Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

№ d'ordre: .../..

THÈSE

Présentée à la Faculté Polydisciplinaire de Khouribga pour obtenir le grade de :

Docteur

Formation doctorale : **Mathématiques et Physique Appliquées**

Spécialité : **Mathématiques**

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DU POINT FIXE DANS UN ESPACE MÉTRIQUE BORNÉ ET APPLICATIONS

par

Youssef TOUAIL

Soutenue le 06/02/2021 devant la commission d'examen :

Mr. **Mostafa KABBAJ**	PES, FP Khouribga	Président
Mr. **Mohamed EL FATINI**	PH, FS Kénitra	Rapporteur
Mr. **Khalid ISKAFI**	PH, FP Khouribga	Rapporteur
Mr. **Mohamed BELAM**	PH, FP Khouribga	Examinateur
Mr. **Driss EL MOUTAWAKIL**	PES, FP Khouribga	Directeur de thèse

Remerciements

J'exprime mes sincères remerciements à mon directeur de thèse le Professeur **Driss EL MOUTAWAKIL**. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui, non seulement parce qu'il a accepté de diriger ce travail, mais aussi parce qu'il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il a dédié beaucoup de temps en étant toujours très disponible pendant toutes ces quatre années de thèse. J'ai toujours apprécié votre rigueur dans l'accomplissement de chaque tache, vos qualités humaines sans égal et votre sympathie couronnée d'une énorme modestie.

Je remercie ensuite l'ensemble des membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir étudier et juger mon travail : les Professeurs **Mohamed EL FATINI** et **Khalid ISKAFI** pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse ; le Professeur **Mohamed BELAM** pour avoir accepté d'examiner ce rapport ; et enfin le Professeur **Mostafa KABBAJ** d'accepter de présider ce jury.

Je voudrais tout particulièrement exprimer ma reconnaissance à mon cher père pour son affectueux soutien tout au long de ce travail. J'adresse également un grand merci à mon frère et mes sœurs et l'ensemble de ma famille et mes amis qu'ils ont été et sont toujours à mes côtés en train de me soutenir, me pousser et m'encourager dans les moments importants de ma vie. Je tiens à exprimer mes remerciements à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce projet.

Dédicace

إلى روح أمي

الأُمُّ مَدرَسَةٌ إِذا أَعدَدتَها   أَعدَدتَ شَعباً طَيِّبَ الأَعراقِ
الأُمُّ رَوضٌ إِن تَعَهَّدَهُ الحَيا   بِالرِيِّ أَورَقَ أَيَّما إيراقِ
الأُمُّ أُستاذُ الأَساتِذَةِ الأُلى   شَغَلَت مَآثِرُهُم مَدى الآفاقِ

حافظ ابراهيم

Notations

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$: l'ensemble des entiers.

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.

X : un espace métrique si aucune autre indication n'est donnée.

d : une distance.

H : la distance de Hausdorff induite par d.

$\| \, . \, \|_E$: désigne une norme sur un espace vectoriel E.

$\overline{A}$: la fermeture topologique de l'ensemble A.

$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$ la distance entre x et l'ensemble A.

$\overline{B}(0, 1)$: est la boule unité fermée d'un espace normé sur le corps réel.

$CB(X)$: la classe des parites fermées bornées de l'ensemble X.

p : une τ-distance.

D : une semi-métrique (symétrique).

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie du point fixe s'intéresse au problème de recherche des conditions sur un ensemble X et une application $T : X \to X$ (resp. $T : X \to 2^X$) qui assurent l'existence d'un point u invariant par cette application (resp. par cette multi-application), i.e., $T(u) = u$ (resp. $u \in T(u)$). Cette théorie est devenue un outil très important et une source d'applications utiles dans plusieurs domaines des mathématiques et des sciences. En effet, dans plusieurs problèmes mathématiques, informatiques, économiques, de modélisation et d'ingénierie, l'existence d'une solution à un problème théorique ou réel équivaut à l'existence d'un point fixe pour une certaine application. Les points fixes sont donc d'une importance capitale dans de nombreux domaines des mathématiques, des sciences et de l'ingénierie. Vu ce qui précède et la diversité des axes de recherche qu'elle représente, la théorie du point fixe connait jusqu'à présent un développement théorique et pratique très important dans plusieurs directions. Les statistques suivantes, établis et publiées en 2008 par les auteurs, Ioan A. Rus, Adrian Petruşel et Gabriela Petruşel, du livre "FIXED POINT THEORY" [31], illustrent l'importance et l'intérêt apportés à cette théorie :

i) "Over 120 books (monographs, lecture notes, proceedings) on fixed point theory and its applications".

ii) "Over 12,000 papers on fixed point theory from 1940 until now. Almost 4,000 papers on fixed point theory only between 2000-2008. Except these theoretical books and papers, there are more than 2,000 books, monographs and proceedings and over 40,000 papers, which use the abstract theory of fixed point for various problems of pure, applied and computational mathematics".

Le premier théorème de cette théorie remonte à 1912 lorsque Brouwer [6] a prouvé l'existence d'un point fixe pour toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ vers elle même. Ce résultat a été généralisé par la suite au cas d'un espace vectoriel normé de dimension infinie. Un exemple d'application du théorème de Brouwer, notamment dans le monde de l'économie et dans le cadre de la théorie des jeux, le théorème d'équilibre de Nash qui a joué un rôle fondamental en théorie économique moderne et qui a valu un prix Nobel en économie au mathématicien John Nash [24, 25]. Cependant, Brouwer, dans son théorème, n'a développé que les conditions d'existence sans assurer ni l'unicité du point fixe, ni la méthode avec laquelle on pourrait le déterminer. En 1922, le mathématicien S. Banach a publié son célèbre théorème, connu sous le nom de "Principe de la contraction de Banach", qui permet d'assurer l'existence et l'unicité du point fixe en fournissant une méthode numérique pour l'approximer via un chemin itératif. Ce théorème a fait l'objet de plusieurs généralisations et extensions dont le but était, et l'est jusqu'à présent, de :

<u>1^{er} cas</u> : remplacer la condition de Banach

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{0.1}$$

pour tous $x, y \in X$, où $0 \leq k < 1$ est une constante, par une contraction plus générale,

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : ou bien de considérer un espace plus générale que le cas métrique.

En effet, pour le premier cas et à titre d'exemple, on cite le résultat de R. Kannan (1968) [18] qui a prouvé un théorème du point fixe pour les applications qui ne sont pas forcément continues en considérant la contraction (0.1) :

$$d(Tx, Ty) \leq k[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \tag{0.2}$$

pour tous $x, y \in X$, avec $0 \leq k < \frac{1}{2}$.
Juste après et en 1974, L. Ćirić [8] a considéré un nouveau type de contraction qui généralise à la fois la contraction de S. Banach et celle de R. Kannan en établissant un théorème du point fixe pour les applications qui satisfont la condition :

$$d(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \tag{0.3}$$

pour tous $x, y \in X$, avec $0 \leq k < 1$.
Un deuxième exemple, qui a fait l'objet de notre étude, est le résultat de M. Hegedüs et T. Szilágyi [13], établi en 1980, dans lequel ils ont prouvé une extension du principe de contraction de Banach [3] par l'utilisation d'une fonction auxiliaire φ :

Théorème 0.0.1. *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application. On suppose que* $D_T(x) = \sup\{d(u, v) : u, v \in \{x, Tx, T^2x, \ldots\}\} < \infty$ *pour tout* $x \in X$*. S'il existe une fonction* φ *de* $[0, \infty[$ *dans lui-même telle que*

i) $\varphi(t) < t$ *pour tout* $t \in]0, \infty[$ *;*

ii) φ *est semi continue supérieurement à droite ;*

iii) $d(Tx, Ty) \leq \varphi \circ D_T(x, y)$ *pour tous* $x, y \in X$,

avec $D_T(x, y) = \sup\{d(u, v) : u, v \in \{x, Tx, T^2x, \ldots y, Ty, T^2y, \ldots\}\}$*. Alors* T *admet un point fixe unique* z*. En outre,* $\{T^n x\}$ *converge vers* z *pour tout* $x \in X$*.*

Ce résultat a été généralisé récemment par T. Suzuki [34] pour un nouveau type de contractions comme suit :

Théorème 0.0.2. *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application tel que* $D_T(x) < \infty$ *pour tout* $x \in X$*.On suppose qu'il existe une fonction* φ *de* $[0, \infty[$ *dans lui-même satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) $\varphi(t) < t$ *pour tout* $t \in]0, \infty[$ *;*

(ii) *pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que, pour tout* $t \in]0, \infty[$,

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ implique } \varphi(t) \leq \varepsilon;$$

(iii) *pour tous* $x, y \in X$, $\quad d(Tx, Ty) \leq \varphi \circ D_T(x, y)$.

Alors T *admet un point fixe unique* z*. En outre,* $\{T^n x\}$ *converge vers* z *pour tout* $x \in X$*.*

De plus, l'auteur dans [34] a montré que ce nouveau type de contractions et Meir-Keeler [21] sont indépendants.
Le dernier exemple est celui de Ya. I. Alber et S. Guerre-Delabriere [2] qui ont introduit, en 1997, la notion d'une contraction faible dans les espaces de Hilbert et ont prouvé que toute application de ce type définie sur les espaces de Hilbert a un point fixe unique. Par la suite, en 2001, B. E. Rhoades [29] a démontré dans le théorème qui suit, que le résultat discuté en [2] est également valable lorsque l'espace de Hilbert est remplacé par un espace métrique complet :

Théorème 0.0.3. *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une contraction faible, en autre termes, une application qui satisfait*

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \phi(d(x, y)) \tag{0.4}$$

pour tous $x, y \in X$*, avec* $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction croissante continue qui vérifie* $\phi(0) = 0$*. Alors,* T *admet un point fixe unique* u *dans* X*.*

Pour le deuxième cas, on cite le travail de M. Aamri et D. El Moutawakil [1] dans lequel les auteurs ont introduit la notion d'une τ-distance dans un espace topologique quelconque et ont souligné que les espaces topologiques munis d'une τ-distance généralisent les espaces métriques, les espaces symétriques (semi-métriques) et autres espaces dans la littérature. En outre, ils ont présenté une application de ce concept à la théorie du point fixe en donnant le résultat suivant qui représente un bon exemple de ce qu'on a soulevé auparavant sur les extensions du principe de Banach mais cette fois-ci en généralisant l'espace et le type de la contraction :

Théorème 0.0.4. *(Théorème 4.1 [1])*
Soit (X,τ) un espace topologique séparé muni d'une τ-distance p. Supposons que X est p-borné et S-complet. Soit T une application de X dans lui-même telle que :

$$p(Tx,Ty) \leq \psi(p(x,y)),$$

pour tous $x,y \in X$, où $\psi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ est une application qui vérifie :
i) ψ est croissante,
ii) $\lim \psi^n(t) = 0$, pour tout $t \in [0,\infty[$.
Alors T admet un point fixe unique.

Corollaire 0.0.5. *(Corollaire 4.1 [1])*
Soit (X,τ) un espace topologique séparé muni d'une τ-distance p. Supposons que X est p-borné et S-complet. Soit T une application de X dans lui-même telle que :

$$p(Tx,Ty) \leq kp(x,y),$$

pour tout $x,y \in X$, avec $k \in [0,1[$. Alors T admet un point fixe unique.

En ce qui concerne notre étude, on s'est intéressé également aux contractions strictes T qui vérifient :

$$d(Tx,Ty) < d(x,y) \tag{0.5}$$

C'était V. V. Nemytzki [26] le premier Mathématicien qui a étudié le problème de l'existence d'un point fixe pour cette classe d'applications en 1936. De plus, M. Edelstein a mentionné dans [11], qu'il va falloir ajouter l'hypothèse qu'il existe un point pour lequel il existe une sous suite convergente, ou bien supposer que l'espace est compact pour s'assurer de l'existence d'un point fixe pour ce type d'applications.
De plus, en remplaçant la condition stricte (0.5) par une condition stricte plus forte et sans supposer la compacité de l'espace, A. Meir et E. keeler (1969) [21] ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 0.0.6. *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\varepsilon < d(x, y) < \varepsilon + \delta \ \textit{ implique } d(Tx, Ty) < \varepsilon \tag{0.6}$$

pour tous $x, y \in X$. Alors T admet un unique point fixe dans X.

En général, la théorie du point fixe se partage en ce qui précède et la recherche, d'une part, du point fixe commun de deux applications et plus, qui se base sur d'autres conditions comme la commutativité, la commutativité faible introduite en 1982 par Sessa [32] et les notions de compatibilité et la compatibilité faibles introduites par G. Jungck respectivement en 1986 [15] et en 1996 [16], et d'autre part, la recherche du point fixe d'une multiapplication. Cette dernière a été initiée par Nadler [23] qui a donné en 1969, la version du principe de Banach pour les multiapplications. Ce résultat a fait l'objet également de plusieurs généralisations et en particulier au cas des espaces symétriques à travers le théorème de D. El Moutawakil [12] établis en 2004 :

Théorème 0.0.7. *(Théorème 2.2.1 [12]).*
Soient (X, D) un espace symétrique $D-$borné, S-complet satisfaisant $(W.4)$ et $T : X \to CB(X)$ une application multivoque telle que

$$H_D(Tx, Ty) \leq kD(x, y), \ k \in [0, 1[, \ \forall x, y \in X.$$

Alors il existe $u \in X$ tel que $u \in Tu$.

Vu le nombre croissant, jusqu'à présent des contributions dans ce domaine, on signale qu'on est très loin de cerner tous les résultats. Nous nous sommes restreint à ne présenter que ceux qui ont un rapport avec notre étude.
L'objectif de cette thèse consiste en l'étude du problème d'existence et d'unicité du point fixe et du point fixe commun pour le cas des applications univalentes et celui des multiapplications. De plus, quelques applications de nos résultats seront discutées et démontrées. Notre thèse sera structurée sous la forme suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques résultats de la théorie du point fixe dans les espaces métriques, les espaces symétriques et les espaces topologiques munis d'une τ-distance ainsi que certaines définitions et propriétés topologiques utiles pour notre étude et développement.

Le deuxième chapitre porte sur l'étude du problème du point fixe des applications strictement contractantes définies sur un espace métrique borné (X, d). D'une part, nous montrons que les applications qui vérifient la condition :

$$\inf_{x \neq y \in X} \{d(x,y) - d(Tx,Ty)\} > 0, \tag{0.7}$$

possèdent un point fixe unique. Comme corollaire du notre théorème, nous montrons que les applications strictement contractantes qui vérifient la condition précédente, ont un point fixe unique. Ce résultat représente une nouvelle contribution pour ce type de contractions puisque nous n'avons pas utilisé ni la compacité de l'espace ni l'hypothèse qu'il existe un point pour lequel il existe une sous suite convergente. Nous définissons la classe des applications E-faibelment contractives et nous montrons que ces applications possèdent également un point fixe unique. Comme application directe de nos résultats, nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation intégrale non-linéaire suivante :

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K(s, x(s))ds, \tag{0.8}$$

où x est un élément de l'espace $\mathcal{C}[0,\tau]$ de toutes les fonctions continues de $[0,\tau]$ à valeurs $\mathbb{R}$, avec $\tau > 0$.
$K : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue et $f : [0,\tau] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée quelconque.

D'autre part, on montrera que, dans un espace métrique borné, les applications qui vérifient :

$$\inf_{x \neq y \in X} \left\{ \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - d(Tx,Ty) \right\} > 0, \tag{0.9}$$

possèdent également un point fixe unique. Comme application en programmation dynamique, nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution de l'equation fonctionnelle suivante :

$$f(x) = \sup_{y \in D} \{g(x,y) + G(x,y,f(\rho(x,y)))\}, \tag{0.10}$$

avec $S \subset X$ où X représente l'espace des d'états, $D \subset Y$ avec Y est l'espace des décisions et $\rho : S \times D \to S$, $g : S \times D \to \mathbb{R}$ et $G : S \times D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des applications bornées.

Dans le troisième chapitre, l'objectif est de montrer que les multiapplications définies sur un espace métrique borné et complet, qui vérifient la condition :

$$\inf_{x \neq y \in X} \{d(x,y) - H(Tx,Ty)\} > 0 \tag{0.11}$$

possèdent un point fixe. Nous donnons également un théorème de point fixe pour une nouvelle classe de multiapplications appelées T-faiblement contractives. Une application de nos résultats sera donnée pour résoudre l'inclusion intégrale de type Volterra :

$$x(t) \in f(t) + \int_0^t K(t, s, x(s))ds, \quad t \in [0, \tau], \tag{0.12}$$

où $K : [0, \tau] \times [0, \tau] \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R})$, avec $\mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des parties compactes et convexes non vides de $\mathbb{R}$.

Le quatrième chapitre est divisé en deux sections. Dans la première, nous établissons un nouveau théorème du point fixe commun de deux applications faiblement compatibles $f, g : X \to X$ qui vérifient :

$$\inf_{x \neq y \in X} \{d(fx, fy) - d(gx, gy)\} > 0. \tag{0.13}$$

Comme applications, on donnera, d'une part, un théorème du point fixe pour une nouvelle classe d'applications faiblement contractives appelées E_θ-faiblement contractives et, d'autre part, un deuxième théorème d'existence et unicité d'une solution commune pour les deux équations intégrales non-linéaires suivantes :

$$\begin{cases} x'(t) = K(t, \int_0^t K(s, x(s))ds), \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{0.14}$$

et

$$\begin{cases} x'(t) = K(t, x(t)), \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{0.15}$$

où x est un élément de l'espace $\mathcal{C}[0, \tau]$ de toutes les fonctions continues de $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $T > 0$, $K : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.

Dans la deuxième section, l'objectif est de montrer l'existence d'un point fixe commun de deux applications faiblement compatibles $f, g : X \to X$ qui vérifient :

$$\inf_{x \neq y \in X} \{d(x, y) - (fx, gy)\} > 0. \tag{0.16}$$

Ensuite, nous définissons une nouvelle classe d'applications faiblement contractives appelées E_T-faiblement contractives et nous montrons que ces applications possèdent un point fixe commun. On termine cette section par l'etude de l'existence et l'unicité d'une solution commune pour les deux équations intégrales non-linéaires :

$$x(t) = \theta(t) + \int_0^t K(s, x(s))ds \tag{0.17}$$

et

$$x(t) = \theta(t) + \int_0^t H(s, x(s))ds, \tag{0.18}$$

avec :
$x \in \mathcal{CB}[0,T]$ l'espace de toutes les fonctions continues et bornées de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$, avec $T > 0$,
$K, H : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues telles que
$K(t, \alpha + \int_0^t H(s, x(s))) = H(t, \alpha + \int_0^t K(s, x(s)))$, pour tous $t \in [0,T]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
et $\theta : [0,T] \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Ensuite, nous donnons une deuxième application en programmation dynamique dont le but est de montrer l'existence et l'unicité d'une solution commune pour les équations fonctionnelles :

$$f_i(x) = \sup_{y \in D}\{g(x,y) + G_i(x, y, f_i(\rho(x,y)))\}, \tag{0.19}$$

sachant que $\rho : S \times D \to S$, $g : S \times D \to \mathbb{R}$ et $G_i : S \times D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, i=1,2 sont des applications bornées, $S \subset X$ et $D \subset Y$ où X est l'espace des états et Y est l'espace des décisions.

