

Thèse :
Etudes des Equations et Systèmes de
Réaction Diffusion et Application :
Modélisation & Simulation

Presentée

par

SAIDA BAKHT

Sous la Direction

de

Nadia Idrissi Fatmi

Doctorat National

Mathématiques et Informatiques

Faculté des Sciences Moulay Slimane de Béni Mellal

ENSA Khouribga

Juillet 2019

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction générale | 5 |
| 2 | Etude d'une classe de systèmes de Réaction-Diffusion résultant de la cinétique chimique. | 20 |
| 2.1 | Introduction | 20 |
| 2.2 | Modélisation des Réactions Chimiques | 22 |
| 2.2.1 | Quelques principes généraux en modélisation des milieux continus | 22 |
| 2.2.2 | Modélisation de l'évolution des réactions | 28 |
| 2.3 | Etude mathématique pour les systèmes de réaction-diffusion | 41 |
| 2.3.1 | Notations et position du problème | 41 |
| 2.3.2 | Positivité de la solution | 42 |
| 2.3.3 | Existence locale et unicité | 46 |
| 2.3.4 | Existence globale | 49 |
| 2.3.5 | Annexe | 63 |
| 2.4 | Approximation numérique des systèmes de Réaction-Diffusion | 66 |
| 2.4.1 | La méthode des éléments finis | 67 |
| 2.4.2 | Formulation variationnelle | 71 |
| 2.4.3 | Le problème variationnel approché | 72 |
| 2.4.4 | Méthode de la semi- discrétisation | 74 |
| 2.4.5 | Résultats numériques | 76 |
| 2.5 | Conclusion | 80 |
| 3 | Infection virale avec diffusion : Modélisation, Analyse Mathématique et Simulation Numérique | 82 |
| 3.1 | Introduction | 83 |
| 3.2 | Formulation du modèle | 84 |
| 3.2.1 | Un modèle compartimental | 85 |
| 3.2.2 | Application : Modèle <i>TIV</i> | 87 |
| 3.3 | Analyse mathématique du modèle | 89 |
| 3.3.1 | Version continue | 89 |
| 3.3.2 | Version discrète | 97 |
| 3.4 | Applications et Simulations numériques | 106 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.4.1 | Méthode numérique | 108 |
| 3.4.2 | Applications | 110 |
| 3.5 | Conclusion | 117 |
| 4 | Etude Mathématique et Simulation Numérique d'une classe de modèle bioéconomique d'une pêcherie | 119 |
| 4.1 | Introduction | 120 |
| 4.2 | Etat de l'art de la pêcherie : gestion optimale statique et dynamique | 123 |
| 4.2.1 | Modèle Biologique | 123 |
| 4.2.2 | Modèle bioéconomiques | 128 |
| 4.3 | Modèle bioéconomique pour une espèce marine | 131 |
| 4.3.1 | Cas d'une espèce marine exploitée par un pêcheur | 131 |
| 4.3.2 | Cas d'une espèce marine exploitée par deux pêcheurs | 132 |
| 4.4 | Modèle bioéconomique pour deux espèces marines | 134 |
| 4.4.1 | Modèle biologique | 134 |
| 4.4.2 | Analyse d'équilibre | 135 |
| 4.4.3 | Modèle bioéconomique | 137 |
| 4.5 | Equilibre de Nash Généralisé | 140 |
| 4.6 | Simulations numériques | 143 |
| 4.6.1 | Effect de la variation du prix sur l'effort de pêche, les captures et le profit | 144 |
| 4.6.2 | Effect de la variation du nombre de pêcheurs sur l'effort de pêche, les captures et le profit | 146 |
| 4.7 | Conclusion | 149 |
| 5 | Conclusions et perspectives | 150 |
| | Bibliographie | 154 |

Chapitre 1

Introduction générale

Les mathématiques ont toujours le bénéfice de participer au développement de plusieurs domaines scientifiques : la physique, la biologie, la biomédicale, la dynamique des populations, l'ingénierie... Pour le mathématicien, ces domaines offrent de nouvelles et passionnantes branches de recherches, pendant que pour le spécialiste, le modelage mathématique offre un autre outil de la recherche proportionné avec de nouvelles techniques du laboratoire.

Mais en quoi consiste la modélisation mathématique ?

Elle consiste à utiliser les mathématiques pour décrire, expliquer, prévoir un comportement d'un phénomène dans le monde réel.

Elle peut être particulièrement utile pour répondre à des questions ou tester des idées dans des systèmes complexes.

Un modèle mathématique est une abstraction d'un système utilisant un langage précis pour décrire le comportement du système, le modèle est alors analysé, résolu ou simulé sur

un ordinateur.

En effet la modélisation nous permet de reformuler le phénomène étudié sous forme d'équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles (EDP).

Elles sont omniprésentes dans les sciences puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des populations, des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation de l'électromagnétisme ou des mathématiques financières.

En particulier, les équations de Réaction-Diffusion modélisent une variété de problèmes physiques et biologiques, ces équations décrivent comment la concentration ou la densité est distribuée dans de différents espaces sous l'influence de deux processus :

- les locaux interactions entre ses espèces
- la diffusion qui cause la propagation de ces espèces dans l'espace.

Ce type d'équations a suscité l'intérêt de nombreux de mathématiciens et une abondante littérature a été développée sur ce sujet, notamment sur le problème locale, globale, périodicité ou d'explosion en temps fini, de comportement asymptotique(voir [22], [23], [25], [28], [29], [37], [38], [43], [50], [59], [60],[?].)

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDP, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement, ce que les mathématiques peuvent faire par contre c'est de montrer l'existence d'une ou plusieurs solutions et décrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions [67], [27], [61].

Il est donc nécessaire d'avoir recours au calcul numérique sur ordinateur pour estimer qualitativement et quantitativement ces solutions.

En effet, la simulation numérique désigne l'exécution d'un programme informatique sur un

ordinateur ou réseau en vue de simuler un phénomène physique ou biologique.

Les simulations numériques scientifiques reposent sur la mise en oeuvre de modèles théoriques utilisant des techniques diversifiées tel que : différence finie, éléments finis, volumes finis etc....

Elles sont donc une adaptation aux moyens numériques de la modélisation mathématique et servent à étudier le fonctionnement et les propriétés d'un système modélisé ainsi qu'à prédire son évolution.

On parle aussi de calcul numérique et des interfaces graphiques qui permettent la visualisation des résultats des calculs par des images de synthèse.

C'est dans ce contexte que s'inscrit cette thèse comme étant une exploitation des outils présentés ci-dessus, et ceci sur trois grands thèmes ; la cinétique chimique, l'épidémiologie d'hépatite B et la bioéconomie de pêche.

En effet, la cinétique chimique est parmi les plus importants des domaines où l'on a recours à la modélisation mathématique. Cette branche de la science regroupe les travaux ayant pour finalité de décrire qualitativement et quantitativement l'évolution des systèmes chimiques et les différents processus apparaissant dans les réactions chimiques. Son domaine d'application s'étend à toute la matière et peut concerner des échelles caractéristiques très différentes. Par exemple le système chimique constitué par les espèces intersidéraux est constitué d'un équilibre entre molécules et atomes d'Hydrogène. Les concentrations en jeu sont faibles et, en conséquence, les vitesses caractéristiques de réaction sont lentes, de l'ordre de milliers d'années. A l'opposé, les recombinaisons de radicaux dans les neutralisations acide-base peuvent avoir des vitesses caractéristiques de l'ordre de 10^{-10} secondes. La cinétique chi-

mique a des applications dans toute cette gamme d'échelle, certaines d'actualité comme la prédiction des phénomènes apparaissant lors de la rentrée d'un satellite ou d'une navette dans l'atmosphère terrestre. Ici, l'aspect quantitatif et prédictif des modèles de cinétiques chimique est essentiel.

Une des finalités de la cinétique chimique est qualitative : Il s'agit par exemple de décrire les modes d'activation d'une réaction chimique dont on sait qu'il faut bien sûr des conditions adéquates pour son déclenchement.

Un autre objet de la cinétique chimique qualitative est d'étudier les différentes espèces chimiques qui peuvent apparaître dans les réactions. On distingue quatre grands types de formes actives : les molécules activées, les radicaux, les ions, les complexes (associations d'espèces chimiques).

Notons que dans un assemblage de particules, comme c'est le cas pour les cellules, bactéries, produits chimiques etc, chaque particule se meut de manière aléatoire. Lorsque ce mouvement microscopique irrégulier conduit à un mouvement macroscopique régulier, on parle d'un processus de diffusion. Bien sûr, il se peut qu'il ait une interaction entre les particules par exemple ou qu'il existe des effets causés par le milieu, et dans ce cas, le mouvement n'est plus une diffusion simple.

Nous nous intéressons surtout dans le premier chapitre à la cinétique chimique quantitative ou formelle. La quantité-clef est celle de la vitesse de réaction. Connaissant la nature des constituants, il s'agit de préciser l'influence quantitative de tous les facteurs mesurables sur les vitesses de réaction. Ces facteurs sont, par exemple : la concentration des constituants, des produits, des réactifs, les catalyseurs, la température, la pression, ect...(voir [62],[63]).

Nous avons trouvé judicieux d'expliquer au premier lieux la modélisation des réactions chimiques. Ceci conduit à des systèmes de réaction-diffusion de type

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - D\Delta u = f(v) & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ (1 - \lambda_i) v_i + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu} = \alpha_i & \text{pour } 1 \leq i \leq m \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{dans } x \in \Omega \end{cases}$$

Pour l'existence globale, les premiers résultat dans le cas des systèmes 2×2 ($m = 2$) ont été obtenus par Alikakos [61] et Mascuda [56], ensuite par Hollis-Martin-Pierre [53]. Ces derniers ont introduit une nouvelle méthode permettant de traiter une très large classe de systèmes à structure triangulaire. Une autre approche du problème a été introduite par Pierre [59], elle permet de traiter des systèmes triangulaires dont les termes non-linéaires admettent des croissances suelconques. Cette méthode, dite "méthode L^1 ", ne fournit cependant que des solutions faibles. Une autre approche récente a été développée par [43] qui permet d'obtenir l'existence globale des solutions faibles en utilisant une technique de trancature.

Nous avons choisi dans le premier chapitre d'adopter la technique développée par Morgan dans son travail [58]. Le résultat que nous obtenons ici améliore ce dernier dans le sens où les conditions au bord que nous traçons sont plus générales. En supposant que la positivité des solutions est préservée au cours du temps, le contrôle de masse ou loi de balance, et sous de bonnes conditions au bord, nous obtenons une estimation dans L^∞ puis dans L^p , $\forall 1 \leq p \leq \infty$, des solutions. C'est en moyenant ces deux résultats fondamentaux que nous démontrons l'existence globale.

La dernière partie du premier chapitre concerne la simulation numérique des systèmes de

réaction-diffusion obtenus dans la partie modélisation et ceci par la méthode des éléments-finis. Nous exposons la méthode générale des éléments finis pour résoudre les problèmes d'évolution, nous présentons aussi la formulation variationnelle du problème continu et celle du problème approché [68]. Un code numérique a été réalisé en langage Matlab [66] qui permet la prise en compte des diverses non linéarités et les résultats numériques sont donnés sous forme graphique.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à l'étude des infections virales avec diffusion, spécialement, la maladie d'hépatite B.

L'hépatite virale constitue un problème de santé publique international, comparable à celui posé par d'autres grandes maladies transmissibles comme le VIH, la tuberculose ou le paludisme. Malgré la lourde charge qu'elle fait peser sur les populations dans toutes les régions du monde, l'hépatite n'était pas vraiment considérée comme une priorité pour la santé et le développement jusqu'à une date récente. Elle ne sera plus négligée désormais avec l'adoption de la résolution sur le Programme de développement durable à l'horizon 2030. En particulier, l'objectif appelle expressément à prendre des mesures pour combattre l'hépatite virale.

L'hépatite B est une infection virale qui attaque les cellules du foie appelées hépatocytes. Il peut provoquer une infection aiguë ou chronique et expose les personnes à un risque élevé de décès par cirrhose et cancer du foie. L'infection par le virus de l'hépatite B (VHB) est désormais un problème de santé mondial majeur.

Dans ces dernières années, la modélisation mathématique a utilisé des équations aux dérivées partielles (EDP) pour comprendre la dynamique de l'infection par le VHB. De nombreux

auteurs ont utilisé des équations de réaction-diffusion virologique. Wang et Wang [20] a proposé un modèle mathématique pour simuler une infection par le VHB avec dépendance spatiale. Ils ont introduit la mobilité aléatoire des virus dans le modèle de base proposé par Nowak et al. [21] et ils supposent que le mouvement du virus suit une diffusion fickienne. Dans [20], les auteurs ont supposé que le taux d'infection était bilinéaire et ont ignoré l'absorption du virus par les cellules infectées.

L'OMS estime à deux milliards le nombre de personnes infectées par le virus de l'hépatite B (VHB), environ 350 à 400 millions de porteurs chroniques, et à près d'un million le nombre de décès par an. A l'heure actuelle, on identifie huit génotypes classés de A à H de répartition géographique distincte.

Le VHB est présent à une concentration élevée dans le sang des sujets ayant une hépatite B aiguë ou chronique (10^8 à 10^9 virions/mL dans le sang et ses dérivés, le sérum et les plaies). Il est également présent dans les sécrétions génitales, dans le sperme (10^7 virions/mL) et à concentration plus faible dans la salive, le lait, les urines et les larmes.

De ce qui précède apparait le besoin des études de la propagation et de l'évolution de ces maladies infectieuses pour pouvoir décider d'une politique de santé publique capable d'arrêter ce massacre. La modélisation mathématique a mis au point de bons résultats pour les décideurs dans ce domaine.

L'épidémiologie a une longue histoire, mais ce n'est que récemment que les mathématiciens et les immunologistes ont commencé à collaborer pour créer des modèles susceptibles de prédire l'évolution d'une maladie. L'épidémiologie classique utilise des variables pour décrire l'état d'individus dans une population qui a été exposée à une pathologie (science qui

a pour objet l'étude des maladies, notamment leurs causes et leurs mécanismes) infectieuse. Les paramètres incorporés représentent des facteurs de base, comme le taux de transmission de l'agent infectieux, le taux de mortalité, et autres données. Dans une population, il y a des individus susceptibles non infectés, des individus infectés, des individus immunisés, vaccinés, ... etc.

L'épidémiologie est l'étude des facteurs influant sur la santé et les maladies de populations. Elle consiste en l'étude des rapports existant entre les maladies et divers facteurs (mode de vie, milieu ambiant ou social, particularités individuelles) susceptibles d'exercer une influence sur leur fréquence, leur distribution et leur évolution.

Autrement dit, l'épidémiologie est une discipline qui s'intéresse aux facteurs influençant la santé des populations et qui cherche à développer des moyens d'atténuer leur impact lorsque celui-ci est jugé négatif.

Les modèles mathématiques se sont progressivement affirmés comme outils d'aide à la décision pour les politiques publiques. En effet, ces modèles permettent de prévoir les conséquences pour la population d'actions aussi variées que la vaccination, la mise en quarantaine ou la distribution de tests de dépistage. Une approche fondatrice dans les années 1920 fut celle des modèles à compartiments, qui divisent la population en classes épidémiologiques telles que les individus susceptibles d'être infectés, ceux qui sont infectieux, et ceux qui ont acquis une immunité suite à la guérison.

Avec une connaissance approfondie, non seulement des mathématiques appliquées, mais aussi de la biologie, il est possible de construire des modèles très fiables, qui permettront de déterminer les meilleures précautions, ainsi que l'impact respectif des facteurs qui in-

fluencent cette maladie. Dans le cas des maladies infectieuses, l'épidémiologie cherche à identifier les agents pathogènes et à comprendre leur mode de propagation. Ainsi, les épidémiologistes cherchent à répondre à des questions telles que : quelles sont les populations à risque ? Par quels moyens et dans quelles circonstances la maladie est-elle transmise ? Quels sont les facteurs favorisant cette transmission ? Ces informations permettent une meilleure compréhension de la dynamique de la propagation, ce qui en retour permet d'orienter les moyens de prévention et d'intervention dans le meilleur intérêt de la santé publique.

Les fondements de l'approche de l'épidémiologie basée sur les modèles compartimentaux ont été établis par Ross, Hamer, Mckendrick et Kermack entre les années 1900 et 1935. Ross, qui est considéré comme le fondateur de la modélisation en épidémiologie, a eu le prix Nobel en 1902, pour avoir mis en évidence que les anophèles transmettent les parasites du malaria (paludisme). En 1911, Ross a publié un modèle en temps continu de la transmission du paludisme en se basant sur la notion d'action de masse.

En réalité pour chaque épidémie, il y a beaucoup de facteurs qui doivent être considérés mathématiquement dans la définition du modèle. Cela signifie que pour qu'une étude épidémiologique se rapproche de la réalité, on a besoin d'informations sur l'épidémie, et la nature de sa propagation.

L'objectif du deuxième chapitre est donc la modélisation, l'analyse et la simulation des maladies infectieuses modélisées par des systèmes d'équations de réaction-diffusion à trois compartiments : les susceptibles, les infectés et le virus avec une fonction d'incidence spécifique. Cette fonction d'incidence non linéaire comprend la fonction d'incidence bilinéaire, la fonction d'incidence de saturation, la réponse fonctionnelle de Beddington-DeAngelis, et

la réponse fonctionnelle de Crowley-Martin. Le modèle est régi par le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda - dT(x, t) - f(T(x, t), I(x, t), V(x, t))V(x, t), \\ \frac{\partial I}{\partial t} = f(T(x, t), I(x, t), V(x, t))V(x, t) - aI(x, t), \\ \frac{\partial V}{\partial t} = d_v \Delta V + kI(x, t) - i f(T, I, V)V - \mu V. \end{cases}$$

Les termes $T(x, t)$, $I(x, t)$ et $V(x, t)$ sont respectivement les densités de cellules susceptibles, infectées et de virus libre en position x et le temps t .

Afin de prouver que le modèle est biologiquement bien posé, nous établissons l'existence globale, la positivité, et la bornitude des solutions du problème avec des conditions initiales positives et des conditions aux limites de type Neumann.

La dynamique globale du modèle est complètement déterminée par le nombre de reproduction de base donné par R_0 .

Notre modèle a deux états stationnaires qui sont l'équilibre libre et l'équilibre endémique. Nous prouvons que l'équilibre libre est globalement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$, ce qui conduit à l'éradication de la maladie. Lorsque $R_0 > 1$, alors l'équilibre libre devient instable et un équilibre endémique unique existe et qui est globalement asymptotiquement stable, ce qui signifie que la maladie persiste. De nos résultats théoriques et numériques, nous concluons que la diffusion spatiale a un impacte sur le comportement de la stabilité des équilibres ainsi que sur le temps nécessaire pour l'atteindre dans le cas des conditions aux limites de Neumann avec des coefficients de diffusion constants.

La dernière partie du deuxième chapitre consiste à expliquer la simulation numérique pour les équations aux dérivées partielles décrivant l'infection par le VHB.

Notre choix ici a été pour l'application de la méthode des différences finies comme étant une

technique courante de recherches de solutions approchées d'EDP, qui consiste à résoudre un système de relation (schéma numérique), liant les valeurs des fonctions inconnues en un certain point suffisamment proches les uns les autres [34],[51],[52].

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés aux modèles bioéconomique de pêche. Plus précisément, il s'agit de la modélisation, l'analyse mathématique et informatique des modèles en dynamique de populations concernant la gestion de pêche.

Les premiers modèles bioéconomiques apparaissaient dans les années cinquante, étaient exclusivement des modèles d'équilibre exposant divers régimes permanents pour une pêche déterminée. Ces modèles s'écrivent généralement sous forme des problèmes d'optimisation avec une fonction objectif correspond à la rente halieutique à l'échelle de la pêche.

La littérature sur les modèles bioéconomiques appliqués à la gestion de pêcheries repose sur deux parties : une partie biologique exprimant la dynamique du stock soumis à la mortalité par pêche ; une partie économique expliquant le taux de mortalité par pêche à partir des moyens mis en œuvre par les pêcheurs (Effort de pêche).

Les modèles bioéconomiques d'exploitation des pêcheries ont été développés par les travaux de H. S. Gordon [6]-[8], mais des précurseurs comme J. Warming et F. I. Baranov avaient déjà énoncé les principes de "la théorie des pêches".

Une des limites des modèles bioéconomiques existants est que : "...Ces modèles se sont jusqu'ici essentiellement intéressés au cas d'une pêche simple, où un seul stock est exploité par un seul pêcheur, alors qu'en réalité de nombreuses pêcheries doivent être qualifiées de complexe, au sens où plusieurs stocks y sont exploités de façon simultanée ou séquentielle par un ou plusieurs pêcheur(s) pratiquant divers métiers" (J. Boncoeur et al.).

Le premier modèle mathématique s'intéressant à l'évolution d'une population animal a été proposé en 1202 par le mathématicien italien Fibonacci (suites récurrentes) [1]

$$f_n = f_{n-1} + f_{n+1}$$

Quelques siècles plus tard, Malhus (1798) et Verhulst (1838) ont construit les deux premiers modèles de croissance de population avec dépendance en temps

$$P_{n+1} = rP_n$$

où P_n représente le nombre d'individu à l'instant n , et r représente le taux de croissance [1].

