



UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE  
Faculté des Sciences et Techniques  
Béni Mellal



*Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques*

*Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées*

## THÈSE

Présentée par

**Bouchra BEN AMMA**

Pour l'obtention du grade de

**Docteur**

*Spécialité : Mathématiques*

---

# Contribution à l'étude théorique et la simulation numérique de certaines équations différentielles floues intuitionnistiques

---

Soutenue le 02/04/2021 à 10h devant la commission d'examen composée de :

Président/Rapporteur	: Pr. Khalid HILAL	PES	FST, USMS - Béni Mellal
Rapporteurs	: Pr. Hassan EL AMRI	PES	ENS, UHII - Casablanca
	Pr. Adil ABBASSI	PH	FST, USMS - Béni Mellal
Examineurs	: Pr. Elhoussine AZROUL	PES	FSDM, USMBA - Fès
	Pr. Hanaa HACHIMI	PH	USMS - Béni Mellal
Invité	: Pr. M'hamed ELOMARI	PA	FP, USMS - Béni Mellal
Directeur de thèse	: Pr. Lalla Saadia Chadli	PES	FST, USMS - Béni Mellal
Co-directeur de thèse	: Pr. Saïd Melliani	PES	FST, USMS - Béni Mellal

# Liste des Publications

## Publications dans des Revues Internationales

1. Bouchra Ben Amma, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *On the Existence and Uniqueness Results for Intuitionistic Fuzzy Partial Differential Equations*, International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, 2021 (In press).
2. Bouchra Ben Amma, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Convergence, Consistence and Stability Analysis of One Step Methods for First-Order Intuitionistic Fuzzy Differential Equations*, International Journal of Fuzzy System Applications, Vol. 11, No. 1, 2021 (In press).
3. Bouchra Ben Amma, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Intuitionistic Fuzzy Partial Functional Differential Equations with Integral Boundary Conditions*, 2020 IEEE 6th International Conference on Optimization and Applications (ICOA), Beni Mellal, Morocco, 2020, pp. 1-5.  
<https://doi.org/10.1109/ICOA49421.2020.9094504>.
4. Bouchra Ben Amma, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *The Existence and Uniqueness of Intuitionistic Fuzzy Solutions for Intuitionistic Fuzzy Partial Functional Differential Equations*, International Journal of Differential Equations, Vol. 2019, No. 2019, pp 1-13.  
<https://doi.org/10.1155/2019/9210641>.
5. Bouchra Ben Amma, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Intuitionistic Fuzzy Functional Differential Equations*, Fuzzy Logic in Intelligent System Design, Springer International Publishing, 2018, pp 335-357.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-67137-639>.
6. Bouchra Ben Amma, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *The Cauchy Problem of Intuitionistic Fuzzy Differential Equations*, Note on IFS, Vol. 24, No. 1, 2018, pp 37-47.  
<https://doi.org/10.7546/nifs.2018.24.1.37-47>.
7. Said Melliani, Hafida Atti, Bouchra Ben Amma and Lalla Saadia Chadli, *Solution of n-th order intuitionistic fuzzy differential equation by variational iteration method*, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 24, No. 3, 2018, pp 92-105.  
<https://doi.org/10.7546/nifs.2018.24.3.92-105>.
8. Bouchra Ben Amma and Lalla Saadia Chadli, *Numerical solution of intuitionistic fuzzy differential equations by Runge-Kutta method of order four*, Notes on IFS, Vol. 22, N. 4, 2016, pp 42-52.  
[Print ISSN 1310-4926, Online ISSN 2367-8283.](#)

- 
9. Bouchra Ben Amma, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Numerical solution of intuitionistic fuzzy differential equations by Adams three order predictor-corrector method*, Notes on IFS, Vol. 22, N. 3, 2016, pp 47-69.  
[Print ISSN 1310-4926](#), [Online ISSN 2367-8283](#).
  10. Bouchra Ben Amma, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Numerical solution of intuitionistic fuzzy differential equations by Euler and Taylor methods*, Notes on IFS, Vol. 22, N. 2, 2016, pp 71-86.  
[Print ISSN 1310-4926](#), [Online ISSN 2367-8283](#).

### Chapitres de Livres

1. Bouchra Ben Amm, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Numerical Solution of Intuitionistic Fuzzy Differential Equations By Runge-Kutta Verner Method*, Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems and Mathematics, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer International Publishing, Vol 395, pp. 53-69, 2021.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-53929>.
2. Hafida Atti, Bouchra Ben Amma, Said Melliani, Mohamed Oukessou and Lalla Saadia Chadli, *Computational Methods for Solving Intuitionistic Fuzzy Linear Systems*, Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems and Mathematics, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer International Publishing, Vol 395, pp. 217-229, 2021.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-53929>.
3. Bouchra Ben Amm, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *The Numerical Solution of Intuitionistic Fuzzy Differential Equations By The Third Order Runge-Kutta Nyström Method*, Intuitionistic and Type-2 Fuzzy Logic Enhancements in Neural and Optimization Algorithms : Theory and Applications, Springer International Publishing, Vol 862, 2020, pp. 119-132.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-35445>.
4. Hafida Atti, Bouchra Ben Amma, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Intuitionistic Fuzzy Linear Systems*, Intuitionistic and Type-2 Fuzzy Logic Enhancements in Neural and Optimization Algorithms : Theory and Applications, Springer International Publishing, Vol 862, 2020, pp. 133-144.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-35445>.
5. Bouchra Ben Amma, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Integral Boundary Value Problem for Intuitionistic Fuzzy Partial Hyperbolic Differential Equations*, Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 292, 2019, pp. 95-120.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-26987>.
6. Bouchra Ben Amma, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *A Fourth Order Runge-Kutta Gill Method for the Numerical Solution of Intuitionistic Fuzzy Differential Equations*, Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems. Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer International Publishing, Vol 372, 2019, pp 55-68.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-02155>.

---

## Communications dans les Conférences Internationales à Comité de Lecture

1. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Intuitionistic Fuzzy Partial Functional Differential Equations with Integral Boundary Conditions*, The 6th IEEE International Conference on Optimization and Applications (ICOA2020), March 17-18, 2020, Beni Mellal, Morocco.
2. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Numerical Solution of Intuitionistic Fuzzy Differential Equations by Runge-Kutta Verner Method*, The 6th International Congress of Moroccan Society of Applied Mathematics (SM2A'6), November 7-9, 2019, Beni Mellal, Morocco.
3. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Existence of Solutions to Boundary Value Problems for Intuitionistic Fuzzy Partial Hyperbolic Functional Differential Equations*, The 12th International Society for Analysis, its Applications and Computation 2019 (ISAAC-2019), July 29-August 2, 2019, Aveiro, Portugal.
4. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *On the Existence of Intuitionistic Fuzzy Solutions for Partial Hyperbolic Differential Equations*, The 12th International Society for Analysis, its Applications and Computation 2019 (ISAAC-2019), July 29-August 2, 2019, Aveiro, Portugal.
5. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Intuitionistic Fuzzy Delay Partial Differential Equations.*, La Septième Journée des Sciences de l'Ingénieur JSI 2019, Samedi 22 juin 2019 à l'École Normale Supérieure de Casablanca, Maroc.
6. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Integral Boundary Value Problem For Intuitionistic Fuzzy Partial Hyperbolic Differential Equations*, International Conference on Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems 2018 (NABVP-2018), September 04-07, 2018, Santiago de Compostela, Spain.
7. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *A Fourth Order Runge-Kutta Gill Method For The Numerical Solution of Intuitionistic Fuzzy Differential Equations*, International Conference on Intuitionistic Fuzzy Sets and Mathematics Sciences (ICIFSMAS'2018), April 11-13, 2018, Ifrane, Morocco
8. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *A Intuitionistic Fuzzy Functional Differential Equations*, The 36th Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS 2017), October 16-19, 2017, Cancun, Mexico.
9. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Numerical Solution of Intuitionistic Fuzzy Differential Equations by Runge-Kutta Method of Order Four*, The Women Pan African Congress of Mathematicians 2017 (W-PACOM 2017) under the theme of Women in Mathematics for the social development of Africa, July 06-07, 2017, International University of Rabat, UIR, Rabat, Morocco.
10. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Convergence, Consistency and Stability in Intuitionistic Fuzzy differential Equations*, The 4th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM2017), Mai 11-15, 2017, Kusadasi(Aydin), Turkey.

- 
11. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Existence and Uniqueness of the Cauchy Problem of Intuitionistic Fuzzy Differential Equations*, La cinquième édition de la conférence internationale de la Société Marocaine de Mathématiques Appliquées SM2A, 16 au 18 Mars, 2017, Méknès, Maroc.
  12. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Numerical solution of intuitionistic fuzzy differential equations by Adams three order Predictor-corrector method*, The 20th International Conference on Intuitionistic Fuzzy Sets, September 2-3, 2016, Sofia, Bulgaria.
  13. **Bouchra Ben Amma**, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, *Numerical solution of intuitionistic fuzzy differential equations by Euler and Taylor methods*, The International Conference on Intuitionistic Fuzzy Sets Theory and Applications, April 20-22, 2016, Beni Mellal, Marocco

# Résumé

Les équations différentielles floues intuitionnistiques sont des outils des mathématiques très utilisés, que ce soit en finance, en physique ou encore en biologie ; ces modèles peuvent être très efficaces pour modéliser de nombreux phénomènes.

Le sujet principal de la thèse est de contribuer au développement de cette théorie floue intuitionniste, et ce en s'intéressant au problème de l'existence et l'unicité des solutions de quelques équations différentielles floues intuitionnistiques et leurs résolutions numériques. Plus précisément un problème de Cauchy à valeur initiale floue intuitionniste et leur approximation numérique. Puis on s'intéresse à l'étude des équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques, cette recherche est faite en se basant sur une notion intéressante ; la théorie du floue intuitionniste.

Tout d'abord, nous présentons les éléments de base de la théorie des ensembles flous et des ensembles flous intuitionnistiques, tels que : les concepts de base et les principes de l'arithmétique, la dérivation floue, l'intégration floue, définitions relatives aux continuité, mesurabilité et différentiabilité dans l'espace métrique flou intuitionniste, sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans cette thèse.

Après, nous étudions principalement le problème de Cauchy à valeur initiale floue intuitionniste. Nous allons positionner ces problèmes, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution de ce type d'équations sous certaines conditions suffisantes sur le domaine.

Ensuite, la question abordée est celle de l'approximation des solutions de problèmes à valeur initial floue intuitionniste au moyen de méthodes numériques. Des méthodes à un pas et à pas multiples ont été proposées pour la résolution numérique de ces équations. Nous attribuons la notion de la convergence, la stabilité et la consistance de ces méthodes. Pour tester nos algorithmes nous présentons des exemples d'applications.

Finalement, nous proposons des résultats d'existence et d'unicité d'une solution floue intuitionniste de deux problèmes aux limites concernant des équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques avec des conditions locales et non locales, nous montrons également l'existence et l'unicité de la solution de ces types de problèmes avec des conditions intégrales basés sur les théorèmes du point fixe de Banach. Aussi, nous présentons une nouvelle procédure pour calculer la solution floue intuitionniste liées à ces équations. Nous présentons quelques applications numériques afin de valider les résultats théoriques obtenus.

Des prolongements de ce travail sont annoncés dans la conclusion et paraîtront ultérieurement.

# Abstract

Intuitionistic Fuzzy Fuzzy Differential Equations are tools of mathematics that are widely used in finance, physics and biology ; these models can be very efficient to modulate many phenomena.

The main purpose of the thesis is a contribution to the development of this intuitionistic fuzzy set theory, by focusing on the problem of the existence and uniqueness of the solutions for some intuitionistic fuzzy differential equations and their numerical solutions. More precisely the Cauchy's problem intuitionistic fuzzy initial value condition and their numerical resolution. Also the study of the intuitionistic fuzzy partial differential equations with local, non-local conditions and integral boundary conditions will be investigated. This research paper is based on the intuitionistic fuzzy set theory.

First, we present the basic elements of the theory of the fuzzy sets and the intuitionistic fuzzy sets, such as : basic concepts and rules of arithmetic, fuzzy derivation, fuzzy integration, definitions related to continuity, measurability and differentiability in the intuitionistic fuzzy metric space, upon which this thesis is based

Second, we mainly study the Cauchy problem with intuitionistic fuzzy initial value. A position of these problems will be presented. Under some sufficient conditions, the existence and the uniqueness of the solution of this type of equations will be proven.

Third, numerical methods are used to address the approximation of the solutions to the problems with intuitionistic fuzzy initial value. One-step and multi-steps methods have been proposed for the numerical solution of these equations. The notion of convergence, stability and consistency of the one step methods is introduced. Besides, the accuracy of these methods is shown in examples.

Finally, we propose the existence and uniqueness results of an intuitionistic fuzzy solution of two boundary problems concerning the intuitionistic fuzzy partial differential equations with local and non-local conditions, we also show the existence and uniqueness of the solution of these types of problems with integral boundary conditions based on Banach's fixed point theorems. Also, we present a new procedure to compute the intuitionistic fuzzy solution related to these equations. Some numerical applications are presented in order to test the theoretical results obtained.

Further prolongations of this thesis are discussed in the conclusion and are to be published later on.

**Keywords :** Intuitionistic fuzzy Cauchy problem, intuitionistic fuzzy PDEs, intuitionistic fuzzy solution, numerical methods, one-step and multi-steps methods.

---

*À ma mère*

*À mon père*

*À mes sœurs*

*À mes frères*

*À ma grande famille*

*À la mémoire de mon oncle Mustapha et ma grande mère Habiba*

*À mes amis*

*À tous ceux qui m'ont encouragé pour aller jusqu'au bout*



# Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse ont été réalisés à l'Université Sultan Moulay Slimane, Faculté de Sciences et Techniques au sein de laboratoire de Mathématiques Appliqués et Calcul Scientifique (LMACS) sous la direction du Docteurs Lalla Saadia Chadli et Said Melliani.

Tout d'abord, je remercie Allah de m'avoir donné son amour, la motivation, la volonté et l'énergie pour mener cette thèse, c'est grâce à Lui que j'ai pu la réaliser.

Bien évidemment, c'est à Madame **Lalla Saadia Chadli**, professeur à l'université Sultan Moulay Slimane-Beni Mellal, que vont mes premiers remerciements. Je vous remercie de m'avoir encadrée, guidée, encouragée et conseillée durant ces années. Votre qualité humaine, votre enthousiasme et votre compétences m'ont beaucoup apportées. Je vous serais profondément reconnaissante de m'avoir fait bénéficier de votre expérience. J'ai beaucoup appris à votre contact. Vous avez toujours su être disponibles, pour répondre à mes questions jusqu'à la fin de ma thèse, malgré une vie professionnelle chargées. votre remarques et critiques pertinentes m'ont conduit vers le bon chemin. Merci pour la confiance que vous m'a accordée.

A mon co-directeur de thèse Monsieur **Said Melliani**, Doyen de la Faculté de Sciences et Techniques, directeur de laboratoire de "Mathématiques Appliqués et Calcul Scientifique (LMACS)" et responsable du master "Génie Mathématiques et Applications" pour ses investissements dans ce travail durant toute la période de la thèse, par ses orientations et nos discussions enrichissantes, pour son aide appréciable, malgré ses préoccupations administratives et ses nombreuses charges. Il a su garder ma motivation élevée, par de judicieux conseils et un engagement hors du commun. Je le remercie pour chaque fois j'ai lui fait appel pour une aide scientifique ou autre, car il n'a jamais hésité, ni ménagé sa peine pour répondre à mes sollicitations. Ces années sont passées très vite, j'ai découvert la théorie floue passionnante. Je suis profondément reconnaissante à vous pour ce temps passé dans votre équipe, votre labo et votre bureau.

Monsieur **Khalid Hilal**, je vous remercie d'avoir présidé le jury de cette thèse et pour vos discussion scientifiques, vos commentaires et vos suggestions.

Monsieur **Elhoussine Azroul** et Madame **Hanaa Hachimi**, je vous suis profondément reconnaissante d'avoir accepté de évaluer ce travail et d'avoir fait partie du jury.

Je remercie Monsieur **Hassan El Amri** et Monsieur **Adil Abbassi** pour avoir accepté d'être rapporteurs, pour m'avoir aidé à améliorer cette thèse mais aussi pour m'avoir accepté de faire partie de mon jury.

---

Mes sincères remerciements vont à Monsieur **M'hamed Elomari** qui a bien accepté, avec beaucoup de sympathie, de faire partie de mon jury.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance aux personnes suivantes, pour leur aide dans la réalisation de ce mémoire :

Monsieur le professeur **Oscar Castillo** qui m'a beaucoup appris sur les défis à relever dans ce domaine. Il a partagé ses connaissances, ses expériences et des suggestions pertinentes dans la recherche scientifique, je lui remercie de m'avoir accordé son estimable confiance et son inépuisable disponibilité. Merci infiniment pour tous que vous avez fait.

Monsieur le professeur **Arran Fernandez** pour m'avoir accordé des entretiens et avoir répondu à mes questions sur la correction des publications, pour son incessant aide, ses encouragements, sa disponibilité, le temps qu'on a partagé ensemble au Maroc et ailleurs au sein des conférences internationales. Ainsi que son expérience personnelle qui m'a beaucoup encouragé.

Monsieur le professeur **Krassimir Atanassov** et sa fille **Vassia Atanassova** qui m'ont beaucoup aidé lors mon premier voyage en Bulgarie, ils m'ont invité, accueilli, et ont pris soin de moi pendant la période de mon séjour pour participer à la conférence internationale qu'ils ont organisé. Je remercie également le professeur **Ekrem Savas**, qui m'a soutenu et créé l'occasion de présenter mon travail à leur conférence internationale qui a lieu en Turquie.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, **Poonam Kumar Sharma**, **Mehmet Kucukaslan**, **Gokhan Cuvalcioglu**, **Hakeem Ahmed Othman Ali**, **Moussa Dgibrine**, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de manière plus ou moins directe à l'avancement de cette thèse en particulier, merci à tous les professeurs et les thésards du laboratoire de Mathématiques Appliqués et Calcul Scientifique, pour leur humer et tous les bons moments partagés ensemble. J'adresse tout mes respect à tout mes professeurs qui m'ont enseigné du primaire jusqu'à temps présent.

Mes derniers remerciements s'adressent à toute ma famille et en particulier à la personne qui compte pour moi toujours ma maman et à mon cher père pour leur éducation, leur sacrifice et leur soutien constant inconditionnel tout le long de mes études secondaires et supérieurs et leur amour inconditionnel qui m'ont aidé à affronter les moments difficiles que j'ai rencontré. Aucun mot ne suffira à exprimer ma reconnaissance envers eux. À mes sœurs, mes frères et mon cousin Aziz qui ont tous contribué à l'aboutissement de ce travail et qui m'ont apporté leur aide et qui m'ont soutenu tout au long de ces années d'études.

Je veux dédier cette thèse, à mon jeun oncle feu Mustapha et ma grande mère feu Habiba qui nous a quittés dernièrement.

# Table des matières

Liste des Publications	6
Résumé	7
Abstract	7
Liste des figures	13
Introduction	1
<b>1 Préliminaires</b>	<b>5</b>
1. Théorie des ensembles flous	5
1.1. Ensemble flou	7
1.1.1. Caractéristiques d'un ensemble flou	7
1.1.2. Principe d'extension des ensembles flous	8
1.1.3. Opérations sur les ensembles flous	9
1.2. Nombre flou	10
1.2.1. Représentation d'un nombre flou	10
1.2.2. $\alpha$ -coupe d'un nombre flou	11
1.2.3. Opérations sur les nombres flous	12
1.2.4. Approche fonctionnelle	12
1.2.5. Approche ensembliste	12
1.3. Dérivation floue	13
1.3.1. Dérivée de Hukuhara	13
2. Théorie des ensembles flous intuitionnistiques	13
2.1. Ensemble flou intuitionniste	14
2.1.1. Caractéristiques d'un ensemble flou intuitionniste	14
2.1.2. Principe d'extension	15
2.1.3. Opérations sur les ensembles flous intuitionnistiques	15
2.2. Nombre flou intuitionniste	16
2.2.1. Représentation d'un nombre flou intuitionniste	16
2.2.2. $\alpha$ -coupe d'un nombre flou intuitionniste	18
2.3. Espace métrique flou intuitionniste $(IF_1, d_p)$	19
2.4. Continuité-Mesurabilité-Intégrabilité-Différentiabilité dans l'espace métrique flou intuitionniste	20
2.4.1. Continuité	20
2.4.2. Mesurabilité et Intégrabilité	21
2.4.3. Différentiabilité	21

<b>2</b>	<b>Équation différentielle floue intuitionniste</b>	<b>23</b>
1.	Problème à valeur initiale floue intuitionniste . . . . .	23
1.1.	Problème de Cauchy . . . . .	23
1.2.	La relation entre la solution et la solution approchée d'une équation différentielle floue intuitionniste . . . . .	24
1.3.	Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Résolution numériques des équations différentielles floues intuitionnistes</b>	<b>34</b>
1.	Étude des méthodes à un pas . . . . .	34
1.1.	Méthode d'Euler . . . . .	35
1.2.	Méthode de Taylor d'ordre $p$ . . . . .	36
1.3.	Méthodes de Runge-Kutta . . . . .	41
1.3.1.	Méthode de Runge-Kutta Nyström d'ordre 3 . . . . .	41
1.3.2.	Méthode de Runge-Kutta Gill d'ordre 4 . . . . .	44
1.3.3.	Méthode de Runge-Kutta Verner . . . . .	47
1.4.	Applications numériques . . . . .	52
2.	Étude des méthodes à pas multiple . . . . .	68
2.1.	Interpolation d'un nombre flou intuitionniste . . . . .	68
2.2.	Méthode d'Adams-Bashforth . . . . .	70
2.3.	Méthode d'Adams-Moulton . . . . .	74
2.4.	Méthode de prédicteur-correcteur . . . . .	79
2.5.	Application numérique . . . . .	80
3.	Étude générale de la convergence des méthodes à un pas : Consistance et Stabilité . . . . .	82
3.1.	La notion de convergence . . . . .	83
3.2.	La notion de stabilité . . . . .	83
3.3.	La notion de consistance d'un schéma . . . . .	83
3.4.	Applications numériques . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Équations aux dérivées partielles floues intuitionnistes</b>	<b>90</b>
1.	Équations aux dérivées partielles floues intuitionnistes avec des conditions locales et non locales . . . . .	91
1.1.	Équations aux dérivées partielles floues intuitionnistes avec des conditions locales . . . . .	91
1.2.	Équations aux dérivées partielles floues intuitionnistes avec des conditions non locales . . . . .	94
2.	Équations aux dérivées partielles floues intuitionnistes avec des conditions intégrales . . . . .	95
3.	Concept de solution floue intuitionniste . . . . .	99
4.	Applications . . . . .	102
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>112</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>114</b>

# Liste des figures

1	Comparaison de l'appartenance de la température en ensemble classique vs ensemble flou . . . . .	2
1.1	Classification selon les ensembles classiques . . . . .	6
1.2	Classification selon les sous-ensembles flous . . . . .	6
1.3	Caractéristiques d'un ensemble flou . . . . .	8
1.4	Nombre flou triangulaire . . . . .	10
1.5	Nombre flou trapézoïdal . . . . .	11
1.6	Caractéristiques d'un ensemble flou intuitionistique . . . . .	15
1.7	Nombre flou intuitionistique triangulaire . . . . .	17
1.8	Nombre flou intuitionistique trapézoïdale . . . . .	18
3.1	Les solutions exactes et les solutions approchées par la méthode de Taylor pour $p=2$ , $p=4$ , $h=0.33$ et $t=0.27$ . . . . .	53
3.2	Estimation d'erreur . . . . .	54
3.3	Les solutions exactes et les solutions approchées par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3, 4 et 8 pour $h=0.22$ et $t=0.9$ . . . . .	60
3.4	Estimation d'erreur . . . . .	60
3.5	Les solutions exactes et les solutions approchées par la méthode de Taylor $p = 2$ et $p = 4$ , la méthode d'Euler et la méthode du Runge-Kutta d'ordre 3 et 4 et 8 pour $h=0.34$ et $t=1$ . . . . .	67
3.6	Estimation d'erreur . . . . .	68
3.7	Les solutions exactes et les solutions approchées par la méthode de Adams-Bashforth à 2 pas et à 3 pas et Prédicteur-Correcteur pour $h=0.04$ et $t=0.12$ . . . . .	81
3.8	Estimation d'erreur . . . . .	82
3.9	$h=0.03$ . . . . .	87
3.10	$h=0.04$ . . . . .	89
4.1	$C=(-2,0,2;-3.75,0,3.75)$ . . . . .	105
4.2	La figure des solutions floues intuitionistiques $\langle u, v \rangle(x, y)$ à différentes valeurs de $(x, y)$ . . . . .	105
4.3	Les graphes en 2D de quelques $\alpha$ -coupes de solutions floues intuitionistiques . . . . .	106
4.4	La surface de la solution floue intuitionistique . . . . .	106
4.5	$C=(-1,0,1;-0.75,0,0.75)$ . . . . .	109
4.6	La figure des solutions floues intuitionistiques $\langle u, v \rangle(x, y)$ à différentes valeurs de $(x, y)$ . . . . .	110
4.7	Les graphes en 2D de quelques $\alpha$ -coupes de solutions floues intuitionistiques . . . . .	110
4.8	La surface de la solution floue intuitionistique . . . . .	111

# Introduction

Le présent travail est réalisé au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (LMACS) à la faculté des Sciences et Techniques de Beni Mellal, pour obtenir le diplôme de doctorat en mathématiques de l'université Sultan Moulay Slimane pour l'année 2019/2020.

La modélisation mathématique des différents phénomènes réels a deux inconvénients. Le premier est la complexité de la situation à modéliser. Cela a deux conséquences : on se retrouve soit dans l'impossibilité de formuler le modèle, soit le modèle construit est trop compliqué pour être utilisable. Le second inconvénient concerne l'indétermination causée par notre incapacité à différencier exactement les événements dans une situation réelle, et donc à définir les notions nécessaires de façon précise. Cette indétermination n'est pas un obstacle lorsque nous utilisons le langage naturel, parce que sa principale propriété est l'imprécision de sa sémantique et donc capable de travailler avec des notions floues. Cependant, les mathématiques classiques ne peuvent pas faire face à ces notions. Il est donc nécessaire d'avoir certains outils mathématiques pour décrire des notions floues et incertaines et ainsi aider à surmonter les obstacles qui précèdent la modélisation mathématique des phénomènes réels.

À partir des années 60, une nouvelle théorie mathématique reliée à la théorie des ensembles s'est développée, celle de la théorie des ensembles flous. Formant une théorie des ensembles dont la théorie des ensembles classiques ne constitue qu'un cas particulier, cette théorie a vécu ses premiers développements dans les articles pionniers de Zadeh [45, 48, 49, 50, 51]. Ce dernier a décrit la particularité de cette théorie comme étant un outil servant à représenter les systèmes humains [47]. La nécessité d'une telle théorie est née des faibles résultats obtenus lors de l'application aux systèmes humains, des théories mathématiques de la science moderne définies par ou basées sur les lois de la mécanique, de la physique, de la chimie et de l'électromagnétisme. La différence la plus importante qui existe entre les systèmes déterministes et les systèmes humains est le choix du quantitatif ou du qualitatif pour définir et comprendre le monde extérieur. Les systèmes humains sont rarement caractérisés quantitativement ; ils sont plutôt représentés qualitativement par l'usage des termes linguistiques (non mathématiques) permettant un certain degré d'imprécision, les rendant moins spécifiques que les termes numériques. Plusieurs chercheurs voient dans les travaux de Zadeh une nouvelle méthode technologique permettant la création de machines intelligentes. C'est le cas de Mamdani qui fut le premier [26, 27], au début des années 1970, à employer la logique floue pour contrôler le fonctionnement d'une chaudière à vapeur (Borne, 1998 ; Sangalli, 2001 [14, 37]. Après un développement académique, c'est dans les années 1980 que les premières applications industrielles de cette nouvelle méthode technologique font leur apparition au Japon dans le domaine de la commande industrielle. Depuis cette époque, la méthode a gagné l'Europe et les États-Unis et a été mise en œuvre dans de nombreux projets indus-

triels (Bome,1998)[14]. A partir des années 90, le champ d'application est devenu très vaste. Cette théorie a été utilisée dans l'électroménager (laves-linges, aspirateurs,...), les systèmes audio-visuels (appareils de photo autofocus, caméscopes à stabilisateur d'image, photocopieurs,...), l'automobile (suspension, climatisation,...), la robotique, le contrôle des procédés complexes, l'évaluation sensorielle (industrie agro-alimentaire, textile,...), le traitement du signal (son, image,...), la géographie, la mesure de la pauvreté dans certains pays ([36, 35, 41, 1, 43])...etc.

Dans la théorie des ensembles classiques il n'ya que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous ensemble, le mérite de Zadeh a été tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée permettre des graduation dans l'appartenance d'un élément à appartenir plus moins fortement à ce sous-ensemble. L'appartenance à un ensemble représente une valeur entre 0 et 1. Un ensemble flou peut être défini comme un ensemble ayant des frontières floues. L'ensemble flou  $F$  de  $X$  (où  $X$  est l'univers d'étude) est défini comme une fonction :

$$\mu_F(x) : X \longrightarrow [0, 1]$$

où  $F(x) = 1$  si  $x$  est totalement dans  $F$ ,  $\mu_F(x) = 0$  si  $x$  n'est pas dans  $F$  et  $0 < \mu_F(x) < 1$  si  $x$  est partiellement dans  $F$ . La fonction d'appartenance est une mesure :

- Du degré auquel un élément est membre d'un ensemble
- Du degré d'appartenance
- De la valeur de l'appartenance

La figure 1.2 montre deux exemples de représentation de la température, une en logique classique, et l'autre en la théorie des sous-ensembles flous. Selon la figure 1.2, en logique classique, une température de  $22.5^\circ$  est considérée comme élevée. En la théorie des sous-ensembles flous, une température de  $22.5^\circ$  appartient au groupe "moyenne" avec un degré d'appartenance de 0.167, et appartient au groupe "élevée" avec un degré d'appartenance de 0.75.

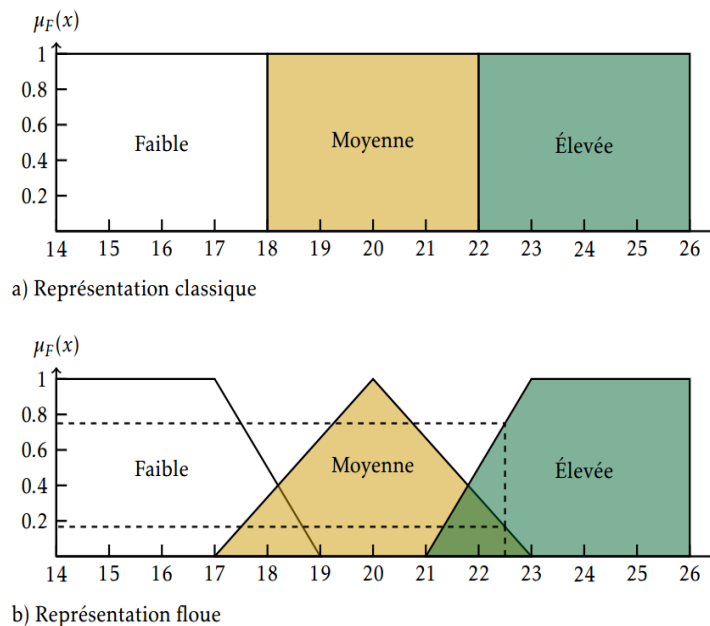


FIGURE 1 – Comparaison de l'appartenance de la température en ensemble classique vs ensemble flou

Les variables floues faible, moyenne et élevée sont représentées par des fonctions linéaires. D'autres fonction auraient pu être utilisées, comme des trapézoïdales, des paraboles, etc. Cependant, les fonction linéaires sont beaucoup plus faciles à implémenter de façon pratique, et donnent de bons résultats. On utilise souvent une notation vectorielle pour représenter les fonctions. Pour les fonctions d'appartenance de la figure 1.2, on peut utiliser la notation suivante :

- Température faible :  $(1/17, 0/19)$
- Température moyenne :  $(0/17, 1/20, 0/23)$
- Température élevée :  $(0/21, 1/23)$

La théorie des sous-ensembles flous est une branche des mathématiques qui permettra un ordinateur de modéliser le monde réel de la même façon que les personnes. Elle est préoccupée par la quantification et le raisonnement en utilisant un langage qui permet des définitions ambiguë, comme beaucoup, peu, petit, haut, dangereux. Elle s'occupe de situations où la question qui est posée et la réponse obtenue contiennent des concepts vagues.

Le début de l'idée de la théorie des ensembles flous intuitionnistiques était au hasard. Krassimir Todorov Atanassov (23 Mars 1954, Burgas, Bulgarie) était à l'hôpital entrain de lire le livre "Introduction la théorie des sous-ensembles flous". Il commençait ajouter à la définition un second degré (le degré de non appartenance) et étudiait les propriétés d'un ensemble avec les deux degrés. Il voyait que le nouveau ensemble est une extension de l'ensemble flou. il discutait avec George Gargov(7 avril 1947, 9 novembre 1996) qui proposa le nom "Intuitionistic Fuzzy Sets" [2, 3, 4]. Tandis que les ensembles flous donnent pour chaque élément de l'univers seulement une degré d'appartenance et le degré de non appartenance égale à un moins le degré d'appartenance. Dans la théorie des ensembles flous intuitionnistiques les deux degrés sont donnés et sont plus au moins indépendant, la seule contrainte est que leur somme ne doit pas dépasser le 1. L'ensemble flou intuitionistique est un ensemble ordonné par le triple

$$F = \{(x, \mu_F(x), \nu_F(x), x \in X)\}$$

où  $\mu_F, \nu_F(x) : X \rightarrow [0, 1]$  sont des fonctions telles que

$$0 \leq \mu_F(x) + \nu_F(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$$

Pour chaque  $x$  les valeurs  $\mu_F(x)$  et  $\nu_F(x)$  représentent respectivement le degré d'appartenance et le degré de non appartenance de l'élément  $x \in X$  à  $F \subset X$  (où  $X$  est l'univers d'étude).

Plusieurs applications de la théorie des ensembles flous intuitionnistiques dans divers domaines ont été réalisées, et certains travaux récents de ce type peuvent être trouvés dans [15, 16, 17, 21, 22, 42].

Une équation différentielle floue intuitionistique (EDFI) peut être vue comme une extension aux sous-ensembles flous intuitionnistiques des équations différentielles ordinaires. L'étude des EDFIs a été initié par Said Melliani et Lalla Saadia Chadli en 2000 [28]. Il s'agit d'une équation différentielle à coefficients ou à conditions initiales floues intuitionnistiques [32, 33, 34, 38, 39]. Sa solution est l'évolution, dans le temps, d'une région d'incertitude qui sera définie plus tard. La première étape, ils ont consisté à définir un espace métriques flou, la dérivée floue intuitionistique et l'intégrale flou intuitionistique, a été suivie par l'introduction d'équations différentielles floues intuitionnistiques et



établir des conditions suffisantes pour l'existence des solutions floues intuitionnistiques à ces équations. La notion d'équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques est très rare, ce concept a été introduite pour la première fois par Said Melliani et Lalla Saadia Chadli en 2001 [29] comme étant la modélisation des équations en considérant l'incertitude dans le modèle. Les EDFIs sont utilisées comme des outils modélisant la dynamique de certains systèmes en tenant compte de l'incertitude et de l'imprécision. Il manque encore des recherches quantitative et qualitatives sur cet aspect qui va susciter l'intérêt de nombreux chercheurs.

L'objectif principal de cette thèse est l'étude théoriques et numériques des équations différentielles floues intuitionnistiques, plus précisément un problème de Cauchy à valeur initiale floue intuitionniste et leur résolution numérique. Puis on s'intéresse à l'étude des équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques, cette recherche est faite en se basant sur une notion intéressante; la théorie du floue intuitionniste. Ainsi notre thèse est structurée comme suit :

Le premier chapitre, nous présentons des introductions générales aux des sous ensembles flous et des ensembles flous intuitionnistiques. Dans une première partie, nous rappellerons les éléments de bases sur les sous ensembles flous en vue d'une meilleure compréhension de la suite de ce travail. Puis nous nous intéresserons plus en détails aux ensembles flous intuitionnistiques où nous rappelons quelques définitions et propriétés nécessaire pour les résultats qui suivent.

Le deuxième chapitre est consacré à du problème de Cauchy à valeur initiale floue intuitionniste. Nous allons donner une position du problème à valeur initial floue intuitionniste, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution de cette équation.

Le troisième chapitre décrira la résolution numérique des équations différentielles floues intuitionnistiques par différentes méthodes extraites des méthodes classiques déjà connues. Dans la première section nous étudions les méthodes à un pas et on donnerons la convergence de ces méthodes. Dans la deuxième section on va refaire les mêmes démarches pour la résolution numérique des équations différentielles floues intuitionnistiques mais cette fois ci par des méthodes à pas multiples, et terminerons les deux sections par des exemples d'applications où on va comparer tout ces dernières méthodes. La dernière section se focalise sur l'étude générale de la convergence des méthodes à un pas, on donne la notion du consistence et stabilité d'un schéma numérique pour les équations différentielles floues intuitionnistiques.

Dans le dernier chapitre de ce travail est dédié au deux modèles équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques : On considère ces deux modèles de valeurs limites locales, non locales et intégrales pour les équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques, on établit quelques définitions pour les solutions floues intuitionnistiques de ces problèmes dans un nouvel espace métrique complet [31], on montre également les principaux résultats de l'existence et l'unicité des solutions floues intuitionnistiques, puis, nous présentons une nouvelle procédure pour calculer les solutions floues intuitionnistiques liées à ces équations, des exemples illustratifs ont été inclus, pour démontrer la validité et l'applicabilité des techniques proposées.

L'ensemble de ce travail sera résumé et des perspectives seront proposées.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre, nous procédons à la caractérisation du concept de sous ensemble flou et sous ensemble flou intuitionniste puis présentons brièvement ses propriétés. Nous rappelons quelques définitions, notions et résultats fondamentaux qui nous seront utiles dans les chapitres 2, 3 et 4.

### 1. Théorie des ensembles flous

L'étude des systèmes complexes et la prise en compte de données floues ont suscité un engouement important de la part de la communauté scientifique, mais aussi des industriels pour les méthodes de modélisation approximative et en particulier les théories du "FLOU". Etudier des phénomènes naturels complexes nous a conduit, nous aussi, à utiliser ces approches de modélisation.

Dans le cadre de la logique classique, une proposition est soit vraie, soit fausse, soit indéterminée. Or, dans son raisonnement, l'être humain s'appuie sur des informations floues et des données imparfaites (imprécises, incertaines, incomplètes). Néanmoins, son raisonnement peut être cohérent et aboutir à des résultats corrects.

Les théories du "FLOU" sont tout un ensemble de théories généralisant des concepts mathématiques prouvés et éprouvés ; un cadre formel permettant la modélisation et l'interprétation de connaissances floues (propositions) et de données imparfaites.

Une proposition comme "demain il y aura beaucoup de vent" est à la fois imprécise et incertaine voire incomplète :

-**imprécise**, car comment quantifier "beaucoup de vent" ? Une imprécision est une difficulté à exprimer clairement un fait, c'est ce qui est relatif à son contenu "environ 20 Km/h", on ne donne pas de valeur précise mais un intervalle. Elle se manifeste généralement lorsque la donnée est exprimée sous forme linguistique "beaucoup" ;

-**incertaine**, car comment être sûr que "demain il y aura **vraiment** beaucoup de vent", une incertitude représente un doute sur la validité d'un fait. Elle fait référence à la véracité de l'information, c'est un coefficient apporté au fait qu'une proposition soit vraie ou fausse ;

-**incomplète**, car à partir de cette proposition nous n'avons pas exactement la vitesse du vent à une heure fixée. Les incomplétudes sont des absences de connaissances ou des connaissances partielles sur certaines caractéristiques du système. Elles peuvent être dues à l'impossibilité d'obtenir certains renseignements ou à un problème au moment de l'acquisition des connaissances. L'incomplétude peut être considérée comme un cas particulier de l'imprécision.

Ces trois types d'imperfections ne sont pas indépendants les uns des autres, bien que

naturellement manipulés par l'être humain, les transcrire de manière informatique et numérique sur ordinateurs peut s'avérer compliqué, les ordinateurs n'ayant pas nos capacités d'abstraction et de compréhension.

Les imprécisions n'ont été prises en considération qu'à partir de 1965 par L.A. Zadeh qui introduit la notion de sous ensemble flou (SEF), à partir de l'idée d'appartenance partielle à un ensemble aux limites imprécises. Les développements de cette notion fournissent des moyens de représenter et de manipuler des connaissances décrites de manière imprécise et qui établissent une interface entre des données décrites ou linguistiques (mots) et des données numériques (chiffres).

Pour bien mettre en évidence le principe fondamental de la notion de sous ensemble flou, nous présentons un exemple explicatif. Nous classons la taille des personnes en trois catégories : "petit", "entre les deux" et "grand". Selon les deux figures, la classification des personnes en trois catégories est bien claire mais différente.

En effet, par rapport à la logique classique, toutes les personnes avec une taille de moins de  $1.50m$  sont considérées comme "petit" et celles de  $1.70m$  appartiennent à la catégorie des grands. Le passage du petit au grand se fait progressivement et par cas, ce qui implique qu'une telle classification n'est pas logique.

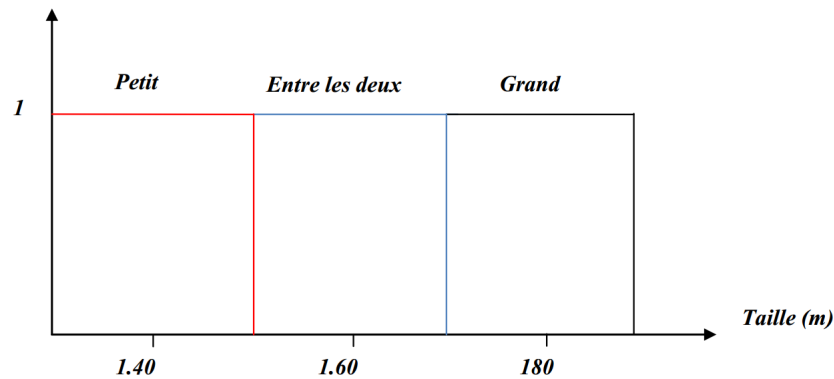


FIGURE 1.1 – Classification selon les ensembles classiques

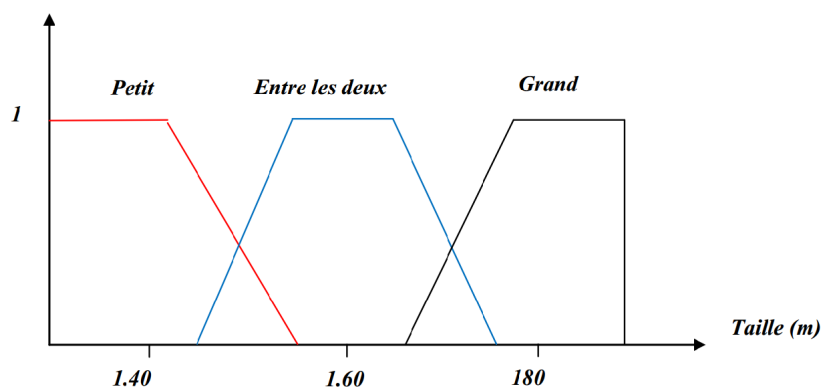


FIGURE 1.2 – Classification selon les sous-ensembles flous

Cependant, en utilisant la logique floue, la fonction d'appartenance  $f$  permet de tenir compte du fait qu'une personne de  $1.45m$  est considérée comme petite avec  $f = 0.7$ , et comme étant entre les deux avec  $f = 0.3$ . Pour décrire une certaine situation, nous utilisons souvent des expressions floues comme : rapide ; grand ; beaucoup ; petit ; chaud ; etc.

Chaque variable linguistique a besoin d'une définition. Pour cela, la fonction d'appartenance  $f$  est définie et permet d'associer à chaque variable  $x$  (la taille d'une personne) une valeur entre 0 et 1 représentant le degré d'appartenance de  $x$  aux variables linguistiques. D'après cette exemple, si  $x = 1.40m$  alors  $f(x) = 1$  pour la variable linguistique 'petit'. De même, si  $x = 1.45m$ , alors  $f(x)$  peut prendre les valeurs 0.7 pour la valeur linguistique 'entre les deux' et 0.3 pour la valeur linguistique 'petit'.

Aujourd'hui, les domaines d'applications dans lesquels il existe des utilisations de la théorie des sous ensembles flous sont très variés : médecine, biologie, écologie, économie, recherche scientifique...etc

Dans ce qui va suivre, nous allons présenter brièvement les concepts de base et les principes de l'arithmétique de la théorie des ensembles flous. Pour de plus amples développements de cette théorie, on peut consulter les ouvrages de base cités en référence (Dubois & Prade, 1982; Puri and Ralescu 1983, Osmo KALEVA 1987).

## 1.1. Ensemble flou

### 1.1.1. Caractéristiques d'un ensemble flou

Un sous ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance. A partir d'une telle fonction, un certain nombres de caractéristiques de sous ensemble flou peuvent être étudiées :

#### Noyau :

Le noyau d'une partie floue  $A$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent totalement à  $A$  c'est-à-dire dont le degré d'appartenance à  $A$  vaut 1 :

$$N(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$$

#### Support :

Le support d'une partie floue  $A$  est l'ensemble des éléments qui appartenant, même très peu, à  $A$  c'est-à-dire dont le degré d'appartenance à  $A$  est différent de 0.

$$S(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

#### Hauteur :

La hauteur de  $A$ , notée  $H(A)$ , correspond à la borne supérieure de l'ensemble d'arrivée de sa fonction d'appartenance :

$$H(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

#### Normalité :

$A$  est dit normalisé si et seulement si  $H(A) = 1$  c'est-à-dire  $\exists x \in A$  tel que  $\mu_A(x) = 1$ . En pratique, il est extrêmement rare de travailler sur des ensembles flous non normalisés.

### $\alpha$ -coupe :

Le sous-ensemble ordinaire  $A_\alpha$  de  $X$  associé à  $A$  pour le niveau  $\alpha$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  avec degré au moins égal à  $\alpha$ . On dit que  $A_\alpha$  est l' $\alpha$ -coupe de  $A$ . Formellement :

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

et  $A_\alpha$  est un sous-ensemble ordinaire de fonction caractéristique :

$$\chi_{A_\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

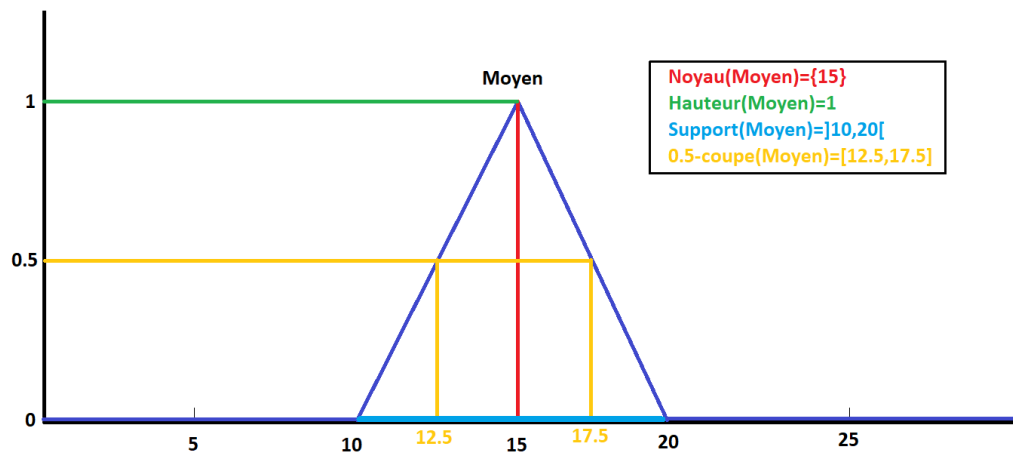


FIGURE 1.3 – Caractéristiques d'un ensemble flou

### 1.1.2. Principe d'extension des ensembles flous

L'approche floue peut être appliquée à toute collection  $X$  d'objets mathématiques : nombres, points, vecteurs, fonctions et ainsi de suite. Étant donné une application  $f : X \rightarrow Y$ , le principe d'extension de Zadeh définit la façon que  $f$  agit sur un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$ , fournissant le sous-ensemble flou  $f(A)$  de  $Y$ . Il est conçu de telle sorte que les fluctuations décrites par le niveau  $\alpha$  des ensembles de  $\mu_{f(A)}$  sont ceux qui proviennent de l'application du niveau  $\alpha$  des ensembles de  $\mu_A$ . En outre, le degré d'appartenance  $\mu_{f(A)}$  d'une valeur  $y$  est le maximum de tous les degrés  $\mu_A$  de  $x$  donnant  $y = f(x)$ .

Soit  $A$  un sous ensemble flou de  $X$  et  $f$  une application de  $X$  vers  $Y$ .

Le principe d'extension définit un sous-ensemble flou  $B$  de  $Y$  associé à  $A$  (image directe)

par l'intermédiaire de  $f$  par :

$$\begin{aligned} f : F(X) &\rightarrow F(Y) \\ \mu_{f(A)}(y) &= \sup_{x \in A, y=f(x)} \mu_A(x) \end{aligned}$$

### 1.1.3. Opérations sur les ensembles flous

Étant donné que le concept de sous ensemble flou peut être vu comme une généralisation des concepts d'ensemble classique, on est conduit à introduire des opérations sur les sous ensembles flous. Les sous-ensembles flous servent à décrire des concepts vagues, imprécis, des propriétés graduelles ou des événements incertains. Les notions d'inclusion, de réunion, intersection, complément, relation, convexité, etc., sont étendues à de tels ensembles, et diverses propriétés de ces notions dans le contexte des ensembles flous sont établies.