Le dernier chapitre est consacré à la présentation d'une nouvelle contraction qui généralise et améliore le théorème de T. Suzuki ([34] établi en 2018, en considérant la nouvelle contraction :

$$d(Tx, Ty) \leq \max\{\varphi(D_T(x)), \varphi(D_T(x,y)), \varphi(D_T(y))\} \tag{0.20}$$

où $T : X \to X$ est une application définie sur un espace métrique (X, d), ayant un orbite borné ($D_T(x) = \sup\{d(u,v) : u, v \in \{x, Tx, T^2x, ...\}\} < \infty$ pour tout $x \in X$) et $\varphi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ est une fonction quelconque. Notre résultat nous a permis également de généraliser et améliorer plusieurs résultats connus dans le domaine de la théorie du point fixe.

CHAPITRE

1

QUELQUES RÉSULTATS DE LA THÉORIE DU POINT FIXE

Ce chapitre est consacré à la présentation des espaces symétriques et des espaces topologiques munis d'une τ-distance ainsi que certaines définitions et propriétés topologiques que nous rencontrerons à plusieurs reprises dans cette thèse. Le lecteur intéressé par ce sujet pourra consulté les articles de références [1, 12]. Nous rappelons ensuite quelques résutats de la théorie du point fixe qui ont fait l'objet de notre étude et qui nous servirons dans la suite.

Définition 1.0.1. *([1].) Soient* (X, τ) *un espace topologique et* $p : X \times X \to [0, \infty[$ *une fonction. Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $x \in X$*, soit* $B_p(x, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) < \varepsilon\}$.
La fonction p *est dite* τ*-distance si pour tout* $x \in X$ *et pour tout voisinage* V *de* x*, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $B_p(x, \varepsilon) \subset V$.

Définition 1.0.2. *([1].) Une suite* $\{x_n\}$ *dans un espace topologique séparé* X *est* p*-Cauchy si elle satisfait la condition suivante* $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$.

Lemme 1.0.8. *(Lemma 3.1[1])*
Soit (X, τ) *un espace topologique séparé muni d'une* τ*-distance* p*, alors*

1. $p(x, y) = 0$ *implique* $x = y$.
2. *Soit* $\{x_n\}$ *une suite dans* X *tel que* $\lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = 0$ *et* $\lim_{n\to\infty} p(y, x_n) = 0$, *alors* $x = y$.

Définition 1.0.3. *(Définition 3.1 [1])*
Soit (X, τ) *un espace topologique muni d'une* τ*-distance* p.

1. X *est S-complet si pour toute suite p-Cauchy* $\{x_n\}$, *il existe* x *dans* X *tel que* $\lim p(x, x_n) = 0$.
2. X *est p-Cauchy complet si pour toute suite p-Cauchy* (x_n), *il existe* x *dans* X *tel que* $\lim x_n = x$ *suivant* τ.
3. X *est dit p-borné si* $\sup\{p(x, y)/x, y \in X\} < \infty$.

Théorème 1.0.9. *(Théorème 4.1 [1])*
Soit (X, τ) *un espace topologique séparé muni d'une* τ*-distance* p. *Supposons que* X *est* p*-borné et* S*-complet. Soit* T *une application de* X *dans lui-même telle que :*

$$p(Tx, Ty) \leq \psi(p(x, y)),$$

pour tout $x, y \in X$, *où* $\psi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ *est une application qui vérifie :*
i) ψ *est croissante,*
ii) $\lim \psi^n(t) = 0$, *pour tout* $t \in [0, \infty[$.
Alors T *admet un point fixe unique.*

Corollaire 1.0.10. *(Corollaire 4.1 [1])*
Soit (X, τ) *un espace topologique séparé muni d'une* τ*-distance* p. *Supposons que* X *est* p*-borné et* S*-complet. Soit* T *une application de* X *dans lui-même telle que :*

$$p(Tx, Ty) \leq kp(x, y),$$

pour tout $x, y \in X$, *avec* $k \in [0, 1[$. *Alors* T *admet un point fixe unique.*

Définition 1.0.4. *Un espace symétrique* (X, D) *est un ensemble non vide* X *et* $D : X \times X \to [0, \infty[$ *une application qui vérifie :*

1. $D(x, y) = D(y, x)$ *pour tous* $x, y \in X$,
2. $D(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$, *pour tous* $x, y \in X$.

Définition 1.0.5. *([12])*

– *Une suite* $\{x_n\}$ *dans un espace symétrique* (X, D) *est appelée suite D-Cauchy si elle satisfait à la condition usuelle du cas métrique, c.-à.-d.* $\lim_{n,m\to\infty} D(x_m, x_n) = 0$.

- *Un espace symétrique (X, D) est dit S-complet si pour toute suite D-Cauchy $\{x_n\}$, il existe $x \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} D(x, x_n) = 0$.*
- *Un espace symétrique (X, D) satisfait l'axiome (W.4) de Wilson [39] si pour toutes suites $\{x_n\} \subset X$, $\{y_n\} \subset X$ et pour tout $x \in X$ tels que $\lim_{n\to\infty} D(x_n, x) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} D(y_n, x) = 0$.*

Définition 1.0.6. *(Définition 2.1.1 [12]).*
Soient (X, D) un espace symétrique et A un sous-ensemble non vide de X.

i) A est D-fermé si et seulement si $\overline{A}^D = A$ avec,

$$\overline{A}^D = \{x \in X : D(x, A) = 0\} \quad et \quad D(x, A) = \inf\{D(x, y) : y \in A\}.$$

ii) A est D-borné si et seulement si $\delta_D(A) < \infty$ avec

$$\delta_D(A) = \sup\{D(x, y) : x, y \in X\}.$$

Définition 1.0.7. *(Définition 2.1.2 [12]).*
Soient (X, D) un espace symétrique $D-$borné et $C(X)$ la classe de toutes les parties non-vides D-fermées de (X, D). Nous considérons la fonction $H_D : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$H_D(A, B) = \max\{\sup_{a\in A} D(a, B), \sup_{b\in B} D(b, A)\}$$

pour tous $A, B \in C(X)$ où $D(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$. Alors $(C(X), H_D)$ est un espace symétrique.

Théorème 1.0.11. *(Théorème 2.2.1 [12]).*
Soient (X, D) un espace symétrique D-borné, S-complet satisfaisant (W.4) et $T : X \to CB(X)$ une application multivoque telle que

$$H_D(Tx, Ty) \le kD(x, y),\ k \in [0, 1[,\ \forall x, y \in X.$$

Alors il existe $u \in X$ tel que $u \in Tu$.

Définition 1.0.8. *Soient (X, d) un espace métrique et $f, g : X \to X$ deux applications, si $fx = gx$ pour un certain $x \in X$. Alors x est un point de coïncidence de f et g.*

Définition 1.0.9. *Soient (X, d) un espace métrique et $f, g : X \to X$ deux applications. f et g sont dites :*

- *commutatives si $f \circ g = g \circ f$,*
- *faiblement commutatives si $d(f \circ gx, g \circ fx) \le d(fx, gx)$ pour tout $x \in X$*

- *compatibles, si pour toute suite* $\{x_n\} \subset X$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = x \in X$ *implique* $\lim_{n\to\infty} d(f \circ gx_n, g \circ fx_n) = 0$
- *faiblement compatibles si elles commutent en leurs points de coïncidence.*

Théorème 1.0.12. *[14] Soient* f *une application continue d'un espace métrique complet* (X, d) *dans lui-même. Alors* f *a un point fixe dans* X *s'il existe un* $k \in [0, 1[$ *et une application* $g : X \to X$ *qui commute avec* f *et satisfait*

i) $g(X) \subset f(X)$,

ii) $d(g(x), g(y)) \leq kd(f(x), f(y))$

pour tout $x, y \in X$*. En effet,* f *et* g *ont un point fixe commun unique.*

Théorème 1.0.13. *([32].)*
Soient f *une application continue d'un espace métrique complet* (X, d) *dans lui-même et* $g : X \to X$ *une application satisfaisant*

i) $d(f \circ gx, g \circ fx) \leq d(fx, gx)$ *pour tout* $x \in X$,

ii) $g(X) \subset f(X)$,

iii) s'il existe un $k \in [0, 1[$ *tel que* $d(g(x), g(y)) \leq kd(f(x), f(y))$

pour tout $x, y \in X$*. Alors* f *et* g *ont un point fixe commun unique.*

Théorème 1.0.14. *([15])*
Soient f *une application continue d'un espace métrique complet* (X, d) *dans lui-même et* $g : X \to X$ *une application tels que*

i) f *et* g *sont compatibles ,*

ii) $g(X) \subset f(X)$,

iii) s'il existe un $k \in [0, 1[$ *tel que* $d(g(x), g(y)) \leq kd(f(x), f(y))$

pour tout $x, y \in X$*. Alors* f *et* g *ont un point fixe commun unique.*

Théorème 1.0.15. *([16].)*
Soient f *une application continue d'un espace métrique complet* (X, d) *dans lui-même et* $g : X \to X$ *une application tels que*

i) f *et* g *sont faiblement compatibles ,*

ii) $g(X) \subset f(X)$,

iii) s'il existe un $k \in [0, 1[$ *tel que* $d(g(x), g(y)) \leq kd(f(x), f(y))$

pour tout $x, y \in X$*. Alors* f *et* g *ont un point fixe commun unique.*

CHAPITRE

2

POINT FIXE DES APPLICATIONS UNIVALENTES ET APPLICATIONS

Ce chapitre est consacré à l'étude d'existence et d'unicité d'un point fixe pour les applications univoques dans les espaces métriques bornés via la notion de τ-distances définie dans le premier chapitre (Définition 1.0.1) et sans utiliser la compacité de l'espace. Ce chapitre contient deux sections, la première section porte sur l'étude d'existence et d'unicité de points fixes pour les applications qui satisfont (0.7). Comme application de ce nouveau résultat, motivé par la notion de contractions faibles introduite par Ya. I. Alber et S. Guerre-Delabriere [2], un nouveau théorème du point fixe pour une nouvelle classe de contractions faibles sera établi. On appellera ce type de contractions faibles, la classe des applications E-faiblement contractives. De plus, une application à une équation intégrale est donnée. D'autre part, dans la deuxième section, on va étudier le problème d'existence et d'unicité de points fixes pour les applications qui vérifient (0.9). De même nous introduisons la notion d'applications E-faibelment contractives généralisées et nous établissons un nouveau théorème pour ce type de contraction.
Ce chapitre est, à quelques modifications près, le texte des articles [36, 38].

2.1 Point fixe des applications contractives dans un espace métrique borné

Le premier paragraphe de cette section présente nos principaux résultats d'existence et d'unicté de points fixes.

2.1.1 Résultats principaux

Nous montrons tout d'abord le lemme suivant qui est essentiel pour la suite.

Lemme 2.1.1. *Soient (X, d) un espace métrique et $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ une fonction définie par :*

$$p(x, y) = e^{d(x,y)} - 1. \tag{2.1}$$

Alors p est une τ_d-distance sur X où τ_d est la toplogie induite par d.

Démonstration. Soit (X, τ_d) l'espace topologique muni de la topologie induite par la distance d.
Soient $x \in X$ et V un voisinage arbitraire de x, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_d(x, \varepsilon) \subset V$, avec $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X, d(x, y) < \varepsilon\}$ est la boule ouverte.
Pour tout $y \in B_p(x, e^\varepsilon - 1)$, on a $p(x, y) < e^\varepsilon - 1$, donc $e^{d(x,y)} < e^\varepsilon$, ce qui implique $d(x, y) < \varepsilon$.
Donc, on a $B_p(x, e^\varepsilon - 1) \subset B_d(x, \varepsilon)$. Par conséquent, pour tous $x \in X$ et V un voisinage de x, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_p(x, e^\epsilon - 1) \subset V$. □

Théorème 2.1.2. *Soit $T : X \longrightarrow X$ une application d'un espace métrique complet borné (X, d) tel que $\inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(x, y) - d(Tx, Ty)\} > 0$. Alors T admet un point fixe unique.*

Démonstration. On pose $\alpha = \inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(x, y) - d(Tx, Ty)\}$, ce qui implique que pour tout $x \neq y \in X$, on a

$$d(x, y) - d(Tx, Ty) \geq \alpha$$

Donc, pour tous $x, y \in X$, on a :

$$e^{d(Tx,Ty)} \leq ke^{d(x,y)},$$

où $k = e^{-\alpha}$, ce qui implique que, pour tous $x, y \in X$, on a :

$$e^{d(Tx,Ty)} - 1 \leq k(e^{d(x,y)} - 1),$$

Par conséquent, pour tous $x, y \in X$, on a :

$$p(Tx, Ty) \leq kp(x, y), \quad \text{où } k = e^{-\alpha} \in [0, 1[,$$

où $p : X \times X \longrightarrow [0, +\infty[$ est la τ-distance définie dans le Lemme 2.1.1 avec τ_d est la topologie induite par la distance d. Sachant que (X, τ) est un espace topologique S-complet, on déduit, d'après le Corollaire 1.0.10, que T admet un point fixe unique dans X. □

Comme conséquence, nous obtenons un nouveau résultat du point fixe pour les applications strictement contractantes définies sur un espace métrique complet borné.

Corollaire 2.1.3. *Soit $T : X \longrightarrow X$ une application contractive d'un espace métrique complet borné (X, d) tel que $\inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(x, y) - d(Tx, Ty)\} \neq 0$. Alors T admet un point fixe unique.*

Exemple 2.1.1. *Soit $X = \{1; 2\}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$.*
On définit T par $T1 = 1$ et $T2 = 1$. On obtient

$$d(1, 2) - d(T1, T2) = 1$$

Alors T satisfait toutes les conditions du Corollaire 2.1.3 et T admet l'unique point fixe 1.

Exemple 2.1.2. *Soit $X = \overline{B}(0, 1)$, la boule unité fermée d'un espace de Banach sur le corps réel, muni de la distance $d(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$.*
Considérons l'application T définie par $Tx = 0$, pour tout $x \in X$.
Alors $T : X \longrightarrow X$ est une application strictement contractante sur l'espace métrique (X, d) qui est borné complet et

$$d(x, y) - d(Tx, Ty) = d(x, y) = 1, \quad \textit{pour tout } x \neq y \in X.$$

Donc T satisfait toutes les conditions du Corollaire 2.1.3 et T admet l'unique point fixe 0.

Remarques 2.1.4. *Évidemment, pour une application strictement contractante $T : X \longrightarrow X$ d'un espace métrique (X, d), on peut se demander s'il existe une relation entre la compacité et la condition $\inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(x, y) - d(Tx, Ty)\} \neq 0$. La réponse est négative. En effet, dans l'exemple 2.1.1., l'espace X est compact et $\inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(x, y) - d(Tx, Ty)\} \neq 0$. Cependant, pour $X = [0, 1]$ et $Tx = \frac{1}{2}x$, l'application T est strictement contractante et*

$\inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(x,y) - d(Tx,Ty)\} = 0$.
De plus, dans l'exemple 2.1.2, l'espace (X,d) *n'est pas compact et* $\inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(x,y) - d(Tx,Ty)\} \neq 0$.

Commme une première application de notre Théorème 2.1.2 et motivé par les travaux de Ya. I. Alber, S. Guerre-Delabriere [2] et B. E. Rhoades [29], nous introduisons une nouvelle classe d'applications faiblement contractives comme suit,

Définition 2.1.1. *Soit* $T : X \longrightarrow X$ *une application d'un espace métrique* (X,d).
On dit que T *est E-faiblement contractive si, pour tous* $x, y \in X$, *on a* $d(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \phi(d(x,y))$, *où* $\phi : [1,\infty[\rightarrow [0,\infty[$ *est une fonction qui vérifie :*
i) $\phi(t) = 0$ *si et seulement si* $t = 1$,
ii) $\inf\limits_{t>1} \phi(t) > 0$.

Théorème 2.1.5. *Soit* $T : X \longrightarrow X$ *une application E-faiblement contractive d'un espace métrique* (X,d) *complet borné. Alors* T *admet un point fixe unique.*

Démonstration. D'après la définition 2.1.1, on a pour tout $x \neq y \in X$,

$$\begin{aligned} 0 &< \inf_{t>1} \phi(t) \\ &\leq \phi(d(x,y)+1) \\ &\leq d(x,y) - d(Tx,Ty), \end{aligned}$$

ce qui implique que $\inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(x,y) - d(Tx,Ty)\} > 0$. D'après le Théorème 2.1.2, on déduit que l'application T admet un point fixe unique dans X. □

Exemple 2.1.3. *Soit* $X = \{1; 2\}$ *muni de la distance usuelle* $d(x,y) = |x-y|$. *On définit* T *et* ϕ *par* $T1 = 1$, $T2 = 1$ *et* $\phi(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \neq 1 \\ 0 & si\ t = 1 \end{cases}$
Alors T *satisfait toutes les conditions du Théorème 2.1.5 et* T *admet l'unique point fixe* 1. *Notons que* ϕ *n'est pas continue en* 1.

Exemple 2.1.4. *Soit* $X = \{1; 2\}$ *muni de la distance usuelle* $d(x,y) = |x-y|$. *On définit* T *et* ϕ *par* $T1 = 2$, $T2 = 1$ *et* $\phi(t) = 0$ *pour tout* $t \in [1, +\infty[$.
Alors (X,d) *est un espace métrique complet borné et* $d(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \phi(d(x,y)+1)$ *pour tout* $x, y \in X$. *Cependant,* T *n'est pas E-faiblement contractive puisque* $\inf\limits_{t>1} \phi(t) = 0$ *et* T *n'a pas de point fixe. Par conséquent, la condition que* $\inf\limits_{t>0} \phi(t) \neq 0$ *est essentielle.*

Exemple 2.1.5. *Soit* $X = [0, +\infty[$ *muni de la distance usuelle* $d(x, y) = |x - y|$. *On définit* T *et* ϕ *par* $Tx = \ln(1 + e^x)$ *et* $\phi(t) = (t-1)(1 - \sup\{T'(x)|x \in [0, +\infty[\})$ *pour tout* $x \in [0, +\infty[$ *et pour tout* $t \in [1, \infty[$ *, où* T' *est la fonction dérivée de* T.
T *est E-faibelement contractive. En effet :*
Soient $x, y \in X$, *alors il existe d'après le Théorème des accroissements finis un* $c \in [x, y]$ *tel que :*

$$\begin{aligned}
|Tx - Ty| &= \frac{e^c}{1 + e^c}|x - y| \\
&\leq |x - y| \sup_{x \in [0, +\infty[} T'(x) \\
&\leq |x - y| - [1 - \sup_{x \in [0, +\infty[} T'(x)]|x - y| \\
&\leq |x - y| - [|x - y| - 1 + 1][1 - \sup_{x \in [0, +\infty[} T'(x)] \\
&\leq |x - y| - \phi(1 + |x - y|)
\end{aligned}$$

(X, d) *est un espace métrique complet mais* T *n'admet aucun point fixe dans* X *puisque* X *n'est pas borné et* $\inf_{t>1} \phi(t) = 0$.