Après la première guerre mondiale, Alfred Lokta (1925) et Vito Volterra (1926) ont proposé un modèle d'interaction proies-prédateurs pour expliciter la dynamique des populations de sardines et de requins en mer Adriatique; expliquer notamment pourquoi les quantités de sardines pêchées après l'interruption due à la guerre n'étaient plus aussi importantes que précédemment et pourquoi à la reprise de la pêche la proportion observée de requins avait augmenté [3]

$$x' = ax - bxy$$

$$y' = cxy - dy$$

où x et y représentent respectivement les proies et les prédateurs. Ce modèle joue encore aujourd'hui un rôle déterminant en dynamique des populations et est considéré comme un modèle conceptuel de base.

Dans notre travail, on s'est intéressé à la dynamique des pêcheries. Les idées de base liées au domaine de la dynamique des pêcheries est plus précisément le domaine de la récolte des

pêches multi-espèces ont été fournies par Clark et al. [4]. Clark a également examiné les effets de l'exploitation d'une espèce dans le modèle de Gause [5] de deux espèces concurrentes. Chaudhuri [6], [7] a étudié la récolte combinée de deux espèces concurrentes du point de vue de la récolte bio économique et a discuté l'optimisation dynamique des captures politiques. Chaudhuri et SahaRay [15] ont étudié les captures combinées d'une communauté en proie-prédateur avec une proie se cachant dans des refuges. Auger [9] a présenté un modèle dynamique stock-effort spécifique; le stock correspond à deux populations de poissons qui s'évaluent et se déplacent entre deux zones de pêche, sur lesquelles ils sont capturés par deux flottes différentes; l'effort représente le nombre de navires de pêche des deux flottes qui opèrent les deux zones de pêche; le modèle bio économique est un ensemble de quatre équations différentielles ordinaires représentant les stocks et les efforts de pêche dans les deux zones de pêche; la migration des poissons, ainsi que les déplacements des navires, entre les deux zones sont supposées avoir lieu à une échelle de temps plus rapide que la variation des stocks et les changements des tailles des flottes, respectivement; les mouvements de navires entre les deux zones, i.e. la plus grande densité du stock est dans la zone où la plupart des navires ont tendance à y rester. Mchich [10] dans son travail a présenté un modèle dynamique stock-effort de pêche subdivisé sur plusieurs zones de pêche; le stock correspond à une population de poissons se déplaçant entre des différentes zones, sur lesquelles ils sont capturés par les flottes de pêche. Auger [9] a donné un modèle mathématique de la pêche multi sites pélagiques artificiels. Le modèle est un modèle de dynamique stock-effort de pêche subdivisé en sites de pêche artificiels tels que des dispositifs de concentration de poissons (DCP) ou habitats artificiels (AHS). L'objectif de son travail est d'étudier les effets

du nombre de sites sur le stock globale de la pêche [11].

Dans ce travail, nous définissons un modèle bioéconomique de plusieurs pêcheurs qui exploitent plusieurs espèces marines. Le but principal de chaque pêcheur consiste à déterminer l'effort de pêche qu'il doit fournir pour maximiser son propre profit à l'équilibre biologique sous les contraintes de la conservation de la biodiversité des espèces marines [2]. Pour ainsi faire, nous devons répondre aux questions suivantes : est-ce que la fonction profit de chaque pêcheur admet un maximum ? Si c'est le cas, est-ce que ce maximum est unique ? Puis comment calculer ce maximum en fonction des paramètres bioéconomiques ?

Pour répondre à ces questions et réaliser un tel but, nous optons les démarches suivantes :

- Modéliser un problème bioéconomique de plusieurs espèces marines en compétition et qui sont exploitées par plusieurs pêcheurs qui cherchent tous à maximiser leurs propres profits en fonction des efforts de pêche déployés.
- Montrer qu'une telle modélisation débouche sur un problème d'équilibre de Nash généralisé et montrer que sous certaines conditions, ce dernier problème est complètement équivalent à un problème de complémentarité linéaire.
- Montrer l'existence et l'unicité de l'effort de pêche qui maximise le profit de chaque pêcheur à l'équilibre biologique et que ce maximum n'est autre que l'unique solution du problème Complémentarité linéaire obtenu.
- Calculer ce maximum en fonction des paramètres bio économiques en utilisant l'une des méthodes que nous avons développé.
- Simuler numériquement la manière dont le profit de chaque pêcheur évolue en fonction des paramètres bio économiques, et montrer qu'une augmentation du nombre de pêcheurs

entraîne une augmentation de l'effort de pêche total, mais entraîne une baisse des captures totales des pêcheurs, et par conséquent une baisse du profit total des pêcheurs ; puis donner une interprétation des résultats obtenus [2].

Ce travail se termine par une conclusion où nous mentionnons quelques problèmes restant ouverts.

Chapitre 2

Etude d'une classe de systèmes de Réaction-Diffusion résultant de la cinétique chimique.

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier une classe de systèmes de réaction-diffusion obtenus après modélisation de certaines réactions chimiques. La quantité clé de la modélisation ici est celle de la vitesse des réactions, en plus des lois fondamentales de la physique. Par application sur les trois réactions chimiques : Amoniac, Enzymatique et Brome, nous

obtenons des systèmes de réaction-diffusion de type

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - D\Delta u = f(v) & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ (1 - \lambda_i) v_i + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu} = \alpha_i & \text{pour } 1 \leq i \leq m \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{dans } x \in \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, de frontière régulière $\partial\Omega$, $v = (v_1, \dots, v_m)$, $T > 0$, D est la matrice de diffusion, f une application non linéaire, et pour tout i , $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\alpha_i \in C^2(\overline{\Omega})$.

Nous étudions ce système sous les deux propriétés caractéristiques suivantes :

$$\text{la positivité des solutions est préservée au cours du temps.} \quad (H_1)$$

$$\text{le contrôle de masse ou loi de balance.} \quad (H_2)$$

Nous avons montré la positivité et l'existence globale pour SRD (2.1) en améliorant la technique développée par Morgan dans son travail [58], dans le sens où les conditions au bord que nous traitons sont plus générales. En plus des hypothèses (H_1) - (H_2) , et sous de bonnes conditions au bord, nous obtenons une estimation dans L^∞ de $\sum_{i=1}^m h_i(v_i)$. Ceci permet d'obtenir une estimation dans L^p , $\forall 1 \leq p \leq \infty$, des $h_i(v_i)$.

Cette dernière hypothèse s'exprime par le fait que $\sum_{i=1}^{i=m} h_i(f_i) \leq 0$ (où les h_i sont des fonctions convexes positives) ou raisonnablement majorées.

La dernière partie de ce chapitre est réservée à la résolution numérique des systèmes de réaction-diffusion de type (2.1) que nous avons obtenus après modélisation. Il s'agit des systèmes paraboliques non linéaires. nous avons adopté la méthode des éléments finis pour l'approximation spatiale et celle de Newton-Raphson pour traiter la partie non linéaire.

2.2 Modélisation des Réactions Chimiques

L'objectif de cette section est de modéliser une classe de réactions chimiques. Nous commençons par rappeler les lois fondamentales de la physique (lois de conservations) et certaines lois de comportement. La quantité clé de la modélisation ici est celle de la vitesse des réactions, en plus des lois fondamentales de la physique. Nous obtenons alors des systèmes différentiels, et c'est en tenant compte de la dépendance des concentrations de la variable espace que nous obtenons des systèmes de réaction-diffusion.

2.2.1 Quelques principes généraux en modélisation des milieux continus

On désigne par milieu continu tout liquide, gaz ou solide déformable considéré d'un point de vue macroscopique. On peut l'assimiler à un système de particules dont l'évolution ou l'équilibre peut-être décrit à l'aide des lois universelles de la physique, à savoir : la loi de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de cette quantité de mouvement par rapport à un point et de l'énergie.

Toutes les équations de la physique et des sciences voisines sont obtenues d'une part à partir de ces lois fondamentales, d'autre part à partir des lois de comportements qui sont spécifiques du milieu considéré : elles ont généralement un caractère plus empirique et des domaines de validité plus ou moins limités. La dérivation de ces lois de comportement est une science difficile ; il est indispensable de s'appuyer sur les connaissances et l'expérience des experts du domaine d'application envisagé.

· Lois de conservation

Elles sont universelles, contrairement aux lois de comportement, et s'appliquent à tout système matériel, indépendamment de sa nature : liquide, gazeuse ou autre.

Rappelons qu'un milieu continu est intuitivement un "système de particules" en mouvement.

On le modélise à chaque instant par l'ensemble des points d'un ouvert $\Omega(t)$ de \mathbb{R}^3 : On imagine que chaque point est une particule qui se déplace et que l'ensemble des particules occupe le domaine $\Omega(t)$ à chaque instant. On suppose, de plus, l'existence d'une famille de bijections $S(s, t)_{s, t > 0}$ de $\Omega(s)$ dans $\Omega(t)$ dépendant régulièrement de $s, t > 0$ et permettant de suivre chacun des points du domaine initial dans sa trajectoire au cours du temps, soit

$$t \mapsto S(0, t)X_0 = x(X_0, t)$$

On associe à ce milieu les quantités suivantes :

$$\vec{V}(X_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} x(X_0, t)$$

où $\vec{V}(X_0, t)$ la vitesse Lagrangienne et $\vec{v}(X_0, t) = \vec{v}(x(X_0, t), t)$ la vitesse Eulérienne.

$\rho(x, t)$ = la densité du milieu à l'instant t , c'est-à-dire la masse par unité de volume dans $\Omega(t)$, ainsi la masse $m(w)$ de tout sous-ensemble mesurable w de $\Omega(t)$ est donnée par

$$m(w) = \int_w \rho(x, t) dx.$$

Afin de traduire mathématiquement les lois de conservation, nous utiliserons le lemme suivant qui permet d'exprimer la dérivée par rapport au temps d'une intégrale du type

$$K(t) = \int_{w(t)} k(x, t) dx$$

où $w(t) = S(0, t)(w_0)$ avec w_0 un sous-ensemble mesurable quelconque de $\Omega(0)$ et $k(., .)$ est une fonction définie sur $\Omega(t)$. Cette dérivée est parfois appelée dérivée particulière par référence au fait qu'on dérive selon les trajectoires des particules.

Sous les hypothèses de régularité, nous avons

$$K'(t) = \int_{w(t)} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \operatorname{div}(k \vec{v}) \right) dx$$

ou encore

$$K'(t) = \int_{w(t)} \frac{\partial k}{\partial t} + \int_{\partial w(t)} k \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

où \vec{n} est la normale extérieur unitaire à $\partial w(t)$.

Pour une démonstration et des précisions sur la régularité requise, voir par exemple [62].

Conservation de la masse Loi qui exprime l'invariance par rapport au temps t de la masse de tout sous-système matériel $w(t) = S(0, t)(w_0)$ que l'on suit au cours du temps, où w_0 est un sous-ensemble mesurable quelconque de $\Omega(0)$. Cette masse est donnée par

$$m(w) = \int_{w(t)} \rho(x, t) dx$$

on a donc

$$\frac{d}{dt} m(w(t)) = 0.$$

D'après le lemme appliqué à $k = \rho$, on a pour tout sous-ensemble w_0 de $\Omega(0)$

$$\int_{w(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dx = 0$$

et puisque w_0 et donc $w(t)$ sont arbitraires dans $\Omega(t)$, on en déduit l'équation de conservation de la masse, dite parfois équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Conservation de l'énergie (1^{ère} principe de la thermodynamique) Elle

s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{w(t)} \rho \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + e \right) dx = \int_{w(t)} (\rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \rho w) dx + \int_{\partial w(t)} (\vec{F} \cdot \vec{v} - \vec{q} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

où

- * ρw : les apports volumiques de quantités de chaleur par unité de temps,
- * \vec{q} : le vecteur-flux de chaleur,
- * $\rho \vec{f}$: la densité volumique des forces appliquées,
- * \vec{F} : la densité surfacique de force s'appliquant sur chaque éléments de surface.

Conservation de la quantité de mouvement et de son moment en O Ces

lois s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{w(t)} \rho \vec{v} dx \right) = \int_{w(t)} \rho \vec{f} dx + \int_{\partial w(t)} \vec{F} d\sigma$$

pour la quantité de mouvement et

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{w(t)} (\vec{OM} \wedge \rho \vec{v}) dx \right) = \int_{w(t)} (\vec{OM} \wedge \rho \vec{f}) dx + \int_{\partial w(t)} (\vec{OM} \wedge \vec{F}) d\sigma$$

pour le moment.

2^{ème} principe de la thermodynamique Il s'exprime par

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{w(t)} \rho s dx \right) \geq \int_{w(t)} \rho \frac{w}{T} - \int_{\partial w(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} d\sigma$$

où s est l'entropie et T la température absolue.

· Lois de comportement

Nous donnons ici deux exemple des lois de comportement :

Loi de diffusion de Fick Cette loi exprime qualitativement que les particules se déplacent vers les régions à plus faible densité. Quantitativement, ce mouvement est tel que le flux de diffusion ($\vec{J} = \rho \vec{v}$) à travers chaque surface soit proportionnel au gradient de densité; ce qui peut s'écrire

$$\vec{v} = -D \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right),$$

la loi de continuité devient alors

$$\rho_t - \operatorname{div} \left(D \vec{\nabla} \rho \right) = 0,$$

soit encore, en utilisant D est constante

$$\rho_t - D \Delta \rho = 0.$$

La densité ρ , dans ce cas, satisfait alors une loi linéaire de diffusion : C'est l'équation linéaire de la chaleur. Notons que pour les situations stationnaires, c'est-à-dire lorsque $\rho(x, t) = \rho(x)$, la densité satisfait à l'équation de Laplace $\Delta \rho = 0$.

Remarquons qu'il existe d'autres lois de diffusion comme par exemple, la loi de Darcy, qui s'applique à la diffusion de certains fluides dans les milieux poreux et qui, couplée avec d'autres lois de comportement, exprime que la vitesse \vec{v} est proportionnelle au gradient de densité, soit

$$\vec{v} = -D \vec{\nabla} \rho$$

ceci conduit à l'équation

$$\rho_t - \frac{D}{2} \Delta (\rho^2) = 0$$

qui est une équation de diffusion non linéaire pour la densité, connue sous le nom d'équation des milieux poreux.

Loi de Fourier pour la conduction de la chaleur On considère un milieu continu au repos, c'est-à-dire $\vec{v} = 0$. Dans ce cas, l'équation de conservation de la chaleur prend la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{w(t)} \rho e \right) = \int_{w(t)} \rho w - \int_{w(t)} \operatorname{div} \vec{q}. \quad (2.2)$$

L'équation de continuité elle aussi se simplifie pour exprimer que $\rho(x, t)$ est indépendante de t .

Ainsi, (2.2) donne

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \rho w - \operatorname{div} \vec{q}.$$

On ajoute les deux lois de comportement suivantes :

* $e = CT$: concernant l'énergie interne

* $\vec{q} = -k \vec{\nabla} T$, $k > 0$: la loi de Fourier qui est une loi analogue à la loi de fick, mais appliquée au flux de chaleur et non au flux de matière. On obtient ainsi

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T = 0$$

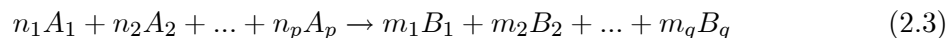
qui est la célèbre équation linéaire de la chaleur.

2.2.2 Modélisation de l'évolution des réactions

Vitesse d'une réaction, conservation de la matière

On convient de noter $[A]$ la concentration d'un constituant A dans un système donné, c'est-à-dire par définition, la quantité de ce constituant par unité de volume. On utilise généralement la mole par litre comme unité de concentration. Rappelons que la mole est l'unité standard du Système International (SI) pour la quantité de matière : elle correspond à la quantité de matière d'un constituant contenant autant de particules élémentaires qu'il y a d'atomes dans 12 grammes de carbone 12. Noter pour l'ordre de grandeur que cela correspond à environ 6×10^{23} particules.

Considérons de manière générale l'équation en équilibre suivante



où p, q sont des entiers ≥ 1 , ainsi que $n_i, i = 1, \dots, p, m_j, j = 1, \dots, q$. Cette équation d'équilibre contient en soi la conservation de la quantité de matière. Ainsi, en supposant le système clos, c'est-à-dire, sans aucun apport extérieur ni perte de matière, on obtient

$$v = \frac{1}{m_j} \frac{d[B_j]}{dt} = -\frac{1}{n_i} \frac{d[A_i]}{dt}, \quad i = 1 \dots p, j = 1 \dots q.$$

Le nombre ci dessus est appelé vitesse instantanée de la réaction (2.3). On appelle réactif les constituants A_i , et produits les constituants B_j .

En général, une réaction d'équilibre n'est pas seulement constitué d'une réaction élémentaire, mais de plusieurs réactions parallèles ou successives, par exemple du type suivant



ou encore



ou encore



Par simplicité, nous convenons de noter dans la suite, $a = [A], b = [B], etc...$ Dans ces équations, la loi de conservation de la matière s'exprime par

$$b'(t) = -a'(t) - c'(t)$$

c'est-à-dire

$$a(t) + b(t) + c(t) = cste \quad \text{pour (2.4)}$$

$$a'(t) + b'(t) = 0 \quad \text{pour (2.5)}$$

et

$$x'(t) = 2(-a'(t) - c'(t)); a'(t) = b'(t); c'(t) = d'(t) \quad \text{pour (2.6)}.$$

Quand aux vitesses de réactions, elles s'écrivent

$$v_1 = -a'(t); v_2 = c'(t) \quad \text{pour les réactions de l'équation (2.4)}$$

$$v = -a'(t) = b'(t) \quad \text{pour (2.5)}$$

et

$$v_1 = -a'(t) = -b'(t); v_2 = c'(t) = d'(t) \quad \text{pour (2.6)}.$$

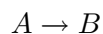
Il s'agit maintenant de décrire les lois de comportement de ces vitesses. Notons que dans les systèmes précédents, on a toujours moins d'équations que d'inconnues. Les lois de comportements vont permettre de "clôre" ces systèmes.

Lois de comportement

On va supposer que, dans les réactions dites "élémentaires", la vitesse de réaction est supposée proportionnelle au produit des concentrations des réactifs. Pour des réactions plus complexes, elle est généralement proportionnelle à des puissances de ces concentrations. Cependant, on verra que la vitesse peut aussi être une fonction homographe des concentrations, voire des combinaisons plus complexe de ces comportements. Ces lois sont déduites des connaissances approfondies des étapes intermédiaires de la réaction considérée.

Réactions élémentaires On va supposer que les réactions élémentaires satisfont à la loi d'action de masse.

◦ **Loi d'ordre un** On considère la réaction la plus simple



Si cette réaction est élémentaire, on considère qu'à température constante, la vitesse de réaction est proportionnelle à la concentration $[A]$, soit

$$a'(t) = -ka(t) = -b'(t)$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{da}{a} = -kdt.$$

Cette équation différentielle s'intègre immédiatement en

$$a(t) = a_0 e^{-kt}$$

où $a_0 = a(0)$ est la valeur initiale de a . Beaucoup de réactions suivent en fait cette loi, par exemple la décomposition radioactive de certains éléments chimiques. La constante k

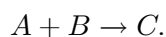
est appelée constante de vitesse. Sa valeur n'est pas toujours très bien connue ; on peut la déterminer à l'aide de mesures expérimentales.

◦ **Loi d'Arrhénius** La loi précédente correspond à une réaction se déroulant à température constante. On s'attend à ce que la valeur de cette constante varie avec la température. C'est l'objet de la loi d'Arrhénius qui s'écrit

$$k = A e^{\frac{-E_a}{RT}}$$

où T est la température absolue, R la constante des gaz parfaits ($= 8,314J/K$), E_a l'énergie d'activation et A une constante à préciser dans chaque cas.

◦ **Loi d'ordre deux** On considère la réaction supposée "élémentaire"



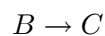
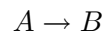
On considère qu'à température constante la vitesse de réaction est de la forme

$$c'(t) = ka(t)b(t).$$

On dit alors qu'il s'agit d'une loi d'ordre deux par rapport à l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a(t)}{a(t) - a_0 + b_0} = \frac{a_0}{b_0} e^{-k(b_0 - a_0)t}; \quad \text{si } b_0 \neq a_0 \\ a(t) = \frac{a_0}{1 + a_0 kt}; \quad \text{sinon.} \end{array} \right.$$

A partir de ces deux lois élémentaires, on peut écrire les lois de comportement des vitesses pour des réactions plus complexes, mais décomposables en réactions élémentaires du type ci-dessus.