#### Égalité :

Dans sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  de  $X$  sont égaux, si leurs fonctions d'appartenances prennent la même valeur pour tous les éléments  $x$  de  $X$ . Formellement :

$$A = B \text{ si et seulement si } \forall x \in X \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

#### Complément :

Le complémentaire d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  noté  $\bar{A}$  est défini par :

$$\forall x \in X \quad \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Contrairement aux sous-ensembles classiques, la propriété de non contradiction n'est pas satisfaite ici ( $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ ). De même que la propriété du tiers exclus ( $A \cup \bar{A} \neq X$ ). Par contre, les autres propriétés sont conservées, notamment :  $\overline{\bar{A}} = A, \overline{\emptyset} = X$

#### Inclusion :

Soit  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles flous de  $X$ . Si pour n'importe quel élément  $x$  de  $X$ ,  $x$  appartient toujours moins à  $A$  qu'à  $B$ , alors on dit que  $A$  est inclus dans  $B$  ( $A \subseteq B$ ). Formellement :

$$A \subseteq B \text{ si et seulement si } \forall x \in X, \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

#### Union :

L'union de deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $X$  est le sous-ensemble flou constitué des éléments de  $X$  affectés du plus grand des degrés avec lesquels ils appartiennent à  $A$  et  $B$ . Formellement,  $(A \cup B)$  est donné par :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}.$$

#### Intersection :

L'intersection de deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $X$  est le sous-ensemble flou constitué des éléments de  $X$  affectés du plus petit des degrés avec lesquels ils appartiennent à  $A$  et  $B$ . Formellement,  $(A \cap B)$  est donné par :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}.$$

## 1.2. Nombre flou

La famille la plus importante de tous les ensembles flous sont les nombres flous. Il n'est pas surprenant puisque les transporteurs dominant de l'information sont des nombres. La notion d'un nombre flou a été introduit par Dubois et Prade.

un nombre flou est une fonction  $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $u$  est normale c-à-d  $\exists x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $u(x_0) = 1$ .
2.  $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min \{ u(x), u(y) \} \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ .
3.  $u$  est semicontinue supérieur sur  $\mathbb{R}$  i.e  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall \epsilon > 0$  il existe un voisinage  $V(x_0)$  tel que  $u(x) \leq u(x_0) + \epsilon, \quad \forall x \in V(x_0)$
4. l'ensemble  $\text{supp}(u)$  est compact dans  $\mathbb{R}$ , avec :  $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \mathbb{R}; u(x) > 0\}}$ .

On désigne par  $E$  l'ensemble des nombres flous.

### 1.2.1. Représentation d'un nombre flou

#### Nombre flou triangulaire :

Parmi les différentes formes de nombre flou, nombre flou triangulaire est le plus populaire.

**Définition 1..1.** *Un nombre flou triangulaire est représenté par trois points comme suit :  $A = (a_1, a_2, a_3)$  est sa fonction d'appartenance est définie par*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_1 \text{ et } x > a_3 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & \text{si } a_3 \leq x \leq a_4 \end{cases}$$

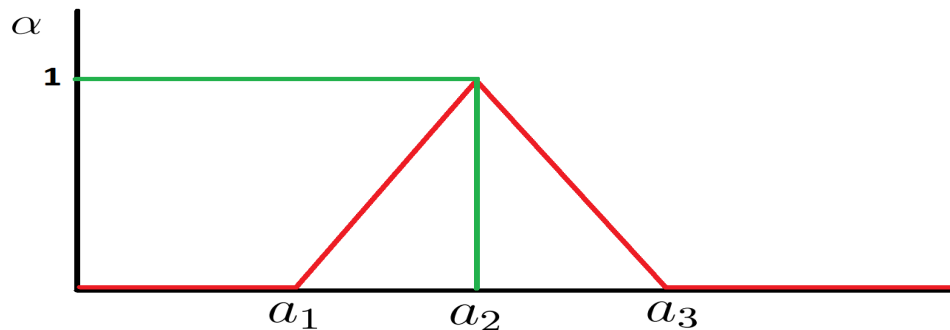


FIGURE 1.4 – Nombre flou triangulaire

### Nombre flou trapézoïdal :

Une autre forme de nombre flou est la forme trapézoïdale. Cette forme est originaire du fait qu'il y a plusieurs points dont le degré d'appartenance est maximum.

**Définition 1..2.** On peut définir le nombre flou trapézoïdale  $A$  comme  $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  La fonction d'appartenance de ce nombre flou sera interprété comme suit

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_1 \text{ et } x > a_3 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & \text{si } a_3 \leq x \leq a_4 \end{cases}$$

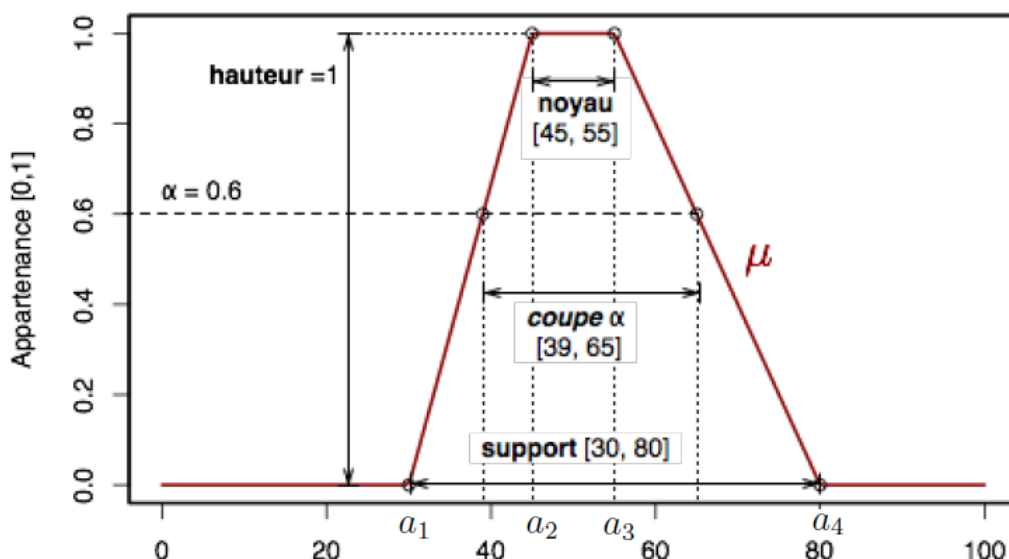


FIGURE 1.5 – Nombre flou trapézoïdal

### 1.2.2. $\alpha$ -coupe d'un nombre flou

Un nombre flou  $A$  peut être caractérisé par l'ensemble de ses  $\alpha$ -coupes. Une  $\alpha$ -coupe avec  $\alpha \in ]0, 1]$  d'un nombre flou  $A$  est le sous ensemble net(classique) des éléments ayant un degré d'appartenance supérieur ou égale à  $\alpha$ .

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Le support ou 0 – coupe d'un nombre flou  $A$  est défini comme la fermeture de l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}$  c'est à dire

$$A_0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}}$$



Chaque  $\alpha$ -coupe,  $\alpha \in [0, 1]$ , d'un nombre flou 1 est un intervalle fermé :

$$A_\alpha = [A_L(\alpha), A_R(\alpha)]$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_L(\alpha) &= \inf \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\} \\ A_R(\alpha) &= \sup \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

pour tout  $\alpha \in [0, 1]$

—  **$\alpha$ -coupes d'un nombre flou triangulaire :**

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad A_\alpha = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_3 - \alpha(a_3 - a_2)]$$

—  **$\alpha$ -coupes d'un nombre flou trapézoïdal :**

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad A_\alpha = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_4 - \alpha(a_4 - a_3)]$$

### 1.2.3. Opérations sur les nombres flous

#### 1.2.4. Approche fonctionnelle

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles flous

- Égalité :

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X.$$

- Addition :

$$\mu_{A+B}(z) = \max \{ \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) / x + y = z \}$$

- Soustraction :

$$\mu_{A-B}(z) = \min \{ \max(\mu_A(x), \mu_B(y)) / x - y = z \}$$

- Multiplication :

$$\mu_{A \times B}(z) = \max \{ \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) / xy = z \}$$

#### 1.2.5. Approche ensembliste

Soit  $u = [\underline{u}, \bar{u}]$  et  $v = [\underline{v}, \bar{v}]$  deux intervalles flous. Pour  $\alpha \in [0, 1]$

- Addition :

$$[u + v]_\alpha = [\underline{u}_\alpha + \underline{v}_\alpha, \bar{u}_\alpha + \bar{v}_\alpha]$$

- Soustraction :

$$[u - v]_\alpha = [\underline{u}_\alpha - \bar{v}_\alpha, \bar{u}_\alpha - \underline{v}_\alpha]$$

- Multiplication :

$$[u \times v]_\alpha = [(\underline{u}\underline{v})_\alpha, (\bar{u}\bar{v})_\alpha]$$

avec

$$\begin{aligned} (\underline{u}\underline{v})_\alpha &= \min \{ \underline{u}_\alpha \underline{v}_\alpha, \underline{u}_\alpha \bar{v}_\alpha, \bar{u}_\alpha \underline{v}_\alpha, \bar{u}_\alpha \bar{v}_\alpha \} \\ (\bar{u}\bar{v})_\alpha &= \max \{ \underline{u}_\alpha \underline{v}_\alpha, \underline{u}_\alpha \bar{v}_\alpha, \bar{u}_\alpha \underline{v}_\alpha, \bar{u}_\alpha \bar{v}_\alpha \} \end{aligned}$$

- Multiplication par un scalaire :

$$ku = \begin{cases} (k\underline{u}, k\overline{u}) & , k \geq 0 \\ (k\overline{u}, k\underline{u}) & , k \leq 0 \end{cases}$$

## 1.3. Dérivation floue

### 1.3.1. Dérivée de Hukuhara

**Définition 1..3.** Pour  $u$  et  $v \in E^n$ , la différence entre  $u$  et  $v$  est  $w \in E^n$  si il existe, tel que  $u = v + w$ , et on le note  $w = \underline{u}Hv$ .

Alors la différentiabilité d'une fonction floue est défini par cette différence comme :

**Définition 1..4.** Une fonction  $F : [a, b] \rightarrow E$  est différentiable en  $t_0 \in ]a, b[$  si il existe  $F'(t_0) \in E$  telle que les limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h)\underline{H}F(t_0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0)\underline{H}F(t_0 - h)}{h}$$

existent et sont égaux à  $F'(t_0)$ .

**Remarque 1..1.** Si  $F$  est différentiable en  $t_0 \in ]a, b[$ , donc tous les  $\alpha$  coupes  $F_\alpha(t) = [F(t)]_\alpha$  sont Hukuhara différentiable en  $t_0$  et  $[F'(t_0)]_\alpha = DF_\alpha(t_0)$  où  $DF_\alpha$  est la dérivée de Hukuhara de  $F_\alpha$ .

Pour plus des détailles voir [18, 19, 20, 23].

## 2. Théorie des ensembles flous intuitionnistiques

Dans le monde réel, il ya des valeurs de données vaguement spécifiées dans des nombreuses applications, telles que les informations du capteur. Théorie des ensembles flous a été proposée de gérer une telle imprécision en généralisant la notion d'appartenance un ensemble, c'est un pas vers un rapprochement entre la précision des mathématiques classiques et la subtile imprécision du monde réel. Un ensemble flou intuitionniste (IFS), est une extension d'un ensemble flou (FS).

La question qui se pose maintenant est "Y'a t-il des exemples adéquats cette nouvelle définition?" La réponse est "oui". Voici un exemple [2]

-Soit  $X$  l'ensemble de tous les pays avec des gouvernements électifs,

-Supposons que nous savons pour tous les pays  $x \in X$  le pourcentage de l'électorat qui a voté pour le gouvernement correspondant notons le par  $M(x)$  et soit (degré d'appartenance, validité, etc).

-Soit  $\nu(x) = 1 - \mu(x)$ . Ce nombre correspond la partie de l'électorat qui n'a pas voté pour le gouvernement.

Par la théorie floue nous ne pouvons pas considérer cette valeur en plus de détails. Cependant, si on définit  $\nu(x)$  (degré de non appartenance, non validité, etc) comme le nombre des voix accordées aux parties ou personnes extérieures du gouvernement, alors nous pouvons montrer la partie de l'électorat qui n'a pas voté du tout ou qui a donné des mauvais votes et le nombre correspondant sera  $\pi(x) = 1 - \mu(x) - \nu(x)$  (degré d'incertitude, d'indétermination, etc). Alors on peut construire l'ensemble  $\{(x, \mu(x), \nu(x)) | x \in X\}$  et évidemment  $0 \leq \mu(x) + \nu(x) \leq 1$  pour tout  $x \in X$ .

## 2.1. Ensemble flou intuitionistique

Un ensemble flou intuitionistique  $A$  de  $X$  est un ensemble ordonné par le triple

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x), x \in X)\}$$

où  $\mu_A, \nu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$  sont des fonctions telles que

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$$

Pour chaque  $x$  les valeurs  $\mu_A(x)$  et  $\nu_A(x)$  représentent respectivement le degré d'appartenance et le degré de non appartenance de l'élément  $x \in X$  à  $A \subset X$ . Pour chaque élément  $x \in X$   $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$  est appelé le degré d'indétermination ou bien l'indice intuitionistique de l'élément  $x \in X$  et  $\pi_A(x) \in [0, 1], \forall x \in X$ .

Il est clair que chaque ensemble flou est un cas particulier d'un ensemble flou intuitionistique.

Si  $A$  est un ensemble flou alors  $\pi_A(x) = 0, \forall x \in X$ . et donc l'ensemble a la forme

$$\{(x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)) | x \in X\}$$

On note par

$$IF_1 = \{\langle u, v \rangle \rightarrow [0, 1]^2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq u(x) + v(x) \leq 1\}$$

l'espace de tout les ensembles flous intuitionistiques.

### 2.1.1. Caractéristiques d'un ensemble flou intuitionistique

Un sous ensemble flou intuitionistique est complètement définie par la donnée de sa fonction d'appartenance et de non appartenance. A partir des telles fonctions, certains nombres de caractéristiques de sous ensemble flou intuitionistique peuvent être étudiés :

**Noyau :**

Le noyau d'une partie floue intuitionistique  $A$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent totalement à  $A$  c'est-à-dire dont le degré d'appartenance à  $A$  vaut 1 et le degré de non appartenance à  $A$  vaut 0 :

$$N(A) = \{x \in X | \mu_A(x) = 1, \nu_A(x) = 0\}.$$

**Support :**

Le support d'une partie floue intuitionistique  $A$  est l'ensemble des éléments dont le degré d'appartenance à  $A$  est différent de 0 et la fonction de non appartenance supérieure ou égale à 0.

$$S(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0, \nu_A(x) < 1\}.$$

**Hauteur :**

La valeur maximale atteinte par  $\mu_A(x)$  est appelée la hauteur de  $A$  est notée par

$$H(A) = \sup\{\mu_A(x) | x \in X\}.$$

Si  $H(\mu_A(x) = 1)$  et  $H(\nu_A(x) = 0)$  alors  $A$  est un ensemble flou intuitionistique normal.

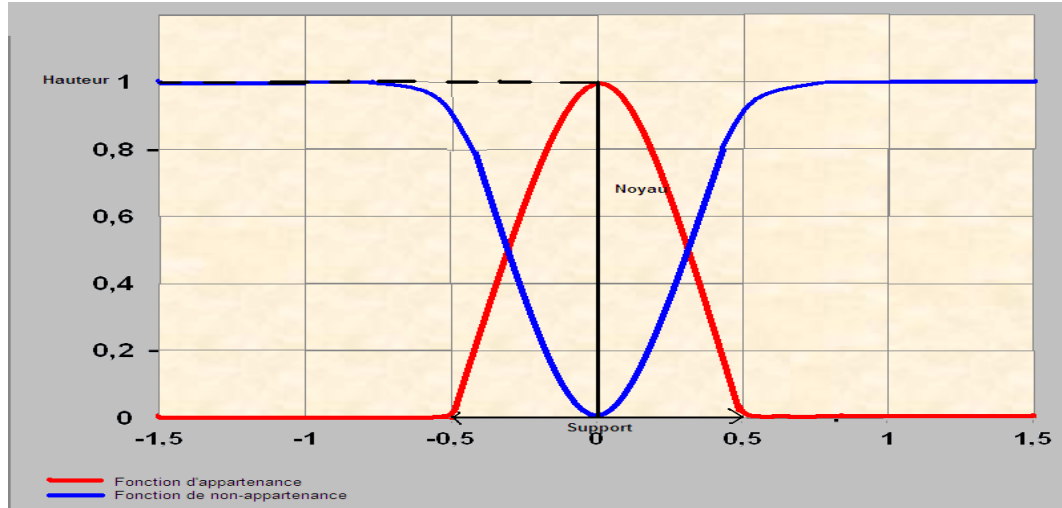


FIGURE 1.6 – Caractéristiques d'un ensemble flou intuitionniste

### 2.1.2. Principe d'extension

Le principe d'extension des ensembles flous intuitionnistes est une généralisation naturelle du principe d'extension des ensembles flous. Selon la définition d'un ensemble flou intuitionniste donnée par K.ATANASSOV, tout élément  $x$  d'un ensemble donné  $A$  est attribué aux nombres  $\mu, \nu$  et  $\pi$ , appelé "degré d'appartenance", "degré de non appartenance", et "le degré d'incertitude" d'un élément  $x$  à  $A$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles, et  $f$  une fonction de  $X \rightarrow Y$ . Et soient  $A$  un ensemble flou intuitionniste sur  $X$ , et  $B$  un autre ensemble flou intuitionniste sur  $Y$ .

#### Définition 2..1.

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{f(x)=y} \mu_A(x) & \text{si } y \in f(X) \\ 0 & \text{si } y \notin f(X) \end{cases}$$

$$\nu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \inf_{f(x)=y} \nu_A(x) & \text{si } y \in f(X) \\ 1 & \text{si } y \notin f(X) \end{cases}$$

$$\pi_{f(A)}(y) = 1 - \mu_{f(A)}(y) - \nu_{f(A)}(y).$$

**Définition 2..2.** Soient  $\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle \in IF_1$ , on définit l'addition par :

$$(\langle u, v \rangle + \langle u', v' \rangle)(z) = \left( \sup_{z=x+y} \min(u(x), u'(y)); \inf_{z=x+y} \max(v(x), v'(y)) \right)$$

### 2.1.3. Opérations sur les ensembles flous intuitionnistes

Soient  $A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) | x \in X\}$  et  $B = \{(x, \mu_B(x), \nu_B(x)) | x \in X\}$  deux ensembles flous intuitionnistes de  $X$ , alors :

$$1 \ A \subset B \text{ ssi } (\forall x \in X) (\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ et } \nu_A(x) \geq \nu_B(x)).$$

$$2 \quad A = B \text{ ssi } (\forall x \in X) (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$

$$3 \quad \bar{A} = \{(x, \nu_A(x), \mu_A(x)) | x \in X\}.$$

$$4 \quad A \cap B = \{(x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(\nu_A(x), \nu_B(x))) | x \in X\}.$$

$$5 \quad A \cup B = \{(x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(\nu_A(x), \nu_B(x))) | x \in X\}.$$

$$6 \quad A + B = \{(x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \nu_A(x) \cdot \nu_B(x)) | x \in X\}.$$

$$7 \quad A \cdot B = \{(x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \nu_A(x) + \nu_B(x) - \nu_A(x) \cdot \nu_B(x)) | x \in X\}.$$

## 2.2. Nombre flou intuitionistique

**Définition 2..3.** On définit l'espace des nombres flous intuitionistiques par :

$$IF_1 = \{\langle u, v \rangle : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq u(x) + v(x) \leq 1\}$$

un nombre flou intuitionistique  $\langle u, v \rangle$  est :

1.  $\langle u, v \rangle$  est normale i.e il existe un  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $u(x_0) = 1, v(x_1) = 1$ .
2.  $u$  convexe floue and  $v$  concave floue.
3.  $u$  est semicontinue supérieurement et  $v$  semicontinue inférieurement
4.  $\text{supp}\langle u, v \rangle = \text{cl}(\{x \in \mathbb{R} : v(x) < 1\})$  est borné.

### 2.2.1. Représentation d'un nombre flou intuitionistique

#### Représentation triangulaire :

Un nombre flou intuitionistique triangulaire  $A$  est un ensemble flou intuitionistique dans  $\mathbb{R}$  avec la fonction d'appartenance ( $u(x)$ ) et la fonction de non-appartenance ( $v(x)$ ) suivantes :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a'_1} & \text{si } a'_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{x-a_2}{a'_3-a_2} & \text{si } a_2 \leq x \leq a'_3 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $a'_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a'_3$  et  $u(x), v(x) \leq 0.5$  pour  $u(x) = v(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

Ce nombre flou intuitionistique triangulaire est noté par  $A_{TIFN} = (a_1, a_2, a_3; a'_1, a_2, a'_3)$ .

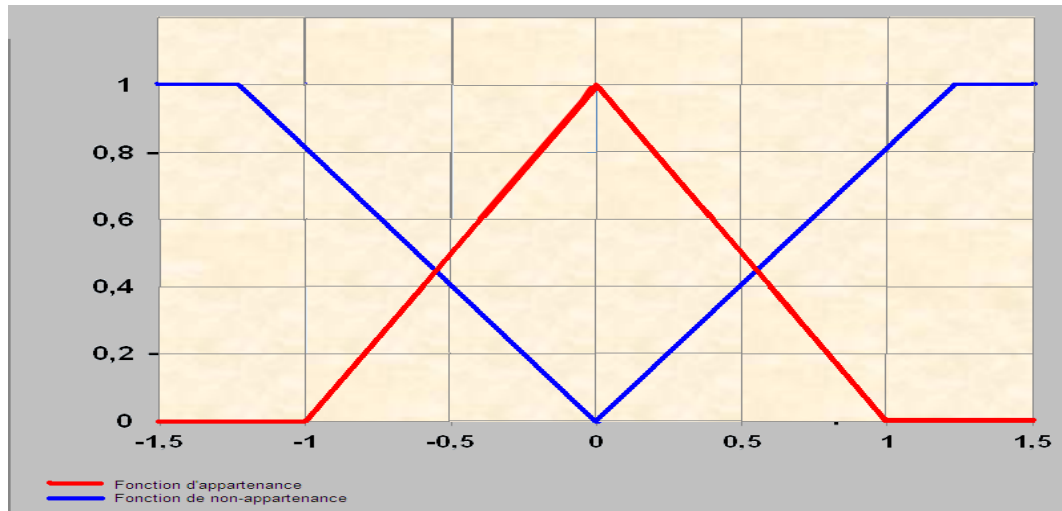


FIGURE 1.7 – Nombre flou intuitionistique triangulaire

### Représentation trapézoïdale :

Un nombre flou intuitionistique trapézoïdale  $A$  est un ensemble flou intuitionistique dans  $\mathbb{R}$  avec la fonction d'appartenance ( $u(x)$ ) et la fonction de non-appartenance ( $v(x)$ ) suivantes :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & \text{si } a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a'_1} & \text{si } a'_1 \leq x \leq a_2 \\ 0 & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{x-a_3}{a'_4-a_3} & \text{si } a_3 \leq x \leq a'_4 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $a'_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a'_4$  et  $u(x), v(x) \leq 0.5$  pour  $u(x) = v(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

Ce nombre flou intuitionistique trapézoïdale est noté par  $A_{TRIFN} = (a_1, a_2, a_3, a_4; a'_1, a_2, a_3, a'_4)$ .

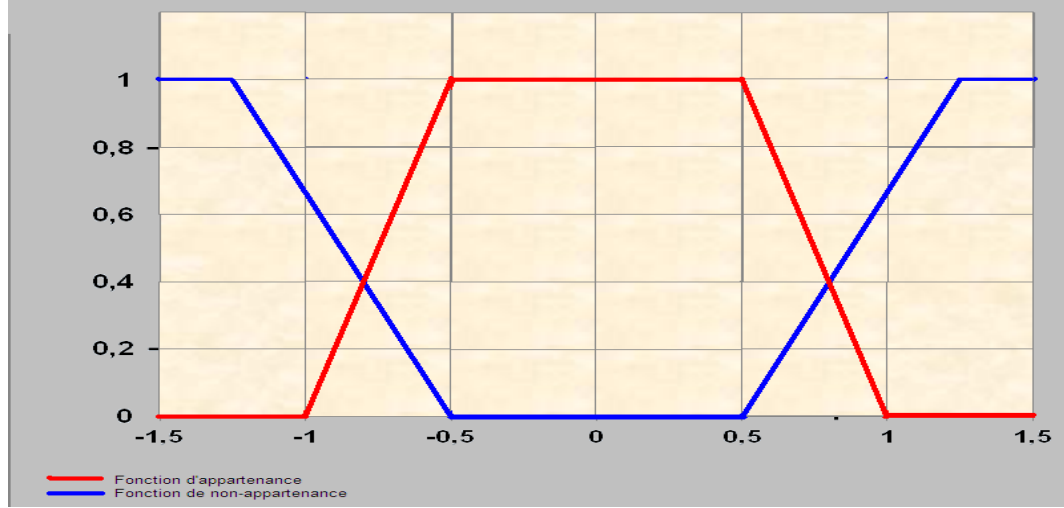


FIGURE 1.8 – Nombre flou intuitionistique trapézoïdale

### 2.2.2. $\alpha$ -coupe d'un nombre flou intuitionistique

Pour  $\alpha \in [0, 1]$  et  $\langle u, v \rangle \in IF_1$ , on définit les coupes supérieurs et inférieurs de  $\langle u, v \rangle$  comme suit :

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle]^\alpha &= \{x \in \mathbb{R} | v(x) \leq 1 - \alpha\} \\ [\langle u, v \rangle]_\alpha &= \{x \in \mathbb{R} | u(x) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

**Remarque 2.1.** On peut considérer  $[\langle u, v \rangle]_\alpha$  comme  $[u]^\alpha$  et  $[\langle u, v \rangle]^\alpha$  comme  $[1 - v]^\alpha$  dans le cas flou.

On note

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle]_l^+(\alpha) &= \inf\{x \in \mathbb{R} | u(x) \geq \alpha\} \\ [\langle u, v \rangle]_r^+(\alpha) &= \sup\{x \in \mathbb{R} | u(x) \geq \alpha\} \\ [\langle u, v \rangle]_l^-(\alpha) &= \inf\{x \in \mathbb{R} | v(x) \leq 1 - \alpha\} \\ [\langle u, v \rangle]_r^-(\alpha) &= \sup\{x \in \mathbb{R} | v(x) \leq 1 - \alpha\} \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.**

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle]_\alpha &= [[\langle u, v \rangle]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle]_r^+(\alpha)] \\ [\langle u, v \rangle]^\alpha &= [[\langle u, v \rangle]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle]_r^-(\alpha)] \end{aligned}$$

**$\alpha$ -coupe d'un nombre flou intuitionistique triangulaire :**

$$[\langle u, v \rangle]_\alpha = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_3 - \alpha(a_3 - a_2)] \quad (1.1)$$

$$[\langle u, v \rangle]^\alpha = [a'_1 + \alpha(a'_2 - a'_1), a'_3 - \alpha(a'_3 - a'_2)] \quad (1.2)$$

Selon le principe d'extension de Zadeh, on a l'addition et la multiplication par un scalaire dans l'espace des nombres flous intuitionistiques  $IF_1$  comme suit :

$$[\langle u, v \rangle + \langle z, w \rangle]^\alpha = [\langle u, v \rangle]^\alpha + [\langle z, w \rangle]^\alpha$$

$$[\lambda \langle u, v \rangle]^\alpha = \lambda [\langle u, v \rangle]^\alpha$$

$$[\langle u, v \rangle + \langle z, w \rangle]_\alpha = [\langle u, v \rangle]_\alpha + [\langle z, w \rangle]_\alpha$$

$$[\lambda \langle u, v \rangle]_\alpha = \lambda [\langle u, v \rangle]_\alpha$$

Où  $\langle u, v \rangle, \langle z, w \rangle \in IF_1$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

**Définition 2..4.** On définit le zéro flou intuitionistique comme suit :

$$0_{(1,0)}(x) = \begin{cases} (1, 0) & , x = 0 \\ (0, 1) & , x \neq 0 \end{cases}$$

**Proposition 2..1.** Pour tous  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  et  $\langle u, v \rangle \in IF_1$

- (i)  $[\langle u, v \rangle]_\alpha \subset [\langle u, v \rangle]^\alpha$
- (ii)  $[\langle u, v \rangle]_\alpha$  et  $[\langle u, v \rangle]^\alpha$  sont des ensembles convexes compacts non vides en  $\mathbb{R}^n$
- (iii) Si  $\alpha \leq \beta$  alors,  $[\langle u, v \rangle]_\beta \subset [\langle u, v \rangle]_\alpha$  et  $[\langle u, v \rangle]^\beta \subset [\langle u, v \rangle]^\alpha$
- (iv) Si  $\alpha_n \nearrow \alpha$  Ainsi,  $[\langle u, v \rangle]_\alpha = \bigcap_n [\langle u, v \rangle]_{\alpha_n}$  et  $[\langle u, v \rangle]^\alpha = \bigcap_n [\langle u, v \rangle]_{\alpha_n}^\alpha$

Soit  $M$  un ensemble quelconque et  $\alpha \in [0, 1]$  nous dénotons par :

$$M_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\} \quad \text{et} \quad M^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \leq 1 - \alpha\}$$

**Lemme 2..1.** Soient  $\{M_\alpha, \alpha \in [0, 1]\}$  et  $\{M^\alpha, \alpha \in [0, 1]\}$  deux familles de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  satisfont les conditions (i)–(iv) de la proposition 2..1, si  $u$  et  $v$  sont définis par

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin M_0 \\ \sup \{\alpha \in [0, 1] : x \in M_\alpha\} & \text{si } x \in M_0 \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin M^0 \\ 1 - \sup \{\alpha \in [0, 1] : x \in M^\alpha\} & \text{si } x \in M^0 \end{cases}$$

Alors  $\langle u, v \rangle \in IF_1$

**Lemme 2..2.** Soit  $I$  un sous-ensemble dense de  $[0, 1]$ , Si  $[\langle u, v \rangle]_\alpha = [\langle u', v' \rangle]_\alpha$  et  $[\langle u, v \rangle]^\alpha = [\langle u', v' \rangle]^\alpha$ , pour tout  $\alpha \in I$  alors  $\langle u, v \rangle = \langle u', v' \rangle$

### 2.3. Espace métrique flou intuitionistique ( $IF_1, d_p$ )

**Théorème 2..1.** ([31])

pour  $1 \leq p \leq \infty$

$$d_p(\langle u, v \rangle, \langle z, w \rangle) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^1 |[\langle u, v \rangle]_r^+(\alpha) - [\langle z, w \rangle]_r^+(\alpha)|^p d\alpha \right. \\ + \int_0^1 |[\langle u, v \rangle]_l^+(\alpha) - [\langle z, w \rangle]_l^+(\alpha)|^p d\alpha \\ + \int_0^1 |[\langle u, v \rangle]_r^-(\alpha) - [\langle z, w \rangle]_r^-(\alpha)|^p d\alpha \\ \left. + \int_0^1 |[\langle u, v \rangle]_l^-(\alpha) - [\langle z, w \rangle]_l^-(\alpha)|^p d\alpha \right\}^{\frac{1}{p}}$$



et pour  $p = \infty$

$$\begin{aligned}
 d_\infty(\langle u, v \rangle, \langle z, w \rangle) &= \frac{1}{4} \left[ \sup_{0 < \alpha \leq 1} |[\langle u, v \rangle]_r^+(\alpha) - [\langle z, w \rangle]_r^+(\alpha)| \right. \\
 &\quad + \sup_{0 < \alpha \leq 1} |[\langle u, v \rangle]_l^+(\alpha) - [\langle z, w \rangle]_l^+(\alpha)| \\
 &\quad + \sup_{0 < \alpha \leq 1} |[\langle u, v \rangle]_r^-(\alpha) - [\langle z, w \rangle]_r^-(\alpha)| \\
 &\quad \left. + \sup_{0 < \alpha \leq 1} |[\langle u, v \rangle]_l^-(\alpha) - [\langle z, w \rangle]_l^-(\alpha)| \right]
 \end{aligned}$$

[31] est une métrique sur  $IF_1$ .

**Théorème 2..2.** [31]  $(IF_1, d_p)$  est un espace métrique complet.

## 2.4. Continuité-Mesurabilité-Intégrabilité-Différentiabilité dans l'espace métrique flou intuitionistique

### 2.4.1. Continuité

**Définition 2..5.** ([32]) Soit  $F : [a, b] \rightarrow IF_1$  est une fonction à valeur floue intuitionistique et  $t_0 \in [a, b]$ .  $F$  est dite continue en  $t_0$  ssi :

$$\forall(\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall t \in [a, b] \text{ tel que } |t - t_0| < \delta) \Rightarrow d_p(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$$

**Définition 2..6.** ([32]) Soit  $F : IF_1 \rightarrow IF_1$  est une application floue intuitionistique et  $\langle u, v \rangle \in IF_1$ .  $F$  est dite continue en  $\langle u, v \rangle$  ssi :

$$\forall(\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall \langle z, w \rangle \in IF_1) \quad d_p(\langle u, v \rangle, \langle z, w \rangle) < \delta \Rightarrow d_p(F(\langle u, v \rangle), F(\langle z, w \rangle)) < \varepsilon$$

**Définition 2..7.** ([32]) On dit que  $F$  est une fonction floue intuitionistique continue sur  $[a, b]$  ssi elle est continue en tout point  $[a, b]$ .

**Définition 2..8.** ([32]) Une application  $F : I_a \times I_b \rightarrow IF_1$  est dite continue au point  $(x_0, y_0) \in I_a \times I_b$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  arbitraire, il existe un  $\delta(\varepsilon)$  tel que

$$d_\infty^n \left( F(x, y), F(x_0, y_0) \right) < \varepsilon$$

lorsque  $\max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \delta(\varepsilon)$  pour tous  $(x, y) \in I_a \times I_b$ .

**Définition 2..9.** ([32]) Une application  $F : I_a \times I_b \times IF_1 \rightarrow IF_1$  est dite continue au point  $(x_0, y_0, \langle u, v \rangle_0) \in I_a \times I_b \times IF_1$  si elle est pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta(\varepsilon)$  tel que :

$$d_\infty^n \left( F(x, y, \langle u, v \rangle), F(x_0, y_0, \langle u, v \rangle_0) \right) < \varepsilon$$

lorsque  $\max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \delta(\varepsilon)$  et  $d_\infty^n(\langle u, v \rangle, \langle u, v \rangle_0) < \delta(\varepsilon)$  pour tout  $(x, y) \in I_a \times I_b$ ,  $\langle u, v \rangle \in IF_1$ .

### 2.4.2. Mesurabilité et Intégrabilité

**Définition 2..10.** [9] Nous disons qu'une application  $F : I_a \times I_b \rightarrow IF_1$  est fortement mesurable si pour tous  $\alpha \in [0, 1]$  les applications  $F_\alpha : I_a \times I_b \rightarrow P_k(\mathbb{R}^n)$  définie par  $F_\alpha(x, y) = [F(x, y)]_\alpha$  et  $F^\alpha : I_a \times I_b \rightarrow P_k(\mathbb{R}^n)$  définie par  $F^\alpha(x, y) = [F(x, y)]^\alpha$  sont (Lebesgue) mesurables, lorsque  $P_k(\mathbb{R}^n)$  est muni de la topologie générée par la métrique de Hausdorff  $d_H$ .

où  $d_H$  est la métrique de Hausdorff définie dans  $P_k(\mathbb{R}^n)$  par  $d_H([a, b][c, d]) = \max\{\|a - c\|; \|b - d\|\}$ .

**Définition 2..11.** [9]  $F : I_a \times I_b \rightarrow IF_1$  est dite intégrablement bornée s'il existe une fonction intégrable  $g : I_a \times I_b \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $\|(x, y)\| \leq g(t, s)$  vérifiée pour tout  $(x, y) \in \text{supp}(F(t, s)), (t, s) \in I_a \times I_b$ .

**Théorème 2..3.** [9] Si  $F : I_a \times I_b \rightarrow IF_1$  est intégrablement bornée et fortement mesurable, alors  $F$  est intégrable.

**Définition 2..12.** [9] Suppose  $F : I_a \times I_b \rightarrow IF_1$  est intégrablement bornée et fortement mesurable pour chaque  $\alpha \in (0, 1]$  on écrit :

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^a \int_0^b F(x, y) dy dx \right]_\alpha &= \int_0^a \int_0^b [F(x, y)]_\alpha dy dx \\ &= \int_0^a \int_0^b f(x, y) dy dx | f : I_a \times I_b \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est une sélection mesurable} \\ & \hspace{15em} \text{pour } F_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^a \int_0^b F(x, y) dy dx \right]^\alpha &= \int_0^a \int_0^b [F(x, y)]^\alpha dy dx \\ &= \int_0^a \int_0^b f(x, y) dy dx | f : I_a \times I_b \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est une sélection mesurable} \\ & \hspace{15em} \text{pour } F^\alpha \end{aligned}$$

Si il existe un  $\langle u, v \rangle \in IF_1$  tel que  $[\langle u, v \rangle]^\alpha = \left[ \int_0^a \int_0^b F(x, y) dy dx \right]^\alpha$  et  $[\langle u, v \rangle]_\alpha = \left[ \int_0^a \int_0^b F(x, y) dy dx \right]_\alpha, \forall \alpha \in (0, 1]$ . Alors  $F$  est dite intégrable sur  $\mathbb{R}$ , on écrit  $\langle u, v \rangle = \int_0^a \int_0^b F(x, y) dy dx$ .

### 2.4.3. Différentiabilité

**Définition 2..13.** ([30]) Soient  $\langle u, v \rangle$  et  $\langle u', v' \rangle \in IF_1$ , la différence de Hukuhara entre  $\langle u, v \rangle$  et  $\langle u', v' \rangle$  est le nombre  $\langle z, w \rangle$  (s'il existe)  $\in IF_1$ , tel que  $\langle u, v \rangle - \langle u', v' \rangle = \langle z, w \rangle \iff \langle u, v \rangle = \langle u', v' \rangle + \langle z, w \rangle$

**Définition 2..14.** Soit  $F : [a, b] \rightarrow IF_1$  be différentiable et supposons que la dérivée  $F'$  est intégrable sur  $[a, b]$ , si la différence de Hukuhara  $F(b) - F(a)$  existe dans  $IF_1$ , alors nous avons  $\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a)$ .

**Définition 2..15.** ([30]) Soient  $F : [a, b] \rightarrow IF_1$  est une application à valeur floue intuitionniste et  $P : [a, b] \rightarrow IF_1$  une application dérivable au sens de Hukuhara en tout  $t \in (a, b)$ .

$P$  est dite primitive de  $F$  si sa dérivée au sens de Hukuhara est égale à  $F$  i.e

$$\forall t \in (a, b) \quad P'(t) = F(t).$$

**Théorème 2..4.** [32] Soit  $F : [a, b] \rightarrow IF_1$  est une application différentiable.

On note

$$F^\alpha(t) = [F(t)]^\alpha = [\lambda_\alpha(t), \lambda^\alpha(t)]$$

$$F_\alpha(t) = [F(t)]_\alpha = [\mu_\alpha(t), \mu^\alpha(t)].$$

Alors  $\lambda^\alpha(t), \lambda_\alpha(t), \mu_\alpha(t)$  et  $\mu^\alpha(t)$  sont différentiable et

$$[F(t)']^\alpha = [\lambda'_\alpha(t), \lambda'^\alpha(t)]$$

$$[F(t)']_\alpha = [\mu'_\alpha(t), \mu'^\alpha(t)]$$

**Proposition 2..2.** ([32]) Soient  $F, G : [a, b] \rightarrow IF_1$  deux application dérivables au sens de Hukuhara. Si  $F$  et  $G$  sont des primitives de la même application et  $F(t) - G(t)$  existe pour tout  $t \in (a, b)$  ; alors  $F(t) = G(t) + C$ .

**Théorème 2..5.** ([32]) Si  $F : [a, b] \rightarrow IF_1$  est différentiable alors elle est continue par rapport à la métrique  $d_\infty$

**Définition 2..16.** ([30]) une application  $F : [a, b] \rightarrow IF_1$  est dite dérivable au sens de Hukuhara en  $t_0 \in [a, b]$  s'il existe  $F'(t_0) \in IF_1$  tel que les deux limites :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t}$$

et

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0) - F(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}$$

existent et qu'ils sont égaux à  $F'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))$ , appelée la dérivée au sens de Hukuhara de  $F$  en  $t_0$ .

**Définition 2..17.** [9] Soit  $F : I_a \times I_b \rightarrow IF_1$ . La dérivée partielle floue intuitionniste de  $F$  par rapport à  $x$  au point  $(x_0, y_0) \in I_a \times I_b$  est la quantité floue intuitionniste  $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \in IF_1$  s'il existe, telle que pour tous  $h > 0$  suffisamment petits, la  $H$ -différence  $F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)$  et  $F(x_0, y_0) - F(x_0 - h, y_0)$  existent dans  $IF_1$  et les limites

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h}$$

Et

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0, y_0) - F(x_0 - h, y_0)}{h}$$

La dérivée partielle floue intuitionniste de  $F$  par rapport à  $y$  au point  $(x_0, y_0) \in I_a \times I_b$  et l'ordre supérieur de la dérivée partielle floue intuitionniste de  $F$  sont définis de manière similaire.

**Théorème 2..6.** Il existe un espace normé  $X$  et une fonction  $j : IF_n \rightarrow X$  avec les propriétés :

1.  $j$  est une isométrie i.e.  $\|j(\langle u, v \rangle) - j(\langle u', v' \rangle)\| = d_\infty^n(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle)$
2.  $j(\langle u, v \rangle + \langle u', v' \rangle) = j(\langle u, v \rangle) + j(\langle u', v' \rangle)$
3.  $j(\lambda \langle u, v \rangle) = \lambda j(\langle u, v \rangle) \quad \lambda \geq 0$

# Chapitre 2

## Équation différentielle floue intuitionniste

En 1983 Krassimir Atanassov a initié le développement de la théorie des ensembles flous intuitionnistes qui est un outil qui rend possible la description des notions floues et de les manipuler. Lorsque nous modélisons un phénomène réel par une équation différentielle à valeur initiale  $\langle u, v \rangle'(t) = f(t, \langle u, v \rangle(t))$ ,  $\langle u, v \rangle(t_0) = \langle u_{t_0}, v_{t_0} \rangle$ , nous ne pouvons pas nous assurer que le modèle est parfait. Par exemple, c'est le cas lorsque la valeur initiale n'est pas connue exactement, ou le second membre  $f(t, \langle u, v \rangle(t))$  contient des paramètres incertains, et donc il y a nécessairement un taux d'erreur d'estimation de la solution de l'équation différentielle. Les équations différentielles floues (EDFs) apparaissent comme manière naturelle pour modéliser la propagation de l'incertitude épistémique dans un environnement dynamique. Il y a plusieurs interprétations d'une équation différentielle floue. La première historiquement a été basée sur la dérivée au sens de Hukuhara. Il s'agit d'une équation différentielle à coefficients ou à conditions initiales floues intuitionnistes qui sont utilisées comme des outils modélisant la dynamique de certains systèmes en tenant compte de l'incertitude et de l'imprécision.

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolutions des équations différentielles floues intuitionnistes. Nous allons donner une position du problème à valeur initial floue intuitionniste, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution de ce problème, c'est l'objet du travail [7].

### 1. Problème à valeur initiale floue intuitionniste

#### 1.1. Problème de Cauchy

Dans cette partie, on considère l'équation différentielle floue intuitionniste de premier ordre  $\langle u, v \rangle' = f(t, \langle u, v \rangle)$  où  $\langle u, v \rangle$  est une fonction floue intuitionniste de  $t$ , et  $f(t, \langle u, v \rangle)$  est une fonction floue intuitionniste de nombre classique  $t$  et de variable  $\langle u, v \rangle$ , et  $\langle u, v \rangle'$  est la dérivée de Hukuhara de  $\langle u, v \rangle$ , si une valeur initiale est donnée  $\langle u, v \rangle(t_0) = \langle u_{t_0}, v_{t_0} \rangle \in IF_1$ , un problème floue intuitionniste de Cauchy de premier ordre sera obtenu comme suit :

$$\begin{cases} \langle u, v \rangle'(t) &= f(t, \langle u, v \rangle(t)), \quad t \in I \\ \langle u, v \rangle(t_0) &= \langle u_{t_0}, v_{t_0} \rangle \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $\langle u, v \rangle \in IF_1$  est inconnu,  $I = [t_0, T]$  et  $f : I \times IF_1 \rightarrow IF_1$ .  $\langle u, v \rangle(t_0)$  est un nombre flou intuitionniste.

On note les ensembles  $\alpha$ -coupes de  $\langle u, v \rangle(t)$  pour  $t \in [t_0, T]$  par :

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t)]_\alpha &= \left[ [\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha) \right] \\ [\langle u, v \rangle(t)]^\alpha &= \left[ \langle u, v \rangle(t)_l^-(\alpha), \langle u, v \rangle(t)_r^-(\alpha) \right] \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_0)]_\alpha &= \left[ [\langle u, v \rangle(t_0)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_0)]_r^+(\alpha) \right] \\ [\langle u, v \rangle(t_0)]^\alpha &= \left[ \langle u, v \rangle(t_0)_l^-(\alpha), \langle u, v \rangle(t_0)_r^-(\alpha) \right] \\ [f(t, \langle u, v \rangle(t))]_\alpha &= \left[ f_1^+(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha), f_2^+(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) \right] \\ [f(t, \langle u, v \rangle(t))]^\alpha &= \left[ f_3^-(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha), f_4^-(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) \right] \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} f_1^+(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= \min \left\{ f(t, z) \mid z \in [[\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha)] \right\} \\ f_2^+(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= \max \left\{ f(t, z) \mid z \in [[\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha)] \right\} \\ f_3^-(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= \min \left\{ f(t, z) \mid z \in [[\langle u, v \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^-(\alpha)] \right\} \\ f_4^-(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= \max \left\{ f(t, z) \mid z \in [[\langle u, v \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^-(\alpha)] \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

On note :

$$\begin{aligned} f_1^+(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= G(t, [\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha)) \\ f_2^+(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= H(t, [\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha)) \\ f_3^-(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= L(t, [\langle u, v \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^-(\alpha)) \\ f_4^-(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= K(t, [\langle u, v \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^-(\alpha)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Et on définit les dérivées  $f^{(i)}(t, \langle u, v \rangle)$  pour  $i = 1, \dots, p$  de  $f(t, \langle u, v \rangle)$  comme suit :

$$\begin{aligned} [f^{(i)}(t, x(t))]_\alpha &= \left[ f_1^{+(i)}(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha), f_2^{+(i)}(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) \right] \\ [f^{(i)}(t, x(t))]^\alpha &= \left[ f_3^{-(i)}(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha), f_4^{-(i)}(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) \right] \end{aligned}$$

à condition que cette équation détermine le nombre floue intuitionistique  $f^{(i)}(t, x) \in IF_1$ , où

$$\begin{aligned} f_1^{+(i)}(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= \min \left\{ f^{(i)}(t, z) \mid z \in [[\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha)] \right\} \\ f_2^{+(i)}(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= \max \left\{ f^{(i)}(t, z) \mid z \in [[\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha)] \right\} \\ f_3^{-(i)}(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= \min \left\{ f^{(i)}(t, z) \mid z \in [[\langle u, v \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^-(\alpha)] \right\} \\ f_4^{-(i)}(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= \max \left\{ f^{(i)}(t, z) \mid z \in [[\langle u, v \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^-(\alpha)] \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 1.2. La relation entre la solution et la solution approchée d'une équation différentielle floue intuitionistique

supposons que  $f : T \times W \longrightarrow IF_n$  est continue (il est noté par  $f \in C[T \times W, IF_n]$ ). Considérons le problème à valeur initiale

$$\langle u, v \rangle'(t) = f(t, (\langle u, v \rangle(t))), \quad \langle u, v \rangle(t_0) = \langle u, v \rangle_0 \quad (2.5)$$

où  $W \subset IF_n$ ,  $\langle u, v \rangle(t_0) \in W$ .