2.1.2 Application

On commence tout d'abord par rappeler ce lemme classique

Lemme 2.1.6. *Soit* X *un ensemble. On note* $B(X, \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions bornées de* X *dans* $\mathbb{R}$. *On munit* $B(X, \mathbb{R})$ *de la norme* $\| \,.\, \|$ *suivante :*

$$\forall f \in B(X, \mathbb{R}, \| \,.\, \|), \ \| f \| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Alors $(B(X, \mathbb{R}), \| \,.\, \|)$ *est complet.*

Dans cette application, nous nous intéressons au problème d'existence et d'unicité d'une solution pour l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K(s, x(s))ds, \tag{2.2}$$

où $x \in \mathcal{C}[0, \tau]$: l'espace de toutes les fonctions continues de $[0, \tau]$ à valeur dans $\mathbb{R}$, avec $\tau > 0$.
$K : [0, \tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue et $f : [0, \tau] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée

quelconque.
Soit $X = \mathcal{C}[0,\tau]$ muni de la distance $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$d(x,y) = \sup_{t\in[0,T]} |x(t) - y(t)|,$$

D'après le Lemme 2.1.6, on sait que (X, d) est un espace métrique complet et borné.
On considère l'application $T : X \to X$ définie par :

$$T(x)(t) = f(t) + \int_0^t K(s, x(s))ds \tag{2.3}$$

pour tout $x \in X$.
Notons que (2.2) a une solution si et seulement si T a un point fixe.
Sous les hypothèses ci-dessus, nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1.7. *S'il existe $M > 0$ tel que :*

$$|K(s, x(s)) - K(s, y(s))| \leq \frac{1}{\tau}[|x(s) - y(s)| - M],$$

pour tous $s \in [0,\tau]$ et $x, y \in X$ avec $x \neq y$, alors l'équation intégrale non linéaire (2.2) *a une solution unique.*

Démonstration. Soient $x \neq y \in X$ et $t \in [0,\tau]$, on a :

$$\begin{aligned}
|T(x)(t) - T(y)(t)| &= \left|\int_0^t K(s, x(s))ds - \int_0^t K(s, y(s))ds\right| \\
&= \left|\int_0^t [K(s, x(s)) - K(s, y(s))]ds\right| \\
&\leq \int_0^t |K(s, x(s)) - K(s, y(s))|\, ds \\
&\leq d(x,y) - M
\end{aligned}$$

Donc, pour tous $x, y \in X$, on a :

$$d(Tx, Ty) \leq d(x,y) - M$$

Alors $\inf\limits_{x\neq y}\{d(x,y) - d(Tx,Ty)\} \geq M > 0$, ce qui implique, d'après le Théorème 2.1.2, qu'il existe une solution unique de l'équation non linéaire (2.2). □

2.2 Théorèmes du point fixe pour des nouvelles contractions et Application

Avant d'étudier le cas métrique, nous avons besoin d'introduire quelques notions et montrer des résultats dans le cadre des espaces topologiques munis d'une τ-distance.

2.2.1 Résultats dans un espace topologique (X, τ) muni d'une τ-distance

Définition 2.2.1. *Soit (X, τ) un espace topologique muni d'une τ-distance p. Alors $T : X \to X$ est p-continue en $x \in X$ si pour toute suite $\{x_n\} \subset X$ tel que $\lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = 0$, on obtient $\lim_{n\to\infty} p(Tx, Tx_n) = 0$.*

Dans la suite de ce paragraphe, $\psi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ est une application qui vérifie :

i) ψ est croissante,

ii) $\lim \psi^n(t) = 0$, pour tout $t \in [0, \infty[$.

Théorème 2.2.1. *Soit (X, τ) un espace topologique muni d'une τ-distance p. Supposons que X est p-borné et S-complet. Soit $T : X \to X$ une application p-continue telle que :*

$$p(Tx, Ty) \leq \psi(\max\{p(x, y), p(x, Tx), p(y, Ty)\}), \tag{2.4}$$

pour tout $x, y \in X$. Alors T admet un point fixe unique.

Démonstration. Soit x_0 un point arbitraire dans X. On définit une suite $\{x_n\} \subset X$ par $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, \ldots$.
En utilisant (2.4), on obtient pour chaque $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \psi(\max\{p(x_n, x_{n+1}), p(x_n, x_{n+1}), p(x_{n+1}, x_{n+2})\}) \\ &\leq \psi(\max\{p(x_n, x_{n+1}), p(x_{n+1}, x_{n+2})\}) \end{aligned}$$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p(x_{n_0}, x_{n_0+1}) < p(x_{n_0+1}, x_{n_0+2})$, alors $p(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}) < p(x_{n_0+1}, x_{n_0+2})$. Ce qui représente une contradiction, donc $p(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq p(x_n, x_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$p(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \psi(p(x_n, x_{n+1})) \tag{2.5}$$

D'autre part, pour $n, m \in \mathbb{N}$ et d'après (2.4), on a :

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+m}) &= p(Tx_{n-1}, Tx_{n+m-1}) \\
&\leq \psi(\max\{p(x_{n-1}, x_{n+m-1}), p(x_{n-1}, x_n), p(x_{n+m-1}, x_{n+m})\}) \\
&\leq \psi(\max\{p(x_{n-1}, x_{n+m-1})), p(x_{n-1}, x_n)\}) \\
&\leq \psi\Big(\max\Big\{\psi\big(\max\{p(x_{n-2}, x_{n+m-2}), p(x_{n-2}, x_{n-1}), \\
&\quad p(x_{n+m-2}, x_{n+m-1})\}\big), p(x_{n-1}, x_n)\Big\}\Big) \\
&\leq \psi\Big(\max\Big\{\psi\big(\max\{p(x_{n-2}, x_{n+m-2}), p(x_{n-2}, x_{n-1})\}\big), \\
&\quad \psi(p(x_{n-2}, x_{n-1}))\Big\}\Big) \\
&\leq \psi^2\big(\max\{p(x_{n-2}, x_{n+m-2}), p(x_{n-2}, x_{n-1})\}\big) \\
&\quad \vdots \\
&\leq \psi^n\big(\max\{p(x_0, x_m), p(x_0, x_1)\}\big) \\
&\leq \psi^n(M),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

avec $M = \sup\{p(x, y)/x, y \in X\}$. En faisant tendre $n \to \infty$ dans (2.6), on déduit que $\{x_n\}$ est une suite $p-$Cauchy. Comme X est supposé S-complet, il existe $u \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} p(u, x_n) = 0$. D'autre part, la $p-$continuité de T implique $\lim_{n\to\infty} p(Tu, Tx_n) = \lim_{n\to\infty} p(u, x_n) = 0$. Par conséquent, d'après le Lemme 1.0.8, on déduit que $Tu = u$.
Supposons maintenant que $p(u, u) > 0$. Alors nous obtenons de (2.4) que $p(u, u) \leq \psi(p(u, u)) < p(u, u)$, ce qui est une contradiction, d'où $p(u, u) = 0$.
Pour l'unicité, on suppose qu'ils existent $u, v \in X$ tels que $Tu = u$ et $Tv = v$. Si $p(u, v) > 0$. Alors, on aura :

$$p(u, v) \leq \psi(\max\{p(u, v), p(u, u), p(v, v)\}) = \psi(p(u, v)) < p(u, v),$$

ce qui est absurde. Donc $p(u, v) = 0$. Ainsi, on a $u = v$. □

Notons que $p(Tx, Ty) \leq \psi(p(x, y))$ implique que T est p-continue. Alors, nous obtenons les corollaires suivants

Corollaire 2.2.2. *(Théorème 4.1 [1])*
Soit (X, τ) un espace topologique muni d'une τ-distance p. On suppose que X est p-borné et S-complet. Soit $T : X \to X$ une application telle que :

$$p(Tx, Ty) \leq \psi(p(x, y)),$$

pour tous $x, y \in X$. Alors T a un point fixe unique.

Corollaire 2.2.3. *Soit (X, τ) un espace topologique muni d'une τ-distance p. On suppose que X est p-borné et S-complet. Soit $T : X \to X$ une application p-continue telle que :*

$$p(Tx, Ty) \leq \psi(\max\{p(x, Tx), p(y, Ty)\}), \tag{2.7}$$

pour tous $x, y \in X$. Alors T admet un point fixe unique.

Exemple 2.2.1. *Soit $X = [0, 1]$ muni de la métrique définie par :*

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & si\ x \neq y \\ 0 & sinon \end{cases},$$

pour tous $x, y \in X$. On considère l'application $T : X \to X$ définie par $Tx = \frac{2}{5}x^2$.
D'une part, on a déjà montré dans Lemme 2.1.1 que $p(x, y) = e^{d(x,y)} - 1$ est une τ-distance sur X. D'autre part, on a $p(Tx, Ty) = 0$ si $x = y \in X$. De plus, pour tous $x \neq y \in X$, on a :

$$\begin{aligned} p(Tx, Ty) &= e^{d(Tx,Ty)} - 1 \\ &= e^{\max\{Tx,Ty\}} - 1 \\ &= e^{\frac{2}{5}\max\{x^2,y^2\}} - 1 \\ &\leq e^{\frac{2}{5}\max\{x,y\}} - 1 \\ &\leq \psi(\max\{p(x, y), p(x, Tx), p(y, Ty)\}), \end{aligned}$$

où ψ est définie par $\psi(t) = \frac{2}{5}t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
Par conséquent, toutes les hypothèses du Théorème 2.2.1 sont satisfaites et 0 est l'unique point fixe de T.

Exemple 2.2.2. *Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la métrique usuelle $d(x, y) = |x - y|$. On considère l'application définie par :*

$$T(x) = \begin{cases} 3 & si\ x \neq 4 \\ 1 & si\ x = 4 \end{cases}.$$

On a :

$$p(T1, T2) = p(T1, T3) = p(T2, T3) = 0.$$

Pour les autres cas, on a :

$$d(Tx, Ty) = e^2 - 1$$

et

$$\max\{p(x,Tx),p(y,Ty)\} \geq e^3-1.$$

Pour $\psi(t)=\frac{1}{2}t$, toutes les conditions du Théorème 2.2.1 sont vérifiées et 3 est l'uique point fixe de T.

D'autre part, le fait que $p(T3,T4)=e^2-1>e^1-1=p(3,4)$ montre que le Théorème 2.2.1 améliore le Théorème 1.0.9.

2.2.2 Résultats dans un espace métrique borné

Dans ce paragraphe, nous démontrons à partir du Lemme 2.1.1 et le Théorème 2.2.1 le résultat suivant

Théorème 2.2.4. *Soit $T: X \longrightarrow X$ une application d'un espace métrique complet borné (X,d) telle que :*

$$\inf_{x\neq y\in X}\left\{\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty)\}-d(Tx,Ty)\right\}>0. \tag{2.8}$$

Alors T admet un point fixe unique.

Démonstration. Posons $\alpha=\inf\limits_{x\neq y\in X}\left\{\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty)\}-d(Tx,Ty)\right\}$. Pour tous $x\neq y\in X$, on a :

$$d(Tx,Ty)\leq \max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty)\}-\alpha.$$

Alors

$$e^{d(Tx,Ty)}\leq ke^{\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty)\}},$$

avec $k=e^{-\alpha}<1$. Donc, pour tous $x,y\in X$, on a :

$$p(Tx,Ty)\leq k\max\{p(x,y),p(x,Tx),p(y,Ty)\}, \tag{2.9}$$

où $p(x,y)=e^{d(x,y)}-1$ est la fonction mentionnée dans le Lemme 2.1.1. Maintenant, si on prend $\psi(t)=kt$ pour tout $t\in[0,\infty[$, dans la preuve du Théorème 2.2.1, on déduit qu'il existe une suite $\{x_n\}\subset X$ tel que $\{p(u,x_n)\}$ converge vers 0 pour un certain $u\in X$, d'où $\{d(u,x_n)\}$ converge vers 0. Ce qui est équivaut à dire par (2.9) et le Théorème 2.2.1 que T a un unique point fixe. □

Corollaire 2.2.5. *(Théorème 2.1.2) Soit $T: X \longrightarrow X$ une application d'un espace métrique complet borné (X,d) telle que :*

$$\inf_{x\neq y\in X}\left\{d(x,y)-d(Tx,Ty)\right\}>0. \tag{2.10}$$

Alors T admet un point fixe unique.

Corollaire 2.2.6. *Soit $T : X \longrightarrow X$ une application d'un espace métrique complet borné (X, d) telle que :*

$$\inf_{x \neq y \in X} \left\{ \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\} - d(Tx, Ty) \right\} > 0. \tag{2.11}$$

Alors T admet un point fixe unique.

Exemple 2.2.3. *Soit $X = \{0, 1, 2\}$ muni de la distance définie par :*

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}. \tag{2.12}$$

On considère l'application $T : X \to X$ définie par $T0 = 1, T1 = 1$ et $T2 = 0$. Alors, on a les cas suivants :

Cas 1 : $\max\{d(0, 1), d(0, T0), d(1, T1)\} - d(T0, T1) = 1.$

Cas 2 : $\max\{d(0, 2), d(0, T0), d(2, T2)\} - d(T0, T2) = 1.$

Cas 3 : $\max\{d(1, 2), d(1, T1), d(1, T2)\} - d(T1, T2) = 1.$

On en déduit que T satisfait toutes les conditions du Théorème 2.2.4 et T admet le point fixe unique 1.

Remarque 2.2.7. *Nous remarquons dans l'exemple ci-dessus que l'espace X est compact et la condition $\inf_{x \neq y} \left\{ \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\} - d(Tx, Ty) \right\} > 0$ est vérifiée pour tout $x, y \in X$. Afin de montrer qu'il n'y a aucune relation entre cette condition et la compacité de l'espace, nous considérons les exemples suivants*

Exemple 2.2.4. *Soit $X = \overline{B}(0, 1) \times [0, 1]$, avec $\overline{B}(0, 1)$ est la boule unité fermée d'un espace Banach sur le corps des réels. On définit sur X la distance suivante :*

$$d\big((x, y), (x', y')\big) = \begin{cases} 1 + |y - y'| & si\ x \neq x' \\ |y - y'| & si\ x = x' \end{cases}.$$

On considère l'application $T : X \to X$ définie par $T(x, y) = (0, 1 - y)$ pour tout $(x, y) \in X$. D'où

$\max\{d\big((x, y), (x', y')\big), d\big((x, y), T(x, y)\big), d\big((x', y'), T(x', y')\big)\} - d\big(T(x, y), T(x', y')\big) = 1,$ *pour tout $(x, y) \neq (x', y') \in X$.*

Alors T satisfait toutes les hypothèses du Théorème 2.2.4 et T admet le point fixe unique $(0, \frac{1}{2})$. De plus, l'espace X n'est pas compact et

$$\inf_{(x,y) \neq (x',y') \in X} \Big\{ \max\{d\big((x, y), (x', y')\big), d\big((x, y), T(x, y)\big), d\big((x', y'), T(x', y')\big)\}$$
$$- d\big(T(x, y), T(x', y')\big) \Big\} > 0.$$

Exemple 2.2.5. *Soit* $X = [0,1]$ *muni de la distance définie par* (2.12) *et* $Tx = \frac{2}{3}x$, *l'espace* X *est compact et* $\inf_{x \neq y}\{\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - d(Tx,Ty)\} = 0$.

Comme applications du Théorème 2.2.4, on obtient un résultat pour une nouvelle classe d'applications faiblement contractives définies comme suit.

Définition 2.2.2. *Soit* $T : X \longrightarrow X$ *une application d'un espace métrique* (X,d). T *est dite une application E-faiblement contractive généralisée si*

$$d(Tx,Ty) \leq \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - \phi(1 + \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}),$$

pour tous $x, y \in X$, *où* $\phi : [1, \infty[\to [0, \infty[$ *est une fonction qui vérifie :*

i) $\phi(t) = 0$ *si et seulement si* $t = 1$,

ii) $\inf_{t>1} \phi(t) > 0$.

Théorème 2.2.8. *Soit* $T : X \longrightarrow X$ *une application E-faiblement contractive généralisée d'un espace métrique complet borné* (X,d). *Alors* T *admet un point fixe unique.*

Démonstration. Pour tous $x \neq y \in X$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &< \inf_{t>1} \phi(t) \\ &\leq \phi(1 + \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}) \\ &\leq \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - d(Tx,Ty)\}, \end{aligned}$$

Donc

$$\inf_{x \neq y \in X} \left\{ \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - d(Tx,Ty) \right\} > 0.$$

D'après le Théorème 2.2.4, on déduit que T possède un point fixe unique dans X. □

Définition 2.2.3. *Soit* $T : X \longrightarrow X$ *une application d'un espace métrique* (X,d). T *est dite une application E'-faiblement contractive si*

$$d(Tx,Ty) \leq \max\{d(x,Tx), d(y,Ty)\} - \phi(1 + \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}),$$

pour tous $x, y \in X$, *avec* $\phi : [1, \infty[\to [0, \infty[$ *une fonction qui vérifie*

i) $\phi(t) = 0$ *si et seulement si* $t = 1$,

ii) $\inf_{t>1} \phi(t) > 0$.

Corollaire 2.2.9. *(Théorème 2.1.5) Soit* $T : X \longrightarrow X$ *une application E-faiblement contractive d'un espace métrique complet borné* (X,d). *Alors* T *admet un point fixe unique.*

Corollaire 2.2.10. *Soit $T : X \longrightarrow X$ une application E'-faiblement contractive d'un espace métrique complet borné (X, d). Alors T admet un point fixe unique.*

Exemple 2.2.6. *Soit $X = \{0, 1, 2, 3\}$ muni de la distance suivante*

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}.$$

On considère les applications T et ϕ définies, pour tous $x \in X$ et $t \geq 1$ par :

$$Tx = \begin{cases} 0 & si\ x \neq 3 \\ 1 & sinon\ x = 3 \end{cases},$$

et

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & si\ t = 1 \\ 1 & si\ t > 1 \end{cases}.$$

Alors T satisfait toutes les conditions du Théorème 2.2.8 et 0 est le point fixe unique de T.

Maintenant, afin de montrer l'importance de la condition $\inf\limits_{t>1} \phi(t) > 0$, nous donnons l'exemple suivant.

Exemple 2.2.7. *Soit $X = \{0, 1, 2\}$ muni de la distance $d(x, y) = |x-y|$. On considère les applications T et ϕ définies par $T0 = 1, T1 = 2, T2 = 0$ et $\phi(t) = 0$ pour tout $t \in [1, \infty[$. Alors T n'admet aucun point fixe même si (X, d) est un espace métrique complet borné et $d(Tx, Ty) \leq \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\} - \phi(1 + \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\})$, pour tous $x, y \in X$. Cependant, T n'est pas E-faiblement contractive généralisée puisque $\inf\limits_{t>1} \phi(t) = 0$, et donc la condition $\inf\limits_{t>1} \phi(t) > 0$ est essentielle.*

2.2.3 Application

La théorie de la programmation dynamique a été initiée au début des années 1950 par Richard Bellman [4, 5]. Elle consiste à résoudre un problème en le décomposant en sous-problèmes. Ce concept a été introduit aussi pour résoudre typiquement des problèmes d'optimisation. En pratique la programmation dynamique c'est :

- Décomposer le problème en sous-problèmes plus petits,
- Déterminer les solutions optimales des sous-problèmes et les garder en mémoire,
- Déterminer la solution optimale du problème initial à partir des solutions optimales des sous-problèmes.

De plus, au cours des étapes de résolution des problèmes de cette théorie, certaines équations fonctionnelles apparaissent (voir [4, 5]), ce qui nous a motivé de donner une application de nos résultats à une équation fonctionnelle.