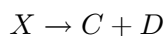
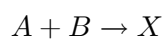
Exemple 1

le bilan matière s'écrit

$$b'(t) = -a'(t) - c'(t).$$

Pour la loi de comportement, on peut supposer que chaque réaction est élémentaire et d'ordre un, ce qui donne

$$\begin{cases} a' = -k_1 a \\ b' = k_1 a - k_2 b \\ c' = k_2 b. \end{cases} \quad (2.7)$$

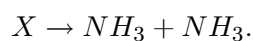
Exemple 2

le système d'équations s'écrit

$$\begin{cases} a' = -k_1 ab + k_{-1} x = b' \\ x' = k_1 ab - k_{-1} x - k_2 x \\ c' = k_2 x = d' \end{cases} \quad (2.8)$$

Nous allons appliquer ce qui précède sur certaines réactions chimiques.

o Pour la réaction de l'ammoniac : $N_2 + 3H_2 \rightarrow 2NH_3$, dont le mécanisme peut être expliqué par l'introduction d'un état intermédiaire X



Si on suppose élémentaires les deux réactions, le système d'équations s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [N_2] = -k_1 [N_2] [H_2]^3 + k_{-1} [X] = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} [H_2] \\ \frac{d}{dt} [X] = k_1 [N_2] [H_2]^3 - k_{-1} [X] - k_2 [X] \\ \frac{d}{dt} [NH_3] = 2k_2 [X] \end{cases} \quad (2.10)$$

○ Concernant l'exemple important de la catalyse enzymatique qui s'écrit :



où les molécules de substrat S réagissent avec l'enzyme E pour donner un produit P via la formation d'un complexe intermédiaire ES . On obtient alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [E] = -k_1 [E] [S] + k_{-1} [ES] + k_2 [ES] \\ \frac{d}{dt} [S] = -k_1 [E] [S]^3 + k_{-1} [ES] \\ \frac{d}{dt} [ES] = k_1 [E] [S] - k_{-1} [ES] - k_2 [ES] \\ \frac{d}{dt} [P] = k_2 [ES] \end{cases} \quad (2.12)$$

Formation de complexe intermédiaire et principe des états stationnaires

Nous venons de donner quelques exemples d'équations apparemment simples mais dont la compréhension du vrai mécanisme nécessite l'introduction d'une succession d'équations intermédiaires et aussi de composants intermédiaires. Souvent, ceux-ci sont très réactifs et ne sont pas vraiment détectables dans le mélange. Leur concentration reste en tous cas négligeable devant celle des vrais réactifs ou produits. C'est le principe dit des états stationnaires (P.E.S) que nous expliquerons sur l'exemple 2.

On y considère donc que le complexe intermédiaire X est très réactif et qu'il arrive très vite à l'équilibre. le P.E.S consiste à considérer brutalement que $x'(t) = 0$ dans le système (2.8),

ce qui donne

$$k_1 ab = (k_{-1} + k_2) x$$

soit

$$x = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} ab$$

ainsi, le système devient

$$\left\{ \begin{array}{l} a' = -\frac{k_1}{k_{-1} + k_2} ab \\ b = a + b_0 - a_0 \\ c' = \frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} ab = d'. \end{array} \right.$$

Ainsi, on peut considérer qu'en fait, la réaction $A + B \rightarrow C + D$ est d'ordre 2. Par ailleurs, on peut intégrer directement les deux premières équations pour obtenir a, b , puis en déduire c, d .

On applique le P.E.S à l'exemple (2.9) en considérant que le complexe intermédiaire X est très réactif, soit $\frac{d}{dt} [X] = 0$, d'où

$$[X] = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3$$

et donc

$$\frac{d}{dt} [N_2] = -k_1 [N_2] [H_2]^3 + \frac{k_{-1} k_1}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3$$

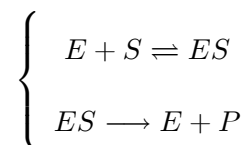
d'où

$$\frac{d}{dt} [N_2] = \frac{-k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 = \frac{d}{dt} [H_2]$$

d'autre part

$$\frac{d}{dt} [NH_3] = \frac{2k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3.$$

Considérons de manière analogue la réaction de l'exemple 4



en supposant que $\frac{d}{dt} [ES] = 0$, on obtient

$$k_1 [E] [S] = (k_2 + k_{-1}) [ES]$$

et donc

$$\frac{d}{dt} [P] = k_2 [ES] = \frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [E] [S].$$

En utilisant le fait que $[E] + [ES] = [E]_0$, on a alors

$$[E]_0 = [E] \left(\frac{k_{-1} + k_2 + k_1 [S]}{k_{-1} + k_2} \right)$$

ainsi

$$\frac{d}{dt} [P] = \frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2 + k_1 [S]} [E]_0 [S]$$

en posant $K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$, appelée constante de Michaelis, on obtient

$$\frac{d}{dt} [P] = \frac{k_2}{K_M + [S]} [E]_0 [S].$$

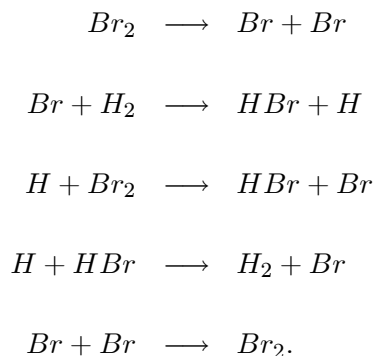
Il a été proposé en 1906 pour la vitesse de réaction de l'Hydrogène et du Brome



la loi empirique suivante

$$\frac{d}{dt} [HBr] = \frac{2L [H_2] [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m [HBr] / [Br_2]}.$$

Cette loi établie empiriquement a finalement obtenue une explication par le mécanisme de réactions en chaîne (voir [63])



En effet, le système d'équations obtenues est le suivant

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{d}{dt} [Br_2] &= -k_1 [Br_2] - k_3 [H] [Br_2] + k_5 [Br]^2 \\
 \frac{d}{dt} [Br] &= 2k_1 [Br_2] - k_2 [Br] [H_2] + k_3 [H] [Br_2] + k_4 [H] [HBr] - 2k_5 [Br]^2 \\
 \frac{d}{dt} [H_2] &= -k_2 [Br] [H_2] + k_4 [H] [HBr] \\
 \frac{d}{dt} [H] &= k_2 [Br] [H_2] - k_3 [H] [Br_2] - k_4 [H] [HBr] \\
 \frac{d}{dt} [HBr] &= k_2 [Br] [H_2] - k_4 [H] [HBr] + k_3 [H] [Br_2]
 \end{aligned} \right.$$

En appliquant le P.E.S, il vient que

$$[H] = \frac{k_2 [Br] [H_2]}{k_3 [Br_2] + k_4 [HBr]} \text{ et } [Br]^2 = \frac{k_1}{k_5} [Br_2]$$

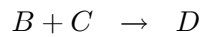
ainsi

$$\frac{d}{dt} [HBr] = \frac{2L [H_2] [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m [HBr] / [Br_2]}$$

$$\text{où } L = k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_5}} \text{ et } m = \frac{k_4}{k_3}.$$

Système de Réaction-Diffusion

Nous nous plaçons maintenant dans une situation plus réaliste où les réactions ont lieu dans un ambiant où les concentrations dépendent aussi de la variable d'espace. Prenons par exemple la réaction suivante



en supposant que chacune des réactions est élémentaire et suit une loi d'ordre 2, nous aurions

$$\left\{ \begin{array}{l} a' = -k_1 ab \\ b' = -k_1 ab - k_2 bc \\ c' = k_1 ab - k_2 bc \\ d' = k_2 bc \end{array} \right.$$

et la conservation de la matière s'exprime par

$$c' = -a' - d, \quad b' = a' - d'$$

Pour tenir compte de la dépendance des concentrations de la variable d'espace x , nous pouvons assimiler chaque constituant à un milieu continu animé d'une vitesse eulérienne $\vec{v}(x, t)$.

La quantité du constituant A contenu dans le volume $w(t)$ est donnée par

$$m_a(w(t)) = \int_{w(t)} a(x, t) dx$$

et de même pour les autres constituants. D'après les résultats déjà obtenus, on a

$$\frac{d}{dt} m_a(w(t)) = \int_{w(t)} \frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(a(x, t) \vec{v}) dx$$

ainsi, la variation instantanée de quantité de matière est donnée par

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div} (a(x, t) \vec{v}).$$

Supposer que la vitesse des réactions ci-dessus suit une loi d'ordre 2 consiste à écrire que cette variation instantanée est proportionnelle au produit des concentrations de A et B .

Ainsi, la première équation devient

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div} (a(x, t) \vec{v}) = -k_1 ab$$

et les lois de conservation de matière deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_c(w(t)) &= -\frac{d}{dt} m_a(w(t)) - \frac{d}{dt} m_d(w(t)) \\ \frac{d}{dt} m_b(w(t)) &= -\frac{d}{dt} m_a(w(t)) - \frac{d}{dt} m_d(w(t)). \end{aligned}$$

Pour compléter le système, il faut ajouter une loi de comportement pour la vitesse des particules ou le flux de matière de chaque constituant. La loi la plus simple et de domaine de validité relativement large pour ce type d'application est la loi de Fick, soit

$$a \vec{v} = -d_a \nabla \vec{a}$$

où d_a est la constante de diffusivité du constituant A . On introduit la même loi pour les autres constituants avec pour chacun sa propre constante de diffusivité d_b, d_c, d_d . On obtient comme modèle le système suivant d'équations aux dérivées partielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial t} - d_a \Delta a = -k_1 ab \\ \frac{\partial b}{\partial t} - d_b \Delta b = -k_1 ab - k_2 bc \\ \frac{\partial c}{\partial t} - d_c \Delta c = -k_1 ab - k_2 bc \\ \frac{\partial d}{\partial t} - d_d \Delta d = k_2 bc. \end{array} \right.$$

Ici, il s'agit d'un système de réaction-diffusion, terminologie qui fait référence aux deux phénomènes apparaissant dans l'équation diffusion de chaque constituant avec sa propre vitesse de diffusion (régie par la constante de diffusivité) et interaction non linéaire entre les différents constiuants.

La variable x varie dans un domaine \mathbb{R}^3 . On peut supposer ici que ce domaine est indépendant du temps si la réaction a lieu dans un milieu "fixe" ; on le note Ω .

Pour "fermer" le système, il est indispensable d'ajouter des conditions au bord de Ω qui doivent traduire les éventuels échanges de matière avec le milieu extérieur. Par exemple :

1. Si la réaction se produit dans un milieu isolé, on écrit que le flux de matière à la frontière est nul, soit $a \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, ou selon la loi de Fick, $\vec{\nabla} a \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, ce qui peut encore s'écrire $\frac{\partial}{\partial n} a(x, t) = 0$ pour $x \in \partial\Omega, t > 0$.

2. Si le flux de matière, à travers la frontière est une fonction affine de la concentration, on aura dans ce cas

$$\lambda \vec{\nabla} a \cdot \vec{n} = -(1 - \lambda) a + \alpha \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty)$$

ou encore

$$\lambda \frac{\partial a}{\partial n} + (1 - \lambda) a = \alpha \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty)$$

où $\lambda \in [0, 1]$.

Ainsi, en appliquant ces résultats aux exemples précédents, nous obtenons :

* pour la réaction de l'amoniac (2.9), le système de réaction-diffusion associé est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [N_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [N_2] = -\frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [H_2] = -\frac{3k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [NH_3]}{\partial t} - d_3 \Delta [NH_3] = \frac{2k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [N_2]}{\partial v} = \frac{\partial [H_2]}{\partial v} = \frac{\partial [NH_3]}{\partial v} = 0 \quad \text{pour } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty) \\ [N_2](x, 0) = n_0, [H_2](x, 0) = h_0, [NH_3](x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

* pour la réaction enzymatique (2.11), nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [E]}{\partial t} - d_1 \Delta [E] = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [S]}{\partial t} - d_2 \Delta [S] = -\frac{k_2}{k_M + [S]} [E]_0 [S] \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [P]}{\partial t} - d_3 \Delta [P] = \frac{k_2}{k_M + [S]} [E]_0 [S] \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [E]}{\partial v} = \frac{\partial [S]}{\partial v} = \frac{\partial [P]}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty) \\ [E](x, 0) = E_0, [S](x, 0) = S_0, [P](x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right. \quad (2.15)$$

* quand à la réaction de l'Hydrogène et du Brome(2.13), elle entraîne le système de réaction-diffusion suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [Br_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [Br_2] = \frac{-L [H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m [H Br] / [Br_2]} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [H_2] = -\frac{-L [H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m [H Br] / [Br_2]} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [H Br]}{\partial t} - d_3 \Delta [H Br] = \frac{2L [H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m [H Br] / [Br_2]} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [Br_2]}{\partial v} = \frac{\partial [H_2]}{\partial v} = \frac{\partial [H Br]}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty) \\ [Br_2](x, 0) = n_0, [H_2](x, 0) = h_0, [H Br](x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right. \quad (2.16)$$

2.3 Etude mathématique pour les systèmes de réaction-diffusion

Cette section a pour objectif d'étudier les systèmes de réaction-diffusion obtenus après modélisation (Voir section 2). Nous arrivons à montrer la positivité et l'existence globale de la solution et ceci sous de bonnes conditions au bord.

2.3.1 Notations et position du problème

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , de frontière régulière $\partial\Omega$. Nous considérons le système d'équation de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - D\Delta v(x, t) = f(v(x, t)) & x \in \Omega, t > 0 \\ (1 - \lambda_i) v_i + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu} = \alpha_i \text{ pour } 1 \leq i \leq m & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.17)$$

où :

* $v = (v_1, \dots, v_m)$, $v_i : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq m$,

* $\frac{\partial v}{\partial t}$ désigne le dérivée par rapport au temps de v ,

* Δ désigne l'opérateur Laplacien : $\Delta v_i(x, t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}(x, t)$ pour $1 \leq i \leq m$,

* D matrice diagonale carrée d'ordre m dont les coefficients d_i sont strictements positif,

* f fonction mesurable de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n et localement lipschitzienne

$$|f(p) - f(\hat{p})| \leq K(r) |p - \hat{p}|, \forall p, \hat{p} \in \mathbb{R}^m \text{ avec } |p|, |\hat{p}| \leq r \quad (2.18)$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^m

* la condition initiale est définie par

$$v_0 = (v_{0i})_{1 \leq i \leq m} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})^m \quad (2.19)$$

* $\frac{\partial v_i}{\partial \nu} = \nabla v_i \cdot \vec{n} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j$ désigne la dérivée normale de v_i , $\vec{n} = (n_j)_{1 \leq j \leq m}$, est le vecteur extérieur à $\partial\Omega$

* pour tout $1 \leq i \leq m$, λ_i et α_i vérifient

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, \alpha_i \in C^2(\bar{\Omega}) \quad (2.20)$$

La définition suivante précise ce que nous désignons par une solution au sens classique.

Définition 3 *Par solution classique, nous entendons une solution v appartenant à $C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max}))^m$ et vérifiant (2.17) au sens usuel.*

2.3.2 Positivité de la solution

Nous énonçons maintenant les hypothèses assurant que la positivité de la solution du système (2.17) est préservée au cours du temps. Nous supposons donc que :

* la condition initiale est positive, c'est-à-dire

$$v_{0i}(x) \geq 0, \forall 1 \leq i \leq m, \text{ et pour tout } x \text{ dans } \bar{\Omega} \quad (2.21)$$

* f est quasi-positive, c'est-à-dire

$$\forall p_1, \dots, p_m \geq 0, \text{ si } \hat{p}_i = (p_1, \dots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \dots, p_m), \text{ alors } f(\hat{p}_i) \geq 0 \quad (2.22)$$

* pour tout $1 \leq i \leq m$

$$\alpha_i \geq 0 \quad (2.23)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème concernant la positivité de la solution du système de réaction-diffusion (2.17).

Théorème 4 *Sous les hypothèses (2.18)-(2.23), la positivité de la solution classique v de (2.17) est préservée au cours du temps, c'est-à-dire $v(x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T_{\max}[$.*

Preuve 5 *Nous définissons \widehat{f} sur \mathbb{R}^m par*

$$\widehat{f}(v) = \widehat{f}(v_1, \dots, v_m) = \begin{cases} f(v_1, \dots, v_m) \geq 0, & \text{si } v_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq m \\ f(v_1, \dots, v_{i_0-1}, 0, v_{i_0+1}, \dots, v_m), & \text{si } v_{i_0} \leq 0 \end{cases}$$

Nous considérons alors le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial t}(x, t) = D\Delta \widehat{v}(x, t) + \widehat{f}(\widehat{v}(x, t)) & x \in \Omega, t > 0 \\ (1 - \lambda_i) \widehat{v}_i + \lambda_i \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial \nu} = \alpha_i \text{ pour } 1 \leq i \leq m & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \widehat{v}(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.24)$$

Notre objectif est de montrer que \widehat{v} reste positive au cours du temps, ce qui termine la démonstration . En effet, dans ce cas, \widehat{f} coïncide avec f , et par conséquent \widehat{v} serait une solution positive de (2.17)

Nous introduisons, pour cela , la fonction sign^- définie par

$$\text{sign}^- r = \begin{cases} -1, & \text{si } r < 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme sign^- est croissante, nous pouvons considérer la fonction j_ϵ , convexe, deux fois dérivable, et telle que

$$j'_\epsilon \longrightarrow \text{sign}^- r \text{ quand } \epsilon \longrightarrow 0.$$

Pour tout $1 \leq i \leq m$, nous multiplions la $i^{\text{ème}}$ équation de (2.24) par $j'_\epsilon(\widehat{v}_i)$, nous avons alors après intégration sur Ω

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial t} j'_\epsilon(\widehat{v}_i) = d_i \int_{\Omega} (\Delta \widehat{v}_i) j'_\epsilon(\widehat{v}_i) + \int_{\Omega} \widehat{f}_i(\widehat{v}) j'_\epsilon(\widehat{v}_i). \quad (2.25)$$

Nous notons I_1 et I_2 les intégrales du membre de droite de (2.25). Nous obtenons, en utilisant la formule de Green

$$I_1 = d_i \int_{\Omega} \nabla \widehat{v}_i \nabla (j'_\epsilon(\widehat{v}_i)) dx + d_i \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial \nu} j'_\epsilon(\widehat{v}_i) d\sigma.$$

utilisant le fait que j_ϵ est convexe, nous aurons

$$-d_i \int_{\Omega} \nabla \widehat{v}_i \nabla (j'_\epsilon(\widehat{v}_i)) dx = -d_i \int_{\Omega} j''_\epsilon(\widehat{v}_i) |\nabla \widehat{v}_i|^2 dx \leq 0$$

Pour le terme sur le bord, nous avons deux cas à étudier :

1^{er} cas : si $0 \leq \lambda_i \leq 1$, nous avons d'après (2.17)

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial \nu} j'_\epsilon(\widehat{v}_i) d\sigma = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} \widehat{v}_i \right) j'_\epsilon(\widehat{v}_i) d\sigma$$

par passage à la limite, et en utilisant le théorème de Lebesgue, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial \nu} j'_\epsilon(\widehat{v}_i) d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} \widehat{v}_i \right) \text{sign}^-(\widehat{v}_i) d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega \cap [\widehat{v}_i \geq 0]} \left(\frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} \widehat{v}_i \right) \text{sign}^-(\widehat{v}_i) d\sigma + \int_{\partial\Omega \cap [\widehat{v}_i < 0]} \left(\frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} \widehat{v}_i \right) \text{sign}^-(\widehat{v}_i) d\sigma \end{aligned}$$

utilisant la définition de sign^- , (2.20) et (2.23), il vient que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial \nu} j'_\epsilon(\widehat{v}_i) d\sigma \leq 0.$$

2^{ème} cas : si $\lambda_i = 0$, dans ce cas $\widehat{v}_i = \alpha_i \geq 0$ sur $\partial\Omega$ et donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} j'_\epsilon(\widehat{v}_i) = \text{sign}^-(\alpha_i) = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

par suite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial \nu} j'_\epsilon(\widehat{v}_i) d\sigma = 0$$

ainsi, dans les deux cas

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial \nu} j'_\epsilon(\widehat{v}_i) d\sigma \leq 0.$$

et donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_1 \leq 0$$

Traitons maintenant I_2 , nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{[\widehat{v}_i \geq 0]} \widehat{f}_i(\widehat{v}) j'_\epsilon(\widehat{v}_i) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{[\widehat{v}_i < 0]} \widehat{f}_i(\widehat{v}) j'_\epsilon(\widehat{v}_i) \\ &= - \int_{[\widehat{v}_i < 0]} \widehat{f}_i(\widehat{v}) \\ &\quad - \int_{[\widehat{v}_i < 0]} f_i(\dots, \widehat{v}_{i-1}, 0, \widehat{v}_{i+1}, \dots) \end{aligned}$$

utilisant (2.22), nous trouvons

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2 \leq 0.$$

Ainsi, par passage à la limite dans (2.25), nous avons

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial t} \right) j'_\epsilon(\widehat{v}_i) dx \right) ds \leq 0$$

ce qui implique que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (j_\epsilon(\widehat{v}_i)) dx ds \leq 0$$

par conséquent

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} j_\epsilon(\widehat{v}_i)(t) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} j_\epsilon(\widehat{v}_i(0)) dx$$

d'après (2.21), nous avons

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} j_\epsilon(\widehat{v}_i)(t) \leq 0$$

ainsi

$$\int_{\Omega} \widehat{v}_i^-(t) dx \leq 0$$

d'où $\widehat{v}_i^- = 0$ et donc $\widehat{v}_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, m$.

Remarque 6 La preuve donnée ici marche aussi si nous avons considéré une notion de solution plus générale, à savoir les solutions dites faibles : $v \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L(0, T; H_0^1(\Omega))^m$, pour plus de détails, voir [43].

2.3.3 Existence locale et unicité

Nous énonçons ici des conditions suffisantes assurant l'existence locale et l'unicité de la solution classique de (2.17). Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème 7 (Hollis-Martin-Pierre) Sous les hypothèses (2.18) et (2.20), le système (2.17) admet une unique solution locale et classique v sur $[0, T_{max}[$, telle que pour chaque $1 \leq i \leq m$, il existe $N_i : [0, T_{max}[\rightarrow [0, \infty[$ continue avec

$$0 \leq v_i(t, x) \leq N_i(t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T_{max}[\quad (2.26)$$

De plus, le temps maximal d'existence T_{max} est caractérisé par

$$\text{si } T_{max} < \infty, \text{ alors } \lim_{t \rightarrow T_{max}} \sum_{i=1}^m \|v_i(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty \quad (2.27)$$

voir [53] pour une démonstration de ce résultat.

