangés par "y", deux par "x" et une pieče de chocolat est tombé sous la table.
à ce moment là "z" un ami de "x", est venu, et "x" déclare :

"Nous ne pouvons pas te donner de chocolat, parce que "y" a mangé toutes les pièces "

Donnons une estimation de la valeur de vérité de cette déclaration avant qu'on ait une connaissance des évènements ultérieurs. Puisque "y" n'a pas été le seul qui a mangé le chocolat, alors à partir du point de vue classique qui utilise 0 et 1 pour les estimations, la déclaration de "x" a une valeur de vérité nulle.
D'autre part, on est convaincu d'une façon intuitive que la déclaration est plus vraie que fausse. Parce qu'il ne reste plus de chocolat.
Si on estime la déclaration de "x" dans les termes de logiques ternaires, introduite par Jan Lukasiewicz en 1926 [34], qui prend l'ensemble $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ comme ensemble des estimations, sa valeur de vérité devra être $\frac{1}{2}$.
Lukasiewicz a généralisé son idée à la notion de plusieurs valeurs logiques [34]. Par exemple, si on utilise onze valeurs logiques, en prenant comme estimations l'ensemble des éléments $\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, ..., 1\}$, et dans ce cas, notre problème est à nouveau facile à résoudre : la vérité de l'estimation de la déclaration est exactement $\frac{1}{7}$. Mais si nous prenons six valeurs logiques, l'estimation est décrit par l'ensemble $\{0, \frac{1}{5}, .., 1\}$, maintenant, on ne saura pas évaluer correctement la valeur de vérité de la déclaration précèdente. On hésitera entre $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, mais aucune de ces deux valeurs ne sera correcte, parce que

$$\frac{4}{5} - \frac{7}{10} = \frac{7}{10} - \frac{3}{5}$$

Ces deux valeurs seraient éloignées de la valeur $\frac{7}{10}$.
Il y a plusieurs façons pour évaluer l'estimation de vérité, pour gérer le même problème,

ainsi on aboutit à l'idée d'ensemble flou élaborée par Lotfi Zadeh, qui utilise $[0, 1]$ comme ensemble d'évaluation.
Maintenant il est claire que la valeur de vérité est égale à 0.7. Cependant, dans le prochain moment "y" peut prendre le chocolat tombé et le placé dans la boîte, en conservant la valeur de vérité qui est égale à 0.7, et le reste c'est 0.3. Mais il peut aussi manger le dérnier morceau, et dans ce cas la valeur de vérité prend 0.8 et le reste c'est 0.2. Dans ce sens, la déclaration dépend essentiellement aux actions de "y". Donc l'appareil des ensembles flous intuitionistiques nous donne la réponse la plus précise $< 0.7, 0.2 >$, et maintenant le degré d'incertitude c'est 0.1.

1.2.2 Définitions fondamentales

Définition 1.12. *On définit un sous-ensemble flou intuitionistique A d'un univers X par la donnée de deux fonctions*

$$\mu_A : X \longrightarrow [0, 1],$$

et

$$\nu_A : X \longrightarrow [0, 1],$$

appelées respectivement fonction d'appartenance et fonction de non-appartenance de A, qui vérifient

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X.$$

On peut représenter A sous la forme suivante :

$$A = \left\{ < x, \mu_A(x), \nu_A(x) >, \quad 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X \right\}$$

On note $\mathbb{IF}(X)$ l'espace de tous les sous-ensembles floues intuitionistiques de X.

Remarque 1.10. *Tout sous-ensemble flou est un sous-ensemble flou intuitionistique.*
En effet, on a

$$0 \leq \mu_A + \nu_A = 1$$

Soit X un univers.

Définition 1.13. *Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de X. On appelle support de A l'ensemble*

$$S(A) = \Big\{x \in X, \nu_A(x) < 1\Big\}.$$

Définition 1.14. *Soient n sous-ensembles flous intuitionistiques $A_1, ..., A_n$ respectivement de $X_1, ..., X_n$. Le produit cartésien de $A_1, ..., A_n$ est un sous-ensemble flou intuitionistique de $X_1 \times ... \times X_n$, défini par*

$$\mu_{A_1 \times ... \times A_n}(x_1, ..., x_n) = \min\Big(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\Big),$$
$$\nu_{A_1 \times ... \times A_n}(x_1, ..., x_n) = \max\Big(\nu_{A_1}(x_1), ..., \nu_{A_n}(x_n)\Big),$$

$\forall x_i \in A_i,\ \ i = 1, 2, ...$

1.2.3 Opérations sur les ensembles flous intuitionistiques

On définit les opérations sur l'espace des ensembles flous intuitionistiques comme suit :

- **Egalité**

$$A = B \Longleftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad et \quad \nu_B(x) = \nu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

- **Inclusion**

$$A \subset B \Longleftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad et \quad \nu_B(x) \leq \nu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

- **Complémentaire**

  Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de X caractérisé par μ_A et ν_A. Le complémentaire de A est un sous-ensemble flou intuitionistique caractérisé par :

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \nu_A(x) \quad et \quad \nu_{\overline{A}}(x) = \mu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

- **Intersection**

  L'intersection de deux sous-ensembles flous intuitionistiqus A et B de X est un sous-ensemble flou intuitionistique défini par :

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \quad et \quad \nu_{A\cap B}(x) = \max\Big(\nu_A(x), \nu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X \tag{1.1}$$

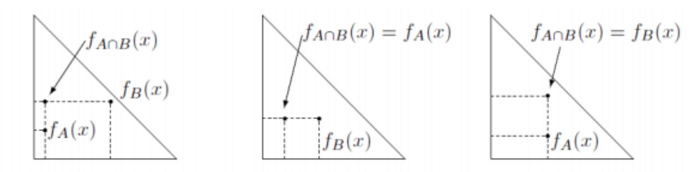


FIGURE 1.6 – Interprétation géométrique de l'intersection

- **Réunion**

  La réunion de deux sous-ensembles flous intuitionistiques A et B de X est un sous-ensemble flou intuitionistique défini par :

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \quad et \quad \nu_{A\cup B}(x) = \min\Big(\nu_A(x), \nu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X$$

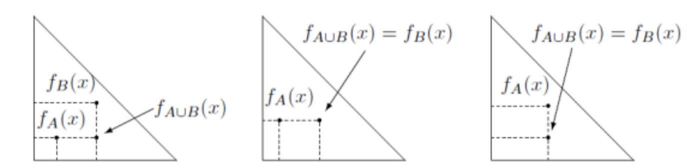


FIGURE 1.7 – Interprétation géométrique de la réunion

D'après [9, 8], pour tout $A, B \in \mathbb{IF}(X)$, on a les assertions suivantes :

$$A \cap B = B \cap A.$$

$$A \cup B = B \cup A.$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

$$A \cap A = A.$$

$$A \cup A = A.$$

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B.$$

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B.$$

1.2.4 (α, β)-coupe d'un ensemble flou intuitionistique

Dans cette section on va donner une généralisation de la notion de α-coupe utilisée dans le cas d'un ensemble flou.

Définition 1.15. *Une (α, β)-coupe d'un sous-ensemble flou intuitionistique*

$$A = \{< x, \mu_A(x), \nu_A(x) >, x \in X\}.$$

est définie par :

$$A^{\alpha,\beta} = \Big\{x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha, \quad et \quad \nu_A(x) \leq \beta\Big\}.$$

où $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ et $\alpha + \beta \leq 1$.

On définit aussi

$$A^{\beta} = \Big\{x \in X, \quad \nu_A(x) \leq \beta\Big\}.$$

et

$$A_{\alpha} = \Big\{x \in X, \quad \mu_A(x) \geq \alpha\Big\}.$$

On obtient la proposition suivante.

Proposition 1.4.

$$A^{\alpha,\beta}(A) = A_{\alpha} \cap A^{\beta}(A).$$

Exemple 1.6. *Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$.*
On pose $A = \{< a, 0.5, 0.3 >, < b, 0.1, 0.7 >, < c, 1, 0 >, < d, 0, 0 >, < e, 0, 1 >\}$.
Alors on a $A^{0.3,0.4} = \{a, c\}$, car $A_{0.3} = \{a, c\}$ et $A^{0.4} = \{a, c, d\}$.

1.2.5 Nombres flous intuitionistiques

1.2.5.1 Définitions et exemples

On note par

$$\mathbb{IF}(\mathbb{R}) = \{\langle u, v\rangle : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]^2 \quad , \quad 0 \leq u(x) + v(x) \leq 1\}.$$

Définition 1.16. *[47] Un élément $\langle u, v\rangle \in \mathbb{IF}(\mathbb{R})$ est dit un nombre flou intuitionistique s'il vérifie les conditions suivantes :*

1. *$\langle u, v\rangle$ est normal, c-á-d $\exists x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ such that $u(x_0) = 1$ et $v(x_1) = 1$,*
2. *u est convexe flou et v is concave flou,*
3. *u est semi-continue supérieure et v est semi-continue inférieure,*
4. *$supp\langle u, v\rangle = \overline{\{x \in \mathbb{R} : v(x) < 1\}}$ est borné.*

On note par $\mathbb{IF}^1$ la collection de tout les nombres flous intuitionistique.
Soient $\alpha \in [0,1]$ et $\langle u, v\rangle \in \mathbb{IF}^1$, on définit la coupe supérieure et la coupe inférieure au niveau α de $\langle u, v\rangle$ respectivement par

$$[\langle u, v\rangle]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : v(x) \leq 1 - \alpha\}.$$

et

$$[\langle u, v\rangle]_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}.$$

Remarque 1.11. *Si $\langle u, v\rangle$ est nombre flou intuitionistique, alors on a*

$$[\langle u, v\rangle]_\alpha = [u]^\alpha.$$

et

$$[\langle u, v\rangle]^\alpha = [1 - v]_\alpha.$$

Exemple 1.7. *Un nombre flou intuitionistique triangulaire $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle$ est un ensemble flou intuitionistique de $\mathbb{R}$ avec la fonction d'appartenance u et la fonction de non appartenance v suivantes :*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & si \quad a_1 \leq x \leq a_2, \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & si \quad a_2 \leq x \leq a_3, \\ 0 & \qquad\quad sinon. \end{cases}$$

$$\nu_A(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a_1^{'}} & si \quad a_1^{'} \leq x \leq a_2, \\ \frac{x-a_2}{a_3^{'}-a_2} & si \quad a_2 \leq x \leq a_3^{'}, \\ 1 & \qquad\qquad sinon. \end{cases}$$

Exemple 1.8. *Un nombre flou intuitionistique trapézoïdale* $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle$ *est un ensemble flou intuitionistique de* $\mathbb{R}$ *avec la fonction d'appartenance* u *et la fonction de non appartenance* v *suivantes :*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & si \quad a_1 \leq x \leq a_2, \\ 1 & if \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & si \quad a_3 \leq x \leq a_4, \\ 0 & \qquad\qquad sinon. \end{cases}$$

$$\nu_A(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a_1^{'}} & si \quad a_1^{'} \leq x \leq a_2, \\ 0 & if \quad if a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{x-a_3}{a_4^{'}-a_3} & si \quad a_3 \leq x \leq a_4^{'}, \\ 1 & \qquad\qquad sinon. \end{cases}$$

1.2.5.2 Opérations sur les nombres flous intuitionistiques

On définit le zéro flou intuitionistique noté $0_{\mathbb{IF}^1} \in \mathbb{IF}^1$ par

$$0_{\mathbb{IF}^1}(t) = \begin{cases} (1,0) & si \quad t = 0, \\ (0,1) & si \quad t \neq 0. \end{cases}$$

Définition 1.17. *[6] Soient* $\langle u_1, v_1\rangle$,$\langle u_2, v_2\rangle \in \mathbb{IF}^1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in [0,1]$, *alors on a*

1. $(\langle u_1, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle)(z) = (\sup\limits_{z=x+y} min(u_1(x), u_2(y)), \inf\limits_{z=x+y} max(u_1(x), u_2(y)))$.
2. $\lambda\langle u_1, v_1\rangle = \langle \lambda u_1, \lambda v_1\rangle \quad if \quad \lambda \neq 0$.
3. $\lambda\langle u_1, v_1\rangle = 0_{IF} \quad if \quad \lambda = 0$.
4. $[\langle u_1, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle]^\alpha = [\langle u_1, v_1\rangle]^\alpha + [\langle u_2, v_2\rangle]^\alpha$.
5. $[\langle u_1, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle]_\alpha = [\langle u_1, v_1\rangle]_\alpha + [\langle u_2, v_2\rangle]_\alpha$.
6. $[\lambda\langle u_1, v_1\rangle]^\alpha = \lambda[\langle u_1, v_1\rangle]^\alpha$.
7. $[\lambda\langle u_1, v_1\rangle]_\alpha = \lambda[\langle u_1, v_1\rangle]_\alpha$.

Définition 1.18. *[47] Soitent $\langle u_1, v_1\rangle$,$\langle u_2, v_2\rangle \in \mathbb{IF}^1$, la différence de Hukuhara généralisée de $\langle u_1, v_1\rangle$ et $\langle u_2, v_2\rangle$ noté par $\langle u_1, v_1\rangle \ominus_{gH} \langle u_2, v_2\rangle$ est définie comme suit*

$$\langle u_2, v_2\rangle \ominus_{gH} \langle u_1, v_1\rangle = \langle u_3, v_3\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} i) \quad \langle u_2, v_2\rangle = \langle u_1, v_1\rangle + \langle u_3, v_3\rangle \quad , \\ ou \\ ii) \quad \langle u_1, v_1\rangle = \langle u_2, v_2\rangle + (-1)\langle u_3, v_3\rangle. \end{cases}$$

Soientt $\langle u, v\rangle \in \mathbb{IF}^1$ et $\alpha \in [0, 1]$, alors on définit les ensembles suivant :

$$[\langle u, v\rangle]_l^+(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\},$$

$$[\langle u, v\rangle]_r^+(\alpha) = \sup\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\},$$

$$[\langle u, v\rangle]_l^-(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : v(x) \leq 1 - \alpha\},$$

$$[\langle u, v\rangle]_r^-(\alpha) = \sup\{x \in \mathbb{R} : v(x) \leq 1 - \alpha\}.$$

Remarque 1.12. *Soient $\langle u, v\rangle \in \mathbb{IF}^1$ et $\alpha \in [0, 1]$, alors on a*

$$[\langle u, v\rangle]^\alpha = [[\langle u, v\rangle]_l^-(\alpha), [\langle u, v\rangle]_r^-(\alpha)].$$

$$[\langle u, v\rangle]_\alpha = [[\langle u, v\rangle]_l^+(\alpha), [\langle u, v\rangle]_r^+(\alpha)].$$

Proposition 1.5. *Soit $\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $\langle u, v\rangle \in \mathbb{IF}^1$, alors*

1. $[\langle u, v\rangle]_\alpha \subset [\langle u, v\rangle]^\alpha$.
2. $[\langle u, v\rangle]_\alpha et [\langle u, v\rangle]^\alpha$. *sont non vides, compacts et convexes .*
3. *si* $\alpha \leq \beta$ *alors* $[\langle u, v\rangle]^\beta \subset [\langle u, v\rangle]^\alpha$ *et* $[\langle u, v\rangle]_\beta \subset [\langle u, v\rangle]_\alpha$.
4. *si* $\alpha_n \nearrow \alpha$ *alors* $[\langle u, v\rangle]^\alpha = \cap_n [\langle u, v\rangle]^{\alpha_n}$ *et* $[\langle u, v\rangle]_\alpha = \cap_n [\langle u, v\rangle]_{\alpha_n}$.

Inversement, soit $\alpha \in [0, 1]$ on pose

$$M_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}.$$

Et

$$M^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : v(x) \leq 1 - \alpha\}.$$

Lemme 1.1. *[47] Soient $\{M^\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ et $\{M_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ deux sous ensemble de $\mathbb{R}$ qui vérifient $(1)-(4)$ de la proposition précédente, si on définit u et v par :*

$$u(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin M_0, \\ sup\{\alpha \in [0,1] : x \in M_\alpha\} & si \quad x \in M_0. \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \notin M^0, \\ 1 - sup\{\alpha \in [0,1] : x \in M^\alpha\} & si \quad x \in M^0. \end{cases}$$

Alors $\langle u, v\rangle$ représente un élément de $\mathbb{IF}^1$

Lemme 1.2. *[47] Soit I un sous ensemble dense dans $[0,1]$.*
Si $[\langle u,v\rangle]_\alpha = [\langle w,z\rangle]_\alpha$ et $[\langle u,v\rangle]^\alpha = [\langle w,z\rangle]^\alpha$ pour tout $\alpha \in I$, alors $\langle u,v\rangle = \langle w,z\rangle$.

1.2.5.3 Distance entre deux nombres flous intuitionistiques

Soit $d_p : \mathbb{IF}^1 \times \mathbb{IF}^1 \longrightarrow [0, +\infty[$ l'application définie par :

$$\begin{aligned} d_p\left(\langle u,v\rangle, \langle w,z\rangle\right) = (&\frac{1}{4}\int_0^1 \left|[\langle u,v\rangle]_r^+(\alpha) - [\langle w,z\rangle]_r^+(\alpha)\right|^p d\alpha, \\ &+\frac{1}{4}\int_0^1 \left|[\langle u,v\rangle]_l^+(\alpha) - [\langle w,z\rangle]_l^+(\alpha)\right|^p d\alpha, \\ &+\frac{1}{4}\int_0^1 \left|[\langle u,v\rangle]_r^-(\alpha) - [\langle w,z\rangle]_r^-(\alpha)\right|^p d\alpha, \\ &+\frac{1}{4}\int_0^1 \left|[\langle u,v\rangle]_l^-(\alpha) - [\langle w,z\rangle]_l^-(\alpha)\right|^p d\alpha)^{\frac{1}{p}}, \text{ tel que } p \in [1, +\infty[. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et } d_\infty(\langle u,v\rangle, \langle w,z\rangle) = &\frac{1}{4}\sup_{0\le\alpha\le1} |[\langle u,v\rangle]_r^+(\alpha) - [\langle w,z\rangle]_r^+(\alpha)|, \\ &+\frac{1}{4}\sup_{0\le\alpha\le1} |[\langle u,v\rangle]_l^+(\alpha) - [\langle w,z\rangle]_l^+(\alpha)|, \\ &+\frac{1}{4}\sup_{0\le\alpha\le1} |[\langle u,v\rangle]_r^-(\alpha) - [\langle w,z\rangle]_r^-(\alpha)|, \\ &+\frac{1}{4}\sup_{0\le\alpha\le1} |[\langle u,v\rangle]_l^-(\alpha) - [\langle w,z\rangle]_l^-(\alpha)|. \end{aligned}$$

Théorème 1.5. *[45] L'espace flou intuitionistique $(\mathbb{IF}^1, d_p)$ est est un espace métrique complet pour tout $p \in [1, +\infty]$.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème est donné en deux cas :

Cas(1) :$p = \infty$

Soit $(\langle u_n, v_n\rangle)_n$ une suite de Cauchy,pour $\varepsilon > 0$il existe un entier n_0 tel que pour $n, m \geq n_0$ on a :

$$d_p(\langle u_n, v_n\rangle, \langle u_m, v_m\rangle) < \varepsilon,$$

alors

$$\sup_{0\leq\alpha\leq 1} |[\langle u_n, v_n\rangle]_r^+(\alpha) - [\langle u_m, v_m\rangle]_r^+(\alpha)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{0\leq\alpha\leq 1} |[\langle u_n, v_n\rangle]_l^+(\alpha) - [\langle u_m, v_m\rangle]_l^+(\alpha)| < \varepsilon,$$

Donc $([\langle u_n, v_n\rangle]_r^+(\alpha))_n$ and $([\langle u_n, v_n\rangle]_r^+(\alpha))_n$ est une suite de Cauchy $\mathbb{R}$

Ainsi,

$$\Big([\langle u_n, v_n\rangle]_r^+(\alpha)\Big)_n \longrightarrow \phi_r(\alpha),$$
$$\Big([\langle u_n, v_n\rangle]_l^+(\alpha)\Big)_n \longrightarrow \phi_l(\alpha),$$

D'après la Proposition 1.3, la famille$([\phi_l(\alpha), \phi_r(\alpha)])_{\alpha\in[0,1]}$ définit un nombre flou u.

De même on a :

$$\Big([\langle u_n, v_n\rangle]_r^-(\alpha)\Big)_n \longrightarrow \varphi_r(\alpha),$$
$$\Big([\langle u_n, v_n\rangle]_l^-(\alpha)\Big)_n \longrightarrow \varphi_l(\alpha),$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} d_p(\langle u_n, v_n\rangle, \langle u, v\rangle) = 0,$$

Avec

$$[\langle u, v\rangle]^\alpha = [\varphi_l(\alpha), \varphi_r(\alpha)],$$

$$[\langle u, v\rangle]_\alpha = [\phi_l(\alpha), \phi_r(\alpha)].$$

D'après la Proposition 1.3, la famille $([\varphi_l(\alpha), \varphi_r(\alpha)])_{\alpha\in[0,1]}$ définit un nombre flou $1 - v$.