Tout au long de ce paragraphe, nous supposons que X et Y sont des espaces de Banach, $S \subset X$ où X représente l'espace des d'états et $D \subset Y$ avec Y est l'espace des décisions. Soient $\rho : S \times D \to S$, $g : S \times D \to \mathbb{R}$ et $G : S \times D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $\mathbb{R}$ est le crops des réels. $B(S)$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions réelles bornées définies sur S. Pour $h, k \in B(S)$, soit

$$d(h,k) = \sup\{|h(x) - k(x)| : x \in S\}.$$

Il est facile de voir, d'après le Lemme 2.1.6, que $(B(S), d)$ est un espace métrique complet borné.
Notre objectif est d'étudier le problème d'existence et d'unicité d'une solution de l'équation fonctionnelle suivante :

$$f(x) = \sup_{y \in D}\{g(x,y) + G(x,y,f(\rho(x,y)))\}, \tag{2.13}$$

avec g et G sont bornées. On définit $T : B(S) \to B(S)$ par

$$Tf(x) = \sup_{y \in D}\{g(x,y) + G(x,y,f(\rho(x,y)))\}. \tag{2.14}$$

Il est clair que T est bien défini puisque g et G sont bornées.

Théorème 2.2.11. *Soit $T : B(S) \to B(S)$ un opérateur défini par* (2.14) *et supposons qu'il existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :*

$$|G(x,y,h(x)) - G(x,y,k(x))| \leq A(h,k) - M, \tag{2.15}$$

pour tout $(h,k,x,y) \in B(S)^2 \times S \times D$, avec $h(x) \neq k(x)$, où

$$A(h,k) = \max\{d(h,k), d(h,Th), d(k,Tk)\}.$$

Alors, l'équation fonctionnelle (2.13) *admet une solution bornée unique.*

Démonstration. Soient λ un nombre strictement positif arbitraire, $x \in S$ et $h, k \in B(S)$. Il découle directement de la propriété caractéristique de la borne supérieure qu'ils existent $y, z \in D$ tels que

$$T(h(x)) < g(x,y) + G(x,y,h(\rho(x,y))) + \lambda, \tag{2.16}$$

$$T(k(x)) < g(x,z) + G(x,z,k(\rho(x,z))) + \lambda. \tag{2.17}$$

D'autre part, selon la définition de T, on obtient

$$T(h(x)) \geq g(x,z) + G(x,z,h(\rho(x,z))) \tag{2.18}$$

$$T(k(x)) \geq g(x,y) + G(x,y,k(\rho(x,y))) \tag{2.19}$$

Il résulte de (2.16) et (2.19) que

$$\begin{aligned} T(h(x)) - T(k(x)) &< G(x,y,h(\rho(x,y))) - G(x,y,k(\rho(x,y))) + \lambda \\ &\leq |G(x,y,h(\rho(x,y))) - G(x,y,k(\rho(x,y)))| + \lambda. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$T(h(x)) - T(k(x)) \leq A(h,k) - M + \lambda. \tag{2.20}$$

De même, à partir de (2.17) et (2.18)

$$T(k(x)) - T(h(x)) \leq A(h,k) - M + \lambda. \tag{2.21}$$

Compte tenu de (2.20) et (2.21), nous obtenons

$$|T(h(x)) - T(k(x))| \leq A(h,k) - M + \lambda$$

Càd

$$d(T(h), T(k)) \leq A(h,k) - M + \lambda. \tag{2.22}$$

Puisque λ est pris arbitrairement, alors, pour tous $h \neq k \in B(S)$, on a :

$$d(T(h), T(k)) \leq A(h,k) - M, \tag{2.23}$$

Donc, on a :

$$\inf_{h \neq k \in B(S)} \left\{ A(h,k) - d(Th, Tk) \right\} > 0, \tag{2.24}$$

ce qui implique, d'après le Théorème 2.2.4, que l'équation fonctionnelle (2.13) a une solution bornée unique. □

CHAPITRE

3

POINT FIXE DES MULTIAPPLICATIONS ET APPLICATIONS

Le présent chapitre traite le problème d'existence de points fixes pour les multiapplications définies sur un espace métrique borné (X, d). À l'aide d'un résultat du point fixe de D. El Moutawakil (Thérème 1.0.11) dans les espaces symétriques et en se basant sur un lemme technique, on montre l'existence d'un point fixe pour les contractions strictes de type (0.11). Comme application de ce nouveau résultat, nous prouvons un nouveau théorème du point fixe pour une nouvelle classe de contractions faibles, appelées T-faiblement contractives. De plus, une application à une inclusion intégrale est donnée.
Ce chapitre est, à quelques modifications près, le texte de l'article [37].

3.1 Point fixe des multiapplications dans un espace métrique borné

Dans ce paragraphe, nous commençons d'abord par les deux lemmes suivants qui seront utiles dans la suite.

Lemme 3.1.1. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}^+$, *alors*

$$e^{\max\{a,b\}} - 1 = \max\{e^a - 1, e^b - 1\}$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, sans perte de généralité, on peut supposer que $a \leq b$, alors

$$\begin{aligned} e^{\max\{a,b\}} - 1 &= e^b - 1 \\ &= \max\{e^a - 1, e^b - 1\}. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.2. *Soient* (X, d) *un espace métrique d-borné et* $C(X)$ *l'ensemble de toutes les parties non vides et d-fermés de* (X, d). *Considérons les applications* D *et* H_D *définies respectivement sur* $X \times X$ *et* $C(X) \times C(X)$ *par :*

$$D(x, y) = e^{d(x,y)} - 1, \text{ pour tous } x, y \in X$$

et

$$H_D(A, B) = e^{H(A,B)} - 1, \text{ pour tous } A, B \in C(X).$$

Alors, on a :

1. (X, D) *est un espace symétrique.*
2. H_D *est une distance de Hausdorff symétrique.*

Démonstration. Soient $x, y \in X$ et $A, B \in C(X)$.

1. $D(x, x) = 0$ et $D(x, y) = D(y, x)$ découle directement de $d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = d(y, x)$. D'autre part, la fonction $t \mapsto e^t - 1$ est croissante pour tout $t \geq 0$ donc (X, D) est un espace symétrique D-borné.
2. Comme la fonction exp est strictement croissante et continue, on obtient par la propriété caractéristique de la borne supérieure et le Lemme 3.1.1,

$$\begin{aligned} H_D(A, B) &= e^{H(A,B)} - 1 \\ &= e^{\max\{\sup\limits_{a\in A} d(a,B), \sup\limits_{b\in B} d(b,A)\}} - 1 \\ &= \max\{\sup_{a\in A} D(a, B), \sup_{b\in B} D(b, A)\}, \end{aligned}$$

avec $D(x, y) = e^{d(x,y)} - 1$ pour tous $x, y \in X$.

□

Notre premier résultat est le suivant

Théorème 3.1.3. *Soient (X, d) un espace métrique complet borné et T une multiapplication définie sur X à valeurs dans $C(X)$. On Suppose que $\inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(x, y) - H(Tx, Ty)\} > 0$. Alors il existe $u \in X$ tel que $u \in Tu$.*

Démonstration. On considère $\alpha = \inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(x, y) - H(Tx, Ty)\}$. Alors, pour tous $x, y \in X$, on a :

$$e^{H(Tx,Ty)} \leq k e^{d(x,y)}, \quad (k = e^{-\alpha} < 1) \tag{3.1}$$

Également, pour tous $x, y \in X$, on a :

$$e^{H(Tx,Ty)} - 1 \leq k(e^{d(x,y)} - 1) \tag{3.2}$$

En utilisant le Lemme 3.1.2, on déduit que, pour tous $x, y \in X$, on a :

$$H_D(Tx, Ty) \leq kD(x, y) \tag{3.3}$$

avec $k < 1$. Donc, d'après le Théorème 1.0.11 (Théorème 2.2.1 [12]), on déduit qu'il existe $u \in X$ tel que $u \in Tu$. □

Corollaire 3.1.4. *Soit $T : X \longrightarrow C(X)$ une multiapplication contractive (cela signifie, $H(Tx, Ty) < d(x, y)$ pour tous $x \neq y \in X$) d'un esapce métrique complet borné (X, d) telle que $\inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(x, y) - H(Tx, Ty)\} \neq 0$. Alors il existe $u \in X$ tel que $u \in Tu$.*

Corollaire 3.1.5. *(Théorème 3 [36]) Soit $T : X \longrightarrow X$ une application d'un espace métrique complet borné (X, d) tel que $\inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(x, y) - d(Tx, Ty)\} > 0$. Alors il existe $u \in X$ telle que $Tu = u$.*

Exemple 3.1.1. *Soient $X = \{0, 1, 2, ..., n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $d : X \times X \to [0, \infty[$ la distance définie par :*

$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & si\ a = b \\ a + b & sinon \end{cases}.$$

Alors (X, d) est un espace métrique complet borné. On considère la multiapplication $T : X \to C(X)$ définie par :

$$Ta = \begin{cases} \{0\} & si\ a \in \{0, 1\} \\ \{0, ..., a - 1\} & sinon \end{cases}.$$

Soient $a, b \in X$ tels que $a < b$.

Cas 1 : *Si $a, b \in \{0, 1\}$, alors $d(a, b) - H_d(Ta, Tb) = 1$.*

Cas 2 : *Si* $a \in \{0,1\}$ *et* $b \geq 2$*, alors* $d(a,b) - H_d(Ta,Tb) = a+1$.
Cas 3 : *Si* $a, b \geq 2$*, alors* $d(a,b) - H_d(Ta,Tb) = a+1$.
Il s'ensuit facilement que :

$$\inf_{a \neq b \in X} \{d(a,b) - H(Ta,Tb)\} > 0.$$

Ainsi, alors T *satisfait toutes les hypothèses du Théorème 3.1.3 et* $0 \in T0$.

Remarque 3.1.6. *Dans l'exemple ci-dessus, on remarque que l'espace* X *est compact et* $\inf_{x \neq y \in X}\{d(x,y) - H(Tx,Ty)\} > 0$*. Afin de montrer qu'il n'y a aucune relation entre cette condition et la compacité de l'espace, nous donnons les exemples suivants*

Exemple 3.1.2. *Soit* $X = \overline{B}(0,1)$ *la boule unité fermée d'un espace de Banach sur le corps des réels, muni de la distance*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}.$$

On définit $T : X \to C(X)$ *par*

$$Tx = \begin{cases} B(0,1) & si\ x = 0 \\ \overline{B}(0,1) & si\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Alors

$$d(x,y) - H(Tx,Ty) = 1, \ \ pour\ tous\ \ x \neq y \in X.$$

Par conséquent, T *satisfait toutes les conditions du Théorème 3.1.3 et* $0 \in T0$*. Cependant,* X *n'est pas compact et* $\inf_{x \neq y}\{d(x,y) - H(Tx,Ty)\} > 0$.

Exemple 3.1.3. *Soit* $X = [0,1]$ *muni de la distance usuelle. On considère la multiapplication* T *définie sur* X *par :*

$$Tx = \begin{cases} \{\frac{x}{2}\} & si\ x \in [0,1) \\ \{0, \frac{1}{2}\} & si\ x = 1 \end{cases}.$$

Alors, X *est compact et* $\inf_{x \neq y}\{d(x,y) - H(Tx,Ty)\} = 0$.

Comme application du Théorème 3.1.3, nous introduisons la définition suivante.

3.2 Multiapplications T-faiblement contractives dans un espace métrique

Définition 3.2.1. *Soit $T : X \longrightarrow C(X)$ une multiapplication d'un espace métrique (X,d). T sera dite T-faiblement contractive si pour tous $x, y \in X$, an a*

$$H(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \phi(1 + d(x,y)),$$

où $\phi : [1,\infty[\to [0,\infty[$ est une fonction qui vérifie :

i) $\phi(t) = 0$ si et seulement si $t = 1$,

ii) $\inf\limits_{t>1} \phi(t) > 0$.

Théorème 3.2.1. *Soit $T : X \longrightarrow C(X)$ une multiapplication T-faiblement contractive d'un espace métrique complet borné (X,d). Alors, il existe $u \in X$ tel que $u \in Tu$.*

Démonstration. Pour $x \neq y \in X$ et d'après la Définition 3.2.1, on a :

$$0 < \inf_{t>1} \phi(t) \leq \phi(1 + d(x,y)) \leq d(x,y) - H(Tx,Ty), \tag{3.4}$$

et donc

$$\inf_{x \neq y \in X} \{d(x,y) - H(Tx,Ty)\} > 0. \tag{3.5}$$

Ainsi, d'après le Théorème 3.1.3, on déduit qu'il existe $u \in X$ tel que $u \in Tu$. $\square$

Corollaire 3.2.2. *(Théorème 9 [36]) Soit $T : X \longrightarrow X$ une application E-faiblement contractive d'un espace métrique complet borné (X,d). Alors, il existe $u \in X$ tel que $Tu = u$.*

Exemple 3.2.1. *Soient $X = \{x_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \{1,...p\}\}$ où $p \in \mathbb{N}$. On munit X de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$. Alors (X,d) est un espace métrique complet borné.*
On considère la multiapplication $T : X \to C(X)$ définie par :

$$Tx = \begin{cases} \{x_1\} & si\ x = x_1 \\ \{x_1, ..., x_{n-1}\} & si\ x = x_n \text{ avec } n > 1 \end{cases}$$

et la fonction ϕ telle que :

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & i\ t = 1 \\ 1 & si\ t > 1 \end{cases}.$$

Alors, T satisfait toutes les conditions du Théorème 3.2.1. En effet, on a :
Cas 1 : *Si $n = m$, alors $H(Tx_n, Tx_m) \leq d(x_n, x_m) - \phi(1 + d(x_n, x_m))$.*
Cas 2 : *Si $n = 1$ et $m \geq 2$, alors, on a :*

$$\begin{aligned} H(Tx_n, Tx_m) - d(x_n, x_m) &= x_{m-1} - x_1 - (x_m - x_1) \\ &= -m \\ &\leq -\phi(1 + d(x_n, x_m)). \end{aligned}$$

Cas 3 : *Si $n, m \geq 2$ tel que $n < m$, on aura :*

$$\begin{aligned} H(Tx_n, Tx_m) - d(x_n, x_m) &= x_{m-1} - x_{n-1} - (x_m - x_n) \\ &= -m + n \\ &\leq -\phi(1 + d(x_n, x_m)). \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les conditions du Théorème 3.2.1 sont vérifiées et $x_1 \in Tx_1$.

Maintenant, afin d'illustrer l'importance de la condition $\inf_{t>1} \phi(t) > 0$, nous proposons l'exemple suivant

Exemple 3.2.2. *Soit $X = \{0, 1, 2\}$ muni de la distance usuelle. On sait que (X, d) est un espace métrique complet borné.*
On considère $T : X \to C(X)$ et ϕ définies par :

$$T0 = \{1\},\ T1 = \{0, 2\},\ T2 = \{1\}$$

et $\phi(t) = 0$ sur $[1, \infty[$.
Alors, pour tous $x, y \in X$, on a :

$$H(Tx, Ty) \leq d(x, y).$$

Donc $H(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \phi(1 + d(x, y))$, pour tous $x, y \in X$. Cependant, T n'est pas T-faiblement contractive, puisque $\inf_{t>1} \phi(t) = 0$ et T ne possède aucun point fixe. Ainsi, la condition $\inf_{t>1} \phi(t) > 0$ est essentielle.

3.3 Application

Dans le but d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, nous avons besoin de quelques définitions et résultats préliminaires.

Définition 3.3.1. *([22]) Soient X et Y sont deux espaces topologiques et $\phi : X \to 2^Y$ une multiapplication. Une sélection pour ϕ est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x) \in \phi(x)$..*

Définition 3.3.2. *Soient X et Y sont deux espaces topologiques. Une application $T : X \to 2^Y$ est dite semi-continue inférieurement (dite aussi hémicontinue inférieurement) si pour tout $x \in X$ et tout ensemble ouvert V tels que $Tx \cap V \neq \emptyset$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que pour tout $y \in U$, on a $Ty \cap V \neq \emptyset$.*

Théorème 3.3.1. *([22])*
Si X est un espace paracompact alors, toute multiapplication hémicontinue (semi-continue) inférieurement ϕ de X dans un espace de Banach E et à valeurs des convexes fermées non vides, possède une sélection continue.

Lemme 3.3.2. *(Lemma 2.2 [33]).*
Soient (X, d) espace métrique et A, B deux parties non vides et bornées fermées de X. Supposons qu'il existe $\gamma > 0$ tel que :
i) Pour tout $a \in A$, il existe $b \in B$ avec $d(a, b) \leq \gamma$,
ii) Pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ avec $d(b, a) \leq \gamma$.
Alors $H(A, B) \leq \gamma$.

Dans ce paragraphe, inspiré de [33], nous étudions l'existence de solutions pour l'inclusion intégrale de type Volterra. À ce propos, soit $X = \mathcal{C}([0, \tau], \mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions continues de $[0, \tau]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $\tau > 0$. On note que X, muni de la distance $d(x, y) = \sup_{t\in[0,\tau]} |x(t) - y(t)|$, est un espace métrique complet (voir, Lemme 2.1.6). Considérons l'inclusion intégrale de type Volterra :

$$x(t) \in f(t) + \int_0^t K(t, s, x(s))ds, \quad t \in [0, \tau], \tag{3.6}$$

où $K : [0, \tau] \times [0, \tau] \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R})$, avec $\mathcal{P}_{cv}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des parties compactes et convexes non vides de $\mathbb{R}$. Pour chaque $x \in X$, la multiapplication K_x définie par $K_x(t, s) := K(t, s, x(s))$, $(t, s) \in [0, \tau]^2$ est semi continue inférieurement.
On considère l'opérateur multivoque T de X à valeurs dans $\mathcal{P}(X)$ défini par :

$$Tx(t) = \left\{ v \in X : v(t) \in f(t) + \int_0^t K(t, s, x(s))ds, \quad t \in [0, \tau] \right\}, \tag{3.7}$$

pour chaque $x \in X$.
Soit $x \in X$. D'après le Théorème de sélection de Michael 3.3.1 (voir [22]), il existe un

opérateur continu $k_x : [0,\tau]\times[0,\tau]\to\mathbb{R}$ tel que $k_x(t,s)\in K_x(t,s)$ pour tout $t,s\in[0,\tau]$. Donc, on a $f(t)+\int_0^t k_x(t,s)ds\in Tx(t)$, ce qui implique que $T(x)\neq\emptyset$. D'autre part, Tx est un ensemble fermé. En effet :
Soit $\{\alpha_n\}\subset Tx$ telle que $\{\alpha_n\}$ converge vers α. Alors $\alpha_n = f(t)+\int_0^t k_n(t,s,x(s))ds$ avec $k_n(t,s,x(s))\in K(t,s,x(s))$. On remarque qu'on peut construire une suite extraite de $\{k_n(t,s,x(s))\}$ qui converge dans $K(t,s,x(s))$ et par unicité de la limite, on a $\alpha\in Tx$.