La norme  $\| \cdot \|$  d'un nombre flou intuitionistique  $\langle u, v \rangle \in IF_n$  est défini par

$$\| \langle u, v \rangle \| = d_{\infty}^n(0_{(1,0)}, \langle u, v \rangle) = \| [\langle u, v \rangle]_0 \| = \frac{1}{2} \sup_{a \in [\langle u, v \rangle]_0} |a| + \frac{1}{2} \inf_{b \in [\langle u, v \rangle]_0^c} |b|$$

**Définition 1..1.** *Un ensemble flou intuitionistique  $\langle u, v \rangle$  est un ensemble flou intuitionistique convexe si et seulement si  $u$  est un ensemble convexe flou et  $v$  est un ensemble concave flou.*

La question qui se pose est :  $IF_n$  avec l'addition et la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel. La réponse est négative. Théorème de plongement de Radstrom sera étendu à  $IF_n$ . Pour ce faire, une structure linéaire est définie dans  $IF_n$  par

1.

$$\begin{aligned} (\langle u, v \rangle + \langle u', v' \rangle)(x) = & \left( \sup \{ \alpha \in [0, 1], x \in [\langle u, v \rangle]_{\alpha} + [\langle u', v' \rangle]_{\alpha} \}, \right. \\ & \left. 1 - \sup \{ \alpha \in [0, 1], x \in [\langle u, v \rangle]_{\alpha} + [\langle u', v' \rangle]_{\alpha} \} \right) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{cases} \langle u(x/\lambda), v(x/\lambda) \rangle & \text{if } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{if } \lambda = 0 \quad x \neq 0 \\ \langle \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(y), 1 - \sup_{y \in \mathbb{R}^n} v(y) \rangle & \text{if } \lambda = 0 \quad x = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

**Théorème 1..1.** [7] *Il existe un espace normé  $X$  et la fonction  $j : IF_n \longrightarrow X$  avec les propriétés suivantes :*

1.  *$j$  est une isométrie i.e.  $\| j(\langle u, v \rangle) - j(\langle u', v' \rangle) \| = d_{\infty}^n(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle)$*

2.  *$j(\langle u, v \rangle + \langle u', v' \rangle) = j(\langle u, v \rangle) + j(\langle u', v' \rangle)$*

3.  *$j(\lambda \langle u, v \rangle) = \lambda j(\langle u, v \rangle) \quad \lambda \geq 0$*

**Remarque 1..1.** [7] *Si  $\langle u, v \rangle(t) : T \longrightarrow IF_n$  est différentiable à  $t_0 \in T$ , alors*

$$(j\langle u, v \rangle)(t) = j(\langle u, v \rangle(t)) \quad T \longrightarrow X$$

*est différentiable au sens de Fréchet à  $t_0$  et  $(j\langle u, v \rangle)'(t_0) = j(\langle u, v \rangle'(t_0))$ , où  $j$  est théorème de plongement 1..1.*

Dans ce qui suit, nous listons plusieurs théorèmes de comparaison sur les équations différentielles ordinaires classiques comme suit ([24])

**Proposition 1..1.** [24] *Soit  $G \subset \mathbb{R}^2$  être un ensemble ouvert et  $g \in C[G, \mathbb{R}]$ ,  $(t_0, x_0) \in G$ . Supposons que  $r(t)$  est la solution maximale du problème à valeur initiale*

$$x' = g(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.7)$$

*et son plus grand intervalle d'existence d'une bonne solution est  $[t_0, t_0 + a)$ . Si  $[t_0, t_1] \subset [t_0, t_0 + a)$ , alors il existe un  $\varepsilon_0 > 0$  tel que la solution maximale  $r(t, \varepsilon)$  du problème à valeur initiale :*

$$x' = g(t, x) + \varepsilon, \quad x(t_0) = x_0 + \varepsilon$$

*existe sur  $[t_0, t_1]$  quand  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , et  $r(t, \varepsilon)$  converge uniformément vers  $r(t)$  sur  $[t_0, t_1]$  quand  $\varepsilon \longrightarrow 0^+$*

**Proposition 1..2.** [24] Soit  $G \subset \mathbb{R}^2$  être un ensemble ouvert,  $g \in C[G, \mathbb{R}]$ ,  $(t, x_0) \in G$ . Supposons que la solution maximale du problème à valeur initiale (4.6) est  $r(t)$  et son plus grand intervalle d'existence d'une bonne solution est  $[t_0, t_0+a)$ . Si  $m(t) \in C[[t_0, t_0+a), \mathbb{R}]$ , satisfait  $(t, m(t)) \in G$  pour tout  $t \in [t_0, t_0+a)$ ,  $m(t_0) \leq x_0$ , et

$$Dm(t) \leq g(t, m(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_0+a) \setminus \Gamma$$

où  $D$  est l'une des quatre dérivées de Dini (voir [24]),  $G$  au plus est un ensemble dénombrable sur  $t$ . Alors nous devons avoir

$$m(t) \leq r(t), \quad \forall t \in [t_0, t_0+a)$$

Dans la suite, nous donnons la relation entre une solution et ses solutions approximatives.

Nous notons  $R_0 = [t_0, t_0+p] \times B(\langle u, v \rangle_0, q)$  où  $p > 0$ ,  $q > 0$ ,  $\langle u, v \rangle_0 \in IF_n$ ,  $B(\langle u, v \rangle_0, q) = \{\langle u, v \rangle \in IF_n \setminus d_\infty^n(\langle u, v \rangle, \langle u, v \rangle_0) \leq q\}$

**Théorème 1..2.** Soit  $f \in C[R_0, IF_n]$ ,  $r \in (0, p)$ ,  $\langle u, v \rangle_n \in C^1[[t_0, t_0+r], B(\langle u, v \rangle_0, q)]$  tel que

$$j\langle u, v \rangle'_n(t) = jf(t, \langle u, v \rangle_n(t)) + B_n(t), \quad \langle u, v \rangle(t_0) = \langle u, v \rangle_0, \quad \|B_n(t)\| \leq \varepsilon_n \quad (2.8)$$

$\forall t \in [t_0, t_0+r]$ ,  $(n = 0, 1, 2, \dots)$

où  $\varepsilon_n > 0$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $B_n(t) \in C[[t_0, t_0+r], X]$  et  $j$  est le plongements isométriques à partir de  $(IF_n, d_\infty^n)$  dans l'espace de Banach  $X$ . Pour chaque  $t \in [t_0, t_0+r]$  il existe un  $\delta(t) > 0$  tel que  $H$ -différences  $\langle u, v \rangle_n(t+h) - \langle u, v \rangle_n(t)$  et  $\langle u, v \rangle_n(t) - \langle u, v \rangle_n(t-h)$  existent pour tous  $0 \leq h < \delta(t)$  et  $n = 1, 2, \dots$

Si on a

$$d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle(t)) \rightarrow 0 \quad u.c \quad \forall t \in [t_0, t_0+r] (n \rightarrow \infty) \quad (2.9)$$

(u.c. dénote la convergence uniforme), alors  $\langle u, v \rangle \in C^1[[t_0, t_0+r], B(\langle u, v \rangle_0, q)]$

$$\langle u, v \rangle'(t) = f(t, \langle u, v \rangle(t)), \quad \langle u, v \rangle(t_0) = \langle u_0, v_0 \rangle, \quad t \in [t_0, t_0+r]. \quad (2.10)$$

**Preuve 1..1.** D'après (2.9) on a  $\langle u, v \rangle \in C[[t_0, t_0+r], B(x_0, q)]$ . Pour  $t_1 \in [t_0, t_0+r]$  fixé et pour  $t \in [t_0, t_0+r]$ ,  $t > t_1$ , noté par

$$F(t, n) = \frac{j\langle u, v \rangle_n(t) - j\langle u, v \rangle_n(t_1)}{t - t_1} - jf(t_1, \langle u, v \rangle_n(t_1)) - B_n(t_1)$$

on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(t, n) = \frac{j\langle u, v \rangle(t) - j\langle u, v \rangle(t_1)}{t - t_1} - jf(t_1, \langle u, v \rangle(t_1)) \quad (2.11)$$

Puisque  $f \in C^1[R_0, IF_n]$ , alors pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta_1 > 0$  tel que

$$d_\infty^n(f(t, \langle z, w \rangle(t)), f(t_1, \langle u, v \rangle(t_1))) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (2.12)$$

quand  $t_1 < t < t_1 + \delta_1$  et  $d_\infty^n(\langle z, w \rangle(t), \langle u, v \rangle(t_1)) < \delta_1$  avec  $\langle z, w \rangle \in B(\langle u, v \rangle_0, q)$ .

Prenons un entier naturel  $N > 0$  tel que

$$\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{4}, \quad d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle(t)) < \frac{\delta_1}{2} \quad \text{pour tout } n > N, t \in [t_0, t_0+r]. \quad (2.13)$$

et  $\delta > 0$  tel que  $\delta < \delta_1$  et

$$d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle(t), \langle u, v \rangle(t_1) \right) < \frac{\delta_1}{2} \quad \text{quand } t_1 < t < t_1 + \delta. \quad (2.14)$$

Par la définition de  $F(t, n)$  et (2.8), on a

$$j\langle u, v \rangle_n(t) - j\langle u, v \rangle_n(t_1) - (t - t_1)j\langle u, v \rangle'_n(t_1) = (t - t_1)F(t, n) \quad (2.15)$$

Nous choisissons  $\varphi \in X^*$  tel que  $\|\varphi\| = 1$  et

$$\varphi(j\langle u, v \rangle_n(t) - j\langle u, v \rangle_n(t_1) - (t - t_1)j\langle u, v \rangle'_n(t_1)) = \|j\langle u, v \rangle_n(t) - j\langle u, v \rangle_n(t_1) - (t - t_1)j\langle u, v \rangle'_n(t_1)\|$$

Soit  $\psi(t) = \varphi(j\langle u, v \rangle_n(t)) - (t - t_1)\varphi(j\langle u, v \rangle'_n(t_1))$ , par conséquent,

$$\psi'(t) = \varphi(j\langle u, v \rangle'_n(t)) - \varphi(j\langle u, v \rangle'_n(t_1))$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|j\langle u, v \rangle_n(t) - j\langle u, v \rangle_n(t_1) - (t - t_1)j\langle u, v \rangle'_n(t_1)\| &= \psi(t) - \psi(t_1) = \psi'(\bar{t})(t - t_1) \\ &= \varphi(j\langle u, v \rangle'_n(\bar{t}) - j\langle u, v \rangle'_n(t_1))(t - t_1) \\ &\leq \|\varphi\| \cdot \|j\langle u, v \rangle'_n(\bar{t}) - j\langle u, v \rangle'_n(t_1)\| \cdot (t - t_1) \\ &= \|j\langle u, v \rangle'_n(\bar{t}) - j\langle u, v \rangle'_n(t_1)\| \cdot (t - t_1) \end{aligned}$$

où  $t_1 \leq \bar{t} \leq t$ . Compte tenu de (2.15), on a

$$\|F(t, n)\| \leq \|j\langle u, v \rangle'_n(\bar{t}) - j\langle u, v \rangle'_n(t_1)\|, \quad t_1 \leq \bar{t} \leq t \quad (2.16)$$

De (2.13) et (2.14), on sait que

$$d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle(\bar{t}), \langle u, v \rangle(t_1) \right) < \frac{\delta_1}{2}$$

Alors,

$$\begin{aligned} d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_n(\bar{t}), \langle u, v \rangle(t_1) \right) &\leq d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_n(\bar{t}), \langle u, v \rangle(\bar{t}) \right) + d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle(\bar{t}), \langle u, v \rangle(t_1) \right) \\ &< \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1 \end{aligned}$$

Donc d'après (2.12) et (2.16) on obtient,

$$\begin{aligned} \|F(t, n)\| &\leq \|j\langle u, v \rangle'_n(\bar{t}) - j\langle u, v \rangle'_n(t_1)\| \\ &= \|jf(\bar{t}, \langle u, v \rangle_n(\bar{t})) + B_n(\bar{t}) - jf(t_1, \langle u, v \rangle_n(t_1)) - B_n(t_1)\| \\ &\leq \|jf(\bar{t}, \langle u, v \rangle_n(\bar{t})) - jf(t_1, \langle u, v \rangle(t_1))\| \\ &\quad + \|jf(t_1, \langle u, v \rangle(t_1)) - jf(t_1, \langle u, v \rangle_n(t_1))\| + 2\varepsilon_n \\ &= d_\infty^n \left( f(\bar{t}, \langle u, v \rangle_n(\bar{t})), f(t_1, \langle u, v \rangle(t_1)) \right) \\ &\quad + d_\infty^n \left( f(t_1, \langle u, v \rangle(t_1)), f(t_1, \langle u, v \rangle_n(t_1)) \right) + 2\varepsilon_n \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 2\varepsilon_n < \varepsilon \end{aligned}$$

quand  $n > N$  et  $t_1 < t < t_1 + \delta$ .

Maintenant, mettons  $n \rightarrow \infty$ , et appliquant Eq. (2.11), on obtient

$$\left\| \frac{j\langle u, v \rangle(t) - j\langle u, v \rangle(t_1)}{t - t_1} - jf(t_1, \langle u, v \rangle(t_1)) \right\| \leq \varepsilon, \quad t_1 < t < t_1 + \delta. \quad (2.17)$$



D'autre part, d'après l'hypothèse du théorème 1.2, il existe un  $\delta(t_1) \in (0, \delta)$  tel que le  $H$ -différences  $\langle u, v \rangle_n(t) - \langle u, v \rangle_n(t_1)$  existe pour tout  $t \in [t_1, t_1 + \delta(t_1)]$  et  $n = 1, 2, \dots$ .  
 Posons  $\langle z, w \rangle_n(t) = \langle u, v \rangle_n(t) - \langle u, v \rangle_n(t_1)$ . Nous vérifions que la séquence floue intuitionniste  $\{\langle z, w \rangle_n(t)\}$  converge uniformément sur  $[t_1, t_1 + \delta(t_1)]$ .

D'après l'hypothèse  $d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle(t)) \rightarrow 0$ , u.c  $\forall t \in [t_0, t_0 + r]$ , on sait que

$$\begin{aligned}
 d_\infty^n(\langle z, w \rangle_n(t), \langle z, w \rangle_m(t)) &= d_\infty^n(\langle z, w \rangle_n(t) + \langle u, v \rangle_n(t_1), \langle z, w \rangle_m(t) + \langle u, v \rangle_n(t_1)) \\
 &\leq d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t)) \\
 &\quad + d_\infty^n(\langle u, v \rangle_m(t), \langle z, w \rangle_m(t) + \langle u, v \rangle_n(t_1)) \\
 &= d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t)) \\
 &\quad + d_\infty^n(\langle z, w \rangle_m(t) + \langle u, v \rangle_m(t_1), \langle z, w \rangle_m(t) + \langle u, v \rangle_n(t_1)) \\
 &= d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t)) + d_\infty^n(\langle u, v \rangle_m(t_1), \langle u, v \rangle_n(t_1)) \\
 &\rightarrow 0 \quad \text{u.c} \quad \forall t \in [t_1, t_1 + \delta(t_1)] \quad (n, m \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

Puisque  $(IF_n, d_\infty^n)$  est complet, il existe une séquence floue intuitionniste tel que  $\{\langle z, w \rangle_n(t)\}$  converge uniformément vers  $\langle z, w \rangle(t)$  sur  $[t_1, t_1 + \delta(t_1)]$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
 d_\infty^n(\langle u, v \rangle(t_1) + \langle z, w \rangle(t), \langle u, v \rangle(t)) &\leq d_\infty^n(\langle u, v \rangle(t_1) + \langle z, w \rangle(t), \langle u, v \rangle_n(t_1) + \langle z, w \rangle_n(t)) \\
 &\quad + d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t_1) + \langle z, w \rangle_n(t), \langle u, v \rangle(t)) \\
 &\leq d_\infty^n(\langle u, v \rangle(t_1) + \langle z, w \rangle(t), \langle u, v \rangle(t_1) + \langle z, w \rangle_n(t)) \\
 &\quad + d_\infty^n(\langle u, v \rangle(t_1) + \langle z, w \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_n(t_1) + \langle z, w \rangle_n(t)) \\
 &\quad + d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t_1), \langle u, v \rangle(t)) \\
 &= d_\infty^n(\langle z, w \rangle_n(t), \langle z, w \rangle(t)) + d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t_1), \langle u, v \rangle(t_1)) \\
 &\quad + d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle(t))
 \end{aligned}$$

$\forall t \in [t_1, t_1 + \delta(t_1)]$ .

Soit  $n \rightarrow \infty$ . Ce qui implique

$$\langle u, v \rangle(t_1) + \langle z, w \rangle(t) \equiv \langle u, v \rangle(t) \quad \text{for all } t \in [t_1, t_1 + \delta(t_1)].$$

par conséquent le  $H$ -différences  $\langle u, v \rangle(t) - \langle u, v \rangle(t_1)$  existe pour tout  $t_1 \in [t_1, t_1 + \delta(t_1)]$ .

Ainsi d'après (2.17) on a,

$$d_\infty^n\left(\frac{\langle u, v \rangle(t) - \langle u, v \rangle(t_1)}{t - t_1}, f(t_1, \langle u, v \rangle(t_1))\right) \leq \varepsilon, \quad t_1 < t \leq t_1 + \delta(t_1)$$

Alors  $\lim_{t \rightarrow t_1^+} \frac{\langle u, v \rangle(t) - \langle u, v \rangle(t_1)}{t - t_1} = f(t_1, \langle u, v \rangle(t_1))$ . De même, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} \frac{\langle u, v \rangle(t) - \langle u, v \rangle(t_1)}{t - t_1} = f(t_1, \langle u, v \rangle(t_1))$$

Ainsi  $\langle u, v \rangle'(t_1)$  existe et

$$\langle u, v \rangle'(t_1) = f(t_1, \langle u, v \rangle(t_1))$$

De  $t_1 \in [t_0, t_0 + r]$  est arbitraire, on sait que Eq. (2.10) qui est vrais et

$$\langle u, v \rangle \in C^1[[t_0, t_0 + r], B(\langle u, v \rangle_0, q)].$$

Ainsi, nous concluons la preuve.

**Corollaire 1..1.** Si nous remplaçons la condition (2.8) par

$$j\langle u, v \rangle'_{n+1}(t) = jf(t, \langle u, v \rangle_n(t)) + B_n(t), \quad \langle u, v \rangle(t_0) = \langle u, v \rangle_0, \quad \|B_n(t)\| \leq \varepsilon_n \quad (2.18)$$

$\forall t \in [t_0, t_0 + r]$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) et retenir les autres hypothèses, alors les conclusions sont également vraies.

**Preuve 1..2.** Ceci est complètement similaire à la preuve du théorème 1.2.

### 1.3. Résultat d'existence et d'unicité

Notons  $C(I, IF_1)$  l'ensemble des applications continues de  $I$  à valeurs dans  $IF_1$  définissons métrique sur  $C(I, IF_1)$

$$D(f, g) = \sup_{t \in I} d_\infty((f_{1,t}, f_{2,t}), (g_{1,t}, g_{2,t}))$$

avec  $f(t) = (f_{1,t}, f_{2,t})$  et  $g(t) = (g_{1,t}, g_{2,t})$

**Théorème 1..3.** ([7])  $(C(I, IF_1), D)$  est un espace métrique complet.

**Définition 1..2.**  $\langle u, v \rangle : I \rightarrow IF_1$  est une solution du problème à valeur initiale (2.1), si et seulement si elle est continue et satisfait l'équation intégrale

$$\langle u, v \rangle(t) = \langle u, v \rangle(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \langle u, v \rangle(s)) ds$$

Notons  $C(I \times IF_1, IF_1)$  l'ensemble des applications continues de  $I \times IF_1$  dans  $IF_1$

**Théorème 1..4.** Soient

(a)  $f \in C[R_0, IF_n]$  et  $d_\infty^n(f(t, \langle u, v \rangle), 0_{(1,0)}) \leq M$  pour tout  $(t, \langle u, v \rangle) \in R_0$ .

(b)  $g \in C[[t_0, t_0 + p] \times [0, q], R]$ ,  $g(t, 0) \equiv 0$  et  $g(t, x) \leq M_1$ , pour tout  $t \in [t_0, t_0 + p]$ ,  $0 \leq x \leq q$  tel que  $g(t, x)$  est croissante sur  $x$  (i.e,  $t_0 \leq t \leq t_0 + p$ ,  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq q \implies g(t, x_1) \leq g(t, x_2)$ ), le problème à valeur initiale

$$x'(t) = g(t, x(t)), \quad x(t_0) = 0 \quad (2.19)$$

a une seule solution  $x(t) \equiv 0$  sur  $[t_0, t_0 + p]$ .

(c)  $d_\infty^n(f(t, \langle u, v \rangle), f(t, \langle u', v' \rangle)) \leq g(t, d_\infty^n(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle))$ ,  
pour tout  $(t, \langle u, v \rangle), (t, \langle u', v' \rangle) \in R_0$ , et  $d_\infty^n(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle) \leq q$ .

Alors le problème de Cauchy (2.10) a une solution unique  $\langle u, v \rangle \in C^1[[t_0, t_0 + r], B(x_0, q)]$  on  $[t_0, t_0 + r]$ , où  $r = \min\{p, q/M, q/M_1\}$ , et les itérations successives

$$\langle u, v \rangle_0(t) = \langle u, v \rangle_0, \quad \langle u, v \rangle_{n+1}(t) = \langle u, v \rangle_0 + \int_{t_0}^t f(s, \langle u, v \rangle_n(s)) ds \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.20)$$

convergent uniformément vers  $\langle u, v \rangle(t)$  on  $[t_0, t_0 + r]$ .

**Preuve 1..3.** De (2.20) et l'hypothèse (a), par la méthode inductive on a obtenu,

$$\begin{aligned} d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_{n+1}(t), \langle u, v \rangle_0 \right) &\leq \int_{t_0}^t d_\infty^n \left( f(s, \langle u, v \rangle_n(s)), 0_{(1,0)} \right) ds \\ &\leq q \quad \forall t \in [t_0, t_0 + r] \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

Par conséquent  $\langle u, v \rangle_{n+1} \in C^1[[t_0, t_0 + r], B(x_0, q)]$  et

$$\langle u, v \rangle'_{n+1}(t) = f(t, (\langle u, v \rangle_n(t))), \quad \langle u, v \rangle_n(t_0) = \langle u, v \rangle_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.22)$$

Soit  $M_2 = \max\{M, M_1\}$ . Alors  $r = \min\{p, q/M_2\}$ , et nous obtenons les itérations successives comme

$$\begin{cases} x_0(t) = M_2(t - t_0) & t_0 \leq t \leq t_0 + r \\ x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t g(s, x_n(s)), & t_0 \leq t \leq t_0 + r \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.23)$$

Il est clair que,

$$x_1(t) = \int_{t_0}^t g(s, x_0(s)) \leq M_1(t - t_0) \leq x_0(t) \leq q, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + r] \quad (2.24)$$

Donc, par la méthode inductive et puisque  $g(t, x)$  est croissante  $x$ , on a

$$0 \leq x_{n+1}(t) \leq x_n(t) \leq q, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + r] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.25)$$

Comme  $|x'_{n+1}(t)| = |g(t, x_n(t))| \leq M_1$ , d'après la theorem d'Ascoli-Arzela et (2.25) nous savons que  $\{x_n(t)\}$  converge uniformément vers une fonction continue  $x(t)$  sur  $[t_0, t_0 + r]$  et

$$x(t) = \int_{t_0}^t g(s, x(s)) ds.$$

Par conséquence  $x \in C^1[[t_0, t_0 + r], [0, q]]$  et  $x$  est la solution du problème à valeur initiale (2.19). De l'hypothèse (b) nous obtenons  $x(t) \equiv 0$ . De plus, nous avons

$$\begin{aligned} d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_1(t), \langle u, v \rangle_0 \right) &= d_\infty^n \left( \int_{t_0}^t f(s, \langle u, v \rangle_0(s)) ds, 0_{(1,0)} \right) \\ &\leq \int_{t_0}^t d_\infty^n \left( f(s, \langle u, v \rangle_0(s)), 0_{(1,0)} \right) ds \\ &\leq M(t - t_0) \leq x_0(t) \end{aligned}$$

Supposons que  $d_\infty^n(\langle u, v \rangle_k(t), \langle u, v \rangle_{k-1}) \leq x_{k-1}(t)$ , alors par l'hypothèse (c), nous avons,

$$\begin{aligned}
 d_\infty^n(\langle u, v \rangle_{k+1}(t), \langle u, v \rangle_k(t)) &= d_\infty^n\left(\int_{t_0}^t f(s, \langle u, v \rangle_k(s)) ds, \int_{t_0}^t f(s, \langle u, v \rangle_{k-1}(s)) ds\right) \\
 &\leq \int_{t_0}^t d_\infty^n\left(f(s, \langle u, v \rangle_k(s)), f(s, \langle u, v \rangle_{k-1}(s))\right) ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t g\left(s, d_\infty^n(\langle u, v \rangle_k(s), \langle u, v \rangle_{k-1}(s))\right) ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t g\left(s, x_{k-1}(s)\right) ds = x_k(t)
 \end{aligned}$$

Ainsi par la méthode inductive on a,

$$d_\infty^n(\langle u, v \rangle_{n+1}(t), \langle u, v \rangle_n(t)) \leq x_n(t), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + r \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.26)$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned}
 d_\infty^n(\langle u, v \rangle'_{n+1}(t), \langle u, v \rangle'_n(t)) &= d_\infty^n\left(f(t, \langle u, v \rangle_n(t)), f(t, \langle u, v \rangle_{n-1}(t))\right) \\
 &\leq g\left(t, d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_{n-1}(t))\right) \\
 &\leq g(t, x_{n-1}(t))
 \end{aligned} \quad (2.27)$$

On suppose que  $m \geq n$ , compte tenu (2.27) et (2.25) on aura,

$$\begin{aligned}
 d_\infty^n(\langle u, v \rangle'_n(t), \langle u, v \rangle'_m(t)) &\leq d_\infty^n\left(f(t, \langle u, v \rangle_{n-1}(t)), f(t, \langle u, v \rangle_n(t))\right) \\
 &\quad + d_\infty^n\left(f(t, \langle u, v \rangle_n(t)), f(t, \langle u, v \rangle_m(t))\right) \\
 &\quad + d_\infty^n\left(f(t, \langle u, v \rangle_m(t)), f(t, \langle u, v \rangle_{m-1}(t))\right) \\
 &\leq g(t, x_{n-1}(t)) + g(t, d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t))) + g(t, x_{m-1}(t)) \\
 &\leq 2g(t, x_{n-1}(t)) + g(t, d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t)))
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 d_\infty^n(\langle u, v \rangle_n(t+h), \langle u, v \rangle_m(t+h)) &\leq d_\infty^n\left(\langle u, v \rangle_n(t+h), \langle u, v \rangle_m(t+h) - \langle u, v \rangle_m(t) + \langle u, v \rangle_n(t)\right) \\
 &\quad + d_\infty^n\left(\langle u, v \rangle_m(t+h) - \langle u, v \rangle_m(t) + \langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t+h)\right) \\
 &= d_\infty^n\left(\langle u, v \rangle_n(t+h) - \langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t+h) - \langle u, v \rangle_m(t)\right) \\
 &\quad + d_\infty^n\left(\langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t)\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^+ d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t) \right) &= \frac{\overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_n(t+h), \langle u, v \rangle_m(t+h) \right) - d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t) \right)}{h} \\
 \text{On déduit,} \qquad \qquad \qquad &\leq \frac{\overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_n(t+h) - \langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t+h) - \langle u, v \rangle_m(t) \right)}{h} \\
 &= d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle'_n(t), \langle u, v \rangle'_m(t) \right) \\
 &< 2g(t, x_{n-1}(t)) + g(t, d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t) \right))
 \end{aligned}$$

Comme  $g(t, x_{n-1}(t))$  converge uniformément vers 0, alors pour un arbitraire  $\varepsilon > 0$  il existe un entier naturel  $N$  tel que

$$D^+ d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t) \right) < g(t, d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t) \right)) + \varepsilon \quad \forall m \geq n > N$$

Ici  $D^+$  est la dérivé de Dini (voir [24]). Du fait que  $d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_n(t_0), \langle u, v \rangle_m(t_0) \right) = 0 < \varepsilon$  et par la proposition 1.1, on a

$$d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t) \right) \leq w(t, \varepsilon) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + r] \quad \forall m \geq n > N \quad (2.28)$$

où  $w(t, \varepsilon)$  est la solution maximale du problème à valeur initiale

$$x'(t) = g(t, x(t)) + \varepsilon, \quad x(t_0) = \varepsilon \quad (2.29)$$

Par la proposition 1.2 on sait que  $w(t, \varepsilon)$  converge uniformément vers la solution maximale  $x(t) \equiv 0$  du problème (2.19) sur  $t_0 \leq t \leq t_0 + r$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Ainsi, selon (2.28) et que  $(IF_n, d_\infty^n)$  est complet, nous savons qu'il existe une application floue intuitionistique  $\langle u, v \rangle : T \rightarrow IF_n$  tel que  $d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle_n(t), \langle u, v \rangle_m(t) \right)$  converge uniformément vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Appliquant (2.22) et le corollaire 1.1 on a  $\langle u, v \rangle \in C^1[[t_0, t_0 + r], B(\langle u, v \rangle_0, q)]$  et  $\langle u, v \rangle(t)$  est la solution du problème à valeur initiale (2.10).

Enfin, nous prouvons l'unicité. Supposons que  $\langle z, w \rangle(t)$  est une autre solution de problème à valeur initiale (2.10). Soit

$$m(t) = d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle(t), \langle z, w \rangle(t) \right)$$

Alors  $m(t_0) \equiv 0$

$$\begin{aligned}
 D^+ m(t) &\leq d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle'(t), \langle z, w \rangle'(t) \right) \\
 &= d_\infty^n \left( f(t, \langle u, v \rangle(t)), f(t, \langle z, w \rangle(t)) \right) \\
 &\leq g(t, m(t)).
 \end{aligned}$$

D'où, d'après la proposition 1.2 on a :

$$d_\infty^n \left( \langle u, v \rangle(t), \langle z, w \rangle(t) \right) \leq x(t) \equiv 0, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + r]$$

Où  $x(t) \equiv 0$  est la solution maximale du problème (2.19) sur  $[t_0, t_0 + r]$ .

Par conséquent  $\langle u, v \rangle(t) = \langle z, w \rangle(t)$ .

**Corollaire 1..2.** Soit  $f \in C[R_0, IF_n]$  tel que  $d_\infty^n(f(t, \langle u, v \rangle), 0) \leq M$  pour tout  $(t, \langle u, v \rangle) \in R_0$  et  $f$  est lipschitzienne tel que  $d_\infty^n(f(t, \langle u, v \rangle), f(t, \langle u', v' \rangle)) \leq L d_\infty^n(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle), \forall (t, \langle u, v \rangle), (t, \langle u', v' \rangle) \in R_0$  où  $L$  est une constante. Alors, le problème de Cauchy (2.10) possède une unique solution  $\langle u, v \rangle \in C^1[[t_0, t_0 + r], B(x_0, q)]$ , cette solution est définie sur un intervalle  $[t_0, t_0 + r]$ , où  $r = \min\{p, q/M, 1/L\}$ , et les itérations successives (2.20) converge uniformément vers  $\langle u, v \rangle(t)$  sur  $[t_0, t_0 + r]$ .

**Preuve 1..4.** Dans la démonstration du théorème 1..4, prenons  $g(t, x) = L.x$  on obtient alors la preuve du corollaire 1..2, où  $M_1 = L.q$ , donc  $r = \min\{p, q/M, 1/L\}$ .

# Chapitre 3

## Résolution numériques des équations différentielles floues intuitionnistiques

Dans certains cas, il est possible de trouver des solutions analytiques aux équations différentielles, malheureusement dans la majorité des cas, la solution analytique est impossible à obtenir et, même lorsqu'on peut la calculer, on évite parfois de le faire à cause des temps de calculs gigantesques. Pour cette raison, nous sommes conduits à considérer des méthodes numériques. Celles-ci peuvent en effet être appliquées à des équations différentielles floues intuitionnistiques qui nous donneront les valeurs de la solution  $\langle u, v \rangle(t)$  à des instants discrets  $t_i$ .

Dans cette section, nous nous sommes intéressés à l'étude numérique des équations différentielles floues intuitionnistiques. Il s'agit du problèmes à valeur initiales floues intuitionnistiques. Nous avons utilisé une approximation de ces problèmes basées sur des méthodes numériques à un pas puis des méthodes numériques à pas multiples, on va essayer de donner une description à ces différentes méthodes à des problèmes flous intuitionnistiques et on va montrer la convergence, la stabilité et la consistance de ces méthodes et pour tester nos algorithmes on va donner des exemples d'applications.

### 1. Étude des méthodes à un pas

On note les solutions exactes du problème (2.1) par

$$[\langle U, V \rangle(t)]_\alpha = \left[ [\langle U, V \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle U, V \rangle(t)]_r^+(\alpha) \right]$$

$$[\langle U, V \rangle(t)]^\alpha = \left[ [\langle U, V \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle U, V \rangle(t)]_r^-(\alpha) \right]$$

et les solutions approchées par

$$[\langle u, v \rangle(t)]_\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha) \right]$$

$$[\langle u, v \rangle(t)]^\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^-(\alpha) \right]$$

et on considère la subdivision de l'intervalle  $[t_0, T]$  en sous ensembles discrètes équidistants :

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T, \quad h = \frac{T - t_0}{N}, \quad t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.1)$$

Et on rappelons que

$$\begin{aligned} f_1^+(t, x(t); \alpha) &= G(t, [\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha)) \\ f_2^+(t, x(t); \alpha) &= H(t, [\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha)) \\ f_3^-(t, x(t); \alpha) &= L(t, [\langle u, v \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^-(\alpha)) \\ f_4^-(t, x(t); \alpha) &= K(t, [\langle u, v \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^-(\alpha)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

### 1.1. Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est basée en premier ordre sur l'approximation de  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^+(\alpha)$ ,  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^+(\alpha)$ ,  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^-(\alpha)$  et  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^-(\alpha)$ , objet de notre premier travail [5], donnée par :

$$Z'(t, \alpha) = \frac{Z(t+h, \alpha) - Z(t, \alpha)}{h}$$

où  $Z(t, \alpha)$  est  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^+(\alpha)$  ou  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^+(\alpha)$  ou  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^-(\alpha)$  ou  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^-(\alpha)$ . En vertu de cette approximation on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) \approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + hG_n(\alpha) \\ [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) \approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + hH_n(\alpha) \\ [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) \approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + hL_n(\alpha) \\ [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) \approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + hK_n(\alpha) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

où

$$\begin{aligned} G_n(\alpha) &= G(t_n, [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) \\ H_n(\alpha) &= H(t_n, [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) \\ L_n(\alpha) &= L(t_n, [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) \\ K_n(\alpha) &= K(t_n, [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) \end{aligned}$$

D'après l'équation (3.3) on définit la méthode d'Euler comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + hG(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) \\ [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + hH(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) \\ [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + hL(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) \\ [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + hK(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) \end{array} \right. \quad (3.4)$$



### Convergence de la méthode

Notre objectif est de déterminer la convergences de la méthode **d'Euler** vers les solutions exactes, c'est à dire on va montrer

$$d_{\infty}(\langle u, v \rangle(t_n), \langle U, V \rangle(t_n)) \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0$$

Soient  $G(t, z^+, w^+)$ ,  $H(t, z^+, w^+)$ ,  $L(t, z^-, w^-)$  et  $K(t, z^-, w^-)$  les fonctions données en (3.2) où  $z^+$ ,  $w^+$ ,  $z^-$  et  $w^-$  sont des constantes et  $z^+ \leq w^+$  et  $z^- \leq w^-$ .

Alors les domaines de  $G$ ,  $H$  et  $L$ ,  $K$  sont définit comme suit :

$$M_1 = \{(t, z^+, w^+) \mid t_0 \leq t \leq T, \quad \infty < z^+ \leq w^+, \quad -\infty < w^+ < +\infty\}$$

Et

$$M_2 = \{(t, z^-, w^-) \mid t_0 \leq t \leq T, \quad \infty < z^- \leq w^-, \quad -\infty < w^- < +\infty\}$$

avec  $M_1 \subseteq M_2$

La démonstration du théorème suivant est similaire à celle du théorème de la convergence de la méthode de Taylor.

**Théorème 1.1.1.** *Soient  $G(t, z^+, w^+)$ ,  $H(t, z^+, w^+)$  appartiennent à  $C^1(M_1)$  et  $L(t, z^-, w^-)$ ,  $K(t, z^-, w^-)$  appartiennent à  $C^1(M_2)$  et supposons que les dérivées partielles de  $G$ ,  $H$  et  $L$ ,  $K$  sont bornées sur  $M_1$  et  $M_2$  respectivement. Alors pour tout  $\alpha$  fixé arbitrairement, les solutions numériques de (3.4) convergent vers les solutions exactes  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^+(\alpha)$ ,  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^+(\alpha)$ ,  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^-(\alpha)$  et  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^-(\alpha)$  uniformément en  $t$ .*

## 1.2. Méthode de Taylor d'ordre p

Ces méthodes sont simplement basées sur un développement en série de Taylor d'un ordre plus élevé que pour la méthode d'Euler, objet de notre premier travail [5]. Alors, la méthode de Taylor d'ordre p est basée sur la formule suivante :

$$\langle u, v \rangle(t + h; \alpha) = \sum_{i=0}^p \frac{h^i}{i!} \langle u, v \rangle^{(i)}(t; \alpha) \quad (3.5)$$

où  $\langle u, v \rangle(t; \alpha)$  est  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^+(\alpha)$  ou  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^+(\alpha)$  ou  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^-(\alpha)$  ou  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^-(\alpha)$ , on définit :

$$\begin{aligned} G[t, \langle u, v \rangle; \alpha] &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^i}{(i+1)!} f_1^{+(i)}(t, \langle u, v \rangle; \alpha) \\ H[t, \langle u, v \rangle; \alpha] &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^i}{(i+1)!} f_2^{+(i)}(t, \langle u, v \rangle; \alpha) \\ L[t, \langle u, v \rangle; \alpha] &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^i}{(i+1)!} f_3^{-(i)}(t, \langle u, v \rangle; \alpha) \\ K[t, \langle u, v \rangle; \alpha] &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^i}{(i+1)!} f_4^{-(i)}(t, \langle u, v \rangle; \alpha) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les solutions exactes et les solutions approchées en  $t_n$ ,  $0 \leq n \leq N$  sont notées respectivement par :

$$\begin{aligned} [\langle U, V \rangle(t)]_{\alpha} &= \left[ [\langle U, V \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle U, V \rangle(t)]_r^+(\alpha) \right] \\ [\langle U, V \rangle(t)]^{\alpha} &= \left[ [\langle U, V \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle U, V \rangle(t)]_r^-(\alpha) \right] \end{aligned}$$

et

$$[\langle u, v \rangle(t)]_\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha) \right]$$

$$[\langle u, v \rangle(t)]^\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^-(\alpha) \right]$$

Les solutions sont calculées pour les points de (3.1), en utilisant la méthode de Taylor d'ordre  $p$  et en substituant  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^+, [\langle U, V \rangle(t)]_r^+, [\langle U, V \rangle(t)]_l^-$  et  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^-$  dans (3.5) et considérons (3.6). On aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) \approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + hG[t, \langle U, V \rangle(t_n); \alpha] \\ [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) \approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + hH[t, \langle U, V \rangle(t_n); \alpha] \\ [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) \approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + hL[t, \langle U, V \rangle(t_n); \alpha] \\ [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) \approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + hK[t, \langle U, V \rangle(t_n); \alpha] \end{array} \right. \quad (3.7)$$

En effet, on a d'après (3.5) :

$$\begin{aligned} [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) &\approx \sum_{i=0}^p \frac{h^i}{i!} [\langle U, V \rangle^{(i)}(t_n)]_l^+(\alpha) \\ &\approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \sum_{i=1}^p \frac{h^i}{i!} [\langle U, V \rangle^{(i)}(t_n)]_l^+(\alpha) \\ &\approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \sum_{i=0}^p \frac{h^{(i+1)}}{(i+1)!} [\langle U, V \rangle^{(i+1)}(t_n)]_l^+(\alpha) \\ &\approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + h \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^i}{(i+1)!} f_1^{+(i)}(t_n, \langle U, V \rangle(t_n); \alpha) \\ &\approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + hG[t_n, \langle U, V \rangle(t_n); \alpha] \end{aligned}$$

De même pour

$$\left\{ \begin{array}{l} [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) \approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + hH[t, \langle U, V \rangle(t_n); \alpha] \\ [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) \approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + hL[t, \langle U, V \rangle(t_n); \alpha] \\ [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) \approx [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + hK[t, \langle U, V \rangle(t_n); \alpha] \end{array} \right.$$

Alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + hG[t, \langle u, v \rangle(t_n); \alpha] \\ [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + hH[t, \langle u, v \rangle(t_n); \alpha] \\ [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + hL[t, \langle u, v \rangle(t_n); \alpha] \\ [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + hK[t, \langle u, v \rangle(t_n); \alpha] \end{array} \right. \quad (3.8)$$

### Convergence de la méthode

L'objectif est de montrer la convergence suivante :

$$d_\infty(\langle U, V \rangle(t_n), \langle u, v \rangle(t_n)) \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0$$

Les Lemmes suivants seront appliqués à montrer la convergence de ces approximations, dont les démonstrations se trouvent dans ([25])

**Lemme 1..1.** ([25]) Soit la suite des nombres  $\{W_n\}_{n=0}^N$  satisfait

$$|W_{n+1}| \leq A|W_n| + B, \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

Avec  $A$  et  $B$  sont des constantes positifs données. Alors

$$|W_n| \leq A^n|W_0| + B \frac{A^n - 1}{A - 1}, \quad 0 \leq n \leq N$$

**Lemme 1..2.** ([25]) Soient les suites des nombres  $\{W_n\}_{n=0}^N$  et  $\{Z_n\}_{n=0}^N$  satisfait

$$|W_{n+1}| \leq |W_n| + A \max\{|W_n|, |Z_n|\} + B$$

$$|Z_{n+1}| \leq |Z_n| + A \max\{|W_n|, |Z_n|\} + B$$

Avec  $A$  et  $B$  sont des constantes positifs données. Ensuite, notant

$$S_n = |W_n| + |Z_n|, \quad 0 \leq n \leq N$$

nous avons

$$S_n \leq \bar{A}^n |S_0| + \bar{B} \frac{\bar{A}^n - 1}{\bar{A} - 1}, \quad 0 \leq n \leq N$$

où  $\bar{A} = 1 + 2A$  et  $\bar{B} = 2B$

Soient  $G^*(t, z^+, w^+)$ ,  $H^*(t, z^+, w^+)$ ,  $L^*(t, z^-, w^-)$  et  $K^*(t, z^-, w^-)$  sont les fonctions de  $G$ ,  $H$ ,  $L$  et  $K$  dans (3.6), où  $z^+$ ,  $w^+$ ,  $z^-$  et  $w^-$  sont des constantes et  $z^+ \leq w^+$  et  $z^- \leq w^-$ . c-à-d,

$$\begin{aligned} G^*(t, z^+, w^+) &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^i}{(i+1)!} \min\{f^{(i)}(t, \tau) | \tau \in [z^+, w^+]\} \\ H^*(t, z^+, w^+) &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^i}{(i+1)!} \max\{f^{(i)}(t, \tau) | \tau \in [z^+, w^+]\} \\ L^*(t, z^-, w^-) &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^i}{(i+1)!} \min\{f^{(i)}(t, \tau) | \tau \in [z^-, w^-]\} \\ K^*(t, z^-, w^-) &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^i}{(i+1)!} \max\{f^{(i)}(t, \tau) | \tau \in [z^-, w^-]\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

où  $G^*(t, z^+, w^+)$ ,  $H^*(t, z^+, w^+)$ ,  $L^*(t, z^-, w^-)$  et  $K^*(t, z^-, w^-)$  sont obtenues en substituant  $[\langle u, v \rangle(t)]_\alpha = [z^+, w^+]$  et  $[\langle u, v \rangle(t)]^\alpha = [z^-, w^-]$  dans (3.6).

Alors les domaines de  $G^*$ ,  $H^*$  et  $L^*$ ,  $K^*$  sont définis comme suit :

$$M_1 = \{(t, z^+, w^+) \mid t_0 \leq t \leq T, \quad \infty < z^+ \leq w^+, \quad -\infty < w^+ < +\infty\}$$

Et

$$M_2 = \{(t, z^-, w^-) \mid t_0 \leq t \leq T, \quad \infty < z^- \leq w^-, \quad -\infty < w^- < +\infty\}$$

avec  $M_1 \subseteq M_2$

**Théorème 1..2.** Soient  $G^*(t, z^+, w^+)$ ,  $H^*(t, z^+, w^+)$  appartiennent à  $C^{p-1}(M_1)$  et  $L^*(t, z^-, w^-)$ ,  $K^*(t, z^-, w^-)$  appartiennent à  $C^{p-1}(M_2)$  et supposons que les dérivées partielles de  $G^*$ ,  $H^*$  et  $L^*$ ,  $K^*$  sont bornées sur  $M_1$  et  $M_2$  respectivement. Alors pour tout  $\alpha$  fixé arbitrairement, les solutions numériques de (3.8) convergent vers les solutions exactes  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^+(\alpha)$ ,  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^+(\alpha)$ ,  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^-(\alpha)$  et  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^-(\alpha)$  uniformément en  $t$ .

**Démonstration: 1..1.** Il est suffisant de montrer

$$d_\infty(\langle u, v \rangle(t_N), \langle U, V \rangle(t_N)) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad h \longrightarrow 0$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [\langle u, v \rangle(t_N)]_l^+(\alpha) &= [\langle U, V \rangle(t_N)]_l^+(\alpha) \\ \lim_{h \rightarrow 0} [\langle u, v \rangle(t_N)]_r^+(\alpha) &= [\langle U, V \rangle(t_N)]_r^+(\alpha) \\ \lim_{h \rightarrow 0} [\langle u, v \rangle(t_N)]_l^-(\alpha) &= [\langle U, V \rangle(t_N)]_l^-(\alpha) \\ \lim_{h \rightarrow 0} [\langle u, v \rangle(t_N)]_r^-(\alpha) &= [\langle U, V \rangle(t_N)]_r^-(\alpha) \end{aligned} \tag{3.10}$$

où  $t_N = T$ .

Pour  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , en utilisant le théorème de Taylor, on a :

$$\begin{aligned} [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) &= [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + hG^*(t_n, [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} [\langle U, V \rangle^{(p+1)}(t_n)]_l^+(\alpha)(\zeta_{n,1}) \\ [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) &= [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + hH^*(t_n, [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} [\langle U, V \rangle^{(p+1)}(t_n)]_r^+(\alpha)(\zeta_{n,2}) \\ [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) &= [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + hL^*(t_n, [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} [\langle U, V \rangle^{(p+1)}(t_n)]_l^-(\alpha)(\zeta_{n,3}) \\ [\langle U, V \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) &= [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + hK^*(t_n, [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} [\langle U, V \rangle^{(p+1)}(t_n)]_r^-(\alpha)(\zeta_{n,4}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

où  $\zeta_{n,1}, \zeta_{n,2}, \zeta_{n,3}, \zeta_{n,4} \in (t_n, t_{n+1})$

Notons :

$$\begin{aligned} W_n^+ &= [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) \quad , \quad Z_n^+ = [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) \\ W_n^- &= [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) \quad , \quad Z_n^- = [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) \end{aligned} \tag{3.12}$$

à partir de (3.7) et (3.11) on aura,

$$\begin{aligned} W_{n+1}^+ &= W_n^+ + h \left\{ G^*(t_n, [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) - G^*(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) \right\} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} [X^{(p+1)}(t_n)]_l^+(\alpha)(\zeta_{n,1}) \\ Z_{n+1}^+ &= Z_n^+ + h \left\{ H^*(t_n, [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) - H^*(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) \right\} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} [X^{(p+1)}(t_n)]_r^+(\alpha)(\zeta_{n,2}) \\ W_{n+1}^- &= W_n^- + h \left\{ L^*(t_n, [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) - L^*(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) \right\} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} [\langle U, V \rangle^{(p+1)}(t_n)]_l^-(\alpha)(\zeta_{n,3}) \\ Z_{n+1}^- &= Z_n^- + h \left\{ K^*(t_n, [\langle U, V \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle U, V \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) - K^*(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) \right\} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} [\langle U, V \rangle^{(p+1)}(t_n)]_r^-(\alpha)(\zeta_{n,4}) \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} |W_{n+1}^+| &\leq |W_n^+| + 2hL^+ \max\{|W_n^+|, |Z_n^+|\} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} C \\ |V_{n+1}^+| &\leq |V_n^+| + 2hL^+ \max\{|W_n^+|, |Z_n^+|\} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} C \\ |W_{n+1}^-| &\leq |W_n^-| + 2hL^- \max\{|W_n^-|, |Z_n^-|\} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} C \\ |V_{n+1}^-| &\leq |V_n^-| + 2hL^- \max\{|W_n^-|, |Z_n^-|\} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} C \end{aligned} \tag{3.13}$$

Où

$$\diamond C_1^+ = \max \left| [\langle U, V \rangle^{(p+1)}(t_n)]_l^+(\alpha) \right|$$

$$\diamond C_2^+ = \max \left| [\langle U, V \rangle^{(p+1)}(t_n)]_r^+(\alpha) \right|$$

$$\diamond C_1^- = \max \left| [\langle U, V \rangle^{(p+1)}(t_n)]_l^-(\alpha) \right|$$

$$\diamond C_2^- = \max \left| [\langle U, V \rangle^{(p+1)}(t_n)]_r^-(\alpha) \right|$$

$$\diamond C^+ = \max\{C_1^+, C_2^+\}$$

$$\diamond C^- = \max\{C_1^-, C_2^-\}$$

pour  $t \in [t_0, T]$ .

$C = \max\{C^+, C^-\}$  et  $L^+ > 0$  est une borne pour les dérivées partielles  $G^*$  et  $H^*$ , et  $L^- > 0$  est une borne pour les dérivées partielles  $L^*$  et  $K^*$ . Par conséquent, d'après le Lemme 2.2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} |W_n^+| &\leq (1 + 4hL^+)^n |S_0^+| + \frac{2h^{p+1}}{(p+1)!} C \frac{(1+4hL^+)^{n-1}}{4hL^+} \\ |Z_n^+| &\leq (1 + 4hL^+)^n |S_0^+| + \frac{2h^{p+1}}{(p+1)!} C \frac{(1+4hL^+)^{n-1}}{4hL^+} \\ |W_n^-| &\leq (1 + 4hL^-)^n |S_0^-| + \frac{2h^{p+1}}{(p+1)!} C \frac{(1+4hL^-)^{n-1}}{4hL^-} \\ |Z_n^-| &\leq (1 + 4hL^-)^n |S_0^-| + \frac{2h^{p+1}}{(p+1)!} C \frac{(1+4hL^-)^{n-1}}{4hL^-} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Où  $|S_0^+| = |W_0^+| + |Z_0^-|$  et  $|S_0^-| = |W_0^-| + |Z_0^-|$ .

En particulier

$$\begin{aligned} |W_N^+| &\leq (1 + 4hL^+)^N |S_0^+| + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} C \frac{(1+4hL^+)^{\frac{T}{h}-1}}{2hL^+} \\ |Z_N^+| &\leq (1 + 4hL^+)^N |S_0^+| + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} C \frac{(1+4hL^+)^{\frac{T}{h}-1}}{2hL^+} \\ |W_N^-| &\leq (1 + 4hL^-)^N |S_0^-| + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} C \frac{(1+4hL^-)^{\frac{T}{h}-1}}{2hL^-} \\ |Z_N^-| &\leq (1 + 4hL^-)^N |S_0^-| + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} C \frac{(1+4hL^-)^{\frac{T}{h}-1}}{2hL^-} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Puisque  $|W_0^+| = |Z_0^+| = |W_0^-| = |Z_0^-| = 0$ , on a

$$\begin{aligned} |W_N^+| &\leq C \frac{e^{4TL^+} - 1}{2L^+(p+1)!} h^p, & |Z_N^+| &\leq C \frac{e^{4TL^+} - 1}{2L^+(p+1)!} h^p \\ |W_N^-| &\leq C \frac{e^{4TL^-} - 1}{2L^-(p+1)!} h^p, & |Z_N^-| &\leq C \frac{e^{4TL^-} - 1}{2L^-(p+1)!} h^p \end{aligned}$$

Or on aura :

$$d_\infty(\langle u, v \rangle(t_N), \langle U, V \rangle(t_N)) = \frac{1}{4} \left[ \sup_{0 < \alpha \leq 1} |W_N^+| + \sup_{0 < \alpha \leq 1} |Z_N^+| + \sup_{0 < \alpha \leq 1} |W_N^-| + \sup_{0 < \alpha \leq 1} |Z_N^-| \right]$$

Ainsi, si  $h \rightarrow 0$ , on obtient  $W_N^+ \rightarrow 0$ ,  $Z_N^+ \rightarrow 0$ ,  $W_N^- \rightarrow 0$  et  $Z_N^- \rightarrow 0$  ce qui complète la preuve.