Comme

$$[\langle u_n, v_n\rangle]_\alpha \subset [\langle u_n, v_n\rangle]^\alpha,$$

et par passage á la limite on déduit que $\langle u, v\rangle \in \mathbb{IF}^1$.

Cas(2) :$1 \leq p < \infty$.

De même on a

$$d_p(\langle u_n, v_n\rangle, \langle u_m, v_m\rangle) < \varepsilon,$$

alors

$$\int_0^1 |[\langle u_n, v_n\rangle]_r^+(\alpha) - [\langle u_m, v_m\rangle]_r^+(\alpha)|^p d\alpha < \varepsilon,$$
$$\int_0^1 |[\langle u_n, v_n\rangle]_l^+(\alpha) - [\langle u_m, v_m\rangle]_l^+(\alpha)|^p d\alpha < \varepsilon,$$

d'après le théorème de Freschet-Riesz [12], on a

$$\Big([\langle u_n, v_n\rangle]_r^+(\alpha)\Big)_n \longrightarrow \phi_r(\alpha) \;\; in \;\; L^p,$$

$$\Big([\langle u_n, v_n\rangle]_l^+(\alpha)\Big)_n \longrightarrow \phi_l(\alpha) \;\; in \;\; L^p,$$

donc il existe une sous suite $([\langle u_{n_k}, v_{n_k}\rangle])_k$ telle que

$$[\langle u_{n_k}, v_{n_k}\rangle]_r^+(\alpha) \longrightarrow \phi_r(\alpha) \; a.e,$$

$$[\langle u_{n_k}, v_{n_k}\rangle]_l^+(\alpha) \longrightarrow \phi_l(\alpha) \; a.e,$$

ainsi d'après la Proposition 1.3, il existe $\langle u, v\rangle \in \mathbb{IF}^1$ telle que ,

$$[\langle u, v\rangle]^\alpha = [\varphi_l(\alpha), \varphi_r(\alpha)],$$

$$[\langle u, v\rangle]_\alpha = [\phi_l(\alpha), \phi_r(\alpha)].$$

□

1.2.5.4 Topologie induite par la métrique floue intuitionistique d_p

Définition 1.19. *[47] Soient $r > 0$ et $\langle u, v\rangle \in \mathbb{IF}^1$, alors*

1) L'ensemble $B(\langle u, v\rangle, r) = \{\langle w, z\rangle \in \mathbb{IF}^1 : d_p(\langle u, v\rangle, \langle w, z\rangle) < r\}$ est dit la boule ouverte floue intuitionistique de centre $\langle u, v\rangle$ et de rayon r.

2) L'ensemble $B[\langle u, v\rangle, r] = \{\langle w, z\rangle \in \mathbb{IF}^1 : d_p(\langle u, v\rangle, \langle w, z\rangle) \leq r\}$est dit la boule fermée floue intuitionistique de centre $\langle u, v\rangle$ et de rayon r.

3) Un sous ensemble G de $\mathbb{IF}^1$ est dit ouvert dans $\mathbb{IF}^1$ si $\forall \langle u, v\rangle \in G$,$\exists r > 0$ telle que $B(\langle u, v\rangle, r) \subset G$.

4) Un sous ensemble F de $\mathbb{IF}^1$ est dit fermé dans si et seulement si son complément est ouvert.

5) Un sous ensemble V de $\mathbb{IF}^1$ est dit voisinage de $\langle u, v\rangle$ s'il existe un ouvert U tel que $\langle u, v\rangle \subset U \subset V$.

6) Un sous ensemble B de $\mathbb{IF}^1$ est dit bornée s'il existe $\langle u, v\rangle$ et $r > 0$ tel que $B \subset B(\langle u, v\rangle, r)$.

Définition 1.20. *[47] Soit $\langle u_n, v_n\rangle$ une suite dans $\mathbb{IF}^1$, alors*

1) $\langle u_n, v_n\rangle$ converge vers $\langle u, v\rangle$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} d_p(\langle u_n, v_n\rangle, \langle u, v\rangle) = 0$.

2) $\langle u_n, v_n\rangle$ est une suite de Cauchy si $\lim\limits_{n,m\to+\infty} d_p(\langle u_n, v_n\rangle, \langle u_m, v_m\rangle) = 0$.

Chapitre 2

Équations différentielles floues d'ordre fractionnaire

Le concept du problème de Cauchy pour les équations différentielles floues a été étudié par plusieurs auteurs sur l'espace métrique flou (E^1, D), pour plus de détails voir les travaux de Kaleva [32], Seikkala[62] et Kloeden[19] .
Dans cette direction, d'abord Dieudonne[21] a donné un example dans lequel a montré que le théorème de Peano n'est pas valable dans l'espace des suites convergente vers zero, ensuite Yorke[69] a montré qu'il n'est pas correct sur un espace Hilbert et Cellina[17] a montré aussi qu'il n'est pas correct sur un espace Hilbert non réflexif. Enfin, Godunov [29] a montré que si le théorème de Peano est vérifié sur un espace de Hilbert , alors il est de dimension fini.
Dans ce cadre, notre objectif dans ce chapitre est d'abord, d'établir les conditions suffisantes pour avoir l'équivalence entre entre l'équation différentielle fractionnaire floue d'ordre $0 < q < 1$ suivante :

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = f(t, x(t)); \quad t \in J = [t_0, t_0 + \delta], \delta > 0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Et la solution de l'équation intégrale suivante :

$$x(t) \ominus_{gH} x_0 = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{q-1} f(t, x(t)) ds. \tag{2.2}$$

Ensuite, d'étudier l'existence de la solution du problème (2.1) de en en faisant étendre le résultat du théorème de Peano au cas flou et fractionnaire.

2.1 Fonctions floues

L'un des concepts fondamentaux des mathématiques est celui de la théorie des fonctions. La définition standard d'une fonction est inspiré de la notion de l'application, ou de la correspondance. Étant donné deux ensembles X et Y, une correspondance qui associe à chaque élément de X un élément unique de Y définit une fonction dont le domaine est X.

2.1.1 Définition et exemple

Le concept de la fonction floue peut être défini de différentes manières, et nous avons formulé ces définitions pour établir la définition suivante.

Définition 2.1. *On dit que $F(t)$ est une fonction floue de $\mathbb{R}$ a valeur dans E^1 si elle est un nombre flou pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Exemple 2.1. *Soit $F :]-1,1[\longrightarrow E^1$ une fonction définie par*

$$[F(t)]^\alpha = \begin{cases} \{1\} & si \quad t \in]-1,0], \\ [1-(1-\alpha)^{\frac{1}{t}}, 1] & si \quad \alpha, t \in]0,1[. \end{cases}$$

telle que $[F(t)]^0 = [0,1]$ et $[F(t)]^1 = \{1\}$, alors F est une fonction floue.

2.1.2 Limites et continuité

Définition 2.2. *Soit $F : [a,b] \longrightarrow E^1$ une fonction floue.*
On dit que $L \in E^1$ est une limite de F quand t tend vers t_0 si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que,

$$\mid t - t_0 \mid \Rightarrow D(F(t), L) < \epsilon,$$

et on écrit

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = L.$$

Définition 2.3. *Soient $F : [a,b] \longrightarrow E^1$ une fonction floue et $t_0 \in [a,b]$.*

1) On dit que F est continue en t_0 si et seulement si $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$.
2) On dit que F est continue sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si elle est continue en tous ses points.

2.1.3 Mesurabilité

Définition 2.4. *[32] Soit $F : [a,b] \longrightarrow E^1$ une fonction floue. On dit que F est fortement mesurable si $\forall\alpha \in [0,1]$, la fonction $F_\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathcal{P}_c(\mathbb{R})$ définie par $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ est mesurable au sens de Lebesgue.*

Lemme 2.1. *Si F est fortement mesurable alors elle est mesurable.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et $u \in E^1$, alors on a

$$T = \{t \setminus D(F(t), u) \leq \epsilon\} = \bigcap_{\alpha\in[0,1]} \{t \setminus D(F_\alpha(t), [u]^\alpha) \leq \epsilon\}.$$

Puisque pour tout $v \in E^1$ et $\alpha_k \nearrow \alpha$, on a

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} d([v]^\alpha, [v]^{\alpha_k}) = 0,$$

et par l'inégalité triangulaire de la distance d, on obtient

$$D(F_\alpha(t), [u]^\alpha) \leq \limsup D(F_{\alpha_k}(t), [u]^{\alpha_k}),$$

par conséquence

$$\{t \setminus D(F(t), u) \leq \epsilon\} \supseteq \cap_{\alpha\in[0,1]}\{t \setminus D(F_{\alpha_k}(t), [u]^{\alpha_k}) \leq \epsilon\}.$$

$$T = \bigcap_{k\geq 1} \{t \setminus D(F_{\alpha_k}(t), [u]^{\alpha_k}) \leq \epsilon\}.$$

Où $\{\alpha_k \setminus k = 1, 2...\}$ est un sous ensemble dénombrable dense dans $[0,1]$.
Par suite T est mesurable. □

Lemme 2.2. *Si la fonction floue F est continue alors elle est fortement mesurable.*

Démonstration. Soient $\epsilon > 0$ et $t_0 \in [a,b]$, alors comme F est continue il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mid t - t_0 \mid \Rightarrow D(F(t), F(t_0)) < \epsilon$$

Par la définition de la métrique D on a $D(F_\alpha(t), F_\alpha(t_0)) < \epsilon$ pour $\mid t - t_0 \mid$, donc F_α est continue.
Par suite pour tout ouvert U de $P_c(R^n)$ on a $F_\alpha^{-1}(U)$ est ouvert.
D'où la fonction floue F est mesurable. □

2.1.4 Intégrabilité

Définition 2.5. *Une fonction floue $F : [a,b] \to E^1$ est dite intégrablement borné s'il existe une fonction intégrable h tel que.*

$$| x | \leq h(t), \quad \forall x \in F_0(t).$$

Définition 2.6. *[32] Soit $F : [a,b] \longrightarrow E^1$ une fonction floue. On dit que F est intégrable sur $[a,b]$ s'il existe un élément $u \in E^1$ tel que pour tout $\alpha \in [0,1]$ on a*

$$\left[\int_a^b F(t)dt\right]^\alpha = \left\{\int_a^b f(t)dt \;\mid\; f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \textit{est une selection mésurable de} \quad F_\alpha\right\},$$

$$[u]^\alpha = \left[\int_a^b F(t)dt\right]^\alpha.$$

Et on écrit $\int_a^b F(t)dt = u$.

Théorème 2.1. *[32] Soit $F : [a,b] \longrightarrow E^1$ une fonction floue, alors on a*

1) Si F est fortement mesurable et intégrablement borné, alors elle est intégrable.

2) Si F est continue sur $[a,b]$, alors elle est intégrable.

Propriétés 2.1. *Soit $F : [a,b] \longrightarrow E^1$ une fonction floue intégrable sur $[a,b]$, alors on a*

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^c F(t)dt + \int_c^b F(t)dt.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in [0,1]$ et f une sélection mesurable de F_α.
Comme $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ alors on a

$$\left[\int_a^b F(t)dt\right]^\alpha \subseteq \left[\int_a^c F(t)dt\right]^\alpha + \left[\int_c^b F(t)dt\right]^\alpha.$$

Soient f_1 et f_2 deux sélection mesurable de F_α dans $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement, alors la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & si \quad t \in [a,c], \\ f_2(t) & si \quad t \in [c,b]. \end{cases}$$

est une sélection mesurable de F_α sur $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f_1(t)dt + \int_c^b f_2(t)dt.$$

Alors

$$\left[\int_a^b F(t)dt\right]^\alpha \supseteq \left[\int_a^c F(t)dt\right]^\alpha + \left[\int_c^b F(t)dt\right]^\alpha.$$

$\square$

Proposition 2.1. *[32] Soient $F, G : [a, b] \longrightarrow E^1$ deux fonctions intégrable et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*
(i) $\displaystyle\int_a^b (F(t) + G(t))\, dt = \int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt.$
(ii) $\displaystyle\int_a^b \lambda F(t)dt = \lambda \int_a^b F(t)dt.$
(iii) $D(F, G)$ est intégrable.
(iv) $\displaystyle D\left(\int_a^b F(t)dt, \int_a^b G(t)dt\right) \leq \int_a^b D(F(t), G(t))dt.$

Démonstration. Soit $\alpha \in [0, 1]$,alors les deux intégrales $\int_a^b F_\alpha(t)dt$ et $\int_a^b G_\alpha(t)dt$ sont des intégrales de Bochner.

Comme $[F + G]^\alpha = [F]^\alpha + [G]^\alpha$, alors on a

$$\int_a^b [F(t) + G(t)]^\alpha dt = \int_a^b F_\alpha(t) + \int_a^b G_\alpha(t)dt.$$

Ce qui montre i).

De la même manière on montre ii),il suffit de voir que $[\lambda F(t)]^\alpha = \lambda F(t)]^\alpha$.

Pour montrer iii), On rappelle que la distance de Hausdorff entre F_α et G_α peut être écrite sous la forme suivante (voir [32]).

$$d(F_\alpha(t), G_\alpha(t)) = \max\{\sup_{x\in F_\alpha} \inf_{y\in G_\alpha} \| x - y \|, \sup_{y\in G_\alpha} \inf_{x\in F_\alpha} \| x - y \|\}.$$

Soient $\{\sigma_n^\alpha \setminus n = 1, 2, ..\}$ et $\{\rho_n^\alpha \setminus n = 1, 2, ..\}$. les représentation de Castaing de F_α et de G_α respectivement. On utilisant la définition de la distance de Hausdorff on trouve que,

$$d(F_\alpha(t), G_\alpha(t)) = Max\{\sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq 1} \| \sigma_n^\alpha(t) - \rho_k^\alpha(t) \|, \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq 1} \| \rho_n^\alpha(t) - \sigma_k^\alpha(t) \|\}.$$

Est mesurable Donc $D(F(t), G(t)) = \sup_{k\geq 1} d(F_{\alpha_k}(t), G_{\alpha_k}(t)$ est aussi mesurable .
Où $\{\alpha_k \setminus k = 1, 2, ..\}$ est dense dans $[0, 1]$.
D'autre par on a

$$D(F(t), G(t)) \leq D(F(t), 0) + D(G(t), 0) \leq h_1(t) + h_2(t)$$

Où h_1 et h_2 sont bornes intégrables de F et G respectivement,d'où iii).

Montrons iv).

On a

$$D\left(\int_a^b F_\alpha(t)dt, \int_a^b G_\alpha(t)dt\right) \leq \int_a^b D(F_\alpha(t), G_\alpha(t))dt.$$

Par conséquence.

$$D\left(\int_a^b F(t)dt, \int_a^b G(t)dt\right) \leq \sup_{\alpha\in[0,1]} \int_a^b D(F_\alpha(t), G_\alpha(t))dt.$$

$$\leq \int_a^b \sup_{\alpha\in[0,1]} D(F_\alpha(t), G_\alpha(t))dt$$
$$\leq \int_a^b D(F(t)dt, G(t)dt).$$

□

2.1.5 Dérivabilité

Définition 2.7. *[32] Soient $F : [a,b] \to E^1$ et $t_0 \in [a,b]$.*
On dit que f est différentiable au sens de Hukuhara généralisé (gH-différentiable) en t_0 s'il existe un élément $F'(t_0) \in E^1$ tel que

$$F'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t_0+h) \ominus_{gH} F(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{F(t_0) \ominus_{gH} F(t_0-h)}{h}.$$

Définition 2.8. *soit $F : [a,b] \to E^1$.*
La fonction floue $F(t)$ est dite d-croissante (resp d-décroissante) sur $[a,b]$ si pour tout $\alpha \in [0,1]$, la fonction réelle $t \to d([F(t)]^\alpha)$ est croissante (resp décroissante) sur $[a,b]$.

Remarque 2.1. *La fonction floue $F(t)$ est dite d-monotone sur $[a,b]$ si elle est d-croissante ou d-décroissante.*

Théorème 2.2. *[32] Soit $F : [a,b] \to E^1$ une fonction floue gH-différentiable telle que $[F(t)]^\alpha = \left[\underline{F}_\alpha(t), \overline{F}_\alpha(t)\right]$ pour tout $\alpha \in [0,1]$, alors $\underline{F}_\alpha$ et $\overline{F}_\alpha$ sont différentiable et on a*

$$[F'(t)]^\alpha = \left[\underline{F'}_\alpha(t), \overline{F'}_\alpha(t)\right].$$

Démonstration. Pour $t \in [a,b]$ et $\alpha \in [0,1]$ on a

$$[F(t+h) \ominus_{gH} F(t)]^\alpha = [\underline{F}_\alpha(t+h) - \underline{F}_\alpha(t), \overline{F}_\alpha(t+h) - \overline{F}_\alpha(t)].$$

De même pour $[F(t) \ominus_{gH} F(t-h)]^\alpha$ On a

$$[F(t) \ominus_{gH} F(t-h)]^\alpha = [\underline{F}_\alpha(t) - \underline{F}_\alpha(t-h), \overline{F}_\alpha(t) - \overline{F}_\alpha(t-h)].$$

On devise les deux équations par h et par passage a la limite on obtient le résultat. □

Théorème 2.3. *[32] Si $F : [a,b] \to E^1$ est gH-différentiable alors elle est continue.*

Démonstration. Soient $t, t+h \in [a,b]$ tel que $h > 0$,alors par l'inégalité triangulaire de la distance D on a

$$D(F(t+h), F(t)) = D(F(t+h) \ominus_{gH} F(t), 0) \leq hD(F(t+h) \ominus_{gH} F(t), F'(t)) + hD(f'(t), 0).$$

Or F est dérivable alors le coté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 quand $t \to 0^+$. Par suite F est continue a droite.
De même on montre la continuité a gauche de la fonction F.
Finalement F est continue. □

Théorème 2.4. *[32] Soient $F, G : [a,b] \to E^1$ deux fonction floues gH-différentiable et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a*

1. $(F(t) + G(t))' = F(t)' + G'(t)$.
2. $(\lambda F(t))' = \lambda F'(t)$.

Démonstration. Il suffit de voir que $D(ku, kv) = |k|D(u,v)$, $\forall u, v \in E^1$ et $\forall k \in \mathbb{R}$.
Et $D(u+w, v+z) \leq D(u,v) + D(w,z)$, $\forall u, v, w, z \in E^1$. □

Lemme 2.3. *[32]) Soit $F : [a,b] \to E^1$ une fonction floue gH-différentiable sur $[a,b]$ telle que sa dérivée F' est intégrable alors,*

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(t)dt.$$

Théorème 2.5. *[32] Soient $F : [a,b] \to E^1$ une fonction floue continuement gH-différentiable sur $[a,b]$alors*

$$D(F(a), F(b)) \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} D(F'(t), 0).$$

Démonstration. D'après le lemme précédent on a

$$D(F(a), F(b)) = D\left(\int_a^b F'(t)dt, 0\right) \leq \int_a^b D(F'(t), 0)dt \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} D(F'(t), 0).$$

□

Remarque 2.2. *(voir [32]). Soit $F : [a,b] \to E^1$ une fonction floue gH-différentiable sur $[a,b]$, alors il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $F'(c) = 0$.*

2.2 Intégrale et dérivée fractionnaire d'une fonction floue

Dans cette section, nous allons définir la notion de l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire d'une fonction floue. Dans ce cadre nous aurons besoin de quelques outils de base du calcul fractionnaire classique, nous commençons d'abord par la fonction Gamma d'Euler [26], ensuite le fonction Bêta, enfin la fonction de Mittag Lefler[35].

Définition 2.9. *[26] Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction Gamma est donnée par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

(cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$).

Proposition 2.2. *[26] Pour tout $x > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)...(x+n)}.$$

Cas particuliers

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = 1,$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

Définition 2.10. *Soient $x, y > 0$, la fonction Bêta est définie par la formule suivant :*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Il est facile de montrer la proposition suivante. Il suffit de faire un petit changement de variable

Proposition 2.3. *La fonction Bêta $B(.,.)$ et la fonction gamma $\Gamma(.)$ sont liées par la fameuse formule suivante :*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre est une généralisation de la fonction exponentielle $(exp(.))$ qui joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Cette fonction a été définie par Mittag-Leffler en 1903 (voir [43]) par la formule suivante :

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+1)}.$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres, joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi en 1953-1954 et elle est donnée par la définition suivante.

Définition 2.11. *[22, 30] Soient α, $\beta > 0$. La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres notée $E_{\alpha,\beta}(t)$ est définit par le développement en série :*

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}.$$

En particulier, si $\beta = 1, E_{\alpha,1}(t)$ devient la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre $E_\alpha(t)$, i.e., $E_{\alpha,1}(t) = E_\alpha(t)$.