Sous les hypothèses ci-dessus, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.3.3. *S'il existe $M>0$ tel que :*

$$H(K(s,x(s)),K(s,y(s)))\ \le\ \frac{1}{\tau}[|x(s)-y(s)|-M], \tag{3.8}$$

pour tous $s,t\in[0,\tau]$ et $x,y\in X$ tels que $x(s)\neq y(s)$ pour chaque $s\in[0,\tau]$, alors l'inclusion intégrale (3.6) *admet une solution.*

Démonstration. Nous montrerons que T satisfait toutes les hypothèses du Théorème 3.1.3. Soient $x,y\in X$ tels que $a\in Tx$. Alors, il existe un $k_x(t,s)\in K_x(t,s)$ pour $t,s\in[0,\tau]$ avec $a(t)=f(t)+\int_0^t k_x(t,s)ds$. D'après la condition (3.8), il existe $b(t,s)\in K_y(t,s)$ tel que :

$$|k_x(t,s)-b(t,s)|\ \le\ \frac{1}{\tau}[|x(s)-y(s)|-M], \tag{3.9}$$

pour tous $t,s\in[0,\tau]$.
Considérons l'opérateur multivoque S défini par :

$$S(t,s)=K_y(t,s)\cap\{w\in\mathbb{R}:|k_x(t,s)-w|\le\frac{1}{\tau}[|x(t,s)-y(t,s)|-M]\}, \tag{3.10}$$

pour tous $t,s\in[0,\tau]$.
Comme S est semi continue inférieurement, il s'ensuit qu'il existe une application continue $k_y:[0,\tau]\times[0,\tau]\to\mathbb{R}$ telle que $k_y(t,s)\in S(t,s)$ pour tous $t,s\in[0,\tau]$. Ainsi, nous obtenons

$$c(t)=f(t)+\int_0^t k_y(t,s)ds\in f(t)+\int_0^t K(t,s,y(s))ds,\ \ t\in[0,\tau] \tag{3.11}$$

et pour tout $t\in[0,\tau]$, on a :

$$\begin{aligned}|a(t)-c(t)| &= \left|\int_0^t k_x(t,s)ds-\int_0^t k_y(t,s)ds\right|\\ &\le \int_0^t |k_x(t,s)-k_y(t,s)|ds\\ &\le d(x,y)-M,\end{aligned} \tag{3.12}$$

ce qui implique que

$$d(a,c) \leq d(x,y) - M, \tag{3.13}$$

pour tous $x \neq y \in X$.
Finalement, en interchangeons le rôle de x et y et en utilisant le Lemme 3.3.2 , on déduit que :

$$\inf_{x \neq y \in X} \{d(x,y) - H(Tx,Ty)\} > 0. \tag{3.14}$$

Ainsi, l'inclusion intégrale de type Volterra (3.6) admet une solution.

□

CHAPITRE

4

POINT FIXE COMMUN DES APPLICATIONS UNIVALENTES

Le présent chapitre est consacré à l'étude du problème d'existence et d'unicité de points fixes communs pour les applications faiblement compatibles définies sur un espace topologique (X, τ) muni d'une τ-distance et puis appliquer les résultats démontrés pour établir des théorèmes du point fixe commun dans un espace métrique borné. Nous définissons ensuite la classe d'applications E_θ-faiblement compatibles et nous établissons de nouveaux théorèmes du point fixe commun pour ce type d'applications. Des applications seront données à la fin de ce chapitre pour des systèmes d'équations différentielles et fonctionnelles.

4.1 Point fixe commun des applications contractives du type 1 et Applications

4.1.1 Résultats dans un espace topologique (X, τ) muni d'une τ-distance

Dans cette section, nous commençons par prouver un nouveau théorème dans un espace topologique (X, τ) muni d'une τ-distance. On rappelle que $\psi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ est une fonction qui vérifie :

i) ψ est croissante,

ii) $\lim \psi^n(t) = 0$, pour tout $t \in [0, \infty[$.

Théorème 4.1.1. *Soit (X, τ) un espace topologique séparé muni d'une τ-distance p. On suppose que X est p-borné.*
Soient $f : X \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X$ deux applications faiblement compatibles telles que :

i) $g(X) \subset f(X)$,

ii) $p(gx, gy) \leq \psi(p(fx, fy))$,

pour tous $x, y \in X$.
Si l'image de f ou g est un sous-espace S-complet de X, alors f et g ont un point fixe commun unique.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$. D'après la condition (i), il existe $x_1 \in X$ tel que $g(x_0) = f(x_1)$. En poursuivant ce processus, nous pouvons choisir $x_n \in X$ tel que $f(x_n) = g(x_{n-1})$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. En utilisant (ii), nous obtenons pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} p(fx_n, fx_{n+m}) &= p(gx_{n-1}, gx_{n+m-1}) \\ &\leq \psi(p(fx_{n-1}, fx_{n+m-1})) \\ &\vdots \\ &\leq \psi^n(p(fx_0, fx_m)) \\ &\leq \psi^n(M), \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec $M = \sup\{p(x, y)/x, y \in X\}$. Puisque $\lim_{n\to\infty} \psi^n(M) = 0$, alors $\{fx_n\}$ est une suite p-Cauchy.
Supposons que $f(X)$ est S-complet. Alors, il existe $u \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} p(fu, fx_n) = 0$,

et par conséquent $\lim_{n\to\infty} p(gu, gx_n) = \lim_{n\to\infty} p(fu, fx_n) = 0$. En utilisant le Lemme 1.0.8, on obtient $gu = fu$. Or f et g sont faiblement compatibles, alors

$$f \circ gu = g \circ fu = g \circ gu = f \circ fu. \tag{4.2}$$

Supposons que $p(g \circ gu, gu) \neq 0$. De (ii), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} p(g \circ gu, gu) &\leq \psi(p(f \circ gu, fu)) \\ &< p(g \circ gu, gu), \end{aligned} \tag{4.3}$$

ceci conduit à une contradiction. Ainsi, on a $g \circ gu = gu$. Également $f \circ gu = g \circ fu = g \circ gu = gu$, ce qui implique que gu est un point fixe commun de f et g.
Maintenant, si l'image de g est un sous-espace S-complet de X, alors $\lim_{n\to\infty} p(gv, gx_n) = 0$ pour un certain $v \in X$. D'après (i), il existe $w \in X$ tel que $gv = fw$ et la preuve que gw est un point fixe commun de f et g est la même que celle donnée lorsque $f(X)$ est S-complet.
Pour l'unicité, on suppose qu'il existe $u, v \in X$ tels que $f(u) = u = g(u)$ et $f(v) = v = g(v)$ avec $u \neq v$. Alors, la condition (ii) et le Lemme 1.0.8 conduisent à :

$$\begin{aligned} p(u, v) &= p(gu, gv) \\ &\leq \psi(p(fu, fv)) \\ &= \psi(p(u, v)) \\ &< p(u, v), \end{aligned}$$

ce qui est absurde et donc $u = v$. □

Exemple 4.1.1. *Soient $X = [1, 18]$ et $d(x, y) = |x - y|$ la distance usuelle. Considérons la fonction $p : X \times X \to [0, \infty[$ définie par*

$$p(x, y) = |x - y| e^{|x-y|}, \ \ \forall x, y \in X.$$

Il est facile de vérifier que la fonction p est une τ-distance sur X où τ est la topologie induite par la distance usuelle. En effet :
Soient $x \in X$ et V un voisinage arbitraire de $x \in X$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_d(x, \varepsilon) \subset V$, avec $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X, d(x, y) < \varepsilon\}$ est la boule ouverte.
Soit $y \in B_p(x, \varepsilon e^{\varepsilon})$, donc $p(x, y) < \varepsilon e^{\varepsilon}$, ce qui implique que $|x - y| e^{|x-y|} < \varepsilon e^{\varepsilon}$. Alors, on obtient $|x - y| < \varepsilon$.

Donc, on a $B_p(x, \varepsilon e^{\varepsilon}) \subset B_d(x, \varepsilon)$.
Considérons les appications $f, g : X \to X$ *définies par :*

$$gx = \begin{cases} 2x^2 - 1 & si\ x \in [1, \frac{3}{2}] \\ 1 & sinon \end{cases},$$

$$fx = \begin{cases} 4x^4 - 3 & si\ x \in [1, \frac{3}{2}] \\ 1 & sinon \end{cases}.$$

On prend $\psi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ *tel que* $\psi(t) = \frac{2}{3}t$.
Ainsi, toutes les hypothèses du Théorème 4.1.1 sont satisfaites et 1 est le point fixe commun unique de f *et* g.

Pour $f = Id_X$ dans le Théorème 4.1.1, on retrouve le résultat suivant, établi dans [1] :

Corollaire 4.1.2. *(Théorème 4.1 dans [1]).*
Soit (X, τ) *un espace topologique séparé muni d'une* τ*-distance* p. *On suppose que* X *est* p*-borné et* S*-complet. Soit* $g : X \to X$ *une application tel que*

$$p(gx, gy) \leq \psi(p(x, y)),$$

pour tous $x, y \in X$. *Alors* f *admet un point fixe unique.*

4.1.2 Résultats dans un espace métrique (X, d)

Définition 4.1.1. *Soit* Θ *l'ensemble des fonctions* $\theta : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ *qui vérifient :*
i) θ *est stictement croissante,*
ii) $\theta(t) = 0$ *si et seulement si* $t = 0$.

Lemme 4.1.3. *Soient* (X, d) *un espace métrique et* $\theta \in \Theta$. *Considérons l'application* $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *définie par :*

$$p(x, y) = e^{\theta(d(x,y))} - 1. \tag{4.4}$$

Alors p *est une* τ_d*-distance sur* X *où* τ_d *est la topologie induite par la distance* d.

Démonstration. Soit (X, τ_d) un espace topologique muni de τ_d, la topologie induite par d et V un voisinage d'un $x \in X$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_d(x, \varepsilon) \subset V$, avec $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X, d(x, y) < \varepsilon\}$ est la boule ouverte.
Soit $y \in B_p(x, e^{\theta(\varepsilon)} - 1)$, alors $p(x, y) < e^{\theta(\varepsilon)} - 1$, ce qui implique que $e^{\theta(d(x,y))} < e^{\theta(\varepsilon)}$.
Puisque θ est supposée strictement croissante, on obtient $d(x, y) < \varepsilon$.
Donc $B_p(x, e^{\theta(\varepsilon)} - 1) \subset B_d(x, \varepsilon)$. $\square$

Grâce au Théorème 4.1.1 et le Lemme 4.1.3, nous démontrons le résultat suivant

Théorème 4.1.4. *Soit (X, d) un espace métrique complet borné. Soient $f : X \to X$ et $g : X \to X$ deux applications faiblement compatibles telles que :*

i) $g(X) \subset f(X)$,

ii) $\inf_{x \neq y} \{\theta[d(fx, fy)] - \theta[d(gx, gy)]\} > 0$,

avec $\theta \in \Theta$. Alors f et g ont un point fixe commun unique.

Démonstration. On pose $\alpha = \inf_{x \neq y} \{\theta[d(fx, fy)] - \theta[d(gx, gy)]\}$. Alors, pour tous $x \neq y \in X$, on a :

$$\theta(d(gx, gy)) \leq \theta(d(fx, fy)) - \alpha, \tag{4.5}$$

Donc

$$e^{\theta(d(gx,gy))} \leq k e^{\theta(d(fx,fy))}, \tag{4.6}$$

où $k = e^{-\alpha} < 1$.

Considérons l'application $p : X \times X \to [0, \infty[$ définie par :

$$p(x, y) = e^{\theta(d(x,y))} - 1.$$

D'après le Lemme 4.1.3, on sait que p est une τ_d- sur X où τ_d c'est la topologie induite par la distance d. D'autre part, en prenant $\psi(t) = kt$, pour tout $t \in [0, \infty[$, dans le Théorème 4.1.1 , on obtient

$$p(gx, gy) \leq kp(fx, fy). \tag{4.7}$$

Ainsi, on déduit que f et g ont un point fixe commun unique. □

Exemple 4.1.2. *Soit $X = [0, 1]$ muni de la distance*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 + \max\{x, y\} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}.$$

On définit les applications $f, g : X \to X$ par $fx = 1 - x$, $gx = \frac{1}{2}$, pour tout $x \in X$, et $\theta : [0, \infty[\to [0, \infty[$ telle que $\theta(t) = \ln(1 + t)$, pour tout $t \in [0, \infty[$.

Il est facile de voir que $g(X) \subset f(X)$ et f, g sont faiblement compatibles. D'autre part, pour tous $x < y \in X$, on a :

$$\theta(d(fx, fy)) - \theta(d(gx, gy)) = \ln(3 - x) \geq \ln 2 > 0.$$

Alors f et g satisfont toutes les hypothèses du Théorème 4.1.4 et ont le point fixe commun unique $\frac{1}{2}$.

Exemple 4.1.3. *Soit* $X = \overline{B}(0,1)$ *la boule unité fermée d'un espace Banach sur* $\mathbb{R}$ *muni de la distance*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}.$$

On définit $f, g : X \to X$ *par* $fx = -x$ *et* $gx = 0$ *pour tout* $x \in X$, *on a :*

$$\theta(d(fx,fy)) - \theta(d(gx,gy)) = \theta(d(-x,-y)) = 2, \quad pour\ tous\ \ x \neq y \in X,$$

où $\theta = 2t$. *Par conséquent,* f *et* g *satisfont toutes les conditions du Théorème 4.1.4 et* f *et* g *ont le point fixe commun unique* 0.

Remarque 4.1.5. *Les exemples ci-dessus montrent qu'il n'y a aucune relation entre la compacité et la condition* $\inf\limits_{x\neq y}\{\theta[d(fx,fy)] - \theta[d(gx,gy)]\} > 0$. *En effet :*
Dans l'exemple 4.1.2, $X = [0,1]$ *est compact et* $\inf\limits_{x\neq y}\{\theta[d(fx,fy)] - \theta[d(gx,gy)]\} > 0$.
D'autre part, pour $X = [0,1]$, $fx = \frac{1}{2}x$ *et* $gx = \frac{1}{3}x$, *l'espace* X *est compact et* $\inf\limits_{x\neq y}\{\theta[d(fx,fy)] - \theta[d(gx,gy)]\} = 0$ *où* $\theta(t) = 2t$.
De plus, dans l'exemple 4.1.3, X *n'est pas compact et* $\inf\limits_{x\neq y}\{\theta[d(fx,fy)] - \theta[d(gx,gy)]\} > 0$.

Comme une première application de notre Théorème 4.1.4, nous obtenons un résultat pour une nouvelle classe d'applications faiblement contractives définies comme suit.

Définition 4.1.2. *Soient* (X,d) *un espace métrique et* $f, g : X \longrightarrow X$ *deux applications faiblement compatibles telles que* $g(X) \subset f(X)$.
On dit que f *et* g *sont* E_θ*-faiblement contractives si*

i) Pour tous $x \neq y \in X$ *tels que* $fx = fy$, *on a* $fx = gx$,

ii) $\theta(d(gx,gy)) \leq \theta(d(fx,fy)) - \phi(\theta(d(fx,fy)) + 1)$, *pour tous* $x, y \in X$,

où $\theta \in \Theta$ *et* $\phi : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ *est une fonction qui vérifie :*

i) $\phi(t) = 0$ *si et seulement si* $t = 1$,

ii) $\inf\limits_{t>1} \phi(t) > 0$.

Théorème 4.1.6. *Soient* (X,d) *un espace métrique complet borné et* f, g *sont deux applications* E_θ*-faiblement contractives de* X *dans lui-même. Alors* f *et* g *ont un point fixe commun unique.*

Démonstration. Soient $x \neq y \in X$. Alors, on a :
Cas 1 : Si $fx = fy$, alors la Définition 4.1.2 implique que $fx = gx = fy = gy$. Puisque f et g sont E_θ-faiblement compatibles, on a $g \circ fx = f \circ gx = f \circ fx = g \circ gx$. Donc,

d'après la Définition 4.1.2, on a :

$$\begin{aligned}\theta(d(g\circ fx, fx)) &= \theta(d(g\circ fx, gx)\\ &\le \theta(d(f\circ fx, fx)) - \phi(\theta(d(f\circ fx, fx)) + 1)\\ &= \theta(d(g\circ fx, fx)) - \phi(\theta(d(g\circ fx, fx)) + 1).\end{aligned}$$

Alors, f et g ont un point fixe commun unique.
Cas 2 : Si $fx \neq fy$, il découle de la Définition 4.1.2 que :

$$0 < \inf_{t>1}\phi(t) \le \phi(\theta(d(fx, fy)) + 1) \le \theta(d(fx, fy)) - \theta(d(gx, gy)), \tag{4.8}$$

d'où $\inf_{x\neq y}\{\theta(d(fx, fy))) - \theta(d(gx, gy))\} > 0$. D'après le Théorème 4.1.4, on déduit que f et g ont un point fixe commun unique. □

Exemple 4.1.4. *Soit $X = \{0, 1, 2, 3\}$ muni de la distance suivante*

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & si\ x \neq y\\ 0 & si\ x = y\end{cases}.$$

On définit $f, g : X \to X$ par

$$f0 = 0,\ f1 = 0,\ f2 = 1,\ f3 = 2$$

et

$$g0 = 0,\ g1 = 0,\ g2 = 0,\ g3 = 1.$$

Considérons les fonctions θ et ϕ définies par : $\theta(t) = 2t$, pour tout $t \in [0, \infty[$ et

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & si\ t = 1\\ 1 & si\ t > 1\end{cases}.$$

Alors, f et g satisfont toutes les conditions du Théorème 4.1.6 et 0 est le point fixe commun unique.

4.1.3 Application

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au problème d'existence et d'unicité d'une solution commune pour les deux équations intégrales non-linéaires suivantes :

$$\begin{cases} x'(t) = K(t, \int_0^t K(s, x(s))ds),\\ x(0) = 0\end{cases} \tag{4.9}$$

et

$$\begin{cases} x'(t) = K(t, x(t)), \\ x(0) = 0 \end{cases} . \tag{4.10}$$

avec, $x \in \mathcal{C}[0,T]$ l'espace de toutes les fonctions continues de $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $T > 0$, $K : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.
Soit $X = \mathcal{C}[0,T]$ muni de la distance $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$d(x,y) = \sup_{t\in[0,T]} |x(t) - y(t)|,$$

D'après le Lemme 2.1.6, on sait que (X,d) est un espace métrique complet.
Les équations différentielles (4.9) et (4.10) sont équivalentes aux équations intégrales

$$x(t) = \int_0^t K(s, \int_0^s K(\xi, x(\xi))d\xi)ds,\ t \in [0,T] \tag{4.11}$$

et

$$x(t) = \int_0^t K(s, x(s))ds,\ t \in [0,T], \tag{4.12}$$

respectivement.
On considère les deux applications $f, g : X \to X$ définies, pour tout $x \in X$, par :

$$f(x)(t) = \int_0^t K(s, x(s))ds,\ t \in [0,T] \tag{4.13}$$

et

$$g(x)(t) = \int_0^t K(s, \int_0^s K(\xi, x(\xi))d\xi)ds,\ t \in [0,T] \tag{4.14}$$

pour tout $x \in X$.
Ainsi, le problème d'existence d'une solution commune des équations différentielles équivaut à trouver un point fixe commun pour les applications f et g.
Supposons que les hypothèses ci-dessus sont vérifiées, alors nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.1.7. *Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que :*

$$|K(s,x) - K(s,y)| \leq \frac{1}{T}[|x-y| - M], \tag{4.15}$$

pour tous $s \in [0,T]$ et $x, y \in X$ tel que $x \neq y$. Alors, Les équations intégrales non-linéaires (4.13) *et* (4.14) *ont une solution commune unique.*

Démonstration. Il est clair que $g(X) \subset f(X)$ et f, g sont faiblement compatibles, Il nous reste donc à montrer que f et g satisfont la condition (ii) du Théorème 4.1.4.
Soient $x \neq y \in X$ et $t \in [0, T]$. Alors, d'après (4.13), (4.14) et (4.15), on a :

$$\begin{aligned}
&|g(x)(t) - g(y)(t)| \\
&\quad = \left| \int_0^t K(s, \int_0^s K(\xi, x(\xi))d\xi)ds - \int_0^t K(s, \int_0^s K(\xi, y(\xi))d\xi)ds \right| \\
&\quad \leq \int_0^t \frac{1}{T}\left[\left| \int_0^s K(\xi, x(\xi))d\xi - \int_0^s K(\xi, y(\xi))d\xi \right| - M \right] ds \\
&\quad \leq \int_0^t \frac{1}{T}\left[|f(x)(s) - f(y)(s)| - M \right] ds \\
&\quad \leq d(fx, fy) - M,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Donc, pour tous $x \neq y \in X$, on a :

$$d(gx, gy) \leq d(fx, fy) - M$$

ce qui implique que :

$$\inf_{x \neq y} \{d(fx, fy) - d(gx, gy)\} \geq M > 0.$$

Par conséquent, d'après le Théorème 4.1.4, il existe une solution commune unique des équations intégrales (4.13) et (4.14). □

4.2 Point fixe commun des applications contractives du type 2 et Applications

Cette section est divisée en deux parties. La première est consacrée à la présentation de quelques nouveaux résultats de points fixes communs, tandis que la deuxième a pour objet, l'étude du problème d'existence et d'unicité d'une solution pour un système d'équations intégrales et ensuite pour un système d'équations fonctionnelles.