### 1.3. Méthodes de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge et Kutta repose fondamentalement sur la formule de Taylor. L'idée de Runge et Kutta est d'écrire une solution approchée  $\langle u, v \rangle$  de  $IF_1$  où interviennent des évaluations de la fonction  $f$  (et non pas de ses dérivées, qui pourraient être fastidieuses à calculer), de manière à ce que cette solution coïncide avec le développement en série de Taylor à un ordre souhaité. Il existe plusieurs variantes de cette méthode (ordre 3, 4, 5, ...). Dans ce chapitre nous n'en étudierons : la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3, 4 et 8.

La base de toute les méthodes Runge-Kutta est d'exprimer la différence entre la valeur de  $\langle u, v \rangle$  à  $t_{n+1}$  et  $t_n$  sous la forme suivante

$$\langle u, v \rangle_{n+1} - \langle u, v \rangle_n = \sum_{i=1}^{i=m} w_i k_i, \quad (3.16)$$

où pour  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  les  $w_i$ 's sont des constantes

$$k_i = hf(t_n + c_i h, \langle u, v \rangle_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j) \quad (3.17)$$

Notons que

$$\begin{aligned} f_1^+(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= P(t, [\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha)) \\ f_2^+(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= Q(t, [\langle u, v \rangle(t)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^+(\alpha)) \\ f_3^-(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= R(t, [\langle u, v \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^-(\alpha)) \\ f_4^-(t, \langle u, v \rangle(t); \alpha) &= S(t, [\langle u, v \rangle(t)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t)]_r^-(\alpha)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

#### 1.3.1. Méthode de Runge-Kutta Nyström d'ordre 3

On va résoudre le problème à valeur initiale floue intuitionistique (2.1) par la méthode Runge-Kutta Nyström d'ordre 3, but du travail [10], alors d'après (3.16) et (3.17), on

définit :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=3} w_i [k_i]_l^+(\alpha) \quad (3.19)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=3} w_i [k_i]_r^+(\alpha) \quad (3.20)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=3} w_i [k_i]_l^-(\alpha) \quad (3.21)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=3} w_i [k_i]_r^-(\alpha) \quad (3.22)$$

Où les  $w_i$ 's sont constantes et

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_i]^\alpha = [k_i]_l^+(\alpha), [k_i]_r^+(\alpha), \quad i = 1, 2, 3 \\ [k_i]^\alpha = [k_i]_l^-(\alpha), [k_i]_r^-(\alpha) \\ [k_i]_l^+(\alpha) = hP\left(t_n + c_i h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_r^+(\alpha)\right) \\ [k_i]_r^+(\alpha) = hQ\left(t_n + c_i h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_r^+(\alpha)\right) \\ [k_i]_l^-(\alpha) = hR\left(t_n + c_i h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^- + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^- + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_r^-(\alpha)\right) \\ [k_i]_r^-(\alpha) = hS\left(t_n + c_i h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^- + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^- + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_r^-(\alpha)\right) \end{array} \right.$$

En supposant la méthode de Runge-Kutta Nyström qui calcule la valeur de la fonction en trois points intermédiaires de la manière suivante :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{1}{8}(2[k_1]_l^+(\alpha) + 3[k_2]_l^+(\alpha) + 3[k_3]_l^+(\alpha)) \quad (3.23)$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_l^+(\alpha) = hP\left(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)\right) \\ [k_2]_l^+(\alpha) = hP\left(t_n + \frac{2}{3}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{2}{3}[k_1]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{2}{3}[k_1]_r^+(\alpha)\right) \\ [k_3]_l^+(\alpha) = hP\left(t_n + \frac{2}{3}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{2}{3}[k_2]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{2}{3}[k_2]_r^+(\alpha)\right) \end{array} \right.$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{1}{8}(2[k_1]_r^+(\alpha) + 3[k_2]_r^+(\alpha) + 3[k_3]_r^+(\alpha)) \quad (3.24)$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_r^+(\alpha) = hQ(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) \\ [k_2]_r^+(\alpha) = hQ(t_n + \frac{2}{3}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{2}{3}[k_1]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{2}{3}[k_1]_r^+(\alpha)) \\ [k_3]_r^+(\alpha) = hQ(t_n + \frac{2}{3}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{2}{3}[k_2]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{2}{3}[k_2]_r^+(\alpha)) \end{array} \right.$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{1}{8}(2[k_1]_l^-(\alpha) + 3[k_2]_l^-(\alpha) + 3[k_3]_l^-(\alpha)) \quad (3.25)$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_l^-(\alpha) = hR(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) \\ [k_2]_l^-(\alpha) = hR(t_n + \frac{2}{3}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{2}{3}[k_1]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{2}{3}[k_1]_r^-(\alpha)) \\ [k_3]_l^-(\alpha) = hR(t_n + \frac{2}{3}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{2}{3}[k_2]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{2}{3}[k_2]_r^-(\alpha)) \end{array} \right.$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{1}{8}(2[k_1]_r^-(\alpha) + 3[k_2]_r^-(\alpha) + 3[k_3]_r^-(\alpha)) \quad (3.26)$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_r^-(\alpha) = hS(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) \\ [k_2]_r^-(\alpha) = hS(t_n + \frac{2}{3}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{2}{3}[k_1]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{2}{3}[k_1]_r^-(\alpha)) \\ [k_3]_r^-(\alpha) = hS(t_n + \frac{2}{3}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{2}{3}[k_2]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{2}{3}[k_2]_r^-(\alpha)) \end{array} \right.$$

Soient  $P(t, z^+, w^+)$ ,  $Q(t, z^+, w^+)$ ,  $R(t, z^-, w^-)$  et  $S(t, z^-, w^-)$  être des fonctions de (3.18), où  $z^+$ ,  $w^+$ ,  $z^-$  et  $w^-$  sont des constantes et  $z^+ \leq w^+$  et  $z^- \leq w^-$ .

le domaine de  $P$  et  $Q$  est

$$M_1 = \{(t, z^+, w^+) \mid t_0 \leq t \leq T, \quad \infty < z^+ \leq w^+, \quad -\infty < w^+ < +\infty\}$$

et le domaine de  $R$  et  $S$  est

$$M_2 = \{(t, z^-, w^-) \mid t_0 \leq t \leq T, \quad \infty < z^- \leq w^-, \quad -\infty < w^- < +\infty\}$$

où  $M_1 \subseteq M_2$

**Théorème 1..3.** Soient  $P(t, z^+, w^+)$ ,  $Q(t, z^+, w^+)$  appartiennent à  $C^3(M_1)$  et  $R(t, z^-, w^-)$ ,  $S(t, z^-, w^-)$  appartiennent à  $C^3(M_2)$  et supposons que les dérivées partielles de  $P$ ,  $Q$  et  $R$ ,  $S$  sont bornées sur  $M_1$  et  $M_2$  respectivement. Alors, pour tout  $0 \leq \alpha \leq 1$  fixé arbitrairement, les solutions numériques de (3.39), (3.40), (3.41) et (3.42) convergent vers les solutions exactes  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^+(\alpha)$ ,  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^+(\alpha)$ ,  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^-(\alpha)$  et  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^-(\alpha)$  uniformément en  $t$ .



### 1.3.2. Méthode de Runge-Kutta Gill d'ordre 4

Maintenant, on va résoudre le problème à valeur initiale floue intuitionistique (2.1) par la méthode de Runge-Kutta Gill d'ordre 4, objet du travail [8], donc à partir de (3.16) et (3.17) on définit :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=4} w_i [k_i]_l^+(\alpha) \quad (3.27)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=4} w_i [k_i]_r^+(\alpha) \quad (3.28)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=4} w_i [k_i]_l^-(\alpha) \quad (3.29)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=4} w_i [k_i]_r^-(\alpha) \quad (3.30)$$

où les  $w_i$ 's sont des constantes et

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_i]^\alpha = [k_i]_l^+(\alpha), [k_i]_r^+(\alpha), \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ [k_i]^\alpha = [k_i]_l^-(\alpha), [k_i]_r^-(\alpha) \\ [k_i]_l^+(\alpha) = hP\left(t_n + c_i h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_r^+(\alpha)\right) \\ [k_i]_r^+(\alpha) = hQ\left(t_n + c_i h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+ + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_r^+(\alpha)\right) \\ [k_i]_l^-(\alpha) = hR\left(t_n + c_i h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^- + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^- + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_r^-(\alpha)\right) \\ [k_i]_r^-(\alpha) = hS\left(t_n + c_i h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^- + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^- + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_r^-(\alpha)\right) \end{array} \right.$$

Par conséquent, la méthode de Runge-Kutta Gill d'ordre 4 qui calcule la valeur de la fonction en quatre évaluation de la manière suivante :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{1}{6}([k_1]_l^+(\alpha) + (2 - \sqrt{2})[k_2]_l^+(\alpha) + (2 + \sqrt{2})[k_3]_l^+(\alpha) + [k_4]_l^+(\alpha)) \quad (3.31)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_l^+(\alpha) = hP(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) \\ [k_2]_l^+(\alpha) = hP(t_n + \frac{1}{2}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_r^+(\alpha)) \\ [k_3]_l^+(\alpha) = hP(t_n + \frac{1}{2}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + (\frac{\sqrt{2}-1}{2})[k_1]_l^+(\alpha) + (\frac{2-\sqrt{2}}{2})[k_2]_l^+(\alpha), \\ \quad [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + (\frac{\sqrt{2}-1}{2})[k_1]_r^+(\alpha) + (\frac{2-\sqrt{2}}{2})[k_2]_r^+(\alpha)) \\ [k_4]_l^+(\alpha) = hP(t_n + h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_l^+(\alpha) + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})[k_3]_l^+(\alpha), \\ \quad [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_r^+(\alpha) + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})[k_3]_r^+(\alpha)) \end{array} \right.$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{1}{6}([k_1]_r^+(\alpha) + (2-\sqrt{2})[k_2]_r^+(\alpha) + (2+\sqrt{2})[k_3]_r^+(\alpha) + [k_4]_r^+(\alpha)) \quad (3.32)$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_r^+(\alpha) = hQ(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) \\ [k_2]_r^+(\alpha) = hQ(t_n + \frac{1}{2}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_r^+(\alpha)) \\ [k_3]_r^+(\alpha) = hQ(t_n + \frac{1}{2}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + (\frac{\sqrt{2}-1}{2})[k_1]_l^+(\alpha) + (\frac{2-\sqrt{2}}{2})[k_2]_l^+(\alpha), \\ \quad [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + (\frac{\sqrt{2}-1}{2})[k_1]_r^+(\alpha) + (\frac{2-\sqrt{2}}{2})[k_2]_r^+(\alpha)) \\ [k_4]_r^+(\alpha) = hQ(t_n + h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_l^+(\alpha) + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})[k_3]_l^+(\alpha), \\ \quad [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_r^+(\alpha) + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})[k_3]_r^+(\alpha)) \end{array} \right.$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{1}{6}([k_1]_l^-(\alpha) + (2-\sqrt{2})[k_2]_l^-(\alpha) + (2+\sqrt{2})[k_3]_l^-(\alpha) + [k_4]_l^-(\alpha)) \quad (3.33)$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_l^-(\alpha) = hR(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) \\ [k_2]_l^-(\alpha) = hR(t_n + \frac{1}{2}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_r^-(\alpha)) \\ [k_3]_l^-(\alpha) = hR(t_n + \frac{1}{2}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + (\frac{\sqrt{2}-1}{2})[k_1]_l^-(\alpha) + (\frac{2-\sqrt{2}}{2})[k_2]_l^-(\alpha), \\ \quad [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + (\frac{\sqrt{2}-1}{2})[k_1]_r^-(\alpha) + (\frac{2-\sqrt{2}}{2})[k_2]_r^-(\alpha)) \\ [k_4]_l^-(\alpha) = hR(t_n + h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_l^-(\alpha) + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})[k_3]_l^-(\alpha), \\ \quad [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_r^-(\alpha) + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})[k_3]_r^-(\alpha)) \end{array} \right.$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{1}{6}([\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + (2-\sqrt{2})[k_2]_r^-(\alpha) + (2+\sqrt{2})[k_3]_r^-(\alpha) + [k_4]_r^-(\alpha)) \quad (3.34)$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_r^-(\alpha) = hS(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) \\ [k_2]_r^-(\alpha) = hS(t_n + \frac{1}{2}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_r^-(\alpha)) \\ [k_3]_r^-(\alpha) = hS(t_n + \frac{1}{2}h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + (\frac{\sqrt{2}-1}{2})[k_1]_l^-(\alpha) + (\frac{2-\sqrt{2}}{2})[k_2]_l^-(\alpha), \\ \quad [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + (\frac{\sqrt{2}-1}{2})[k_1]_r^-(\alpha) + (\frac{2-\sqrt{2}}{2})[k_2]_r^-(\alpha)) \\ [k_4]_r^-(\alpha) = hS(t_n + h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_l^-(\alpha) + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})[k_3]_l^-(\alpha), \\ \quad [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_r^-(\alpha) + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})[k_3]_r^-(\alpha)) \end{array} \right.$$

Soient  $P(t, z^+, w^+)$ ,  $Q(t, z^+, w^+)$ ,  $R(t, z^-, w^-)$  et  $S(t, z^-, w^-)$  être des fonctions de (3.18), où  $z^+$ ,  $w^+$ ,  $z^-$  et  $w^-$  sont des constantes et  $z^+ \leq w^+$  et  $z^- \leq w^-$ .

Le domaine de  $P$  et  $Q$  est

$$M_1 = \{(t, z^+, w^+) \mid t_0 \leq t \leq T, \quad \infty < z^+ \leq w^+, \quad -\infty < w^+ < +\infty\}$$

et le domaine de  $R$  et  $S$  est

$$M_2 = \{(t, z^-, w^-) \mid t_0 \leq t \leq T, \quad \infty < z^- \leq w^-, \quad -\infty < w^- < +\infty\}$$

où  $M_1 \subseteq M_2$

**Théorème 1..4.** Soient  $P(t, z^+, w^+)$ ,  $Q(t, z^+, w^+)$  appartiennent à  $C^4(M_1)$  et  $R(t, z^-, w^-)$ ,  $S(t, z^-, w^-)$  appartiennent à  $C^4(M_1)$  et supposons que les dérivées partielles de  $P$ ,  $Q$  et  $R$ ,  $S$  sont bornées sur  $M_1$  et  $M_2$  respectivement. Alors, pour tout  $0 \leq \alpha \leq 1$  fixé arbitrairement, les solutions numériques de (3.39), (3.40), (3.41) et (3.42) convergent vers les solutions exactes  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^+(\alpha)$ ,  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^+(\alpha)$ ,  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^-(\alpha)$  et  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^-(\alpha)$  uniformément en  $t$ .

### 1.3.3. Méthode de Runge-Kutta Verner

Dans cette partie, on étudiera le problème à valeur initiale floue intuitionistique (2.1) par la méthode de Runge-Kutta Verner, but du travail [13], alors à partir de (3.16) et (3.17) on définit :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=8} w_i [k_i]_l^+ \quad (3.35)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=8} w_i [k_i]_r^+ \quad (3.36)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=8} w_i [k_i]_l^- \quad (3.37)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) - [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=8} w_i [k_i]_r^- \quad (3.38)$$

Où les  $w_i$ 's sont des constantes

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_i]_\alpha = [k_i]_l^+, [k_i]_r^+, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ [k_i]^\alpha = [k_i]_l^-, [k_i]_r^- \\ [k_i]_l^+ = hP\left(t_n + c_i h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_l^+, [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_r^+\right) \\ [k_i]_r^+ = hQ\left(t_n + c_i h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_l^+, [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_r^+\right) \\ [k_i]_l^- = hR\left(t_n + c_i h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_l^-, [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_r^-\right) \\ [k_i]_r^- = hS\left(t_n + c_i h, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_l^-, [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} [k_j]_r^-\right) \end{array} \right.$$

La méthode Runge-Kutta Verner définit comme suit :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{3}{40} [k_1]_l^+ + \frac{875}{2244} [k_3]_l^+ + \frac{23}{72} [k_4]_l^+ + \frac{264}{1955} [k_5]_l^+ + \frac{125}{11592} [k_7]_l^+ + \frac{43}{616} [k_8]_l^+ \quad (3.39)$$

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 [k_1]_l^+ = hP(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) \\
 [k_2]_l^+ = hP(t_n + \frac{1}{6}h, [z_1]_l^+(\alpha), [z_1]_r^+(\alpha)) \\
 [k_3]_l^+ = hP(t_n + \frac{4}{15}h, [z_2]_l^+(\alpha), [z_2]_r^+(\alpha)) \\
 [k_4]_l^+ = hP(t_n + \frac{2}{3}h, [z_3]_l^+(\alpha), [z_3]_r^+(\alpha)) \\
 [k_5]_l^+ = hP(t_n + \frac{5}{6}h, [z_4]_l^+(\alpha), [z_4]_r^+(\alpha)) \\
 [k_6]_l^+ = hP(t_n + h, [z_5]_l^+(\alpha), [z_5]_r^+(\alpha)) \\
 [k_7]_l^+ = hP(t_n + \frac{1}{15}h, [z_6]_l^+(\alpha), [z_6]_r^+(\alpha)) \\
 [k_8]_l^+ = hP(t_n + h, [z_7]_l^+(\alpha), [z_7]_r^+(\alpha)) \\
 [z_1]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) + \frac{1}{6}[k_1]_i^+ \\
 [z_2]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) + \frac{4}{75}[k_1]_i^+ + \frac{16}{75}[k_2]_i^+ \\
 [z_3]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) + \frac{5}{6}[k_1]_i^+ - \frac{8}{3}[k_2]_i^+ + \frac{5}{2}[k_3]_i^+ \\
 [z_4]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) - \frac{165}{64}[k_1]_i^+ + \frac{55}{6}[k_2]_i^+ - \frac{425}{64}[k_3]_i^+ + \frac{85}{96}[k_4]_i^+ \\
 [z_5]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) + \frac{12}{5}[k_1]_i^+ - 8[k_2]_i^+ + \frac{4015}{612}[k_3]_i^+ - \frac{11}{36}[k_4]_i^+ + \frac{88}{255}[k_5]_i^+ \\
 [z_6]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) - \frac{8263}{15000}[k_1]_i^+ + \frac{124}{75}[k_2]_i^+ - \frac{643}{680}[k_3]_i^+ - \frac{84}{250}[k_4]_i^+ + \frac{2484}{10625}[k_5]_i^+ \\
 [z_7]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) + \frac{3501}{1720}[k_1]_i^+ - \frac{300}{43}[k_2]_i^+ + \frac{297278}{52632}[k_3]_i^+ - \frac{319}{2322}[k_4]_i^+ + \frac{24068}{84065}[k_5]_i^+ + \frac{3850}{26703}[k_7]_i^+
 \end{array} \right. \\
 \text{Où} \\
 \text{Et}
 \end{array}$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{3}{40}[k_1]_r^+ + \frac{875}{2244}[k_3]_r^+ + \frac{23}{72}[k_4]_r^+ + \frac{264}{1955}[k_5]_r^+ + \frac{125}{11592}[k_7]_r^+ + \frac{43}{616}[k_8]_r^+ \quad (3.40)$$

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 [k_1]_r^+ = hQ(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)) \\
 [k_2]_r^+ = hQ(t_n + \frac{1}{6}h, [z_1]_l^+(\alpha), [z_1]_r^+(\alpha)) \\
 [k_3]_r^+ = hQ(t_n + \frac{4}{15}h, [z_2]_l^+(\alpha), [z_2]_r^+(\alpha)) \\
 [k_4]_r^+ = hQ(t_n + \frac{2}{3}h, [z_3]_l^+(\alpha), [z_3]_r^+(\alpha)) \\
 [k_5]_r^+ = hQ(t_n + \frac{5}{6}h, [z_4]_l^+(\alpha), [z_4]_r^+(\alpha)) \\
 [k_6]_r^+ = hQ(t_n + h, [z_5]_l^+(\alpha), [z_5]_r^+(\alpha)) \\
 [k_7]_r^+ = hQ(t_n + \frac{1}{15}h, [z_6]_l^+(\alpha), [z_6]_r^+(\alpha)) \\
 [k_8]_r^+ = hQ(t_n + h, [z_7]_l^+(\alpha), [z_7]_r^+(\alpha)) \\
 [z_1]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) + \frac{1}{6}[k_1]_i^+ \\
 [z_2]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) + \frac{4}{75}[k_1]_i^+ + \frac{16}{75}[k_2]_i^+ \\
 [z_3]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) + \frac{5}{6}[k_1]_i^+ - \frac{8}{3}[k_2]_i^+ + \frac{5}{2}[k_3]_i^+ \\
 [z_4]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) - \frac{165}{64}[k_1]_i^+ + \frac{55}{6}[k_2]_i^+ - \frac{425}{64}[k_3]_i^+ + \frac{85}{96}[k_4]_i^+ \\
 [z_5]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) + \frac{12}{5}[k_1]_i^+ - 8[k_2]_i^+ + \frac{4015}{612}[k_3]_i^+ - \frac{11}{36}[k_4]_i^+ + \frac{88}{255}[k_5]_i^+ \\
 [z_6]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) - \frac{8263}{15000}[k_1]_i^+ + \frac{124}{75}[k_2]_i^+ - \frac{643}{680}[k_3]_i^+ - \frac{84}{250}[k_4]_i^+ + \frac{2484}{10625}[k_5]_i^+ \\
 [z_7]_i^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^+(\alpha) + \frac{3501}{1720}[k_1]_i^+ - \frac{300}{43}[k_2]_i^+ + \frac{297278}{52632}[k_3]_i^+ - \frac{319}{2322}[k_4]_i^+ + \frac{24068}{84065}[k_5]_i^+ + \frac{3850}{26703}[k_7]_i^+
 \end{array} \right. \\
 \text{Où} \\
 \text{Et}
 \end{array}$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{3}{40}[k_1]_l^- + \frac{875}{2244}[k_3]_l^- + \frac{23}{72}[k_4]_l^- + \frac{264}{1955}[k_5]_l^- + \frac{125}{11592}[k_7]_l^- + \frac{43}{616}[k_8]_l^- \quad (3.41)$$

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 [k_1]_l^- = hR(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) \\
 [k_2]_l^- = hR(t_n + \frac{1}{6}h, [z_1]_l^-(\alpha), [z_1]_r^-(\alpha)) \\
 [k_3]_l^- = hR(t_n + \frac{4}{15}h, [z_2]_l^-(\alpha), [z_2]_r^-(\alpha)) \\
 [k_4]_l^- = hR(t_n + \frac{2}{3}h, [z_3]_l^-(\alpha), [z_3]_r^-(\alpha)) \\
 [k_5]_l^- = hR(t_n + \frac{5}{6}h, [z_4]_l^-(\alpha), [z_4]_r^-(\alpha)) \\
 [k_6]_l^- = hR(t_n + h, [z_5]_l^-(\alpha), [z_5]_r^-(\alpha)) \\
 [k_7]_l^- = hR(t_n + \frac{1}{15}h, [z_6]_l^-(\alpha), [z_6]_r^-(\alpha)) \\
 \text{Où } [k_8]_l^- = hR(t_n + h, [z_7]_l^-(\alpha), [z_7]_r^-(\alpha)) \\
 [z_1]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) + \frac{1}{6}[k_1]_i^- \\
 [z_2]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) + \frac{4}{75}[k_1]_i^- + \frac{16}{75}[k_2]_i^- \\
 [z_3]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) + \frac{5}{6}[k_1]_i^- - \frac{8}{3}[k_2]_i^- + \frac{5}{2}[k_3]_i^- \\
 [z_4]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) - \frac{165}{64}[k_1]_i^- + \frac{55}{6}[k_2]_i^- - \frac{425}{64}[k_3]_i^- + \frac{85}{96}[k_4]_i^- \\
 [z_5]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) + \frac{12}{5}[k_1]_i^- - 8[k_2]_i^- + \frac{4015}{612}[k_3]_i^- - \frac{11}{36}[k_4]_i^- + \frac{88}{255}[k_5]_i^- \\
 [z_6]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) - \frac{8263}{15000}[k_1]_i^- + \frac{124}{75}[k_2]_i^- - \frac{643}{680}[k_3]_i^- - \frac{84}{250}[k_4]_i^- + \frac{2484}{10625}[k_5]_i^- \\
 \text{Et } [z_7]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) + \frac{3501}{1720}[k_1]_i^- - \frac{300}{43}[k_2]_i^- + \frac{297278}{52632}[k_3]_i^- - \frac{319}{2322}[k_4]_i^- + \frac{24068}{84065}[k_5]_i^- + \frac{3850}{26703}[k_7]_i^-
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{3}{40}[k_1]_r^- + \frac{875}{2244}[k_3]_r^- + \frac{23}{72}[k_4]_r^- + \frac{264}{1955}[k_5]_r^- + \frac{125}{11592}[k_7]_r^- + \frac{43}{616}[k_8]_r^- \quad (3.42)$$

$$\text{Où } \left\{ \begin{array}{l}
 [k_1]_r^- = hS(t_n, [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)) \\
 [k_2]_r^- = hS(t_n + \frac{1}{6}h, [z_1]_l^-(\alpha), [z_1]_r^-(\alpha)) \\
 [k_3]_r^- = hS(t_n + \frac{4}{15}h, [z_2]_l^-(\alpha), [z_2]_r^-(\alpha)) \\
 [k_4]_r^- = hS(t_n + \frac{2}{3}h, [z_3]_l^-(\alpha), [z_3]_r^-(\alpha)) \\
 [k_5]_r^- = hS(t_n + \frac{5}{6}h, [z_4]_l^-(\alpha), [z_4]_r^-(\alpha)) \\
 [k_6]_r^- = hS(t_n + h, [z_5]_l^-(\alpha), [z_5]_r^-(\alpha)) \\
 [k_7]_r^- = hS(t_n + \frac{1}{15}h, [z_6]_l^-(\alpha), [z_6]_r^-(\alpha)) \\
 [k_8]_r^- = hS(t_n + h, [z_7]_l^-(\alpha), [z_7]_r^-(\alpha)) \\
 [z_1]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) + \frac{1}{6}[k_1]_i^- \\
 [z_2]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^- + \frac{4}{75}[k_1]_i^- + \frac{16}{75}[k_2]_i^- \\
 [z_3]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) + \frac{5}{6}[k_1]_i^- - \frac{8}{3}[k_2]_i^- + \frac{5}{2}[k_3]_i^- \\
 [z_4]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) - \frac{165}{64}[k_1]_i^- + \frac{55}{6}[k_2]_i^- - \frac{425}{64}[k_3]_i^- + \frac{85}{96}[k_4]_i^- \\
 [z_5]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) + \frac{12}{5}[k_1]_i^- - 8[k_2]_i^- + \frac{4015}{612}[k_3]_i^- - \frac{11}{36}[k_4]_i^- + \frac{88}{255}[k_5]_i^- \\
 [z_6]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) - \frac{8263}{15000}[k_1]_i^- + \frac{124}{75}[k_2]_i^- - \frac{643}{680}[k_3]_i^- - \frac{84}{250}[k_4]_i^- + \frac{2484}{10625}[k_5]_i^- \\
 [z_7]_i^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_i^-(\alpha) + \frac{3501}{1720}[k_1]_i^- - \frac{300}{43}[k_2]_i^- + \frac{297278}{52632}[k_3]_i^- - \frac{319}{2322}[k_4]_i^- + \frac{24068}{84065}[k_5]_i^- + \frac{3850}{26703}[k_7]_i^-
 \end{array} \right.$$

Soient  $P(t, z^+, w^+)$ ,  $Q(t, z^+, w^+)$ ,  $R(t, z^-, w^-)$  et  $S(t, z^-, w^-)$  être des fonctions de (3.18), où  $z^+$ ,  $w^+$ ,  $z^-$  et  $w^-$  sont des constantes et  $z^+ \leq w^+$  et  $z^- \leq w^-$ .

Le domaine de  $P$  et  $Q$  est

$$M_1 = \{(t, z^+, w^+) \mid t_0 \leq t \leq T, \quad \infty < z^+ \leq w^+, \quad -\infty < w^+ < +\infty\}$$

et le domaine de  $R$  et  $S$  est

$$M_2 = \{(t, z^-, w^-) \mid t_0 \leq t \leq T, \quad \infty < z^- \leq w^-, \quad -\infty < w^- < +\infty\}$$

où  $M_1 \subseteq M_2$

**Théorème 1..5.** Soient  $P(t, z^+, w^+)$ ,  $Q(t, z^+, w^+)$  appartiennent à  $C^8(M_1)$  et  $R(t, z^-, w^-)$ ,  $S(t, z^-, w^-)$  appartiennent à  $C^8(M_2)$  et supposons que les dérivées partielles de  $P$ ,  $Q$  et  $R$ ,  $S$  sont bornées sur  $M_1$  et  $M_2$  respectivement. Alors pour tout  $0 \leq \alpha \leq 1$  fixé arbitrairement, les solutions numériques de (3.39), (3.40), (3.41) et (3.42) convergent vers les solutions exactes  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^+(\alpha)$ ,  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^+(\alpha)$ ,  $[\langle U, V \rangle(t)]_l^-(\alpha)$  et  $[\langle U, V \rangle(t)]_r^-(\alpha)$  uniformément en  $t$ .



## 1.4. Applications numériques

### Exemple 1

Dans cette partie, nous allons donner quelques résultats numériques obtenus en utilisant l'algorithme de la méthode d'Euler et Taylor d'ordre 2 et 4. Pour cela nous allons présenter un exemple d'application.

**Exemple 1.1.** *Considérons le problème à valeur initial floue intuitionistique suivant :*

$$\begin{cases} \langle u, v \rangle'(t) = -\langle u, v \rangle(t) + f(t), & \text{pour tout } t \geq 0 \\ \langle u, v \rangle(t_0) = (-1, 0, 1; -2, 0, 2) \end{cases} \quad (3.43)$$

avec  $f(t) = 2\langle u, v \rangle(t_0) \exp(-t)$ .

Alors les solutions exactes sont données par :

$$[\langle U, V \rangle(t)]_\alpha = \left[ \langle u, v \rangle(t_0)(1 + 2t) \exp(-t), \langle u, v \rangle(t_0)(1 + 2t) \exp(-t) \right]$$

$$[\langle U, V \rangle(t)]^\alpha = \left[ \langle u, v \rangle(t_0)(1 + 2t) \exp(-t), \langle u, v \rangle(t_0)(1 + 2t) \exp(-t) \right]$$

qui sont données en  $t=0.27$  par :

$$[\langle U, V \rangle(0.27)]_\alpha = \left[ 1.54(\alpha - 1) \exp(-0.27), 1.54(1 - \alpha) \exp(-0.27) \right]$$

$$[\langle U, V \rangle(0.27)]^\alpha = \left[ 3.08(\alpha - 1) \exp(-0.27), 3.08(1 - \alpha) \exp(-0.27) \right]$$

En appliquant la méthode d'Euler proposée précédemment nous obtenons :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = (1 - h)[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + h[f(t_n)]_l^+(\alpha)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = (1 - h)[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + h[f(t_n)]_r^+(\alpha)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = (1 - h)[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + h[f(t_n)]_l^-(\alpha)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = (1 - h)[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + h[f(t_n)]_r^-(\alpha)$$

En appliquant la méthode de Taylor proposée précédemment nous obtenons :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^{i+1}}{(i+1)!} \left[ [f^{(i)}(t_n)]_l^+(\alpha) - [\langle u, v \rangle^{(i)}(t_n)]_l^+(\alpha) \right]$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^{i+1}}{(i+1)!} \left[ [f^{(i)}(t_n)]_r^+(\alpha) - [\langle u, v \rangle^{(i)}(t_n)]_r^+(\alpha) \right]$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^{i+1}}{(i+1)!} \left[ [f^{(i)}(t_n)]_l^-(\alpha) - [\langle u, v \rangle^{(i)}(t_n)]_l^-(\alpha) \right]$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^{i+1}}{(i+1)!} \left[ [f^{(i)}(t_n)]_r^-(\alpha) - [\langle u, v \rangle^{(i)}(t_n)]_r^-(\alpha) \right] \quad (3.44)$$

Dans le tableau et le figure suivant, on représente les solutions approchées par la méthode de Taylor d'ordre  $p = 2$  et  $p = 4$  et la méthode d'Euler pour  $h = 0.33$  et  $t = 0.27$  et comparées par la solution exacte. On remarque qu'on obtient pratiquement presque les mêmes

solutions.

$\alpha$	Exacte		Euler	
	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$
0	$(-1.1770627, 1.1770627)$	$(0, 0)$	$(-1.3661792, 1.3661792)$	$(0, 0)$
0.2	$(-0.9416501, 0.9416501)$	$(-0.4708250, 0.4708250)$	$(-1.0929434, 1.0929434)$	$(-0.5464717, 0.5464717)$
0.4	$(-0.7062376, 0.7062376)$	$(-0.9416501, 0.9416501)$	$(-0.8197075, 0.8197075)$	$(-1.0929434, 1.0929434)$
0.6	$(-0.4708250, 0.4708250)$	$(-1.4124752, 1.4124752)$	$(-0.5464717, 0.5464717)$	$(-1.6394151, 1.6394151)$
0.8	$(-0.2354125, 0.2354125)$	$(-1.8833003, 1.8833003)$	$(-0.2732358, 0.2732358)$	$(-2.1858868, 2.1858868)$
1	$(0, 0)$	$(-2.3541254, 2.3541254)$	$(0, 0)$	$(-2.7323585, 2.7323585)$

$\alpha$	Taylor $p=2$		Taylor $p=4$	
	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$
0	$(-1.1348091, 1.1348091)$	$(0, 0)$	$(-1.1771713, 1.1771713)$	$(0, 0)$
0.2	$(-0.9078473, 0.9078473)$	$(-0.4539236, 0.4539236)$	$(-0.9417371, 0.9417371)$	$(-0.4708685, 0.4708685)$
0.4	$(-0.6808854, 0.6808854)$	$(-0.9078473, 0.9078473)$	$(-0.7063028, 0.7063028)$	$(-0.9417371, 0.9417371)$
0.6	$(-0.4539236, 0.4539236)$	$(-1.3617709, 1.3617709)$	$(-0.4708685, 0.4708685)$	$(-1.4126056, 1.4126056)$
0.8	$(-0.2269618, 0.2269618)$	$(-1.8156946, 1.8156946)$	$(-0.2354342, 0.2354342)$	$(-1.8834742, 1.8834742)$
1	$(0, 0)$	$(-2.2696183, 2.2696183)$	$(0, 0)$	$(-2.3543427, 2.3543427)$

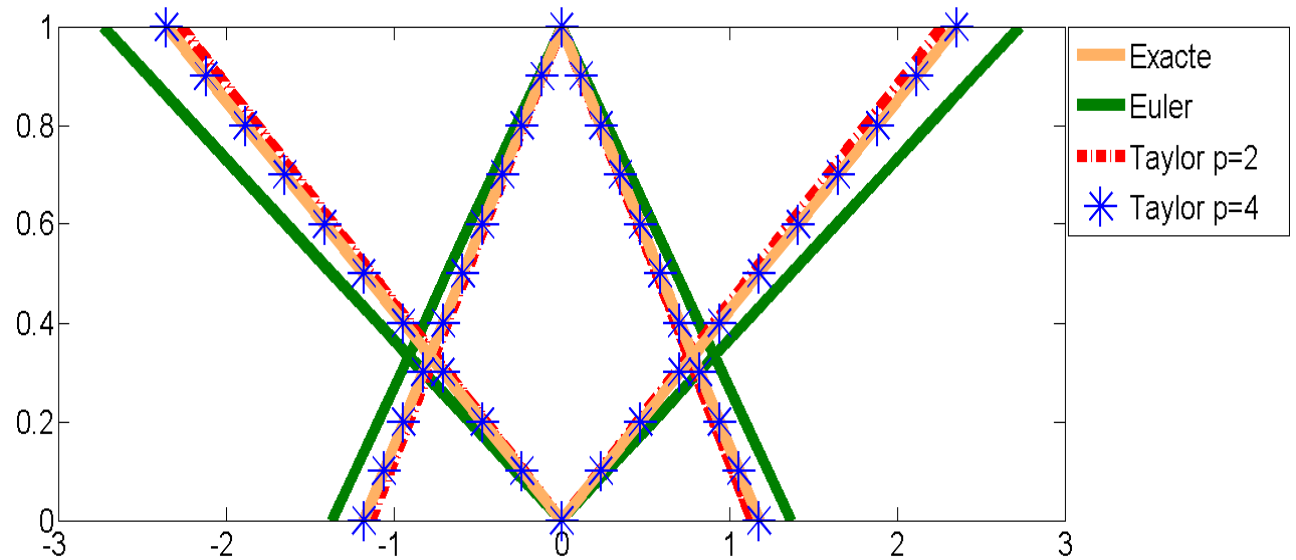


FIGURE 3.1 – Les solutions exactes et les solutions approchées par la méthode de Taylor pour  $p=2$ ,  $p=4$ ,  $h=0.33$  et  $t=0.27$

Voici les résultats obtenus dans le tableaux et la figure ci-dessous, on représente l'erreur pour les différentes méthodes numériques proposées précédemment pour cet exemple, pour  $h = 0.33$  et  $t = 0.27$ . On remarque que l'erreur est d'ordre de  $10^{-4}$  pour la méthode de Taylor d'ordre 4.

$\alpha$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Méthode d'Euler	$0.945 \times 10^{-1}$	$1.134 \times 10^{-1}$	$1.323 \times 10^{-1}$	$1.512 \times 10^{-1}$	$1.702 \times 10^{-1}$	$1.891 \times 10^{-1}$
Méthode de Taylor $p = 2$	$2.112 \times 10^{-2}$	$2.535 \times 10^{-2}$	$2.957 \times 10^{-2}$	$3.380 \times 10^{-2}$	$3.802 \times 10^{-2}$	$4.225 \times 10^{-2}$
Méthode de Taylor $p = 4$	$5.432 \times 10^{-5}$	$6.518 \times 10^{-5}$	$7.605 \times 10^{-5}$	$8.691 \times 10^{-5}$	$9.777 \times 10^{-5}$	$1.086 \times 10^{-4}$

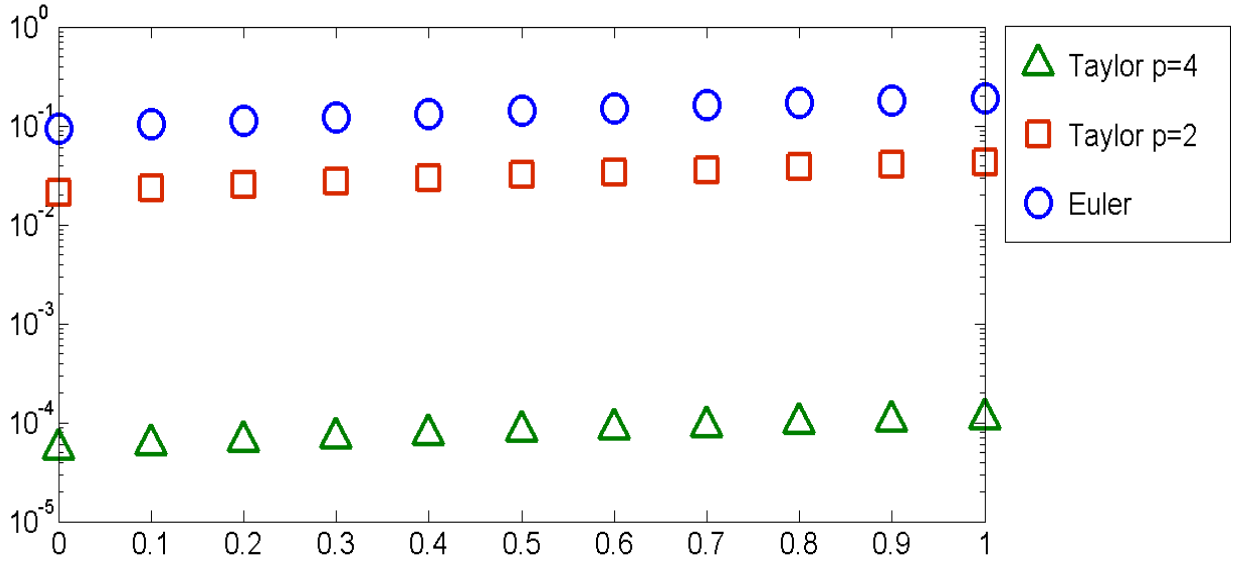


FIGURE 3.2 – Estimation d'erreur

### Exemple 2

Dans cette deuxième partie, nous allons présenter quelques résultats numériques obtenus en utilisant la méthode du Runge-Kutta d'ordre 3 et 4 et 8. Alors, nous allons donner un exemple d'application suivant.

**Exemple 1..2.** *Considérons le problème à valeur initial floue intuitionistique suivant :*

$$\begin{cases} \langle u, v \rangle'(t) = \langle u, v \rangle(t), \text{ pour tout } t \geq 0 \\ \langle u, v \rangle(t_0) = (-1.75, 0, 1.75; -3.25, 0, 3.25) \end{cases} \quad (3.45)$$

Alors la solution exacte est donnée par :

$$[\langle U, V \rangle(t)]_\alpha = [1.75(\alpha - 1) \exp(t), 1.75(1 - \alpha) \exp(t)]$$

$$[\langle U, V \rangle(t)]^\alpha = [3.25(\alpha - 1) \exp(t), 3.25(1 - \alpha) \exp(t)]$$

qui est donnée en  $t=0.9$  par :

$$[\langle U, V \rangle(0.9)]_\alpha = [1.75(\alpha - 1) \exp(0.9), 1.75(1 - \alpha) \exp(0.9)]$$

$$[\langle U, V \rangle(0.9)]^\alpha = [3.25(\alpha - 1) \exp(0.9), 3.25(1 - \alpha) \exp(0.9)]$$

En appliquant la méthode de Runge-Kutta Nyström d'ordre 3 proposée précédemment nous obtenons :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{1}{8}[2K_1 + 3K_2 + 3K_3]$$

Où

$$\begin{cases} K_1 = h[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) \\ K_2 = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{2}{3}K_1\right] \\ K_3 = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{2}{3}K_2\right] \end{cases}$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{1}{8}[2K_1 + 3K_2 + 3K_3]$$

Où

$$\begin{cases} K_1 = h[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) \\ K_2 = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{2}{3}K_1\right] \\ K_3 = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{2}{3}K_2\right] \end{cases}$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{1}{8}[2K_1 + 3K_2 + 3K_3]$$

Où

$$\begin{cases} K_1 = h[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) \\ K_2 = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{2}{3}K_1\right] \\ K_3 = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{2}{3}K_2\right] \end{cases}$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{1}{8}[2K_1 + 3K_2 + 3K_3]$$

Où

$$\begin{cases} K_1 = h[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) \\ K_2 = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{2}{3}K_1\right] \\ K_3 = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{2}{3}K_2\right] \end{cases}$$

Maintenant en appliquant la méthode de Runge-Kutta Gill d'ordre 4 proposée précédemment nous obtenons :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{1}{6}([k_1]_l^+(\alpha) + (2 - \sqrt{2})[k_2]_l^+(\alpha) + (2 + \sqrt{2})[k_3]_l^+(\alpha) + [k_4]_l^+(\alpha))$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_l^+(\alpha) = h[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) \\ [k_2]_l^+(\alpha) = h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_l^+(\alpha)\right] \\ [k_3]_l^+(\alpha) = h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)[k_1]_l^+(\alpha) + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)[k_2]_l^+(\alpha)\right] \\ [k_4]_l^+(\alpha) = h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_l^+(\alpha) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[k_3]_l^+(\alpha)\right] \end{array} \right.$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{1}{6}([k_1]_l^+(\alpha) + (2-\sqrt{2})[k_2]_r^+(\alpha) + (2+\sqrt{2})[k_3]_r^+(\alpha) + [k_4]_r^+(\alpha))$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_r^+(\alpha) = h[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) \\ [k_2]_r^+(\alpha) = h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_r^+(\alpha)\right] \\ [k_3]_r^+(\alpha) = h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)[k_1]_r^+(\alpha) + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)[k_2]_r^+(\alpha)\right] \\ [k_4]_r^+(\alpha) = h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_r^+(\alpha) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[k_3]_r^+(\alpha)\right] \end{array} \right.$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{1}{6}([k_1]_l^-(\alpha) + (2-\sqrt{2})[k_2]_l^-(\alpha) + (2+\sqrt{2})[k_3]_l^-(\alpha) + [k_4]_l^-(\alpha))$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_l^-(\alpha) = h[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) \\ [k_2]_l^-(\alpha) = h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_l^-(\alpha)\right] \\ [k_3]_l^-(\alpha) = h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)[k_1]_l^-(\alpha) + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)[k_2]_l^-(\alpha)\right] \\ [k_4]_l^-(\alpha) = h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_l^-(\alpha) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[k_3]_l^-(\alpha)\right] \end{array} \right.$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{1}{6}([k_1]_l^-(\alpha) + (2-\sqrt{2})[k_2]_r^-(\alpha) + (2+\sqrt{2})[k_3]_r^-(\alpha) + [k_4]_r^-(\alpha))$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_r^-(\alpha) = h[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) \\ [k_2]_r^-(\alpha) = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_r^-(\alpha) \right] \\ [k_3]_r^-(\alpha) = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)[k_1]_r^-(\alpha) + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)[k_2]_r^-(\alpha) \right] \\ [k_4]_r^-(\alpha) = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_r^-(\alpha) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[k_3]_r^-(\alpha) \right] \end{array} \right.$$

Maintenant en appliquant la méthode de Runge-Kutta Verner d'ordre 8 proposée précédemment nous obtenons :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{3}{40}[k_1]_l^+ + \frac{875}{2244}[k_3]_l^+ + \frac{23}{72}[k_4]_l^+ + \frac{264}{1955}[k_5]_l^+ + \frac{125}{11592}[k_7]_l^+ + \frac{43}{616}[k_8]_l^+$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_l^+ = h[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) \\ [k_2]_l^+ = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{1}{6}[k_1]_l^+ \right] \\ [k_3]_l^+ = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{4}{75}[k_1]_l^+ + \frac{16}{75}[k_2]_l^+ \right] \\ [k_4]_l^+ = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{5}{6}[k_1]_l^+ - \frac{8}{3}[k_2]_l^+ + \frac{5}{2}[k_3]_l^+ \right] \\ [k_5]_l^+ = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) - \frac{165}{64}[k_1]_l^+ + \frac{55}{6}[k_2]_l^+ - \frac{425}{64}[k_3]_l^+ + \frac{85}{96}[k_4]_l^+ \right] \\ [k_6]_l^+ = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{12}{5}[k_1]_l^+ - 8[k_2]_l^+ + \frac{4015}{612}[k_3]_l^+ - \frac{11}{36}[k_4]_l^+ + \frac{88}{255}[k_5]_l^+ \right] \\ [k_7]_l^+ = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) - \frac{8263}{15000}[k_1]_l^+ + \frac{124}{75}[k_2]_l^+ - \frac{643}{680}[k_3]_l^+ - \frac{84}{250}[k_4]_l^+ + \frac{2484}{10625}[k_5]_l^+ \right] \\ [k_8]_l^+ = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{3501}{1720}[k_1]_l^+ - \frac{300}{43}[k_2]_l^+ + \frac{297278}{52632}[k_3]_l^+ - \frac{319}{2322}[k_4]_l^+ + \frac{24068}{84065}[k_5]_l^+ + \frac{3850}{26703}[k_7]_l^+ \right] \end{array} \right.$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{3}{40}[k_1]_r^+ + \frac{875}{2244}[k_3]_r^+ + \frac{23}{72}[k_4]_r^+ + \frac{264}{1955}[k_5]_r^+ + \frac{125}{11592}[k_7]_r^+ + \frac{43}{616}[k_8]_r^+$$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 [k_1]_r^+ = h[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) \\
 [k_2]_r^+ = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{1}{6}[k_1]_r^+\right] \\
 [k_3]_r^+ = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{4}{75}[k_1]_r^+ + \frac{16}{75}[k_2]_r^+\right] \\
 [k_4]_r^+ = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{5}{6}[k_1]_r^+ - \frac{8}{3}[k_2]_r^+ + \frac{5}{2}[k_3]_r^+\right] \\
 [k_5]_r^+ = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) - \frac{165}{64}[k_1]_r^+ + \frac{55}{6}[k_2]_r^+ - \frac{425}{64}[k_3]_r^+ + \frac{85}{96}[k_4]_r^+\right] \\
 [k_6]_r^+ = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{12}{5}[k_1]_r^+ - 8[k_2]_r^+ + \frac{4015}{612}[k_3]_r^+ - \frac{11}{36}[k_4]_r^+ + \frac{88}{255}[k_5]_r^+\right] \\
 [k_7]_r^+ = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) - \frac{8263}{15000}[k_1]_r^+ + \frac{124}{75}[k_2]_r^+ - \frac{643}{680}[k_3]_r^+ - \frac{84}{250}[k_4]_r^+ + \frac{2484}{10625}[k_5]_r^+\right] \\
 [k_8]_r^+ = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{3501}{1720}[k_1]_r^+ - \frac{300}{43}[k_2]_r^+ + \frac{297278}{52632}[k_3]_r^+ - \frac{319}{2322}[k_4]_r^+ + \frac{24068}{84065}[k_5]_r^+ + \frac{3850}{26703}[k_7]_r^+\right]
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{Où} \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \text{Et}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{3}{40}[k_1]_l^- + \frac{875}{2244}[k_3]_l^- + \frac{23}{72}[k_4]_l^- + \frac{264}{1955}[k_5]_l^- + \frac{125}{11592}[k_7]_l^- + \frac{43}{616}[k_8]_l^-$$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 [k_1]_l^- = h[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) \\
 [k_2]_l^- = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{1}{6}[k_1]_l^-\right] \\
 [k_3]_l^- = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{4}{75}[k_1]_l^- + \frac{16}{75}[k_2]_l^-\right] \\
 [k_4]_l^- = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{5}{6}[k_1]_l^- - \frac{8}{3}[k_2]_l^- + \frac{5}{2}[k_3]_l^-\right] \\
 [k_5]_l^- = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) - \frac{165}{64}[k_1]_l^- + \frac{55}{6}[k_2]_l^- - \frac{425}{64}[k_3]_l^- + \frac{85}{96}[k_4]_l^-\right] \\
 [k_6]_l^- = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{12}{5}[k_1]_l^- - 8[k_2]_l^- + \frac{4015}{612}[k_3]_l^- - \frac{11}{36}[k_4]_l^- + \frac{88}{255}[k_5]_l^-\right] \\
 [k_7]_l^- = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) - \frac{8263}{15000}[k_1]_l^- + \frac{124}{75}[k_2]_l^- - \frac{643}{680}[k_3]_l^- - \frac{84}{250}[k_4]_l^- + \frac{2484}{10625}[k_5]_l^-\right] \\
 [k_8]_l^- = h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{3501}{1720}[k_1]_l^- - \frac{300}{43}[k_2]_l^- + \frac{297278}{52632}[k_3]_l^- - \frac{319}{2322}[k_4]_l^- + \frac{24068}{84065}[k_5]_l^- + \frac{3850}{26703}[k_7]_l^-\right]
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{Où} \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \text{Et}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{3}{40}[k_1]_r^- + \frac{875}{2244}[k_3]_r^- + \frac{23}{72}[k_4]_r^- + \frac{264}{1955}[k_5]_r^- + \frac{125}{11592}[k_7]_r^- + \frac{43}{616}[k_8]_r^-$$

$$\text{Où } \left\{ \begin{array}{l}
 [k_1]_r^- = h[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) \\
 [k_2]_r^- = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{1}{6}[k_1]_r^- \right] \\
 [k_3]_r^- = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{4}{75}[k_1]_r^- + \frac{16}{75}[k_2]_r^- \right] \\
 [k_4]_r^- = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{5}{6}[k_1]_r^- - \frac{8}{3}[k_2]_r^- + \frac{5}{2}[k_3]_r^- \right] \\
 [k_5]_r^- = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) - \frac{165}{64}[k_1]_r^- + \frac{55}{6}[k_2]_r^- - \frac{425}{64}[k_3]_r^- + \frac{85}{96}[k_4]_r^- \right] \\
 [k_6]_r^- = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{12}{5}[k_1]_r^- - 8[k_2]_r^- + \frac{4015}{612}[k_3]_r^- - \frac{11}{36}[k_4]_r^- + \frac{88}{255}[k_5]_r^- \right] \\
 [k_7]_r^- = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) - \frac{8263}{15000}[k_1]_r^- + \frac{124}{75}[k_2]_r^- - \frac{643}{680}[k_3]_r^- - \frac{84}{250}[k_4]_r^- - \frac{2484}{10625}[k_5]_r^- \right] \\
 [k_8]_r^- = h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{3501}{1720}[k_1]_r^- - \frac{300}{43}[k_2]_r^- + \frac{297278}{52632}[k_3]_r^- - \frac{319}{2322}[k_4]_r^- + \frac{24068}{84065}[k_5]_r^- + \frac{3850}{26703}[k_7]_r^- \right]
 \end{array} \right.$$

Nous représentons dans le tableau et la figure suivante, les solutions approchées par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3, 4 et 8 pour  $h = 0.22$  et comparées par les solutions exactes. On obtient encore une bonne approximation des solutions exactes.