Cette fonction est très utilisable dans calcul fractionnaire et elle est lié souvent à la transformée de Laplace. Nous montrons dans ce qui suit une relation entre la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres et la transformée de Laplace.

On rappelle que

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+1)},$$

Donc pour $s > \lambda$, on a

$$L\{E_\alpha(\lambda t^\alpha); s\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}, s > \lambda^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-\lambda} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\lambda t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^k dt, \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{s^{k+1}},$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{s^{k+1}}.$$

Donc on obtient

$$L\{E_\alpha(\lambda t^\alpha); s\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\alpha k} dt.$$
$$L\{E_\alpha(\lambda t^\alpha); s\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{s^{\alpha k+1}}.$$
$$L\{E_\alpha(\lambda t^\alpha); s\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{s^{\alpha k+1}} = s^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(s^\alpha)^{k+1}}.$$

D'où

$$L\{E_\alpha(\lambda t^\alpha); s\} == \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}, s > \lambda^{\frac{1}{\alpha}}.$$

De même nous montrons que la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est donnée par :

$$L\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha); s\} = \frac{s^\alpha - \beta}{s^\alpha + \lambda}, R(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

2.2.1 Intégrale fractionnaire d'une fonction floue

La définition de l'intégrale fractionnaire flou au sens de Riemann-Liouville est basé effectivement sur la notion de l'intégrale fractionnaire classique qui généralise la célèbre formule intégrale de Cauchy répété n-fois.

Définition 2.12. *[26] Soit f une fonction absolument continue sur $[a, b]$.*
L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in [0, 1]$ notée $I_a^\alpha f$ est définie par :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \qquad x > a.$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la focntion Gamma d'Euler.

Théorème 2.6. *[26, 61] Soient f une fonction absolument continue sur $[a, b]$ et $\alpha, \beta \in [0, 1]$, alors on a :*

1) *$I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $x \in [a, b]$ et de plus $I_a^\alpha f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.*
2) *$I_a^\beta (kf) = k I_a^\beta f$.*
3) *$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^\beta (I_a^\alpha f)$.*

Définition 2.13. *[26, 61]Soit f une fonction absolument continue sur $[a, b]$.*
La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in [0, 1]$ notée ${}^{RL}D_a^\alpha f$ est définie par :

$$^{RL}D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right).$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, on a

$$^{RL}D_a^1 f(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dx} \right) \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Remarque 2.3. *Pour $\alpha \in [0, 1]$, On a*

$$^{RL}D_a^\alpha f(x) = \frac{d}{dx} (I_a^{1-\alpha} f)(x).$$

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées dans la proposition suivante.

Proposition 2.4. *[26, 61] Soient $f \in AC([a, b])$ et $\alpha, \beta \in [0, 1]$, alors on a*

1) ${}^{RL}D_a^\alpha (I_a^\alpha f)(t) = f(t)$.

2) ${}^{RL}D_a^\beta (I_a^\alpha) f(t) = (I^{\alpha-\beta} f)(t)$.

3) $I_a^\alpha ({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) = f(t) - f(a)$.

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs chercheurs y compris Caputo (1967-1969) se sont rendus compte que cette définition doit être révisée, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 2.14. *[26, 61] Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle telle que $f' \in AC([a, b])$.*
La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $q \in [0, 1]$ de la fonction f est donnée par :

$$^{c}D_a^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} f'(s) ds.$$

Proposition 2.5. *[2]Soit f une fonction absolument continue sur $[a, b]$ et $q \in [0, 1]$, alors on a*

1) ${}^{c}D^{q}(I^{q}f)(t) = f(t).$

2) $I^{q}({}^{c}D_{a}^{q}f)(t) = f(t) - f(a).$

3) La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est donnée par :

$$L\{{}^{c}D^{q}f(t), s\} = s^{q}F(s) - f(0).$$

Telle que $F(s)$ est la transformée de Laplace de la fonction f.

Nous introduisons maintenant la notion de l'intégrale fractionnaire flou de de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire flou au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo.

Soient $q \in]0,1[$ et $f(t) \in AC\left([a,b], E^{1}\right)$ telle que $[f(t)]^{\alpha} = [f_{1}^{\alpha}(t), f_{2}^{\alpha}(t)]$.
On suppose que $f_{1}^{\alpha}, f_{2}^{\alpha} \in L\left([a,b], \mathbb{R}\right)$ pour tout $\alpha \in [0,1]$.
Posons

$$A^{\alpha} = \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{a}^{t}(t-s)^{q-1}f_{1}^{\alpha}(s)ds, \frac{1}{\Gamma(q)}\int_{a}^{t}(t-s)^{q-1}f_{2}^{\alpha}(s)ds\right]$$

Alors on a le résultat suivant.

Lemme 2.4. *La famille $\{A^{\alpha}; \alpha \in [0,1]\}$ définit un nombre flou $u \in E^{1}$ tel que $[u]^{\alpha} = A^{\alpha}$.*

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $\alpha < \beta$.
On a $f_{1}^{\alpha} \leq f_{1}^{\beta}$ et $f_{2}^{\alpha} \geq f_{2}^{\beta}$ donc $A^{\alpha} \supseteq A^{\beta}$.
Comme $u_{1}^{0}(s) \leq f_{1}^{\alpha_{n}}(s) \leq f_{1}^{1}(s)$, alors on a

$$\mid (t-s)^{q-1}f_{i}^{\alpha_{n}}(s) \mid \leq max\{b^{q-1} \mid f_{i}^{0}(s) \mid, b^{a-1} \mid f_{i}^{1}(s) \mid\} := g_{i}(s).$$

Pour $\alpha_{n} \in [0,1]$ et $i = 1,2$.
g_{i} est Lebesgue intégrable.donc si $\alpha_{n} \nearrow \alpha$ alors d'après le théorème de Convergence dominé de Lebesgue on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{a}^{t}(t-s)^{q-1}f_{i}^{\alpha_{n}}(s)ds = \int_{a}^{t}(t-s)^{q-1}f_{i}^{\alpha}(s)ds, \quad i = 1,2.$$

D'après la Proposition (1.3) on obtient le résultat. □

Définition 2.15. *Soit $f(t) \in AC\left([a,b], E^{1}\right)$.*
L'intégrale fractionnaire flou de Riemann-Liouville d'ordre $0 < q < 1$ de la fonction f est donnée par :

$$I_{a}^{q}f(t) := \frac{1}{\Gamma(q)}\int_{a}^{t}(t-s)^{q-1}f(s)ds.$$

Tel que
$$[I_a^q f(t)]^\alpha = \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^t (t-s)^{q-1} f_1^\alpha(s)ds, \frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^t (t-s)^{q-1} f_2^\alpha(s)ds\right].$$

Propriétés 2.2. *Soient* $f, g \in AC\left([a,b], E^1\right)$, $(q, q_1, q_2) \in]0,1[^3$ *et* $c \in E^1$, *alors on a*

1. $I^q(cf)(t) = cI^q f(t)$.
2. $I^q(f+g)(t) = I^q f(t) + I^q g(t)$.
3. $I^{q_1} I^{q_2} f(t) = I^{q_1+q_2} f(t)$.

Démonstration. .
Par la linéarité de l'intégrale,il est facile de montrer les propriétés 1) et 2).
Montrons 3) :
Soit $h \in AC([a,b], E^1)$,pour $\alpha \in [0,1]$ on pose $[h(t)]^\alpha = [h_1^\alpha(t), h_2^\alpha(t)]$ telle que $h_i^\alpha(t) = I^{q_2} f_i^\alpha(t)$,$i = 1, 2$.
Alors $I^{q_2} f(t) = h(t)$,par suite on a,

$$I^{q_1} I^{q_2} f(t)]^\alpha = I^{q_1} h(t)]^\alpha,$$

$$[I^{q_1} I^{q_2} f(t)]^\alpha = \left[\frac{1}{\Gamma(q_1)}\int_a^t (t-s)^{q_1-1} h_\alpha^1(s)ds, \frac{1}{\Gamma(q_1)}\int_a^t (t-s)^{q_1-1} h_\alpha^2(s)ds\right],$$

$$[I^{q_1} I^{q_2} f(t)]^\alpha = \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}\left[\int_a^t (t-s)^{q_1-1}\int_a^s (s-\tau)^{q_2-1} f_\alpha^1(\tau)d\tau, \int_a^t (t-s)^{q_1-1}\int_a^s (s-\tau)^{q_2-1} f_\alpha^2(\tau)d\tau\right],$$

en utilisant la formule de Direchlet et le changement de variable suivant $s = \tau + \theta(t-\tau)$, on obtient

$$\int_a^t \int_\tau^t (t-s)^{q_1-1}(s-\tau)^{q_2-1} f_\alpha^i(\tau)dsd\tau = \int_a^t (t-\tau)^{q_1-1} f_\alpha^i(\tau)d\tau \int_0^1 \theta^{q_1-1}(1-\theta)^{q_2-1}d\theta,$$

comme $\int_0^1 (s-\tau)^{q_2-1}d\theta = \frac{\Gamma(q_2)\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1+q_2)}$, alors on obtient

$$[I^{q_1} I^{q_2} f(t)]^\alpha = \frac{1}{\Gamma(q_1+q_2)}\left[\int_a^t (t-s)^{q_1+q_2-1} f_\alpha^1(s)ds, \int_a^t (t-s)^{q_1+q_2-1} f_\alpha^2(s)ds\right],$$

par suite
$$[I^{q_1} I^{q_2} f(t)]^\alpha = [I^{q_1+q_2} f(t)]^\alpha.$$

□

Exemple 2.2. *Soit* $x : [a, b] \to E^1$ *une fonction floue constante telle que* $x(t) = u \in E^1$ *Si* $[u]^\alpha = [u_\alpha^1, u_\alpha^2]$ *alors on a*

$$[I^q x(t)]^\alpha = \left[\frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} u_\alpha^1(s) ds, \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} u_\alpha^2(s) ds\right],$$

$$[I^q x(t)]^\alpha = \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} [u_\alpha^1, u_\alpha^2],$$

$$[I^q x(t)]^\alpha = \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} [u]^\alpha.$$

2.2.2 Dérivée fractionnaire d'une fonction floue

Définition 2.16. *[2] Soient* $f \in AC\left([a, b], E^1\right)$ *et* $t \in [a, b]$ *.*
La dérivée fractionnaire floue au sens de Riemann-Liouville d'ordre $q \in [0, 1]$ *de la fonction* f *est donnée par :*

$${}^{RL}D_a^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{q-1} f(s) ds,$$

tel que

$$[{}^{RL}D_a^q f(t)]^\alpha = \left[\frac{1}{\Gamma(q)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{q-1} f_1^\alpha(s) ds, \frac{1}{\Gamma(q)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{q-1} f_2^\alpha(s) ds\right].$$

Exemple 2.3. *Soit* $x : [a, b] \to E^1$ *une fonction floue constante telle que* $x(t) = u \in E^1$*.*
Si $[u]^\alpha = [u_\alpha^1, u_\alpha^2]$*, alors*

$$[{}^{RL}D^q x(t)]^\alpha = \frac{1}{\Gamma(q)} \left[\frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{q-1} u_\alpha^1 ds, \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{q-1} u_\alpha^2 ds\right],$$

$$[{}^{RL}D^q x(t)]^\alpha = \frac{t^{-q}}{\Gamma(1-q)} [u]^\alpha,$$

ce qui implique que

$${}^{RL}D^q x(t) = \frac{t^{-q}}{\Gamma(1-q)} u, \quad \forall u \in E^1.$$

Définition 2.17. *Soient* f *une fonction floue telle que* $f' \in AC\left([a, b], E^1\right)$ *et* $t \in [a, b]$*.*
La dérivée fractionnaire floue au sens de Caputo d'ordre $0 < q < 1$ *de la fonction* f *est donnée par :*

$${}^c D_a^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} f'(s) ds,$$

tel que

$$[{}^c D_a^q f(t)]^\alpha = \left[\frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} (f_1^\alpha)'(s) ds, \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} (f_2^\alpha)'(s) ds\right].$$

Exemple 2.4. *Soit $x : [a, b] \to E^1$ une fonction floue constante telle que $x(t) = u \in E^1$. Si $[u]^\alpha = [u^1_\alpha, u^2_\alpha]$, alors*

$$[{}^cD^q x(t)]^\alpha = \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{q-1}(u^1_\alpha)'ds, \frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{q-1}(u^2_\alpha)'ds\right],$$

$$[{}^cD^q x(t)]^\alpha = \{0\},$$

$${}^cD^q x(t) = 0_{E^1}.$$

2.3 Résultat d'équivalence entre le problème de Cauchy et son équation intégrale

Définition 2.18. *Une fonction floue $x : J \to E^1$ est une solution du problème (2.1) si $x \in C(J, E^1)$, $x(t_0) = x_0$ et ${}^cD^q x(t) = f(t, x(t))$.*

Lemme 2.5. *[31] Soit $x(t)$ une fonction flou d-monotone, alors $x(t)$ est une solution du problème initial fractionnaire flou (2.1)si et seulement si*

- *1) $x(t)$ est continue*
- *2) $x(t)$ vérifie l'équation intégrale (2.2).*
- *3) La fonction $t \to I^q f(t, x(t))$est d-croissante sur J.*

Remarque 2.4. .

1) *Si $x(t) \in C(J, E^1)$ et pour tout $\alpha \in [0, 1]$, la fonction $t \to d([x(t)]^\alpha)$ est croissante sur J, alors on peut écrire l'équation (2.2)comme suit*

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{q-1}f(t, x(t))ds.$$

2) *Si $x \in C(J, E^1)$ et pour tout $\alpha \in [0, 1]$, la fonction $t \to d([x(t)]^\alpha)$ est décroissante sur J, alors on peut écrire l'équation (2.2)sous la forme*

$$x_0 = x(t) + (-1)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\Gamma(q)}(t-s)^{q-1}f(t, x(t))ds.$$

Ou bien sous la forme

$$x(t) = x_0 \ominus_H (-1)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\Gamma(q)}(t-s)^{q-1}f(t, x(t))ds.$$

2.3.1 Exemples

Nous utilisons les exemples suivants pour illustrer le résultat d'équivalence entre le problème de Cauchy (2.1)et l'équation intégrale(2.2).

Exemple 2.5. *Nous montrons par cet exemple que la solution du problème initial fractionnaire flou* (2.1)*et la solution de l'équation intégrale* (2.2) *ne sont pas équivalents en général. On considère le problème initial suivant :*

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\frac{1}{2}}x(t) = (\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{2}{\sqrt{t}}) \quad t \in [0,1], \\ x(0) = (-2, 0, 1). \end{cases} \tag{2.3}$$

En effet, prenons $f(t) = (\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{2}{\sqrt{t}}) \in E^1$, *alors*

$$I^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^t (t-s)^{\frac{-1}{2}} f(s)ds,$$

$$I^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^t (t-s)^{\frac{-1}{2}} (s^{\frac{1}{2}}, s^{\frac{-1}{2}}, 2s^{\frac{-1}{2}})ds,$$

$$I^{\frac{1}{2}}f(t) = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}t, \sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi}), \quad t \in [0,1].$$

Donc pour tout $\alpha \in [0,1]$ *et pour tout* $t \in [0,1]$, *On a* $d([I^{\frac{1}{2}}f(t)]^{\alpha}) = (1-\alpha)\sqrt{\pi}(2-\frac{t}{2})$ *.*
par suite la fonction $t \to d([I^{\frac{1}{2}}f(t)]^{\alpha})$ *est décroissante sur* $[0,1]$,
par suite la solution de l'équation intégrale $x(t) \ominus_{gH} x_0 = I^{\frac{1}{2}}f(t)$ *n'est pas une solution du problème* (2.3).
Car si on suppose que la solution $x(t)$ *est d-croissante sur* $[0,1]$ *alors d'après la Remarque 2.4, on a*

$$x(t) = x_0 + I^{\frac{1}{2}}f(t) = (-2,0,1) + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}t, \sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi}\right),$$

$$x(t) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}t - 2, \sqrt{\pi}, 1 + 2\sqrt{\pi}\right).$$

Comme $\frac{d}{dt}d[x(t)]^{\alpha}) < 0$, *alors la solution* $x(t)$ *est d-décroissante sur* $[0,1]$ *ce qui est une contradiction.*

Remarque 2.5. *Si* x *est une solution d-monotone de l'équation intégrale* (2.2)*tel que* x *est continue et la fonction* $t \to I^q f(t, x(t))$ *est croissante alors* x *est une solution d-monotone du problème de Cauchy* (2.1).

Exemple 2.6. *Nous allons montrer dans cet exemple que la solution du problème initial fractionnaire flou* (2.1)*et la solution de l'équation intégrale* (2.2)*sont équivalents.*

On considère le problème initial fractionnaire flou suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{1}{2}}x(t) = \sqrt{\pi}(-t^2, 0, 2t - t^2), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = (-2, 0, 2). \end{cases} \tag{2.4}$$

En effet, posons $f(t) = \sqrt{\pi}(-t^2, 0, 2t - t^2) \in E^1$, *alors*

$$I^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^t (t-s)^{\frac{-1}{2}} f(s)ds,$$

$$I^{\frac{1}{2}}f(t) = \left(\frac{-16}{15}t^{\frac{5}{2}}, 0, \frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{-16}{15}t^{\frac{5}{2}}\right); \quad t \in [0,1].$$

Donc, pour tout $\alpha \in [0,1]$ *et* $t \in [0,1]$, *on a,* $d([I^{\frac{1}{2}}f(t)]^\alpha) = 4(1-\alpha)\sqrt{t} > 0$ *ce qui implique que la fonction* $t \to d([I^{\frac{1}{2}}f(t)]^\alpha)$ *est croissante sur* $[0,1]$.
Par suite la solution de l'équation intégrale

$$x(t) \ominus_{gH} x_0 = I^{\frac{1}{2}}f(t)$$

est équivalente au problème initial (2.4).

2.4 Résultat d'existence de la solution

Avant d'établir le théorème d'existence de la solution du problème (2.1) nous rappelons au début de cette section quelques résultats classiques que nous allons utiliser dans la suite.

Théorème 2.7. *(Peano[32])Soient* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue et* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *alors le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

admet une solution sur tout intervalle ouvert contenant t_0.

Théorème 2.8. *[18, 19, 56] Il existe un espace de Banach* X *tel que* E^1 *est isomorphe á un cône convexe* C *dans* X *de sommet* 0. *De plus on a :*

1. *L'addition et la multiplication par un nombre réel dans X induisent les opérations correspondantes dans E^1.*
2. *$C - C$ est dense dans X.*
3. *C est fermé.*

Remarque 2.6. *La structure de l'espace normé X peut être décrite comme suit.*
On définit sur $E^1 \times E^1$ la relation d'équivalence suivante :

$$(u,v)R(u',v') \Longleftrightarrow u+v' = v+u'.$$

On note par $\langle u,v\rangle$ la classe d'équivalence de (u,v) et donc l'espace X sera l'ensemble des classe d'équivalence.
On définit la structure de l'espace vectoriel X par :

$$\langle u,v\rangle + \langle u',v'\rangle \Longleftrightarrow u+v' = v+u'.$$

$$\lambda\langle u,v\rangle = \langle \lambda u, \lambda v\rangle \quad if \lambda \geq 0.$$

$$\lambda\langle u,v\rangle = \langle (-\lambda)v, (-\lambda)u\rangle \quad if \lambda < 0.$$

L'isometrie $j : E^1 \longrightarrow X$ est définie par

$$j(u) = \langle u, 0\rangle.$$

La norme X est définie par $\| \langle u,v\rangle \|_X = D(u,v)$.

Théorème 2.9. *[32] Soient X un espace de Banach et $G : J \to E^1$ une fonction floue telle que $j \circ G$ est intégrable au sens de Bochner sur J, alors pour $q \in]0,1[$ on a*

1) *$I^q G(t) \in E^1$.*
2) *$j(I^q G(t)) = I^q(j(G(t))$.*
3) *G est intégrablement borné et il existe un ensemble I de mesure nulle tel que G est mesurable sur $J - I$.*

Remarque 2.7. *.*

1. *Si $j \circ G$ est intégrable au sens de Bochner ,alors G est intégrable (voir [57]).*
2. *L'intégrabilité G n'implique pas l'intégrabilité de Bochner de $j \circ G$.En effet*

Soit $F : [0,1] \to E^1$ *la fonction floue définie par :*

$$F(t)(x) = \begin{cases} 1 & if \quad x = 0, \\ t \quad if & x \in]0,1], \\ 0 & elsewhere. \end{cases}$$

On utilise les $\alpha -$ *coupes de* F *on obtient*

$$F_\alpha(t)(x) = \begin{cases} \{0\} & if \quad t > \alpha, \\ [0,1] & if \quad t \leq \alpha. \end{cases}$$

Pour tout $t > 0$ *et* $\alpha \in [0,1]$ *on a*

$$\int F_\alpha = [0, 1-\alpha].$$

Comme $D(F(t_1), F(t_2)) = 1$ *et* $t_1 \neq t_2$ *alors* $j \circ F$ *n'est pas intégrable au sens de Bochner.*

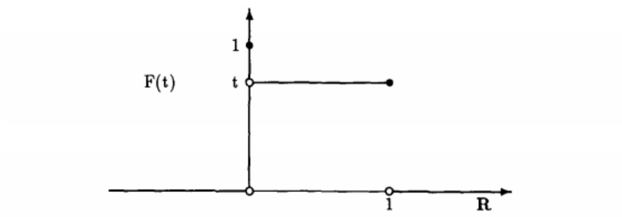


FIGURE 2.1 – La représentation de F.