Remarque 8 Pour étudier l'existence globale de la solution du système (2.17), c'est-à-dire déterminer si $T_{max} = +\infty$, nous utilisons la contraposée de la caractérisation (2.27) du temps maximal de l'existence

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{s'il existe une fonction } N : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \text{ telle que pour} \\ \text{tout } t \in [0, T_{max}[: \sum_{i=1}^m \|v_i(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq N(t), \text{ alors } T_{max} = +\infty. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Par conséquent, pour montrer l'existence globale des solutions classiques, il suffit de montrer que celles-ci restent uniformément bornées sur leur temps d'existence.

Remarque 9 Notons que sous les hypothèses (2.21) et (2.22), et si on a une hypothèse de " contrôle de masse " sur f (condition de Lyapunov) : $\exists H : \mathbb{R}^m \longrightarrow (0, \infty)$ régulière satisfaisant :

$$i) |H(z)| \longrightarrow \infty \text{ quand } |z| \longrightarrow \infty$$

$$ii) \exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \langle \nabla H(z), f(z) \rangle \leq MH(z) \forall z \in \mathbb{R}^m$$

alors, l'existence globale pour le système différentiel ordinaire associé est assurée, soit

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y); t > 0 \\ y(0) = v_0; t = 0. \end{cases}$$

Rappelons que l'existence globale pour une équation différentielle ordinaire implique toujours l'existence globale pour l'équation de réaction-diffusion associé (c'est une application du principe de maximum), mais ce résultat est en général faux pour les systèmes. Pour s'en convaincre, nous proposons le contre-exemple suivant.

Soit le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + 2aN & x \in \Omega, t > -1 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + 2a(N-t)^+ v^2 - 8|1-u|v^3 & x \in \Omega, t > -1 \\ u = 0, v = (1+t^2)^{-1} & x \in \Omega, t > -1 \end{cases} \quad (2.29)$$

où Ω est la boule unité de \mathbb{R}^N et r^+ est définie par

$$r^+ = \begin{cases} r, & \text{si } r \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système différentiel ordinaire associé est

$$\begin{cases} y_1' = 2aN & t \geq 0 \\ y_2' = 2(N-t)^+ y_2^2 - 8|1-y_1| y_2^3 & t \geq 0 \\ y_1(-1) = \xi_1, y_2(-1) = \xi_2 \end{cases} \quad (2.30)$$

si $a > \frac{(N+1)^2}{4N}$, la solution de (2.30) existe dans $[-1, \infty)$, $\forall \xi_1, \xi_2 \geq 0$. De plus

$$u(r, t) = 1 - r^2, v(r, t) = (t^2 + r^2)^{-1}$$

est une solution positive de (2.29) dans $\bar{\Omega} \times [-1, \infty)$ qui explose dans $L^\infty(\Omega)$ quand $t \rightarrow 0$, voir [64].

Remarque 10 *Nous présentons ici un contre-exemple qui reflète l'importance de la condition $d_i > 0$, pour $1 \leq i \leq m$.*

Nous considérons pour cela le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = -uv^\beta & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = uv^\beta & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u = u_0, v = v_0 & x \in \Omega, t = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Nous pouvons montrer que si $d_2 = 0, d_1 > 0$ et $\beta > 1$, alors il n'existe pas d'estimations dans L^∞ de la solution de (2.31) en terme de $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ et $\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ pour t large. Plus précisément, si pour $a, b > 0$ et u_0, v_0 tels que

$$0 \leq u_0 \leq a, 0 \leq v_0 \leq b$$

il existe une solution de (2.31) dans $[0, T]$ telle que pour tout $t \in [0, T]$

$$\|v(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(T, a, b)$$

alors

$$T \leq \left[(\beta - 1) b^{\beta-1} a \right]^{-1}.$$

Pour plus de détails voir[53].

2.3.4 Existence globale

Nous allons maintenant aborder le problème de l'existence globale de la solution $v = (v_i)_{1 \leq i \leq m}$ de (2.17). Pour cela, nous supposons qu'il existe une fonction $H \in C^2(\mathbb{R}_+^m, \mathbb{R})$ et $h_i \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour tout $i = 1 \dots m$ telles que $H(z) = \sum_{i=1}^m h_i(z_i)$ pour tout $z \geq 0$ et vérifiant

$$h_i(0) = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad (2.32)$$

$$h_i(z_i), h_i''(z_i) \geq 0, \quad \text{pour tout } z_i \geq 0, i = 1 \dots m, \quad (2.33)$$

$$H(z) \longrightarrow +\infty, \text{ si et seulement si } |z| \longrightarrow +\infty, \quad (2.34)$$

il existe $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ qui satisfait $a_{ij} \geq 0, a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i, j \leq m$ tels que pour tout $j = 1 \dots m$, il existe $r, K_1, K_2 \geq 0$ indépendamment de j tels que

$$\sum_{i=1}^j a_{ij} h_i'(z_i) f_i(z) \leq K_1 H(z) + K_2, \quad \forall z \geq 0, \quad (2.35)$$

il existe $q_1, K_3, K_4 \geq 0$ tels que pour tout $i = 1 \dots m$, on a

$$h_i'(z_i) f_i(z) \leq K_3 (H(z))^{q_1} + K_4, \quad \text{pour tout } z \geq 0, \quad (2.36)$$

il existe $K_5, K_6 \geq 0$ tels que

$$\langle \nabla H(z), f(z) \rangle \leq K_5 H(z) + K_6, \quad \text{pour tout } z \geq 0, \quad (2.37)$$

Pour les conditions au bord, nous supposons que

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m, \lambda_i > 0, \\ * \text{ si } \exists i_0 \text{ telque } \lambda_{i_0} = 0, \text{ alors on a :} \\ \forall j \neq i_0, \lambda_j = 0, \\ \exists j \neq i_0, \lambda_j > 0, \text{ dans ce cas } ,\alpha_{i_0} = 0. \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Remarque 11 *i) les hypothèses(2.33) et (2.34) assurent respectivement la convexité et la coercivité de H de $[0, \infty)$ dans $[0, \infty)$.*

ii) l'hypothèse (2.35) implique que le système (2.17) admet une structure triangulaire.

iii) l'hypothèse (2.36) est une condition de croissance polynômiale sur f . Le résultat est indépendant de l'ordre de q_1 .

iv) quand à (2.37), elle impose au système (2.17) d'être un système avec contrôle de masse.

En particulier, si $H = I$, alors (2.37) implique $\sum_{i=1}^m f_i \leq K_5 \sum_{i=1}^m u_i + K_6$ c'est la conservation de la masse.

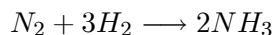
Nous allons énoncer maintenant le résultat principal de cette partie.

Théorème 12 (Existence globale) *Sous les hypothèses (2.18)-(2.23) et (2.32)-(2.38), le système de réaction-diffusion (2.17) admet une unique solution globale classique et positive.*

Applications

Nous allons utiliser ce théorème pour montrer que les systèmes de réaction-diffusion obtenus dans la 1^{ère} partie (modélisation) admettent une solution globale.

Exemple 13 *La réaction de l'amoniac*



donne le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial [N_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [N_2] = -\alpha [N_2] [H_2]^3 & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [H_2] = -3\alpha [N_2] [H_2]^3 & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [NH_3]}{\partial t} - d_3 \Delta [NH_3] = 2\alpha [N_2] [H_2]^3 & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [N_2]}{\partial v} = \frac{\partial [H_2]}{\partial v} = \frac{\partial [NH_3]}{\partial v} = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty) \\ [N_2](x, 0) = n_0, [H_2](x, 0) = h_0, [NH_3](x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

où nous avons posé $\alpha = \frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2}$.

Ce système admet une solution globale, puisque les hypothèses du théorème 12 sont satisfaites avec

$$H(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + z_3, \quad f_1(z) = -\alpha z_1 z_2^3, \quad f_2(z) = -3\alpha z_1 z_2^3, \quad f_3(z) = 2\alpha z_1 z_2^3$$

$$K_1 = K_2 = K_4 = K_5 = K_6 = 0, K_3 = \alpha, q_1 = 4 \text{ et}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemple 14 La réaction enzymatique conduit, après modélisation, au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial [E]}{\partial t} - d_1 \Delta [E] = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [S]}{\partial t} - d_2 \Delta [S] = -\frac{k_2}{k_M + [S]} [E]_0 [S] & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [P]}{\partial t} - d_3 \Delta [P] = \frac{k_2}{k_M + [S]} [E]_0 [S] & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [E]}{\partial v} = \frac{\partial [S]}{\partial v} = \frac{\partial [P]}{\partial v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty) \\ [E](x, 0) = E_0, [S](x, 0) = S_0, [P](x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right.$$

Les hypothèses du théorème 12 sont vérifiées avec

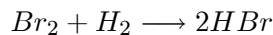
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + z_3, \quad f_1(z) = 0, \quad f_3(z) = -f_2(z) = \frac{kz_2}{k_M + z_2},$$

$$K_1 = K_2 = K_4 = K_5 = K_6 = 0, K_3 = \alpha, q_1 = 0$$

où $k = k_2$.

Exemple 15 La réaction du l'Hydrogène et du Brome



conduit au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_1}{\partial t} - d_1 \Delta v_1 = \frac{-Lv_2 \cdot v_1^{\frac{3}{2}}}{v_1 + mv_3} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} - d_2 \Delta v_2 = -\frac{-Lv_2 \cdot v_1^{\frac{3}{2}}}{v_1 + mv_3} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} - d_3 \Delta v_3 = \frac{2Lv_2 \cdot v_1^{\frac{3}{2}}}{v_1 + mv_3} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial v_1}{\partial \nu} = \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = \frac{\partial v_3}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty) \\ v_{1,0}, v_{2,0}, v_{3,0} \geq 0 \end{array} \right.$$

où nous avons posé $v_1 = [\text{Br}_2]$, $v_2 = [\text{H}_2]$ et $v_3 = [\text{HBr}]$.

Les conditions du théorème 12 sont satisfaites avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + z_3, \quad f_1(z) = f_2(z) = \frac{-Lz_2z_1^{\frac{3}{2}}}{z_1 + mz_3}, \quad f_3(z) = \frac{2Lz_2z_1^{\frac{3}{2}}}{z_1 + mz_3},$$

$$K_1 = K_2 = K_4 = K_5 = K_6 = 0, K_3 = \alpha, q_1 = 2.$$

Etapes de la démonstration du résultat principal

Nous allons énoncer un résultat donnant une estimation fondamentale vérifiée par la solution de (2.17). Cette estimation serait importante pour la démonstration de l'existence globale.

Théorème 16 (Estimation fondamentale) Supposons que (2.18)-(2.23), (2.32)-(2.34), (2.37)

et (2.38) sont satisfaites, alors il existe $g \in C([0, \infty))$ telle que :

$$\left\| \int_0^t H(v(\cdot, s)) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq g(t), \quad \forall 0 < t < T_{\max}.$$

Le lemme technique suivant serait lui-aussi d'une grande importance dans la démonstration du théorème de l'existence globale.

Lemme 17 sous les conditions (2.18)-(2.23), (2.33), (2.35) et (2.37), et pour tout $j = 1 \dots m$,

il existe $\xi \geq 1$ tels que pour tout $\xi \leq p \leq \infty$, il existe $0 < \delta_p < 1$ et $K_{1p}, K_{2p} \in C([0, \infty))$

tels que $\forall 0 \leq \tau < T < T_{\max}$, nous avons

$$\|h_j(v_j)\|_{L^p(Q(\tau, T))} \leq K_{1p}(T - \tau) + K_{2p}(T - \tau) \|H(v)\|_{L^p(Q(\tau, T))}^{\delta_p}. \quad (2.39)$$

Nous passons maintenant à la démonstration du théorème concernant l'existence globale de la solution de (2.17).

Preuve 18 du théorème 12

Notre objectif est de montrer que sous les hypothèses du théorème 12, et pour tout $j = 1, \dots, m$, la norme de $h_j(v_j)$ dans $L^\infty(\Omega)$ reste majorée par une fonction de t . Ainsi, et d'après la coercivité de H (hypothèse (2.34)), $\|v_j\|_{L^\infty(\Omega)}$ reste majorée par une fonction de t . La caractérisation (2.28) entraîne alors l'existence globale de la solution de (2.17).

En effet, (2.39) entraîne que pour tout $1 \leq p \leq \infty$, il existe $M_p, N_p > 0$ et $0 < \delta_p < 1$ tels que

$$\|H(v)\|_{L^p(Q(\tau, T))} \leq M_p + N_p (T - \tau) \|H(v)\|_{L^p(Q(\tau, T))}^{\delta_p}$$

et comme $H(v) \geq 0$ et $0 < \delta_p < 1$, nous avons

$$\|H(v)\|_{L^p(Q(\tau, T))} \leq C(T - \tau, p), \text{ pour tout } 1 \leq p \leq \infty$$

ainsi

$$\|K_3(H(z))^{q_1} + K_4\|_{L^p(Q(\tau, T))} \leq C(T - \tau, p), \text{ pour tout } 1 \leq p \leq \infty.$$

Nous considérons alors, pour tout $j = 1, \dots, m$, Z_j solution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial Z_j}{\partial t} - d_j \Delta Z_j = K_3(H(z))^{q_1} + K_4 \text{ dans } \Omega \times]0, T[\\ (1 - \lambda_j) Z_j + \lambda_j \frac{\partial Z_j}{\partial \nu} = \beta_j \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ Z_j(x, 0) = \|h_j(v_j(x, 0))\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (2.40)$$

où $T < T_{max}$ et

$$\beta_j = \max \left(\|h_j(\alpha_j)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}, \|\alpha_j h'_j(N_j)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \right). \quad (2.41)$$

D'après le lemme linéaire (voir annexe), Z_j existe, $\forall j = 1, \dots, m$. De plus, nous avons

$$\|Z_j(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_j(t), \forall t \in]0, T[\quad (2.42)$$

or l'hypothèse (2.33) entraîne que pour tout $j = 1, \dots, m$

$$\frac{\partial h_j(v_j)}{\partial t} - d_j \Delta(h_j(v_j)) \leq h'_j(v_j) \cdot f_j(v)$$

d'après (2.36), nous aurons

$$\frac{\partial h_j(v_j)}{\partial t} - d_j \Delta(h_j(v_j)) \leq K_3 (H(v))^{q_1} + K_4$$

d'autre part

$$(Z_j - h_j(v_j))(x, 0), \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Il reste à comparer Z_j et $h_j(v_j)$ sur le bord de $\Omega \times]0, T[$, nous distinguons alors deux cas :

1^{er} cas : $\lambda_j = 0$, dans ce cas, $Z_j = \beta_j$ et $v_j = \alpha_j$ sur $\partial\Omega$, nous avons, en utilisant (2.41)

$$Z_j - h_j(v_j) = \beta_j - h_j(\alpha_j) \geq 0.$$

2^{ème} cas : $\lambda_j > 0$, dans ce cas, et d'après (2.17), nous avons

$$\frac{\partial(h_j(v_j))}{\partial v} = h'_j(v_j) \left(\frac{\alpha_j}{\lambda_j} - \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} v_j \right) \text{ sur } \partial\Omega$$

utilisant (2.32) et (2.33), nous obtenons

$$\frac{\partial(h_j(v_j))}{\partial v} = h'_j(v_j) \frac{\alpha_j}{\lambda_j} - \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_j(v_j) \text{ sur } \partial\Omega$$

ainsi la relation (2.41) entraîne que

$$\lambda_j \frac{\partial}{\partial v} (Z_j - h_j(v_j)) + (1 - \lambda_j) (Z_j - h_j(v_j)) \geq \beta_j - \alpha_j h'_j(N_j) \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et d'après le théorème 4

$$0 \leq h_j(v_j) \leq Z_j \text{ dans } \Omega \times]0, T[\text{ pour tout } j = 1, \dots, m$$

et utilisant (2.42), il vient que

$$\|h_j(v_j)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|Z_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_j(t), \forall t \in]0, T[$$

finalement, (2.34) entraîne que

$$\|v_j(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq N_j(t), \forall j = 1, \dots, m, \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[$$

par conséquent, $T_{max} = +\infty$.

Preuve 19 (théorème 16)

Nous démontrons ici que, sous les conditions (2.18)-(2.23), (2.32)-(2.34), (2.37) et (2.38), il existe $g \in C([0, \infty))$ telle que

$$\left\| \int_0^t H(v(x, s)) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq g(t), \forall 0 < t < T_{max}.$$

Pour cela, nous posons

$$Z(x, t) = \int_0^t \sum_{i=1}^m d_i h_i(v_i(x, s)) ds, 0 \leq \tau < t < T_{max}.$$

Nous avons d'une part

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i h_i(v_i(x, t))$$

D'autre part

$$\Delta h_i(v_i) = h_i''(v_i) |\nabla v_i|^2 + h_i'(v_i) \Delta v_i$$

d'où

$$\Delta Z = \int_0^t \sum_{i=1}^m d_i \left[h_i''(v_i) |\nabla v_i|^2 + h_i'(v_i) \Delta v_i \right] ds$$

utilisant maintenant l'hypothèse (2.33), nous obtenons

$$-\Delta Z \leq -\int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(v_i) \Delta v_i ds$$

d'après (2.17), il vient que

$$\begin{aligned} -\Delta Z &\leq \int_{\tau}^t \nabla H(v) \left(f(v) - \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ &= \int_{\tau}^t \langle \nabla H(v), f(v) \rangle - \int_{\tau}^t \left\langle \nabla H(v), \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle \end{aligned}$$

utilisant l'hypothèse (2.37) nous obtenons

$$-\Delta Z \leq K_5 \int_{\tau}^t (H(v) + K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau))) - H(v(x, t))$$

d'où

$$H(v(x, t)) - \Delta Z \leq K_5 \int_{\tau}^t (H(v) + K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau))).$$

D'autre part, si l'on pose

$$d_M = \max_{1 \leq i \leq m} d_i, \quad d_m = \min_{1 \leq i \leq m} d_i$$

il vient que

$$\frac{1}{d_M} \sum_{i=1}^m d_i h_i(v_i) \leq H(v) \leq \frac{1}{d_m} \sum_{i=1}^m d_i h_i(v_i)$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_M} \frac{\partial Z}{\partial t} - \Delta Z &\leq K_5 \int_{\tau}^t \frac{1}{d_m} \frac{\partial}{\partial t} Z(x, s) ds + K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau)) \\ &\leq \frac{K_5}{d_m} Z(x, t) + K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau)) \end{aligned}$$

ainsi

$$-\frac{K_5}{d_m} Z(x, t) + \frac{1}{d_M} \frac{\partial}{\partial t} Z(x, t) - \Delta Z(x, t) \leq K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau))$$

Nous posons

$$w(x, t) = e^{\alpha t} Z(x, t) \quad \text{où } \alpha = -K_5 \frac{d_M}{d_m}$$

nous avons alors

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\alpha Z + \frac{\partial}{\partial t} Z \right) e^{\alpha t}$$

ainsi w vérifie pour tout $(x, t) \in Q(\tau, t)$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - d_M \Delta w \leq d_M (K_6 (t - \tau) + H(v(x, \tau))) e^{\alpha t} = \lambda(x, t)$$

de plus

$$w(x, \tau) = e^{\alpha \tau} Z(x, \tau) = 0$$

quand aux conditions sur le bord concernant w , nous avons à traiter trois cas :

1^{er} cas : si pour tout $i = 1, \dots, m$, $\lambda_i > 0$, dans ce cas

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial v} &= \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial v} \\ &= \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(v_i) \left(\frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} v_i \right) \\ &= \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(v_i) \frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} v_i h'_i(v_i) \end{aligned}$$

d'après (2.32), (2.33) et (2.26), il vient que

$$\frac{\partial Z}{\partial v} \leq \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i \frac{\alpha_i}{\lambda_i} h'_i(N_i) - \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} v_i h_i(v_i)$$

et en considérant $\lambda^* = \min \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i}$, nous obtenons

$$\lambda^* Z + \frac{\partial Z}{\partial v} \leq \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i \frac{\alpha_i}{\lambda_i} h'_i(N_i) = C_{(T-\tau)}, \quad \text{pour } x \in \partial\Omega, t \in]0, T_{max}[$$

2^{ème} cas : si $\forall i = 1, \dots, m, \lambda_i = 0$, dans ce cas $v_i = \alpha_i$ sur $\partial\Omega$ et donc

$$Z(x, t) = \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h_i(\alpha_i)$$

d'après (2.20), $\alpha_i \in C^2(\bar{\Omega})$ et donc

$$Z(x, t) \leq C_{(T-\tau)}, \text{ pour } x \in \partial\Omega, t \in]0, T_{max}[$$

3^{ème} cas : si $\exists I \subset \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset$ tel que $\forall i \in I, \lambda_i = 0$ et $\forall j \notin I, \lambda_j > 0$. Dans ce cas, et d'après (2.38), $\alpha_i = 0$ et donc $v_i = 0, \forall i \in I$.