$\alpha$	Exacte		RK-Nyström	
	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$
0	$(-4.30430544, 4.30430544)$	$(0, 0)$	$(-4.30276889, 4.30276889)$	$(0, 0)$
0.2	$(-3.44344435, 3.44344435)$	$(-1.59874202, 1.59874202)$	$(-3.44221511, 3.44221511)$	$(-1.59817130, 1.59817130)$
0.4	$(-2.58258326, 2.58258326)$	$(-3.19748404, 3.19748404)$	$(-2.58166133, 2.58166133)$	$(-3.19634260, 3.19634260)$
0.6	$(-1.72172217, 1.72172217)$	$(-4.79622606, 4.79622606)$	$(-1.72110755, 1.72110755)$	$(-4.79451390, 4.79451390)$
0.8	$(-0.86086108, 0.86086108)$	$(-6.39496808, 6.39496808)$	$(-0.86055377, 0.86055377)$	$(-6.39268520, 6.39268520)$
1	$(0, 0)$	$(-7.99371011, 7.99371011)$	$(0, 0)$	$(-7.99085651, 7.99085651)$

$\alpha$	RK-Gill		RK-Verner	
	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$
0	$(-4.30423681, 4.30423681)$	$(0, 0)$	$(-4.30430543, 4.30430543)$	$(0, 0)$
0.2	$(-3.44338945, 3.44338945)$	$(-1.59871653, 1.59871653)$	$(-3.44344434, 3.44344434)$	$(-1.59874201, 1.59874201)$
0.4	$(-2.58254209, 2.58254209)$	$(-3.19743306, 3.19743306)$	$(-2.58258326, 2.58258326)$	$(-3.19748403, 3.19748403)$
0.6	$(-1.72169472, 1.72169472)$	$(-4.79614959, 4.79614959)$	$(-1.72172217, 1.72172217)$	$(-4.79622605, 4.79622605)$
0.8	$(-0.86084736, 0.86084736)$	$(-6.39486613, 6.39486613)$	$(-0.86086108, 0.86086108)$	$(-6.39496807, 6.39496807)$
1	$(0, 0)$	$(-7.99358266, 7.99358266)$	$(0, 0)$	$(-7.99371009, 7.99371009)$



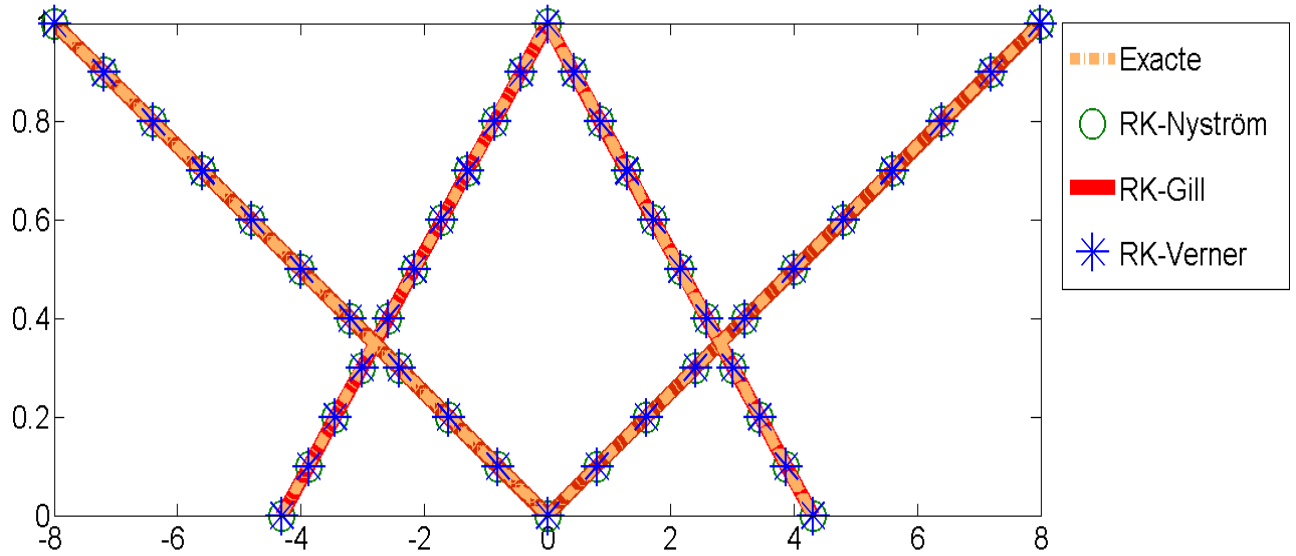


FIGURE 3.3 – Les solutions exactes et les solutions approchées par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3, 4 et 8 pour  $h=0.22$  et  $t=0.9$

Voici les résultats obtenus dans le tableaux et la figure ci-dessous, on représente l'erreur pour les différentes méthodes numériques proposées précédemment pour cet exemple, pour  $h = 0.22$  et  $t = 0.9$ . On remarque que l'erreur est d'ordre de  $10^{-8}$  pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre 8.

Les Méthodes \ $\alpha$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Runge-Kutta Nyström	$0.768 \times 10^{-3}$	$0.899 \times 10^{-3}$	$1.031 \times 10^{-3}$	$1.163 \times 10^{-3}$	$1.295 \times 10^{-3}$	$1.426 \times 10^{-3}$
Runge-Kutta Gill	$0.343 \times 10^{-4}$	$0.401 \times 10^{-4}$	$0.460 \times 10^{-4}$	$0.519 \times 10^{-4}$	$0.578 \times 10^{-4}$	$0.637 \times 10^{-4}$
Runge-Kutta Verner	$0.380 \times 10^{-8}$	$0.445 \times 10^{-8}$	$0.510 \times 10^{-8}$	$0.575 \times 10^{-8}$	$0.641 \times 10^{-8}$	$0.706 \times 10^{-8}$

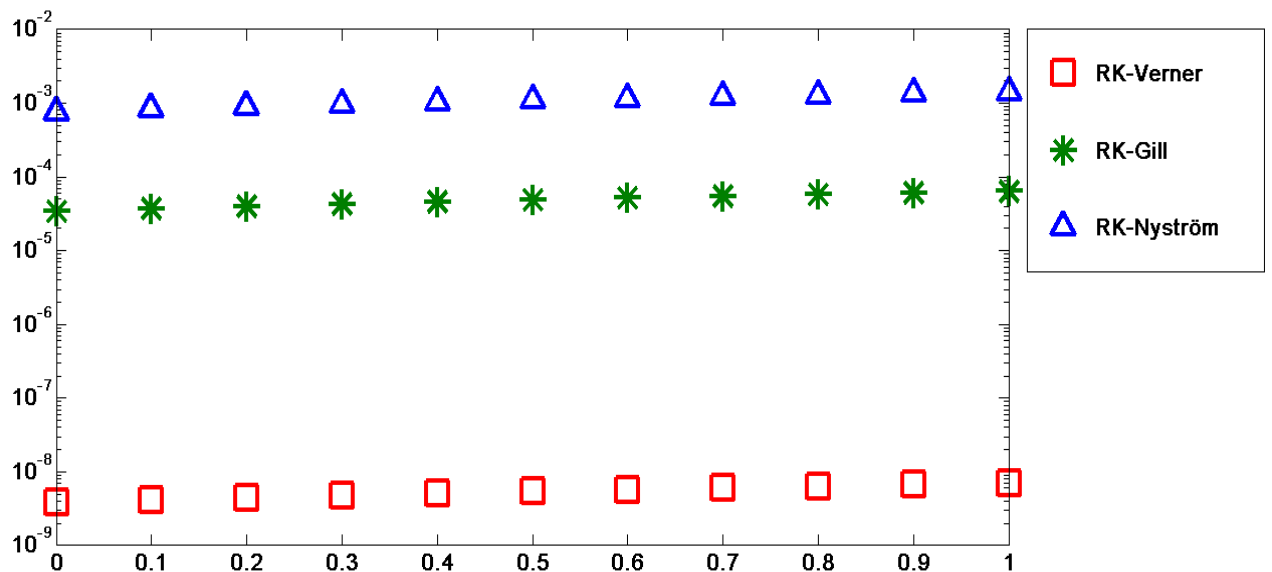


FIGURE 3.4 – Estimation d'erreur

### Comparaison

Dans cette partie, nous allons présenter une application numérique obtenus en comparant la méthode du Runge-Kutta d'ordre 3 et 4 et 8 par les méthodes de Taylor pour  $p=2$  et  $p=4$  et la méthode d'Euler.

**Exemple 1.3.** *Considérons le problème à valeur initial floue intuitionistique suivant :*

$$\begin{cases} \langle u, v \rangle'(t) = -\langle u, v \rangle(t), \text{ pour tout } t \geq 0 \\ \langle u, v \rangle(t_0) = (-3, 0, 3; -4.75, 0, 4.75) \end{cases} \quad (3.46)$$

Alors les solutions exactes sont données par :

$$[\langle U, V \rangle(t)]_\alpha = \left[ \langle u, v \rangle(t_0) \exp(-t), \langle u, v \rangle(t_0) \exp(-t) \right]$$

$$[\langle U, V \rangle(t)]^\alpha = \left[ (\langle u, v \rangle(t_0) \exp(-t), \langle u, v \rangle(t_0) \exp(-t)) \right]$$

qui sont données en  $t=1$  par :

$$[\langle U, V \rangle(1)]_\alpha = \left[ \langle u, v \rangle(t_0) \exp(-1), \langle u, v \rangle(t_0) \exp(-1) \right]$$

$$[\langle U, V \rangle(1)]^\alpha = \left[ \langle u, v \rangle(t_0) \exp(-1), \langle u, v \rangle(t_0) \exp(-1) \right]$$

En appliquant la méthode d'Euler proposée nous obtenons :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = (1-h)[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = (1-h)[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = (1-h)[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = (1-h)[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha)$$

D'où

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = (1-h)^{n+1}[\langle u, v \rangle(t_0)]_l^+(\alpha)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = (1-h)^{n+1}[\langle u, v \rangle(t_0)]_r^+(\alpha)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = (1-h)^{n+1}[\langle u, v \rangle(t_0)]_l^-(\alpha)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = (1-h)^{n+1}[\langle u, v \rangle(t_0)]_r^-(\alpha)$$

En appliquant la méthode de Taylor proposée nous obtenons :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^{i+1}}{(i+1)!} [\langle u, v \rangle^{(i)}(t_n)]_l^+(\alpha)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^{i+1}}{(i+1)!} [\langle u, v \rangle^{(i)}(t_n)]_r^+(\alpha)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^{i+1}}{(i+1)!} [\langle u, v \rangle^{(i)}(t_n)]_l^-(\alpha)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^{i+1}}{(i+1)!} [\langle u, v \rangle^{(i)}(t_n)]_r^-(\alpha)$$

(3.47)

D'où on obtient la méthode de Taylor pour  $p=2$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) &= (1 - h + \frac{h^2}{2})^{n+1} [\langle u, v \rangle(t_0)]_l^+(\alpha) \\
 [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) &= (1 - h + \frac{h^2}{2})^{n+1} [\langle u, v \rangle(t_0)]_r^+(\alpha) \\
 [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) &= (1 - h + \frac{h^2}{2})^{n+1} [\langle u, v \rangle(t_0)]_l^-(\alpha) \\
 [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) &= (1 - h + \frac{h^2}{2})^{n+1} [\langle u, v \rangle(t_0)]_r^-(\alpha)
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Et pour  $p=4$  la méthode de Taylor est :

$$\begin{aligned}
 [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) &= (1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24})^{n+1} [\langle u, v \rangle(t_0)]_l^+(\alpha) \\
 [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) &= (1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24})^{n+1} [\langle u, v \rangle(t_0)]_r^+(\alpha) \\
 [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) &= (1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24})^{n+1} [\langle u, v \rangle(t_0)]_l^-(\alpha) \\
 [\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) &= (1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24})^{n+1} [\langle u, v \rangle(t_0)]_r^-(\alpha)
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

En appliquant la méthode de Runge-Kutta Nyström d'ordre 3 proposée précédemment nous obtenons :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{1}{8}[2K_1 + 3K_2 + 3K_3]$$

Où

$$\begin{cases}
 K_1 = -h[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) \\
 K_2 = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{2}{3}K_1\right) \\
 K_3 = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{2}{3}K_2\right)
 \end{cases}$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{1}{8}[2K_1 + 3K_2 + 3K_3]$$

Où

$$\begin{cases}
 K_1 = -h[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) \\
 K_2 = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{2}{3}K_1\right) \\
 K_3 = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{2}{3}K_2\right)
 \end{cases}$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{1}{8}[2K_1 + 3K_2 + 3K_3]$$

Où

$$\begin{cases}
 K_1 = -h[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) \\
 K_2 = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{2}{3}K_1\right) \\
 K_3 = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{2}{3}K_2\right)
 \end{cases}$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{1}{8}[2K_1 + 3K_2 + 3K_3]$$

Où

$$\begin{cases} K_1 = -h[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) \\ K_2 = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{2}{3}K_1\right) \\ K_3 = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{2}{3}K_2\right) \end{cases}$$

Maintenant en appliquant la méthode de Runge-Kutta Gill d'ordre 4 proposée précédemment nous obtenons :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{1}{6}([k_1]_l^+(\alpha) + (2 - \sqrt{2})[k_2]_l^+(\alpha) + (2 + \sqrt{2})[k_3]_l^+(\alpha) + [k_4]_l^+(\alpha))$$

Où

$$\begin{cases} [k_1]_l^+(\alpha) = -h[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) \\ [k_2]_l^+(\alpha) = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_l^+(\alpha)\right) \\ [k_3]_l^+(\alpha) = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)[k_1]_l^+(\alpha) + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)[k_2]_l^+(\alpha)\right) \\ [k_4]_l^+(\alpha) = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_l^+(\alpha) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[k_3]_l^+(\alpha)\right) \end{cases}$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{1}{6}([k_1]_r^+(\alpha) + (2 - \sqrt{2})[k_2]_r^+(\alpha) + (2 + \sqrt{2})[k_3]_r^+(\alpha) + [k_4]_r^+(\alpha))$$

Où

$$\begin{cases} [k_1]_r^+(\alpha) = -h[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) \\ [k_2]_r^+(\alpha) = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_r^+(\alpha)\right) \\ [k_3]_r^+(\alpha) = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)[k_1]_r^+(\alpha) + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)[k_2]_r^+(\alpha)\right) \\ [k_4]_r^+(\alpha) = -h\left([\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_r^+(\alpha) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[k_3]_r^+(\alpha)\right) \end{cases}$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{1}{6}([k_1]_l^-(\alpha) + (2 - \sqrt{2})[k_2]_l^-(\alpha) + (2 + \sqrt{2})[k_3]_l^-(\alpha) + [k_4]_l^-(\alpha))$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_l^-(\alpha) = -h[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) \\ [k_2]_l^-(\alpha) = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_l^-(\alpha)\right] \\ [k_3]_l^-(\alpha) = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)[k_1]_l^-(\alpha) + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)[k_2]_l^-(\alpha)\right] \\ [k_4]_l^-(\alpha) = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_l^-(\alpha) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[k_3]_l^-(\alpha)\right] \end{array} \right.$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{1}{6}([k_1]_l^-(\alpha) + (2-\sqrt{2})[k_2]_r^-(\alpha) + (2+\sqrt{2})[k_3]_r^-(\alpha) + [k_4]_r^-(\alpha))$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_r^-(\alpha) = -h[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) \\ [k_2]_r^-(\alpha) = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{1}{2}[k_1]_r^-(\alpha)\right] \\ [k_3]_r^-(\alpha) = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)[k_1]_r^-(\alpha) + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)[k_2]_r^-(\alpha)\right] \\ [k_4]_r^-(\alpha) = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}}[k_2]_r^-(\alpha) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[k_3]_r^-(\alpha)\right] \end{array} \right.$$

Maintenant en appliquant la méthode de Runge-Kutta Verner d'ordre 8 proposée précédemment nous obtenons :

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{3}{40}[k_1]_l^+ + \frac{875}{2244}[k_3]_l^+ + \frac{23}{72}[k_4]_l^+ + \frac{264}{1955}[k_5]_l^+ + \frac{125}{11592}[k_7]_l^+ + \frac{43}{616}[k_8]_l^+$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1]_l^+ = -h[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) \\ [k_2]_l^+ = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{1}{6}[k_1]_l^+\right] \\ [k_3]_l^+ = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{4}{75}[k_1]_l^+ + \frac{16}{75}[k_2]_l^+\right] \\ [k_4]_l^+ = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{5}{6}[k_1]_l^+ - \frac{8}{3}[k_2]_l^+ + \frac{5}{2}[k_3]_l^+\right] \\ [k_5]_l^+ = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) - \frac{165}{64}[k_1]_l^+ + \frac{55}{6}[k_2]_l^+ - \frac{425}{64}[k_3]_l^+ + \frac{85}{96}[k_4]_l^+\right] \\ [k_6]_l^+ = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{12}{5}[k_1]_l^+ - 8[k_2]_l^+ + \frac{4015}{612}[k_3]_l^+ - \frac{11}{36}[k_4]_l^+ + \frac{88}{255}[k_5]_l^+\right] \\ [k_7]_l^+ = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) - \frac{8263}{15000}[k_1]_l^+ + \frac{124}{75}[k_2]_l^+ - \frac{643}{680}[k_3]_l^+ - \frac{84}{250}[k_4]_l^+ + \frac{2484}{10625}[k_5]_l^+\right] \\ [k_8]_l^+ = -h\left[[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^+(\alpha) + \frac{3501}{1720}[k_1]_l^+ - \frac{300}{43}[k_2]_l^+ + \frac{297278}{52632}[k_3]_l^+ - \frac{319}{2322}[k_4]_l^+ + \frac{24068}{84065}[k_5]_l^+ + \frac{3850}{26703}[k_7]_l^+\right] \end{array} \right.$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{3}{40}[k_1]_r^+ + \frac{875}{2244}[k_3]_r^+ + \frac{23}{72}[k_4]_r^+ + \frac{264}{1955}[k_5]_r^+ + \frac{125}{11592}[k_7]_r^+ + \frac{43}{616}[k_8]_r^+$$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 [k_1]_r^+ = -h[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) \\
 [k_2]_r^+ = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{1}{6}[k_1]_r^+\right] \\
 [k_3]_r^+ = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{4}{75}[k_1]_r^+ + \frac{16}{75}[k_2]_r^+\right] \\
 [k_4]_r^+ = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{5}{6}[k_1]_r^+ - \frac{8}{3}[k_2]_r^+ + \frac{5}{2}[k_3]_r^+\right] \\
 [k_5]_r^+ = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) - \frac{165}{64}[k_1]_r^+ + \frac{55}{6}[k_2]_r^+ - \frac{425}{64}[k_3]_r^+ + \frac{85}{96}[k_4]_r^+\right] \\
 [k_6]_r^+ = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{12}{5}[k_1]_r^+ - 8[k_2]_r^+ + \frac{4015}{612}[k_3]_r^+ - \frac{11}{36}[k_4]_r^+ + \frac{88}{255}[k_5]_r^+\right] \\
 [k_7]_r^+ = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) - \frac{8263}{15000}[k_1]_r^+ + \frac{124}{75}[k_2]_r^+ - \frac{643}{680}[k_3]_r^+ - \frac{84}{250}[k_4]_r^+ + \frac{2484}{10625}[k_5]_r^+\right] \\
 [k_8]_r^+ = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^+(\alpha) + \frac{3501}{1720}[k_1]_r^+ - \frac{300}{43}[k_2]_r^+ + \frac{297278}{52632}[k_3]_r^+ - \frac{319}{2322}[k_4]_r^+ + \frac{24068}{84065}[k_5]_r^+ + \frac{3850}{26703}[k_7]_r^+\right]
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 O\grave{u} \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \\
 Et
 \end{array}$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{3}{40}[k_1]_l^- + \frac{875}{2244}[k_3]_l^- + \frac{23}{72}[k_4]_l^- + \frac{264}{1955}[k_5]_l^- + \frac{125}{11592}[k_7]_l^- + \frac{43}{616}[k_8]_l^-$$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 [k_1]_l^- = -h[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) \\
 [k_2]_l^- = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{1}{6}[k_1]_l^-\right] \\
 [k_3]_l^- = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{4}{75}[k_1]_l^- + \frac{16}{75}[k_2]_l^-\right] \\
 [k_4]_l^- = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{5}{6}[k_1]_l^- - \frac{8}{3}[k_2]_l^- + \frac{5}{2}[k_3]_l^-\right] \\
 [k_5]_l^- = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) - \frac{165}{64}[k_1]_l^- + \frac{55}{6}[k_2]_l^- - \frac{425}{64}[k_3]_l^- + \frac{85}{96}[k_4]_l^-\right] \\
 [k_6]_l^- = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{12}{5}[k_1]_l^- - 8[k_2]_l^- + \frac{4015}{612}[k_3]_l^- - \frac{11}{36}[k_4]_l^- + \frac{88}{255}[k_5]_l^-\right] \\
 [k_7]_l^- = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) - \frac{8263}{15000}[k_1]_l^- + \frac{124}{75}[k_2]_l^- - \frac{643}{680}[k_3]_l^- - \frac{84}{250}[k_4]_l^- + \frac{2484}{10625}[k_5]_l^-\right] \\
 [k_8]_l^- = -h\left[\langle u, v \rangle(t_n)]_l^-(\alpha) + \frac{3501}{1720}[k_1]_l^- - \frac{300}{43}[k_2]_l^- + \frac{297278}{52632}[k_3]_l^- - \frac{319}{2322}[k_4]_l^- + \frac{24068}{84065}[k_5]_l^- + \frac{3850}{26703}[k_7]_l^-\right]
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 O\grave{u} \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \\
 Et
 \end{array}$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{n+1})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{3}{40}[k_1]_r^- + \frac{875}{2244}[k_3]_r^- + \frac{23}{72}[k_4]_r^- + \frac{264}{1955}[k_5]_r^- + \frac{125}{11592}[k_7]_r^- + \frac{43}{616}[k_8]_r^-$$

$$\text{Où } \left\{ \begin{array}{l}
 [k_1]_r^- = -h[\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) \\
 [k_2]_r^- = -h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{1}{6}[k_1]_r^- \right] \\
 [k_3]_r^- = -h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{4}{75}[k_1]_r^- + \frac{16}{75}[k_2]_r^- \right] \\
 [k_4]_r^- = -h \left[ \langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{5}{6}[k_1]_r^- - \frac{8}{3}[k_2]_r^- + \frac{5}{2}[k_3]_r^- \right] \\
 [k_5]_r^- = -h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) - \frac{165}{64}[k_1]_r^- + \frac{55}{6}[k_2]_r^- - \frac{425}{64}[k_3]_r^- + \frac{85}{96}[k_4]_r^- \right] \\
 [k_6]_r^- = -h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{12}{5}[k_1]_r^- - 8[k_2]_r^- + \frac{4015}{612}[k_3]_r^- - \frac{11}{36}[k_4]_r^- + \frac{88}{255}[k_5]_r^- \right] \\
 [k_7]_r^- = -h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) - \frac{8263}{15000}[k_1]_r^- + \frac{124}{75}[k_2]_r^- - \frac{643}{680}[k_3]_r^- - \frac{84}{250}[k_4]_r^- - \frac{2484}{10625}[k_5]_r^- \right] \\
 [k_8]_r^- = -h \left[ [\langle u, v \rangle(t_n)]_r^-(\alpha) + \frac{3501}{1726}[k_1]_r^- - \frac{300}{43}[k_2]_r^- + \frac{297278}{52632}[k_3]_r^- - \frac{319}{2322}[k_4]_r^- + \frac{24068}{84065}[k_5]_r^- + \frac{3850}{26703}[k_7]_r^- \right]
 \end{array} \right.$$

Dans le tableau et la figure suivante, on représente les solutions approchées par la méthode de Taylor d'ordre  $p = 2$  et  $p = 4$ , la méthode d'Euler et la méthode du Runge-Kutta d'ordre 3 et 4 et 8 pour  $h = 0.34$  et comparées par les solutions exactes. On remarque qu'on obtient pratiquement presque les mêmes solutions.

$\alpha$	Exacte		Euler	
	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$
0	$(-1.103638323, 1.103638323)$	$(0, 0)$	$(-0.8888888, 0.8888888)$	$(0, 0)$
0.2	$(-0.882910658, 0.882910658)$	$(-0.349485469, 0.349485469)$	$(-0.7111111, 0.7111111)$	$(-0.281481, 0.281481)$
0.4	$(-0.662182994, 0.662182994)$	$(-0.698970938, 0.698970938)$	$(-0.5333333, 0.5333333)$	$(-0.562962, 0.562962)$
0.6	$(-0.441455329, 0.441455329)$	$(-1.048456407, 1.048456407)$	$(-0.3555555, 0.3555555)$	$(-0.8444444, 0.8444444)$
0.8	$(-0.220727664, 0.220727664)$	$(-1.397941876, 1.397941876)$	$(-0.1777777, 0.1777777)$	$(-1.125925, 1.125925)$
1	$(0, 0)$	$(-1.747427345, 1.747427345)$	$(0, 0)$	$(-1.407407, 1.407407)$

$\alpha$	Taylor $p=2$		Taylor $p=4$	
	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$
0	$(-1.13014403, 1.13014403)$	$(0, 0)$	$(-1.10378839, 1.10378839)$	$(0, 0)$
0.2	$(-0.90411522, 0.90411522)$	$(-0.35787894, 0.35787894)$	$(-0.88303071, 0.88303071)$	$(-0.34953299, 0.34953299)$
0.4	$(-0.67808641, 0.67808641)$	$(-0.71575788, 0.71575788)$	$(-0.66227303, 0.66227303)$	$(-0.69906598, 0.69906598)$
0.6	$(-0.45205761, 0.45205761)$	$(-1.07363683, 1.07363683)$	$(-0.44151535, 0.44151535)$	$(-1.04859897, 1.04859897)$
0.8	$(-0.22602880, 0.22602880)$	$(-1.43151577, 1.43151577)$	$(-0.22075767, 0.22075767)$	$(-1.39813196, 1.39813196)$
1	$(0, 0)$	$(-1.78939471, 1.78939471)$	$(0, 0)$	$(-1.74766495, 1.74766495)$

$\alpha$	RK-Gill		RK-Verner	
	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$
0	$(-1.103788, 1.103788)$	$(0, 0)$	$(-1.103638334, 1.103638334)$	$(0, 0)$
0.2	$(-0.883030, 0.883030)$	$(-0.349532, 0.349532)$	$(-0.882910667, 0.882910667)$	$(-0.349485472, 0.349485472)$
0.4	$(-0.662273, 0.662273)$	$(-0.699065, 0.699065)$	$(-0.662183000, 0.662183000)$	$(-0.698970945, 0.698970945)$
0.6	$(-0.441515, 0.441515)$	$(-1.048598, 1.048598)$	$(-0.441455333, 0.441455333)$	$(-1.048456417, 1.048456417)$
0.8	$(-0.220757, 0.220757)$	$(-1.398131, 1.398131)$	$(-0.220727666, 0.220727666)$	$(-1.397941890, 1.397941890)$
1	$(0, 0)$	$(-1.747664, 1.747664)$	$(0, 0)$	$(-1.747427363, 1.747427363)$

$\alpha$	Exacte		RK-Nyström	
	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$
0	$(-1.103638323, 1.103638323)$	$(0, 0)$	$(-1.101412, 1.101412)$	$(0, 0)$
0.2	$(-0.882910658, 0.882910658)$	$(-0.349485469, 0.349485469)$	$(-0.881130, 0.881130)$	$(-0.348780, 0.348780)$
0.4	$(-0.662182994, 0.662182994)$	$(-0.698970938, 0.698970938)$	$(-0.660847, 0.660847)$	$(-0.697561, 0.697561)$
0.6	$(-0.441455329, 0.441455329)$	$(-1.048456407, 1.048456407)$	$(-0.440565, 0.440565)$	$(-1.046342, 1.046342)$
0.8	$(-0.220727664, 0.220727664)$	$(-1.397941876, 1.397941876)$	$(-0.220282, 0.220282)$	$(-1.395123, 1.395123)$
1	$(0, 0)$	$(-1.747427345, 1.747427345)$	$(0, 0)$	$(-1.743903, 1.743903)$

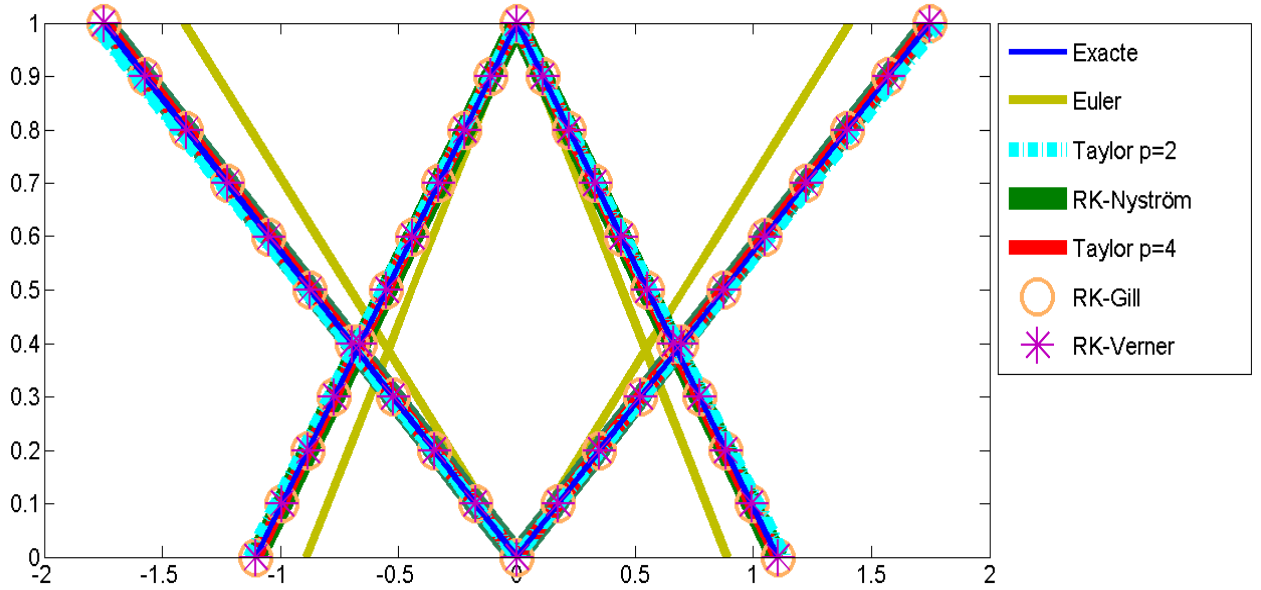


FIGURE 3.5 – Les solutions exactes et les solutions approchées par la méthode de Taylor  $p = 2$  et  $p = 4$ , la méthode d'Euler et la méthode du Runge-Kutta d'ordre 3 et 4 et 8 pour  $h=0.34$  et  $t=1$

Voici les résultats obtenus dans le tableaux et la figure ci-dessous, on représente l'erreur pour les différentes méthodes numériques proposées précédemment pour cet exemple pour  $h = 0.34$  et  $t = 1$ . On remarque que l'erreur est d'ordre de  $10^{-8}$  pour la méthode de Runge-Kutta Verner.

$\alpha$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Méthode d'Euler	$1.073 \times 10^{-1}$	$1.199 \times 10^{-1}$	$1.324 \times 10^{-1}$	$1.449 \times 10^{-1}$	$1.574 \times 10^{-1}$	$1.700 \times 10^{-1}$
Méthode de Taylor $p = 2$	$1.325 \times 10^{-2}$	$1.479 \times 10^{-2}$	$1.634 \times 10^{-2}$	$1.789 \times 10^{-2}$	$1.943 \times 10^{-2}$	$2.098 \times 10^{-2}$
Méthode de Taylor $p = 4$	$0.750 \times 10^{-4}$	$0.837 \times 10^{-4}$	$0.925 \times 10^{-4}$	$1.012 \times 10^{-4}$	$1.100 \times 10^{-4}$	$1.188 \times 10^{-4}$
Runge-Kutta Nyström	$1.112 \times 10^{-3}$	$1.242 \times 10^{-3}$	$1.372 \times 10^{-3}$	$1.502 \times 10^{-3}$	$1.631 \times 10^{-3}$	$1.761 \times 10^{-3}$
Runge-Kutta Gill	$0.750 \times 10^{-4}$	$0.837 \times 10^{-4}$	$0.925 \times 10^{-4}$	$1.012 \times 10^{-4}$	$1.100 \times 10^{-4}$	$1.188 \times 10^{-4}$
Runge-Kutta Verner	$0.555 \times 10^{-8}$	$0.620 \times 10^{-8}$	$0.684 \times 10^{-8}$	$0.749 \times 10^{-8}$	$0.814 \times 10^{-8}$	$0.879 \times 10^{-8}$



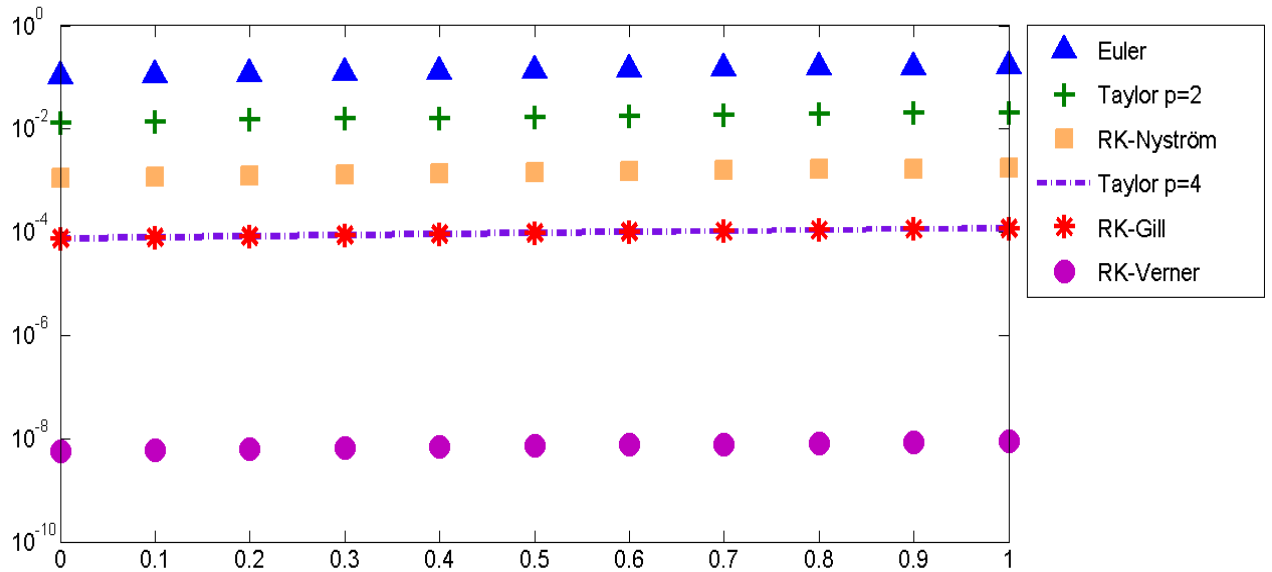


FIGURE 3.6 – Estimation d'erreur

La méthode Runge-Kutta tire les avantages des méthodes de Taylor tout en gardant une simplicité d'exécution de la méthode d'Euler. En pratique, Runge-Kutta remplace l'évaluation analytique des ordres  $\langle u, v \rangle^{(i)}$ ,  $i > 1$  par des dérivées numériques obtenues en évaluant la fonction  $f(t, \langle u, v \rangle(t))$  à différents endroits afin d'obtenir presque les mêmes résultats que ceux obtenus avec la méthode de Taylor.

## 2. Étude des méthodes à pas multiple

### 2.1. Interpolation d'un nombre flou intuitionistique

Le problème de l'interpolation pour les ensembles flous intuitionistiques est le suivant :

Supposons qu'à un instant donné  $x$ , l'information  $f(x)$  est présentée comme un ensemble flou intuitionistique. Le but est d'approcher la fonction  $f(x)$ , pour tout  $x$  dans le domaine de  $f$ . Soit  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  être  $n + 1$  points distincts dans  $\mathbb{R}$  et soit  $\langle u_0, v_0 \rangle, \langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \langle u_n, v_n \rangle$  être  $n + 1$  ensembles flous intuitionistiques dans  $IF_1$ . Une interpolation polynomiale floue intuitionistique des données est une fonction continue intuitionistique à valeur floue  $f : I \rightarrow IF_1$  satisfaisant :

- $f(x_i) = \langle u_i, v_i \rangle$
- Si les données sont classiques, alors l'interpolation  $f$  est un polynôme classique.

Une fonction  $f$  qui remplit ces conditions peut être construite comme suit. Pour chaque  $Y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , le polynôme unique de degré  $\leq n$  noté par  $PY$  tel que

- $P_Y(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$
- $P_Y(x) = \sum_{i=0}^n y_i \left( \prod_{i \neq j} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right)$

Selon le principe d'extension, nous pouvons écrire la fonction d'appartenance et de non appartenance  $f(x)$  pour chaque  $x \in \mathbb{R}$  comme suit :

$$\mu_{f(x)}(t) = \begin{cases} \sup_{\substack{y_0, y_1, \dots, y_n \\ t = P_{y_0, y_1, \dots, y_n}(x)}} \min_{i=0, 1, \dots, n} \mu_{u_i}(y_i) & \text{if } P_{y_0, y_1, \dots, y_n}^{-1}(t) \neq \emptyset \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

où  $\mu_{u_i}$  est la fonction d'appartenance de  $u_i$ , et

$$\nu_{f(x)}(t) = \begin{cases} \inf_{\substack{y_0, y_1, \dots, y_n \\ t = P_{y_0, y_1, \dots, y_n}(x)}} \max_{i=0, 1, \dots, n} \nu_{v_i}(y_i) & \text{if } P_{y_0, y_1, \dots, y_n}^{-1}(t) \neq \emptyset \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

où  $\nu_{v_i}$  est la fonction de non appartenance de  $v_i$ .

Soit  $J_i^+(\alpha) = [\langle u_i, v_i \rangle]_\alpha$ ,  $J_i^-(\alpha) = [\langle u_i, v_i \rangle]^\alpha$  pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  et  $[f(x)]_\alpha$ ,  $[f(x)]^\alpha$  les coupes supérieurs et inférieurs de  $\langle u_i, v_i \rangle$  et  $f(x)$  respectivement. Par conséquent,

$$\begin{aligned} [f(x)]_\alpha &= \{t \in \mathbb{R} \mid \mu_{f(x)}(t) \geq \alpha\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \mid \exists y_0, y_1, \dots, y_n : \mu_{u_i}(y_i) \geq \alpha, \quad i = 0, \dots, n \text{ and } P_{y_0, y_1, \dots, y_n}(x) = t\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \mid \exists Y \in \prod_{i=0}^n J_i^+(\alpha) \quad : P_{y_0, y_1, \dots, y_n}(x) = t\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [f(x)]^\alpha &= \{t \in \mathbb{R} \mid \nu_{f(x)}(t) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \mid \exists y_0, y_1, \dots, y_n : \nu_{v_i}(y_i) \leq 1 - \alpha, \quad i = 0, \dots, n \text{ and } P_{y_0, y_1, \dots, y_n}(x) = t\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \mid \exists Y \in \prod_{i=0}^n J_i^-(\alpha) \quad : P_{y_0, y_1, \dots, y_n}(x) = t\} \end{aligned}$$

Enfin, pour chaque  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$  est défini par  $f(x) \in IF_1$  par

$$f(x)(t) = \left( \sup \{ \alpha \in (0, 1] \mid \exists Y \in \prod_{i=0}^n J_i^+(\alpha) : P_Y(x) = t \}, 1 - \sup \{ \alpha \in (0, 1] \mid \exists Y \in \prod_{i=0}^n J_i^-(\alpha) : P_Y(x) = t \} \right)$$

où  $Y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

le polynôme d'interpolation peut être écrit par les coupes comme suit :

$$[f(x)]_\alpha = \{y \in \mathbb{R} : y = P_{y_0, y_1, \dots, y_n}(x), \quad y_i \in [\langle u_i, v_i \rangle]_\alpha \quad i = 0, \dots, n\}, \quad \text{for } \alpha \in (0, 1]$$

and

$$[f(x)]^\alpha = \{y \in \mathbb{R} : y = P_{y_0, y_1, \dots, y_n}(x), \quad y_i \in [\langle u_i, v_i \rangle]^\alpha \quad i = 0, \dots, n\}, \quad \text{for } \alpha \in (0, 1]$$

Mais, à partir de la formule d'interpolation de Lagrange, nous avons

$$[f(x)]_\alpha = \sum_{i=0}^n \ell_i(x) J_i^+(\alpha)$$

et

$$[f(x)]^\alpha = \sum_{i=0}^n \ell_i(x) J_i^-(\alpha)$$

où  $\ell_i(x)$  représente les polynômes de Lagrange.

Lorsque les données  $\langle u_i, v_i \rangle$  se présentent sous la forme des nombres flous intuitionnistiques triangulaires, les valeurs du polynôme d'interpolation sont également des nombres flous intuitionnistiques triangulaires. Alors  $f(x)$  a une forme simple particulier qui est bien adapté au calcul.