Notons par $C(J, \tilde{C})$ l'espace de toutes les fonctions continue de J á valeur dans $\tilde{C}$ et soit j l'isométrie de $\tilde{C}$ dans un espace Banach X donné par le Théorème (2.9).
Maintenant, nous énonçons dans le théorème suivant le résultat d'existence de la solution du problème initial fractionnaire flou (2.1).

Théorème 2.10. *Soient* $\tilde{C}$ *un sous ensemble fermé de* (E^1, D) *et* $f : J \times \tilde{C} \to \tilde{C}$ *une fonction floue continue, alors le problème initial fractionnaire flou* (2.1)*admet une solution si et seulement si l'ensemble* $\tilde{C}$ *est localement compact.*

Démonstration. D'après les deux Théorèmes (2.8) (2.9), on peut déduire que $x(t)$ est une solution de (2.1)si et seulement si $j(x(t))$ est une solution continue de l'équation intégrale suivante :

$$j(x(t)) \ominus_{gH} j(x_0) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{q-1} j(f(s, x(s))ds. \tag{2.5}$$

Comme $x(t) \in C(J, \tilde{C})$, alors $j(f(s, x(s))$ est intégrable au sens de Bochner.
et puisque l'équation (2.5) admet une solution si et seulement si l'espace X est de dimension finie (voir le théorème 2 en [29]) et on sait qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si il est localement compact (voir [39]), de plus on a $X = \overline{\{j(\tilde{C}) - j(\tilde{C})\}}$, par suite $\tilde{C}$ est localement compact.

□

2.4.1 Applications

Nous illustrons le résultat d'existence précédent par les deux exemples suivants.

Exemple 2.7. *Soient* $L :]-\infty, 0] \to [0,1]$ *une fonction continue strictement croissante á support compact telle que* $\lim_{t \to 0^-} L(t) = 1$ *et* $K : [0, \infty[\to [0,1]$ *une fonction continue strictement décroissante á support compact tel que* $\lim_{t \to 0^+} K(t) = 1$.
Le nombre flou u *défini par :*

$$u(t) = \begin{cases} L(\frac{t-a}{b}) & si \quad t < a, \\ 1 & si \quad t = a, \\ K(\frac{t-a}{c}) & si \quad t > a. \end{cases}$$

est dit LK-nombre flou noté par $u = (a, b, c)$ *où* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b, c \in [0, +\infty[$.
On considère $\tilde{C}$ *l'ensemble de tout les LK-nombre flous de* (E^1, D).
Or la coupe au niveau α *de* $u = (a, b, c)$ *est un intervalle fermé définie par :*

$$[u]^\alpha = [l^\alpha, k^\alpha] = [a + bL^{-1}(\alpha), a + cK^{-1}(\alpha)].$$

alors il est facile de voir que $\tilde{C}$ *est fermé.*
Soient $u_1, u_2 \in \tilde{C}$, *alors on a*

$$D(u_1, u_2) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d([u_1]^\alpha, [u_2]^\alpha) = \sup_{\alpha \in [0,1]} max(\mid l_1^\alpha - l_2^\alpha \mid, \mid k_1^\alpha - k_2^\alpha \mid).$$

La suite $u_n = (a_n, b_n, c_n)$ *converge vers* $u = (a, b, c)$ *si et seulement si*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a, \quad \lim_{n \to +\infty} b_n = b, \quad \lim_{n \to +\infty} c_n = c.$$

Ce qui implique que $\tilde{C}$ *est localement compact.*

Exemple 2.8. *Soit m une constante réelle positive, alors l'ensemble E_m^1 défini par :*

$$E_m^1 = \{u \in E^1 \mid d(supp(u)) \leq m\}.$$

est un sous ensemble localement compact de E^1.
En effet, pour $n = 1, 2, 3, ...$, on pose $\tilde{K}_n = K_n \cap E_m^1$, tel que

$$K_n = \{u \in E^1 \mid supp(u) \subset [-n, n]\}.$$

Puisque E_m^1 est un fermé de E^1 alors $\tilde{K}_n$ est compact pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $u \in E_m^1$, alors u appartient á l'intérieur de $\tilde{K}_n$ pour certains $n \in \mathbb{N}^*$.
par suite tout élément de E_m^1 admet un voisinage compact, ce qui montre que l'ensemble E_m^1 est localement compact.

Chapitre 3

Équations différentielles floues intuitionistiques d'ordre fractionnaire

3.1 Intégrale et dérivée d'une fonction floue intuitionistique

Définition 3.1. *[47] Soit $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{IF}^1$. On dit que F est fortement mesurable si pour tout $\alpha \in [0,1]$, les deux fonctions $F_\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathcal{P}_c(\mathbb{R})$ et $F^\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathcal{P}_c(\mathbb{R})$ définies respectivement par $F_\alpha(t) = [F(t)]_\alpha$ et $F^\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ sont Lebesgue mesurables.*

Définition 3.2. *[47] Soit $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{IF}^1$. On dit que F est intégrable sur $[a,b]$, s'il existe $\langle u, v\rangle \in \mathbb{IF}^1$ tel que pour tout $\alpha \in [0,1]$, on a*

$$\left[\int_a^b F(t)dt\right]^\alpha = \left\{\int_a^b f(t)dt \;\mid\; f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une selection measurable de } F^\alpha\right\},$$

$$\left[\int_a^b F(t)dt\right]_\alpha = \left\{\int_a^b f(t)dt \;\mid\; f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une selection measurable de } F_\alpha\right\},$$

$$[\langle u, v\rangle]^\alpha = \left[\int_a^b F(t)dt\right]^\alpha,$$

$$[\langle u, v\rangle]_\alpha = \left[\int_a^b F(t)dt\right]_\alpha,$$

et on écrit $\displaystyle\int_a^b F(t)dt = \langle u, v\rangle$.

Définition 3.3. *[47] Soient $F : [a,b] \to \mathbb{IF}^1$ et $t_0 \in [a,b]$. On dit que F est dérivable en t_0 s'il existe un élément flou intuitionistique $F'(t_0) \in \mathbb{IF}^1$ tel que*

$$F'(t_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus_{gH} F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{F(t_0) \ominus_{gH} F(t_0 - h)}{h}.$$

3.2 Intégrale et dérivée fractionnaire d'une fonction floue intuitionistique

Définition 3.4. *[49] Soient $F(t) \in AC\left([a,b], \mathbb{IF}^1\right)$ et $q \in [0,1]$.*
L'intégral fractionnaire flou intuitionistique de la fonction F d'ordre q noté par :

$$I^q F(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} F(s) ds,$$

est définie par :

$$[I^q F(t)]^\alpha = \left[I^q F_l^-(t;\alpha), I^q F_r^-(t;\alpha)\right],$$
$$[I^q F(t)]_\alpha = \left[I^q F_l^+(t;\alpha), I^q F_r^+(t;\alpha)\right].$$

Proposition 3.1. *[49] Soient $F, G \in AC\left([a,b], \mathbb{IF}^1\right)$, $(q, q_1, q_2) \in [0,1]^3$ et $u \in \mathbb{IF}^1$. Alors on a*

1. *$I^q(uF)(t) = uI^q F(t)$.*
2. *$I^q(F+G)(t) = I^q F(t) + I^q G(t)$.*
3. *$I^{q_1} I^{q_2} F(t) = I^{q_1+q_2} F(t)$.*

Définition 3.5. *[49] Soit F une fonction floue intuitionistique telle que $F' \in AC([a,b], \mathbb{IF}^1)$ et $q \in [0,1]$.*
La fonction floue intuitionistique F est dite dérivable au sens de Caputo en t s'il existe an élément noté ${}^c D^q F(t) \in \mathbb{IF}^1$ tel que

$${}^c D^q F(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} F'(s) ds.$$

Tel que $\Gamma(.)$ est la fonction gamma d'Euler.

Remarque 3.1. *Soient F une fonction floue intuitionistique telle que $F' \in AC([a,b], \mathbb{IF}^1)$ et $q \in [0,1]$.*
on a

$${}^c D^q F(t) = I^{1-q} F'(t).$$

Exemple 3.1. *On Considère la fonction floue intuitionistique suivante $\langle u, v\rangle(t) = tC$.*
Tel que $C = (a_1; a_2; a_3; a_4; a_1'; a_2; a_3; a_4')$ est un nombre flou intuitionistique .
Pour calculer le dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $\langle u, v\rangle(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, on commence par le calcul de sa dérivée ordinaire en utilisant la différence de Hukuhara généralisée.
On a

$$\langle u, v\rangle'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\langle u, v\rangle(t+h) \ominus_{gH} \langle u, v\rangle(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(t+h)C \ominus_{gH} tC}{h} = C,$$

donc

$$\langle u, v\rangle'(t) = C,$$

comme

$$[C]^\alpha = [a_2 - \alpha(a_2 - a_1'), a_3 + \alpha(a_4 - a_3)],$$

et

$$[C]_\alpha = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_4 - \alpha(a_4' - a_3)],$$

alors on a

$$[{}^cD^q\langle u, v\rangle(t)]^\alpha = \left[I^{1-q}\left(\langle u, v\rangle'(t)\right)\right]^\alpha = \left[I^{1-q}C\right]^\alpha,$$

$$[{}^cD^q\langle u, v\rangle(t)]_\alpha = \left[I^{1-q}\left(\langle u, v\rangle'(t)\right)\right]^\alpha = \left[I^{1-q}C\right]_\alpha,$$

ce qui implique que

$$\left[I^{1-q}C\right]^\alpha = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[a_2 - \alpha(a_2 - a_1'), a_3 + \alpha(a_4 - a_3)\right] ds,$$

$$\left[I^{1-q}C\right]_\alpha = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_4 - \alpha(a_4' - a_3)\right] ds,$$

$$\left[I^{1-q}C\right]^\alpha = \frac{t^q}{\Gamma(q)\times q}[a_2 - \alpha(a_2 - a_1'), a_3 + \alpha(a_4 - a_3)],$$

$$\left[I^{1-q}C\right]_\alpha = \frac{t^q}{\Gamma(q)\times q}[a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_4 - \alpha(a_4' - a_3)],$$

$$\left[I^{1-q}C\right]^\alpha = \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}[C]^\alpha,$$

$$\left[I^{1-q}C\right]_\alpha = \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}[C]_\alpha,$$

$$^cD^q\langle u,v\rangle(t) = \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}C,$$

par suite

$$^cD^q\langle u,v\rangle(t) = \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q+1)}\langle u,v\rangle(t).$$

3.3 Problème aux limites local et non local fractionnaire

Les problèmes aux limites pour des équations différentielles ordinaires se posent dans les sciences physiques et les mathématiques appliquées. Dans certains de ces problèmes, les conditions filiales sont imposées localement. Dans autres cas, les conditions sont imposées non locales pour décrire certains phénomènes physiques. Il est parfois préférable d'imposer des conditions non locales puisque les mesures nécessaires à une condition non locale peut être plus précis que la mesure donnée par une condition locale voir [15, 16] pour plus de détails.
Notre objectif de cette section est d'étudier ce type de problèmes aux limites associés à des équations différentielles floues intuitionistiques d'ordre fractionnaire.

3.3.1 Problème aux limites local d'ordre fractionnaire

On considère le problème aux limites localfractionnaire flou intuitionistique suivant :

$$\begin{cases} ^cD^\alpha X(t) = F(t,X(t)); \quad t\in[0,T], \\ X(0) = aX(T). \end{cases} \tag{3.1}$$

Tel que $^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de $X(t)$ au sens de Caputo d'ordre $\alpha \in [0,1]$, $F \in C([0,T],\mathbb{IF}^1)$ et $a\in\mathbb{R}$ tel que $a\neq 1$.

Définition 3.6. *Une fonction flou intuitionistique $X : [0,T] \to \mathbb{IF}^1$ est une solution du problème (3.1) si $X\in C([0,T],\mathbb{IF}^1)$ tel que $X(0) = aX(T)$ et $D^\alpha X(t) = F(t,X(t))$.*

Définition 3.7. *[31] une fonction floue intuitionistique $X : [0,T] \to \mathbb{IF}^1$ est dite d-croissante ,(d-décroissante) sur $[0,T]$ si pour tout $r \in [0,1]$ la fonction réelle suivante $t \to d([X(t)]^r \cup [X(t)]_r)$ est croissante ,(décroissante)respectivement.*

Remarque 3.2. *Si la fonction $X : [0,T] \to \mathbb{IF}^1$ is d-croissante ou d-décroissante sur $[0,T]$, alors on dite que $X(t)$ est d-monotone sur $[0,T]$.*

Pour étudier l'existence d'une solution du problème (3.1)on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1. *[31] Soit $H : [0,T] \to \mathbb{IF}^1$ une fonction continue telle que ,$t \to I^q H(t)$ est d-croissante sur $[0,T]$. Une function d-monotone $X(t) \in C([0,T], \mathbb{IF}^1)$ est dite solution de l'équation intégrale*

$$X(t) \ominus_{gH} X_0 = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} H(s) ds.$$

Si et seulement si est une solution du problème suivant

$$\begin{cases} {}^cD^q X(t) = H(t); \quad t \in [0,T], \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Le résultat suivant est une conséquence directe du lemme précédent .

Lemme 3.2. *Soient $F : [0,T] \times \mathbb{IF}^1 \to \mathbb{IF}^1$ une fonction continue telle que, $t \to I^\alpha F(t, X(t))$ est d-croissante sur $[0,T]$, alors $X(t)$ est une solution d-monotone du problème (3.1)Si et seulement si elle est une solution de l'équation intégrale suivant :*

$$X(t) \ominus_{gH} \frac{a}{(1-a)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} F(s, X(s)) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s, X(s)) ds.$$

Nous rappelons dans le théorème suivant le principe de contraction de Banach pour l'utiliser dans cette section.

Théorème 3.1. *[65] Soient (E,d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une contraction, alors f admet un point fixe unique.*

Nous énonçons maintenant le résultat de l'existence et l'unicité du problème (3.1).

Théorème 3.2. *Soit k une constante réelle positive telle que ,*

$$d_p(F(t,X), F(t,Y) < k d_p(X,Y); \qquad pour \quad tout \quad X, Y \in C([0,T], \mathbb{IF}^1) \quad et \quad t \in [0,T].$$

si

$$\frac{kT^\alpha (1 + \frac{|a|}{|1-a|})}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{3.2}$$

alors le probleme (3.1)admet une solution unique.

Démonstration. On transforme le problème (3.1)au problème du point fixe défini sur $[0,T]$ par :

$$\mathbf{P} : C([0,T],\mathbb{IF}^1) \longrightarrow C([0,T],\mathbb{IF}^1),$$

Tel que

$$\mathbf{P}X(t) \ominus_{gH} \frac{a}{(1-a)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} F(s,X(s))ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s,X(s))ds.$$

Soient $X, Y \in C([0,T],\mathbb{IF}^1)$, alors on a

$$d_p(\mathbf{P}X(t),\mathbf{P}Y(t)) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d_p(F(t,X(t)),F(t,Y(t)))ds,$$

$$+\frac{\mid a \mid}{\mid 1-a \mid \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} d_p(F(s,X(s)),F(s,Y(s)))ds,$$

$$d_p(\mathbf{P}X(t),\mathbf{P}Y(t)) \leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d_p(X(t),Y(t))ds,$$

$$+\frac{k \mid a \mid}{\mid 1-a \mid \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} d_p(X(s),Y(s))ds,$$

$$d_p(\mathbf{P}X(t),\mathbf{P}Y(t)) \leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \sup_{s\in[0,T]} d_p(X(s),Y(s)) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds,$$

$$+\frac{k \mid a \mid}{\mid 1-a \mid \Gamma(\alpha)} \sup_{s\in[0,T]} d_p(X(s),Y(s)) \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds,$$

$$d_p(\mathbf{P}X(t),\mathbf{P}Y(t)) \leq \frac{kT^\alpha(1+\frac{|a|}{|1-a|})}{\alpha\Gamma(\alpha)} \sup_{s\in[0,T]} d_p(X(s),Y(s)),$$

$$d_p(\mathbf{P}X(t),\mathbf{P}Y(t)) \leq \frac{kT^\alpha(1+\frac{|a|}{|1-a|})}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{s\in[0,T]} d_p(X(s),Y(s)),$$

D'où

$$\sup_{t\in[0,T]} d_p(\mathbf{P}X(t),\mathbf{P}Y(t)) \leq \frac{kT^\alpha(1+\frac{|a|}{|1-a|})}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t\in[0,T]} d_p(X(t),Y(t)).$$

D'après le théorème de point fixe de Banach on peut déduire que $\mathbf{P}$ admet un unique point fixe X qui est solution du problème (3.1). □

Nous pouvons aussi montrer l'existence de la solution du problème (3.1) si on suppose seulement que la fonction es continue et bornée. Pour démontrer ceci nous aurons besoin du théorème d'Ascoli et du théorème point fixe de Schaefer .

Théorème 3.3. *(Ascoli)[64] Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques complets. Une partie B de $C(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si :*
1)B est équicontinue c'est a dire :
$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad tel \quad que \quad \forall f \in B, \forall y \in E$, alors on a

$$d(x, y) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

2)Pour tout $x \in E$ l'ensemble $Bx = \{f(x), f \in B\}$est relativement compact.

Théorème 3.4. *(Schaefer [63]) Soient X un espace de Banach et $T : X \to X$ un opérateur complètement continue.*
Si l'ensemble $\{x \in X \mid x = \lambda Tx, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\}$ est borné, alors T admet au moins un point fixe.

Théorème 3.5. *On suppose que :*
H_1) La fonction floue intuitionistique $F : [0, T] \times \mathbb{IF}^1 \to \mathbb{IF}^1$ est continue.
H_2) Il existe une constante positive M telle que,

$$d_p(F(t, X), 0_{\mathbb{IF}^1}) < M, \quad \forall (t, X) \in [0, T] \times C([0, T], \mathbb{IF}^1).$$

Alors le problème (3.1)admet au moins une solution.

Démonstration. Pour montrer que le problème (3.1)admet au moins une solution définie sur $[0, T]$, on utilise le théorème de point fixe de Schaefer [63], en montrant que l'opérateur $\mathbf{P}$ défini ci-dessus admet un point fixe. La démonstration de ce théorème sera donné en trois étapes distinctes.
Étape 1 Montrons que l'opérateur $\mathbf{P}$ est continue.
Soient $(X_n)_n$ une suite dans $C([0, T], \mathbb{IF}^1)$ telle que X_n converges vers X et $t \in [0, T]$, alors on a

$$d_p(\mathbf{P}X_n(t), \mathbf{P}X(t)) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d_p(F(t, X_n(t)), F(t, X(t))) ds,$$

$$+ \frac{\mid a \mid}{\mid 1-a \mid \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} d_p(F(s, X_n(s)), F(s, X(s))) ds,$$

$$d_p(\mathbf{P}X_n(t), \mathbf{P}X(t)) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s \in [0,T]} d_p(F(s, X_n(s)), F(s, X(s))) ds,$$

$$+\frac{\mid a \mid}{\mid 1-a \mid \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} d_p(F(s), X_n(s)), F(s, X(s)))ds,$$

$$d_p(\mathbf{P}X_n(t), \mathbf{P}X(t)) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \sup_{s\in[0,T]} d_p(F(s, X_n(s)), F(s, X(s))) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds,$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \sup_{s\in[0,T]} d_p(F(s, X_n(s)), F(s, X(s))) \frac{\mid a \mid}{\mid 1-a \mid \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds),$$

$$d_p(\mathbf{P}X_n(t), \mathbf{P}X(t)) \leq \frac{T^\alpha(1+\frac{|a|}{|1-a|})}{\alpha\Gamma(\alpha)} \sup_{s\in[0,T]} d_p(F(s, X_n(s)), F(s, X(s))),$$

$$d_p(\mathbf{P}X_n(t), \mathbf{P}X(t)) \leq \frac{T^\alpha(1+\frac{|a|}{|1-a|})}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{s\in[0,T]} d_p(F(s, X_n(s)), F(s, X(s))),$$

D'où

$$\sup_{t\in[0,T]} d_p(\mathbf{P}X_n(t), \mathbf{P}X(t)) \leq \frac{T^\alpha(1+\frac{|a|}{|1-a|})}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t\in[0,T]} d_p(F(t, X_n(t)), F(t, X(t))),$$

Puisque F est continue, alors on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} d_p(\mathbf{P}X_n(t), \mathbf{P}X(t)) \leq \frac{T^\alpha(1+\frac{|a|}{|1-a|})}{\Gamma(\alpha+1)} \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} d_p(F(t, X_n(t)), F(t, X(t))) = 0,$$

Ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} d_p(\mathbf{P}X_n(t), \mathbf{P}X(t)) = 0.$$

Finalement l'opérateur $\mathbf{P}$ est continu dans $C([0,T], \mathbb{IF}^1)$.