4.2.1 Résultats principaux

Théorème 4.2.1. *Soit (X, τ) un espace topologique séparé muni d'une τ-distance p. Supposons que X est p-borné et S-complet. Soient f et g deux applications commutatives telles que, pour tous $x, y \in X$, on a :*

$$p(fx, gy) \leq \psi(p(x, y))$$

où ψ est définie au début de ce chapitre. Alors f et g ont un point fixe commun unique.

Démonstration. Soit x un élément de X. On considère la suite (x_n) définies par $x_0 := x$, et $x_{2n-1} := fx_{2n-2}$ et $x_{2n} := g_{2n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Alors, on a les cas suivants :

Cas 1 : Si $n = 2k$ et $m = 2l$ tels que $k, l \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+m}) &= p(x_{2k}, x_{2(k+l)}) \\
&= p(gx_{2k-1}, gx_{2(k+l)-1}) \\
&= p(g \circ fx_{2k-2}, gx_{2(k+l)-1}) \\
&= p(f \circ gx_{2k-2}, gx_{2(k+l)-1}) \\
&\leq \psi[p(gx_{2k-2}, x_{2(k+l)-1})] \\
&= \psi[p(g^2x_{2k-3}, fx_{2(k+l)-2})] \\
&= \psi[p(g^2 \circ fx_{2k-4}, f \circ gx_{2(k+l)-3})] \\
&\leq \psi^2[p(g^2x_{2k-4}, fx_{2(k+l)-3})] \\
&= \psi^2[p(g^3x_{2(k-2)-1}, f^2x_{2(k+l)-4})] \\
&= \psi^2[p(f \circ g^3x_{2(k-3)}, g \circ f^2x_{2(k+l-2)-1})] \\
&\leq \psi^3[p(g^3x_{2(k-3)}, f^2x_{2(k+l-3)+1})] \\
&\vdots \\
&\leq \psi^k[p(g^kx_0, f^{k-1}x_{2l+1})] \\
&\leq \psi^{\frac{n}{2}}(M),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

avec $M = \sup\{p(x, y)/x, y \in X\}$.

Cas 2 : Si $n = 2k$ et $m = 2l + 1$ tels que $k, l \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+m}) &= p(x_{2k}, x_{2(k+l)+1}) \\
&= p(gx_{2k-1}, fx_{2(k+l)}) \\
&= p(g \circ fx_{2k-2}, f \circ gx_{2(k+l)-1}) \\
&= p(f \circ gx_{2k-2}, g \circ fx_{2(k+l)-1}) \\
&\leq \psi[p(gx_{2k-2}, fx_{2(k+l)-1})] \\
&= \psi[p(g^2x_{2k-3}, f^2x_{2(k+l)-2})] \\
&= \psi[p(g^2 \circ fx_{2k-4}, f^2 \circ gx_{2(k+l)-3})] \\
&\leq \psi^2[p(g^2x_{2k-4}, f^2x_{2(k+l)-3})] \\
&= \psi^2[p(g^3x_{2(k-2)-1}, f^3x_{2(k+l)-4})] \\
&= \psi^2[p(f \circ g^3x_{2(k-3)}, g \circ f^3x_{2(k+l-2)-1})] \\
&\leq \psi^3[p(g^3x_{2(k-3)}, f^3x_{2(k+l-3)+1})] \\
&\vdots \\
&\leq \psi^k[p(g^kx_0, f^kx_{2l+1})] \\
&\leq \psi^{\frac{n}{2}}(M),
\end{aligned} \tag{4.18}$$

avec $M = \sup\{p(x, y)/x, y \in X\}$.

Cas 3 : Si $n = 2k + 1$ et $m = 2l$ tels que $k, l \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+m}) &= p(x_{2k+1}, x_{2(k+l)+1}) \\
&= p(fx_{2k}, fx_{2(k+l)}) \\
&= p(f \circ gx_{2k-1}, g \circ fx_{2(k+l)-1}) \\
&\leq \psi[p(gx_{2k-1}, fx_{2(k+l)-1})] \\
&= \psi[p(g \circ fx_{2k-2}, f^2x_{2(k+l)-2})] \\
&= \psi[p(f \circ gx_{2k-2}, g \circ f^2x_{2(k+l)-3})] \\
&\leq \psi^2[p(gx_{2k-2}, f^2x_{2(k+l)-3})] \\
&= \psi^2[p(g^2x_{2(k-2)+1}, f^3x_{2(k+l)-4})] \\
&= \psi^2[p(f \circ g^2x_{2(k-2)}, g \circ f^3x_{2(k+l-2)-1})] \\
&\leq \psi^3[p(g^2x_{2(k-2)}, f^3x_{2(k+l-3)+1})] \\
&\vdots \\
&\leq \psi^k[p(g^{k-1}x_2, f^kx_{2l+1})] \\
&\leq \psi^{\frac{n-1}{2}}(M),
\end{aligned} \tag{4.19}$$

avec $M = \sup\{p(x,y)/x,y \in X\}$.

Cas 4 : Si $n = 2k+1$ et $m = 2l+1$ tels que $k,l \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+m}) &= p(x_{2k+1}, x_{2(k+l+1)}) \\
&= p(fx_{2k}, gx_{2(k+l)+1}) \\
&\leq \psi[p(x_{2k}, x_{2(k+l)+1})] \\
&= \psi[p(gx_{2k-1}, fx_{2(k+l)})] \\
&= \psi[p(g \circ fx_{2k-2}, f \circ gx_{2(k+l)-1})] \\
&\leq \psi^2[p(gx_{2k-2}, fx_{2(k+l)-1})] \\
&= \psi^2[p(g^2x_{2(k-1)-1}, f^2x_{2(k+l-1)})] \\
&= \psi^2[p(f \circ g^2x_{2(k-2)}, g \circ f^2x_{2(k+l-2)+1})] \\
&\leq \psi^3[p(g^2x_{2(k-2)}, f^2x_{2(k+l-2)+1})] \\
&\vdots \\
&\leq \psi^k[p(g^{k-1}x_2, f^{k-1}x_{2l+3})] \\
&\leq \psi^{\frac{n-1}{2}}(M),
\end{aligned} \tag{4.20}$$

avec $M = \sup\{p(x,y)/x,y \in X\}$.

Donc, on a $\lim p(x_n, x_{n+m}) = 0$, ce qui implique que (x_n) et une suite p-Cauchy. Puisque X est S-complet, alors il existe $u \in X$ tel que $\lim(u, x_n) = 0$, et donc $\lim(u, x_{n+1}) = 0$ et $\lim(fu, x_{n+1}) = 0$. En utilisant le Lemme 1.0.8, on déduit que $fu = u$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
p(u, g^n u) &\leq \psi^n[p(u,u)] \\
&\leq \psi^n(M)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

et

$$\begin{aligned}
p(gu, g^n u) &\leq \psi^n[p(gu,u)] \\
&\leq \psi^n(M),
\end{aligned} \tag{4.22}$$

avec $M = \sup\{p(x,y)/x,y \in X\}$. Alors (4.21), (4.22) et le Lemme 1.0.8 impliquent que $gu = u$.

Pour l'unicité, on suppose qu'ils existent $u, v \in X$ tels que $fu = gu = u$, $v = fv = gv$ et $u \neq v$. Alors

$$\begin{aligned}
p(u,v) &= p(fu, gv) \\
&\leq \psi(p(u,v)) \\
&< p(u,v),
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent, le point fixe commun est unique. $\square$

Pour $f = g$ dans le Théorème 4.2.1 et comme corollaire, on retrouve le résultat établi dans [1]

Corollaire 4.2.2. *(Théorème 4.1 dans [1]).*
Soient (X, τ) un espace topologique séparé et p une τ-distance. Supposons que X est p-borné et S-complet. Soit f une application de X dans lui-même telle que :

$$p(fx, fy) \leq \psi(p(x, y)),$$

pour tous $x, y \in X$. Alors f admet un point fixe unique.

Corollaire 4.2.3. *Soient (X, τ) un espace topologique séparé et p une τ-distance. Supposons que X est p-borné et S-complet. Soit f une application de X dans lui-même. S'ils existent $i, j \in \mathbb{N}$ tels que*

$$p(f^i x, f^j y) \leq \psi(p(x, y)),$$

pour tous $x, y \in X$. Alors f admet un point fixe unique.

Démonstration. Il est clair que $f^i \circ f^j = f^j \circ f^i$ ce qui implique, d'après le Théorème 4.2.1, qu'il existe $u \in X$ tel que $f^i u = f^j u = u$. Puisque u est unique, on déduit que $fu = u$. $\square$

Exemple 4.2.1. *Soit $X = \{0, 1, 2\}$ muni de la distance :*

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}.$$

On considère les applications $f, g : X \to X$ définies par : $f0 = f1 = f2 = 0$ et $g0 = g1 = 0$, $g2 = 1$. Il est facile de voir que $f \circ g = g \circ f$. D'autre part, pour tous $x, y \in X$, on a :

$$p(fx, gy) \leq \psi(p(x, y)),$$

où $p(x, y) = e^{d(x,y)} - 1$ et $\psi(t) = \frac{2}{3}t$, pour tout $t \in [0, \infty[$. Alors f et g satisfont toutes les hypothèses du Théorème 4.2.1 et 0 est le point fixe commun unique de f et g.

Théorème 4.2.4. *Soient (X, d) un espace métrique complet borné, f et g deux applications de X dans lui-même telles que :*

i) $f \circ g = f \circ g$,

ii) $\inf\limits_{x \neq y} \{d(x, y) - d(fx, gy)\} > 0$.

Alors f et g ont un point fixe commun unique.

Démonstration. On pose $\alpha = \inf_{x\neq y}\{d(x,y) - d(fx,gy)\}$. Alors, pour tous $x \neq y \in X$, on a :

$$d(fx,gy) \leq d(x,y) - \alpha. \tag{4.23}$$

Donc

$$e^{d(fx,gy)} \leq k e^{d(x,y)}, \tag{4.24}$$

où $k = e^{-\alpha} < 1$.
Considérons l'application $p : X \times X \to [0,\infty[$ définie par :

$$p(x,y) = e^{d(x,y)} - 1.$$

On sait, d'après le Lemme 2.1.1, que p est une τ_d-distance sur X où τ_d est la topologie induite par la distance d. Considérons la fonction ψ définie, pour tout $t \in [0,\infty[$, par $\psi(t) = kt$. Alors, pour tout $x \neq y \in X$, on a :

$$p(fx,gy) \leq kp(x,y). \tag{4.25}$$

Donc, on déduit que f et g ont un point fixe commun unique. □

Pour $f = g$, on a le résultat suivant

Corollaire 4.2.5. *Soient (X,d) un espace métrique complet borné et $f : X \to X$ une application. Supposons qu'il existe $i, j \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$\inf_{x\neq y}\{d(x,y) - d(f^i x, f^j y)\} > 0.$$

Alors f admet un point fixe unique.

Corollaire 4.2.6. *Soient (X,d) espace métrique complet borné et f et g deux applications commutatives de X dans lui-même telles que :*

$$\inf_{x\neq y}\{d(x,y) - d(fx,gy)\} \neq 0.$$

Alors f et g ont un point fixe commun unique.

Exemple 4.2.2. *Soit $X = \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$. On définit $f, g : X \to X$ par :*

$$f\frac{1}{2} = f1 = f2 = \frac{1}{2}$$

et
$$g\frac{1}{2} = g1 = \frac{1}{2},\ g2 = 1.$$
Alors $f \circ g = g \circ f$ *et* $d(x,y) - d(fx,gy) \geq \frac{1}{2}$ *pour tous* $x \neq y \in X$.
Ainsi, toutes les hypothèses du Théorème 4.2.4 sont satisfaites et $\frac{1}{2}$ *est le point fixe commun unique de* f *et* g.

Remarque 4.2.7. *Dans l'exemple ci-dessus, l'espace* X *est compact et la condition* $\inf\limits_{x\neq y}\big\{d(x,y) - d(fx,gy)\big\} > 0$ *est satisfaite. Dans le but de montrer qu'il n'y a aucune relation entre cette condition et la compacité de l'espace, nous donnons les exemples suivants.*

Exemple 4.2.3. *Soit* $X = \overline{B}(0,1) \times \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ *où* $\overline{B}(0,1)$ *est la boule unité fermée d'un espace de Banach* E *sur* $\mathbb{R}$, *muni de la distance*
$$d\big((x,y),(x',y')\big) = \begin{cases} 1 + |y-y'| & si\ x \neq x' \\ |y-y'| & si\ x = x' \end{cases}.$$
On définit $f, g : X \to X$ *par :*
$$f\Big(x, \frac{1}{2}\Big) = f\Big(x, 1\Big) = f\Big(x, 2\Big) = \Big(0_E, \frac{1}{2}\Big)$$
et
$$g\Big(x, \frac{1}{2}\Big) = g\Big(x, 1\Big) = \Big(0_E, \frac{1}{2}\Big),\ g\Big(x, 2\Big) = \Big(0_E, 1\Big).$$
Alors, on a :
$d\big((x,y),(x',y')\big) - d\big(f(x,y), g(x',y')\big) \geq \frac{1}{2}$.
Donc f *et* g *vérifient toutes les conditions du Théorème 4.2.4 et* f, g *ont le point fixe commun unique* $\Big(0_E, \frac{1}{2}\Big)$. *En outre,* X *n'est pas compact et de plus on a :*
$$\inf_{(x,y)\neq(x',y')\in X}\Big\{d\big((x,y),(x',y')\big) - d\big(f(x,y), g(x',y')\big)\Big\} > 0.$$

Exemple 4.2.4. *Soit* $X = [0,1]$ *muni de la distance usuelle* d. *On définit* $fx = \frac{1}{2}x$ *et* $gx = \frac{1}{4}x$, *pour tout* $x \in X$. *Alors l'espace* X *est compact et* $\inf\limits_{x\neq y}\{d(x,y) - d(fx,gy)\} = 0$.

Comme applications du Théorème 4.2.4, on obtient un résultat pour une nouvelle classe d'applications faiblement contractives définies comme suit

Définition 4.2.1. *Soient* (X,d) *un espace métrique et* $f, g : X \longrightarrow X$ *deux applications commutatives.*

On dit que f et g sont E_T-faiblement contractives si
$d(fx, gy) \leq d(x, y) - \phi(d(x, y)) + 1)$*, pour tous* $x, y \in X$*, où* $\phi : [1, \infty[\to [0, \infty[$ *est une fonction qui vérifie* $\phi(1) = 0$ *et* $\inf\limits_{t>1} \phi(t) > 0$.

Théorème 4.2.8. *Soient (X, d) un espace métrique complet borné et f, g deux applications E_T-faiblement contractives sur X. Alors f et g ont un point fixe commun unique.*

Démonstration. Soient $x \neq y \in X$. Alors, on a :

$$0 < \inf_{t>1} \phi(t) \leq \phi(d(x, y)) + 1) \leq d(x, y) - d(fx, gy). \tag{4.26}$$

Donc, on a $\inf_{x \neq y}\{d(x, y) - d(fx, gy)\} > 0$. D'après le Théorème 4.2.4, on déduit que f et g ont un point fixe commun unique. □

Corollaire 4.2.9. *Soit (X, d) un espace métrique complet borné. S'ils existent $i, j \in \mathbb{N}$ tels que f^i, f^j sont E_T-faiblement contractives sur X, alors f admet un point fixe unique.*

Corollaire 4.2.10. *(Théorème 2.1.5) Soient (X, d) un espace métrique complet borné et f une application E-faiblement contractive sur X. Alors f admet un point fixe unique.*

Exemple 4.2.5. *Soit $X = [0, 4]$ muni de la distance*

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}.$$

On définit $f, g : X \to X$ par $fx = 0$ pour tout $x \in X$,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0, 3] \\ \frac{1}{x} & si\ x \in]3, 4] \end{cases}$$

et

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & si\ t > 1 \\ 0 & si\ t = 1 \end{cases}.$$

Alors f, g vérifient toutes les hypothèses du Théorème 4.2.8 et f, g ont le point fixe commun unique 0.

Exemple 4.2.6. *Soit $X = [0, 2]$ muni de la distance* $d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$.

On définit $f, g : X \to X$ par $fx = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0, 1[\\ \frac{x+1}{3} & si\ x \in [1, 2] \end{cases}$, *$gx = 1$ pour tout $x \in X$ et $\phi(t) = 0$ pour tout $t \in [1, +\infty[$.*

Alors (X, d) est un espace métrique complet borné et $d(fx, gy) \leq d(x, y) - \phi(d(x, y) + 1)$ pour tous $x, y \in X$. Cependant, f, g ne sont pas des applications E_T-faiblement contractives puisque $\inf\limits_{t>1} \phi(t) = 0$ et f, g n'ont aucun point fixe commun. Par conséquent, la condition que $\inf\limits_{t>1} \phi(t) > 0$ est essentielle.

4.2.2 Application 1

Dans cette première application, nous nous intéressons au problème d'existence et d'unicité d'une solution commune pour les deux équations intégrales non-linéaires

$$x(t) = \theta(t) + \int_0^t K(s, x(s))ds \tag{4.27}$$

et

$$x(t) = \theta(t) + \int_0^t H(s, x(s))ds, \tag{4.28}$$

avec :

$x \in \mathcal{CB}[0, T]$ l'espace de toutes les fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$, avec $T > 0$,

$K, H : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues telles que

$K(t, \alpha + \int_0^t H(s, x(s))) = H(t, \alpha + \int_0^t K(s, x(s)))$, pour tous $t \in [0, T]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

et $\theta : [0, T] \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Soit $X = \mathcal{CB}[0, T]$ muni de la distance $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$d(x, y) = \sup_{t \in [0,T]} |x(t) - y(t)|,$$

Daprès le Lemme 2.1.6, (X, d) est un espace métrique complet.