Notons  $J_i^+(\alpha) = [a_i^+(\alpha), b_i^+(\alpha)]$  et  $J_i^-(\alpha) = [a_i^-(\alpha), b_i^-(\alpha)]$ . Alors le point final supérieur de  $[f(x)]_\alpha$  est la solution du problème d'optimisation :

$$\text{Maximize } P_{y_0, y_1, \dots, y_n}(x) \quad \text{subject to } a_i^+(\alpha) \leq y_i \leq b_i^+(\alpha) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Il en résulte que la solution optimale est

$$y_i = \begin{cases} b_i^+(\alpha) & \text{if } \ell_i(x) \geq 0 \\ a_i^+(\alpha) & \text{if } \ell_i(x) < 0 \end{cases}$$

et le point final inférieur est obtenu en tant que valeur du polynôme d'interpolation associé aux points

$$y_i = \begin{cases} b_i^+(\alpha) & \text{if } \ell_i(x) < 0 \\ a_i^+(\alpha) & \text{if } \ell_i(x) \geq 0 \end{cases}$$

De même, les extrémités supérieure et inférieure de  $[f(x)]^\alpha$  peuvent être obtenues. Par conséquent si  $\langle u_i, v_i \rangle$  est un nombre flou intuitionniste, pour tout  $i$  alors,  $f(x)$  est un nombre flou pour chaque  $x$ . Plus précisément, si  $\langle u_i, v_i \rangle = \langle u_i^l, u_i^c, u_i^r, v_i^l, v_i^c, v_i^r \rangle$  et  $f(x) = \langle f_l(x), f^c(x), f_r(x), f^l(x), f^c(x), f^r(x) \rangle$ , alors nous aurons,

$$\begin{aligned} f_l(x) &= \sum_{\ell_i(x) \geq 0} \ell_i(x) u_i^l + \sum_{\ell_i(x) < 0} \ell_i(x) u_i^r \\ f_r(x) &= \sum_{\ell_i(x) \geq 0} \ell_i(x) u_i^r + \sum_{\ell_i(x) < 0} \ell_i(x) u_i^l \\ f^c(x) &= \sum_{i=0}^n \ell_i(x) u_i^c \\ f^l(x) &= \sum_{\ell_i(x) \geq 0} \ell_i(x) v_i^l + \sum_{\ell_i(x) < 0} \ell_i(x) v_i^r \\ f^r(x) &= \sum_{\ell_i(x) \geq 0} \ell_i(x) v_i^r + \sum_{\ell_i(x) < 0} \ell_i(x) v_i^l \end{aligned}$$

## 2.2. Méthode d'Adams-Bashforth

Nous allons maintenant résoudre un problème de valeur initiale floue intuitionniste  $\langle u, v \rangle'(t) = f(t, \langle u, v \rangle(t))$  par la méthode d'Adams-Bashforth à 3 pas, but du travail [6]. les valeurs initiales floues intuitionnistiques sont notés par  $\langle u, v \rangle(t_{i-1})$ ,  $\langle u, v \rangle(t_i)$ ,  $\langle u, v \rangle(t_{i+1})$  i.e  $f(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}))$ ,  $f(t_i, \langle u, v \rangle(t_i))$ ,  $f(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))$  qui sont des nombres flous intuitionnistiques triangulaires et sont définis par

$$— \left\{ f_l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})), f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})), f_r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})), f^l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})), f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})), f^r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right\}$$

- $\{f_l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)), f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)), f_r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)), f^l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)), f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)), f^r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i))\}$
- $\{f_l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})), f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})), f_r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})), f^l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})), f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})), f^r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))\}$

De plus

$$\langle u, v \rangle(t_{i+2}) = \langle u, v \rangle(t_{i+1}) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} f(t, \langle u, v \rangle(t)) dt \quad (3.50)$$

Par l'interpolation floue intuitionnistique de  $f(t, \langle u, v \rangle(t_{i-1}))$ ,  $f(t, \langle u, v \rangle(t_i))$ ,  $f(t, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))$  on a

- $f_l(t, \langle u, v \rangle(t)) = \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) \geq 0}}^{i+1} \ell_j(t) f_l(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) + \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) < 0}}^{i+1} \ell_j(t) f_r(t_j, \langle u, v \rangle(t_j))$
- $f_r(t, \langle u, v \rangle(t)) = \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) \geq 0}}^{i+1} \ell_j(t) f_r(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) + \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) < 0}}^{i+1} \ell_j(t) f_l(t_j, \langle u, v \rangle(t_j))$
- $f^c(t, \langle u, v \rangle(t)) = \sum_{j=i-1}^{i+1} \ell_j(t) f^c(t_j, \langle u, v \rangle(t_j))$
- $f^l(t, \langle u, v \rangle(t)) = \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) \geq 0}}^{i+1} \ell_j(t) f^l(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) + \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) < 0}}^{i+1} \ell_j(t) f^r(t_j, \langle u, v \rangle(t_j))$
- $f^r(t, \langle u, v \rangle(t)) = \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) \geq 0}}^{i+1} \ell_j(t) f^r(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) + \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) < 0}}^{i+1} \ell_j(t) f^l(t_j, \langle u, v \rangle(t_j))$

Pour  $t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2}$

- $\ell_{i-1}(t) = \frac{(t - t_i)(t - t_{i+1})}{(t_{i-1} - t_i)(t_{i-1} - t_{i+1})} \geq 0$
- $\ell_i(t) = \frac{(t - t_{i-1})(t - t_{i+1})}{(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})} \leq 0$
- $\ell_{i+1}(t) = \frac{(t - t_{i-1})(t - t_i)}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)} \geq 0$

Par conséquent, les résultats suivants seront obtenus :

- $f_l(t, \langle u, v \rangle(t)) = \ell_{i-1}(t) f_l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f_r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f_l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))$  (3.51)

- $f_r(t, \langle u, v \rangle(t)) = \ell_{i-1}(t) f_r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f_l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f_r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))$  (3.52)

- $f^c(t, \langle u, v \rangle(t)) = \ell_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))$  (3.53)

- $f^l(t, \langle u, v \rangle(t)) = \ell_{i-1}(t) f^l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f^l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))$  (3.54)

- $f^r(t, \langle u, v \rangle(t)) = \ell_{i-1}(t) f^r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f^r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))$  (3.55)

De (3.50), (1.1) et (1.2) on aura :

$$[\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_{\alpha} = \left[ [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) \right],$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_{\alpha} = \left[ [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) \right]$$

Où,

$$[\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \{ \alpha f^c(t, \langle u, v \rangle(t)) + (1 - \alpha) f_l(t, \langle u, v \rangle(t)) \} dt, \quad (3.56)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \{ \alpha f^c(t, \langle u, v \rangle(t)) + (1 - \alpha) f_r(t, \langle u, v \rangle(t)) \} dt \quad (3.57)$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \{ \alpha f^c(t, \langle u, v \rangle(t)) + (1 - \alpha) f^l(t, \langle u, v \rangle(t)) \} dt, \quad (3.58)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \{ \alpha f^c(t, \langle u, v \rangle(t)) + (1 - \alpha) f^r(t, \langle u, v \rangle(t)) \} dt \quad (3.59)$$

Si (3.51) et (3.53) sont situés dans (3.56) et (3.52), (3.53) dans (3.57) on aura :

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \left\{ \ell_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right. \\ &\quad + \ell_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + (1 - \alpha) (\ell_{i-1}(t) f_l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \\ &\quad \left. + \ell_i(t) f_r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f_l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))) \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \left\{ \ell_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right. \\ &\quad + \ell_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + (1 - \alpha) (\ell_{i-1}(t) f_r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \\ &\quad \left. + \ell_i(t) f_l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f_r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))) \right\} dt \end{aligned}$$

Et si (3.53) et (3.54) sont substituées dans (3.58) et (3.53), (3.55) dans (3.59) on aura :

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \left\{ \ell_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right. \\ &\quad + \ell_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + (1 - \alpha) (\ell_{i-1}(t) f^l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \\ &\quad \left. + \ell_{i+1}(t) f^l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))) \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \left\{ \ell_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right. \\ &\quad + \ell_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + (1 - \alpha) (\ell_{i-1}(t) f^r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \\ &\quad \left. + \ell_i(t) f^l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f^r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))) \right\} dt \end{aligned}$$

Les résultats suivants seront obtenus par une intégration :

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) + \frac{5}{12} \left[ \alpha f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + (1-\alpha) f_l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right] \\ &\quad + \frac{-16h}{12} \left[ \alpha f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + (1-\alpha) f_r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right] \\ &\quad + \frac{23h}{12} \left[ \alpha f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + (1-\alpha) f_l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) + \frac{5}{12} \left[ \alpha f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + (1-\alpha) f_r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right] \\ &\quad + \frac{-16h}{12} \left[ \alpha f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + (1-\alpha) f_l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right] \\ &\quad + \frac{23h}{12} \left[ \alpha f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + (1-\alpha) f_r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \right] \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) + \frac{5}{12} \left[ \alpha f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + (1-\alpha) f^l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right] \\ &\quad + \frac{-16h}{12} \left[ \alpha f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + (1-\alpha) f^r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right] \\ &\quad + \frac{23h}{12} \left[ \alpha f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + (1-\alpha) f^l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) + \frac{5}{12} \left[ \alpha f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + (1-\alpha) f^r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right] \\ &\quad + \frac{-16h}{12} \left[ \alpha f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + (1-\alpha) f^l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right] \\ &\quad + \frac{23h}{12} \left[ \alpha f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + (1-\alpha) f^r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \right] \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) + \frac{h}{12} \left[ 5f_l^+(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}); \alpha) \right. \\ &\quad \left. - 16f_r^+(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + 23f_l^+(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) + \frac{h}{12} \left[ 5f_r^+(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}); \alpha) \right. \\ &\quad \left. - 16f_l^+(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + 23f_r^+(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) + \frac{h}{12} \left[ 5f_l^-(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}); \alpha) \right. \\ &\quad \left. - 16f_r^-(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + 23f_l^-(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) \right] \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) + \frac{h}{12} \left[ 5f_r^-(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}); \alpha) \right. \\ &\quad \left. - 16f_l^-(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + 23f_r^-(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Par conséquent, la méthode Adams-Bashforth à 3 pas est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) + \frac{h}{12} \left[ 5f_l^+(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}); \alpha) \right. \\
 \qquad \qquad \qquad \left. - 16f_r^+(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + 23f_l^+(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) \right] \\
 \\
 [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) + \frac{h}{12} \left[ 5f_r^+(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}); \alpha) \right. \\
 \qquad \qquad \qquad \left. - 16f_l^+(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + 23f_r^+(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) \right] \\
 \\
 [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) + \frac{h}{12} \left[ 5f_l^-(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}); \alpha) \right. \\
 \qquad \qquad \qquad \left. - 16f_r^-(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + 23f_l^-(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) \right] \\
 \\
 [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) + \frac{h}{12} \left[ 5f_r^-(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}); \alpha) \right. \\
 \qquad \qquad \qquad \left. - 16f_l^-(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + 23f_r^-(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) \right] \\
 \\
 [\langle u, v \rangle(t_{i-1})]_l^+(\alpha) = \beta_0, \quad [\langle u, v \rangle(t_i)]_l^+(\alpha) = \beta_1, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) = \beta_2 \\
 \\
 [\langle u, v \rangle(t_{i-1})]_r^+(\alpha) = \beta_3, \quad [\langle u, v \rangle(t_i)]_r^+(\alpha) = \beta_4, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) = \beta_5 \\
 \\
 [\langle u, v \rangle(t_{i-1})]_l^-(\alpha) = \beta_6, \quad [\langle u, v \rangle(t_i)]_l^-(\alpha) = \beta_7, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) = \beta_8 \\
 \\
 [\langle u, v \rangle(t_{i-1})]_r^-(\alpha) = \beta_9, \quad [\langle u, v \rangle(t_i)]_r^-(\alpha) = \beta_{10}, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) = \beta_{11}
 \end{array} \right. \quad (3.64)$$

De la même manière, le problème à valeur initiale floue intuitionistique  $\langle u, v \rangle'(t) = f(t, \langle u, v \rangle(t))$  peut être résolu par la méthode d'Adams-Bashforth à 2 pas comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) - \frac{h}{2}f_r^+(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + \frac{3h}{2}f_l^+(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) \\
 \\
 [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) - \frac{h}{2}f_l^+(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + \frac{3h}{2}f_r^+(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) \\
 \\
 [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) - \frac{h}{2}f_r^-(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + \frac{3h}{2}f_l^-(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) \\
 \\
 [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) - \frac{h}{2}f_l^-(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + \frac{3h}{2}f_r^-(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) \\
 \\
 [\langle u, v \rangle(t_i)]_l^+(\alpha) = \beta_0, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) = \beta_1, \quad [\langle u, v \rangle(t_i)]_r^+(\alpha) = \beta_2, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) = \beta_3 \\
 \\
 [\langle u, v \rangle(t_i)]_l^-(\alpha) = \beta_4, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) = \beta_5, \quad [\langle u, v \rangle(t_i)]_r^-(\alpha) = \beta_6, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) = \beta_7
 \end{array} \right. \quad (3.65)$$

### 2.3. Méthode d'Adams-Moulton

Nous allons maintenant résoudre le problème à valeur initiale floue intuitionistique  $\langle u, v \rangle'(t) = f(t, \langle u, v \rangle(t))$  par la méthode d'Adams-Moulton à trois pas, objet du travail

[6]. Soit les valeurs initiales floues intuitionnistiques  $\langle u, v \rangle(t_{i-1})$ ,  $\langle u, v \rangle(t_i)$ ,  $\langle u, v \rangle(t_{i+1})$  i.e  $f(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}))$ ,  $f(t_i, \langle u, v \rangle(t_i))$ ,  $f(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))$  qui sont des nombres flous intuitionnistiques triangulaires et sont donnés par :

- $\left\{ f_l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})), f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})), f_r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})), f^l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})), f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})), f^r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right\}$
- $\left\{ f_l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)), f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)), f_r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)), f^l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)), f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)), f^r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right\}$
- $\left\{ f_l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})), f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})), f_r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})), f^l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})), f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})), f^r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \right\}$

Considérons l'équation floue intuitionniste suivante :

$$\langle u, v \rangle(t_{i+2}) = \langle u, v \rangle(t_{i+1}) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} f(t, \langle u, v \rangle(t)) dt \quad (3.66)$$

Par l'interpolation floue intuitionniste de  $f(t, \langle u, v \rangle(t_{i-1}))$ ,  $f(t, \langle u, v \rangle(t_i))$ ,  $f(t, \langle u, v \rangle(t_{i+1}))$  on a

$$\begin{aligned} \bullet f_l(t, \langle u, v \rangle(t)) &= \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) \geq 0}}^{i+2} \ell_j(t) f_l(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) + \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) < 0}}^{i+2} \ell_j(t) f_r(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) \\ \bullet f_r(t, \langle u, v \rangle(t)) &= \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) \geq 0}}^{i+2} \ell_j(t) f_r(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) + \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) < 0}}^{i+2} \ell_j(t) f_l(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) \\ \bullet f^c(t, \langle u, v \rangle(t)) &= \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) \geq 0}}^{i+2} \ell_j(t) f^c(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) \\ \bullet f^l(t, \langle u, v \rangle(t)) &= \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) \geq 0}}^{i+2} \ell_j(t) f^l(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) + \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) < 0}}^{i+2} \ell_j(t) f^r(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) \\ \bullet f^r(t, \langle u, v \rangle(t)) &= \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) \geq 0}}^{i+2} \ell_j(t) f^r(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) + \sum_{\substack{j=i-1 \\ \ell_j(t) < 0}}^{i+2} \ell_j(t) f^l(t_j, \langle u, v \rangle(t_j)) \end{aligned}$$

pour  $t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2}$

$$\begin{aligned} \bullet \ell_{i-1}(t) &= \frac{(t - t_i)(t - t_{i+1})(t - t_{i+2})}{(t_{i-1} - t_i)(t_{i-1} - t_{i+1})(t_{i-1} - t_{i+2})} \geq 0 \\ \bullet \ell_i(t) &= \frac{(t - t_{i-1})(t - t_{i+1})(t - t_{i+2})}{(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})(t_i - t_{i+2})} \leq 0 \\ \bullet \ell_{i+1}(t) &= \frac{(t - t_{i-1})(t - t_i)(t - t_{i+2})}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_{i+2})} \geq 0 \\ \bullet \ell_{i+2}(t) &= \frac{(t - t_{i-1})(t - t_i)(t - t_{i+1})}{(t_{i+2} - t_{i-1})(t_{i+2} - t_i)(t_{i+2} - t_{i+1})} \geq 0 \end{aligned}$$



par conséquent, les résultats suivants seront obtenus :

$$\bullet f_l(t, \langle u, v \rangle(t)) = \ell_{i-1}(t) f_l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f_r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f_l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \\ + \ell_{i+2}(t) f_l(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \quad (3.67)$$

$$\bullet f_r(t, \langle u, v \rangle(t)) = \ell_{i-1}(t) f_r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f_l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f_r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \\ + \ell_{i+2}(t) f_r(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \quad (3.68)$$

$$\bullet f^c(t, \langle u, v \rangle(t)) = \ell_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \\ + \ell_{i+2}(t) f^c(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \quad (3.69)$$

$$\bullet f^l(t, \langle u, v \rangle(t)) = \ell_{i-1}(t) f^l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f^l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \\ + \ell_{i+2}(t) f^l(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \quad (3.70)$$

$$\bullet f^r(t, \langle u, v \rangle(t)) = \ell_{i-1}(t) f^r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f^r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \\ + \ell_{i+2}(t) f^r(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \quad (3.71)$$

De (3.66), (1.1) et (1.2) on aura :

$$[\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) \right] \quad (3.72)$$

Où

$$[\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \{ \alpha f^c(t, \langle u, v \rangle(t)) + (1 - \alpha) f_l(t, \langle u, v \rangle(t)) \} dt \quad (3.73)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \{ \alpha f^c(t, \langle u, v \rangle(t)) + (1 - \alpha) f_r(t, \langle u, v \rangle(t)) \} dt \quad (3.74)$$

Et

$$[\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \{ \alpha f^c(t, \langle u, v \rangle(t)) + (1 - \alpha) f^l(t, \langle u, v \rangle(t)) \} dt \quad (3.75)$$

$$[\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \{ \alpha f^c(t, \langle u, v \rangle(t)) + (1 - \alpha) f^r(t, \langle u, v \rangle(t)) \} dt \quad (3.76)$$

Si (3.67) et (3.69) sont substituées dans (3.73) et (3.68), (3.69) dans (3.74) on a :

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \left\{ \ell_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right. \\ &+ \ell_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + \ell_{i+2}(t) f^c(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) + (1-\alpha) \left( \ell_{i-1}(t) f_l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right. \\ &\left. \left. + \ell_i(t) f_r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f_l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + \ell_{i+2}(t) f_l(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \right) \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \left\{ \ell_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right. \\ &+ \ell_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + \ell_{i+2}(t) f^c(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) + (1-\alpha) \left( \ell_{i-1}(t) f_r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right. \\ &\left. \left. + \ell_i(t) f_l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f_r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + \ell_{i+2}(t) f_r(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \right) \right\} dt \end{aligned}$$

Et si (3.69) et (3.70) sont substituées dans (3.75) et (3.69), (3.71) dans (3.76) on aura :

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \left\{ \ell_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right. \\ &+ \ell_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + \ell_{i+2}(t) f^c(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) + (1-\alpha) \left( \ell_{i-1}(t) f^l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right. \\ &\left. \left. + \ell_i(t) f^r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f^l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + \ell_{i+2}(t) f^l(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \right) \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \left\{ \ell_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + \ell_i(t) f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right. \\ &+ \ell_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + \ell_{i+2}(t) f^c(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) + (1-\alpha) \left( \ell_{i-1}(t) f^r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right. \\ &\left. \left. + \ell_i(t) f^l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + \ell_{i+1}(t) f^r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + \ell_{i+2}(t) f^r(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \right) \right\} dt \end{aligned}$$

Les résultats suivants seront obtenus par une intégration :

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) + \frac{h}{24} \left[ \alpha f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + (1-\alpha) f_l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right] \\ &+ \frac{-5h}{24} \left[ \alpha f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + (1-\alpha) f_r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right] \\ &+ \frac{19h}{24} \left[ \alpha f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + (1-\alpha) f_l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \right] \\ &+ \frac{9h}{24} \left[ \alpha f^c(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) + (1-\alpha) f_l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) + \frac{h}{24} \left[ \alpha f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + (1-\alpha) f_r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right] \\ &+ \frac{-5h}{24} \left[ \alpha f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + (1-\alpha) f_l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right] \\ &+ \frac{19h}{24} \left[ \alpha f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + (1-\alpha) f_r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \right] \\ &+ \frac{9h}{24} \left[ \alpha f^c(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) + (1-\alpha) f_r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \right] \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) + \frac{h}{24} \left[ \alpha f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + (1-\alpha) f^l(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right] \\ &\quad + \frac{-5h}{24} \left[ \alpha f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + (1-\alpha) f^r(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right] \\ &\quad + \frac{19h}{24} \left[ \alpha f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + (1-\alpha) f^l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \right] \\ &\quad + \frac{9h}{24} \left[ \alpha f^c(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) + (1-\alpha) f^l(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) + \frac{h}{24} \left[ \alpha f^c(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) + (1-\alpha) f^r(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1})) \right] \\ &\quad + \frac{-5h}{24} \left[ \alpha f^c(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) + (1-\alpha) f^l(t_i, \langle u, v \rangle(t_i)) \right] \\ &\quad + \frac{19h}{24} \left[ \alpha f^c(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) + (1-\alpha) f^r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1})) \right] \\ &\quad + \frac{9h}{24} \left[ \alpha f^c(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) + (1-\alpha) f^r(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+2})) \right] \end{aligned}$$

Par conséquent, la méthode Adams-Moulton à 3 pas est obtenue comme suit :

$$\left\{ \begin{aligned} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) + \frac{h}{24} \left[ f_l^+(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}); \alpha) - 5f_r^+(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) \right. \\ &\quad \left. + 19f_l^+(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) + 9f_l^+(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2}); \alpha) \right] \\ [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) + \frac{h}{24} \left[ f_r^+(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}); \alpha) - 5f_l^+(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) \right. \\ &\quad \left. + 19f_r^+(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) + 9f_r^+(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2}); \alpha) \right] \\ [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) + \frac{h}{24} \left[ f_l^-(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}); \alpha) - 5f_r^-(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) \right. \\ &\quad \left. + 19f_l^-(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) + 9f_l^-(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2}); \alpha) \right] \\ [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) + \frac{h}{24} \left[ f_r^-(t_{i-1}, \langle u, v \rangle(t_{i-1}); \alpha) - 5f_l^-(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) \right. \\ &\quad \left. + 19f_r^-(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) + 9f_r^-(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2}); \alpha) \right] \\ [\langle u, v \rangle(t_{i-1})]_l^+(\alpha) &= \beta_0, \quad [\langle u, v \rangle(t_i)]_l^+(\alpha) = \beta_1, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) = \beta_2 \\ [\langle u, v \rangle(t_i)]_r^+(\alpha) &= \beta_4, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i-1})]_r^+(\alpha) = \beta_3, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) = \beta_5 \\ [\langle u, v \rangle(t_{i-1})]_l^-(\alpha) &= \beta_6, \quad [\langle u, v \rangle(t_i)]_l^-(\alpha) = \beta_7, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) = \beta_8 \\ [\langle u, v \rangle(t_{i-1})]_r^-(\alpha) &= \beta_9, \quad [\langle u, v \rangle(t_i)]_r^-(\alpha) = \beta_{10}, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) = \beta_{11} \end{aligned} \right.$$

De la même manière, le problème de valeur initiale floue intuitionistique  $\langle u, v \rangle'(t) = f(t, \langle u, v \rangle(t))$  peut être résolu par la méthode d'Adams-Moulton à 2 pas comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) - \frac{h}{12} f_r^+(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + \frac{2h}{3} f_l^+(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) + \frac{5h}{12} f_l^+(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2}); \alpha) \\ [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) - \frac{h}{12} f_l^+(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + \frac{2h}{3} f_r^+(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) + \frac{5h}{12} f_r^+(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2}); \alpha) \\ [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) - \frac{h}{12} f_r^-(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + \frac{2h}{3} f_l^-(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) + \frac{5h}{12} f_l^-(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2}); \alpha) \\ [\langle u, v \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) = [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) - \frac{h}{12} f_l^-(t_i, \langle u, v \rangle(t_i); \alpha) + \frac{2h}{3} f_r^-(t_{i+1}, \langle u, v \rangle(t_{i+1}); \alpha) + \frac{5h}{12} f_r^-(t_{i+2}, \langle u, v \rangle(t_{i+2}); \alpha) \\ [\langle u, v \rangle(t_i)]_l^+(\alpha) = \beta_0, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) = \beta_1, \quad [\langle u, v \rangle(t_i)]_r^+(\alpha) = \beta_2, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) = \beta_3 \\ [\langle u, v \rangle(t_i)]_l^-(\alpha) = \beta_4, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) = \beta_5, \quad [\langle u, v \rangle(t_i)]_r^-(\alpha) = \beta_6, \quad [\langle u, v \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) = \beta_7 \end{array} \right.$$

## 2.4. Méthode de prédicteur-correcteur

On a vu que, parmi les méthodes linéaires à  $q$  pas, les méthodes implicites sont, à nombre de pas égal, plus précises, elles sont en général aussi plus stables. Mais elles sont plus coûteuses car le caractère implicite doit être résolu par une méthode itérative, de type point fixe par exemple. D'où l'idée, pour diminuer le coût, d'utiliser une méthode explicite pour calculer un bon prédicteur de la solution et de ne faire qu'une itération (ou quelques itérations) de la méthode implicite utilisée alors comme correcteur explicite. Ce sont les méthodes Prédicteur-Correcteur.

L'algorithme suivant est basé sur la méthode Adams-Bashforth à 3 pas en tant que prédicteur ainsi que sur une itération de la méthode Adams-Moulton à 2 pas en tant que correcteur, but du travail [6]. Alors,

**Algorithme :** Pour approcher la solution du problème à la valeur initiale floue intuitionistique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u, v \rangle'(t) = f(t, \langle u, v \rangle(t)), \quad t \in I = [t_0, T] \\ [\langle u, v \rangle(t_0)]_l^+(\alpha) = \beta_0, \quad [\langle u, v \rangle(t_1)]_l^+(\alpha) = \beta_1, \quad [\langle u, v \rangle(t_2)]_l^+(\alpha) = \beta_2 \\ [\langle u, v \rangle(t_0)]_r^+(\alpha) = \beta_3, \quad [\langle u, v \rangle(t_1)]_r^+(\alpha) = \beta_4, \quad [\langle u, v \rangle(t_2)]_r^+(\alpha) = \beta_5 \\ [\langle u, v \rangle(t_0)]_l^-(\alpha) = \beta_6, \quad [\langle u, v \rangle(t_1)]_l^-(\alpha) = \beta_7, \quad [\langle u, v \rangle(t_2)]_l^-(\alpha) = \beta_8 \\ [\langle u, v \rangle(t_0)]_r^-(\alpha) = \beta_9, \quad [\langle u, v \rangle(t_1)]_r^-(\alpha) = \beta_{10}, \quad [\langle u, v \rangle(t_2)]_r^-(\alpha) = \beta_{11} \end{array} \right.$$

Entier positif  $N$  est choisi

**Étape 1 :** Soit  $h = \frac{T-t_0}{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} [y(t_0)]_l^+(\alpha) = \beta_0, \quad [\langle z, w \rangle(t_1)]_l^+(\alpha) = \beta_1, \quad [\langle z, w \rangle(t_2)]_l^+(\alpha) = \beta_2 \\ [\langle z, w \rangle(t_0)]_r^+(\alpha) = \beta_3, \quad [\langle z, w \rangle(t_1)]_r^+(\alpha) = \beta_4, \quad [\langle z, w \rangle(t_2)]_r^+(\alpha) = \beta_5 \\ [\langle z, w \rangle(t_0)]_l^-(\alpha) = \beta_6, \quad [\langle z, w \rangle(t_1)]_l^-(\alpha) = \beta_7, \quad [\langle u, v \rangle(t_2)]_l^-(\alpha) = \beta_8 \\ [\langle z, w \rangle(t_0)]_r^-(\alpha) = \beta_9, \quad [\langle z, w \rangle(t_1)]_r^-(\alpha) = \beta_{10}, \quad [\langle z, w \rangle(t_2)]_r^-(\alpha) = \beta_{11} \end{array} \right.$$

**Étape 2 :** Soit  $i=1$ .

**Étape 3 :** Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} [\langle z, w \rangle^{(0)}(t_{i+2})]_l^+(\alpha) = [\langle z, w \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) + \frac{h}{12} [5f_l^+(t_{i-1}, \langle z, w \rangle(t_{i-1}); \alpha) - 16f_r^+(t_i, \langle z, w \rangle(t_i); \alpha) + 23f_l^+(t_{i+1}, \langle z, w \rangle(t_{i+1}); \alpha)] \\ [\langle z, w \rangle^{(0)}(t_{i+2})]_r^+(\alpha) = [\langle z, w \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) + \frac{h}{12} [5f_r^+(t_{i-1}, \langle z, w \rangle(t_{i-1}); \alpha) - 16f_l^+(t_i, \langle z, w \rangle(t_i); \alpha) + 23f_r^+(t_{i+1}, \langle z, w \rangle(t_{i+1}); \alpha)] \\ [\langle z, w \rangle^{(0)}(t_{i+2})]_l^-(\alpha) = [\langle z, w \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) + \frac{h}{12} [5f_l^-(t_{i-1}, \langle z, w \rangle(t_{i-1}); \alpha) - 16f_r^-(t_i, \langle z, w \rangle(t_i); \alpha) + 23f_l^-(t_{i+1}, \langle z, w \rangle(t_{i+1}); \alpha)] \\ [\langle z, w \rangle^{(0)}(t_{i+2})]_r^-(\alpha) = [\langle z, w \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) + \frac{h}{12} [5f_r^-(t_{i-1}, \langle z, w \rangle(t_{i-1}); \alpha) - 16f_l^-(t_i, \langle z, w \rangle(t_i); \alpha) + 23f_r^-(t_{i+1}, \langle z, w \rangle(t_{i+1}); \alpha)] \end{array} \right.$$

**Étape 4 :** Soit  $t_{i+2} = t_0 + (i + 1)h$ .

**Étape 5 :** Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} [\langle z, w \rangle(t_{i+2})]_l^+(\alpha) = [\langle z, w \rangle(t_{i+1})]_l^+(\alpha) - \frac{h}{12} f_r^+(t_i, \langle z, w \rangle(t_i); \alpha) + \frac{2h}{3} f_l^+(t_{i+1}, \langle z, w \rangle(t_{i+1}); \alpha) + \frac{5h}{12} f_l^+(t_{i+2}, \langle z, w \rangle^{(0)}(t_{i+2}); \alpha) \\ [\langle z, w \rangle(t_{i+2})]_r^+(\alpha) = [\langle z, w \rangle(t_{i+1})]_r^+(\alpha) - \frac{h}{12} f_l^+(t_i, \langle z, w \rangle(t_i); \alpha) + \frac{2h}{3} f_r^+(t_{i+1}, \langle z, w \rangle(t_{i+1}); \alpha) + \frac{5h}{12} f_r^+(t_{i+2}, \langle z, w \rangle^{(0)}(t_{i+2}); \alpha) \\ [\langle z, w \rangle(t_{i+2})]_l^-(\alpha) = [\langle z, w \rangle(t_{i+1})]_l^-(\alpha) - \frac{h}{12} f_r^-(t_i, \langle z, w \rangle(t_i); \alpha) + \frac{2h}{3} f_l^-(t_{i+1}, \langle z, w \rangle(t_{i+1}); \alpha) + \frac{5h}{12} f_l^-(t_{i+2}, \langle z, w \rangle^{(0)}(t_{i+2}); \alpha) \\ [\langle z, w \rangle(t_{i+2})]_r^-(\alpha) = [\langle z, w \rangle(t_{i+1})]_r^-(\alpha) - \frac{h}{12} f_l^-(t_i, \langle z, w \rangle(t_i); \alpha) + \frac{2h}{3} f_r^-(t_{i+1}, \langle z, w \rangle(t_{i+1}); \alpha) + \frac{5h}{12} f_r^-(t_{i+2}, \langle z, w \rangle^{(0)}(t_{i+2}); \alpha) \end{array} \right.$$

**Étape 6 :**  $i = i + 1$

**Étape 7 :** Si  $i \leq (N - 2)$  aller à **Étape 3**.

**Étape 8 :** L'algorithme se termine, et  $[\langle z, w \rangle(T)]_l^+(\alpha)$ ,  $[\langle z, w \rangle(T)]_r^+(\alpha)$ ,  $[\langle z, w \rangle(T)]_l^-(\alpha)$ ,  $[\langle z, w \rangle(T)]_r^-(\alpha)$  se rapproche à les valeurs de  $[\langle u, v \rangle(T)]_l^+(\alpha)$ ,  $[\langle u, v \rangle(T)]_r^+(\alpha)$ ,  $[\langle u, v \rangle(T)]_l^-(\alpha)$ ,  $[\langle u, v \rangle(T)]_r^-(\alpha)$

## 2.5. Application numérique

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques résultats numériques obtenus en utilisant l'algorithme des méthode d'Adams-Bashforth à 2 pas et à 3 pas et Prédicteur-Correcteur. Pour cela nous allons donner un exemple d'application.

**Exemple 2..1.** *Considérons le problème à valeur initial floue intuitionistique suivant :*

$$\begin{cases} \langle u, v \rangle'(t) = t \langle u, v \rangle(t), \text{ pour tout } t \geq 0 \\ \langle u, v \rangle(t_0) = (-2, 0, 2; -5, 0, 5) \end{cases} \quad (3.77)$$

Alors les solutions exactes sont données par :

$$[\langle U, V \rangle(t)]_\alpha = \left[ \langle u, v \rangle(t_0) \exp(t^2/2), \langle u, v \rangle(t_0) \exp(t^2/2) \right]$$

$$[\langle U, V \rangle(t)]^\alpha = \left[ (\langle u, v \rangle(t_0) \exp(t^2/2), \langle u, v \rangle(t_0) \exp(t^2/2)) \right]$$

qui sont données en  $t=0.12$  par :

$$[\langle U, V \rangle(0.12)]_\alpha = \left[ 2(\alpha - 1) \exp(0.007), 2(1 - \alpha) \exp(0.007) \right]$$

$$[\langle U, V \rangle(0.12)]^\alpha = \left[ 5(\alpha - 1) \exp(0.007), 5(1 - \alpha) \exp(0.007) \right]$$

Nous représentons dans le tableau et la figure suivantes, les solutions approchées par les méthodes d'Adams-Bashforth à 2 pas et à 3 pas et Prédicteur-correcteur pour  $h = 0.04$  et comparées par les solutions exactes. On obtient encore une bonne approximation de les solutions exactes.

$\alpha$	Exacte		Adams-Bashforth à 2 pas	
	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$
0	$(-2.01445196, 2.01445196)$	$(0, 0)$	$(-2.01120256, 2.01120256)$	$(0, 0)$
0.2	$(-1.61156157, 1.61156157)$	$(-1.00722598, 1.00722598)$	$(-1.60896204, 1.60896204)$	$(-1.00560128, 1.00560128)$
0.4	$(-1.20867117, 1.20867117)$	$(-2.01445196, 2.01445196)$	$(-1.20672153, 1.20672153)$	$(-2.01120256, 2.01120256)$
0.6	$(-0.80578078, 0.80578078)$	$(-3.02167794, 3.02167794)$	$(-0.80448102, 0.80448102)$	$(-3.01680384, 3.01680384)$
0.8	$(-0.40289039, 0.40289039)$	$(-4.02890392, 4.02890392)$	$(-0.40224051, 0.40224051)$	$(-4.02240512, 4.02240512)$
1	$(0, 0)$	$(-5.03612991, 5.03612991)$	$(0, 0)$	$(-5.02800640, 5.02800640)$

$\alpha$	Adams-Bashforth à 3 pas		Prédicteur-Correcteur	
	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$	$([\langle u, v \rangle]_l^+, [\langle u, v \rangle]_r^+)$	$([\langle u, v \rangle]_l^-, [\langle u, v \rangle]_r^-)$
0	$(-2.01443202, 2.01443202)$	$(0, 0)$	$(-2.01444773, 2.01444773)$	$(0, 0)$
0.2	$(-1.61154561, 1.61154561)$	$(-1.00721601, 1.00721601)$	$(-1.61155819, 1.61155819)$	$(-1.00722386, 1.00722386)$
0.4	$(-1.20865921, 1.20865921)$	$(-2.01443202, 2.01443202)$	$(-1.20866864, 1.20866864)$	$(-2.01444773, 2.01444773)$
0.6	$(-0.80577280, 0.80577280)$	$(-3.02164803, 3.02164803)$	$(-0.80577909, 0.80577909)$	$(-3.02167160, 3.02167160)$
0.8	$(-0.40288640, 0.40288640)$	$(-4.02886404, 4.02886404)$	$(-0.40288954, 0.40288954)$	$(-4.02889547, 4.02889547)$
1	$(0, 0)$	$(-5.03608005, 5.03608005)$	$(0, 0)$	$(-5.03611934, 5.03611934)$

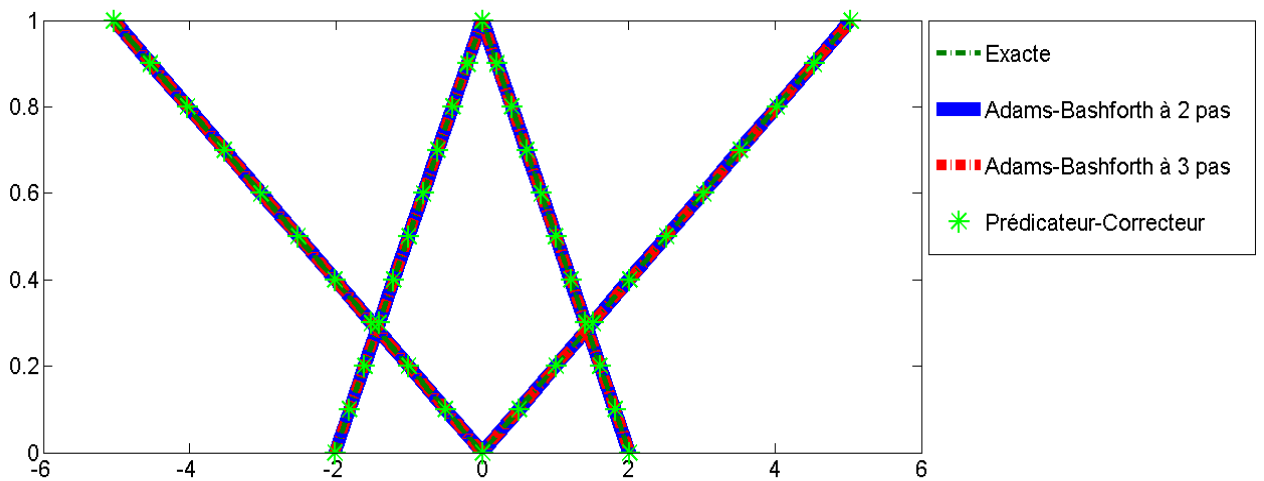


FIGURE 3.7 – Les solutions exactes et les solutions approchées par la méthode de Adams-Bashforth à 2 pas et à 3 pas et Prédicteur-Correcteur pour  $h=0.04$  et  $t=0.12$

Voici les résultats obtenus dans le tableaux et la figure ci-dessous, on représente l'erreur pour les différentes méthodes numériques proposées précédemment pour cet exemple, pour  $h = 0.04$  et  $t = 0.12$ . On remarque que l'erreur est d'ordre de  $10^{-6}$  pour la méthode de Prédicteur-correcteur d'ordre 3.

Les Méthodes \ $\alpha$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Adams-Bashforth à 2 pas	$1.624 \times 10^{-3}$	$2.112 \times 10^{-3}$	$2.599 \times 10^{-3}$	$3.086 \times 10^{-3}$	$3.574 \times 10^{-3}$	$4.061 \times 10^{-3}$
Adams-Bashforth à 3 pas	$0.997 \times 10^{-5}$	$1.296 \times 10^{-5}$	$1.595 \times 10^{-5}$	$1.894 \times 10^{-5}$	$2.193 \times 10^{-5}$	$2.492 \times 10^{-5}$
Prédicteur-Correcteur	$2.113 \times 10^{-6}$	$2.747 \times 10^{-6}$	$3.381 \times 10^{-6}$	$4.015 \times 10^{-6}$	$4.649 \times 10^{-6}$	$5.283 \times 10^{-6}$

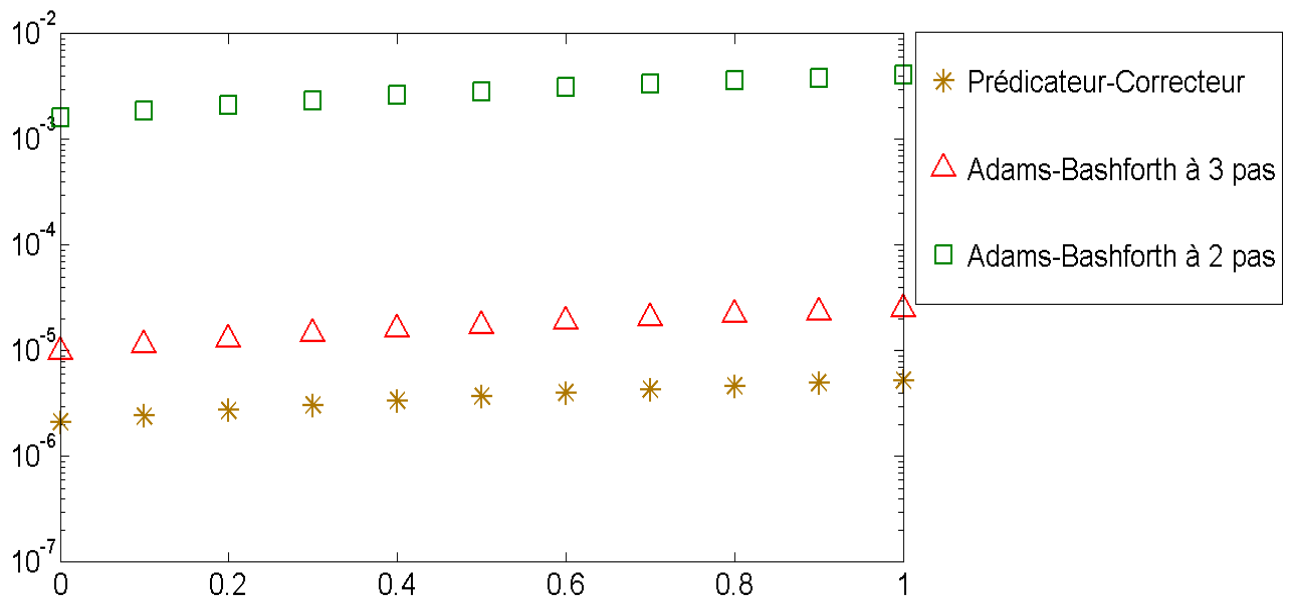


FIGURE 3.8 – Estimation d'erreur

### 3. Étude générale de la convergence des méthodes à un pas : Consistance et Stabilité

Plusieurs notions mathématiques sont introduites lors de la résolution d'équation différentielle ordinaire au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les trois principales sont la convergence, la stabilité et la consistance, permettant de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue. Dans cette section on s'intéresse à l'étude générale de la convergence des méthodes à un pas pour une équation différentielle à valeur initiale floue intuitionistique, objet du travail [12], alors :

Les méthodes à un pas, aussi appelées méthodes à pas séparées, sont toutes de la forme :

**Définition 3.1.**

$$\begin{cases} \langle u, v \rangle_{n+1} = \langle u, v \rangle_n + h\phi(t_n, \langle u, v \rangle_n, h), & n = 0, \dots, n \\ \langle u, v \rangle(t_0) = \langle u, v \rangle_{t_0} \end{cases} \quad (3.78)$$

où  $\phi$  est une application continue de  $I \times IF_1 \times [0, h_0]$ ; ( $h_0$  est le rayon de stabilité de la méthode, souvent on prendra ici  $h_0 = b - a$ ).

Les notions théoriques que doit vérifier la fonction  $\phi$  afin que  $\langle u, v \rangle_n$  soit effectivement une approximation de  $\langle u, v \rangle(t_n)$  sont la consistance, la stabilité théorique et la convergence.

### 3.1. La notion de convergence

**Définition 3..2.** La méthode à un pas (3.78) est dite convergente par rapport à l'équation différentielle floue intuitionistique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(\langle u, v \rangle_n, \langle U, V \rangle(t_n)) = 0, \quad t_0 \leq t \leq T$$

où  $\langle U, V \rangle(t_n)$  désigne la solution exacte  $\langle u, v \rangle(t_n) := \langle u, v \rangle_n$  est l'approximation obtenue par la méthode (3.78) à la nième étape.

### 3.2. La notion de stabilité

**Définition 3..3.** Une méthode à un pas (3.78) est dite stable si pour chaque équation différentielle floue intuitionistique satisfaisant une condition de Lipschitz par rapport à  $\langle u, v \rangle$ , il existe des constantes positives  $h_0$  et  $K$  telles que deux solutions différentes  $\langle u, v \rangle_n$  et  $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_n$  satisfaisant chacun l'équation (2.1) sont tels que

$$d_\infty(\langle u, v \rangle_n, \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_n) \leq K d_\infty(\langle u, v \rangle_{t_0}, \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_{t_0}), \quad 0 \leq h \leq h_0$$

**Théorème 3..1.** Si  $\phi(t, \langle u, v \rangle, h)$  est Lipschitzienne par rapport à la variable  $\langle u, v \rangle$ , la méthode donnée par (3.78) est stable.

**Preuve 3..1.** Soit  $\langle u, v \rangle$  est différentiable, donc

$$\begin{aligned} d_\infty(\langle u, v \rangle_{n+1}, \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_{n+1}) &= d_\infty(\langle u, v \rangle_n + h\phi(t, \langle u, v \rangle_n, h), \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_n + h\phi(t, \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_n, h)) \\ &\leq d_\infty(\langle u, v \rangle_n, \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_n) + h d_\infty(\phi(t, \langle u, v \rangle_n, h), \phi(t, \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_n, h)) \\ &\leq (1 + hL) d_\infty(\langle u, v \rangle_n, \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_n) = K_1 d_\infty(\langle u, v \rangle_n, \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_n) \\ &\leq K_1 K_2 d_\infty(\langle u, v \rangle_{n-1}, \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_{n-1}) \\ &\leq \dots \leq K d_\infty(\langle u, v \rangle_{t_0}, \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_{t_0}). \end{aligned}$$

### 3.3. La notion de consistance d'un schéma

**Définition 3..4.** La méthode à un pas (3.78) a l'erreur de troncature locale

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\langle U, V \rangle(t_n+h) - \langle U, V \rangle(t_n)}{h} - \phi(t_n, \langle U, V \rangle(t_n), h) = \tau_n(h) \\ \text{ou} \\ \frac{\langle U, V \rangle(t_n) - \langle U, V \rangle(t_n-h)}{h} - \phi(t_n-h, \langle U, V \rangle(t_n-h), h) = \gamma_n(h) \end{array} \right. \quad (3.79)$$

pour chaque  $n = 0, \dots, N-1$ .

**Définition 3..5.** La méthode à un pas (3.78) avec l'erreur de troncature locale  $\tau_n(h)$  ou  $\gamma_n(h)$  à nième étape est dite consistante avec l'équation différentielle qu'il se rapproche si

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \tau_n(h) &= 0_{(1,0)} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \gamma_n(h) &= 0_{(1,0)}, \quad n = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.80)$$



**Théorème 3..2.** *Si  $\phi(t, \langle u, v \rangle, h)$  est continue en  $\langle u, v \rangle, t$  et  $h$  pour  $0 \leq h \leq h_0$ ,  $t_0 \leq t \leq T$  et pour tout  $\langle u, v \rangle$  et si elle satisfait à une condition de Lipschitz en  $\langle u, v \rangle, t$  et  $h$ , une condition nécessaire et suffisante pour la convergence est que*

$$\phi(t, \langle u, v \rangle, 0) = f(t, \langle u, v \rangle) \quad (3.81)$$

L'équation (3.81) est appelé la condition de consistance.

**Preuve 3..2.** *Soit  $\phi(t, \langle u, v \rangle, 0) = g(t, \langle u, v \rangle)$ . Puisque  $g$  est continue et satisfait à une condition de Lipschitz dans  $\langle u, v \rangle, t$  et  $h$ , l'équation différentielle floue intuitionniste*

$$\begin{cases} z' &= g(t, z) \\ z_0 &= \langle u, v \rangle_{t_0} \end{cases} \quad (3.82)$$

a une solution différentiable unique.

Nous montrerons que, si la solution numérique donnée par (3.78) est différentiable, elle converge vers  $z(t)$  et que donc  $f = g$  est une condition nécessaire et suffisante.

Soit la solution numérique est différentiable et elle satisfait

$$\langle u, v \rangle_{n+1} = \langle u, v \rangle_n + h\phi(t_n, \langle u, v \rangle_n, h).$$

Par le théorème de la valeur moyenne, nous avons

$$\langle z, w \rangle(t_{n+1}) = \langle z, w \rangle(t_n) + g(t_n + \theta_n h, \langle z, w \rangle(t_n + \theta_n h)), \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Notons  $e_n = d_\infty(\langle u, v \rangle_n, \langle z, w \rangle(t_n))$ , alors

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\leq e_n + hd_\infty(\phi(t_n, \langle u, v \rangle_n, h), g(t_n + \theta_n h, \langle z, w \rangle(t_n + \theta_n h))) \\ &= e_n + hd_\infty(\phi(t_n, \langle u, v \rangle_n, h) + \phi(t_n, \langle z, w \rangle(t_n), h) + \phi(t_n, \langle z, w \rangle(t_n)), 0) \\ &\quad , g(t_n + \theta_n h, \langle z, w \rangle(t_n + \theta_n h)) + \phi(t_n, \langle z, w \rangle(t_n), h) + \phi(t_n, \langle z, w \rangle(t_n), 0)) \\ &\leq e_n + hd_\infty(\phi(t_n, \langle u, v \rangle_n, h), \phi(t_n, \langle z, w \rangle(t_n), h)) \\ &\quad + hd_\infty(\phi(t_n, \langle z, w \rangle(t_n), 0), \phi(t_n, \langle z, w \rangle(t_n), h)) \\ &\quad + hd_\infty(\phi(t_n, \langle z, w \rangle(t_n), 0), g(t_n + \theta_n h, \langle z, w \rangle(t_n + \theta_n h))) \\ &\leq e_n + hLe_n + h^2L_1 + hd_\infty(g(t_n, \langle z, w \rangle(t_n)), g(t_n + \theta_n h, \langle z, w \rangle(t_n + \theta_n h))) \\ &\leq (1 + hL)e_n + h^2L_1 + hd_\infty(g(t_n, \langle z, w \rangle(t_n)) + g(t_n, \langle z, w \rangle(t_n + \theta_n h)), \\ &\quad g(t_n + \theta_n h, \langle z, w \rangle(t_n + \theta_n h)) + g(t_n, \langle z, w \rangle(t_n + \theta_n h))) \\ &\leq (1 + hL)e_n + h^2L_1 + hd_\infty(g(t_n, \langle z, w \rangle(t_n)), g(t_n, \langle z, w \rangle(t_n + \theta_n h))) \\ &\quad + hd_\infty(g(t_n, \langle z, w \rangle(t_n + \theta_n h)), g(t_n + \theta_n h, \langle z, w \rangle(t_n + \theta_n h))) \\ &\leq (1 + hL)e_n + h^2L_1 + h^2\theta_n L_2 + hLd_\infty(\langle z, w \rangle(t_n), \langle z, w \rangle(t_n + \theta_n h)) \\ &\leq (1 + hL)e_n + h^2(L_1 + L_2) \end{aligned}$$

D'après Lemme 1..1, on obtient :

$$e_N \leq (L_1 + L_2)h \frac{e^{Lb} - 1}{L} + e^{Lb}e_0$$

Ceci converge vers zéro comme  $h$  et  $e_0 \rightarrow 0$ , donc la solution numérique converge vers la solution de (3.82). Suffisamment de la condition  $g(t, \langle u, v \rangle) = f(t, \langle u, v \rangle)$  suit immédiatement.

Si, d'autre part, nous avons la convergence, alors  $\langle z, w \rangle(t)$ , la solution de (3.82), est identique à  $\langle u, v \rangle(t)$ , la solution de  $y'(t) = f(t, y(t))$ . Supposons aussi que  $f$  et  $g$  soient différentes à un moment donné  $(t_\alpha, [\langle u, v \rangle]_\alpha)$ , et  $(t_\alpha, [\langle u, v \rangle]^\alpha)$ . Si nous considérons le problème à valeur initial floue intuitionistique à partir de  $(t_\alpha, [\langle u, v \rangle]_\alpha)$ , and  $(t_\alpha, [\langle u, v \rangle]^\alpha)$ , nous avons

$$\langle u, v \rangle'(t_\alpha) = f(t_\alpha, \langle u, v \rangle(t_\alpha)) \neq g(t_\alpha, \langle u, v \rangle(t_\alpha)) = g(t_\alpha, \langle z, w \rangle(t_\alpha)) = \langle z, w \rangle'(t_\alpha)$$

conduisant à une contradiction.

### 3.4. Applications numériques

Nous avons étudié la convergence, la consistance et la stabilité de la méthode d'Euler et la méthode de Taylor d'ordre 2 pour approcher la solution des équations différentielles floues intuitionistiques suivantes.

**Exemple 3.1.** *Considérons l'équation différentielle floue intuitionistique suivante :*

$$\begin{cases} \langle u, v \rangle'(t) = \langle u, v \rangle(t), \text{ for all } t \in [0, T] \\ \langle u, v \rangle_{t_0} = ((\alpha - 1.0013, 1.0013 - \alpha), (-1.58\alpha, 1.58\alpha)) \end{cases} \quad (3.83)$$

Où  $\langle u, v \rangle_{t_0}$  est un nombre flou intuitionistique,  $\langle u, v \rangle(t) = \langle u, v \rangle_{t_0} e^t$  est différentiable et c'est la solution de l'équation (3.83).