Étape 2 :Montrons que $\mathbf{P}B_\rho$ est borné et équicontinue dans $C([0,T], \mathbb{IF}^1)$.

Il suffit de montrer que pour $\rho > 0$ il existe un réel $\delta > 0$, tel que

$$Pour \quad tout \quad X \in B_\rho = \{X \in C([0,T], \mathbb{IF}^1) : \sup_{t\in[0,T]} d_p(X(t), 0_{\mathbb{IF}}) \leq \rho\},$$

On a

$$\sup_{t\in[0,T]} d_p(\mathbf{P}X(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) < \delta$$

.

Soit $t \in [0,T]$, alors on a

$d_p(\mathbf{P}X(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d_p(F(t, X(t)), 0_{\mathbb{IF}})ds.$

$$+\frac{\mid a \mid}{\mid 1-a \mid \Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} d_p(F(s,X(s)),0_{\mathbb{IF}})ds,$$
On utilise l'hypothèse (H_2), on obtient

$$d_p(\mathbf{P}X(t),0_{\mathbb{IF}^1}) \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{M \mid a \mid}{\mid 1-a \mid \Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds,$$

$$d_p(\mathbf{P}X(t),0_{\mathbb{IF}^1}) \leq \frac{MT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{MT^\alpha \mid a \mid}{\mid 1-a \mid \alpha\Gamma(\alpha)},$$

$$\sup_{t\in[0,T]} d_p(\mathbf{P}X(t),0_{\mathbb{IF}^1}) \leq \frac{MT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{MT^\alpha \mid a \mid}{\mid 1-a \mid \alpha\Gamma(\alpha)} = \delta,$$

par suite $\mathbf{P}B_\rho \subset B_\delta$ ce qui implique que $\mathbf{P}B_\rho$ est borné.

Soient $X \in B_\rho$ et $t_1, t_2 \in [0,T]$ tels que $t_1 < t_2$, alors on a

$$d_p(\mathbf{P}X(t_1),\mathbf{P}X(t_2)) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} d_p(\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,X(s))ds, \int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,X(s))ds),$$

puisque

$$\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}F(s,X(s))ds = \int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}F(s,X(s))ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}F(s,X(s))ds,$$

alors
$$d_p(\mathbf{P}X(t_1),\mathbf{P}X(t_2)) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t_1} \mid (t_1-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1} \mid d_p(F(s,X(s))ds, 0_{\mathbb{IF}^1})$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}d_p(F(s,X(s))ds,0_{\mathbb{IF}^1})ds,$$
on utilise H_2 on aura ,

$$d_p((\mathbf{P}X(t_1),\mathbf{P}X(t_2)) \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t_1} \mid (t_1-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1} \mid ds + \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds,$$

$$d_p(\mathbf{P}X(t_1),\mathbf{P}X(t_2)) \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}((t_2-t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha) + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}(t_2-t_1)^\alpha,$$

donc
$$d_p(\mathbf{P}X(t_1),\mathbf{P}X(t_2)) \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}((t_2-t_1)^\alpha + (t_2^\alpha - t_1^\alpha)),$$

par suite,
$$\lim_{t_1\to t_2} d_p(\mathbf{P}X(t_1),\mathbf{P}X(t_2)) = 0.$$

Ceci montre que $\mathbf{P}B_\rho$ est équicontinue, et d'après le théorème d'Arzela-Ascoli [64] on déduit que $\mathbf{P}B_\rho$ est relativement compact, ce qui implique que l'opérateur $\mathbf{P}$ est complètement continu.

Étape 3 Montrons que l'ensemble E_λ définie par :

$$E_\lambda = \{X \in C([0,T], \mathbb{IF}^1) \mid X = \lambda \mathbf{P}X, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

est borné.

Soit $X \in E_\lambda$, alors $X = \lambda \mathbf{P}X$ pour tout $\lambda \in [0,1]$.

Soit $t \in [0,T]$, on a

$$X(t) \ominus_{gH} \frac{\lambda a}{(1-a)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} F(s,X(s))ds = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s,X(s))ds,$$

On utilise (H_2), alors on a

$$\begin{aligned} d_p(\mathbf{P}X(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d_p(F(t,X(t)), 0_{\mathbb{IF}^1}) ds, \\ & + \frac{\mid a \mid}{\mid 1-a \mid \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} d_p(F(s,X(s)), 0_{\mathbb{IF}}) ds, \end{aligned}$$

$$d_p(\mathbf{P}X(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M \mid a \mid}{\mid 1-a \mid \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds,$$

$$d_p(\mathbf{P}X(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq \frac{MT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{MT^\alpha \mid a \mid}{\mid 1-a \mid \alpha\Gamma(\alpha)},$$

$$\sup_{t\in[0,T]} d_p(\mathbf{P}X(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mid a \mid MT^\alpha}{\mid 1-a \mid \Gamma(\alpha+1)} < \infty,$$

Ce qui montre que l'ensemble E_λ est borné.

Finalement d'après le théorème de point fixe de Schaefer on déduit que l'opérateur $\mathbf{P}$ admet un point fixe qui est une solution du problème (3.1). □

3.3.2 Problème non local d'ordre fractionnaire

Dans cette section on présente quelques conditions suffisantes pour garantir l'existence et d'unicité de la solution du problème non local fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^q X(t) = F(t, X(t)) \quad ; \quad t \in [0,T], \\ X(0) = G(X). \end{cases} \tag{3.3}$$

Où $F : [0,T] \times \mathbb{IF}^1 \to \mathbb{IF}^1$ et $G : C([0,T], \mathbb{IF}^1) \to \mathbb{IF}^1$ sont des fonctions floues intuitionistiques.

La condition non locale a été initialisé par Byszewski [14] quand il a prouvé l'existence et l'unicité de solution faible pour les problèmes de Cauchy non local classique.
La condition non locale peut être utile dans la physique que la condition initial standard $X(0) = X_0$ (voir Byszewski [15, 16]) par exemple la fonction $G(X)$ peut être donnée par

$$G(X) = \sum_{k=1}^{N} a_k G(t_k)$$

Où $a_k, k = 1, ..., N$ est une constante réelle et $0 < t_1 < t_2 < .... < t_N$.

Théorème 3.6. *On suppose que :*
1)La fonction floue intuitionistique $F : [0, T] \times \mathbb{IF}^1 \to \mathbb{IF}^1$ est continue.
2)Il existe une constante positive k tel que ,

$$d_p(F(t, X), F(t, Y) < kd_p(X, Y) \qquad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad X, Y \in C([0, T], \mathbb{IF}^1) \quad \textit{et} \quad t \in [0, T].$$

3)Il existe une constante positive L tel que ,

$$d_p(G(U), G(V) \leq Ld_p(U, V) \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad U, V \in C([0, T], \mathbb{IF}^1)$$

et si

$$L + \frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1,$$

alors le problème (3.3)admet une solution unique.

Démonstration. On transforme le problème (3.3)à un problème de point fixe sur $[0, T]$.
Soit $\mathbf{B} : C([0, T], \mathbb{IF}^1) \to C([0, T], \mathbb{IF}^1$ l'opérateur défini par :

$$\mathbf{B}X(t) \ominus_{gH} G(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} F(s, X(s)) ds,$$

Soient $X, Y \in C([0, T], \mathbb{IF}^1)$, alors on a

$$d_p(\mathbf{B}X(t), \mathbf{B}Y(t)) \leq d_p(G(X(t)), G(Y(t))) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} d_p(F(t, X(t)), F(t, Y(t))) ds,$$

$$d_p(\mathbf{B}X(t), \mathbf{B}Y(t)) \leq Ld_p(X(t), Y(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} d_p(X(t), Y(t)) ds,$$

$$d_p(\mathbf{B}X(t), \mathbf{B}Y(t)) \leq Ld_p(X(t), Y(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} ds \sup_{s \in [0,T]} d_p(X(s), Y(s))$$

$$\sup_{t\in[0,T]} d_p(\mathbf{B}X(t), \mathbf{B}Y(t)) \leq L \sup_{t\in[0,T]} d_p(X(t), Y(t)) + \frac{kT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} ds \sup_{t\in[0,T]} d_p(X(t), Y(t)),$$

D'où

$$\sup_{t\in[0,T]} d_p(\mathbf{B}X(t), \mathbf{B}Y(t)) \leq \left(L + \frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \sup_{t\in[0,T]} d_p(X(t), Y(t)),$$

On utilise le théorème de point fixe de Banach, on déduit que l'opérateur **B** admet un unique point fixe X qui la solution du problème (3.3). $\square$

Théorème 3.7. *On suppose que :*

1)La fonction floue intuitionistique $F : [0, T] \times \mathbb{IF}^1 \to \mathbb{IF}^1$ *est continue.*

2)Il existe une constante positive M_1 *telle que ,*

$$d_p(F(t, X), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq M_1 \quad \forall (t, X) \in [0, T] \times C([0, T], \mathbb{IF}^1).$$

3)Il existe une constante positive M_2 *telle que ,*

$$d_p(G(X), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq M_2 \quad \forall X \in C([0, T], \mathbb{IF}^1).$$

Alors le problème (3.3)*admet au moins une solution.*

Exemple 3.2. *On considère le problème fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{2}{3}}X(t) = \frac{e^{-t}}{9+e^t}X(t) & ; t \in [0, 1], \\ X(0) = (-1)X(1). \end{cases} \tag{3.4}$$

On pose $F(t, X(t)) = \frac{e^{-t}}{9+e^t}X(t)$ *et* $t \in [0, 1]$

$$d_p(F(t, X(t)), F(t, Y(t))) = d_p\left(\frac{e^{-t}}{9+e^t}X(t), \frac{e^{-t}}{9+e^t}Y(t)\right) ds.$$

$$d_p(F(t, X(t)), F(t, Y(t))) \leq \frac{e^{-t}}{9+e^t} d_p(X(t), Y(t))ds.$$

$$d_p(F(t, X(t)), F(t, Y(t))) \leq \frac{1}{10} d_p(X(t), Y(t))ds$$

Donc la première condition du Théorème 3.2 est satisfaite pour $\frac{1}{10}$.

Il reste à vérifie la condition (3.2) *de ce théorème, pour ceci on a* $T = 1$, $a = -1$ *et* $\alpha = \frac{2}{3}$ *, par suite on a*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \Gamma(\frac{2}{3} + 1) = \Gamma(\frac{5}{3}) = 0.89.$$

D'où

$$\frac{\frac{3}{2}k}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{0.15}{0.89} = 0.1685393 < 1.$$

Finalement,d'après le Théorème 3.2 on déduit que le problème (3.4) *admet une solution unique sur* $[0, 1]$.

3.4 Problème aux limites fractionnaire flou intuitionistique retardé

Dans cette section nous étudions l'existence et l'unicité de la solution du problème fractionnaire flou intuitionistique à retard suivant, qui est l'objet de notre article [48].

$$\begin{cases} D^{\alpha}X(t) = F(t, X_t, D^{\beta}X(t)) & t \in [0,1], \\ X(t) = \phi(t) & t \in [-r, 0], \\ X(1) = X(\xi). \end{cases} \tag{3.5}$$

Tel que D^{α}, D^{β} sont des dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville .
$(\alpha - \beta \geq 1)$,$(\xi \in [0, 1[)$, $F : [0,1] \times C_0 \times \mathbb{IF}^1 \longrightarrow \mathbb{IF}^1$ est une fonction intuitionistique floue. $\phi \in \mathbb{C}_0$, $\phi(0) = 0_{\mathbb{IF}^1}$ et $C_0 = C\left([-r, 0], \mathbb{IF}^1\right)$ on note par X_t l'élément de C_0 définie par $X_t(\theta) = X(t + \theta)$ pour tout $\theta \in [-r, 0]$.
Soit $\theta \in [0, 1]$, alors on a

$$\begin{cases} [D^{\alpha}X(t)]^{\theta} = \left[F(t, X_t, D^{\beta}X(t))\right]^{\theta}, \\ [D^{\alpha}X(t)]_{\theta} = \left[F(t, X_t, D^{\beta}X(t))\right]_{\theta}, \\ [X(t)]^{\theta} = [\phi(t)]^{\theta}, \\ [X(t)]_{\theta} = [\phi(t)]_{\theta}, \\ [X(1)]^{\theta} = [X(\xi)]^{\theta}, \\ [X(1)]_{\theta} = [X(\xi)]_{\theta}. \end{cases}$$

Comme

$$\left[F(t, X_t, D^{\beta}X(t))\right]^{\theta} = \left[F_l^{-}(t, X_t, D^{\beta}X(t); \theta), F_r^{-}(t, X_t, D^{\beta}X(t); \theta)\right],$$

$$\left[F(t, X_t, D^{\beta}X(t))\right]_{\theta} = \left[F_l^{+}(t, X_t, D^{\beta}X(t))\theta), F_r^{+}(t, X_t, D^{\beta}X(t); \theta)\right],$$

Et

$$[D^{\alpha}X(t)]^{\theta} = \left[D^{\alpha}X_l^{-}(t; \theta), D^{\alpha}X_r^{-}(t; \theta)\right], 0 < \theta < 1,$$

$$[D^{\alpha}X(t)]_{\theta} = \left[D^{\alpha}X_l^{+}(t; \theta), D^{\alpha}X_r^{+}(t; \theta)\right], 0 < \theta < 1.$$

Alors

$$\begin{cases} \left[D^\alpha X_l^-(t;\theta), D^\alpha X_r^-(t;\theta)\right] = \left[F_l^-(t, X_t, D^\beta X(t);\theta), F_r^-(t, X_t, D^\beta X(t);\theta)\right], \\ \left[D^\alpha X_l^+(t;\theta), D^\alpha X_r^+(t;\theta)\right] = \left[F_l^+(t, X_t, D^\beta X(t);\theta), F_r^+(t, X_t, D^\beta X(t);\theta)\right], \\ \left[X_l^-(t;\theta), X_r^-(t;\theta)\right] = \left[\phi_l^-(t;\theta), \phi_r^-(t;\theta)\right], \\ \left[X_l^+(t;\theta), X_r^+(t;\theta)\right] = \left[\phi_l^+(t;\theta), \phi_r^+(t;\theta)\right], \\ \left[X_l^-(1;\theta), X_r^-(1;\theta)\right] = \left[X_l^-(\xi;\theta), X_r^-(\xi;\theta)\right], \\ \left[X_l^+(1;\theta), X_r^+(1;\theta)\right] = \left[X_l^+(\xi;\theta), X_r^+(\xi;\theta)\right], \end{cases}$$

On obtient quatre problèmes :

$$\begin{cases} D^\alpha X_l^-(t;\theta) = F_l^-(t, (X_l^-)_t, D^\beta X_l^-(t);\theta) \quad , t \in [0,1], \\ X_l^-(t;\theta) = \phi_l^-(t;\theta), \quad t \in [-r, 0] \\ X_l^-(1;\theta) = X_l^-(\xi;\theta) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} D^\alpha X_r^-(t;\theta) = F_r^-(t, (X_r^-)_t, D^\beta X_r^-(t);\theta) \quad , t \in [0,1], \\ X_r^-(t;\theta) = \phi_r^-(t;\theta), \quad t \in [-r, 0] \\ X_r^-(1;\theta) = X_r^-(\xi;\theta), \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} D^\alpha X_l^+(t;\theta) = F_l^+(t, (X_l^+)_t, D^\beta X_l^+(t);\theta) \quad , t \in [0,1], \\ X_l^+(t;\theta) = \phi_l^+(t;\theta), \quad t \in [-r, 0] \\ X_l^+(1;\theta) = X_l^+(\xi;\theta), \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} D^\alpha X_r^+(t;\theta) = F_r^+(t, (X_r^+)_t, D^\beta X_r^+(t);\theta) \quad , t \in [0,1], \\ X_r^+(t;\theta) = \phi_r^+(t;\theta), \quad t \in [-r, 0], \\ X_r^+(1;\theta) = X_r^+(\xi;\theta). \end{cases} \tag{3.9}$$

Nous commençons par la recherche d'une solution du problème (3.6)

$$\begin{cases} D^\alpha X_l^-(t;\theta) = F_l^-(t, (X_l^-)_t, D^\beta X_l^-(t);\theta) \quad , t \in [0,1], \\ X_l^-(t;\theta) = \phi_l^-(t;\theta), \quad t \in [-r, 0], \\ X_l^-(1;\theta) = X_l^-(\xi;\theta). \end{cases}$$

On applique I^α sur la première équation de ce problème on obtient

$$I^{\alpha}D^{\alpha}X_l^-(t;\theta) = I^{\alpha}F_l^-(t,(X_l^-)_t, D^{\beta}X_l^-(t);\theta),$$

$$X_l^-(t;\theta) = c_1t^{\alpha-1} + c_2t^{\alpha-2} + .. + c_nt^{\alpha} + I^{\alpha}F_l^-(t,(X_l^-)_t, D^{\beta}X_l^-(t);\theta),$$

Pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,..,n-1, n = [\alpha]+1$ et $X_l^-(0;\theta) = \phi_l^-(0;\theta) = 0$, alors

$$X_l^-(t;\theta) = c_1t^{\alpha-1} + I^{\alpha}F_l^-(t,(X_l^-)_t, D^{\beta}X_l^-(t);\theta),$$

$$X_l^-(t;\theta) = c_1t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}F_l^-\left(s,(X_l^-)_s, D^{\beta}X_l^-(s);\theta\right),$$

Puisque

$$X_l^-(1;\theta) = c_1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}F_l^-\left(s,(X_l^-)_s, D^{\beta}X_l^-(s);\theta\right)ds,$$

Et

$$X_l^-(\xi;\theta) = c_1\xi^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi} (\xi-s)^{\alpha-1}F_l^-\left(s,(X_l^-)_s, D^{\beta}X_l^-(s);\theta\right),$$

Et

$$X_l^-(1;\theta) = X_l^-(\xi;\theta),$$

Alors

$$(1-\xi^{\alpha-1})c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi} (\xi-s)^{\alpha-1}F_l^-(s,(X_l^-)_s, D^{\beta}X_l^-(s);\theta)ds$$
$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}F_l^-(s,(X_l^-)_s, D^{\beta}X_l^-(s);\theta)ds,$$

Par suite

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^{\xi} (\xi-s)^{\alpha-1}F_l^-\left(s,(X_l^-)_s, D^{\beta}X_l^-(s);\theta\right)ds$$
$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}F_l^-\left(s,(X_l^-)_s, D^{\beta}X_l^-(s);\theta\right)ds,$$

Finalement, la solution du problème (3.6) est donnée par :

$$X_l^-(t;\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}F_l^-\left(s,(X_l^-)_s, D^{\beta}X_l^-(s);\theta\right)$$
$$+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^{\xi} (\xi-s)^{\alpha-1}F_l^-\left(s,(X_l^-)_s, D^{\beta}X_l^-(s);\theta\right)ds$$

$$-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}F_l^-\left(s,(X_l^-)_s,D^\beta X_l^-(s);\theta\right)ds,$$

de la même manière les solutions des problèmes (3.7),(3.8) et (3.9) sont données respectivement par :

$$\begin{aligned}
X_r^-(t;\theta) = {} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}F_r^-\left(s,(X_r^-)_s,D^\beta X_r^-(s);\theta\right)\\
& +\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-1}F_r^-\left(s,(X_r^-)_s,D^\beta X_r^-(s);\theta\right)ds\\
& -\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}F_r^-\left(s,(X_r^-)_s,D^\beta X_r^-(s);\theta\right)ds,\\
X_l^+(t;\theta) = {} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}F_l^+\left(s,(X_l^+)_s,D^\beta X_l^+(s);\theta\right)\\
& +\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-1}F_l^+\left(s,(X_l^-)_s,D^\beta X_l^+(s);\theta\right)ds\\
& -\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}F_l^+\left(s,(X_l^+)_s,D^\beta X_l^+(s);\theta\right)ds,\\
X_r^+(t;\theta) = {} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}F_r^+\left(s,(X_r^+)_s,D^\beta X_r^+(s);\theta\right)\\
& +\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-1}F_r^+\left(s,(X_r^+)_s,D^\beta X_r^+(s);\theta\right)ds,\\
& -\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}F_r^+\left(s,(X_r^+)_s,D^\beta X_r^+(s);\theta\right)ds,
\end{aligned}$$

d'après le Lemme (1.1) alors la solution du problème (3.5) est donnée par la formule suivant :

$$X(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}F\left(s,X_s,D^\beta X(s)\right)+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-1}F\left(s,X_s,D^\beta X(s)\right)ds$$

$$\ominus_{gH}\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}F\left(s,X_s,D^\beta X(s)\right)ds.$$

Maintenant, nous étudions l'unicité de la solution du problème (3.5) en utilisant le théorème du point fixe de Banach.
On pose $H=\{X/X\in C([-r,1],\mathbb{IF}^1),D^\beta X\in C(J,\mathbb{IF}^1),X(t)=\phi(t),\forall t\in[-r,0]\}$.
Et on définit sur H la métrique suivante

$$D(u(t),v(t))=K\max_{t\in[-r,1]}d_p(u(t),v(t))+L\max_{t\in[0,1]}d_p(D^\beta u(t),D^\beta v(t)).$$

Alors on a le résultat suivant.