Nous avons alors

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = \int_{\tau}^t \sum_{i \in I} d_i h'_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial v} + \int_{\tau}^t \sum_{j \notin I} d_j h'_j(v_j) \left(\frac{\alpha_j}{\lambda_j} - \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} \right)$$

utilisant (2.32) et le fait que $\frac{\partial v_i}{\partial v} < 0$, pour tout $i \in I$, nous obtenons

$$\frac{\partial Z}{\partial v} \leq \int_{\tau}^t \sum_{j \notin I} d_j \frac{\alpha_j}{\lambda_j} h'_j(v_j) - \int_{\tau}^t \sum_{j \notin I} d_j \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_j(v_j)$$

(2.26) entraîne que

$$\lambda^* Z + \frac{\partial Z}{\partial v} \leq \int_{\tau}^t \sum_{j \notin I} d_j \frac{\alpha_j}{\lambda_j} h'_j(N_j) + \lambda^* \int_{\tau}^t \sum_{i \in I} d_i h_i(v_i)$$

or, $\forall i \in I, h_i(v_i) = h_i(0) = 0$, ainsi

$$\lambda^* Z + \frac{\partial Z}{\partial v} \leq C_{(T-\tau)}.$$

Finalemnt, w vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} - d_M \Delta w \leq \lambda(x, t) \text{ dans } \Omega \times]0, T_{max}[\\ \lambda^* w + \frac{\partial w}{\partial v} \leq C_{(T-\tau)} \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T_{max}[\\ w(x, 0) = 0 \text{ dans } \Omega \end{array} \right.$$

D'après le lemme linéaire (voir annexe), nous avons

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq N(t), \forall 0 < \tau < t < T_{max}$$

d'où le résultat.

Preuve 20 (lemme 17)

Notre objectif est de montrer que sous les conditions du lemme 5, (2.39) est satisfaite, $\forall j = 1, \dots, m$. Pour cela, nous considérons, pour tout $1 < p < \infty$ et $0 < \tau < t < T$, une fonction $\theta \in L^p(\Omega \times]\tau, t[)$ telle que $\|\theta\|_{L^p(Q(\tau, t))} = 1$, $\theta \geq 0$ et pour tout $j = 1, \dots, m$, Ψ_j solution de

$$\begin{cases} -\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - d_j \Delta \Psi_j(x, t) = \theta(x, t) & \text{dans } \Omega \times]\tau, t[\\ (1 - \lambda_j) \Psi_j + \lambda_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]\tau, t[\\ \Psi_j(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.43)$$

Notons que si $W_j(x, t) = \Psi_j(x, T - t)$, pour $(x, t) \in \Omega \times]0, T - \tau[$, alors W_j vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial W_j}{\partial t} - d_j \Delta W_j(x, t) = \theta(x, T - t) & \text{dans } \Omega \times]0, T - \tau[\\ (1 - \lambda_j) W_j + \lambda_j \frac{\partial W_j}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T - \tau[\\ W_j(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

D'après le lemme linéaire (voir annexe), $\forall j = 1, \dots, m$, W_j existe donc Ψ_j aussi. De plus, $\Psi_j \geq 0$ (par application directe du théorème 1, W_j et Ψ_j donc sont positifs).

Pour $i = 1, \dots, m$, nous posons $u_i = h_i(v_i)$, $F_i = h'_i(v_i) f_i(v)$. Démontrons alors la relation (2.39) par récurrence sur i .

Pour $i = 1$, nous avons d'après (2.43)

$$\int_0^T \int_\Omega u_1 \theta = \int_0^T \int_\Omega u_1 \left(-\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - d_1 \Delta \Psi_1 \right) dx ds$$

utilisant la formule de Green, il vient que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \theta &= \int_0^T \int_{\Omega} -u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + d_1 \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla \Psi_1 - d_1 \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} -u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \int_0^T \int_{\Omega} d_1 \Delta u_1 \cdot \Psi_1 + d_1 \int_0^T \int_{\partial \Omega} \left(\Psi_1 \frac{\partial u_1}{\partial v} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} u_1 \right) \end{aligned}$$

d'après le lemme 21 (voir annexe), nous avons

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_1 \theta \leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 \cdot d_1 \Delta u_1 + C_{p,T} \quad (2.44)$$

utilisant (2.17) et (2.33), et après intégration par partie, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 \cdot d_1 \Delta u_1 dx ds &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 \left(F_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) dx ds \\ &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \left(\Psi_1 F_1 + u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right) dx ds + \int_{\Omega} \Psi_1(x, 0) u_{10}(x) dx \end{aligned}$$

ainsi, (2.44) devient

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_1 \theta \leq \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 F_1 dx ds + \int_{\Omega} \Psi_1(x, 0) u_{10}(x) dx + C_{p,T} \quad (2.45)$$

en multipliant (2.45) par a_{11} , et utilisant (2.19) et lemme 21 (annexe)

$$\int_0^T \int_{\Omega} a_{11} u_1 \theta dx ds \leq \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 a_{11} F_1 dx ds + C_{p,T} \quad (2.46)$$

d'après (2.35) nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} a_{11} u_1 \theta dx ds &\leq a_{11} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 (K_1 H(v) + K_2) dx ds + C_{p,T} \\
&\leq a_{11} K_2 \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 dx ds + a_{11} K_1 \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 H(v) dx ds + C_{p,T} \\
&\leq a_{11} K_1 \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 H(v) dx ds + C_{p,T}
\end{aligned}$$

utilisant l'injection de Sobolev, $\exists L_{p,T} > 0$ tel que

$$\|\Psi_1(x, \cdot)\|_{L^\infty(0,T)} \leq L_{p,T} \|\Psi_1(x, \cdot)\|_{L^p(0,T)}, \forall x \in \Omega,$$

le lemme 21(annexe) entraîne alors

$$\left\| \|\Psi_1(x, \cdot)\|_{L^\infty(0,T)} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{p,T}$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Holder et le lemme 21(annexe), il vient que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 H(v) \leq L_{p,T} C_{p,T} \|H(v)\|_{L^1(0,T, L^\infty(\Omega))}$$

et d'après le théorème 16, nous avons

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 H(v) \leq L_{p,T} C_{p,T} g(T)$$

ainsi, nous obtenons

$$a_{11} \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \theta dx ds \leq C_{p,T}$$

d'où

$$\|u_1\|_{L^q(Q_T)} \leq C_1(T) + C_2 \|H(v)\|_{L^q(0,T,\Omega)}^{\delta_q} \text{ avec } 0 < \delta_q < 1.$$

Supposons alors que (2.39) est vrais jusqu'à $i - 1$, et montrons ce résultat pour i .

En effet, et comme nous avons fait dans le cas $i = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} u_i \theta &= \int_0^T \int_{\Omega} u_i \left(-\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - d_j \Delta \Psi_j \right) \\
&\leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - d_j \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j \Delta u_i + C_{p,T} \\
&\leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - \frac{d_j}{d_i} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j d_i \Delta u_i + C_{p,T} \\
&\leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - \frac{d_j}{d_i} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j \left(F_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + C_{p,T} \\
&\leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \frac{d_j}{d_i} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \frac{d_j}{d_i} \Psi_j F_i + \frac{d_j}{d_i} \Psi_j (0) u_{i0} + C_{p,T} \Psi_j d_i \Delta u_i + C_{p,T} \\
&\leq \left(\frac{d_j}{d_i} - 1 \right) \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \frac{d_j}{d_i} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j F_i + C_{p,T}
\end{aligned}$$

multiplions par $\frac{d_i}{d_j} a_{ji}$ et sommons de $i = 1, \dots, m$, nous avons, d'après (2.35)

$$\int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{d_i}{d_j} a_{ji} u_i \theta \leq \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \left(1 - \frac{d_i}{d_j} \right) \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j (K_1 H(v) + K_2) + C_{p,T} \quad (2.47)$$

or, d'après l'hypothèse de récurrence, Holder et lemme 21(annexe)

$$\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \left(1 - \frac{d_i}{d_j} \right) \int_0^T \int_{\Omega} u_i \theta \leq \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \left| 1 - \frac{d_i}{d_j} \right| C_{p,T} \left(K_{1q}(T) + K_{2q}(T) \|H(v)\|_{L^q(Q(\tau,T))}^{\delta_q} \right) \text{ où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

D'autre part, en appliquant toujours Holder, il vient que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j H(v) \, dx ds &\leq \int_{\Omega} \|\Psi_j\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^T H(v) \, dx ds \\
&\leq \left\| \|\Psi_j\|_{L^\infty(0,T)} \right\|_{L^p(\Omega)} \left\| \int_0^T H(v) \right\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq L_{p,T} C_{p,T} \left\| \int_0^T H(v) \right\|_{L^q(\Omega)}
\end{aligned}$$

le théorème 12 entraîne alors

$$\int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^j \frac{d_i}{d_j} a_{ji} u_i \theta \leq C_{1q}(T) + C_{2q}(T) \|H(v)\|_{L^q(Q(\tau, T))}^{\delta_q}$$

comme $\theta \in L^p(\Omega \times [\tau, T])$ et que $\|\theta\|_{L^p(Q(\tau, T))} = 1$ pour tout $1 < p < \infty$, (2.39) est vérifiée.

2.3.5 Annexe

Lemme 21 *Lemme 22* (lemme linéaire) Soit le problème parabolique linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u = g \text{ dans } \Omega \times]0, T[\\ (1 - \lambda)u + \lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.48)$$

et si nous désignons par z la solution du problème elliptique suivant

$$\begin{cases} z - d\Delta z = 0, \text{ dans } \Omega \\ (1 - \lambda)z + \lambda \frac{\partial z}{\partial \nu} = \alpha \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors nous avons

si $g \in L^p([0, T]; L^q(\Omega))$, avec $1 < p, q < \infty$, $\alpha \in C^1(\bar{\Omega})$ et $u_0 \in L^q(\Omega)$, le problème (2.48)

admet une solution unique u telle que $\frac{\partial u}{\partial t}$ et Δu appartiennent à $L^p([0, T]; L^q(\Omega))$ et

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p([0, T]; L^q(\Omega))} + \|\Delta u\|_{L^p([0, T]; L^q(\Omega))} \leq C_{p,q} \left(\|g\|_{L^p([0, T]; L^q(\Omega))} + \|\alpha\|_{C^1(\partial\Omega)} + \|u_0\|_{L^q(\Omega)} \right)$$

de plus u satisfait

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0 - z\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} + c \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}} \|g(s) + z\|_{L^p(\Omega)} ds \text{ pour tout } p > \frac{N}{2}.$$

Preuve 23 Pour une preuve, voir par exemple [45], [65], [67]..

Lemme 24 $\forall 1 < p < \infty, \forall 1 \leq i, j \leq m$, il existe $C_p(T - \tau) > 0$ indépendante de θ , telle que Ψ_j solution de (2.43) vérifie

i) $\|P\Psi_j(\cdot, \tau)\|_{L^p(\Omega)}, \|P\Psi_j\|_{L^p(Q(\tau, t))}, \|\Delta\Psi_j\|_{L^p(Q(\tau, t))} \leq C_p(T - \tau)$, où

$$P\Psi_j(\cdot, \tau) = \begin{cases} \Psi_j(\cdot, t) & \text{si } \lambda_j > 0 \\ \Psi_j(\cdot, t) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \Psi_j(x, t) dx & \text{si } \lambda_j = 0 \end{cases}$$

ii) $\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \left[\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial v} \right] \leq C_p(T - \tau)$,

et si $1 < p < \frac{n+2}{2}$, $q = \frac{p(n+2)}{n+2-2p}$, alors il existe $K_q(T - \tau)$ telle que

iii) $\|\Psi_j\|_{L^q(Q(\tau, t))} \leq K_q(T - \tau)$.

Preuve 25 i) et iii) se déduisent immédiatement de la définition de Ψ_j , W_j et de [65] et [53].

Pour l'estimation ii), nous avons à traiter les cas suivants :

1^{er} cas : $\lambda_i > 0$ et $\lambda_j > 0$, dans ce cas, et d'après (2.17), nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \left[\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial v} \right] &= \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j \left[\frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_i(v_i) \right] \\ &= \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j \left[h'_i(v_i) \left(\frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} v_i \right) + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_i(v_i) \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

d'après (2.32) et (2.33), il vient que $h'_i(v_i) \geq 0$, et comme $v_i \geq 0$, nous avons

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \left[\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial v} \right] \leq \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j \left[h'_i(v_i) \frac{\alpha_i}{\lambda_i} + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_i(v_i) \right]$$

d'après (2.26) et (2.33)

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \left[\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial v} \right] \leq \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j \left[h'_i(N_i) \frac{\alpha_i}{\lambda_i} + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_i(N_i) \right]$$

utilisant Holder puis i), nous obtenons

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \left[\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial v} \right] \leq C_p(T - \tau).$$

2^{ème} cas ; $\lambda_i = \lambda_j = 0$, dans ce cas ; $v_i = \alpha_i$ et $\Psi_j = 0$, et donc

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \left[\Psi_j \frac{\partial (h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right] = \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} h_i(\alpha_i) \left(-\frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right)$$

utilisant Holder, le théorème de trace et i), nous obtenons ii).

3^{ème} cas : $\lambda_i = 0$ et $\lambda_j > 0$, dans ce cas, (2.38) entraîne que $\alpha_i = 0$, ainsi, et d'après (2.32),

il vient que

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \left[\Psi_j \frac{\partial (h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right] = \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j h'_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial v}$$

comme $\Psi_j \geq 0$, $h'_i(v_i) \geq 0$ et $\frac{\partial v_i}{\partial v} < 0$, nous avons

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \left[\Psi_j \frac{\partial (h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right] \leq 0.$$

4^{ème} cas : $\lambda_i > 0$ et $\lambda_j = 0$, dans ce cas : $\Psi_j = 0$ et d'après (2.26) et le fait que $\frac{\partial \Psi_j}{\partial v} < 0$,

nous avons

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \left[\Psi_j \frac{\partial (h_i(v_i))}{\partial v} - h_i(v_i) \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right] = \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} h_i(N_i) \left(-\frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right)$$

on suit les mêmes démarches que dans le 2^{ème} cas pour aboutir au résultat.

2.4 Approximation numérique des systèmes de Réaction-Diffusion

Une question importante en pratique est celle du choix d'une méthode numérique qui permet le calcul des solutions d'un système donné. Des travaux de nombreux auteurs sur des questions de ce type se sont multipliés et une très abondante littérature sur le sujet existe selon la classe des équations à traiter : linéaires, nonlinéaires, elliptiques, paraboliques, hyperboliques.... Dans la littérature on trouvera des méthodes de résolutions variées et des

techniques élaborées.

Dans cette partie nous nous intéressons à la résolution numérique des systèmes des réactions diffusion (2.14),(2.15) et (2.16) que nous avons obtenus après modélisation .Il s'agit des systèmes parabolique nonlinéaires. nous avons adopté la méthode des éléments finis pour l'approximation spatiale et celle de Newton-Raphson pour traiter la partie non linéaire.

Nous commençons par rappeler le principe de la méthode des éléments finis et celui de la méthode de Newton. Nous donnons ensuite le schéma numérique pour résoudre une équation parabolique du type :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - d\Delta u(x, t) = f(x, t, u(x, t)) & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

où f une fonction de $\Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} , de classe C^1 telle que $\frac{\partial f}{\partial u} \leq 0$. Nous avons utilisé le logiciel Matlab [66] qui permet la prise en compte des diverses nonlinéartés et un algorithme a été écrit pour résoudre les trois systèmes. Enfin nous présentons les résultats numérique sous forme graphique.

Nous commençons par rappeler le princiè de la méthode des éléments finis.

2.4.1 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis peut-être utilisée pour la résolution numérique d'équations élliptiques ou parabolique. Cette méthode offre l'avantage, par rapport à la méthode des différences finies,de pouvoir traiter sans difficultés supplémentaires toute géométrie ainsi que d'augmenter la précision des résultats au prix d'efforts de programmation raisonnables. C'est la méthode des éléments finis qui est systématiquement utilisée pour le

calcul des structures et de très nombreux codes d'éléments finis ont été développés. Contrairement à la méthode des différences finies, où l'opérateur aux dérivées partielles est approché à l'aide d'une formule de différences, ce sont les fonctions qui sont ici approchées. Etant donnée une fonction définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^N ($N = 1, 2, 3$) à valeurs dans \mathbb{R} d'une part et un maillage de l'ouvert Ω d'autre part, la méthode des éléments finis permet la construction d'une fonction approchée, qui ne dépend plus que d'un nombre fini de degrés de liberté. Ainsi, au lieu de considérer la solution du système d'équations aux dérivées partielles dans un espace de dimension infini, on cherche la solution de ce même problème dans un espace fini. Mais pour que le problème initial soit bien posé dans ce nouvel espace, on doit en transformer la formulation et on a recours à la "formulation variationnelle". Le succès de la méthode des éléments finis vient de ce que toute fonction dans l'espace d'approximation peut se décomposer de façon très simple sur une base canonique. Dans l'espace d'approximation la formulation variationnelle d'un problème parabolique (qui est d'ailleurs le type de problème que nous voulons résoudre) est alors équivalente à un système différentiel non linéaire de la forme

$$\begin{cases} M \frac{d\xi}{dt} + R\xi(t) = F(\xi) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases}$$

où ξ désigne le vecteur des inconnus (ou degrés de liberté), F une fonction donnée (ou fonction de contraintes extérieures imposées), M la matrice de masse et R la matrice de rigidité. Notons que dans ce travail nous ne considérerons que les éléments finis de Lagrange qui correspondent à des degrés de liberté en certains points.

Approximation des fonctions

La construction des espaces d'approximation se fait en définissant d'abord ce

qu'est un élément fini, puis en définissant des règles qui permettent d'assembler des éléments finis d'un même type, de façon à approcher des fonctions d'un ouvert Ω à valeurs réelles.

Nous ne considérons ici que l'élément fini P_1 . soit K un triangle donné et α_1, α_2 et α_3 ses sommets. L'élément fini P_1 construit sur K est la donnée du triplet (K, Σ, P_1) , où P_1 est l'espace des fonctions polynômiales, de degré inférieur ou égale à 1

$$P_1 = \{p(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\},$$

et est l'ensemble des trois formes linéaires $\psi_j, 1 \leq j \leq 3$, définie sur $C^\infty(\overline{K})$ (on parle aussi de degré de liberté) telle que $\psi_j(v) = v(a_j), 1 \leq j \leq 3$.

Une propriété indispensable pour que le triplet (K, Σ, P_1) définisse un élément fini est l'unisolvance.

Définition 26 *L'élément fini (K, Σ, P_1) est unisolvant si pour tout triplet $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ il existe un unique polynôme p de P_1 tel que $\psi_j(p) = p(a_j) = \xi_j, 1 \leq j \leq 3$.*

L'ensemble des degrés de liberté et l'espace P_1 sont donc liés.

Proposition 27 *L'élément fini (K, Σ, P_1) , défini cidessus, est unisolvant.*

Preuve 28 *Pour la preuve, voir [68].*

Nous pouvons ainsi définir la base canonique associée à l'élément fini (K, Σ, P_1) : les fonctions φ_j , sont définies par :

$$\varphi_j \in P_1, \varphi_j(a_j) = \delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecher.

Nous remarquons que ces trois fonctions de base sont les coordonnées barycentriques du

triangles, souvent notées $\varphi_j = \lambda_j, 1 \leq j \leq 3$. Il s'agit de fonctions affines dont les lignes de niveau sont parallèles au côté du triangle opposé à a_j .

Nous avons mis en place tous les outils des éléments finis pour l'élément T . Il faut maintenant définir des règles pour assembler des éléments de cette famille et définir ainsi un espace d'approximation de fonctions. Nous devons pour cela définir ce qu'est un maillage.

Définition 29 Soit Ω un ouvert à frontière polyédrique et T un recouvrement de Ω par des triangles. Nous dirons que T est un maillage de Ω si, pour deux triangles quelconques et différents K_1 et K_2 de T , l'intersection $K_1 \cap K_2$ est soit vide, soit un sommet commun, soit une arête commune.

L'espace d'approximation que nous considérons est alors

$$V_h^1 = \{v \in W^{1,\infty}(\Omega), v|_K \in P_1, \forall K \in T\}.$$

Proposition 30 L'espace V_h^1 est un espace vectoriel. Sa dimension est égale au nombre de sommet du maillage.

Pour construire la base canonique de V_h^1 , il est commode de numéroter les sommets du maillage $s^j, 1 \leq j \leq J$. Nous introduisons ensuite les fonctions $\Phi^j, 1 \leq j \leq J$, définies par

$$\Phi^j \in V_h^1, \Phi^j(s^l) = \delta_{jl}.$$

D'après la propriété d'unisolvançe, les fonctions Φ^j sont uniquement définies puisque, dans chaque triangle K , la valeur de Φ^j est prescrite en chacun des trois sommets. Il est immédiat de constater qu'il s'agit d'une base de V_h^1 .

Remarque 31 *Notons ici que pour avoir un maillage idéal il faut mailler avec des triangles équilatéraux. Mais il faut aussi se souvenir que le domaine à mailler est donné et on essaiera de construire un maillage dont les triangles ne "s'écrasent" pas. Une autre qualité d'un maillage est sa régularité : On essaiera d'obtenir un maillage tel que la taille des triangles varie le plus doucement possible. On conçoit donc que le maillage d'un objet est une opération délicate. En général, on découpe l'objet à mailler en sousdomaines que l'on maillera séparément. Tous les maillages utilisés dans l'industrie ou bien la recherche savent recoller des sous-maillages.*

2.4.2 Formulation variationnelle

Avant de passer à la formulation variationnelle, nous remarquons que le traitement numérique des trois systèmes de réaction-diffusion que nous avons obtenus à la fin de la première partie, (2.14), (2.15) et (2.16,) est de même nature et présente les mêmes difficultés que la résolution d'un problème parabolique de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u = f(x, t, u) & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.50)$$

où $f : \Omega \times]0, T[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et telle que

$$(3.1) \quad u \longrightarrow f(t, x, u) \text{ est de classe } C^1$$

$$(3.2) \quad f(t, x, u) \in L^\infty(\Omega \times]0, T[) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial f}{\partial u}(t, x, u) \leq 0 \text{ pour presque tout } (x, t) \in \Omega \times]0, T[\text{ et } \forall u \in \mathbb{R},$$

où $\frac{\partial f}{\partial u}$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à u .