Considérons la méthode d'Euler pour approcher l'équation (3.83), alors on suppose que  $h = \frac{T}{N}$  et  $t_j = jh$ ,  $j = 0, \dots, N$ , on aura :

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{n+1} &= \langle u, v \rangle_n + h \langle u, v \rangle_n, & n = 0, \dots, N-1 \\ &= (1+h) \langle u, v \rangle_n \\ &\vdots \\ &= (1+h)^{n+1} \langle u, v \rangle_{t_0} \end{aligned}$$

Puisque,  $t_n = nh$ , donc  $n \rightarrow \infty$  équivale à  $h \rightarrow 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(\langle u, v \rangle(t_n), \langle u, v \rangle_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(\langle u, v \rangle_{y_0} e^{nh}, \langle u, v \rangle_{t_0} (1+h)^n) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| e^{nh} \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_r^+(\alpha) - (1+h)^n \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_r^+(\alpha) \right| \right. \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| e^{nh} \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_l^+(\alpha) - (1+h)^n \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_l^+(\alpha) \right| \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| e^{nh} \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_r^-(\alpha) - (1+h)^n \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_r^-(\alpha) \right| \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| e^{nh} \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_l^-(\alpha) - (1+h)^n \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_l^-(\alpha) \right| \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| (e^{nh} - (1+h)^n) \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_l^+(\alpha) \right| \right. \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| (e^{nh} - (1+h)^n) \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_r^+(\alpha) \right| \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| (e^{nh} - (1+h)^n) \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_l^-(\alpha) \right| \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| (e^{nh} - (1+h)^n) \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_r^-(\alpha) \right| \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Alors pour chaque  $h$  suffisamment petit, la méthode à un pas (3.78) est convergente. Supposons maintenant que la condition initiale est

$$\langle u, v \rangle(t_0) = \langle u, v \rangle_{t_0} + \gamma_0 = \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle_{t_0}, \quad \gamma_0 \in IF_1$$

A la nième étape, nous avons :

$$\langle \bar{w}, \bar{u} \rangle_n = (1+h)^n \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle_{t_0} = (1+h)^n (\langle u, v \rangle_{t_0} + \gamma_0)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 d_\infty(\langle u, v \rangle_n, \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle_n) &= d_\infty((1+h)^n \langle u, v \rangle_{t_0}, (1+h)^n \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle_{t_0}) \\
 &= d_\infty(((1+h)^n \langle u, v \rangle_{t_0}, (1+h)^n (\langle u, v \rangle_{t_0} + \gamma_0))) \\
 &= d_\infty((1+h)^n \langle u, v \rangle_{t_0}, (1+h)^n \langle u, v \rangle_{t_0} + (1+h)^n \gamma_0) \\
 &\leq d_\infty(0_{(1,0)}, (1+h)^n \gamma_0) \\
 &= \|(1+h)^n \gamma_0\| \\
 &= (1+h)^n \|\gamma_0\| \\
 &= K d_\infty(\langle u, v \rangle_{t_0}, \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle_{t_0})
 \end{aligned}$$

Alors pour chaque  $h$  suffisamment petit, la méthode à un pas (3.78) est stable. Aussi,

$$\psi(t_n, \langle u, v \rangle_n, 0) = F(t_n, \langle u, v \rangle_n)$$

Elle est donc également consistante.

Si l'on suppose que la méthode de Taylor d'ordre 2,  $h = \frac{T}{N}$  et  $t_j = jh$ ,  $j = 0, \dots, N$ ,

alors :

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle_{n+1} &= \langle u, v \rangle_n + h \langle u, v \rangle_n + \frac{h^2}{2} \langle u, v \rangle_n, & n = 0, \dots, N-1 \\
 &= \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) \langle u, v \rangle_n \\
 &\vdots \\
 &= \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{n+1} \langle u, v \rangle_{t_0}
 \end{aligned}$$

Alors pour chaque  $h$  suffisamment petit, la méthode à un pas (3.78) est stable et consistante.

Les solutions exactes et approchées obtenues par la méthode d'Euler et Taylor d'ordre 2 sont tracées à  $t = 0.4$  et  $h = 0.01$  dans la figure 3.9 :

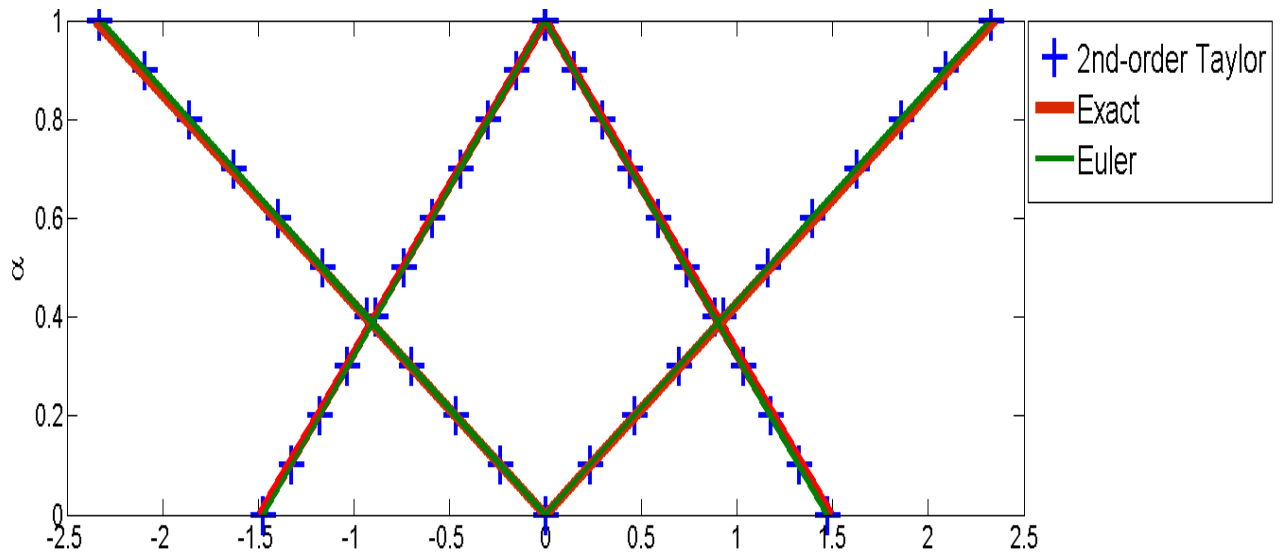


FIGURE 3.9 –  $h=0.03$

**Exemple 3..2.** Considérons l'équation différentielle floue intuitionniste suivante :

$$\begin{cases} \langle u, v \rangle'(t) = t \langle u, v \rangle(t), & \text{for all } t \in [0, T] \\ \langle u, v \rangle_{t_0} = \left( (\alpha - 1, 1 - \alpha), (-2.1\alpha, 2.1\alpha) \right) \end{cases} \quad (3.84)$$

Où  $\langle u, v \rangle_{t_0}$  est un nombre flou intuitionniste,  $\langle u, v \rangle(t) = \langle u, v \rangle_{t_0} e^{\frac{t^2}{2}}$  est différentiable et c'est la solution de l'équation (3.84).

Considérons la méthode d'Euler pour approcher l'équation (3.84), alors on suppose que  $h = \frac{T}{N}$  et  $t_j = jh$ ,  $j = 0, \dots, N$ , on aura :

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle_{n+1} &= \langle u, v \rangle_n + h y_n \langle u, v \rangle_n, & n = 0, \dots, N-1 \\
 &= (1 + nh^2) \langle u, v \rangle_n \\
 &\vdots \\
 &= (1 + h^2)(1 + 2h^2) \dots (1 + nh^2) \langle u, v \rangle_{t_0}
 \end{aligned}$$

Puisque,  $t_n = nh$ , donc  $n \rightarrow \infty$  équivale à  $h \rightarrow 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(\langle u, v \rangle(t_n), \langle u, v \rangle_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(\langle u, v \rangle_{t_0} e^{\frac{n^2 h^2}{2}}, \langle u, v \rangle_{t_0} (1+h^2)(1+2h^2) \dots (1+(n-1)h^2)) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| e^{\frac{n^2 h^2}{2}} \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_r^+(\alpha) - (1+h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_r^+(\alpha) \right| \right. \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| e^{\frac{n^2 h^2}{2}} \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_l^+(\alpha) - (1+h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_l^+(\alpha) \right| \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| e^{\frac{n^2 h^2}{2}} \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_r^-(\alpha) - (1+h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_r^-(\alpha) \right| \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| e^{\frac{n^2 h^2}{2}} \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_l^-(\alpha) - (1+h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_l^-(\alpha) \right| \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| \left( e^{\frac{n^2 h^2}{2}} - (1+h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \right) \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_l^+(\alpha) \right| \right. \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| \left( e^{\frac{n^2 h^2}{2}} - (1+h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \right) \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_r^+(\alpha) \right| \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| \left( e^{\frac{n^2 h^2}{2}} - (1+h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \right) \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_l^-(\alpha) \right| \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| \left( e^{\frac{n^2 h^2}{2}} - (1+h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \right) \left[ \langle u, v \rangle_{t_0} \right]_r^-(\alpha) \right| \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Alors pour chaque  $h$  suffisamment petit, la méthode à un pas (3.78) est convergente.

Supposons maintenant que la condition initiale est :

$$\langle u, v \rangle(t_0) = \langle u, v \rangle_{t_0} + \gamma_0 = \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle_{t_0}, \quad \gamma_0 \in IF_1$$

A la  $n$ ème étape, nous avons :

$$\langle \bar{w}, \bar{u} \rangle_n = (1+h^2)(1+2h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle_{t_0} = (1+h^2)(1+2h^2) \dots (1+(n-1)h^2) (\langle u, v \rangle_{t_0} + \gamma_0)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 d_\infty(\langle u, v \rangle_n, \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle_n) &= d_\infty\left((1+h^2)(1+2h^2) \dots (1+nh^2) \langle u, v \rangle_{t_0}, (1+h^2)(1+2h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle_{t_0}\right) \\
 &= d_\infty\left((1+h^2)(1+2h^2) \dots (1+nh^2) \langle u, v \rangle_{t_0}, (1+h^2)(1+2h^2) \dots (1+(n-1)h^2) (\langle u, v \rangle_{t_0} + \gamma_0)\right) \\
 &\leq d_\infty\left(0_{(1,0)}, (1+h^2)(1+2h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \gamma_0\right) \\
 &= \|(1+h^2)(1+2h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \gamma_0\| \\
 &= (1+h^2)(1+2h^2) \dots (1+(n-1)h^2) \|\gamma_0\| \\
 &= K d_\infty(\langle u, v \rangle_{t_0}, \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle_{t_0})
 \end{aligned}$$

Alors pour chaque  $h$  suffisamment petit, la méthode à un pas (3.78) est stable. Aussi,

$$\psi(t_n, \langle u, v \rangle_n, 0) = F(t_n, \langle u, v \rangle_n)$$

Elle est donc également consistante.

Si l'on suppose que la méthode de Taylor d'ordre 2,  $h = \frac{T}{N}$  et  $t_j = jh$ ,  $j = 0, \dots, N$ , alors :

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{n+1} &= \langle u, v \rangle_n + nh^2 \langle u, v \rangle_n + \frac{n^2 h^4}{2} \langle u, v \rangle_n, & n = 0, \dots, N-1 \\ &= \left(1 + nh^2 + \frac{n^2 h^4}{2}\right) \langle u, v \rangle_n \\ &\vdots \\ &= \left(1 + h^2 + \frac{h^4}{2}\right) \left(1 + 2h^2 + \frac{2^2 h^4}{2}\right) \dots \left(1 + nh^2 + \frac{n^2 h^4}{2}\right) \langle u, v \rangle_{t_0} \end{aligned}$$

Alors pour chaque  $h$  suffisamment petit, la méthode à un pas (3.78) est stable et consistante.

Les solutions exactes et approchées obtenues par la méthode d'Euler et Taylor d'ordre 2 sont tracées à  $t = 0, 2$  et  $h = 0.04$ .

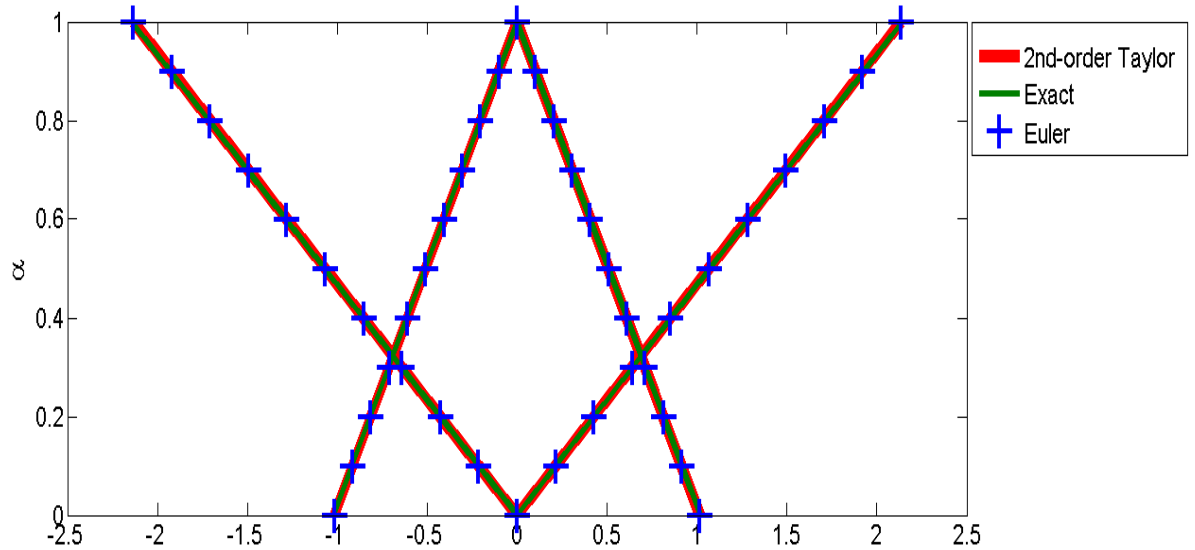


FIGURE 3.10 –  $h=0.04$

## Chapitre 4

# Équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques

Il est bien connu que de nombreux phénomènes de la nature ou des systèmes physiques peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDPs), comme les équations de la chaleur, les équations des ondes, etc. L'étude des EDPs est donc devenue l'un des principaux sujets de l'analyse mathématique moderne et a attiré beaucoup d'attention. En combinant les deux aspects introduits, les mathématiques floues intuitionnistiques et les équations aux dérivées partielles, on obtient des équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques, qui attireront l'intérêt de nombreux chercheurs. Les équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques sont très rares, le concept d'équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques a été initié par S. Melliani et L. S. Chadli dans [29]. Cependant, selon notre compréhension, les recherches sur la propriété des solutions floues intuitionnistiques des équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques sont très limitées. Aucun résultat n'a été rapporté sur l'existence des modèles des EDPs floues intuitionnistiques avec des conditions initiales aux limites locales, non locales et intégrales, et l'un des objectifs de ces travaux sont d'initier l'étude de telles équations.

Dans ce chapitre, on va discuter les propriétés d'existence et d'unicité des solutions floues intuitionnistiques, nous considérons le problème aux limites pour d'équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques, suivantes :

$$\frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)), \quad (x, y) \in I_a = [0, a] \times I_b = [0, b] \quad (4.1)$$

et

$$\frac{\partial^2 u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = (Q(x, y) \langle u, v \rangle(x, y))_y + F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)), \quad (x, y) \in I_a = [0, a] \times I_b = [0, b]$$

Où  $F : I_a \times I_b \times IF_1 \rightarrow IF_1$  et  $Q : I_a \times I_b \rightarrow \mathbb{R}$  sont continue.

Pour cela nous introduisons les notations, définitions et préliminaires nécessaires pour cette étude.

—  $\mathcal{C}(I_a, IF_1)$  : L'espace de toutes les applications continues définies sur  $I_a$  dans  $IF_1$ .

—  $\mathcal{C}(I_b, IF_1)$  : L'espace de toutes les applications continues définies sur  $I_b$  dans  $IF_1$ .

—  $\mathcal{C}(I_a \times I_b, IF_1)$  : L'espace de toutes les applications continues définies sur  $I_a \times I_b$  dans  $IF_1$ .

Une preuve standard s'applique pour montrer que l'espace métrique  $(\mathcal{C}(I_a \times I_b, IF_1), D)$  est complet, où le supermum métrique  $D$  sur  $\mathcal{C}(I_a \times I_b, IF_1)$  est défini par :

$$D(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle) = \sup_{(x,y) \in I_a \times I_b} d_\infty(\langle u, v \rangle(x, y), \langle u', v' \rangle(x, y))$$

**Théorème 0..1.** *L'espace métrique  $(\mathcal{C}(I_a \times I_b, IF_1), D)$  est complet.*

## 1. Équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques avec des conditions locales et non locales

Dans cette section, nous allons examiner les équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques avec des conditions aux limites locales puis avec des conditions aux limites non locales, c'est le but du travail [11].

### 1.1. Équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques avec des conditions locales

Dans cette partie, on prouve l'existence et l'unicité d'une solution floue intuitionniste du problème aux limites avec des conditions locales pour l'équation différentielle dans l'intervalle  $I_a \times I_b$  suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)), \quad (x, y) \in I_a \times I_b \\ \langle u, v \rangle(0, 0) = \langle u, v \rangle_0, \\ \langle u, v \rangle(x, 0) = \gamma_1(x), \quad x \in I_a \\ \langle u, v \rangle(0, y) = \gamma_2(y), \quad y \in I_b \end{array} \right. \quad (4.2)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = (Q(x, y) \langle u, v \rangle(x, y))_y + F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)), \quad (x, y) \in I_a \times I_b \\ \langle u, v \rangle(0, 0) = \langle u, v \rangle_0, \\ \langle u, v \rangle(x, 0) = \gamma_1(x), \quad x \in I_a \\ \langle u, v \rangle(0, y) = \gamma_2(y), \quad y \in I_b \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Où  $F : I_a \times I_b \times IF_1 \rightarrow IF_1$  est continue,  $I_a = [0, a]$ ,  $I_b = [0, b]$ ,  $\gamma_1 \in \mathcal{C}(I_a, IF_1)$ ,  $\gamma_2 \in \mathcal{C}(I_b, IF_1)$  sont des fonctions données et  $\langle u, v \rangle_0 \in IF_1$ .

**Définition 1..1.** *Une application  $\langle u, v \rangle : I_a \times I_b \rightarrow IF_1$  est dite solution du problème (4.2) si elle est continue et satisfait l'équation  $\frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y))$  et les conditions aux limites.*

**Théorème 1..1.** *Supposons que*



1. Une application  $F : I_a \times I_b \times IF_1 \rightarrow IF_1$  est continue,
2. Pour toute paire  $(x, y, \langle u, v \rangle), (x, y, \langle u', v' \rangle) \in I_a \times I_b \times IF_1$ , nous avons

$$d_\infty\left(F(x, y, \langle u, v \rangle), F(x, y, \langle u', v' \rangle)\right) \leq Ld_\infty\left(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle\right) \quad (4.4)$$

où  $L > 0$  est une constante donnée.

De plus, si  $Lab < 1$ , alors le problème (4.2) a une solution floue intuitionniste unique.

**Preuve 1..1.** Transformer le problème (4.2) en un problème de point fixe. Il est clair que les solutions du problème (4.2) sont des points fixes de l'opérateur  $R : \mathcal{C}(I_a \times I_b, IF_1) \rightarrow \mathcal{C}(I_a \times I_b, IF_1)$  défini par :

$$R(\langle u, v \rangle)(x, y) := \gamma_1(x) + \gamma_2(y) - \langle u, v \rangle_0 + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt$$

Nous montrerons que  $R$  est un opérateur de contraction. En effet, considérons  $\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle \in \mathcal{C}(I_a \times I_b, IF_1)$  et  $\alpha \in (0, 1]$ , alors

$$R(\langle u, v \rangle)(x, y) := \gamma_1(x) + \gamma_2(y) - \langle u, v \rangle_0 + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt$$

et

$$R(\langle u', v' \rangle)(x, y) := \gamma_1(x) + \gamma_2(y) - \langle u, v \rangle_0 + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u', v' \rangle(t, s)) ds dt$$

$$\begin{aligned} d_\infty\left(R(\langle u, v \rangle)(x, y), R(\langle u', v' \rangle)(x, y)\right) &= d_\infty\left(\gamma_1(x) + \gamma_2(y) - \langle u, v \rangle_0 + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt, \right. \\ &\quad \left. \gamma_1(x) + \gamma_2(y) - \langle u, v \rangle_0 + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u', v' \rangle(t, s)) ds dt\right) \\ &\leq \int_0^x \int_0^y d_\infty\left(F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)), F(t, s, \langle u', v' \rangle(t, s))\right) ds dt \\ &\leq L \int_0^x \int_0^y d_\infty\left(\langle u, v \rangle(t, s), \langle u', v' \rangle(t, s)\right) ds dt \\ &\leq L \int_0^a \int_0^b \sup_{(t, s) \in I_a \times I_b} d_\infty\left(\langle u, v \rangle(t, s), \langle u', v' \rangle(t, s)\right) ds dt \\ &\leq LabD(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle) \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque  $(x, y) \in I_a \times I_b$ ,

$$D\left(R(\langle u, v \rangle), R(\langle u', v' \rangle)\right) \leq LabD(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle)$$

Par conséquent,  $R$  est une contraction et donc, selon le théorème du point fixe de Banach,  $R$  a un point fixe unique, qui est la solution de (4.2).

**Définition 1..2.** Une application  $\langle u, v \rangle : I_a \times I_b \rightarrow IF_1$  est une solution du problème (4.3) s'il est continu et satisfait à l'équation :

$$\frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = (Q(x, y) \langle u, v \rangle(x, y))_y + F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)), (x, y) \in I_a \times I_b$$

et les conditions aux limites.

**Théorème 1..2.** *Supposons que :*

1. Une application  $F : I_a \times I_b \times IF_1 \rightarrow IF_1$  est continue,
2. Pour tout  $(x, y, \langle u, v \rangle), (x, y, \langle u', v' \rangle) \in I_a \times I_b \times IF_1$ , on a

$$d_\infty \left( F(x, y, \langle u, v \rangle), F(x, y, \langle u', v' \rangle) \right) \leq L d_\infty \left( \langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle \right) \quad (4.5)$$

où  $L > 0$  est une constante donnée. Si

$$a \sup_{(x,y) \in I_a \times I_b} |Q(x, y)| + Lab < 1,$$

Alors le problème (4.3) admet une unique solution floue intuitionniste.

**Preuve 1..2.** Transformer le problème (4.3) en un problème de point fixe. Il est clair que les solutions du problème (4.3) sont des points fixes de l'opérateur  $R : \mathcal{C}(I_a \times I_b, IF_1) \rightarrow \mathcal{C}(I_a \times I_b, IF_1)$  défini par :

$$R(\langle u, v \rangle)(x, y) := p(x, y) + \int_0^x Q(s, y) \langle u, v \rangle(s, y) ds + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt$$

où  $p(x, y) = \gamma_1(x) + \gamma_2(y) - \langle u, v \rangle_0 + \int_0^x Q(s, 0) \eta_1(s) ds$

Nous montrerons que  $R$  est un opérateur de contraction. En effet, considérons  $\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle \in \mathcal{C}(I_a \times I_b, IF_1)$ , alors

$$R(\langle u, v \rangle)(x, y) := p(x, y) + \int_0^x Q(s, y) \langle u, v \rangle(s, y) ds + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt$$

Et

$$R(\langle u', v' \rangle)(x, y) := p(x, y) + \int_0^x Q(s, y) \langle u', v' \rangle(s, y) ds + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u', v' \rangle(t, s)) ds dt$$

Alors,

$$\begin{aligned} d_\infty \left( R(\langle u, v \rangle)(x, y), R(\langle u', v' \rangle)(x, y) \right) &= d_\infty \left( p(x, y) + \int_0^x Q(s, y) \langle u, v \rangle(s, y) ds + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt, \right. \\ &\quad \left. p(x, y) + \int_0^x Q(s, y) \langle u', v' \rangle(s, y) ds + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u', v' \rangle(t, s)) ds dt \right) \\ &\leq d_\infty \left( \int_0^x Q(s, y) \langle u, v \rangle(s, y) ds + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt, \right. \\ &\quad \left. \int_0^x Q(s, y) \langle u', v' \rangle(s, y) ds + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u', v' \rangle(t, s)) ds dt \right) \\ &\leq \sup_{(t,s) \in I_a \times I_b} |Q(t, s)| \int_0^a d_\infty \left( \langle u, v \rangle(t, s), \langle u', v' \rangle(t, s) \right) ds \\ &\quad + L \int_0^x \int_0^y d_\infty \left( \langle u, v \rangle(t, s), \langle u', v' \rangle(t, s) \right) ds dt \\ &\leq \sup_{(t,s) \in I_a \times I_b} |Q(t, s)| \int_0^a \sup_{(t,s) \in I_a \times I_b} d_\infty \left( \langle u, v \rangle(s, t), \langle u', v' \rangle(s, t) \right) ds \\ &\quad + L \int_0^a \int_0^b \sup_{(t,s) \in I_a \times I_b} d_\infty \left( \langle u, v \rangle(t, s), \langle u', v' \rangle(t, s) \right) ds dt \\ &\leq \left( a \sup_{(t,s) \in I_a \times I_b} |Q(t, s)| + Lab \right) D(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle) \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque  $(x, y) \in I_a \times I_b$

$$D\left(R(\langle u, v \rangle), R(\langle u', v' \rangle)\right) \leq \left(a \sup_{(t,s) \in I_a \times I_b} |Q(t, s)| + Lab\right) D(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle)$$

Par conséquent,  $R$  est une contraction et donc, selon le théorème du point fixe de Banach,  $R$  a un point fixe unique, qui est la solution floue intuitionniste de (4.3).

## 1.2. Équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques avec des conditions non locales

Dans cette partie et vue que la condition non locale joue un rôle remarquable dans la modélisation de plusieurs phénomènes physiques, nous étendons le problème (4.2) en considérant les problèmes non locaux. Plus précisément, nous considérons le problème non locales suivant :

$$\frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)), \quad (x, y) \in I_a \times I_b \quad (4.6)$$

$$\langle u, v \rangle(x, 0) + \sum_{i=1}^p g_i(x) \langle u, v \rangle(x, b_i) = \gamma_1(x), \quad x \in I_a, \quad i = 1, \dots, p \quad (4.7)$$

$$\langle u, v \rangle(0, y) + \sum_{j=1}^r h_j(y) \langle u, v \rangle(a_j, y) = \gamma_2(y), \quad y \in I_b, \quad j = 1, \dots, r \quad (4.8)$$

où  $\gamma_1, \gamma_2$  sont comme dans le problème (4.2),  $g_i \in \mathcal{C}(I_a, \mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $h_j \in \mathcal{C}(I_b, \mathbb{R})$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p < a$ ,  $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_r < b$ .

On étudiera alors l'existence et l'unicité des solutions floues intuitionnistiques sous les conditions non locales par l'application du théorème de point fixe de Banach.

**Définition 1.3.** Une application  $\langle u, v \rangle : I_a \times I_b \rightarrow IF_1$  est une solution du problème (4.6)–(4.8) si elle est continue et satisfait l'équation  $\frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y))$ ,  $(x, y) \in I_a \times I_b$  et les conditions aux limites (4.7) – (4.8).

**Théorème 1.3.** Supposons que

1. Une application  $F : I_a \times I_b \times IF_1 \rightarrow IF_1$  est continue,
2. Pour toute paire  $(x, y, \langle u, v \rangle), (x, y, \langle u', v' \rangle) \in I_a \times I_b \times IF_1$ , nous avons

$$d_\infty\left(F(x, y, \langle u, v \rangle), F(t, s, \langle u', v' \rangle)\right) \leq L d_\infty\left(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle\right) \quad (4.9)$$

où  $L > 0$  est une constante donnée. De plus, si

$$\sum_{i=1}^p \sup_{x \in I_a} |g_i(x)| + \sum_{j=1}^r \sup_{y \in I_b} |h_j(y)| + Lab < 1,$$

Alors le problème (4.6) – (4.8) possède une solution floue intuitionniste unique sur  $I_a \times I_b$ .

**Preuve 1..3.** Transformer le problème (4.6) – (4.8) en un problème de point fixe. Il est clair que les solutions du problème (4.6) – (4.8) sont des points fixes de l'opérateur  $R : \mathcal{C}(I_a \times I_b, IF_1) \longrightarrow \mathcal{C}(I_a \times I_b, IF_1)$  défini par :

$$R(\langle u, v \rangle)(x, y) := \bar{q}(x, y) - \sum_{i=1}^p g_i(x) \langle u, v \rangle(x, b_i) - \sum_{j=1}^r h_j(x) \langle u, v \rangle(a_j, y) \\ + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt$$

où  $\bar{q}(x, y) = \gamma_1(x) + \gamma_2(y) - \gamma_1(0)$ ,  $(x, y) \in I_a \times I_b$

Le raisonnement utilisé dans la preuve du Théorème 1.2 montre que  $R$  est un opérateur de contraction, et donc qu'il a un point fixe unique, qui est une solution floue intuitionniste de (4.6) – (4.8).

**Remarque 1..1.** Les concepts utilisés dans le Théorème 1.2 peuvent être appliqués pour obtenir un résultat d'unicité pour le problème intuitionniste flou avec la condition non locale suivant :

$$\frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = (Q(x, y) \langle u, v \rangle(x, y))_y + F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)), \quad (x, y) \in I_a \times I_b \\ \langle u, v \rangle(x, 0) + \sum_{i=1}^p g_i(x) \langle u, v \rangle(x, b_i) = \gamma_1(x), \quad x \in I_a, \quad i = 1, \dots, p \\ \langle u, v \rangle(0, y) + \sum_{j=1}^r h_j(y) \langle u, v \rangle(a_j, y) = \gamma_2(y), \quad y \in I_b, \quad j = 1, \dots, r$$

## 2. Équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques avec des conditions intégrales

Les équations différentielles sont utilisées depuis longtemps dans de nombreux domaines. Cependant, plus précisément, les problèmes de valeur limite initiale intégrale constituent une classe très intéressante et importante de problèmes appliqués, ils ont été utilisés dans la modélisation de phénomènes scientifiques dans diverses applications dans différents domaines tels que la biologie, les réseaux de neurones, la théorie du contrôle, la physique, la médecine, etc.

Dans cette partie, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation au dérivée partielle floue intuitionniste avec conditions aux limites intégrales, but du travail [9], suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)), \quad (x, y) \in I_a \times I_b \\ \langle u, v \rangle(x, 0) + \int_0^b k_1(x) \langle u, v \rangle(x, y) dy = \eta_1(x), \quad x \in I_a \\ \langle u, v \rangle(0, y) + \int_0^a k_2(y) \langle u, v \rangle(x, y) dx = \eta_2(y), \quad y \in I_b \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Supposons que  $F : I_a \times I_b \times IF_1 \rightarrow IF_1$  est continues,  $k_1 \in C(I_a, \mathbb{R})$ ,  $k_2 \in C(I_b, \mathbb{R})$ ,  $\eta_1 \in C(I_a, IF_1)$  et  $\eta_2 \in C(I_b, IF_1)$  sont des fonctions données, où  $I_a = [0, a]$  et  $I_b = [0, b]$ .

Dans la deuxième partie de cette section, nous considérons l'équation de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = (h(x, y) \langle u, v \rangle(x, y))_y + F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)), \quad (x, y) \in I_a \times I_b \\ \langle u, v \rangle(x, 0) + \int_0^b k_1(x) \langle u, v \rangle(x, y) dy = \eta_1(x), \quad x \in I_a \\ \langle u, v \rangle(0, y) + \int_0^a k_2(y) \langle u, v \rangle(x, y) dx = \eta_2(y), \quad y \in I_b \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Où  $F$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont comme dans le problème (4.2) et  $h : I_a \times I_b \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Définition 2..1.** Une fonction  $\langle u, v \rangle \in C(I_a \times I_b, IF_1)$  est dite une solution du problème (4.10) si  $\langle u, v \rangle$  satisfait l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle(x, y) = & Q(x, y) - \int_0^b k_1(x) \langle u, v \rangle(x, y) dy \\ & - \int_0^a k_2(y) \langle u, v \rangle(x, y) dx - k_1(0) \int_0^b \int_0^a k_2(y) \langle u, v \rangle(x, y) dx dy \\ & + \int_0^x \int_0^y f(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt \end{aligned}$$

Où

$$Q(x, y) = \eta_1(x) + \eta_2(y) - \eta_1(0) + \eta_1(0) \int_0^b \eta_2(s) ds$$

pour tous  $(x, y) \in I_a \times I_b$ .

Définissez  $k_1 = \sup_{t \in I_a} |k_1(t)|$  et  $k_2 = \sup_{s \in I_b} |k_2(s)|$ . En appliquant le théorème du point fixe, nous démontrons le résultat suivant.

**Théorème 2..1.** Supposons que

1. Une application  $F : I_a \times I_b \times IF_1 \rightarrow IF_1$  est continue,
2. Pour toute paire  $(t, s, \langle u, v \rangle), (t, s, \langle u', v' \rangle) \in I_a \times I_b \times IF_1$ , nous avons

$$d_\infty \left( F(t, s, \langle u, v \rangle), F(t, s, \langle u', v' \rangle) \right) \leq K d_\infty \left( \langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle \right) \quad (4.12)$$

où  $K > 0$  est une constante donnée.

De plus, si  $k_1 + k_2 + k_1 k_2 + K < 1$ , alors le problème (4.10) a une solution floue intuitionniste unique en  $C(I_a \times I_b, IF_1)$ .

**Preuve 2..1.** Il faut transformer le problème (4.10) en un problème de point fixe. Il est clair que les solutions du problème (4.10) sont des points fixes de l'opérateur  $N : C(I_a \times I_b, IF_1) \rightarrow C(I_a \times I_b, IF_1)$  défini par :

$$\begin{aligned} N(\langle u, v \rangle(x, y)) := & Q(x, y) - \int_0^b k_1(t) \langle u, v \rangle(x, s) ds - \int_0^a k_2(s) \langle u, v \rangle(t, y) dt \\ & - k_1(0) \int_0^b \int_0^a k_2(s) \langle u, v \rangle(t, s) dt ds \\ & + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt \end{aligned}$$

Nous montrerons que  $N$  est un opérateur de contraction. En effet, considérons  $\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle \in C(I_a \times I_b, IF_1)$ , alors

$$\begin{aligned} N(\langle u, v \rangle(x, y)) &:= Q(x, y) - \int_0^b k_1(t) \langle u, v \rangle(x, s) ds - \int_0^a k_2(s) \langle u, v \rangle(t, y) dt \\ &\quad - k_1(0) \int_0^b \int_0^a k_2(s) \langle u, v \rangle(t, s) dt ds \\ &\quad + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} N(\langle u', v' \rangle(x, y)) &:= Q(x, y) - \int_0^b k_1(t) \langle u', v' \rangle(x, s) ds - \int_0^a k_2(s) \langle u', v' \rangle(t, y) dt \\ &\quad - k_1(0) \int_0^b \int_0^a k_2(s) \langle u', v' \rangle(t, s) dt ds \\ &\quad + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u', v' \rangle(t, s)) ds dt \end{aligned}$$

Par suite, nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} d_\infty(N(\langle u, v \rangle)(s, t), N(\langle u', v' \rangle)(s, t)) &\leq d_\infty\left(\int_0^b k_1(t) \langle u, v \rangle(x, s) ds, \int_0^b k_1(t) \langle u', v' \rangle(x, s) ds\right) \\ &\quad + d_\infty\left(\int_0^a k_2(s) \langle u, v \rangle(t, y) dt, \int_0^a k_2(s) \langle u', v' \rangle(t, y) dt\right) \\ &\quad + d_\infty\left(k_1(0) \int_0^b \int_0^a k_2(s) \langle u, v \rangle(t, s) dt ds, k_1(0) \int_0^b \int_0^a k_2(s) \langle u', v' \rangle(t, s) dt ds\right) \\ &\quad + d_\infty\left(\int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt, \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u', v' \rangle(t, s)) ds dt\right) \\ &\leq k_1 \int_0^b d_\infty(\langle u, v \rangle(x, s), \langle u', v' \rangle(x, s)) ds + k_2 \int_0^a d_\infty(\langle u, v \rangle(t, y), \langle u', v' \rangle(t, y)) dt \\ &\quad + |k_1(0)| \sup_{s \in I_b} |k_2(s)| \int_0^b \int_0^a d_\infty(\langle u, v \rangle(t, s), \langle u', v' \rangle(t, s)) dt ds \\ &\quad + \int_0^x \int_0^y d_\infty(F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)), F(t, s, \langle u', v' \rangle(t, s))) ds dt \\ &\leq (k_1 b + k_2 a + k_1 k_2 ab) d_\infty(\langle u, v \rangle(x, s), \langle u', v' \rangle(x, s)) ds \\ &\quad + K \int_0^x \int_0^y d_\infty(\langle u, v \rangle(t, s), \langle u', v' \rangle(t, s)) ds dt \\ &\leq (k_1 b + k_2 a + k_1 k_2 ab + Kab) D(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle) \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque  $(t, s) \in I_a \times I_b$  on a :

$$D(N(\langle u, v \rangle), N(\langle u', v' \rangle)) \leq (k_1 + k_2 + k_1 k_2 + K) D(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle)$$

$N$  est une contraction et donc, selon le théorème du point fixe de Banach,  $N$  a un point fixe unique, qui est la solution floue intuitionniste de (4.10).

**Définition 2..2.** Une fonction  $\langle u, v \rangle \in C(I_a \times I_b, IF_1)$  est appelée une solution du

problème (4.11) si  $\langle u, v \rangle$  satisfait l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle(x, y) = & Q(x, y) - \int_0^b k_1(x) \langle u, v \rangle(x, y) dy \\ & - \int_0^a k_2(y) \langle u, v \rangle(x, y) dx + \int_0^x h(t, y) \langle u, v \rangle(t, y) dt - k_1(0) \int_0^b \int_0^a k_2(y) \langle u, v \rangle(x, y) dx dy \\ & + \int_0^x \int_0^b h(t, 0) k_1(t) \langle u, v \rangle(t, y) dy dt + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt \end{aligned}$$

où

$$Q(x, y) = \eta_1(x) + \eta_2(y) - \eta_1(0) + k_1(0) \int_0^b \eta_2(s) ds - \int_0^x h(t, 0) \eta_1(t) dt$$

pour tous  $(x, y) \in I_a \times I_b$ .

**Théorème 2..2.** *Supposons que*

1. Une application  $F : I_a \times I_b \times IF_1 \rightarrow IF_1$  est continue,
2. Pour toute paire  $(t, s, \langle u, v \rangle), (t, s, \langle u', v' \rangle) \in I_a \times I_b \times IF_1$ , nous avons

$$d_\infty \left( F(t, s, \langle u, v \rangle), F(t, s, \langle u', v' \rangle) \right) \leq K d_\infty \left( \langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle \right) \quad (4.13)$$

où  $K > 0$  est une constante donnée.

De plus, si  $(k_1 + 1)(k_2 + q + 1) + K < 2$ , alors le problème (4.11) a une solution floue intuitionniste unique en  $C(I_a \times I_b, IF_1)$ .

**Preuve 2..2.** Transformer le problème (4.11) en un problème de point fixe. Il est clair que les solutions du problème (4.11) sont des points fixes de l'opérateur  $N : C(I_a \times I_b, IF_1) \rightarrow C(I_a \times I_b, IF_1)$  défini par :

$$\begin{aligned} N(\langle u, v \rangle(x, y)) := & Q(x, y) - \int_0^b k_1(x) \langle u, v \rangle(x, y) dy - \int_0^a k_2(y) \langle u, v \rangle(x, y) dx \\ & + \int_0^x h(t, y) \langle u, v \rangle(t, y) dt - k_1(0) \int_0^b \int_0^a k_2(y) \langle u, v \rangle(x, y) dx dy \\ & + \int_0^x \int_0^b h(t, 0) k_1(t) \langle u, v \rangle(t, y) dy dt + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt \end{aligned}$$

Nous montrerons que  $N$  est un opérateur de contraction. En effet, considérons  $\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle \in C(I_a \times I_b, IF_1)$  et  $\alpha \in (0, 1]$ , alors

$$\begin{aligned} N(\langle u, v \rangle(x, y)) := & Q(x, y) - \int_0^b k_1(x) \langle u, v \rangle(x, y) dy - \int_0^a k_2(y) \langle u, v \rangle(x, y) dx \\ & + \int_0^x h(t, y) \langle u, v \rangle(t, y) dt - k_1(0) \int_0^b \int_0^a k_2(y) \langle u, v \rangle(x, y) dx dy \\ & + \int_0^x \int_0^b h(t, 0) k_1(t) \langle u, v \rangle(t, y) dy dt + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)) ds dt \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} N(\langle u', v' \rangle(x, y)) := & Q(x, y) - \int_0^b k_1(x) \langle u', v' \rangle(x, y) dy - \int_0^a k_2(y) \langle u', v' \rangle(x, y) dx \\ & + \int_0^x h(t, y) \langle u', v' \rangle(t, y) dt - k_1(0) \int_0^b \int_0^a k_2(y) \langle u', v' \rangle(x, y) dx dy \\ & + \int_0^x \int_0^b h(t, 0) k_1(t) \langle u', v' \rangle(t, y) dy dt + \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u', v' \rangle(t, s)) ds dt \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons l'inégalité suivante,

$$\begin{aligned}
d_\infty\left(N(\langle u, v \rangle)(s, t), N(\langle u', v' \rangle)(s, t)\right) &\leq d_\infty\left(\int_0^b k_1(t)\langle u, v \rangle(x, s)ds, \int_0^b k_1(t)\langle u', v' \rangle(x, s)ds\right) \\
&+ d_\infty\left(\int_0^a k_2(s)\langle u, v \rangle(t, y)dt, \int_0^a k_2(s)\langle u', v' \rangle(t, y)dt\right) \\
&+ d_\infty\left(\int_0^x h(t, y)\langle u, v \rangle(t, y)dt, \int_0^x h(t, y)\langle u', v' \rangle(t, y)dt\right) \\
&+ d_\infty\left(k_1(0)\int_0^b \int_0^a k_2(s)\langle u, v \rangle(t, s)dtds, k_1(0)\int_0^b \int_0^a k_2(s)\langle u', v' \rangle(t, s)dtds\right) \\
&+ d_\infty\left(\int_0^x \int_0^b h(t, 0)k_1(t)\langle u, v \rangle(t, y)dydt, \int_0^x \int_0^b h(t, 0)k_1(t)\langle u', v' \rangle(t, y)dydt\right) \\
&+ d_\infty\left(\int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s))dsdt, \int_0^x \int_0^y F(t, s, \langle u', v' \rangle(t, s))dsdt\right) \\
&\leq k_1 \int_0^b d_\infty\left(\langle u, v \rangle(x, s), \langle u', v' \rangle(x, s)\right)ds + k_2 \int_0^a d_\infty\left(\langle u, v \rangle(t, y), \langle u', v' \rangle(t, y)\right)dt \\
&+ \sup_{(t,s) \in I_a \times I_b} |h(t, s)| \int_0^x d_\infty\left(\langle u, v \rangle(t, y), \langle u', v' \rangle(t, y)\right)dt \\
&+ |k_1(0)| \sup_{s \in I_b} |k_2(s)| \int_0^b \int_0^a d_\infty\left(\langle u, v \rangle(t, s), \langle u', v' \rangle(t, s)\right)dtds \\
&+ \sup_{x \in I_a} |k_1(x)| \sup_{(t,s) \in I_a \times I_b} |h(t, s)| \int_0^x \int_0^b d_\infty\left(\langle u, v \rangle(t, y), \langle u', v' \rangle(t, y)\right)dydt \\
&+ \int_0^x \int_0^y d_\infty\left(F(t, s, \langle u, v \rangle(t, s)), F(t, s, \langle u', v' \rangle(t, s))\right)dsdt \\
&\leq (k_1 b + k_2 a + qa + k_1 k_2 ab + k_1 q) d_\infty\left(\langle u, v \rangle(x, s), \langle u', v' \rangle(x, s)\right) ds \\
&+ K \int_0^x \int_0^y d_\infty\left(\langle u, v \rangle(t, s), \langle u', v' \rangle(t, s)\right) dsdt \\
&\leq (k_1 b + k_2 a + qa + k_1 k_2 ab + k_1 q + Kab) D(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle)
\end{aligned}$$

Donc pour chaque  $(t, s) \in I_a \times I_b$ , on a

$$D(N(\langle u, v \rangle), N(\langle u', v' \rangle)) \leq (k_1 + k_2 + q + k_1 k_2 + k_1 q + K) D(\langle u, v \rangle, \langle u', v' \rangle)$$

Puisque  $(k_1 + 1)(k_2 + q + 1) + K < 2$  alors  $((k_1 + 1)(k_2 + q + 1) + K - 1) < 1$ , alors  $N$  est une contraction et donc, d'après le théorème du point fixe de Banach,  $N$  a un point fixe unique, qui est la solution floue intuitionniste de (4.11).

### 3. Concept de solution floue intuitionniste

Le but de cette section, est de donner une procédure pour la résolution des équations aux dérivés partielles floues intuitionnistiques avec des conditions locales. Sur notre démarche de résoudre ces problèmes, nous commençons par transformer les équations à un système des équations classiques, puis nous essayons de présenter des étapes cruciales pour calculer et vérifier si les solutions sont floues intuitionnistiques. Les modèles avec des conditions aux limites non locales et intégrales ont la même technique lorsqu'il s'agit de calcul des solutions floues intuitionnistiques.



Alors considérons l'équation au dérivée partielle floue intuitionniste suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)), \quad (x, y) \in I_a \times I_b \\ \langle u, v \rangle(0, 0) = \langle u, v \rangle_0, \\ \langle u, v \rangle(x, 0) = \gamma_1(x), \quad x \in I_a \\ \langle u, v \rangle(0, y) = \gamma_2(y) \quad y \in I_b \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Où  $F : I_a \times I_b \times IF_1 \rightarrow IF_1$ , Alors :

$$[F(x, y, \langle u, v \rangle)]_\alpha = F(x, y, [\langle u, v \rangle]_\alpha)$$

$$[F(x, y, \langle u, v \rangle)]^\alpha = F(x, y, [\langle u, v \rangle]^\alpha)$$

Pour tout  $\alpha \in [0, 1]$  et  $\langle u, v \rangle \in IF_1$ , nous dénotons

$$[\langle u, v \rangle(x, y)]_\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha) \right]$$

$$[\langle u, v \rangle(x, y)]^\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^-(\alpha) \right]$$

$$[\langle u, v \rangle(x, y)]_\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha) \right]$$

$$[\langle u, v \rangle(x, y)]^\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^-(\alpha) \right]$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_\alpha = \left[ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^+(\alpha), \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^+(\alpha) \right]$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]^\alpha = \left[ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^-(\alpha), \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^-(\alpha) \right]$$

$$[\langle u, v \rangle(0, 0)]_\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle_0]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle_0]_r^+(\alpha) \right],$$

$$[\langle u, v \rangle(0, 0)]^\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle_0]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle_0]_r^-(\alpha) \right]$$

$$[\gamma_1(x)]_\alpha = \left[ [\gamma_1(x)]_l^+(\alpha), [\gamma_1(x)]_r^+(\alpha) \right],$$

$$[\gamma_1(x)]^\alpha = \left[ [\gamma_1(x)]_l^-(\alpha), [\gamma_1(x)]_r^-(\alpha) \right]$$

$$[\gamma_2(y)]_\alpha = \left[ [\gamma_2(y)]_l^+(\alpha), [\gamma_2(y)]_r^+(\alpha) \right],$$

$$[\gamma_2(y)]^\alpha = \left[ [\gamma_2(y)]_l^-(\alpha), [\gamma_2(y)]_r^-(\alpha) \right]$$

Et

$$\begin{aligned} [F(x, y, \langle u, v \rangle)]_{\alpha} &= [F_l^+(x, y, [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha)), F_r^+(x, y, [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha))] \\ [F(x, y, \langle u, v \rangle)]^{\alpha} &= [F_l^-(x, y, [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^-(\alpha)), F_r^-(x, y, [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^-(\alpha))] \end{aligned}$$

Ensuite, avec ces notations, le problème (4.14) est transformé en un système différentiel partiel suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^+(\alpha) &= F_l^+(x, y, [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha)), & (x, y) \in I_a \times I_b \\ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^+(\alpha) &= F_r^+(x, y, [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha)), & (x, y) \in I_a \times I_b \\ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^-(\alpha) &= F_l^-(x, y, [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^-(\alpha)), & (x, y) \in I_a \times I_b \\ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^-(\alpha) &= F_r^-(x, y, [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^-(\alpha)), & (x, y) \in I_a \times I_b \end{aligned} \right. \quad (4.15)$$

avec les conditions initiales

$$\left\{ \begin{aligned} [\langle u, v \rangle(0, 0)]_l^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle_0]_l^+(\alpha) \\ [\langle u, v \rangle(0, 0)]_r^+(\alpha) &= [\langle u, v \rangle_0]_r^+(\alpha) \\ [\langle u, v \rangle(0, 0)]_l^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle_0]_l^-(\alpha) \\ [\langle u, v \rangle(0, 0)]_r^-(\alpha) &= [\langle u, v \rangle_0]_r^-(\alpha) \\ [\langle u, v \rangle(x, 0)]_l^+(\alpha) &= [\gamma_1(x)]_l^+(\alpha), & x \in I_a \\ [\langle u, v \rangle(x, 0)]_r^+(\alpha) &= [\gamma_1(x)]_r^+(\alpha), & x \in I_a \\ [\langle u, v \rangle(x, 0)]_l^-(\alpha) &= [\gamma_1(x)]_l^-(\alpha), & x \in I_a \\ [\langle u, v \rangle(x, 0)]_r^-(\alpha) &= [\gamma_1(x)]_r^-(\alpha), & x \in I_a \\ [\langle u, v \rangle(0, y)]_l^+(\alpha) &= [\gamma_2(y)]_l^+(\alpha), & y \in I_b \\ [\langle u, v \rangle(0, y)]_r^+(\alpha) &= [\gamma_2(y)]_r^+(\alpha), & y \in I_b \\ [\langle u, v \rangle(0, y)]_l^-(\alpha) &= [\gamma_2(y)]_l^-(\alpha), & y \in I_b \\ [\langle u, v \rangle(0, y)]_r^-(\alpha) &= [\gamma_2(y)]_r^-(\alpha), & y \in I_b \end{aligned} \right. \quad (4.16)$$

1. Nous résolvons le système (4.15)-(4.16).

2. Si  $[\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha)$ ,  $[\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha)$ ,  $[\langle u, v \rangle(x, y)]_l^-(\alpha)$ ,  $[\langle u, v \rangle(x, y)]_r^-(\alpha)$  sont les solutions du système (4.15)-(4.16), ensuite dénoter

$$\left[ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha) \right] = M_{\alpha}, \quad \left[ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^-(\alpha) \right] = M^{\alpha}$$

Et

$$\begin{aligned} \left[ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^+(\alpha), \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^+(\alpha) \right] &= M'_{\alpha} \\ \left[ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^-(\alpha), \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^-(\alpha) \right] &= M'^{\alpha} \end{aligned}$$

assurer que  $(M_\alpha, M^\alpha)$  et  $(M'_\alpha, M'^\alpha)$  vérifient les (i)-(iv) de la proposition 2.1.