Proposition 3.2. *L'espace (H, D) est un espace métrique complet.*

Démonstration. .

Montrons que D est une métriqe sur H.

On a

1) $D(u(t), u(t)) = K \max_{t\in[-r,1]} d_p(u(t), u(t)) + L \max_{t\in[0,1]} d_p(D^\beta u(t), D^\beta u(t)) = 0.$

2) $D(u(t), v(t)) \leq K \max_{t\in[-r,1]} \{d_p(u(t), z(t)) + d_p(z(t), v(t))\},$

$$+L \max_{t\in[0,1]} \{d_p(D^\beta u(t), D^\beta z(t)) + d_p(D^\beta z(t), D^\beta v(t))\},$$

donc $D(u(t), v(t)) \leq K \max_{t\in[-r,1]} d_p(u(t), z(t)) + L \max_{t\in[0,1]} d_p(D^\beta u(t), D^\beta z(t))$

$$+K \max_{t\in[-r,1]} d_p(z(t), v(t)) + L \max_{t\in[0,1]} d_p(D^\beta z(t), D^\beta v(t)),$$

d'oú

$$D(u(t), v(t)) \leq D(u(t), z(t)) + D(z(t), v(t)).$$

par suite (H, D) est un espace métrique.

Montrons (H, D) que est complet.

Soit $(X_n)_n$ une suite de Cauchy dans H, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > N_0$

$$D(X_n(t), X_m(t)) \leq \varepsilon,$$

comme

$$D(X_n(t), X_m(t)) = K \max_{t\in[-r,1]} d_p(X_n(t), X_m(t)) + L \max_{t\in[0,1]} d_p(D^\beta X_n(t), D^\beta X_m(t)) < \varepsilon,$$

alors

$$d_p(X_n(t), X_m(t)) < \varepsilon,$$

par suite

$$d_p(D^\beta X_n(t), D^\beta X_m(t)) < \varepsilon$$

comme $(\mathbb{IF}^1, d_p)$ est un espace métrique complet, alors la suite $(X_n(t))_n$ converge vers $X(t)$ dans $\mathbb{IF}^1$.

Pour $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{K+L} > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_p(X_n(t), X(t)) < \varepsilon_1,$$

alors

$$K \max_{t\in[-r,1]} d_p(X_n(t), X(t)) < K\varepsilon_1,$$

et

$$L \max_{t\in[0,1]} d_p(D^\beta X_n(t), D^\beta X(t)) < L\varepsilon_1,$$

par suite

$$D(X_n(t), X(t)) < \varepsilon.$$

Finalement, l'espace (H, D) est un espace métrique complet. □

Théorème 3.8. *Soient $F : [0,1] \times C_0 \times \mathbb{IF}^1 \longrightarrow \mathbb{IF}^1$ et K, L deux nombres réels positifs tels que*

$$d_p\left(F\left(t, u_t, D^\beta u(t)\right), F\left(t, v_t, D^\beta v(t)\right)\right) \leq K d_p(u,v) + L d_p(D^\beta u(t), D^\beta v(t))$$

Si $\left(\frac{K}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)\left(1 + \frac{1+\xi^\alpha}{1-\xi^{\alpha-1}}\right) < 1$, alors le problème (3.5) admet une unique solution sur $[-r, 1]$.

Démonstration. Soit $T : H \longrightarrow H$ l'opérateur défini par :

$$TX(t) = \begin{cases} \phi(t); \quad t \in [-r, 0] & , \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F\left(s, X_s, D^\beta X(s)\right) ds \\ +\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})} \displaystyle\int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-1} F\left(s, X_s, D^\beta X(s)\right) ds \\ \ominus_{gH} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})} \displaystyle\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} F\left(s, X_s, D^\beta X(s)\right) ds & ; \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

Soient $u, v \in H$, donc pour tout $t \in [-r, 0]$ on a $d_p(u(t), v(t)) = 0$.
Soit maintenant $t \in [0,1]$, alors on a

$$d_p(Tu(t), Tv(t)) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d_p(F(s, u_s, D^\beta u(s)), F(s, v_s, D^\beta v(s)))ds$$

$$+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^{\xi}(\xi-s)^{\alpha-1}d_p\left(F\left(s,u_s,D^{\beta}u(s)\right),F\left(s,v_s,D^{\beta}v(s)\right)\right)ds$$

$$+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha-1}d_p\left(F\left(s,u_s,D^{\beta}u(s)\right),F\left(s,v_s,D^{\beta}v(s)\right)\right)ds.$$

$$d_p\left(Tu(t),Tv(t)\right)\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\left[Kd_p(u_s(\rho),v_s(\rho))+Ld_p(D^{\beta}u(s),D^{\beta}v(s))\right]ds,$$

$$+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^{\xi}(\xi-s)^{\alpha-1}\left[Kd_p(u_s(\rho),v_s(\rho))+Ld_p(D^{\beta}v(s),D^{\beta}v(s))\right]ds,$$

$$+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha-1}\left[Kd_p(u_s(\rho),v_s(\rho)+Ld_p(D^{\beta}u(s),D^{\beta}v(s))\right]ds,$$

$$d_p\left(Tu(t),Tv(t)\right)\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{t\in J}\left(t^{\alpha}+\frac{t^{\alpha-1}\xi^{\alpha}}{1-\xi^{\alpha-1}}+\frac{t^{\alpha-1}}{1-\xi^{\alpha-1}}\right)D(u,v),$$

$$d_p\left(Tu(t),Tv(t)\right)\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{1+\xi^{\alpha}}{1-\xi^{\alpha-1}}\right)D(u,v).$$

D'autre par

$$d_p\left(D^{\beta}Tu(t),D^{\beta}Tv(t)\right)\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}d_p\left(F\left(s,u_s,D^{\beta}u(s)\right),F\left(s,v_s,D^{\beta}v(s)\right)\right)ds,$$

$$+\frac{t^{\alpha-\beta-1}}{(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^{\xi}(\xi-s)^{\alpha-\beta-1}d_p\left(F\left(s,u_s,D^{\beta}u(s)\right),F\left(s,v_s,D^{\beta}v(s)\right)\right)ds,$$

$$+\frac{t^{\alpha-\beta-1}}{(1-\xi^{\alpha-1})}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha-1}d_p\left(F\left(s,u_s,D^{\beta}u(s)\right),F\left(s,v_s,D^{\beta}v(s)\right)\right)ds,$$

$$d_p\left(D^{\beta}Tu(t),D^{\beta}Tv(t)\right)\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\sup_{t\in J}\left(t^{\alpha-\beta}+\frac{t^{\alpha-\beta-1}\xi^{\alpha}}{1-\xi^{\alpha-1}}+\frac{t^{\alpha-\beta-1}}{1-\xi^{\alpha-1}}\right)D(u,v),$$

$$d_p\left(D^{\beta}Tu(t),D^{\beta}Tv(t)\right)\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\left(1+\frac{1+\xi^{\alpha}}{1-\xi^{\alpha-1}}\right)D(u,v),$$

par suite pour tout $t\in J$ on a :

$$D\left(Tu(t),Tv(t)\right)\leq\left(\frac{K}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{L}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)\left(1+\frac{1+\xi^{\alpha}}{1-\xi^{\alpha-1}}\right)D(u,v).$$

Donc l'opérateur T est une contraction par suite il admet un point fixe unique $X(t)$ sur l'espace H qui est la solution du problème (3.5) sur $[-r,1]$. $\square$

Chapitre 4

Équations aux dérivées partielles floues intuitionistiques d'ordre fractionnaire

Les équations aux dérivées partielles permettent d'aborder d'un point de vue mathématique des phénomènes observés, par exemple dans les domaines de la physique et de la chimie. Les situations dépendant du temps se traduisent plus particulièrement par des équations d'évolution tenant compte d'éventuelles interactions entre objets et événements. On étudie dans ce chapitre le résultat d'existence et l'unicité du problème fractionnaire flou intuitionistique suivant, et qui est l'objet de notre travail [24].

$$\begin{cases} {}^{C}D^{q}u(x,y) = f(x,y,u(x,y)); \quad (x,y) \in J = [0,a] \times [0,b], \\ u(x,0) = g_1(x), \quad x \in [0,a], \\ u(0,y) = g_2(y), \quad y \in [0,b]. \end{cases} \tag{4.1}$$

Tels que $q = (q_1, q_2) \in [0,1] \times [0,1]$ est l'ordre de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de f et $g_1(x)$ et $g_2(y)$ sont deux fonctions floues intuitionistiques.

4.1 Dérivée et intégrale d'une fonction floue intuitionistique à deux variables

Définition 4.1. *[24]Soient $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{IF}^1$ et $(x_0, y_0) \in U$.*

1) On dit que f est différentiable au sens de Hukuhara généralisé (gH-différentiable) par *rapport á x en (x_0, y_0) s'il existe un élément de $\mathbb{IF}^1$ noté $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ tel que :*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h, y) \ominus_{gH} f(x_0, y)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0, y) \ominus_{gH} f(x_0 - h, y)}{h}.$$

2) On dit que f est différentiable au sens de Hukuhara généralisé (gH-différentiable) par rapport á y en (x_0, y_0) s'il existe un élément de $\mathbb{IF}^1$ noté $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ tel que :

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x, y_0 + h) \ominus_{gH} f(x, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x, y_0) \ominus_{gH} f(x, y_0 - h)}{h}.$$

Définition 4.2. *[24] Soit $F : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{IF}^1$ une fonction floue intuitionistique.*

1) F est dite fortement mesurable si pour tout $\alpha \in [0, 1]$, les deux application :

$$[F(x, y)]^\alpha : U \longrightarrow \mathcal{P}_c(\mathbb{R}),$$

et

$$[F(x, y)]^\alpha : U \longrightarrow \mathcal{P}_c(\mathbb{R}),$$

Sont Lebesgue mesurable.

2) F est dite intégrablement bornée s'il existe une fonction intégrable $H : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty[$ telle que ;

$$d_p(F(x, y), 0_{\mathbb{IF}^1}) < H(x, y), \forall (x, y) \in U$$

3) Si F est fortement mesurable et intégrablement bornée alors F est dite intégrable et son intégrale sur U noté $\int_U F(u)du$ est définie par :

$$\left[\int_U F(u)du\right]^\alpha = \left[\int_U F_l^-(u; \alpha)du, \int_U F_r^-(u; \alpha)du\right], \forall \alpha \in [0, 1],$$

$$\left[\int_U F(u)du\right]_\alpha = \left[\int_U F_l^+(u; \alpha)du, \int_U F_r^+(u; \alpha)du\right], \forall \alpha \in [0, 1].$$

Remarque 4.1. *Soit $f \in C^{1,0}(U, \mathbb{IF}^1)$ telle que $[f(x, y)]^\alpha = \left[f_l^-(x, y)(\alpha), f_r^-(x, y)(\alpha)\right]$ et $[f(x, y)]_\alpha = \left[f_l^+(x, y)(\alpha), f_r^+(x, y)(\alpha)\right]$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et $(x, y) \in U$.*
Soit $(x_0, y_0) \in U$.
On dit que f est différentiable en (x_0, y_0) par rapport à x si

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]^\alpha = \left[\frac{\partial f_l^-}{\partial x}(x_0, y_0)(\alpha), \frac{\partial f_r^-}{\partial x}(x_0, y_0)(\alpha)\right],$$

et

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]_\alpha = \left[\frac{\partial f_l^+}{\partial x}(x_0, y_0)(\alpha), \frac{\partial f_r^+}{\partial x}(x_0, y_0)(\alpha)\right].$$

On dit que f est différentiable en (x_0, y_0) par rapport à y si

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^\alpha = \left[\frac{\partial f_l^-}{\partial y}(x_0, y_0)(\alpha), \frac{\partial f_r^-}{\partial y}(x_0, y_0)(\alpha)\right],$$

et

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]_\alpha = \left[\frac{\partial f_l^+}{\partial y}(x_0, y_0)(\alpha), \frac{\partial f_r^+}{\partial y}(x_0, y_0)(\alpha)\right].$$

Lemme 4.1. *[24] Soit $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{IF}^1)$.*
Si f est gH-différentiable par rapport à y, alors $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ est intégrable sur $[b, y]$ et on a

$$\int_b^y \frac{\partial f(x,s)}{\partial s} ds = f(x,y) \ominus_{gH} f(x,b).$$

4.2 Intégrale et dérivée fractionnaire d'une fonction floue intuitionistique à deux variables

Dans cette section,on développe le concept de l'intégrale et de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction floue intuitionistique à deux variables .

Définition 4.3. *Soient $J = [0, a] \times [0, b]$, $q = (q_1, q_2) \in [0, 1]^2$ et $f \in L^1(J, \mathbb{R})$, alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre q de la fonction $f(x, y)$ est donné par :*

$$I_0^q f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1} f(x,y) dt ds.$$

Maintenant nous allons établir la définition de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction floue intuitionistique à deux variables .
Soit $F : J \longrightarrow \mathbb{IF}^1$ telle que

$$[F(x,y)]^\alpha = \left[F_l^-(x,y)(\alpha), F_r^-(x,y)(\alpha)\right],$$

$$[F(x,y)]_\alpha = \left[F_l^+(x,y)(\alpha), F_r^+(x,y)(\alpha)\right].$$

Puisque la famille suivante :

$$\{[F_l^-(x,y)(\alpha), F_r^-(x,y)(\alpha)], [F_l^+(x,y)(\alpha), F_r^+(x,y)(\alpha)\}.$$

construit un élément flou intuitionistique et l'intégrale conserve la monotonie alors on peut définir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction floue intuitionistique F par la définition suivante.

Définition 4.4. *[24]Soit $F \in L\left(J, \mathbb{IF}^1\right)$ et $q = (q_1, q_2) \in [0,1]^2$.*
L'intégrale fractionnaire flou intuitionistique de la fonctionde F d'ordre q noté par

$$I_0^q F(x,y) = \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1} F(s,t) t ds dt,$$

est défini comme suit

$$[I^q F(x,y)]^\alpha = \left[I^q F_l^-(x,y)(\alpha), I^q F_r^-(x,y)(\alpha)\right],$$
$$[I^q F(x,y)]_\alpha = \left[I^q F_l^+(x,y)(\alpha), I^q F_r^+(x,y)(\alpha)\right].$$

Lemme 4.2. *Soient $q = (q_1, q_2) \in [0,1] \times [0,1]$ et $[I^q F(x,y)]^\alpha = \left[I^q F_l^-(x,y)(\alpha), I^q F_r^-(x,y)(\alpha)\right]$, $[I^q F(x,y)]_\alpha = \left[I^q F_l^+(x,y)(\alpha), I^q F_r^+(x,y)(\alpha)\right]$ pour tout $(x,y) \in J$ et $\alpha \in [0,1]$.*
Si $F_l^-, F_r^-, F_l^+, F_r^+ \in L(J, \mathbb{R})$, alors pour tout $(x,y) \in J$, la famille des intervalles fermés suivante :

$$G^\alpha := G^\alpha(x,y) = \left[I^q F_l^-(x,y)(\alpha), I^q F_r^-(x,y)(\alpha)\right],$$
$$G_\alpha := G_\alpha(x,y) = \left[I^q F_l^+(x,y)(\alpha), I^q F_r^+(x,y)(\alpha)\right].$$

définit un nombre flou intuitionistique $\langle u, v\rangle \in \mathbb{IF}^1$ tel que pour tout $\alpha \in [0,1]$, on a

$$[\langle u, v\rangle]^\alpha = G^\alpha(x,y),$$

et

$$[\langle u, v\rangle]_\alpha = G_\alpha(x,y).$$

Démonstration. Soient $q = (q_1, q_2) \in [0,1] \times [0,1]$ et $(x,y) \in J$).
on pose

$$G^\alpha = \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1} \left[F_l^-(s,t)(\alpha), F_r^-(s,t)(\alpha)\right] ds dt.$$

Et

$$G_\alpha = \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1} \left[F_l^+(s,t)(\alpha), F_r^+(s,t)(\alpha)\right] ds dt$$

On utilise le Lemme(1.1) on obtient le résultat. □

Proposition 4.1. *[47] Soient $F, G \in L(J, \mathbb{IF}^1)$, $a \in \mathbb{IF}^1$ et $q = (q_1, q_2), q' = (q'_1, q') \in [0,1]^2$, alors on a*

1. $I^q(aF)(x,y) = aI^qF(x,y)$.
2. $I^q(F+G)(x,y) = I^qF(x,y) + I^qG(x,y)$.
3. $I^qI^{q'}F(x,y) = I^{q+q'}F(x,y)$.

Définition 4.5. *Soient $J = [0,a] \times [0,b]$, $q = (q_1, q_2) \in [0,1]^2$ et $u \in C^{2,2}(J, \mathbb{IF}^1)$.*
La dérivée fractionnaire floue intuitionistique d'ordre q de la fonction u en (x,y) est définie comme suit :

$$^cD^q u(x,y) = I^{1-q}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)\right).$$

Oú $1 - q = (1 - q_1, 1 - q_2) \in [0,1]^2$.

Remarque 4.2. *Si $q = (1,1)$, alors*

$$^cD^q u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Exemple 4.1. *On Considère la fonction flou intuitionistique $u(x,y) = xyC$ tel que $C = (a_1; a_2; a_3; a_4; a'_1; a_2; a_3; a'_4)$ est un nombre flou intuitionistique trapézoïdal.*
La dérivée partielle de $u(x,y)$ par rapport á x est donné par :

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,y) \ominus_{gH} f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)yC \ominus_{gH} xyC}{h} = yC$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = yC$$

de la même manière on obtient

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = C,$$

or

$$[C]^\alpha = [a_2 - \alpha(a_2 - a'_1), a_3 + \alpha(a_4 - a_3)],$$

Et

$$[C]_\alpha = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_4 - \alpha(a'_4 - a_3)],$$

on obtient

$$[^cD^q u(x,y)]^\alpha = \left[I^{1-q}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)\right)\right]^\alpha = \left[I^{q-1}C\right]^\alpha,$$

et

$$[{}^{c}D^{q}u(x,y)]_{\alpha} = \left[I^{1-q}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)\right)\right]_{\alpha} = \left[I^{q-1}C\right]_{\alpha},$$

donc

$$\left[I^{1-q}C\right]^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1}\left[a_2-\alpha(a_2-a_1'), a_3+\alpha(a_4-a_3)\right] dsdt,$$

donc

$$\left[I^{1-q}C\right]_{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1}\left[a_1+\alpha(a_2-a_1), a_4-\alpha(a_4'-a_3)\right] dsdt,$$

donc

$$\left[I^{1-q}C\right]^{\alpha} = \frac{x^{1-q_1}y^{1-q_2}}{\Gamma(1-q_1)\Gamma(1-q_2)\times(1-q_1)(1-q_2)}[a_2-\alpha(a_2-a_1'), a_3+\alpha(a_4-a_3)],$$

alors

$$\left[I^{1-q}C\right]_{\alpha} = \frac{x^{1-q_1}y^{1-q_2}}{\Gamma(1-q_1)\Gamma(1-q_2)\times(1-q_1)(1-q_2)}[a_1+\alpha(a_2-a_1), a_4-\alpha(a_4'-a_3)],$$

$$\left[I^{1-q}C\right]^{\alpha} = \frac{x^{1-q_1}y^{1-q_2}}{\Gamma(2-q_1)\Gamma(2-q_2)}[C]^{\alpha},$$

$$\left[I^{1-q}C\right]_{\alpha} = \frac{x^{1-q_1}y^{1-q_2}}{\Gamma(2-q_1)\Gamma(2-q_2)}[C]_{\alpha},$$

ensuite

$$[{}^{c}D^{q}u(x,y)] = \frac{x^{1-q_1}y^{1-q_2}}{\Gamma(2-q_1)\Gamma(2-q_2)}C,$$

d'oú

$${}^{c}D^{q}u(x,y) = \frac{x^{-q_1}y^{-q_2}}{\Gamma(2-q_1)\Gamma(2-q_2)}u(x,y).$$

4.3 Équation aux dérivées partielles floues intuitionistiques d'ordre fractionnaire

Dans cette section on considère le problème $(4,1)$ tel que $g_1 \in C([0,a], \mathbb{IF}^1)$ et $g_2 \in C([0,b], \mathbb{IF}^1)$ et $g_1(0) \ominus_{gH} g_2(y)$ existe pour tout $y \in [0,b]$.
On pose $\varphi(x,y) = g_2(y) + [g_1(x) \ominus_{gH} g_1(0)]$.