Rappelons que l'existence globale de la solution du problème (2.50) est assurée par le théo-

rème 11 (voir partie 2). Nous allons donner ci dessus la formulation variationnelle du problème (2.50).

Considérons alors les espaces suivant, $X = L^r(\Omega)$ et $V = W^{1,r}(\Omega)$, où $r > 2$. La formulation variationnelle du problème (2.50) s'écrit alors

trouver $u \in V, u(0) = u_0 \in X$, telle que (2.51)

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle + d \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(t, x, u) v dx \quad \forall v \in W^{1,r'}(\Omega)$$

où \langle, \rangle désigne le produit de dualité entre $L^r(\Omega)$ et $L^{r'}(\Omega)$ où $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Remarque 32 *La formulation variationnelle (2.51) a bien un sens. En effet, comme $r > 2$, $V \in L^\infty(\Omega)$, et d'après l'hypothèse (2.51) on a $f(t, x, u) \in L^\infty(\Omega)$ par conséquent $\int_{\Omega} f(t, x, u) v dx$ a bien un sens pour tout $v \in W^{1,r'}(\Omega)$.*

2.4.3 Le problème variationnel approché

Nous donnons ici le problème variationnel approché du problème (2.50). Pour cela, nous considérons l'espace V_h^1 défini par

$$V_h^1 = \{v \in W^{1,\infty}(\Omega), v|_{T_{eil}} \in P_1, \forall T_{eil} \in \tau_h\}$$

où τ_h désigne la triangulation de Ω .

Posons $m = \dim V_h^1$, $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq m}$ base de V_h^1 , z_i les sommets du maillage tels que

$$\Phi_i(z_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq m$$

considérons alors le problème approché suivant :

étant donné $u_{0,h} \in V_h^1$, trouver une fonction $u_h : t \in (0, T) \longrightarrow u_h(t) \in V_h^1$ solution du

système différentiel ordinaire suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle u_h(t), v_h \rangle + d \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f(t, x, u_h) v_h dx \quad \forall v_h \in V_h^1 \\ u_h(0) = u_{0,h} \end{cases} \quad (2.52)$$

posons

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^m \xi_j(t) \Phi_j; u_{0,h} = \sum_{j=1}^m \xi_{0,j} \Phi_j$$

le problème variationnel approché (2.52) s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\xi_j(t))_{1 \leq j \leq m} \text{ tel que} \\ \frac{d}{dt} \xi_j(t) \langle \Phi_j, \Phi_i \rangle + d \sum_{j=1}^m \xi_j(t) \int_{\Omega} \nabla \Phi_j \nabla \Phi_i dx = \int_{\Omega} f \left(t, x, \sum_{j=1}^m \xi_j(t) \Phi_j \right) \Phi_i dx \\ \xi_j(0) = \xi_{0,j} \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Nous introduisons la matrice de Rigidité $R = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ et la matrice de Masse $M =$

$(b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ définies par

$$a_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \Phi_j \nabla \Phi_i dx \text{ et } b_{i,j} = \int_{\Omega} \Phi_j \Phi_i dx$$

Le problème variationnel approché (2.52) se met finalement alors sous la forme

$$\begin{cases} M \frac{d\xi(t)}{dt} + dR\xi(t) = F(t, \xi(t)) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases} \quad (2.53)$$

où

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (\xi_j(t))_{1 \leq j \leq m}, \xi_0 = (\xi_{0,j})_{1 \leq j \leq m} \text{ et } F(t, \xi) = (F_i(t, \xi))_{1 \leq i \leq m} \text{ définie par} \\ F_i(t, \xi) &= \int_{\Omega} f \left(t, x, \sum_{j=1}^m \xi_j(t) \Phi_j \right) \Phi_i dx \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

2.4.4 Méthode de la semi- discrétisation

Rappel

Nous rappelons tout d'abord quelques notions très élémentaires sur la résolution du problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} y'(t) + \varphi(t, y(t)) = 0, 0 < t < T \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.54)$$

où $\varphi : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Considérons une partition (ou subdivision) de $[0, T]$ supposée uniforme, pour simplifier

$$\Delta t = \frac{T}{N}, t_n = (n-1) \Delta t, 1 \leq n \leq N+1.$$

Nous cherchons à calculer pour $n = 2, \dots, N+1$ une approximation y_n de $y(t_n)$. La méthode la plus simple à laquelle nous nous limitons est la θ - méthode, où $\theta \in [0, 1]$ est un paramètre : elle consiste à remplacer (2.54) par le schéma aux différences finis

$$\frac{1}{\Delta t} (y_{n+1} - y_n) + \theta \varphi(t_{n+1}, y_{n+1}) + (1 - \theta) \varphi(t_n, y_n) = 0, 1 \leq n \leq N \quad (2.55)$$

donc connaissant y_n , cette dernière équation permet de déterminer y_{n+1} .

* si $\theta \neq 0$: y_{n+1} s'obtient implicitement en fonction de y_n . Nous donnons deux exemples de ce cas

pour $\theta \neq \frac{1}{2}$, la méthode est d'ordre 1

pour $\theta = \frac{1}{2}$, la méthode est d'ordre 2.

Pour la stabilité de cette méthode, nous avons

si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, le schéma (2.55) est stable sous la condition $|\Delta t| \ll \epsilon$

si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, le schéma (2.55) est inconditionnellement stable.

Application

Nous appliquons alors la θ - méthode pour résoudre notre problème (2.52), donc pour résoudre le système différentiel (2.53). Si nous posons $\xi^n = \xi(t_n)$ et $\xi^0 = \xi_0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} (M + d\theta\Delta tR)\xi^{n+1} - \theta\Delta tF(t_{n+1}, \xi^{n+1}) &= (M - d(1-\theta)\Delta tR)\xi^n + (1-\theta)\Delta tF(t_n, \xi^n) \\ \xi^0 &= \xi_0 \end{aligned}$$

Dans le cas où F est non linéaire, nous utilisons la méthode de Newton. Nous donnons ci dessous un rappel sur cette méthode.

Méthode de Newton

Considérons l'application $G : \mathbb{R}^m \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Soit donc à résoudre pour t fixé dans $[0, T]$

$$G(\xi_1, \dots, \xi_m, t) = 0. \quad (2.57)$$

On se donne un point initial $(\xi_1^0, \dots, \xi_m^0, t)$, on exécute les pas suivants jusqu'à ce que $\|(\delta\xi_1^i, \dots, \delta\xi_m^i)\| < \epsilon_0$, ϵ_0 précision fixée à l'avance

$$d_\xi G(\xi_1^i, \dots, \xi_m^i, t)(\delta\xi_1^i, \dots, \delta\xi_m^i) = -G(\xi_1^i, \dots, \xi_m^i, t), \quad (2.58)$$

$$\xi_l^{i+1} = \xi_l^i + \delta\xi_l^i \text{ pour } 1 \leq l \leq m$$

où $d_\xi G(\xi_1^i, \dots, \xi_m^i, t)$ désigne la différentielle de G par rapport à ξ au point $(\xi_1^i, \dots, \xi_m^i, t)$.

Cette procédure lorsqu'elle converge, converge généralement d'une façon quadratique.

Comme c'est bien connue, elle ne converge pas si $(\xi_1^0, \dots, \xi_m^0, t)$ n'est pas dans un voisinage de la solution.

Pour surmonter cette difficulté, on peut commencer par $(\xi_1^0, \dots, \xi_m^0, t_0)$ une solution connue pour t_0 voisin de t , qu'on utilise comme point initial dans la procédure de Newton (2.58)

Algorithme de passage de t_1 à t_{L+1}

a) On part de $y_0 = \xi(t_1)$;

b) Pour $n = 1$ à L faire

$$y_1 = \xi(t_n);$$

$$y_0 = y_1;$$

répéter jusqu'à convergence de Newton

$$\begin{cases} (M + d\theta\Delta tR - \theta\Delta tD_\xi F(y_1, t_{n+1}))V = M(y_0 - y_1) - d\theta\Delta tRy_1 \\ +\theta\Delta tF(y_1, t_{n+1}) + (1 - \theta)\Delta tF(y_0, t_n) \\ y_1 = y_1 + V \end{cases}$$

fin de la boucle de Newton

$$\xi(t_{n+1}) = y_1;$$

fin.

2.4.5 Résultats numériques

Nous présentons dans ce dernier paragraphe les résultats numériques pour le système de réaction-diffusion que nous avons obtenus au première section concernant la modélisation.

1. la réaction de l'amoniac (2.9) conduit au système de réaction suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial [N_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [N_2] = -\alpha [N_2] [H_2]^3 & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [H_2] = -3\alpha [N_2] [H_2]^3 & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [NH_3]}{\partial t} - d_3 \Delta [NH_3] = 2\alpha [N_2] [H_2]^3 & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [N_2]}{\partial v} = \frac{\partial [H_2]}{\partial v} = \frac{\partial [NH_3]}{\partial v} = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty) \\ [N_2](x, 0) = n_0, [H_2](x, 0) = h_0, [NH_3](x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

la figure A représente l'état initial $t_1 = 0$ et l'instant $t_L + 1 = 10$ pour les concentrations des trois constituants.

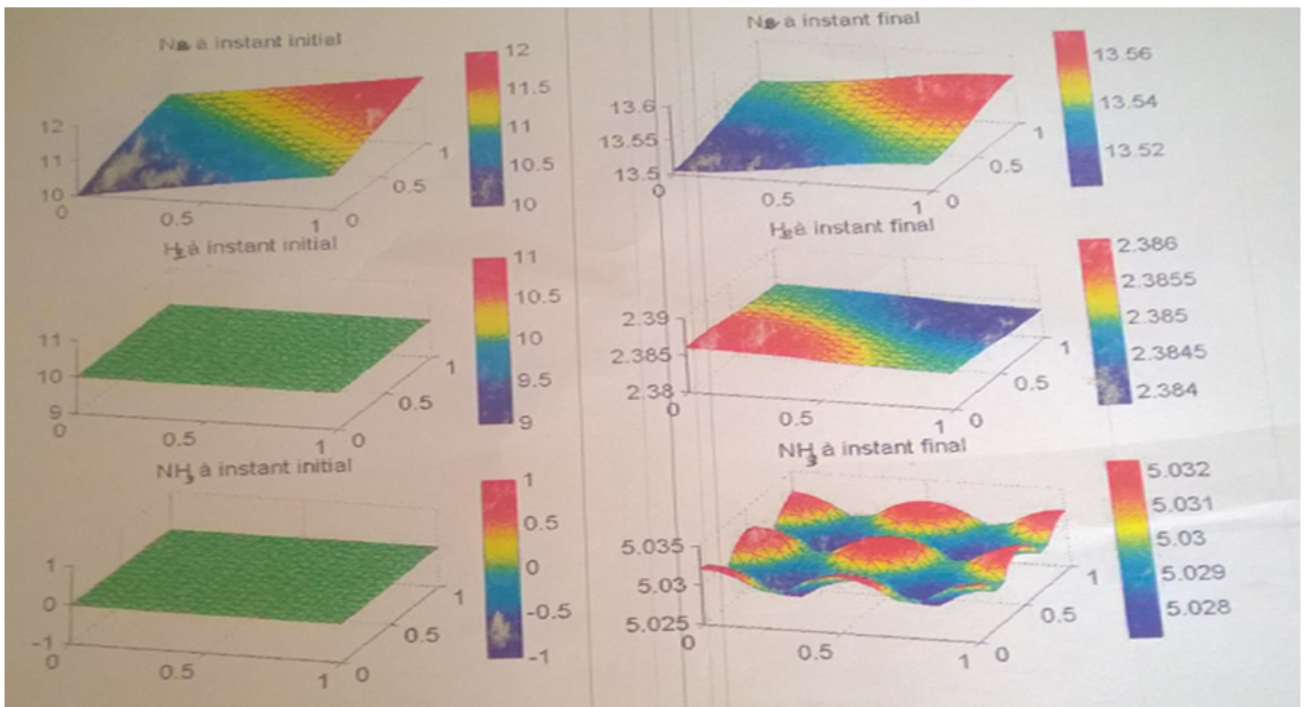


Figure A

2. Quand à la réaction enzymatique (2.11) entraîne le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial [E]}{\partial t} - d_1 \Delta [E] = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [S]}{\partial t} - d_2 \Delta [S] = -\frac{k}{k_M + [S]} [E]_0 [S] & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [P]}{\partial t} - d_3 \Delta [P] = \frac{k}{k_M + [S]} [E]_0 [S] & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [E]}{\partial v} = \frac{\partial [S]}{\partial v} = \frac{\partial [P]}{\partial v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty) \\ [E](x, 0) = E_0, [S](x, 0) = S_0, [P](x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right.$$

la figure E représente l'état initial $t_1 = 0$ et l'instant $t_L + 1 = 10$ pour les concentrations des trois constituants.

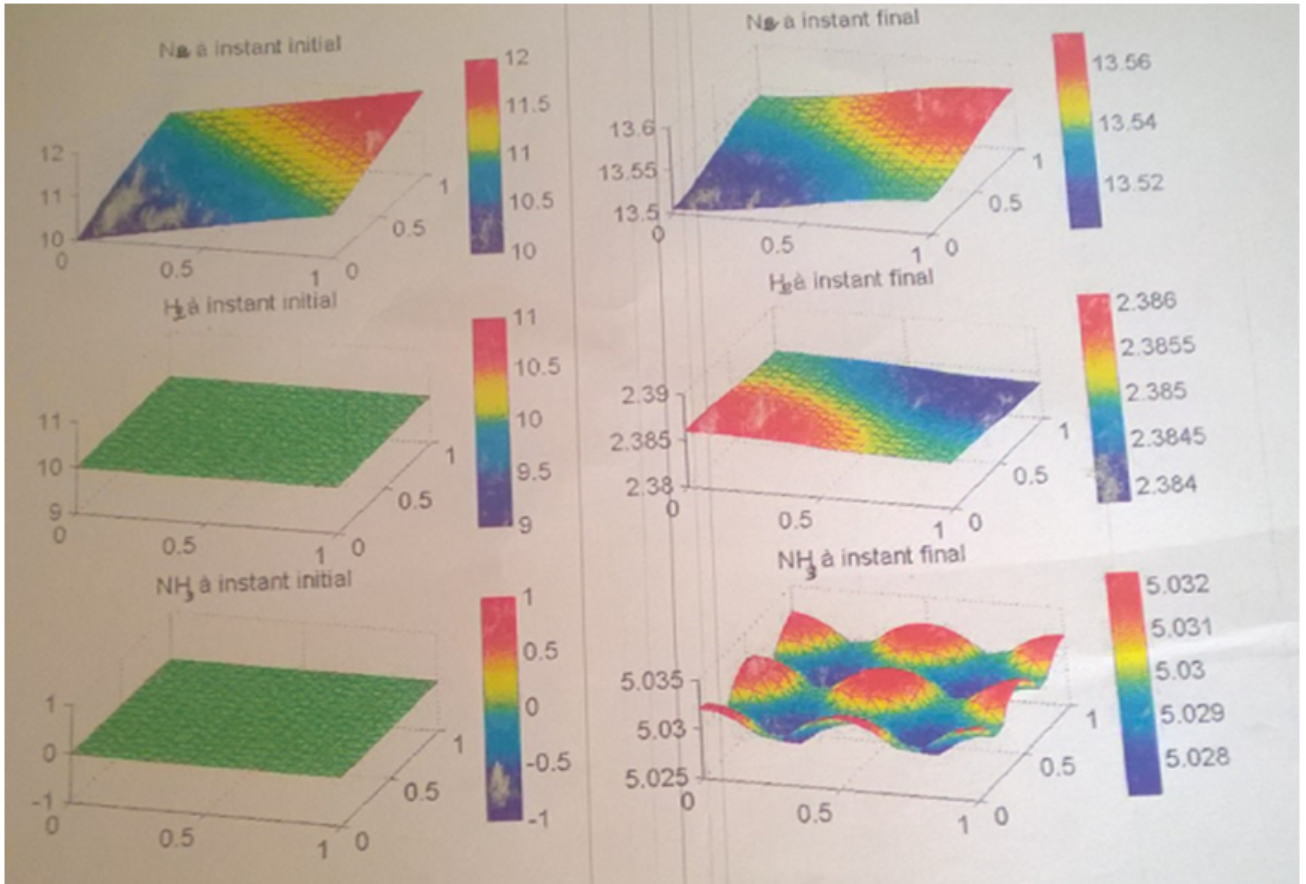


Figure E

3. La réaction de l'Hydrogène et du Brome (2.13) donne le système de réaction-

diffusion suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [Br_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [Br_2] = \frac{-L [H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m [H Br] / [Br_2]} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [H_2] = -\frac{-L [H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m [H Br] / [Br_2]} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [H Br]}{\partial t} - d_3 \Delta [H Br] = \frac{2L [H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m [H Br] / [Br_2]} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [Br_2]}{\partial v} = \frac{\partial [H_2]}{\partial v} = \frac{\partial [H Br]}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty) \\ [Br_2](x, 0) = n_0, [H_2](x, 0) = h_0, [H Br](x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right.$$

la figure *Br* représente l'état initial $t_1 = 0$ et l'instant $t_L + 1 = 10$ pour les concentrations des trois constituants.

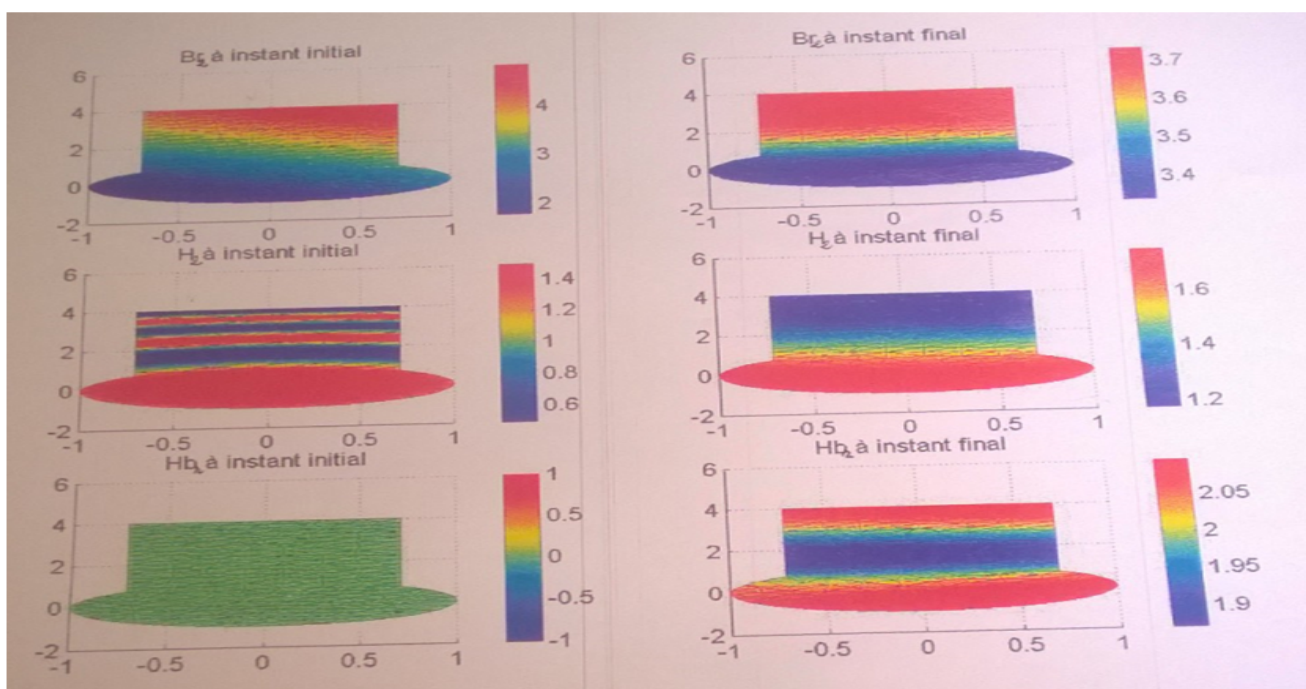


Figure Br

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité un système de réaction diffusion provenant de la cinétique chimique, en étudiant trois réactions : la réaction d'amoniac, celle d'Enzymatique et la réaction de l'Hydrogène et du Brome

Nous avons commencé par la modélisation de ces trois réactions chimique pour obtenir des systèmes différentielles puis des systèmes de réaction-diffusion. Nous étions intéressés ensuite à l'étude mathématiques des problèmes obtenus après modélisation, en prouvant

l'existence locale, globale, positivité, bornitude et unicité, et ceci en développant des techniques bien appropriées à ce type de problème. La simulation numérique a fait objet de la dernière partie de ce chapitre, en adoptant la méthode des éléments finis pour la partie linéaire, et la méthode de Newton-Raphson pour le traitement de la partie non linéaire. Les résultats obtenus ont été illustrés par des graphiques en utilisant l'outil Matlab.

Chapitre 3

Infection virale avec diffusion :

Modélisation, Analyse

Mathématique et Simulation

Numérique

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier une classe de maladies infectieuses modélisées par des systèmes d'équations aux dérivées partielles EDP à trois compartiments : cellules susceptibles, infectées et rétablies, Le but est de comprendre le comportement et la propagation de ces maladies dans la population en considérant à la fois le taux d'incidence non linéaire et l'absorption du virus par les cellules infectées.