On considère les deux applications $f, g : X \to X$ définies, pour tout $x \in X$, par :

$$f(x)(t) = \theta(t) + \int_0^t K(s, x(s))ds, \ t \in [0, T] \tag{4.29}$$

et

$$g(x)(t) = \theta(t) + \int_0^t H(s, x(s))ds, \ t \in [0, T] \tag{4.30}$$

Alors, le problème d'existence d'une solution commune des équations différentielles est équivalent à celui de la recherche d'un point fixe commun des applications f et g.

Supposons que les hypothèses ci-dessus sont vérifiées, alors nous avons le théorème suivant

Théorème 4.2.11. *S'il existe $M > 0$ tel que*

$$|K(s, x) - H(s, y)| \leq \frac{1}{T}[|x - y| - M], \tag{4.31}$$

pour tous $s \in [0, T]$ et $x, y \in X$ tels que $x(s) \neq y(s)$, alors les équations intégrales non-linéaires (4.29) *et* (4.30) *ont une solution commune unique.*

Démonstration. On a $f \circ g = g \circ f$. Il nous reste de montrer que f et g satisfont la condition (ii) du Théorème 4.2.4.
Soient $x \neq y \in X$ et $t \in [0, T]$. Alors, d'après (4.29), (4.30) et (4.31), on a :

$$\begin{aligned}
&|f(x)(t) - g(y)(t)| \\
&\quad = \left| \int_0^t K(s, x(s))ds - \int_0^t H(s, y(s))ds \right| \\
&\quad = \left| \int_0^t \big[K(s, x(s)) - H(s, y(s))\big] ds \right| \\
&\quad \leq \int_0^t \Big| K(s, x(s)) - H(s, y(s)) \Big| ds \\
&\quad \leq \int_0^t \frac{1}{T} \Bigg[|x(s) - y(s)| - M \Bigg] ds \\
&\quad \leq d(x, y) - M,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Donc, pour tous $x \neq y \in X$, on a :

$$d(fx, gy) \leq d(x, y) - M$$

ce qui implique que : $\inf\limits_{x \neq y} \{d(x, y) - d(fx, gy)\} \geq M > 0$.
Par conséquent, d'après le Théorème 4.2.4, on déduit l'existence d'une solution commune unique des équations intégrales (4.29) et (4.30). □

4.2.3 Application 2

On rappelle que la théorie de la programmation dynamique (voir la deuxième section du deuxième chapitre) a été initiée par Bellman [4, 5] et elle est fortement liée au domaine du processus de décision en plusieurs étapes, dans lequel certaines équations fonctionnelles apparaissent.
Dans la suite, X et Y sont des spaces de Banach, $S \subset X$ et $D \subset Y$. On rappelle que, dans le langage de la programmation dynamique, X est appelé espace des états et Y est appelé espace des décisions.
Soient $\rho : S \times D \to S$, $g : S \times D \to \mathbb{R}$ et $G_i : S \times D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, i=1,2, avec $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et $B(S)$ est l'ensemble de toutes les fonctions bornées à valeur réelle sur S. Pour $h, k \in B(S)$, soit

$$d(h, k) = \sup\{|h(x) - k(x)| : x \in S\}.$$

Il est facile de voir que $(B(S), d)$ est un espace métrique complet.
Le but de la suite est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution commune de la classe suivante d'équations fonctionnelles :

$$f_i(x) = \sup_{y \in D}\{g(x,y) + G_i(x,y,f_i(\rho(x,y)))\}, \tag{4.33}$$

avec g, G_i sont bornées, $i = 1, 2$. On définit les applications $T_i : B(S) \to B(S)$ par :

$$T_i f_i(x) = \sup_{y \in D}\{g(x,y) + G_i(x,y,f_i(\rho(x,y)))\}, \quad i = 1, 2. \tag{4.34}$$

Il est clair que les T_i sont bien définies puisque les g et les G_i sont bornées.
Supposons que $x \mapsto G_i(.,.,x)$ sont des fonctions croissantes et continues telles que

$$G_1(x,y,z + G_2(a,b,c)) = G_2(x,y,z + G_1(a,b,c)) \tag{4.35}$$

pour tous $x, a \in S,\ y, b \in D$ et $z, c \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.2.12. *Soient $T_i : B(S) \to B(S)$ les deux opérateurs définis par* (4.34)*. Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :*

$$|G_1(x,y,h(x)) - G_2(x,y,k(x))| \leq d(h,k) - M, \tag{4.36}$$

pour tout $(h,k,x,y) \in B(S)^2 \times S \times D$, avec $h(x) \neq k(x)$. Alors le système (4.33) *possède une solution bornée unique.*

Démonstration. Puisque les fonctions $x \mapsto G_1(.,.,x), x \mapsto G_2(.,.,x)$ sont croissantes et continues, alors les applications T_1 et T_2 sont commutatives. Soient λ un nombre strictement positif, $x \in S$ et $h, k \in B(S)$. Alors, il existe $y, z \in D$ tels que

$$T_1(h(x)) < g(x,y) + G_1(x,y,h(\rho(x,y))) + \lambda, \tag{4.37}$$

$$T_2(k(x)) < g(x,z) + G_2(x,z,k(\rho(x,z))) + \lambda. \tag{4.38}$$

D'autre part, d'après la définition des T_i, on a :

$$T_1(h(x)) \geq g(x,z) + G_1(x,z,h(\rho(x,z))) \tag{4.39}$$

$$T_2(k(x)) \geq g(x,y) + G_2(x,y,k(\rho(x,y))) \tag{4.40}$$

En utilisant (4.37) et (4.40), on obtient :

$$\begin{aligned} T_1(h(x)) - T_2(k(x)) &< G_1(x, y, h(\rho(x, y))) - G_2(x, y, k(\rho(x, y))) + \lambda \\ &\leq |G_1(x, y, h(\rho(x, y))) - G_2(x, y, k(\rho(x, y)))| + \lambda. \end{aligned}$$

Donc

$$T_1(h(x)) - T_2(k(x)) \leq d(h, k) - M + \lambda. \tag{4.41}$$

De même, d'après (4.38) et (4.39), on a :

$$T_2(k(x)) - T_1(h(x)) \leq d(h, k) - M + \lambda. \tag{4.42}$$

Compte tenu de (4.41) et (4.42), on a :

$$|T_1(h(x)) - T_2(k(x))| \leq d(h, k) - M + \lambda$$

ce qui implique que :

$$d(T_1(h), T_2(k)) \leq d(h, k) - M + \lambda. \tag{4.43}$$

Comme λ est choisi arbitrairement, on a :

$$d(T_1(h), T_2(k)) \leq d(h, k) - M, \tag{4.44}$$

pour tous $h \neq k \in B(S)$. Donc, on a :

$$\inf_{h \neq k \in B(S)} \left\{ d(h, k) - d(T_1 h, T_2 k) \right\} > 0, \tag{4.45}$$

ce qui implique, d'après le Théorème 4.2.4, que les équations fonctionnelles (4.33) ont une solution commune bornée et unique. □

CHAPITRE

5

NOUVELLE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DU POINT FIXE DE HEGEDÜS-SZILÁGYI

Dans ce chapitre on va introduire une nouvelle contraction qui généralise et améliore celle introduite par T. Suzuki [34] en vue de généraliser le Théorème du point fixe de Hegedüs et Szilágyi [13] établi dans le cadre des espaces métriques pour les applications $T : X \to X$ qui ont un orbite borné ($D_T(x) = \sup\{d(u,v) : u, v \in \{x, Tx, T^2x, ...\}\} < \infty$ pour tout $x \in X$) et qui vérifient, pour tous $x, y \in X$, la contraction :

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi \circ D_T(x, y), \tag{5.1}$$

avec $D_T(x,y) = \sup\{d(u,v) : u, v \in \{x, Tx, T^2x, ..., y, Ty, T^2y, ...\}\}$ et $\varphi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction auxiliaire vérifiant :

(i) $\varphi(t) < t$, pour tout $t \in]0, \infty[$;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \infty[$, on a :

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \text{ implique } \ \varphi(t) \leq \varepsilon.$$

Nous commençons par donner les exemples suivants qui justifient la motivation de ce chapitre

Exemple 5.0.7. *Soit $X = [0, 2]$ muni de la distance définie par :*

$$d(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y. \end{cases} \tag{5.2}$$

On considère l'application T sur X définie par :

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2x} & si\ x \in [1,2] \\ \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Soit $\varphi : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t} & si\ t \in [1,2] \\ \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Alors, φ satisfait la condition (i) du Théorème 0.0.2. D'autre part, pour un $\varepsilon > 0$, nous avons donc les deux cas suivants :
Cas 1 : *Si $0 < \varepsilon < 1$, alors il existe $\delta = \frac{1-\varepsilon}{2}$ tel que pour chaque $t \in]0, \infty[$, on a :*

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \textit{ implique } \ \varphi(t) = 0 \leq \varepsilon.$$

Cas 2 : *Si $\varepsilon \geq 1$, alors il existe $\delta = \varepsilon$ tel que pour chaque $t \in]0, \infty[$, on a :*

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \textit{ implique}$$

- *Si $t > 2$, alors on a $\varphi(t) = 0 \leq \varepsilon$;*
- *Si $t \in [1, 2]$, alors*
$$\varphi(t) = \frac{1}{2t} < \frac{1}{2\varepsilon} \leq \varepsilon,$$

ce qui implique que φ satisfait la condition (ii). De plus, T satisfait la condition (0.20)*. En effet, pour tous $x, y \in X$, on a :*

- *Si $x, y \notin [1, 2]$, alors*

$$d(Tx, Ty) = 0 \leq \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x,y), \varphi \circ D_T(y)\}.$$

- *Si $x \in [1, 2]$ et $y \notin [1, 2]$, alors :*

$$d(Tx, Ty) = \frac{1}{2x} \leq \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x,y), \varphi \circ D_T(y)\}.$$

– *Si* $x, y \in [1,2]$ *, alors, on a :*

$$d(Tx,Ty) = \max\left\{\frac{1}{2x}, \frac{1}{2y}\right\} = \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x,y), \varphi \circ D_T(y)\}.$$

Donc, pour tous $x, y \in X$*, on a :*

$$d(Tx,Ty) \leq \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x,y), \varphi \circ D_T(y)\},$$

et 0 *est le point fixe unique de* T*. Cependant,* T *ne satisfait pas la condition (iii) du Théorème 0.0.2. En effet, pour* $x, y \in [1,2]$ *tels que* $x < y$*, on a :*

$$d(Tx,Ty) = \frac{1}{2x} > \frac{1}{2y} = \varphi \circ D_T(x,y).$$

Exemple 5.0.8. *Soit* $X = [0,2]$ *muni de la distance* d *définie par :*

$$d(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y. \end{cases} \tag{5.3}$$

On considère les applications T *et* φ *définies par :*

$$Tx = \begin{cases} e^{-x} & si\ x \in [1,2] \\ \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

et

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-t} & si\ t \in [1,2] \\ \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de voir que la fonction φ *satisfait la condition (i) du Théorème 0.0.2. Montrons maintenant qu'elle vérifie également la condition (ii). Soit* $\varepsilon > 0$*, alors nous avons les deux cas suivants :*

Cas 1 : *Si* $0 < \varepsilon < 1$*, alors il existe* $\delta = \frac{1-\varepsilon}{2}$ *tel que pour tout* $t \in]0, \infty[$*, on a :*

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \text{ implique } \ \varphi(t) = 0 \leq \varepsilon.$$

Cas 2 : *Si* $\varepsilon \geq 1$*, alors il existe* $\delta = \varepsilon$ *tel que pour tout* $t \in]0, \infty[$*, on a :*

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \text{ implique}$$

– *Si* $t \notin [1,2]$*, alors*

$$\varphi(t) = 0 \leq \varepsilon$$

– *Si* $t \in [1,2]$*, alors, on a :*

$$\varphi(t) = e^{-t} < e^{-\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

D'une part, 0 *est le point fixe unique de* T*, mais* T *ne satisfait pas la condition* (iii) *du Théorème 0.0.2. En effet, on a :*
Soient $x, y \in X$*, sans perte de généralité, nous supposons que* $x < y$*. Si* $x, y \in [1,2]$*, on a :*

$$d(Tx, Ty) = e^{-x} > e^{-y} = \varphi \circ D_T(x,y).$$

D'autre part, T *satisfait la condition* (0.20)*. En effet, pour tous* $x, y \in X$*, on a :*

– *Si* $x, y \notin [1,2]$*, alors :*

$$d(Tx, Ty) = 0 \leq \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x,y), \varphi \circ D_T(y)\};$$

– *Si* $x \in [1,2]$ *et* $y \notin [1,2]$*, alors :*

$$d(Tx, Ty) = e^{-x} \leq \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x,y), \varphi \circ D_T(y)\};$$

– *Si* $x, y \in [1,2]$ *d'où*

$$d(Tx, Ty) = \max\left\{e^{-x}, e^{-y}\right\} = \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x,y), \varphi \circ D_T(y)\}.$$

Donc, pour tous $x, y \in X$*, on a :*

$$d(Tx, Ty) \leq \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x,y), \varphi \circ D_T(y)\},$$

et 0 *est le point fixe unique de* T*.*

Remarque 5.0.13. *Il apparaît clairement, à partir des exemples ci-dessus, que* T *admet un unique pont fixe même si (iii) du Théorème 0.0.2 n'est pas vérifiée. De l'autre côté, on observe que* T *satisfait* (0.20) *qui généralise et améliore le Théorème 0.0.2.*

Théorème 5.0.14. *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* T *une application de* X *dans lui-même telle que* $D_T(x) < \infty$ *pour tout* $x \in X$*. Supposons qu'il existe une fonction* φ *de* $[0, \infty[$ *dans lui-même telle que :*

(i) $\varphi(t) < t$ *pour tout* $t \in]0, \infty[$ *;*

(ii) *Pour chaque* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que, pour tout* $t \in]0, \infty[$*, on a :*

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \textit{implique}\ \varphi(t) \leq \varepsilon.$$

(iii) *Pour tous* $x, y \in X$*, on a :*

$$d(Tx, Ty) \leq \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x,y), \varphi \circ D_T(y)\}$$

Alors, T *possède un point fixe unique* z*. De plus,* $\{T^n x\}$ *converge vers* z *pour tout* $x \in X$*.*

Démonstration. La preuve est divisée en trois étapes.

Etape 1 : Nous prouvons que $\lim_{n\to\infty} D_T(T^n x) = 0$ pour tout $x \in X$.

Soit $x \in X$. Puisque $\{T^n x, T^{n+1}x, ...\} \supset \{T^{n+1}x, T^{n+2}x, ...\}$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{D_T(T^n x)\}$ est décroissante. Donc $\{D_T(T^n x)\}$ converge vers un certain $\varepsilon \geq 0$. On suppose que $\varepsilon > 0$. Nous avons les deux cas suivants :

- $\varepsilon < D_T(T^n x)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$;
- $\varepsilon = D_T(T^n x)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Dans le premier cas, nous choisissons $\delta \in]0, \infty[$ tel que :

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \quad \text{implique} \quad \varphi(t) \leq \varepsilon.$$

On choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$D_T(T^{n_0} x) < \varepsilon + \delta.$$

Soient $m \geq n_0$ et $n \geq n_0$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon &< D_T(T^{\max\{m,n\}} x) \\ &\leq D_T(T^m x, T^n x) \\ &\leq D_T(T^{\min\{m,n\}} x) \\ &\leq D_T(T^{n_0} x) < \varepsilon + \delta, \end{aligned}$$

donc, on obtient :

$$\begin{aligned} d(T^{m+1}x, T^{n+1}x) &\leq \max\{\varphi \circ D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n x), \varphi \circ D_T(T^n x)\} \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\varepsilon < D_T(T^{n_0+1}x) \leq \varepsilon$, ce qui conduit à une contradiction et donc $\varepsilon = 0$.

Dans le second cas, nous choisissons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\varepsilon = D_T(T^{n_0} x).$$

Soient $m \geq n_0$ et $n \geq n_0$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq D_T(T^{\max\{m,n\}} x) \\ &\leq D_T(T^m x, T^n x) \\ &\leq D_T(T^{\min\{m,n\}} x) \\ &\leq D_T(T^{n_0} x) = \varepsilon, \end{aligned}$$

par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} d(T^{m+1}x, T^{n+1}x) &\leq \max\{\varphi \circ D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n x), \varphi \circ D_T(T^n x)\} \\ &\leq \varphi(\varepsilon) < \varepsilon, \end{aligned}$$

donc $\varepsilon \leq D_T(T^{n_0+1}x) < \varepsilon$, ce qui est absurde et par conséquent $\varepsilon = 0$.
Ainsi, nous avons montré que : $\lim_{n\to\infty} D_T(T^n x) = 0$.
Etape 2 : Nous montrons que $\lim_{n\to\infty} D_T(T^n x, T^n y) = 0$, pour tout $x, y \in X$.
Soient $x, y \in X$, on a :

$$\{T^n x, T^{n+1}x, ..., T^n y, T^{n+1}y, ...\} \supset \{T^{n+1}x, T^{n+2}x, ..., T^{n+1}y, T^{n+2}y, ...\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que la suite $\{D_T(T^n x, T^n y)\}$ est décroissante. Donc $\{D_T(T^n x, T^n y)\}$ converge vers un certain $\varepsilon \geq 0$. On suppose que $\varepsilon > 0$, nous avons les deux cas suivants :

- $\varepsilon < D_T(T^n x, T^n y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $\varepsilon = D_T(T^n x, T^n y)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Dans le premier cas, nous choisissons $\delta \in]0, \infty[$ tel que :

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \quad \text{implique} \quad \varphi(t) \leq \varepsilon.$$

On choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$D_T(T^{n_0}x, T^{n_0}y) < \varepsilon + \delta.$$

D'après l'étape 1, nous pouvons supposer que :

$$D_T(T^{n_0}x) \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad D_T(T^{n_0}y) \leq \varepsilon.$$

Soient $m \geq n_0$ et $n \geq n_0$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon &< D_T(T^{\max\{m,n\}}x, T^{\max\{m,n\}}y) \\ &\leq D_T(T^m x, T^n y) \\ &\leq D_T(T^{\min\{m,n\}}x, T^{\min\{m,n\}}y) \\ &\leq D_T(T^{n_0}x, T^{n_0}y) < \varepsilon + \delta, \end{aligned}$$

Donc, on obtient :

$$\begin{aligned} d(T^{m+1}x, T^{n+1}y) &\leq \max\{\varphi \circ D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n y), \varphi \circ D_T(T^n y)\} \\ &\leq \max\{D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n y), D_T(T^n y)\} \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

et par suite, on a $\varepsilon < D_T(T^{n_0+1}x, T^{n_0+1}y) \leq \varepsilon$, ce qui conduit à une contradiction et donc $\varepsilon = 0$.
Dans le second cas, nous choisissons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\varepsilon = D_T(T^{n_0}x, T^{n_0}y).$$

Soient $m \geq n_0$ et $n \geq n_0$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq D_T(T^{\max\{m,n\}}x, T^{\max\{m,n\}}y) \\
&\leq D_T(T^m x, T^n y) \\
&\leq D_T(T^{\min\{m,n\}}x, T^{\min\{m,n\}}y) \\
&\leq D_T(T^{n_0}x, T^{n_0}y) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Similaire à l'étape 1, on suppose que :

$$D_T(T^{n_0}x) \leq \tfrac{\varepsilon+\varphi(\varepsilon)}{2} \quad \text{et} \quad D_T(T^{n_0}y) \leq \tfrac{\varepsilon+\varphi(\varepsilon)}{2}.$$

Alors, on aura :

$$\begin{aligned}
d(T^{m+1}x, T^{n+1}y) &\leq \max\{\varphi \circ D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n y), \varphi \circ D_T(T^n y)\} \\
&\leq \max\{D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n y), D_T(T^n y)\} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui conduit à la contradiction $\varepsilon \leq D_T(T^{n_0+1}x, T^{n_0+1}y) < \varepsilon$. Donc, on a $\varepsilon = 0$. Par conséquent, nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} D_T(T^n x, T^n y) = 0$.