3. Après, en appliquant le Lemme 2.1, nous pouvons construire la solution floue intuitionniste  $\langle u, v \rangle(x, y) \in IF_1$  pour (4.14) tel que :

$$\begin{aligned} \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_\alpha &= \left[ \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_l^+(\alpha), \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_r^+(\alpha) \right] \\ \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]^\alpha &= \left[ \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_l^-(\alpha), \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_r^-(\alpha) \right] \end{aligned}$$

pour tous  $\alpha \in [0, 1]$ .

La même procédure que celle utilisée pour cette équation avec la condition non locale et intégrale.

**Remarque 3.1.** La même technique peut être utilisée pour cette équation  $\frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = (Q(x, y) \langle u, v \rangle(x, y))_y + F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y))$ ,  $(x, y) \in I_a = [0, a] \times I_b = [0, b]$  avec les conditions locales, non locales et intégrales.

## 4. Applications

Nous proposons les deux exemples suivants : Pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats et pour trouver une solution floue intuitionniste.

**Exemple 4.1.** Nous présentons un premier exemple pour montrer l'existence et l'unicité de solution intuitionniste floue pour l'équation au dérivée partielle floue intuitionniste avec une condition locale, alors : Considérons l'équation au dérivée partielle floue intuitionniste suivante :

$$\frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = \lambda C e^{x+y} \quad (4.17)$$

Où  $C \in IF_1$  est un nombre triangulaire flou intuitionniste,  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $0 < \lambda < e^{-2}$  et  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

Et les conditions initiales sont :

$$\langle u, v \rangle(0, 0) = \lambda C \quad (4.18)$$

$$\langle u, v \rangle(x, 0) = \lambda C e^x \quad (4.19)$$

$$\langle u, v \rangle(0, y) = \lambda C e^y \quad (4.20)$$

La fonction  $F : [0, 1] \times [0, 1] \times IF_1 \rightarrow IF_1$  définie par :

$$F(x, y, \langle u, v \rangle) = \lambda C e^{x+y}$$

satisfait les hypothèses 1. et 2. du Théorème 1.1. En effet, il est facile de voir que  $F$  est continue.

Nous avons :

$$d_\infty(F(x, y, \langle u, v \rangle), F(x, y, \langle u, v \rangle)) = 0$$

et donc  $F$  satisfait 2.

Il est clair que les hypothèses sont vérifiées pour tout nombre positif  $L$  comme  $L = \lambda e^2$  et  $a = b = 1$ . Cela répond à toutes les conditions du Théorème 1.1. Il existe donc une

*solution floue intuitionniste unique de ce problème.*

*Nous trouverons une solution floue intuitionniste à ce problème en utilisant la méthode de l'étape définie dans la section 4.3. La solution classique de l'équation est :*

$$u = \lambda ce^{x+y}$$

*Supposons que la forme paramétrique du nombre flou intuitionniste correspondant à  $C$  est :*

$$\begin{aligned} [C]_{\alpha} &= [C_l^+(\alpha), C_r^+(\alpha)] \\ [C]^{\alpha} &= [C_l^-(\alpha), C_r^-(\alpha)] \end{aligned}$$

*Où il faut vérifier les conditions du Lemme 2.1.*

*Alors la fonction  $F : [0, 1] \times [0, 1] \times IF_1 \rightarrow IF_1$  définie par  $F(x, y, \langle u, v \rangle) = \lambda Ce^{x+y}$ , alors :*

$$\begin{aligned} [F]_{\alpha} &= [\lambda C_l^+(\alpha)e^{x+y}, \lambda C_r^+(\alpha)e^{x+y}] = \lambda e^{x+y} [C_l^+(\alpha), C_r^+(\alpha)] \\ [F]^{\alpha} &= [\lambda C_l^-(\alpha)e^{x+y}, \lambda C_r^-(\alpha)e^{x+y}] = \lambda e^{x+y} [C_l^-(\alpha), C_r^-(\alpha)] \end{aligned}$$

*Si*

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(x, y)]_{\alpha} &= \left[ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha) \right] \\ [\langle u, v \rangle(x, y)]^{\alpha} &= \left[ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^-(\alpha) \right] \end{aligned}$$

*Dans ce cas,*

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_{\alpha} &= \left[ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^+(\alpha), \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^+(\alpha) \right] \\ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]^{\alpha} &= \left[ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^-(\alpha), \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^-(\alpha) \right] \end{aligned}$$

*Par conséquent, nous devons résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :*

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^+(\alpha) = \lambda e^{x+y} C_l^+(\alpha), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^+(\alpha) = \lambda e^{x+y} C_r^+(\alpha), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^-(\alpha) = \lambda e^{x+y} C_l^-(\alpha), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^-(\alpha) = \lambda e^{x+y} C_r^-(\alpha), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \end{cases} \quad (4.21)$$

avec les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} [\langle u, v \rangle(0, 0)]_l^+(\alpha) = \lambda C_l^+(\alpha) \\ [\langle u, v \rangle(0, 0)]_r^+(\alpha) = \lambda C_r^+(\alpha) \\ [\langle u, v \rangle(0, 0)]_l^-(\alpha) = \lambda C_l^-(\alpha) \\ [\langle u, v \rangle(0, 0)]_r^-(\alpha) = \lambda C_r^-(\alpha) \\ [\langle u, v \rangle(x, 0)]_l^+(\alpha) = \lambda e^x C_l^+(\alpha), \quad x \in [0, 1] \\ [\langle u, v \rangle(x, 0)]_r^+(\alpha) = \lambda e^x C_r^+(\alpha), \quad x \in [0, 1] \\ [\langle u, v \rangle(x, 0)]_l^-(\alpha) = \lambda e^x C_l^-(\alpha), \quad x \in [0, 1] \\ [\langle u, v \rangle(x, 0)]_r^-(\alpha) = \lambda e^x C_r^-(\alpha), \quad x \in [0, 1] \\ [\langle u, v \rangle(0, y)]_l^+(\alpha) = \lambda e^y C_l^+(\alpha), \quad y \in [0, 1] \\ [\langle u, v \rangle(0, y)]_r^+(\alpha) = \lambda e^y C_r^+(\alpha), \quad y \in [0, 1] \\ [\langle u, v \rangle(0, y)]_l^-(\alpha) = \lambda e^y C_l^-(\alpha), \quad y \in [0, 1] \\ [\langle u, v \rangle(0, y)]_r^-(\alpha) = \lambda e^y C_r^-(\alpha), \quad y \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha) = \lambda e^{x+y} C_l^+(\alpha), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha) = \lambda e^{x+y} C_r^+(\alpha), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^-(\alpha) = \lambda e^{x+y} C_l^-(\alpha), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^-(\alpha) = \lambda e^{x+y} C_r^-(\alpha), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(x, y)]_\alpha &= [\lambda e^{x+y} C_l^+(\alpha), \lambda e^{x+y} C_r^+(\alpha)] \\ [\langle u, v \rangle(x, y)]^\alpha &= [\lambda e^{x+y} C_l^-(\alpha), \lambda e^{x+y} C_r^-(\alpha)] \end{aligned}$$

Nous dénotons maintenant,

$$[\lambda e^{x+y} C_l^+(\alpha), \lambda e^{x+y} C_r^+(\alpha)] = M_\alpha = M'_\alpha, \quad [\lambda e^{x+y} C_l^-(\alpha), \lambda e^{x+y} C_r^-(\alpha)] = M^\alpha = M'^\alpha$$

Il est facile de voir que  $(M_\alpha, M^\alpha)$  vérifie (i)-(iv) de la proposition 2.1 et en utilisant le Lemme 2.1 nous pouvons construire la solution floue intuitionniste  $\langle u, v \rangle(x, y) \in IF_1$  pour (4.17)-(4.20) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(x, y)]_\alpha &= [\lambda e^{x+y} C_l^+(\alpha), \lambda e^{x+y} C_r^+(\alpha)] \\ [\langle u, v \rangle(x, y)]^\alpha &= [\lambda e^{x+y} C_l^-(\alpha), \lambda e^{x+y} C_r^-(\alpha)] \end{aligned}$$

Pour chaque  $\alpha \in [0, 1]$ .

Par conséquent,  $\langle u, v \rangle(x, y)$  est une solution floue intuitionniste qui satisfait également les conditions initiales (4.18)-(4.20). Cette solution peut s'écrire sous la forme :

$$\langle u, v \rangle(x, y) = \lambda C e^{x+y}$$

Des simulations numériques sont utilisées pour obtenir une représentation graphique de la solution floue intuitionniste. Les fonctions d'appartenance et de non-appartenance du nombre flou intuitionniste triangulaire  $C=(-2,0,2;-3.75,0,3.75)$  dans la figure 4.1 et de la solution floue intuitionniste  $\langle u, v \rangle(x, y)$  à différentes valeurs de  $(x, y)$  avec  $\lambda = 0.13$  dans la figure 4.2.

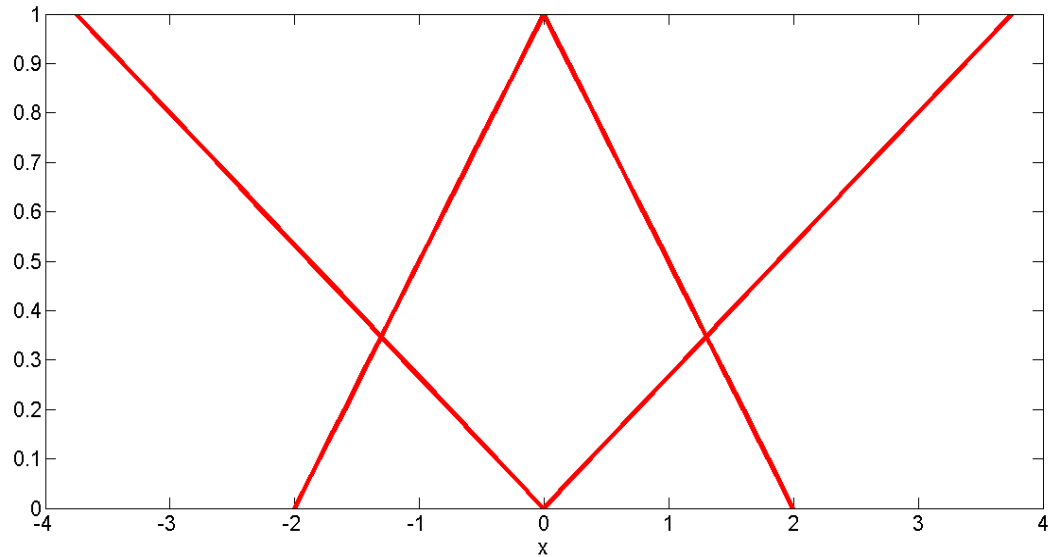


FIGURE 4.1 –  $C=(-2,0,2;-3.75,0,3.75)$

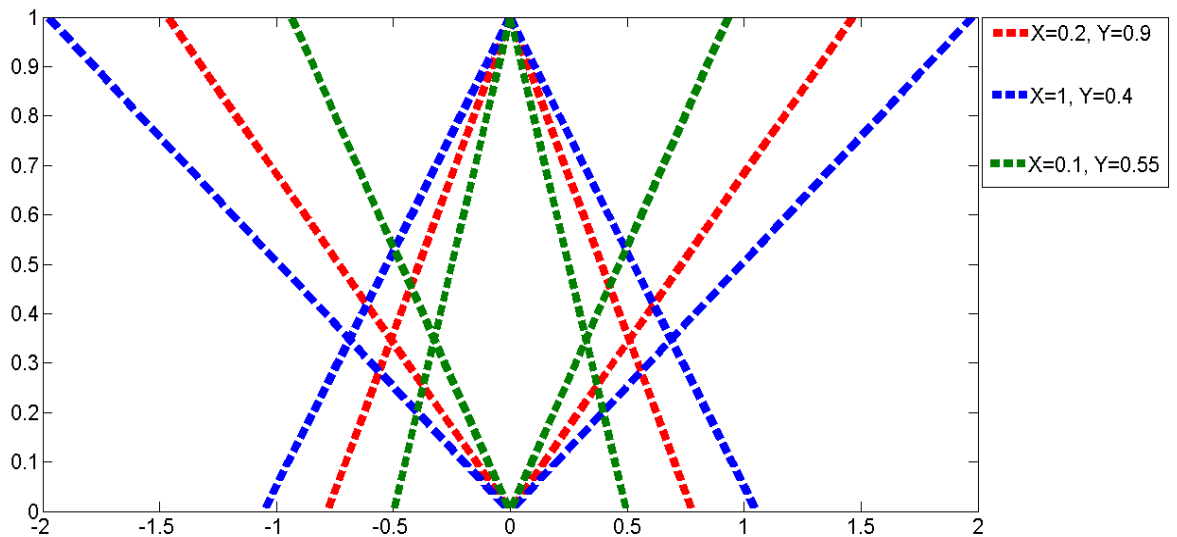


FIGURE 4.2 – La figure des solutions floues intuitionnistes  $\langle u, v \rangle(x, y)$  à différentes valeurs de  $(x, y)$ .

La figure 4.3 montre les  $\alpha$ -coupes des solutions floues intuitionnistiques en 2D. Les courbes de la surface correspondent précisément aux solutions limitées inférieures et supérieures de  $\langle u, v \rangle(x, y)$ . Ce sont les courbes des ensembles de coupes inférieures et supérieures de  $[\langle u, v \rangle(x, y)]_\alpha$  et  $[\langle u, v \rangle(x, y)]^\alpha$  respectivement, ici nous choisissons  $\alpha = 0,3$ ,  $\alpha = 0,5$  et  $\alpha = 0,8$ . Les courbes au milieu de la surface correspondent aux solutions classiques  $[\langle u, v \rangle(x, y)]_1$  et  $[\langle u, v \rangle(x, y)]^0$ .

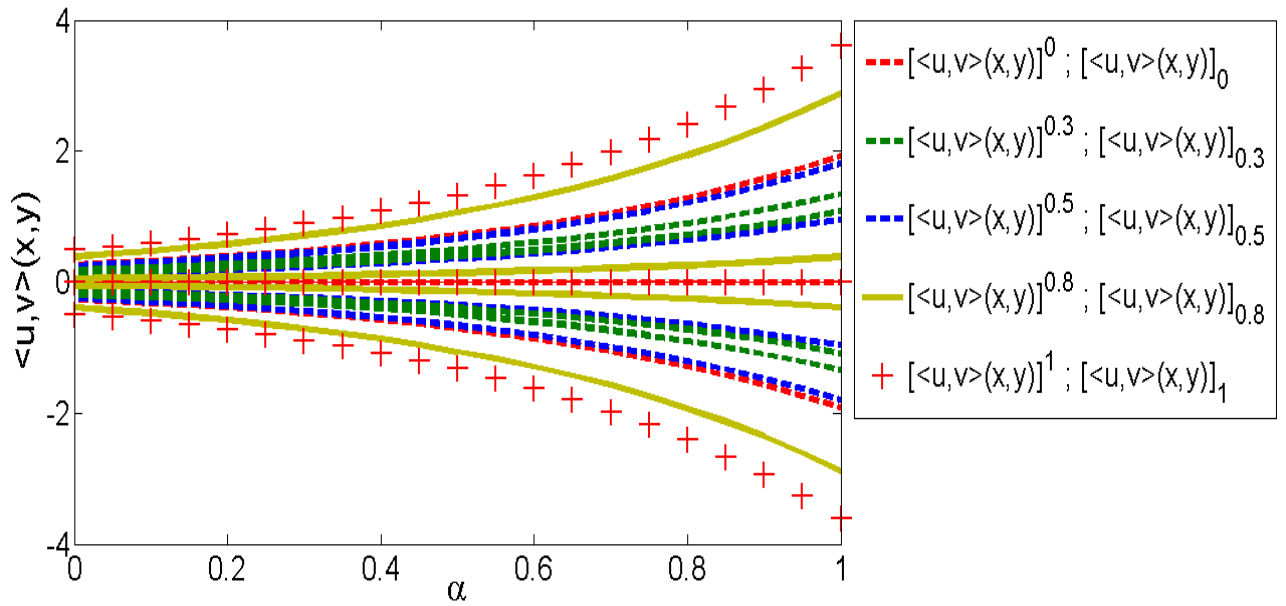


FIGURE 4.3 – Les graphes en 2D de quelques  $\alpha$ -coupes de solutions floues intuitionnistiques

Nous présentons la surface de la solution floue intuitionniste dans la figure 4.4 avec le nombre flou intuitionniste triangulaire  $C=(-2,0,2;-3.75,0,3.75)$  et  $\lambda = 0.13$ .

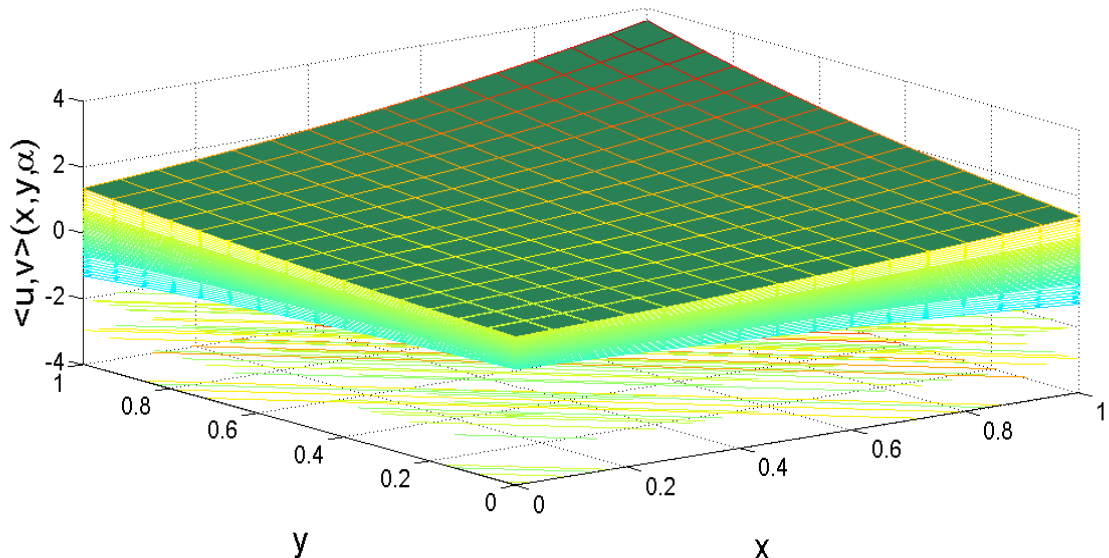


FIGURE 4.4 – La surface de la solution floue intuitionniste

**Exemple 4.2.** Nous présentons maintenant un deuxième exemple pour montrer l'existence et l'unicité de solution floue intuitionnistiques pour l'équation au dérivée partielle floue intuitionnistiques avec une condition intégrale, alors : Considérons l'équation au dérivée partielle floue intuitionniste suivante :

$$\frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{4} \left( y \langle u, v \rangle(x, y) \right)_y + \frac{1}{2} \langle u, v \rangle(x, y) + C \quad (4.24)$$

Où  $C \in IF_1$  est un nombre flou intuitionniste triangulaire,  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .  
Et les conditions aux limites intégrales sont :

$$\langle u, v \rangle(x, 0) + \frac{1}{10} \int_0^1 \langle u, v \rangle(x, y) dy = \frac{1}{20} x C \quad (4.25)$$

$$\langle u, v \rangle(0, y) + \frac{1}{10} \int_0^1 \langle u, v \rangle(x, y) dx = \frac{1}{20} y C \quad (4.26)$$

De (4.24), nous avons la fonction  $F : [0, 1] \times [0, 1] \times IF_1 \rightarrow IF_1$  définie par

$$F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)) = \frac{1}{2} \langle u, v \rangle(x, y) + C$$

satisfait les hypothèses 1. et 2. du Théorème 2.2. En effet, il est facile de voir que  $F$  est continue. Ainsi :

$$d_\infty(F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)), F(x, y, \langle u', v' \rangle(x, y))) \leq \frac{1}{2} d_\infty(\langle u, v \rangle(x, y), \langle u', v' \rangle(x, y))$$

et donc  $f$  satisfait 2.

Nous trouverons une solution floue intuitionniste à ce problème :

Supposons que la forme paramétrique du nombre flou intuitionniste correspondant à  $C$  est :

$$\begin{aligned} [C]_\alpha &= [C_l^+(\alpha), C_r^+(\alpha)] \\ [C]^\alpha &= [C_l^-(\alpha), C_r^-(\alpha)] \end{aligned}$$

Où il faut vérifier les conditions du Lemme 2.1.

Ensuite, la fonction  $F : [0, 1] \times [0, 1] \times IF_1 \rightarrow IF_1$  définie par  $F(x, y, \langle u, v \rangle(x, y)) = \langle u, v \rangle(x, y) + C$ , alors :

$$\begin{aligned} [F]_\alpha &= [\langle u, v \rangle(x, y) + C]_\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha) + C_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha) + C_r^+(\alpha) \right] \\ [F]^\alpha &= [\langle u, v \rangle(x, y) + C]^\alpha = \left[ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha) + C_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha) + C_r^-(\alpha) \right] \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(x, y)]_\alpha &= \left[ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^+(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^+(\alpha) \right] \\ [\langle u, v \rangle(x, y)]^\alpha &= \left[ [\langle u, v \rangle(x, y)]_l^-(\alpha), [\langle u, v \rangle(x, y)]_r^-(\alpha) \right] \end{aligned}$$



Alors,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_{\alpha} &= \left[ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^+ (\alpha), \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^+ (\alpha) \right] \\ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_{\alpha} &= \left[ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^- (\alpha), \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^- (\alpha) \right] \end{aligned}$$

Par conséquent, nous devons résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^+ (\alpha) &= -\frac{1}{4} \left[ (y \langle u, v \rangle(x, y))_y \right]_l^+ (\alpha) + \frac{1}{2} \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_l^+ (\alpha) + C_l^+(\alpha), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^+ (\alpha) &= -\frac{1}{4} \left[ (y \langle u, v \rangle(x, y))_y \right]_r^+ (\alpha) + \frac{1}{2} \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_r^+ (\alpha) + C_r^+(\alpha), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_l^- (\alpha) &= -\frac{1}{4} \left[ (y \langle u, v \rangle(x, y))_y \right]_l^- (\alpha) + \frac{1}{2} \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_l^- (\alpha) + C_l^-(\alpha), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \left[ \frac{\partial^2 \langle u, v \rangle(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_r^- (\alpha) &= -\frac{1}{4} \left[ (y \langle u, v \rangle(x, y))_y \right]_r^- (\alpha) + \frac{1}{2} \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_r^- (\alpha) + C_r^-(\alpha), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \end{aligned} \right.$$

Avec les conditions initiales

$$\left\{ \begin{aligned} \left[ \langle u, v \rangle(x, 0) \right]_l^+ (\alpha) + \frac{1}{10} \int_0^1 \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_l^+ (\alpha) dy &= \frac{1}{20} x C_l^+(\alpha), \quad x \in [0, 1] \\ \left[ \langle u, v \rangle(x, 0) \right]_r^+ (\alpha) + \frac{1}{10} \int_0^1 \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_r^+ (\alpha) dy &= \frac{1}{20} x C_r^+(\alpha), \quad x \in [0, 1] \\ \left[ \langle u, v \rangle(x, 0) \right]_l^- (\alpha) + \frac{1}{10} \int_0^1 \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_l^- (\alpha) dy &= \frac{1}{20} x C_l^-(\alpha), \quad x \in [0, 1] \\ \left[ \langle u, v \rangle(x, 0) \right]_r^- (\alpha) + \frac{1}{10} \int_0^1 \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_r^- (\alpha) dy &= \frac{1}{20} x C_r^-(\alpha), \quad x \in [0, 1] \\ \left[ \langle u, v \rangle(0, y) \right]_l^+ (\alpha) + \frac{1}{10} \int_0^1 \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_l^+ (\alpha) dx &= \frac{1}{20} y C_l^+(\alpha), \quad y \in [0, 1] \\ \left[ \langle u, v \rangle(0, y) \right]_r^+ (\alpha) + \frac{1}{10} \int_0^1 \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_r^+ (\alpha) dx &= \frac{1}{20} y C_r^+(\alpha), \quad y \in [0, 1] \\ \left[ \langle u, v \rangle(0, y) \right]_l^- (\alpha) + \frac{1}{10} \int_0^1 \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_l^- (\alpha) dx &= \frac{1}{20} y C_l^-(\alpha), \quad y \in [0, 1] \\ \left[ \langle u, v \rangle(0, y) \right]_r^- (\alpha) + \frac{1}{10} \int_0^1 \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_r^- (\alpha) dx &= \frac{1}{20} y C_r^-(\alpha), \quad y \in [0, 1] \end{aligned} \right. \quad (4.27)$$

Nous obtenons,

$$\left\{ \begin{aligned} \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_l^+ (\alpha) &= xy C_l^+(\alpha), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_r^+ (\alpha) &= xy C_r^+(\alpha), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_l^- (\alpha) &= xy C_l^-(\alpha), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \left[ \langle u, v \rangle(x, y) \right]_r^- (\alpha) &= xy C_r^-(\alpha), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \end{aligned} \right. \quad (4.28)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(x, y)]_{\alpha} &= [xyC_l^+(\alpha), xyC_r^+(\alpha)] \\ [\langle u, v \rangle(x, y)]^{\alpha} &= [xyC_l^-(\alpha), xyC_r^-(\alpha)] \end{aligned}$$

Nous dénotons maintenant

$$[xyC_l^+(\alpha), xyC_r^+(\alpha)] = M_{\alpha}, \quad [xyC_l^-(\alpha), xyC_r^-(\alpha)] = M^{\alpha}$$

Et

$$[C_l^+(\alpha), C_r^+(\alpha)] = M'_{\alpha}, \quad [C_l^-(\alpha), C_r^-(\alpha)] = M'^{\alpha}$$

Il est facile de voir que  $(M_{\alpha}, M^{\alpha})$  vérifie (i)-(iv) de la proposition 2..1 et en utilisant le Lemme 2..1 nous pouvons construire une solution floue intuitionniste  $\langle u, v \rangle(x, y) \in IF_1$  pour (4.24)-(4.25)-(4.26) de la forme suivante :

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle(x, y)]_{\alpha} &= [xyC_l^+(\alpha), xyC_r^+(\alpha)] \\ [\langle u, v \rangle(x, y)]^{\alpha} &= [xyC_l^-(\alpha), xyC_r^-(\alpha)] \end{aligned}$$

pour chaque  $\alpha \in [0, 1]$ . Par conséquent,  $\langle u, v \rangle(x, y)$  est une solution floue intuitionniste qui satisfait également les conditions initiales (4.25)-(4.26). Cette solution peut s'écrire :

$$\langle u, v \rangle(x, y) = xyC$$

Des simulations numériques sont utilisées pour obtenir une représentation graphique de la solution floue intuitionniste. Les fonctions d'appartenance et de non-appartenance du nombre flou intuitionniste triangulaire  $C=(-1,0,1;-0.75,0,0.75)$  dans la figure 4.5 et de la solution floue intuitionniste  $\langle u, v \rangle(x, y)$  à différentes valeurs de  $(x, y)$  dans la figure 4.6.

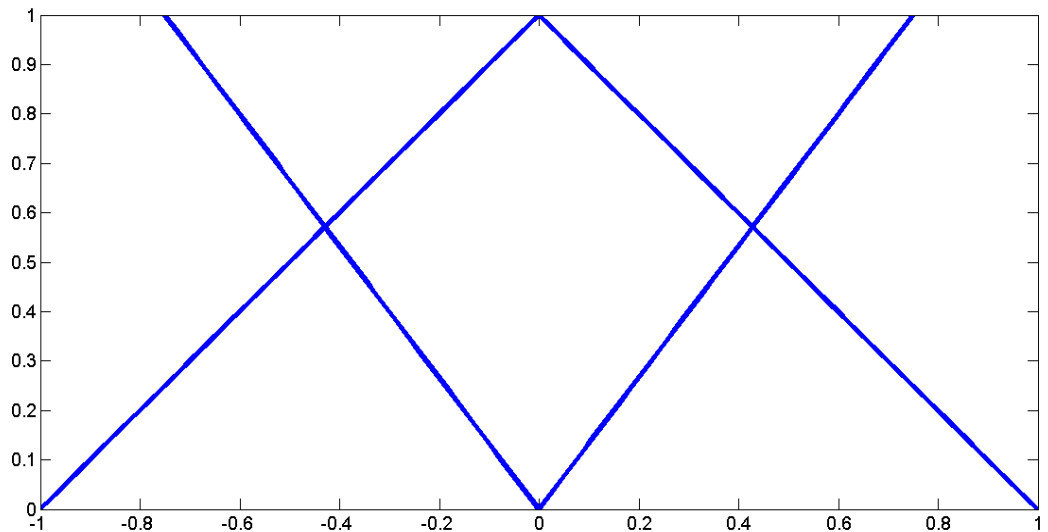


FIGURE 4.5 –  $C=(-1,0,1;-0.75,0,0.75)$

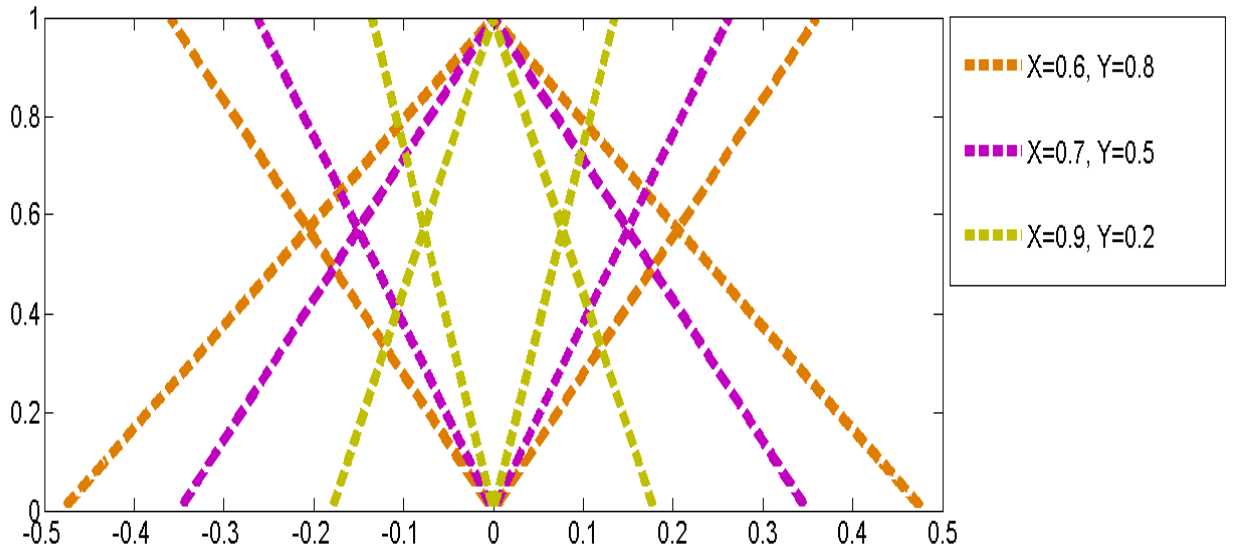


FIGURE 4.6 – La figure des solutions floues intuitionnistiques  $\langle u, v \rangle(x, y)$  à différentes valeurs de  $(x, y)$ .

La figure 4.7 montre les  $\alpha$ -coupes des solutions floues intuitionnistiques en 2D. Les courbes de la surface correspondent précisément aux solutions limitées inférieures et supérieures de  $\langle u, v \rangle(x, y)$ . Ce sont les courbes des ensembles de coupes inférieures et supérieures de  $[\langle u, v \rangle(x, y)]_\alpha$  et  $[\langle u, v \rangle(x, y)]^\alpha$  respectivement, ici nous choisissons  $\alpha = 0.3$ ,  $\alpha = 0.5$  et  $\alpha = 0.8$ . Les courbes au milieu de la surface correspondent aux solutions classiques  $[\langle u, v \rangle(x, y)]_1$  et  $[\langle u, v \rangle(x, y)]^0$ .

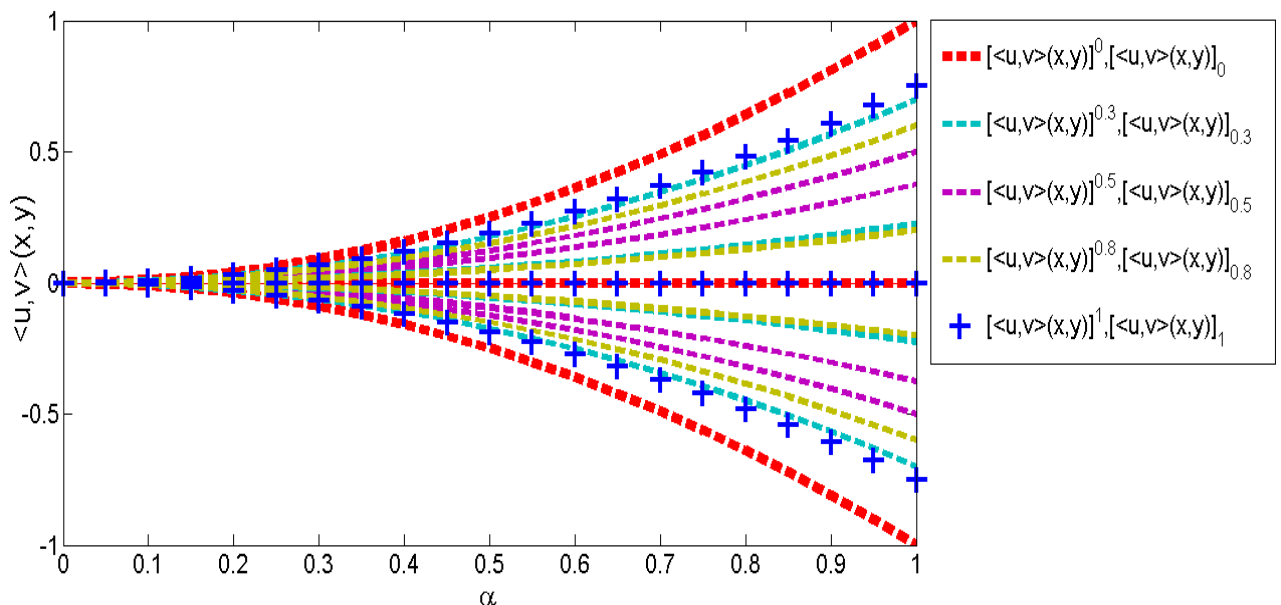


FIGURE 4.7 – Les graphes en 2D de quelques  $\alpha$ -coupes de solutions floues intuitionnistiques

*En utilisant les simulations numériques de Matlab, nous présentons la surface de la solution floue intuitionniste dans la figure 4.8 avec le nombre flou intuitionniste triangulaire  $C=(-1,0,1;-0.75,0,0.75)$ .*

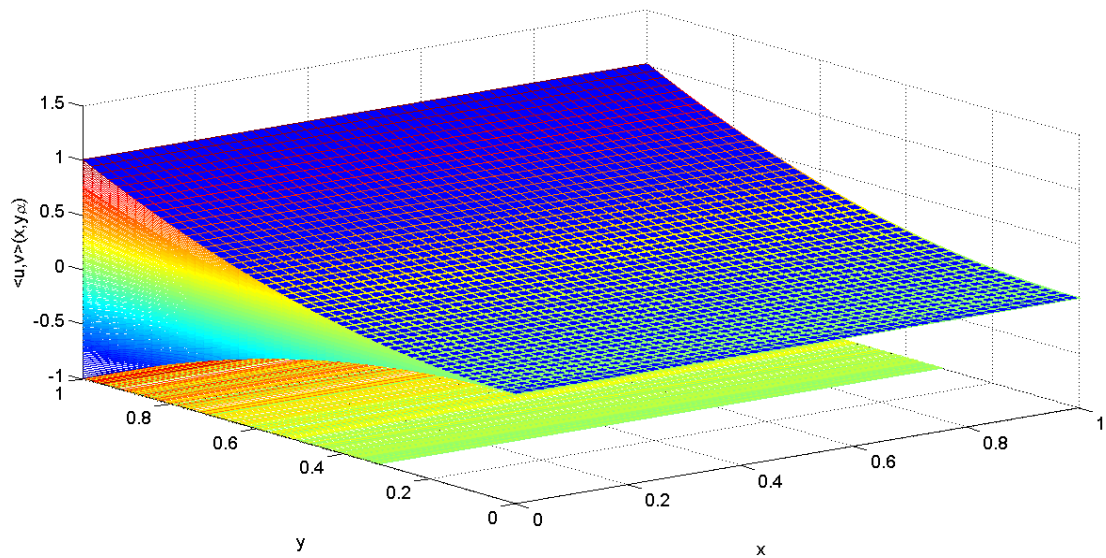


FIGURE 4.8 – La surface de la solution floue intuitionniste

# Conclusions et perspectives

Cette thèse avait l'ambition de présenter quelques notions basiques en lien avec la théorie des ensembles flous intuitionnistiques, ces opérations des bases et les principales propriétés sur ces opérations. Il convient de noter que l'approche permet de caractériser divers problèmes, tant en mathématique qu'en sciences sociales, qui revêtent un certain degré d'incertitude et d'imprécision. Puisque dans la réalité, toute activité humaine comporte soit de l'incertitude soit de l'imprécision, il s'avère donc important pour des recherches futures, de montrer comment la théorie des ensembles flous peut contribuer à mieux modéliser différents comportements observés dans le monde réel.

Par ailleurs, la théorie des ensembles flous intuitionnistiques a également ouvert un vaste champ de recherche dans le domaine purement scientifique. Ainsi, dans les publications ultérieures, nous tenterons également d'explorer quelques notions plus avancées des mathématiques floues. Et nous montrerons que ces notions plus approfondies sont utiles dans la formulation des plusieurs problèmes, comme le problème de programmation mathématique floue, qui intéressent tant les mathématiciens que les économistes.

Nous rappelons les points principaux de ce travail et nous signalons quelques directions pour des recherches futures. De façon générale, dans cette thèse, nous avons abordé quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles floues intuitionnistiques savoir celles qui sont nommées des problèmes à valeur initial floue intuitionnistiques, et leur résolution numériques et nous avons donné la notion du convergence, consistance et la stabilité d'un schéma numérique. Enfin, nous avons traité des équations aux dérivées partielles floues intuitionnistiques avec des conditions locales, non locales et intégrales, ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé quelques théorèmes de point fixe de Banach.

Dans ce mémoire, on a commencé par des historiques, des introductions générales aux des sous ensembles flous, on a introduit les notions de base de la théorie floue intuitionniste et quelques concepts préliminaires pour l'étude de ces équations.

En suite, on s'intéresse aux équations différentielles floues intuitionnistiques plus précisément le problème de Cauchy à valeur initiale floue intuitionniste. On a donné une position de ces problèmes, on a montré l'existence et l'unicité de la solution de ce type d'équations sous certaines hypothèses suffisantes.

Puis, on a étudié la résolution numérique des équations différentielles floues intuitionnistiques, on a commencé par approcher le problème à valeur initial floue par différentes méthodes numériques, en reformulant les méthodes classiques déjà connues. On a généralisé ces méthodes dans le cas floue intuitionniste, ensuite on a essayé de prouver la convergence de ces méthodes dans le sens que ces grandeurs sont flous intui-

tionistiques en se basant essentiellement sur les théorèmes de convergence dans le cas flou et classique, puis on a donné la notion de la stabilité et la consistance des schémas numériques. On a terminé par donner quelques applications numériques. Les résultats numériques obtenus montrent l'efficacité de ces approches proposées.

Après, on a proposé des résultats d'existence et d'unicité d'une solution floue intuitionistique de deux problèmes aux limites concernant des équations aux dérivées partielles floues intuitionistiques avec des conditions locales et non locales, on a montré également l'existence et l'unicité de la solution de ce types problèmes avec des conditions intégrales basés sur les théorèmes du point fixe de Banach. Aussi, on a présenté une nouvelle procédure pour calculer la solution floue intuitionistique liées à ces équations. On a donné quelques applications numériques afin de valider les résultats théoriques obtenus.

Finalement, ce domaine est très riche en questions ouvertes, par conséquent différentes perspectives peuvent être lancées à la suite de ce travail, ces perspectives qui vont constituer des orientations possibles pour des travaux futurs que l'on peut envisager, au moyen terme, nous pouvons citer :

- Systèmes flous intuitionistiques.
- Les équations aux dérivées partielles floues intuitionistiques à retard.
- Les méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles floues intuitionistiques.

# Bibliographie

- [1] S. Ambapour, Théorie des ensembles flous : application à la mesure de la pauvreté au Congo, DT 16/2009, Bureau d'application des méthodes statistiques et informatiques Brazzaville, 38 pages.
- [2] K. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets. VII ITKR's session, Sofia (deposited in Central Science and Technical Library of the Bulgarian Academy of Sciences), 1983.
- [3] K. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 1986, Vol. 20, pp. 87-96.
- [4] K. T. Atanassov, More on intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 1989, Vol. 33, No. 1, pp. 37-45.
- [5] B. Ben Amma, S. Melliani and L. S. Chadli, Numerical solution of intuitionistic fuzzy differential equations by Euler and Taylor methods, Notes on IFS, 2016, Vol. 22, No. 2, pp. 71-86.
- [6] B. Ben Amma, S. Melliani and L. S. Chadli, Numerical solution of intuitionistic fuzzy differential equations by Adams three order predictor-corrector method, Notes on IFS, 2016, Vol. 22, No. 3, pp. 47-69.
- [7] B. Ben Amma, S. Melliani and L. S. Chadli, The Cauchy Problem Of Intuitionistic Fuzzy Differential Equations, Notes on IFS, 2018, Vol. 24, No. 1, pp. 37-47.
- [8] B. Ben Amma, S. Melliani and L. S. Chadli, A Fourth Order Runge-Kutta Gill Method for the Numerical Solution of Intuitionistic Fuzzy Differential Equations, Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 372. Springer, Cham, 2019.
- [9] B. Ben Amma, S. Melliani and L. S. Chadli, Integral Boundary Value Problem for Intuitionistic Fuzzy Partial Hyperbolic Differential Equations, Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 292, 2019.
- [10] B. Ben Amma, S. Melliani and L. S. Chadli, The Numerical Solution Of Intuitionistic Fuzzy Differential Equations By The Third Order Runge-Kutta Nyström Method, Intuitionistic and Type-2 Fuzzy Logic Enhancements in Neural and Optimization Algorithms : Theory and Applications, Springer, Vol. 862, 2020.
- [11] B. Ben Amma, S. Melliani and L. S. Chadli, On the Existence and Uniqueness Results for Intuitionistic Fuzzy Partial Differential Equations, International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, 2020 (In press).
- [12] B. Ben Amma, S. Melliani and L. S. Chadli, Convergence, Consistence and Stability Analysis of One Step Methods for First-Order Intuitionistic Fuzzy Differential Equations, International Journal of Fuzzy System Applications, 2020 (In press).
- [13] B. Ben Amma, S. Melliani and L. S. Chadli, Numerical Solution Of Intuitionistic Fuzzy Differential Equations By Runge-Kutta Verner Method, Recent Advances in

- Intuitionistic Fuzzy Logic Systems and Mathematics, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer International Publishing, Vol 395, 2021 (In Press).
- [14] P. Bome, Introduction à la commande floue, Coll. Collection Sciences et technologies, Paris : Technip, vi, 102p.
- [15] O. Castillo, Framework for Optimization of Intuitionistic and Type-2 Fuzzy Systems in Control Applications, Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, Vol. 372, 2019.
- [16] O. Castillo, P. Melin and J. Kacprzyk, Intuitionistic and Type-2 Fuzzy Logic Enhancements in Neural and Optimization Algorithms : Theory and Applications, Studies in Computational Intelligence, Springer, Vol. 862, 2020.
- [17] S. K. De, R. Biswas and A. R. Roy An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis., Fuzzy Sets Sys., 2001, Vol. 117, pp. 209-213.
- [18] D. Dubois and H. Prade, Towards fuzzy differential calculus-Part 1, Fuzzy Sets and Syst., 1982, Vol. 8, pp. 1-17.
- [19] D. Dubois and H. Prade, Towards fuzzy differential calculus-Part 2, Fuzzy Sets Syst., 1982, pp. 105-116.
- [20] D. Dubois and H. Prade, Towards fuzzy differential calculu-Part 3, Fuzzy Sets and Syst., 1982, Vol.8, pp. 225-234.
- [21] P. A. Ejegwa, B. S. Uleh and E. Onwe, Intuitionistic fuzzy sets in electoral system, Int. Journal of Science and Technology, 2014, Vol. 3, No. 4, pp. 241-243.
- [22] P. A. Ejegwa, A. M. Onoja and S. N. Chukwukelu, Application of intuitionistic fuzzy sets in research questionnaire, Journal of Global Research in Mathematical Archives, 2014, Vol. 2, No. 5, pp. 51-54.
- [23] O. Kaleva, Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets Syst., 1987, Vol. 24, pp. 301-317.
- [24] V. Lakshmikantham and S. Leela, Differential and Integral Inequalities, Vols. I and II, Academic Press, New York, 1969.
- [25] M. Ma, M. Friedman and A. Kandel, Numerical solutions of fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Syst., 1999, Vol. 105, pp. 133-138.
- [26] E. H. Mamdani and S. Assilian, An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller, Int. Journal of Man-Machine Studies, 1975, Vol. 7, pp. 1-13.
- [27] E. H. Mamdani. Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers, International Journal of Man-Machine Studies, 1976, Vol. 8, pp. 669-678.
- [28] S. Melliani and L. S. Chadli, Intuitionistic fuzzy differential equation, Notes on IFS, 2000, Vol. 6, pp. 37-41.
- [29] S. Melliani and L. S. Chadli, Introduction to intuitionistic fuzzy partial differential equations, Notes on IFS, 2001, Vol. 7, pp. 39-42.
- [30] S. Melliani, M. Elomari, L. S. Chadli, and R. Ettoussi, Extension of Hukuhara difference inintuitionistic fuzzy set theory, Notes on IFS, 2015, Vol. 21, No. 1, pp. 34-47.
- [31] S. Melliani, M. Elomari, L.S. Chadli and R. Ettoussi, Intuitionistic Fuzzy Metric Space, Notes on IFS, 2015, Vol. 21, No. 1, pp. 43-53.
- [32] S. Melliani, M. Elomari, M. Atraoui and L. S. Chadli, Intuitionistic fuzzy differential equation with nonlocal condition, Notes on IFS, 2015, Vol. 21, No. 4, pp. 58-68.
- [33] S. Melliani, M. Elomari, L. S. Chadli and R. Ettoussi, Intuitionistic fuzzy fractional equation, Notes on IFS, 2015, Vol. 21, No. 4, pp. 76-89.



- [34] S. Melliani, I. Bakhadach, M. Elomari and L. S. Chadli, Intuitionistic fuzzy Dirichlet problem, Notes on IFS, 2018, Vol. 24, N. 4, pp. 72-84.
- [35] M. R. Rezoug, R. Chenni and D. Taibi, Fuzzy Logic-Based Perturb and Observe Algorithm with Variable Steps of a Reference Voltage for Solar Permanent Magnet Synchronouns Motor Drive System Fed by Direct-Connected Photovoltaic Arry, Renew. Energies, 2018, Vol. 11, pp. 02-15.
- [36] C. Rolland-May, la théorie des ensembles flous et son intérêt en géographie. In : Espace géographique. Tome 1987, Vol. 16, N. 1, pp. 42-50.
- [37] A. Sangalli, Éloge du flou : aux frontières des mathématiques et de l'intelligence artificielle. Montréal : Presses de l'Université de Montréal, 2001, 206p.
- [38] P. M. Sankar and T. K. Roy, First order homogeneous ordinary differential equation with initial value as triangular intuitionistic fuzzy number, Journal of Uncertainty in Mathematics Science, 2014, pp. 1-17.
- [39] P. M. Sankar and T. K. Roy, System of Differential Equation with Initial Value as Triangular Intuitionistic Fuzzy Number and its Application, Int. J. Appl. Comput. Math, 2015, Vol. 1, No. 3, pp. 449-474.
- [40] M. H. Shu, C.H. Cheng and J.R. Chang, Using intuitionistic fuzzy sets for fault-tree analysis on printed circuit board assembly, Microelectron. Reliab., 2006, Vol. 46, No. 12, pp. 2139-2148.
- [41] I. Skrjanc, S. Blazic and O. Agamennoni, Identification Of dynamical systems with a robust interval fuzzy model, Automatica, 2005, Vol. 41, pp. 327-332.
- [42] S. Sotirov, E. Sotirova, V. Atanassova, K. Atanassov, O. Castillo, P. Melin, T. Petkov and S. Surchev, A Hybrid Approach for modular neural network design using intercriteria analysis and intuitionistic fuzzy logic, Complexity, 2018.
- [43] Y. Wang, Q. L. Zhang, X. D. Liu, and S. C. Tong, Stability analysis and design of fuzzy control systems based on interval approach, in Proc. 4th World Congr. Intelligent Control and Automation, 2002, Vol. 1, pp. 376-380.
- [44] J. Ye, Multicriteria fuzzy decision-making method based on a novel accuracy function under interval valued intuitionistic fuzzy environment, Expert Syst. Applicat., 2009, Vol. 36, pp. 6899-6902.
- [45] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Inf. Control, 1965, Vol. 8, No. 3, pp. 338-353.
- [46] L. A. Zadeh, A fuzzy-set-theoretic interprétation of linguistic hedges, Journal of Cybematics, 1972, Vol. 2, No 3., pp. 4-34.
- [47] L. A. Zadeh, Outline of a new approach to the analysis of complex Systems and decision process, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybematics, 1973, Vol. SMC-3, pp. 28-44.
- [48] L. A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I, Inf. Sc., 1975, Vol. 8, pp. 199-249.
- [49] L. A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning II, Inf. Sc., 1975, Vol. 8, pp. 301-357.
- [50] L. A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning III, Inf. Sc., 1975, Vol. 8, pp. 43-80.
- [51] L. A. Zadeh, Fuzzy B algorithmic approach to the définition of complex or imprécise concepts, Int. J. Man-Machine Studies, 1976, Vol. 8, pp. 249-291.