Par conséquent, nous proposons un modèle généralisé du virus de l'hépatite B (HBV) formulé selon le système des équations de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda - dT(x, t) - f(T(x, t), I(x, t), V(x, t))V(x, t), \\ \frac{\partial I}{\partial t} = f(T(x, t), I(x, t), V(x, t))V(x, t) - aI(x, t), \\ \frac{\partial V}{\partial t} = d_v \Delta V + kI(x, t) - if(T, I, V)V - \mu V. \end{cases} \quad (3.1)$$

Les termes $T(x, t)$, $I(x, t)$ et $V(x, t)$ sont respectivement les densités de cellules susceptibles, infectées et de virus libre en position x et le temps t .

Nous nous intéressons au dernier système obtenu selon trois objets :

le premier est l'étude de la dynamique d'un modèle épidémiologique de réaction-diffusion pour décrire les interactions entre une population de susceptibles, d'infectés et de rétablis avec une fonction d'incidence qui constitue une généralisation et amélioration de nombreux travaux en littérature ([20], [21], [22], [23], [24],[25]).

Le deuxième objectif est de prouver que le modèle, en version discrète et continue, est biologiquement bien posé, et ceci en prouvant l'existence globale, la positivité et la bornitude des solutions sous des hypothèses bien appropriées.

Nous nous intéressons de plus à étudier la stabilité globale des points d'équilibre et ceci

pour les deux versions.

La dernière partie présente la simulation numérique de quelques applications sous matlab en utilisant un schéma de différence finis.

3.2 Formulation du modèle

L'hépatite virale constitue un problème de santé publique international, comparable à celui posé par d'autres grandes maladies transmissibles comme le VIH, la tuberculose ou le paludisme. Malgré la lourde charge qu'elle fait peser sur les populations dans toutes les régions du monde, l'hépatite n'était pas vraiment considérée comme une priorité pour la santé et le développement jusqu'à une date récente. Elle ne sera plus négligée désormais avec l'adoption de la résolution sur le Programme de développement durable à l'horizon 2030. En particulier, l'objectif 3 appelle expressément à prendre des mesures pour combattre l'hépatite virale

En particulier, l'hépatite B est une infection virale qui attaque les cellules du foie appelées hépatocytes. Il peut provoquer une infection aiguë ou chronique et expose les personnes à un risque élevé de décès par cirrhose et cancer du foie. L'infection par le virus de l'hépatite B (HBV) est désormais un problème de santé mondial majeur.

Dans ces dernières années, la modélisation mathématique a utilisé des équations aux dérivées partielles (EDP) pour comprendre la dynamique de l'infection par le HBV. De nombreux auteurs ont utilisé des équations de réaction-diffusion virologique. Wang et Wang [20] a proposé un modèle mathématique pour simuler une infection par le HBV avec dépendance spatiale. Ils ont introduit la mobilité aléatoire des virus dans le modèle de base proposé par

Nowak et al. [21] et ils supposent que le mouvement du virus suit une diffusion fickienne. Dans [20], les auteurs ont supposé que le taux d'infection était bilinéaire et ont ignoré l'absorption du virus par les cellules infectées.

Notre but est de présenter un modèle décrivant les variations de concentration ou de densité réparties dans l'espace sous l'influence de deux processus : les interactions locales entre espèces et la diffusion qui provoque la propagation d'espèces dans l'espace. En dynamique de population, les termes de diffusion correspondent à un mouvement aléatoire d'individus et les termes de réaction décrivent leur reproduction.

Avant de présenter notre modèle, nous rappelons une classe de modèles très utilisés en situation épidémiologiques.

3.2.1 Un modèle compartimental

Un modèle compartimental est un modèle dans lequel la population est virtuellement divisée en un nombre de compartiments donnés qui interagissent entre eux selon certaines règles.

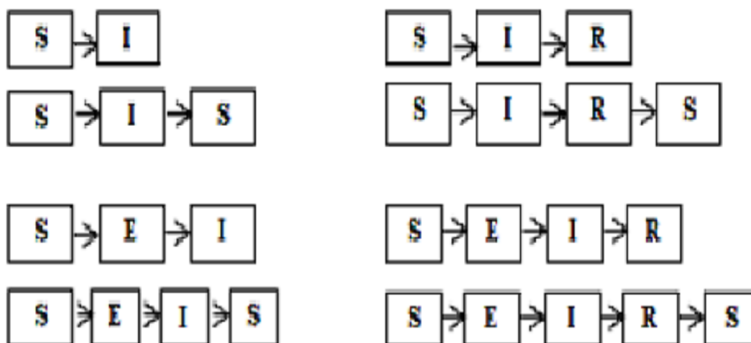
Les modèles compartimentaux sont des modèles déterministes où la population est divisée en un nombre de catégories selon différentes caractéristiques et selon l'état par rapport à la maladie (susceptible de se faire infecter, infecté non contagieux, infecté contagieux, immunisé, décédé, etc). Le changement d'état d'individus, i.e le changement de la densité d'individus dans chacune de ces boîtes est gouvernée par un ensemble d'équations différentielles.

Les contacts entre les individus contagieux et les individus sains se font aléatoirement dans le temps mais aussi au sein de la population puisqu'un individu pourra infecter n'importe quel individu sain avec la même probabilité. Vue leur simplicité conceptuelle, les modèles

compartimentaux peuvent être aisément adaptés à plusieurs situations épidémiologiques en faisant varier le nombre de catégories dans lesquelles la population est divisée.

compartimentaux

Schéma de quelques modèles compartimentaux



4.png

On peut voir, sur la Figure la représentation que l'on fait en général de ce type de modèles, où les compartiments sont représentés par des boîtes qui sont reliées entre elles par des flèches qui induisent des connexions ou des relations qui les unissent. Il existe différentes sortes de compartiments :

- Susceptibles : ils représentent les personnes saines, n'ayant pas encore été infectées. C'est le réservoir dans lequel la maladie viendra puiser pour pouvoir se répandre.
- Exposés : lorsque la maladie nécessite une période de latence, les personnes contaminées ne sont pas immédiatement capables d'en contaminer d'autres. Elles sont donc affectés à ce compartiment.
- Infectieux : ce compartiment représente ceux qui, dans la population sont non seulement déjà infectés, mais également capables de transmettre la maladie à leur tour.
- Décédés : dans certains cas, on peut créer un compartiment spécifique pour les personnes qui sont mortes soit de mort naturelle, soit des suites de la maladie étudiée.

- Rétablis ou guéris : ce compartiment contient les précédents infectieux qui sont guéris, lorsque l'on suppose qu'ils ne redeviennent pas immédiatement susceptibles. Ils peuvent acquérir une immunité définitive ou passagère.

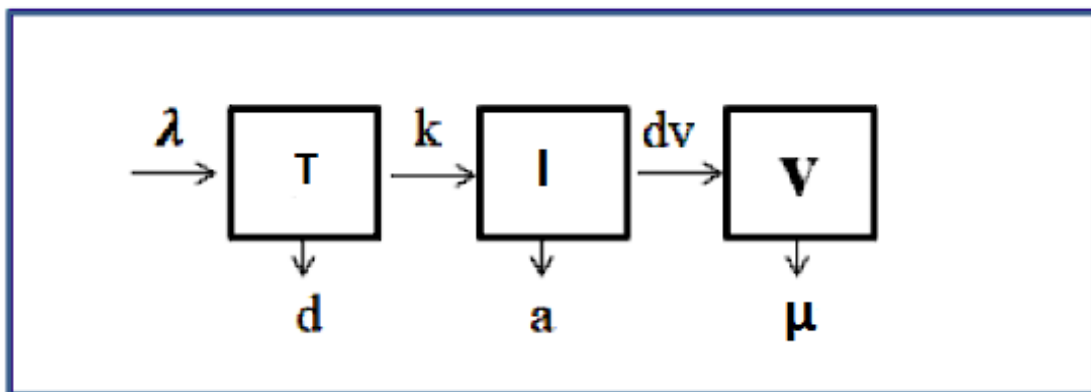
3.2.2 Application : Modèle *TIV*

On adoptons le modèle compartimental expliqué ci dessus

Un modèle compartimental de référence est le modèle *TIV* qui compacte trois compartiments :

- le compartiment *T* pour la densité des cellules non infectées,
- le compartiment *I* pour la densité des cellules infectées,
- le compartiment *V* pour la densité des virus libres.

Voici une représentation schématique de notre modèle *TIV* :



Modèle *TIV*

Ce dernier modèle des hépatites B induit le système non linéaire des équations différentielles partielles de type réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda - dT(x, t) - f(T(x, t), I(x, t), V(x, t))V(x, t), \\ \frac{\partial I}{\partial t} = f(T(x, t), I(x, t), V(x, t))V(x, t) - aI(x, t), \\ \frac{\partial V}{\partial t} = d_v \Delta V + kI(x, t) - if(T, I, V)V - \mu V. \end{cases} \quad (3.2)$$

Les paramètres λ, k, d, a et μ sont respectivement le taux de recrutement des cellules susceptibles, le taux de production de virus libre par les cellules infectées, les taux de mortalité des cellules susceptibles, des cellules infectées et du virus libre. Les cellules susceptibles se produisent au rythme λ , meurent au rythme dT , et deviennent infectées au rythme $f(T, I, V)V$. Les cellules infectées se produisent au rythme $f(T, I, V)$ et meurent au rythme aI . Les virus libres se produisent à partir de cellules infectées au rythme kI et disparaissent au taux μV . d_v est le coefficient de diffusion, Δ est l'opérateur laplacien et $i \in \{0, 1\}$ dénote l'effet d'absorption, qui prend seulement les valeurs 0 ou 1. Le cas $i = 0$ correspond au système traité dans [33] et $i = 1$ prend en compte la perte de particules virales lorsqu'elle pénètre dans les cellules cibles.

Nous supposons que f est continuellement différentiable en \mathbb{R}_+^3 et vérifie les hypothèses suivantes :

$$\text{(H1)} \quad f(0, I, V) = 0, \forall I, V,$$

$$\text{(H2)} \quad \frac{\partial f(T, I, V)}{\partial T} > 0 \text{ ce qui signifie que } f(T, I, V) \text{ est une fonction strictement monotone croissante par rapport à } T,$$

$$\text{(H3)} \quad \frac{\partial f(T, I, V)}{\partial I} \leq 0, \quad \frac{\partial f(T, I, V)}{\partial V} \leq 0 \text{ ce qui signifie que } f(T, I, V) \text{ est une fonction décroissante monotone par rapport à } I \text{ et } V .$$

Le modèle (3.2) est une généralisation des cas présentés en littérature. Par exemple, si

$f(T, I, V) = \beta T$ et $i = 0$, nous obtenons le modèle de Nowak et al. [21]. En outre, le modèle plus récent présenté par Yang et Zhou[25] en 2018 est un cas particulier de notre modèle (3.2).

Dans ce chapitre nous étudions le système (3.2) avec les conditions aux bords de Neumann est les valeurs initiales suivantes :

$$\begin{cases} T(x, 0) = \phi_1(x) \geq 0, I(x, 0) = \phi_2(x) \geq 0, V(x, 0) = \phi_3(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial V}{\partial n} = 0, t > 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

où Ω est un domaine ouvert dans \mathbb{R}^n de bord $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne le vecteur normal sur $\partial\Omega$.

L'étude mathématique sera présentée dans la section suivante et ceci pour la version continue et la version discrète.

3.3 Analyse mathématique du modèle

3.3.1 Version continue

Nous montrons d'abord le caractère bien posé du modèle (3.2) en prouvant l'existence globale, l'unicité, la positivité et la bornitude de la solution avec les données au bord et initiales (3.3).

Ensuite, nous étudions la stabilité globale de l'équilibre sans maladie et de l'équilibre de l'infection chronique en fonction du nombre de reproduction de base.

Caractérisation de la solution et équilibre

Premièrement, nous introduisons quelques notations. Soit $C = C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$ un espace de Banach. Pour tout élément $\psi \in C(\bar{\Omega})$ fonction de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{R} , nous considérons

l'identification $\psi(x, 0) = \psi(x)$.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 33 *Pour toute donnée $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in C$ vérifiant (3.3), il existe une solution unique du problème (3.2) défini sur \mathbb{R}^+ et cette solution reste positive et bornée pour tout $t \geq 0$.*

Preuve 34 *Pour toute $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T \in C$ et $x \in \bar{\Omega}$ nous définissons $F = (F_1, F_2, F_3) : C \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que*

$$\begin{aligned} F_1(\varphi)(x) &= \lambda - d\varphi_1(x, 0) - f(\varphi_1(x, 0), \varphi_2(x, 0), \varphi_3(x, 0))\varphi_3(x, 0), \\ F_2(\varphi)(x) &= f(\varphi_1(x, 0), \varphi_2(x, 0), \varphi_3(x, 0))\varphi_3(x, 0) - a\varphi_2(x, 0), \\ F_3(\varphi)(x) &= k\varphi_2(x, 0) - i f(\varphi_1(x, 0), \varphi_2(x, 0), \varphi_3(x, 0))\varphi_3(x, 0) - \mu\varphi_3(x, 0). \end{aligned}$$

Ainsi, le système (3.2) peut être réécrit selon l'équation différentielle fonctionnelle abstraite suivante

$$\begin{cases} w'(t) = Aw + F(w)(t) > 0, \\ w(0) = \phi \in C. \end{cases} \quad (3.4)$$

Où $w = (T, I, V)^T$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ et $Aw = (0, 0, d_v \Delta V)^T$. Il est clair que F est localement Lipschitzienne dans \mathbb{R}^3 . On en déduit que le système (3.4) admet une solution locale unique sur $[0, t_{max})$, où t_{max} est le temps d'existence maximal. De plus, nous avons $T(x, t) \geq 0$, $I(x, t) \geq 0$ et $V(x, t) \geq 0$ puisque 0 est une sous-solution de chaque équation du système (3.4). Maintenant, nous prouvons la bornitude des solutions. Pour cette raison, nous considérons

$$U(x, t) = T(x, t) + I(x, t).$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} &= \lambda - dT(x, t) - aI(x, t), \\ &\leq \lambda - \delta U(x, t)\end{aligned}$$

où $\delta = \min \{a, d\}$. Par conséquent

$$U(x, t) \leq \max \left(\frac{\lambda}{\delta}, \max_{x \in \bar{\Omega}} \{ \phi_1(x) + \phi_2(x) \} \right).$$

Cela implique que T et I sont bornées. On en déduit que V satisfait le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - d_v \Delta V \leq k\rho - \mu V, \\ \frac{\partial V}{\partial n} = 0, \\ V(x, 0) = \phi_3(x) \geq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\rho = \max \left(\frac{\lambda}{\delta}, \max_{x \in \bar{\Omega}} \{ \phi_1(x) + \phi_2(x) \} \right)$. Soit $\tilde{V}(t)$ solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{V}}{dt} = k\rho - \mu V, \\ \tilde{V}(0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} \phi_3(x). \end{cases}$$

Ainsi $\tilde{V}(t) \leq \max \left\{ \frac{k\rho}{\mu}, \max_{x \in \bar{\Omega}} \{ \phi_3(x) \} \right\}, \forall t \in [0, t_{max}]$.

D'après le principe de comparaison [31], on obtient $V(x, t) \leq \tilde{V}(t)$. Par conséquent

$$V(x, t) \leq \max \left\{ \frac{k\rho}{\mu}, \max_{x \in \bar{\Omega}} \{ \phi_3(x) \} \right\}, \forall (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, t_{max}].$$

De ce qui précède, on a $T(x, t)$, $I(x, t)$ et $V(x, t)$ sont bornées sur $\bar{\Omega} \times [0, t_{max}]$. Par conséquent, il découle de la théorie standard du système parabolique semi-linéaire [32] que $t_{max} = +\infty$. Ceci complète la preuve.

Dans la suite, nous discuterons l'existence d'équilibre du modèle (3.2) qui admet toujours un équilibre sans infection $E_0(T_0, 0, 0)$, où $T_0 = \frac{\lambda}{d}$.

Pour ceci, nous avons besoin de définir un facteur très important pour l'équilibre, c'est le taux de reproduction de base.

En effet, étant donnée une maladie, une question fondamentale est de savoir si elle peut se propager dans la population. Ceci revient à calculer le nombre moyen d'individus qu'une personne infectieuse pourra infecter, tant qu'elle sera contagieuse. Ce nombre est appelé le taux de reproduction de base, et noté R_0 . Il est considéré dans une population où tous les individus sont sains, sauf l'individu infectieux introduit.

- Si $R_0 < 1$, alors un individu en infecte en moyenne moins d'un, ce qui signifie que la maladie disparaîtra de la population à terme.

- À l'opposé, si $R_0 > 1$, alors la maladie peut se propager dans la population.

D'après les résultats présentés par Hattaf dans (voir [24]), le nombre de reproduction des virus dans l'absence de la dépendance spatiale est donné par :

$$R_0 = \frac{k}{\mu a} f\left(\frac{\lambda}{d}, 0, 0\right).$$

Dans notre cas, un simple calcul montre que

$$R_0 = \left(\frac{(k - ia) f\left(\frac{\lambda}{d}, 0, 0\right)}{\mu a} \right).$$

Pour trouver l'autre équilibre de système (3.2), nous résolvons

$$\begin{aligned} \lambda^* - dT^* - f(T^*, I^*, V^*)V^* &= 0, \\ f(T^*, I^*, V^*)V^* - aI^* &= 0, \\ kI^* - if(T^*, I^*, V^*)V^* - \mu V^* &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En additionnant les deux premières équations de (3.6), on obtient

$$T^* = \frac{\lambda - aI^*}{d} \geq 0,$$

donc $I^* \in \left(0, \frac{\lambda}{a}\right)$.

En utilisant la troisième équation de (3.6), on a

$$V^* = \frac{(k - ia)I^*}{\mu},$$

remplaçant T^*, V^* sur la seconde équation de (3.6), on obtient

$$(k - ia)I^* f\left(\frac{\lambda - aI^*}{d}, I^*, \frac{(k - ia)I^*}{\mu}\right) - \mu a I^* = 0.$$

Maintenant, on définit

$$h(z) = (k - ia) f\left(\frac{\lambda - az}{d}, z, \frac{(k - ia)z}{\mu}\right) - \mu a,$$

il est facile de voir que $h\left(\frac{\lambda}{a}\right) = -\mu a < 0$ et

$$h(0) = (k - ia) f\left(\frac{\lambda}{d}, 0, 0\right) - \mu a = a\mu [R_0 - 1].$$

Ainsi, on a un équilibre positif $E^*(T^*, I^*, V^*)$ quand $R_0 > 1$.

Pour toute $I^* \in \left(0, \frac{\lambda}{a}\right)$, on a

$$h'(z) = (k - ia) \left(\frac{-a}{d} \frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{(k - ia)}{\mu} \frac{\partial f}{\partial V} \right).$$

Utilisant les hypothèses (H_2) et (H_3) , nous prouvons l'unicité de l'équilibre d'infection chronique $E^*(T^*, I^*, V^*)$.

Par ce calcul, on obtient le résultat suivant

Théorème 35

(i) si $R_0 \leq 1$, alors il existe un équilibre sans infection unique E_0 ,

(ii) si $R_0 > 1$, alors il existe un équilibre unique d'infection chronique E^* autre que E_0 .

Stabilité globale

Nous établirons la stabilité globale de l'équilibre sans infection et de l'équilibre d'infection chronique pour le système (3.2). Premièrement, nous avons le résultat suivant

Théorème 36 *Si $R_0 \leq 1$, alors l'équilibre sans infection E_0 est globalement asymptotiquement stable, de plus il est instable si $R_0 > 1$.*

Preuve 37 *Nous introduisons la fonction de Lyapunov L_0 pour le système (3.2) comme suit*

$$L_0 = \int_{\Omega} \left\{ T(x, t) - T_0 - \int_{T_0}^T \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(X, 0, 0)} dX + \frac{k}{k - ia} I(x, t) + \frac{a}{k - ia} V(x, t) \right\} dx$$

où $T_0 = \frac{\lambda}{d}$. Afin de simplifier la présentation, nous allons utiliser les notations suivantes :

$T = T(x, t)$, $I = I(x, t)$ et $V = V(x, t)$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dL_0}{dt} &= \int_{\Omega} \left\{ \left(1 - \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(T, 0, 0)} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{k}{k - ia} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{a}{k - ia} \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dx, \\ &= \int_{\Omega} \left\{ dT_0 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \left(1 - \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(T, 0, 0)} \right) + \frac{\mu a}{k - ia} V \left(R_0 \frac{f(T, I, V)}{f(T, 0, 0)} - 1 \right) \right\} dx. \end{aligned}$$

Utilisant l'hypothèse (H_3) , on a

$$\frac{dL_0}{dt} \leq \int_{\Omega} \left\{ dT_0 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \left(1 - \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(T, 0, 0)} \right) + \frac{\mu a}{k - ia} V (R_0 - 1) \right\} dx.$$

Puisque $f(T, I, V)$ est strictement croissante par rapport à T , on a

$$\left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \left(1 - \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(T, 0, 0)} \right) \leq 0.$$

Donc, $\frac{dL_0}{dt} \leq 0$ quand $R_0 \leq 1$.

En outre, $\frac{dL_0}{dt} = 0$ si et seulement si $T = T_0$, $V = 0$ et $I = 0$.

Donc $E_0(\frac{\lambda}{d}, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable si $R_0 \leq 1$.

Pour la preuve de l'instabilité de E_0 si $R_0 > 1$ voir [22].