Lemme 4.3. *Soit* $u(.,.) \in C^{2,2}(J, \mathbb{IF}^1)$ *une fonction floue intuitionistique satisfait le problème* (4.1) *alors* $u(.,.)$ *satisfait l'équation intégrale suivant :*

$$u(x,y) = \varphi(x,y) + I^q f(x,y,u(x,y)), \quad \forall (x,y) \in J. \tag{4.2}$$

Démonstration. Soit $u \in C^{2,2}(J, \mathbb{IF}^1)$ telle que u satisfait le système (4.1).
Alors d'après la Définition (4.5) on a

$$I^{1-q}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)\right) = f(x,y,u(x,y)),$$

donc

$$I^q I^{1-q}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)\right) = I^q f(x,y,u(x,y)),$$

ce qui implique que

$$I^1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)\right) = I^q f(x,y,u(x,y)),$$

Par suite

$$\int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} dy dx = I^q f(x,y,u(x,y)),$$

comme

$$\int_0^x \left(\int_0^y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy\right) dx = \int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \ominus_{gH} \frac{\partial u}{\partial x}(x,0)\right) dx,$$

alors

$$\int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) \ominus_{gH} \frac{\partial u}{\partial s}(s,0)\right) ds = I^q f(x,y,u(x,y)),$$

donc

$$\int_0^x \frac{\partial u}{\partial s}(s,t) ds = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial s}(s,0) ds + I^q f(x,y,u(x,y)),$$

donc

$$u(x,y) \ominus_{gH} u(0,y) = u(x,0) \ominus_{gH} u(0,0) + I^q f(x,y,u(x,y)),$$

$$u(x,y) = u(0,y) + u(x,0) \ominus_{gH} u(0,0) + I^q f(x,y,u(x,y)),$$

ce qui donne

$$u(x,y) = g_2(y) + g_1(x) \ominus_{gH} g_1(0) + I^q f(x,y,u(x,y)),$$

finalement on obtient

$$u(x,y) = \varphi(x,y) + I^q f(x,y,u(x,y)).$$

$\square$

Définition 4.6. *Une fonction $u \in C(J, \mathbb{IF}^1)$ est dite une solution faible du problème (4.1) si elle satisfait l'équation intégrale (4.2)pour tout $(x,y) \in J$.*

Remarque 4.3. *Il est facile de voir que l'espace flou intuitionistique $(C(J, \mathbb{IF}^1)), D_\infty)$ est un espace métrique complet. Tel que $D_\infty(u,v) = \sup\limits_{(x,y)\in J} d_p(u(x,y), v(x,y))$.*

Théorème 4.1. *[24] Soit $f \in C(J, \mathbb{IF}^1)$ une fonction Lipschitzienne de la constante de Lipschitz k telle que*

$$d_p\left(f(x,y,u), f(x,y,v)\right) < k d_p\left(u,v\right); \qquad \forall (u,v) \in C(J, \mathbb{IF}^1) \times C(J, \mathbb{IF}^1).$$

Si $\dfrac{k a^{q_1} b^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} < 1$, alors le problème (4.1)admet une solution faible unique sur J.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est basé sur l'application du théorème du point fixe de Banach.
En effet soit T l'opérateur défini par : $T : C(J, \mathbb{IF}^1) \longrightarrow C(J, \mathbb{IF}^1)$ par

$$Tu(x,y) = \varphi(x,y) + I^q f(x,y,u(x,y)).$$

Nous utilisons les propriétés de la distance d_p nous aurons

$$\begin{aligned}
d_p(Tu(x,y), Tv(x,y)) &\leq \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1} d_p(f(s,t,u), f(s,t,v)) dsdt, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1} k d_p(u,v) dsdt, \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} d_p(u,v) \int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1} dsdt, \\
&\leq \frac{k a^{q_1} b^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} D_\infty(u,v),
\end{aligned}$$

on obtient

$$D_\infty(Tu, Tv) \leq \frac{k a^{q_1} b^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} D_\infty(u,v).$$

□

On illustre ce résultat par l'exemple suivant.

Exemple 4.2. *On Considère l'équation différentielle fractionnaire floue intuitionistique suivante :*

$$\begin{cases} D^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}u(x,y) = xyu(x,y), \quad (x,y) \in J = [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}], \\ u(x,0) = xC, \quad C \in \mathbb{IF}^1, x \in [0,\frac{1}{2}], \\ u(0,y) = yC, \quad C \in \mathbb{IF}^1, y \in [0,\frac{1}{2}]. \end{cases} \tag{4.3}$$

tel que $C = (a_1; a_2; a_3; a_4; a_1'; a_2; a_3; a_4')$ *est un nombre flou intuitionistique trapézoïdal.*
On a $f(x,y,u) = xyu(x,y)$ *et* $k = 1$.

Puisque $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $a = b = \frac{1}{2}$ *et* $\Gamma^2(\frac{3}{2}) = 0.79$, *donc*

$$\frac{1 \times a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{\Gamma^2(\frac{3}{2})} = \frac{1}{1.58} < 1.$$

Par suite le problème (4.3)*admet une solution faible unique .*
Si $u(x,y) = C$ *on peut montrer que* $\varphi(x,y) = (x+y)C$ *, et* $I^q f(x,y,u(x,y)) = \frac{9\pi}{16} x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} C$,
D'oú

$$u(x,y) = (x+y)C + \frac{9\pi}{16}(xy)^{\frac{3}{2}} C.$$

Exemple 4.3. *On Considère l'équation aux dérivées partielles d'ordre* $(q_1, q_2) \in [0,1]^2$ *suivante :*

$$\begin{cases} {}^cD^{(q_1,q_2)}u(x,y) = \dfrac{1}{(4e^{x+y+2})(1 + d_p(u(x,y), 0_{\mathbb{IF}^1})}; \quad (x,y) \in [0,1]^2, \\ u(x,0) = x; \quad x \in [0,1], \\ u(0,y) = y^2; \quad y \in [0,1]. \end{cases} \tag{4.4}$$

On a $f(x,y,u) = \dfrac{1}{(4e^{x+y+2})(1 + d_p(u(x,y), 0_{\mathbb{IF}^1})}$.

Soient $u, v \in \mathbb{IF}^1$ *et* $(x,y) \in [0,1]^2$, *alors on a*

$$d_p(f(x,y,u), f(x,y,v) \leq \frac{1}{4e^2} d_p(u,v),$$

Or dans ce cas, on a $k = \frac{1}{4e^2}$ *et* $a = b = 1$, *alors*

$$\frac{k \times a^{q_1} b^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} = \frac{1}{4e^2 \Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} < 1.$$

Ce qui implique que le problème (4.4) *admet une solution faible unique sur* $[0,1]$.

Chapitre 5

Stabilité des équations différentielles floues intuitionistiques fractionnaires

Au cours des dernière années, la notion de la stabilité des équations différentielles a attiré l'attention de beaucoup de mathématiciens. En particulier, la stabilité de Lyaponnov qui a été abordée par certain nombre de mathématiciens. Cette méthode de Lyapunov est très répandue dans la littérature de stabilité des systèmes dynamiques, notamment les systèmes exprimés à l'aide des équations différentielles ordinaires [52]. Cette méthode est basée sur le choix d'une fonctionnelle candidate de Lyapunov caractérisée par des propriétés de positivité et de dérivabilité, on doit vérifier la négativité de la dérivée de cette fonctionnelle sur toutes les trajectoires du système ; en réalité les trajectoires pour lesquelles il est absolument nécessaire de vérifier cette condition sont celles qui ont tendance à diverger. Ce principe, utilisé pour la première fois par Razumikhin [58] et dont la première démonstration correcte a été donnée par Krasovskii [37], a été largement employé et permet de donner les conditions de stabilité en employant les fonctions définies positives. Mais dans le cas des des systèmes dynamiques fractionnaires, il est difficile de trouver une fonctionnelle candidate de Lyapunov qui vérifie ces conditions. Pour surmonter ce problème nous allons introduire dans ce chapitre une nouvelle notion de la stabilité pour des équations différentielles fractionnaire floues intuitionistique en étendant la méthode de Lyaponnov au cas fractionnaire, c'est la stabilité de Mittag-Lefller.(voir notre article [50]).

5.1 Résultat d'existence et l'unicité de la solution

Dans cette section, nous démontrons le le résultat d'existence et de l'unicité de l'équation différentielle floue intuitionnistique d'ordre $\alpha \in [0,1]$ suivante :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}x(t) = f(t,x(t)) \quad t \in [t_0,T], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Définition 5.1. *Une fonction floue intuitionistique $x : [t_0,T] \to \mathbb{IF}^1$ est dite une solution du problème (5.1) si $x(t)$ est continue telle que $x(t_0) = x_0$ et $D^{\alpha}x(t) = f(t,x(t))$ pour tout $t \in [t_0,T]$.*

Définition 5.2. *[31] Une fonction floue intuitionistique $x : [t_0,T] \to \mathbb{IF}^1$ est dite d-croissante,(d-décroissante) sur $[t_0,T]$ si pour tout $r \in [0,1]$ la fonction réelle $t \to d([x(t)]^r \cup [x(t)]_r)$ est dite croissante,(décroissante)respectivement.*

Remarque 5.1. *Si $x : [t_0,T] \to \mathbb{IF}^1$ est d-croissante,(d-décroissante sur $[t_0,T]$, alors on dit que $x(t)$ est d-monotone sur $[t_0,T]$.*

Lemme 5.1. *[31] Soit $f : [t_0,T] \times \mathbb{IF}^1 \to \mathbb{IF}^1$ telle que f est continue par rapport á la variable t sur $[t_0,T]$. Une fonction d-monotone $x(t) \in C([t_0,T],\mathbb{IF}^1)$ est une solution du problème(5.1) si et seulement si*

- *1)x satisfait l'équation intégrale $x(t) \ominus_{gH} x_0 = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(t,x(t))ds$,*
- *2)La fonction $t \to I^{\alpha}f(t,x(t))$ est d-croissante sur $[t_0,T]$.*

On aura besoin du théorème de point fixe de Schauder et du lemme suivant dans notre démonstration du résultat d'existence et l'unicité de la solution du problème(5.1).

Théorème 5.1. *(Schauder)[65].*
Soient E un espace de Banach, Cun convexe fermé de E et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact, alors T admet un point fixe.

Lemme 5.2. *[23, 67] Soient C un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Banach X, $(k_n)_{n\geq 0}$ un suite telle que $\sum\limits_{n\geqslant 0}^{\infty} k_n$ est convergente et $T : C \to C$un opérateur tel que*

$$\| T^n x - T^n y \| \leq k_n \| x - y \| \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad et \quad \forall x,y \in C,$$

alors l'opérateur T admet un unique point fixe x^*, de plus la suite $\{T^n x_0\}_{n\geq 0}$ converge vers x^* pour tout $x_0 \in C$.

Théorème 5.2. *[50] Soit $f : [t_0, T] \times \mathbb{IF}^1 \to \mathbb{IF}^1$ une fonction continue sur $[t_0, T]$ telle que :*
H_1)Il existe une constante positive M telle que $d_p(f(t,x), 0_{\mathbb{IF}^1}) < M$ pour tout $x \in \mathbb{IF}^1$ et $t \in [t_0, T]$
H_2)Il existe une fonction continue $k : [t_0, T] \to \mathbb{R}^+$ telle que $d_p(f(t,x), f(t,y) < k(t)d_p(x,y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{IF}^1$ et $t \in [t_0, T]$.
Alors le problème (5.1) admet une solution unique.

Démonstration. La preuve de ce théorème est donnée en deux étapes.
Étape 1(L'existence).
On montre que le problème (5.1) admet au moins une solution en utilisant le théorème du point fixe de Schauder.
Soit $\mathbf{T} : C([t_0, T], \mathbb{IF}^1) \to C([t_0, T], \mathbb{IF}^1)$ l'opérateur défini par

$$(\mathbf{T}x)(t) \ominus_{gH} x_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds$$

Soit $x \in C([t_0, T], \mathbb{IF}^1)$ on a par définition $\mathbf{T}x$ est continue de plus on a,

$$d_p((\mathbf{T}x)(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq d_p(x_0, 0_{\mathbb{IF}^1}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} d_p(f(t, x(t)), 0_{\mathbb{IF}^1}) ds$$

$$d_p((\mathbf{T}x)(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq d_p(x_0, 0_{\mathbb{IF}^1}) + \frac{M(T-t_0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} := \eta$$

Ainsi, $(\mathbf{T}x) \in C([t_0, T], \mathbb{IF}^1)$,
donc l'opérateur $\mathbf{T}$ transforme la boule $B_\eta(0_{\mathbb{IF}^1}, \eta) = \{v \in C([t_0, T], \mathbb{IF}^1)\ d_p(0_{\mathbb{IF}^1}, v) < \eta\}$ sur elle même.
Montrons que $\mathbf{T}$ est continu.
Soit $(x_n)_n \subset B_\eta$ telle que x_n converge vers x dans B_η,et $t \in [t_0, T]$, alors on a

$$\begin{aligned} d_p((\mathbf{T}x_n)(t), (\mathbf{T}x)(t)) &= d_p((\mathbf{T}x_n)(t) \ominus_{gH} x_0, (\mathbf{T}x)(t) \ominus_{gH} x_0), \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} d_p(f(t, x_n(s)), f(t, x(s))) ds. \end{aligned}$$

Comme f est continue et satisfait l'hypothèse H_2 alors on a

$$d_p((\mathbf{T}x_n)(t), (\mathbf{T}x)(t)) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} k(s) d_p(x_n(s), x(s)) ds.$$

Par passage á la limite et en utilisant le théorème de convergence dominé de Lebesgue on obtient

$$\lim_{n\to\infty} d_p((\mathbf{T}x_n)(t), (\mathbf{T}x)(t)) = 0.$$

Montrons que $\mathbf{T}B_\eta$ est bornée et équicontinue.

On a $\mathbf{T}B_\eta \subset B_\eta$ donc $\mathbf{T}B_\eta$ est bornée.

Soient $x \in B_\eta$ et $t_1, t_2 \in [t_0, T]$ tels que $t_1 < t_2$ alors on a

$$d_p((\mathbf{T}x)(t_1), (\mathbf{T}x)(t_2)) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} d_p(\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds, \int_{t_0}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds),$$

puisque

$$\int_a^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds = \int_{t_0}^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds,$$

alors

$$d_p((\mathbf{T}x)(t_1), (\mathbf{T}x)(t_2)) \leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} \mid (t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \mid d_p(f(s, x(s))ds, 0_{\mathbb{IF}^1}),$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} d_p(f(s, x(s))ds, 0_{\mathbb{IF}^1})ds,$$

donc

$$d_p((\mathbf{T}x)(t_1), (\mathbf{T}x)(t_2)) \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left((t_2 - t_1)^{\alpha-1} + (t_2^\alpha - t_1^\alpha)\right),$$

par suite

$$\lim_{t_1 \to t_2} d_p((\mathbf{T}x)(t_1), (\mathbf{T}x)(t_2)) = 0.$$

Ce qui montre que $\mathbf{T}B_\eta$ est equicontinue,en utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli on déduit que $\mathbf{T}B_\eta$ est relativement compact,ainsi d'après le théorème de point fixe de Schauder on déduit que l'opérateur $\mathbf{T}$ admet un point fixe $x(t)$ qui est une solution du problème (5.1).

Étape2(L'unicité).

Pour montrer l'unicité de la solution on suppose qu'il existe une autre solution du problème (5.1) $y(t) : [t_0, T] \to C([t_0, T], \mathbb{IF}^1)$ alors on a,

$$\begin{aligned} d_p((\mathbf{T}x)(t), (\mathbf{T}y)(t)) &= d_p((\mathbf{T}x)(t) \ominus_{gH} x_0, (\mathbf{T}y)(t) \ominus_{gH} x_0), \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t - s)^{\alpha-1} d_p(f(t, x(t)), f(t, y(t)))ds, \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t - s)^{\alpha-1} k(t) d_p(x, y)ds, \end{aligned}$$

on pose $K = \sup_{t \in [t_0, T]} k(t)$ on obtient

$$d_p((\mathbf{T}x)(t), (\mathbf{T}y)(t)) \leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t - s)^{\alpha-1} d_p(x(s), y(s))ds.$$

On prend le sup sur les deux cotés de l'inéquation précédente on aura

$$\sup_{t\in[t_0,T]} d_p((\mathbf{T}x)(t),(\mathbf{T}y)(t)) \leq \frac{K(T-t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t\in[t_0,T]} d_p(x(t),y(t)),$$

par induction on peut déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x,y\in C([t_0,T],\mathbb{IF}^1)$.

$$\sup_{t\in[t_0,T]} d_p((\mathbf{T}^nx)(t),(\mathbf{T}^ny)(t)) \leq \frac{K^n(T-t_0)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \sup_{t\in[t_0,T]} d_p(x(t),y(t)),$$

avec $\mathbf{T}^n : C([t_0,T],\mathbb{IF}^1)\to C([t_0,T],\mathbb{IF}^1)$ est défini par

$$(\mathbf{T}^nx)(t)\ominus_{gH} x_0 = \frac{1}{\Gamma(n\alpha)}\int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} f(t,(\mathbf{T}^{n-1})x(t))ds.$$

Montrons par récurrence que pour tout $(n\in\mathbb{N}^*)$ on a

$$\sup_{t\in[t_0,T]} d_p((\mathbf{T}^nx)(t),(\mathbf{T}^ny)(t)) \leq \frac{K^n(T-t_0)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \sup_{t\in[t_0,T]} d_p(x(t),y(t)).$$

-Pour $n=1$ on an

$$\sup_{t\in[t_0,T]} d_p((\mathbf{T}x)(t),(\mathbf{T}y)(t)) \leq \frac{K(T-t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t\in[t_0,T]} d_p(x(t),y(t)).$$

-On suppose que

$$\sup_{t\in[t_0,T]} d_p((\mathbf{T}^nx)(t),(\mathbf{T}^ny)(t)) \leq \frac{K^n(T-t_0)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \sup_{t\in[t_0,T]} d_p(x(t),y(t)),$$

et montrons que

$$\sup_{t\in[t_0,T]} d_p((\mathbf{T}^{n+1}x)(t),(\mathbf{T}^{n+1}y)(t)) \leq \frac{K^{n+1}(T-t_0)^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \sup_{t\in[t_0,T]} d_p(x(t),y(t)),$$

On a

$$d_p((\mathbf{T}^{n+1}x)(t),(\mathbf{T}^{n+1}y)(t)) = d_p((\mathbf{T}^{n+1}x)(t)\ominus_{gH} x_0,(\mathbf{T}^{n+1}y)(t)\ominus_{gH} x_0)$$

$$\begin{aligned} d_p((\mathbf{T}^{n+1}x)(t),(\mathbf{T}^{n+1}y)(t)) &= d_p((\mathbf{T}\mathbf{T}^nx)(t)\ominus_{gH} x_0,(\mathbf{T}\mathbf{T}^ny)(t)\ominus_{gH} x_0),\\ &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} d_p(\mathbf{T}^n(x(s),\mathbf{T}^ny(s))ds, \end{aligned}$$

On prend le sup sur t et s on obtient

$$\sup_{t\in[t_0,T]} d_p((\mathbf{T}^{n+1}x)(t),(\mathbf{T}^{n+1}y)(t)) \leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[t_0,T]} d_p(\mathbf{T}^nx(s),\mathbf{T}^ny(s))ds,$$

$$\sup_{t\in[t_0,T]} d_p((\mathbf{T}^{n+1}x)(t),(\mathbf{T}^{n+1}y)(t)) \leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1}\times\frac{K^n(s-t_0)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \sup_{s\in[t_0,T]} d_p(x(s),y(s))ds,$$

$$\sup_{t\in[t_0,T]} d_p((\mathbf{T}^{n+1}x)(t),(\mathbf{T}^{n+1}y)(t)) \leq \frac{K^{n+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha+1)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\times(s-t_0)^{n\alpha}\sup_{s\in[t_0,T]} d_p(x(s),y(s))ds,$$

d'après la fonction Beta

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 s^{\alpha-1}\times(1-s)^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

On obtient

$$\sup_{t\in[t_0,T]} d_p((\mathbf{T}^{n+1}x)(t),(\mathbf{T}^{n+1}y)(t)) \leq \frac{K^{n+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha+1)}\times(T-t_0)^{(n+1)\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n\alpha+1)}\sup_{t\in[t_0,T]} d_p(x(t),y(t)),$$

$$\sup_{t\in[t_0,T]} d_p((\mathbf{T}^{n+1}x)(t),(\mathbf{T}^{n+1}y)(t)) \leq \frac{K^{n+1}(T-t_0)^{(n+1)}}{\Gamma((1+n)\alpha+1)}\sup_{t\in[t_0,T]} d_p(x(t),y(t)).$$

Comme $\sum_{n\geqslant 0}^{\infty}\frac{K^n(T-t_0)^n}{\Gamma(n\alpha+1)}$ converge vers la fonction de Mitagg-lefler $E_{\alpha,1}(K(T-t_0))$, alors d'après le Lemme 5.2 l'opérateur $\mathbf{T}$ admet un unique point fixe x qui est la solution du problème (5.1). □

5.2 Stabilité de la solution

Au cours des dernières années, les propriétés de stabilité de toutes sortes d'équations ont attiré l'attention de beaucoup de mathématiciens, en particulier la stabilité au sens de Lyaponnov. elle a été abordée par certains nombres de mathématiciens,pour plus d'informations, voir [41]. Dans le cas des équations différentielles ordinaires, la stabilité est un domaine de recherche important et bien connu, et elle est généralement étudiée pour des équations différentielles du premier ordre.