Etape 3 : Dans cette étape, nous prouvons l'existence et l'unicité du point fixe.

Soit $x \in X$. Alors, d'après l'étape 1, la suite $\{D_T(T^n x)\}$ converge vers 0. Donc $\{T^n x\}$ est une suite de Cauchy dans X qui est supposé complet. Par conséquent, il existe $z \in X$ tel que $\{T^n x\}$ converge vers z. D'après l'étape 2, on a $\lim\limits_{n\to\infty} D_T(T^n x, T^n z) = 0$. Donc $\{T^n z\}$ converge vers z.

Maintenant, nous voulons montrer que $D_T(z) = 0$. Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\varepsilon := D_T(z) > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} D_T(T^n z) = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\varepsilon = D_T(z) = \cdots = D_T(T^{n_0-1}z) = D_T(T^{n_0}z) > D_T(T^{n_0+1}z).$$

Donc

$$\varepsilon = D_T(T^{n_0}z) = \sup\{d(T^{n_0}z, T^n z) : n > n_0\}.$$

D'autre part, pour $n > n_0$, on a :

$$d(T^{n_0}z, T^n z) \leq \max\{\varphi \circ D_T(T^{n_0-1}z), \varphi \circ D_T(T^{n_0-1}z, T^{n-1}z), \varphi \circ D_T(T^{n-1}z)\}.$$

Nous considérons les deux cas suivants :

- Si $n - 1 = n_0$, alors :

$$\varphi \circ D_T(T^{n-1}z) = \varphi \circ D_T(T^{n_0}z) = \varphi(\varepsilon)$$

– Si $n-1 > n_0$, alors :

$$\varphi \circ D_T(T^{n-1}z) \leq D_T(T^{n-1}z) \leq D_T(T^{n_0+1}z) < \varepsilon.$$

Donc

$$\begin{aligned} d(T^{n_0}z, T^n z) &\leq \max\left\{\varphi \circ D_T(T^{n_0-1}z), \varphi \circ D_T(T^{n_0-1}z), \max\{\varphi(\varepsilon), D_T(T^{n_0+1}z)\}\right\} \\ &\leq \max\{\varphi(\varepsilon), D_T(T^{n_0+1}z)\}. \end{aligned}$$

Comme n est choisi arbitrairement, on déduit que :

$$\varepsilon = \sup\{d(T^{n_0}z, T^n z) : n > n_0\} \leq \max\{\varphi(\varepsilon), D_T(T^{n_0+1}z)\} < \varepsilon.$$

Cela conduit à une contradiction et par conséquent $D_T(z) = 0$. Ainsi, z est un point fixe de T dans X.
L'unicité du point fixe est immédiate puisque $\lim\limits_{n\to\infty} D_T(T^n x, T^n z) = 0$. □

Corollaire 5.0.15. *(Théorème* 1.2 *dans [13]) Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* T *une application de* X *dans lui-même. Supposons qu'il existe une fonction* φ *de* $[0, \infty[$ *dans lui-même vérifiant :*

i) φ *est croissante ;*

ii) $\lim_n \varphi^n(t) = 0$ *pour tout* $t \in]0, \infty[$ *;*

iii) $d(Tx, Ty) \leq \varphi \circ D_T(x, y)$, *pour tous* $x, y \in X$.

Alors T *admet un point fixe unique* z. *De plus,* $\{T^n x\}$ *converge vers* z *pour tout* $x \in X$.

Corollaire 5.0.16. *(Théorème* 5 *dans [34]) Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* T *une application de* X *dans lui-même tel que* $D_T(x) < \infty$ *pour tout* $x \in X$. *Supposons qu'il existe une fonction* φ *de* $[0, \infty[$ *dans lui-même telle que :*

(i) $\varphi(t) < t$ *pour tout* $t \in]0, \infty[$ *;*

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que, pour chaque* $t \in]0, \infty[$, *on a :*

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \textit{ implique } \ \varphi(t) \leq \varepsilon.$$

(iii) $d(Tx, Ty) \leq \varphi \circ D_T(x, y)$, *pour tous* $x, y \in X$.

Alors T *admet un point fixe unique* z. *De plus,* $\{T^n x\}$ *converge vers* z *pour tout* $x \in X$.

L'exemple suivant montre que le Théorème 5.0.14 généralise le Théorème 0.0.2.

Exemple 5.0.9. *Soit* $X = [0, \pi]$ *muni de la distance définie par :*

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & \textit{si } x \neq y \\ 0 & \textit{si } x = y. \end{cases} \tag{5.4}$$

Considérons les applications T et φ définies par :

$$Tx = \begin{cases} \sin x & \textit{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

et

$$\varphi(t) = \begin{cases} \sin t & \textit{si } t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que φ satisfait la condition (i) du Théorème 5.0.14. Montrons maintenant que $\varepsilon > 0$ satisfait la condition (ii). Pour y arriver, nous avons les deux cas suivants :
Cas 1 : *Si $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, alors il existe $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$ tel que pour chaque $t \in]0, \infty[$, on a :*

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \ \textit{implique} \ \ \varphi(t) = 0 \leq \varepsilon.$$

Cas 2 : *Si $\varepsilon \geq 1$, alors il existe $\delta = \varepsilon$ tel que pour tout $t \in]0, \infty[$, on a :*

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \ \textit{implique}$$

- *Si $t \notin [\frac{\pi}{2}, \pi]$, alors $\varphi(t) = 0 \leq \varepsilon$;*
- *Si $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, alors,on a :*

$$\varphi(t) = \sin(t) < \sin(\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

D'une part, l'application T satisfait la condition (iii) du Théorème 5.0.14 et du corollaire 5.0.17. En effet, pour tous $x, y \in X$, on a :

- *Si $x, y \notin [\frac{\pi}{2}, \pi]$, alors :*

$$d(Tx, Ty) = 0 \leq \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x, y), \varphi \circ D_T(y)\};$$

- *Si $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ et $y \notin [\frac{\pi}{2}, \pi]$, alors :*

$$d(Tx, Ty) = \sin x \leq \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x, y), \varphi \circ D_T(y)\};$$

- *Si $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, alors, on a :*

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max\left\{ \sin x, \sin y \right\} \\ &= \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(y)\} \\ &= \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x, y), \varphi \circ D_T(y)\}. \end{aligned}$$

D'autre part, T ne satisfait pas la condition (iii) du Théorème 0.0.2. En effet, pour $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ tels que $x < y$, on a :

$$d(Tx, Ty) = \sin x > \sin y = \varphi \circ D_T(x, y).$$

En guise de conclusion, sachant que 0 est le point fixe unique de T, on déduit que notre résultat généralise le Théorème 0.0.2 (Corollaire 5.0.16).

Comme conséquence de notre Théorème, nous obtenons le nouveau résultat suivant avec une nouvelle contraction

Corollaire 5.0.17. *Soient (X, d) un espace métrique complet et T une application de X dans lui-même tel que $D_T(x) < \infty$, pour tout $x \in X$. On suppose qu'il existe une fonction φ de $[0, \infty[$ dans lui-même qui vérifie :*

(i) $\varphi(t) < t$ pour tout $t \in]0, \infty[$

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour chaque $t \in]0, \infty[$, on a :

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \textit{ implique } \ \varphi(t) \leq \varepsilon.$$

(iii) Pour tous $x, y \in X$, on a :

$$d(Tx, Ty) \leq \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(y)\}.$$

Alors T admet un point fixe unique z. De plus, $\{T^n x\}$ converge vers z pour tout $x \in X$.

CONCLUSION

L'objectif principal de cette thèse est l'étude du problème d'existence et d'unicité d'un point fixe et d'un point fixe commun pour le cas des applications univalentes $f, g : X \to X$ et celui des multiapplications $T : X \to CB(X)$ définies sur un espace métrique borné (X, d) où $CB(X)$ désigne l'ensemble des parties non vides bornées fermées de (X, d). Nous montrons que les applications qui vérifient les conditions :

1. $\inf_{x \neq y \in X} \{d(x, y) - d(fx, fy)\} > 0$, Théorème 2.1.2 de la section 1, chapitre 2,
2. $\inf_{x \neq y \in X} \left\{ \max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, fy)\} - d(fx, fy) \right\} > 0$, Théorème 2.2.4 de la section 2, chapitre 2,
3. $\inf_{x \neq y \in X} \{d(x, y) - H(Tx, Ty)\} > 0$, Théorème 3.1.3 de la section 1, chapitre 3,
4. $\inf_{x \neq y} \{\theta[d(fx, fy)] - \theta[d(gx, gy)]\} > 0$, Théorème 4.1.4 de la section 1, chapitre 4,
5. $\inf_{x \neq y} \{d(x, y) - d(fx, gy)\} > 0$, Théorème 4.2.4 de la section 2, chapitre 4,
6. $d(fx, fy) \leq \max\{\varphi \circ D_f(x), \varphi \circ D_f(x, y), \varphi \circ D_f(y)\}$, Théorème 5.0.14 du chapitre 5,

possèdent un point fixe. En particulier, nous montrons que les applications strictement contractantes qui vérifient la condition (1) ont un point fixe unique. Ce résultat représente une nouvelle contribution pour ce type de contraction puisque nous n'avons pas utilisé ni la compacité de l'espace ni l'hypothèse qu'il existe un point pour lequel il existe une sous suite convergente.

Les travaux présentés dans ce document fournissent des outils permettant en outre de résoudre des équations différentielles, des équations intégrales de type Volterra et des équations fonctionnelles en programmation dynamique. D'autre part, ils ouvrent la voie à d'autres perspectives de recherche. Une première serait d'établir (1), (2), (3), (4) et (5) pour une borne inférieure qui pourrait être nulle sur $X \times X$ privé de la diagonale $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. Ce travail présente également une nouvelle contraction qui généralise celle de T. Suzuki ([34] établi en 2018, en considérant la nouvelle contraction :

$$d(Tx,Ty) \leq \max\{\varphi(D_T(x)), \varphi(D_T(x,y)), \varphi(D_T(y))\} \tag{5.5}$$

où $T : X \to X$ est une application définie sur un espace métrique (X,d), ayant un orbite borné ($D_T(x) = \sup\{d(u,v) : u,v \in \{x, Tx, T^2x, ...\}\} < \infty$ pour tout $x \in X$) et $\varphi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ est une fonction quelconque. Le résultat obtenu généralise et améliore le Théorème de T. Suzuki [34] et plusieurs résultats connus dans le domaine de la théorie du point fixe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Aamri, D. El Moutawakil, τ-distance in general topological spaces with application to fixed point theory. Southwest Journal of Pure and Applied Mathematics, Issue **2**, December, 1-5 (2003)

[2] Ya. I. Alber, S. Guerre-Delabriere, Principle of weakly contractive maps in Hilbert spaces. new results in operator theory, Advances and Appl. (ed. by I. Gohberg and Yu Lyubich), Birkhauser verlag, Basel **98**, 7-22 (1997)

[3] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales. Fund. Math. 3, 133-181 (1992)

[4] R. Bellman, Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton (1957)

[5] R. Bellman, E.S. Lee,Functional equations arising in dynamic programming. Aequ. Math. 17, 1-18 (1978)

[6] L. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten ż, Mathematische Annalen, vol. 71, p. 97-115 (1912)

[7] R. M. T. Bianchini, Su un problema di S. Reich aguardante la teoría dei punti fissi. Boll. Un. Mat. Ital. 5, 103-10 (1972)

[8] L. Ćirić, A generalization of Banach's contraction principle. Proc. Am. Math. Soc. 45, 267-273 (1974)

[9] L. Ćirić, Some recent results in metrical fixed point theory, University of Belgrade, Serbia, (2003)

[10] D. Djorić, Common fixed point for generalized (ψ, ϕ)-weak contractions. Applied Mathematics Letters **22**, 1896-1900 (2009)

[11] M. Edelstein, On fixed and periodic points under contractive mappings. J. London Math. Soc., **37**, 74-79 (1962)

[12] D. El Moutawakil, A fixed point theorem for multivalued maps in symmetric spaces. Applied Mathematics E-notes, **4**, 26-32 (2004)

[13] M. Hegedüs, T. Szilágyi, Equivalent conditions and a new fixed point theorem in the theory of contractive type mappings.*Math. Jpn.*, **25**, 147-157 (1980)

[14] G. Jungk, Commuting maps and fixed points, Am. Math. Monthly 83261-263 (1976)

[15] G. Jungk, Compatible mappings and common fixed points, Int. J. Math. Sci. 9(4)771-779 (1986)

[16] G. Jungk, Common fixed points for noncontinuous nonselfmaps on nonmetric spaces, Far East J. Math. Sci. 4 199-21 (1996)

[17] G. Jungck, B. E Rhoades, Fixed point for set valued functions without continuity. Indian J.Pure Appl. Math. **29(3)**, 227-238 (1998)

[18] R. Kannan, Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc., 10, 71-76 (1968)

[19] W. Kirk, N. Shahzad, Fixed Point Theory in Distance Spaces, Springer International Publishing Switzerland (2014)

[20] J. Matkowski, Integrable Solutions of Functional Equations, Diss. Math., vol. 127. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warsaw (1975)

[21] A. Meir, E. Keeler, A theorem on contraction mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, **28**, 326-329 (1969)

[22] E. Michael, Continuous selection, I. Ann. Math. **63(2)**, 361-382 (1956)

[23] S. B. Nadler, Multivalued contraction mappings, Pacific. J. Math. **30**, 475-488 (1969)

[24] J. Nash, Equilibrium points in n-person games, Proceedings of the National Academy of Sciences, 36 : 48-49 (1950)

[25] J. Nash, Non-cooperative games, Annals of Mathematics, 54 : 286-295 (1951)

[26] V. V. Nemytzki, The fixed point method in analysis (Russian), Usp.Mat. Nauk, **1**, 141-174 (1936)

[27] S. Radenović, Z. Kadelburg, D. Jandrlić and A. Jandrlić, Some results on weak contraction maps, Bull. Iranian Math. Soc. **38**, 625-645 (2012)

[28] S. Reich, Some remarks concerning contraction mappings, Canad. Math. Bull. 14, 121-124 (1971)

[29] B. E. Rhoades, Some theorems on weakly contractive maps, Nonlinear Analysis, **47**, 2683-2693 (2001)

[30] B. E. Rhoades, A Comparison of Various Definitions of Contractive Mappings, Trans. Amer. Math. Soc., 226 , 257-290 (1977)

[31] I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, Fixed Point Theory, Cluj University Press, Cluj-Napoca, (2008)

[32] S. Sessa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point consideration, Publ. Inst. Math. Soc. 32 149-153 (1982)

[33] A. Sîntămărian, Integral inclusions of Fredlhom type relative to multivalued $\varphi-$contrction, Semin. Fixed Point Theory Appl., **2012(12)**, (2012)

[34] T. Suzuki, A generalization of Hegedüs-Szilágyi's fixed point theorem in complete metric spaces, Fixed Point Theory Appl., **2018,1** (2018)

[35] T. Suzuki, A new type of fixed point theorem in metric spaces, Nonlinear Anal, **71**, 5313-5317 (2009)

[36] Y. Touail, D. El Moutawakil and S. Bennani, Fixed Point Theorems for Contractive Selfmappings of a Bounded Metric Space, Journal of Function Spaces, vol. 2019, Article ID 4175807, 3 pages, (2019)

[37] Y. Touail, D. El Moutawakil, Fixed point results for new type of multivalued mappings in bounded metric spaces with an application. Ricerche mat (2020)

[38] Y. Touail, D. El Moutawakil, Fixed point theorems for new contractions with application in dynamic programming, Vestnik St.Petersb. Univ.Math. (to appear in Issue 2, 2021)

[39] W.A. Wilson, On semi-metric sapces, Amer. J. Math. **53**, 361-373 (1931)

[40] C. S. Wong, Common fixed points of two mappings, Paaifia J. Math.**48**, 299-312 (1973)

RÉSUMÉ

La théorie du point fixe s'intéresse au problème de recherche des conditions sur un ensemble X et une application $T : X \to X$ (resp. $T : X \to 2^X$) qui assurent l'existence d'un point u invariant par cette application (resp. par cette multi-application), i.e., $T(u) = u$ (resp. $u \in T(u)$). Cette théorie est devenue un outil très important et une source d'applications utiles dans plusieurs domaines des mathématiques et des sciences. Cette thèse, structurée en cinq chapitres, est consacrée à l'étude du problème d'existence d'un point fixe ou d'un point fixe commun sous certaines nouvelles contractions pour des applications univalentes et des multiapplications définies sur un espace métrique ou plus généralement sur un espace topologique (X, τ) muni d'une τ-distance.
Nos contributions à la théorie du point fixe améliorent de nombreux résultats connus dans la littérature. De plus, nous appliquons nos résultats pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle, d'un système d'équations différentielles, d'une équation intégrale, d'un système d'équations intégrales et de certaines équations fonctionnelles en programmation dynamique.

Mots clés : Point fixe, point fixe commun, espace symétrique, distance de Hausdorff, application E- faiblement contractive, application E- faiblement contractive généralisée, application E_T-faiblement contractive, application T-faiblement contractive, condition de contraction stricte, Théorème du point fixe de Hegedüs-Szilágyi, compacité, application E_θ-faiblement contractive , espace topologique de Hausdorff, équation différentielle, système d'équations différentielle, équation intégrale, système d'équation intégrale, inclusion intégrale, équation fonctionnelle provenant de la programmation dynamique.

ABSTRACT

Fixed point theory focuses on the problem of finding conditions on a set X and a map $T : X \to X$ (resp. $T : X \to 2^X$) which ensure the existence of a point u invariant by this map (resp. by this multi-map), i.e., $T(u) = u$ (resp. $u \in T(u)$). This theory has become a very important tool and a source of useful applications in several areas of mathematics and science. This thesis, structured in five chapters, is devoted to the study of the problem of existence of a fixed point or a common fixed point under certain new contractions for univalent applications and multiapplications defined on metric space or more generally on a topological space (X, τ) endowed with a τ-distance. Our contributions improve many results known in the literature. In addition, we apply our results to prove the existence and uniqueness of a solution of a differential equation, of a system of differential equations, of an integral equation, of a system of integral equations and of certain functional equations in dynamic programming.

Key words : Fixed point, common fixed point, symmetric space, Hausdorff distance, generalized E-Weakly contractive map, E_T-Weakly contractive map, T-weakly contractive map, Strict contraction condition, Hegedüs-Szilágyi's fixed point theorem, compactness, E_θ-Weakly contractive map, Hausdorff topological space, differential equation, system of differential equation, integral equation, system of integral equation, integral inclusion, functional equation arising in dynamic programming.