Dans cette section, on présente une nouvelle définition de la stabilité de systèmes différentiels fractionnaires, et on étudie la stabilité de de la solution du problème fractionnaire (5.1) quand $t\in[t_0,+\infty[$ et on suppose que $f(t,0_{\mathbb{IF}^1})=0_{\mathbb{IF}^1}$ ceci signifie que la fonction floue intuitionnistique nulle est une solution du problème initial (5.1). Donc cette section consiste à étudier la stabilité de la solution triviale du problème (5.1).

Définition 5.3. *Un nombre flou intuitionistique x_e est un point d'équilibre pour le système (5.1) si et seulement si $f(t,x_e)=0_{\mathbb{IF}^1}$.*

Remarque 5.2. *Sans perte de généralité, on donne toutes les définitions et tous les théorèmes dans le cas ou le point d'équilibre est l'origine* $x_e = 0_{\mathbb{IF}^1}$.
Car on peut ramener a l'origine tout point d'équilibre par une simple translation via le changement de variable suivant.
Supposons que le point d'équilibre flou intuitionistique pour le système (5.1) *est* $x_e \neq 0_{\mathbb{IF}^1}$.
Considérons le changement de variable suivant $X = x \ominus_{gH} x_e$.*la dérivée fractionnaire de* $X(t)$ *est donnée par*

$$^cD^{\alpha}X(t) = \quad ^cD^{\alpha}(x(t) \ominus_{gH} x_e) = f(t, X(t) + x_e) = F(t, X(t))$$

avec $F(t, 0_{\mathbb{IF}^1}) = 0_{\mathbb{IF}^1}$ *donc le système a un point d'équilibre á l'origine.*

Définition 5.4. *[50] La solution trivial de* (5.1) *est dite :*

1) *Stable si et seulement si pour tout* $\epsilon > 0$,*il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$d_p(x_0, 0_{\mathbb{IF}^1}) < \delta \Rightarrow d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) < \epsilon \quad \forall t \geq t_0$$

.

2) *Asymptotiquement stable si et seulement si* $\lim\limits_{t\to+\infty} d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) = 0$.

Définition 5.5. *[50] La solution du système* (5.1) *est dite stable au sens de Mittag-Leffler si*

$$d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq \{m(x_0)E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})\}^b.$$

avec $\alpha \in [0, 1]$,$\lambda \geq 0$,$b > 0$,$m(0) = 0$,$m(x) \geq 0$ *et* $m(x)$ *est localement Lipschitzienne en* x *avec la constante de Lipschitz* m_0.

Théorème 5.3. *[50] Soit* $V(t, x(t)) : [0, +\infty[\times \mathbb{IF}^1 \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *et localement Lipschitzienne par rapport á* x *telle que*

$$c_1 d_p^a(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq V(t, x(t)) \leq c_2 d_p^{ab}(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}), \tag{5.2}$$

$$^cD^{\beta}(V(t, x(t)) \leq -c_3 d_p^{ab}(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}), \tag{5.3}$$

avec $t \geq 0$,$\beta \in [0, 1]$,c_1, c_2, c_3, a *et* b *sont des constantes positives .*
Alors la solution triviale du problème (5.1) *est stable au sens de Mittag-Leffler.*

Démonstration. D'après l'équation (5.2) et l'équation (5.3) on obtient

$$^{c}D^{\beta}(V(t,x(t)) \leq \frac{-c_3}{c_2}V(t,x(t)),$$

il existe une fonction positive $k(t)$ telle que

$$^{c}D^{\beta}(V(t,x(t)) + k(t) = \frac{-c_3}{c_2}V(t,x(t)),$$

on utilise la transformée de Laplace on obtient .

$$S^{\beta}L\{V(t,x(t));s\} - S^{\beta-1}V(0,x(0)) + L\{k(t);s\} = \frac{-c_3}{c_2}L\{V(t,x(t));s\},$$

donc

$$L\{V(t,x(t));s\} = \frac{S^{\beta-1}V(0,x(0)) - L\{k(t);s\}}{S^{\beta} + \frac{c_3}{c_2}},$$

nous utilisons l'inverse de la transformée de Laplace, on obtient

$$V(t,x(t)) = E_{\beta}(\frac{-c_3}{c_2}t^{\beta})V(0,x(0)) - k(t) * (t^{1-\beta}E_{\beta,\beta}(\frac{-c_3}{c_2}t^{\beta}),$$

comme $E_{\beta,\beta}(\frac{-c_3}{c_2}t^{\beta})$ est positive, alors on obtient

$$V(t,x(t)) \leq E_{\beta}(\frac{-c_3}{c_2}t^{\beta})V(0,x(0)),$$

$$d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq \left[\frac{V(0)}{c_1}E_{\beta}(\frac{-c_3}{c_2}t^{\beta})\right]^{\frac{1}{a}}.$$

avec $V(0) = V(0,x(0))$.
on pose $m = \frac{V(0)}{c_1}$, alors on a

$$d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq \left[mE_{\beta}(\frac{-c_3}{c_2}t^{\beta})\right]^{\frac{1}{a}}.$$

$m = 0$ si et seulement si $x(0) = 0_{IF^1}$.
puisque $V(t,x)$ est localement lipschitzienne par rapport á x alors $m = \frac{V(0,x(0))}{c_1}$ Lipschitzienne par rapport a $x(0)$ et $m(0) = 0$ ce qui implique la stabilité au sens de Mittag-Leffler du problème (5.1). □

5.2.1 Applications

Nous donnons les exemples suivants pour illustrer notre résultat .

Exemple 5.1. *On Considère le problème fractionnaire suivant*

$$\begin{cases} {}^cD^\beta x(t) = (-1)x(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5.4}$$

avec $0 < \beta < 1$.

Soit $V : [0, +\infty[\times \mathbb{IF}^1 \to \mathbb{R}$ *la fonction Lipschitzienne définie par* $V(t, x(t)) = d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1})$*, alors on peut écrire,*

$$d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq V(t, x(t)) \leq d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1})$$

Donc $c_1 = c_2 = 1$.

D'autre part on a

$${}^cD^\beta(V(t, x(t)) =^c D^\beta d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) = I^\beta \frac{d}{dt} d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1})$$

$${}^cD^\beta(V(t, x(t)) \leq I^\beta d_p(x'(t), 0_{\mathbb{IF}^1}),$$

$${}^cD^\beta(V(t, x(t)) \leq d_p(I^\beta x'(t), 0_{\mathbb{IF}^1}),$$

$${}^cD^\beta(V(t, x(t)) \leq d_p({}^cD^\beta x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}),$$

$${}^cD^\beta(V(t, x(t)) \leq d_p((-1)x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}),$$

$${}^cD^\beta(V(t, x(t)) \leq -d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}),$$

par suite on applique $c_1 = c_2 = 1$ *et* $c_3 = -1$ *dans le Théorème 5.3 on obtient*

$$d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq V(0) E_\beta(-t^\beta),$$

avec $V(0) = V(0, x(0)) = d_p(x_0, 0_{\mathbb{IF}^1})$.

Exemple 5.2. *On Considère le système fractionnaire flou intuitionistique non linéaire suivant.*

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = f(t, x(t)) \quad , t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \quad . \end{cases} \tag{5.5}$$

avec $0 < q < 1$,$x = 0_{\mathbb{IF}^1}$ *est le point d'équilibre du problème* (5.5) *et* $f : [0, +\infty[\times \mathbb{IF}^1 \to \mathbb{IF}^1$ *est une fonction floue intuitionistique Lipschitzienne de constant* $k > 0$.
On Suppose qu'il existe une fonction de Lyapunov $V(t, x(t))$*, telle que*

$$c_1 d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq V(t, x(t)) \leq c_2 d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}). \tag{5.6}$$

et

$$V'(t, x) \leq -c_3 d_p(x, 0_{\mathbb{IF}^1}), \tag{5.7}$$

avec c_1,c_2,c_3 *sont des constantes positives et* $V'(t, x) = \frac{dV(t,x(t))}{dt}$.
D'après (5.6) *et* (5.7)*, on peut écrire*

$${}^cD^{1-q}(V(t, x(t)) = I^q V'(t, x) \leq -c_3 I^q d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}),$$

comme

$$d_p(f(t, x), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq k \quad d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}),$$

alors

$${}^cD^{1-q}(V(t, x(t)) \leq \frac{-c_3}{k} I^q d_p(f(t, x), 0_{\mathbb{IF}^1}),$$

$${}^cD^{1-q}(V(t, x(t)) \leq \frac{-c_3}{k} d_p(I^q f(t, x), 0_{\mathbb{IF}^1}),$$

$${}^cD^{1-q}(V(t, x(t)) \leq \frac{-c_3}{k} d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}),$$

par suite on applique les constantes c_1,c_2 *et* $\frac{-c_3}{k}$ *dans le Théorème 5.3, on obtient l'inégalité suivante :*

$$d_p(x(t), 0_{\mathbb{IF}^1}) \leq \frac{V(0)}{c_1} E_{1-q}\left(-\frac{c_3}{c_2 k} t^{1-q}\right),$$

tel que $V(0) = V(0, x(0))$.
Ce qui implique que le problème (5.5) *est stable au sens de Mitag Lefller.*

Conclusion et perspectives

Cette thèse avait l'ambition d'abord d'introduire la notion de l'intégrale fractionnaire et de la dérivation fractionnaire des fonctions floues et floues intuitionistiques. Ensuite, nous avons étudié les équations différentielles fractionnaires floues en montrant l'existence et l'unicité de leurs solutions sous certaines conditions sur le second membre. Enfin, la dernière partie de cette thèse est consacrée à prouver l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles et aux dérivées partielles fractionnaires floues intuitionistiues, et aussi à analyser leur comportement asymptotique en introduisant la notion de la stabilité au sens de Mittg-Lefller. En guise de conclusion, nous constatons que les différentes méthodes proposées dans ce travail pour étudier l'existence , l'unicité et la stabilité des solutions des équations différentielles et aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire sont très puissantes et efficaces. Ce domaine de recherche, en l'occurrence les équations différentielles et aux dérivées partielles fractionnaires, est très intéressant.

Par ailleurs, la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles fractionnaires floues intuitionistique a également ouvert un champ vaste de recherche dans le domaine purement scientifique et mathématique. Ainsi, nos perspectives pour le future sont :

1- La recherche des méthodes numériques et analytiques pour résoudre les équations différentielles et aux dérivées partielles floues d'ordre fractionnaire temporelle et/ou spatiale, moins coûteuses et plus précises que celles proposées dans cette thèse.

2- La recherche des conditions nécessaires et suffisantes qui assurent l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution pour quelques classes des équations différentielles fractionnaires soumises á des conditions qui peuvent être de type intégrale floue.

Bibliographie

[1] R. Agarwal, V. Lakshmikantham and JJ. Nieto, On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty. Nonlinear Analysis, $(72), 2859 - 62, (2010)$.

[2] R. Agarwal and D.Hristova,Stability of Caputo fractional differential equations by Lyapunov functions.Appl. Math.$(60), 653 - 676, (2015)$

[3] R. Alikhani and F. Bahrami, Global solutions for nonlinear fuzzy fractional integral and integrodifferential equations.Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, $(18), 2007 - 17, (2013)$.

[4] T. Allahviranloo, T. Gouyandeh and Z. Armand, Fuzzy fractional differential equations under generalized fuzzy Caputo derivative. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems,$(26), 1481 - 90, (2014)$.

[5] M. Arshad, S. Lupulescu, On the fractional differential equations with uncertainty, Nonlinear Anal, $(74), 85 - 93, (2011)$.

[6] K. Atanassov, intuitionistic fuzzy sets, fuzzy sets and systems, $(20), 87 - 96, (1986)$

[7] K. Atanassov. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, $(61), 137 - 142, (1994)$.

[8] K. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets, theory and Applications, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Physica-Verlag, Heidelberg,$(35), (1999)$.

[9] K. Atanassov. On Intuitionistic Fuzzy Sets Theory, Springer, Berlin (2012).

[10] B. Bede, Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and System,$151, 581 - 99, (2005)$.

[11] B. Bede and L. Stefanini, Generalized differentiability of fuzzy-valued functions, Fuzzy Sets and Systems, $230, 119-141, (2013)$.

[12] H. Brezis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Functional Analysis,(2010). Springer

[13] T.A. Burton and B.Zhang, Fractional equations and generalizations of Schaefer's and Krasnoselskii's fixed point theorems, Nonlinear Anal,$75, 6485-6495, (2012)$.

[14] L. Byszewski, Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, J. Math. Anal. Appl. $(162), 494-505, (1991)$.

[15] L. Byszewski, Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional differential evolution nonlocal Cauchy problem, Selected problems of mathematics, $25-33$.

[16] L. Byszewski and V.Lakshmikantham, Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space, Appl. Anal.$40, 11-19, (1991)$.

[17] A. Cellina, Bull. Amer. Math. Soc.$(78), 1069-1072, (1972)$

[18] P. Diamond, P.E. Kloeden, Characterization of compact sets of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems $(29), 341-348, (1989)$

[19] P.Diamond, P.E.Kloeden, Metric spaces of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems $(35), 241-250, (1990)$

[20] K. Diethelm and N.J.Ford, Analysis of fractional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, $265, 229-248, (2002)$.

[21] J. Dieudonn 6, Acta. Sci. Math. Szeged, Pars B, $(12), 38-40(1950)$.

[22] X.L. Ding, Y.L Jiang, *waveform relaxation method for fractional differential-algebraic equations,Fractional calculus and applied analysis, vol 17, 3 (2014).*

[23] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications (Academic Press,New York, 1980)

[24] A. El Mfadel, S. Melliani, M. Elomari and L.S. Chadli, Solving the Intuitionistic Fuzzy Fractional Partial Differential Equations,Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems and Mathematics vol(395),(2021).

[25] M. Elomari,S.Melliani and L.S. Chadli, solution of intuitionistic fuzzy fractional differential equations, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, $(201), 2235-2287, (2016)$.

[26] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi, *Higher Transcendental Functions, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).*

[27] Friedman, M. ; Ma, M. ; Kandel, A. Numerical solutions of fuzzy differential and integral equations.Fuzzy Sets Syst. $(106), 35-48, (1999)$.

[28] A.N. Godunov,"Counterexample of Peano's theorem in an infinite-dimeasional Hilbert space, Vestnik MGU, Seriya Matem.Mekhan., No.$(5), 31-34(1972)$.

[29] A.N. Godunov, Peano's theorem in Banach spaces, Functional Anal. Appl. $(9), 53-55, (1975)$

[30] R. Gorenflo , A.A. Kilbas, F. Mainardi , S.V. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.*

[31] N.V. Hoa, V.Lupulescu and D. O'Regan, A note on initial value problems for fractional fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems, $347, 54-69(2018)$.

[32] O.Kaleva,Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems $(24), 301-317, (1987)$.

[33] A. Kaufman, Introduction a la théorie des sous-ensembles flous, Vols 4 , Masson, l'Université du Michigan 1973.

[34] A. Kaufmann and M. Gupta, Introduction to fuzzy arithmetic : theory and applications, Van Nostran d Rehinold, New York, NY, (1985).

[35] A. Kilbas, M.Srivastava and J.Trujillo, Theory and applications of fractional differential Equations, North Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill,Amsterdam,(2006).

[36] P.Kloeden, Remarks on Peano-like theorems for fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems $(44), 161-164, (1991)$

[37] B.V. Kolmanovskii, R.Nosov ,Stability of functional differentiai equations, Academie Press, New York, London,(1986).

[38] S.Lang, Analysis ,(11), (Addison-Wesley, Reading, MA, 1969)

[39] Y.Li.Chen, Y.Podlubny, Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability,Comput.Math.Appl,$59, 1810-1821, (2010)$

[40] C.P.Li,F.R.Zhang,A survey on the stability of fractional differential equations, Eur. Phys. J. Spec. Top. $(193), 27-47, (2011)$

[41] Y.Li, Y.Q.Chen,I.Podlubny,Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems,Automatica (45), $1965-1969$, (2009)

[42] K.W. Liu, W. Jiang, Finite-time stability of linear fractional order neutral systems, Math. Appl.(24), $724-730$, (2011)

[43] R. Magin,*Fractional Calculus in Bioengineering, Begell House Publishers, 2004.*

[44] D.Matignon,stability results for fractional differential equations with applications to control processing in :IMACS-SMC,Lille,France,$963-968$, (1996)

[45] S.Melliani, M. Elomari, L.S. Chadli and R. Ettoussi Intuitionistic fuzzy fractional equation,Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 21, $43-53$, (2015)

[46] S.Melliani, M. Elomari, L.S. Chadli and R. Ettoussi Extension of Hukuhara difference in Intuitionistic fuzzy sets,Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 22, $34-47$, (2015)

[47] S. Melliani, M. Elomari, L.S. Chadli and R. Ettoussi Extension of Hukuhara difference in Intuitionistic fuzzy sets, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 22, $34-47$, (2015).

[48] S.Melliani, M. Elomari and A. El mfadel, intuitionistic fuzzy fractional boundary value problem, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets,Vol(23), 31–41, (2017).

[49] S. Melliani, I. Bakhadach, H.sadiki and L. S. Chadli, Solving the Intuitionistic fuzzy fractional equation by means of the homotopy analysis method,Journal Nonlinear Analysis and Application, No.1 $106-116$, (2018)

[50] S. Melliani, A. El mfadel, L.S. Chadli and M. Elomari, Stability of intuitionistic fuzzy nonlinear fractional differential equations, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol(27), pp 84–101, (2021).

[51] K.S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York,* 1993.

[52] S. Momani and S. Hadid, Lyapunov stability solutions of fractional integrodifferential equations,International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences (47), $2503-2507$, (2004).

[53] S. Muslih, O.P. Agrawal, Riesz fractional derivatives and fractional dimensional space, Int. J. Theor. Phys (49), $270-275$, (2010).

[54] H.V.Ngo, V.Ho and M.D.Tran, Fuzzy fractional diferential equations under Caputo-Katugampola fractional derivative approach, Fuzzy Sets and Systems, (2018).

[55] H. T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl,64(1978), $369 - 380$.

[56] M.L.Puri and D.A. Ralescu, Differential for fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl. (91), $552 - 558$, (1983)

[57] M.L.Puri and D.A. Ralescu, The concept of normality for fuzzy random variables, Ann.Probab. (13), $1373 - 1379$, (1985)

[58] B. Razumikhin, On the stability of systems with a delay, PMM,(20),$500 - 512$, (1956).

[59] A. Rosnenfeld, Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl. 35 (1971), 512-517

[60] S. Salahshour, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, D. Baleanu, Existence and uniqueness results for fractional differential equations with uncertainty. Adv. Diff. Equ, (112), $1687-1847$, (2012).

[61] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York, 1993.*

[62] S.Seikkala, On the fuzzy initial value problem, Fuzzy Sets and Systems (24), $319 - 330$, (1987).

[63] J. Schauder,Der Fixpunktsatz in Functionalraiumen, Studia Math,(2), $171-180$, (1930).

[64] Schwartz, Analyse I, Theorie des ensembles et Topologie, page 346.

[65] D.R.Smart : Fixed point Theorems, Cambridge University Press,(1980).

[66] Z.Smith ,Fixed point methods in nonlinear analysis (2014).

[67] J. Weissinger,Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens, Math. Nachr.(8), $193 - 212$, (1952).

[68] Z.S. Xu,R. Yager, some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets, International journal of general systems,(35), $417 - 433$, (2006).

[69] J. A. Yorke, Funkcialaj Ekvacioj,(13), $19 - 21$(1970).

[70] L. Zadeh, fuzzy sets, information and control,(3), $338 - 356$, (1965).