Pour la stabilité globale de l'équilibre d'infection chronique E^* , nous introduisons de plus l'hypothèse suivante

$$(H_4) \quad \left(1 - \frac{f(T, I, V)}{f(T, I^*, V^*)}\right) \left(\frac{f(T, I^*, V^*)}{f(T, I, V)} - \frac{V}{V^*}\right) \leq 0 \quad \forall T, I, V > 0,$$

Théorème 38 Si $R_0 > 1$ et sous l'hypothèse (H_4) alors l'équilibre d'infection chronique E^* est globalement asymptotiquement stable si $i = 0$.

Preuve 39 Nous construisons la fonction de Lyapunov comme suivant

$$L_1 = \int_{\Omega} \left\{ T - T^* - \int_{T^*}^T \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(X, I^*, V^*)} dX + \frac{k}{k - ia} I^* g\left(\frac{I}{I^*}\right) + \frac{a}{k - ia} V^* g\left(\frac{V}{V^*}\right) \right\} dx$$

avec

$$g(z) = z - 1 - \ln z, \quad z > 0$$

$g(z)$ admet son minimum 0 en $z = 1$, $g(z) \geq 0$.

Nous avons :

$$\frac{dL_1}{dt} = \int_{\Omega} \left\{ \left(1 - \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T, I^*, V^*)}\right) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{k}{k - ia} \frac{\partial (I^* g(\frac{I}{I^*}))}{\partial t} + \frac{a}{k - ia} \frac{\partial (V^* g(\frac{V}{V^*}))}{\partial t} \right\} dx.$$

Or

$$I^* g\left(\frac{I}{I^*}\right) = \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}\right)$$

donc

$$\frac{\partial \left(I^* g\left(\frac{I}{I^*}\right)\right)}{\partial t} = \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \frac{\partial I}{\partial t}$$

et

$$\frac{\partial \left(V^* g\left(\frac{V}{V^*}\right)\right)}{\partial t} = \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{dL_1}{dt} &= \int_{\Omega} \left\{ \left(1 - \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T, I^*, V^*)}\right) (\lambda - dT - f(T, I, V)V) \right. \\
&\quad \left. + \frac{k}{k - ia} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{a}{k - ia} \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dx \\
&= \int_{\Omega} \left\{ \left(1 - \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T, I^*, V^*)}\right) (\lambda - dT - f(T, I, V)V) \right. \\
&\quad \left. + \frac{k}{k - ia} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) (f(T, I, V)V - aI) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{k - ia} \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) (d_v \Delta V + kI - if(T, I, V)V - \mu V) \right\} dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{dL_1}{dt} &= \int_{\Omega} \left\{ \left(1 - \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T, I^*, V^*)}\right) (dT^* + f(T^*, I^*, V^*)V^* - dT - f(T, I, V)V) \right. \\
&\quad \left. + \frac{k}{k - ia} \left(f(T, I, V)V - aI - \frac{I^* f(T, I, V)V}{I} + aI^*\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{k - ia} \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) d_v \Delta V + \frac{ka}{k - ia} I - \frac{ia}{k - ia} f(T, I, V)V - \frac{\mu a}{k - ia} V \right. \\
&\quad \left. - \frac{kaV^*I}{(k - ia)V} - \frac{ia}{(k - ia)} f(T, I, V)V^* + \frac{\mu a}{(k - ia)} V^* \right\} dx.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{a}{k} \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) d_v \Delta V dx &= \frac{-ad_v}{k} \int_{\Omega} \frac{V^*}{V} \Delta V dx \\
&= \frac{-ad_v V^*}{k} \int_{\Omega} \frac{|\nabla V|^2}{V^2} dx
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{dL_1}{dt} &= \int_{\Omega} \left\{ dT^* \left(1 - \frac{T}{T^*}\right) \left(1 - \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T, I^*, V^*)}\right) \right. \\
&\quad \left. + f(T^*, I^*, V^*)V^* \left[4 - \frac{f(T, I^*, V^*)}{f(T, I, V)} - \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T, I^*, V^*)} - \frac{f(T, I, V)VI^*}{f(T^*, I^*, V^*)V^*I} - \frac{IV^*}{I^*V}\right] \right. \\
&\quad \left. + f(T^*, I^*, V^*)V^* \left[-1 - \frac{V}{V^*} + \frac{f(T, I^*, V^*)}{f(T, I, V)} + \frac{f(T, I, V)V}{f(T, I^*, V^*)V^*}\right] \right\} dx. \\
&\quad - \frac{ad_v V^*}{k} \int_{\Omega} \frac{|\nabla V|^2}{V^2} dx
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{dL_1}{dt} &= \int_{\Omega} \left\{ dT^* \left(1 - \frac{T}{T^*} \right) \left(1 - \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T, I^*, V^*)} \right) \right. \\
&\quad - aI^* \left[g \left(\frac{f(T, I^*, V^*)}{f(T, I, V)} \right) + g \left(\frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T, I^*, V^*)} \right) + g \left(\frac{f(T, I, V)VI^*}{f(T^*, I^*, V^*)V^*I} \right) + g \left(\frac{IV^*}{I^*V} \right) \right] \\
&\quad + aI^* \left[-1 - \frac{V}{V^*} + \frac{f(T, I^*, V^*)}{f(T, I, V)} + \frac{f(T, I, V)V}{f(T, I^*, V^*)V^*} \right] \Big\} dx \\
&\quad - \frac{ad_v V^*}{k} \int_{\Omega} \frac{|\nabla V|^2}{V^2} dx \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Puisque $f(T, I, V)$ est strictement croissante par rapport à T , on a

$$\left(1 - \frac{T}{T^*} \right) \left(1 - \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T, I^*, V^*)} \right) \leq 0.$$

Utilisant l'hypothèse (H_4) , on obtient

$$-1 - \frac{V}{V^*} + \frac{f(T, I^*, V^*)}{f(T, I, V)} + \frac{V}{V^*} \frac{f(T, I, V)}{f(T, I^*, V^*)} = \left(1 - \frac{f(T, I, V)}{f(T, I^*, V^*)} \right) \left(\frac{f(T, I^*, V^*)}{f(T, I, V)} - \frac{V}{V^*} \right) \leq 0.$$

Donc $\frac{dL_1}{dt} \leq 0$ quand $R_0 > 1$.

En outre, $\frac{dL_1}{dt} = 0$ si et seulement si $T = T^*$, $V = V^*$ et $I = I^*$.

Par conséquent, il découle du principe de l'invariance principale de Lasalle [33] que E^* est globalement asymptotiquement stable si $R_0 > 1$.

3.3.2 Version discrète

Dans cette section, nous allons étudier le système (3.2) mais dans le cas discret. Pour cette fin, nous discrétisons le système (3.2) en utilisant la méthode d'Euler 'mixte' qui est un mélange de la méthode d'Euler avant et arrière. Nous allons prouver que le modèle discret obtenu conserve des propriétés dynamiques essentielles, telles que la positivité, la

bornitude et le comportement global des solutions.

Soit $\Omega = [p, q]$ avec $p, q \in \mathbb{R}$.

On pose

$$t_m = m\Delta t, \quad x_n = p + n\Delta x$$

où : Δt et $\Delta x = \frac{q-p}{N}$ les pas de temps et d'espace respectivement.

Notant

$$T(x_n, t_m) = T_n^m, \quad I(x_n, t_m) = I_n^m, \quad V(x_n, t_m) = V_n^m.$$

Le modèle discret est le suivant

$$\begin{cases} \frac{T_n^{m+1} - T_n^m}{\Delta t} = \lambda - dT_n^{m+1} - f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)V_n^m, \\ \frac{I_n^{m+1} - I_n^m}{\Delta t} = f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)V_n^m - aI_n^{m+1}, \\ \frac{V_n^{m+1} - V_n^m}{\Delta t} = d_v \frac{V_{n+1}^{m+1} - 2V_n^{m+1} + V_{n-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} + kI_n^{m+1} - if(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)V_n^m - \mu V_n^{m+1}, \end{cases} \quad (3.7)$$

où $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ et $m \in \mathbb{N}$.

Les conditions initiales et aux bords discrètes sont

$$T_n^0 = \phi_1(x_n), \quad I_n^0 = \phi_2(x_n), \quad V_n^0 = \phi_3(x_n), \quad \text{pour } n \in \{0, 1, \dots, N\},$$

et

$$V_{-1}^m = V_0^m, \quad V_N^m = V_{N+1}^m \quad \text{pour } m \in \mathbb{N}.$$

Il est clair que le système discret (3.7) et continu (3.2) ont les mêmes points d'équilibres.

Nous avons le résultat suivant

Théorème 40 *pour tout $\Delta t > \frac{i}{k - ia} > 0$ et $\Delta x > 0$, les solutions de système (3.7) sont positives et bornées pour tout $m \in \mathbb{N}$.*

Preuve 41 *Le système (3.7) peut être écrit comme*

$$\begin{cases} T_n^{m+1} = T_n^m + \Delta t (\lambda - dT_n^{m+1} - f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)V_n^m), \\ I_n^{m+1} = \frac{I_n^m + \Delta t f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)V_n^m}{1 + a\Delta t}, \\ BV^{m+1} = V^m + k\Delta t I^{m+1} - \Delta t M \end{cases} \quad (3.8)$$

où

$$M = (if(T_0^{m+1}, I_0^m, V_0^m)V_0^m, if(T_1^{m+1}, I_1^m, V_1^m)V_1^m, \dots, if(T_N^{m+1}, I_N^m, V_N^m)V_N^m)^T$$

et la matrice carrée B de dimension $(N+1) \times (N+1)$ est donné par

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_2 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_3 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1 + \frac{d_v \Delta t}{(\Delta x)^2} + \mu \Delta t, \\ \sigma_2 &= -\frac{d_v \Delta t}{(\Delta x)^2}, \\ \sigma_3 &= 1 + \frac{2d_v \Delta t}{(\Delta x)^2} + \mu \Delta t. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $j \in \{0, 1, \dots, N\}$, on a

$$\begin{aligned} & V_j^m + k\Delta t I_j^{m+1} - \Delta t i f\left(T_j^{m+1}, I_j^m, V_j^m\right) V_j^m \\ &= V_j^m + \frac{k\Delta t I_j^m}{1+a\Delta t} + \frac{k(\Delta t)^2 f\left(T_j^{m+1}, I_j^m, V_j^m\right) V_j^m}{1+a\Delta t} - \Delta t i f\left(T_j^{m+1}, I_j^m, V_j^m\right) V_j^m \\ &= V_j^m + \frac{k\Delta t I_j^m}{1+a\Delta t} + \frac{\Delta t((k-ai)\Delta t - i)}{1+a\Delta t} f\left(T_j^{m+1}, I_j^m, V_j^m\right) V_j^m. \end{aligned}$$

Puisque $\Delta t > \frac{i}{k-ai} > 0$, on a $(k-ai)\Delta t - i > 0$. Cela entraîne que

$$V^m + k\Delta t I^{m+1} - \Delta t M \geq 0.$$

Notons que B est une M -matrice. Ainsi, à partir de la troisième équation de (3.8), on a

$$V^{m+1} = B^{-1}(V^m + k\Delta t I^{m+1} - \Delta t M).$$

D'après la méthode d'induction, la solution reste positive pour tous $m \in \mathbb{N}$.

Pour prouver la bornitude de la solution. On introduit

$$G^m = T_n^m + I_n^m.$$

On a ,

$$\begin{aligned} \frac{G_n^{m+1} - G_n^m}{\Delta t} &= \lambda - dT_n^{m+1} - aI_n^{m+1} \\ &\leq \lambda - \tilde{d}G_n^{m+1}, \end{aligned}$$

où $\tilde{d} = \min\{d, a\}$. Utilisant la méthode de l'induction mathématique, nous avons

$$\begin{aligned} G_n^{m+1} &\leq \frac{1}{1+\tilde{d}\Delta t} G_n^m + \frac{\lambda}{1+\tilde{d}\Delta t} \\ &\leq \left(\frac{1}{1+\tilde{d}\Delta t}\right)^m G_n^0 + \frac{\lambda}{\tilde{d}} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{1+\tilde{d}\Delta t}\right)^m\right]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} G_n^m \leq \frac{\lambda}{\tilde{d}}.$$

Cela implique que $\{G_n^m\}$ est bornée. Donc, T_n^m et I_n^m sont également bornées.

Soit $\tilde{V}^m = \sum_{j=0}^N V_j^m$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{V}^{m+1} - \tilde{V}^m}{\Delta t} &= k \sum_{j=0}^N I_j^{m+1} - \mu \sum_{j=0}^N V_j^{m+1} - \sum_{j=0}^N i f(T_j^{m+1}, I_j^m, V_j^m) V_j^m \\ &\leq k(N+1) \frac{\lambda}{\tilde{d}} - \mu \tilde{V}^{m+1}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} V^m \leq \frac{k\lambda(N+1)}{\tilde{d}\mu}.$$

Ceci complète la preuve

Nous passons maintenant à l'étude de la stabilité globale de l'équilibre sans infection et de l'équilibre d'infection chronique pour le système (3.8), tenant compte que les valeurs des points d'équilibres sont les mêmes que celles trouvées dans la section précédente.

Théorème 42 *Pour tout $\Delta t > 0$ et $\Delta x > 0$, si $R_0 \leq 1$, alors l'équilibre sans infection E_0 du système (3.8) est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve 43 *Considérons la fonction de Lyapunov*

$$L^m = \sum_{n=0}^N \frac{1}{\Delta t} \left[T_n^m - T_0 - \int_{T_0}^{T_n^m} \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(X, 0, 0)} dX + \frac{k}{k - ia} I_n^m + \frac{a}{k - ia} (1 + \mu\Delta t) V_n^m \right].$$

Nous avons

$$\begin{aligned} L^{m+1} - L^m &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{\Delta t} \left[T_n^{m+1} - T_n^m + \int_{T_n^m}^{T_n^{m+1}} \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(X, 0, 0)} dX + \frac{k}{k - ia} (I_n^{m+1} - I_n^m) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{k - ia} (1 + \mu\Delta t) (V_n^{m+1} - V_n^m) \right]. \end{aligned}$$

Nous introduisons la fonction :

$$\Psi_{(E_0, T_n^m)}(T_n^{m+1}) = T_n^{m+1} - T_n^m + \int_{T_n^m}^{T_n^{m+1}} \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(X, 0, 0)} dX,$$

on a

$$L^{m+1} - L^m \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{\Delta t} \left[\Psi_{(E_0, T_n^m)}(T_n^{m+1}) + (I_n^{m+1} - I_n^m) + \frac{a}{k} (1 + \mu \Delta t) (V_n^{m+1} - V_n^m) \right].$$

D'après [35], on a

$$\begin{aligned} L^{m+1} - L^m &\leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{\Delta t} \left[\left(1 - \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(T_n^{m+1}, 0, 0)} \right) (T_n^{m+1} - T_n^m) + (I_n^{m+1} - I_n^m) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{k} (1 + \mu \Delta t) (V_n^{m+1} - V_n^m) \right] \\ &\leq \sum_{n=0}^N \left[dT_0 \left(1 - \frac{T_n^{m+1}}{T_0} \right) \left(1 - \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(T_n^{m+1}, 0, 0)} \right) \right. \\ &\quad \left. f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m) V_n^m \left(1 - \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(T_n^{m+1}, 0, 0)} \right) + f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m) V_n^m \right. \\ &\quad \left. - a I_n^{m+1} + \frac{ad_v}{k} \frac{V_{n+1}^{m+1} - 2V_n^{m+1} + V_{n-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} + a I_n^{m+1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu a}{k} V_n^{m+1} + \frac{\mu a}{k} V_n^{m+1} - \frac{\mu a}{k} V_n^m \right] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} L^{m+1} - L^m &\leq \sum_{n=0}^N \left[dT_0 \left(1 - \frac{T_n^{m+1}}{T_0} \right) \left(1 - \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(T_n^{m+1}, 0, 0)} \right) \right. \\ &\quad \left. f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m) V_n^m \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(T_n^{m+1}, 0, 0)} - \frac{\mu a}{k} V_n^m \right. \\ &\quad \left. + \frac{ad_v}{k} \frac{V_{n+1}^{m+1} - 2V_n^{m+1} + V_{n-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} \right] \\ &\leq \sum_{n=0}^N \left[dT_0 \left(1 - \frac{T_n^{m+1}}{T_0} \right) \left(1 - \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(T_n^{m+1}, 0, 0)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu a}{k} V_n^m \left\{ \frac{f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)}{f(T_n^{m+1}, 0, 0)} \frac{k f(T_0, 0, 0)}{\mu a} - 1 \right\} + \frac{ad_v}{k} \frac{V_{n+1}^{m+1} - 2V_n^{m+1} + V_{n-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} \right]. \end{aligned}$$

Or $\frac{k f(T_0, 0, 0)}{\mu a} = R_0$ et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{ad_v}{k} \frac{V_{n+1}^{m+1} - 2V_n^{m+1} + V_{n-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} &= \frac{ad_v}{k (\Delta x)^2} \left[\sum_{n=0}^N (V_{n+1}^{m+1} - V_n^{m+1}) + \sum_{n=0}^N (V_{n-1}^{m+1} - V_n^m) \right] \\ &= \frac{ad_v}{k (\Delta x)^2} [V_{N+1}^{m+1} - V_0^{m+1} + V_{-1}^{m+1} - V_N^{m+1}] = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} L^{m+1} - L^m &\leq \sum_{n=0}^N \left[dT_0 \left(1 - \frac{T_n^{m+1}}{T_0} \right) \left(1 - \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(T_n^{m+1}, 0, 0)} \right) + \frac{\mu a}{k} V_n^m \left(\frac{f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)}{f(T_n^{m+1}, 0, 0)} R_0 - 1 \right) \right] \\ &\leq \sum_{n=0}^N \left[dT_0 \left(1 - \frac{T_n^{m+1}}{T_0} \right) \left(1 - \frac{f(T_0, 0, 0)}{f(T_n^{m+1}, 0, 0)} \right) + \frac{\mu a}{k} (R_0 - 1) V_n^m \right]. \end{aligned}$$

Ainsi si $R_0 \leq 1$, on obtient

$$L^{m+1} - L^m \leq 0, \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

Notons que l'égalité est valable si et seulement si $\lim_{m \rightarrow +\infty} T_n^{m+1} = T_0$. Donc $\{L^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Puisque $L^m \geq 0$, alors $\lim_{m \rightarrow +\infty} L^m \geq 0$.

Ainsi,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (L^{m+1} - L^m) = 0.$$

En tenant compte que $\lim_{m \rightarrow +\infty} T_n^{m+1} = T_0$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} ((R_0 - 1) V_n^m) = 0$ pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N\}$, nous avons à traiter deux cas :

– si $R_0 < 1$, alors $\lim_{m \rightarrow +\infty} V_n^m = 0$ pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N\}$. De la troisième équation du système (3.7), on obtient $\lim_{m \rightarrow +\infty} I_n^m = 0$ pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N\}$.

– si $R_0 = 1$. par $\lim_{m \rightarrow +\infty} T_n^{m+1} = T_0$ et la première équation de (3.7), implique $\lim_{m \rightarrow +\infty} V_n^m = 0$ pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Ainsi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} T_n^m = T_0, \lim_{m \rightarrow +\infty} I_n^m = 0, \lim_{m \rightarrow +\infty} V_n^m = 0, \text{ pour tout } n \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Donc E_0 est globalement asymptotiquement stable si $R_0 \leq 1$.

Théorème 44 Pour tout $\Delta t > 0$ et $\Delta x > 0$, si $R_0 > 1$ et (H_4) vérifiée, alors l'équilibre de l'infection E^* du système (3.8) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve 45 Soit $E^* (T^*, I^*, V^*)$. Nous construisons la fonction de Lyapunov suivante

$$G^m = \sum_{n=0}^N \frac{1}{\Delta t} \left[T_n^m - T^* - \int_{T^*}^{T_n^m} \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(X, I^*, V^*)} dX + I^* g\left(\frac{I_n^m}{I^*}\right) + \frac{a}{k} (1 + \mu \Delta t) V^* g\left(\frac{V_n^m}{V^*}\right) \right],$$

avec

$$g(z) = z - 1 - \ln z, z > 0,$$

En utilisant

$$I^* g\left(\frac{I_n^m}{I^*}\right) = \left(I_n^m - I^* - I^* \ln \frac{I_n^m}{I^*} \right),$$

et

$$V^* g\left(\frac{V_n^m}{V^*}\right) = \left(V_n^m - V^* - V^* \ln \frac{V_n^m}{V^*} \right),$$

on obtient

$$\begin{aligned} G^{m+1} - G^m &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{\Delta t} \left[T_n^{m+1} - T_n^m - \int_{T_n^m}^{T_n^{m+1}} \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(X, I^*, V^*)} dX + \left(I_n^{m+1} - I_n^m + I^* \ln \frac{I_n^m}{I_n^{m+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{k} (1 + \mu \Delta t) \left(V_n^{m+1} - V_n^m + V^* \ln \frac{V_n^m}{V_n^{m+1}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Considérons

$$\Psi_{(E^*, T_n^m)}(T_n^{m+1}) = T_n^{m+1} - T_n^m + \int_{T_n^m}^{T_n^{m+1}} \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(X, I^*, V^*)} dX \leq \left(1 - \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T_n^{m+1}, I^*, V^*)} \right) (T_n^{m+1} - T_n^m).$$

Comme

$$\lambda = dT^* + f(T^*, I^*, V^*)V^*, \quad f(T^*, I^*, V^*)V^* = aI^*, \quad kI^* = \mu V^*,$$

et

$$\ln \frac{I_n^m}{I_n^{m+1}} < \frac{I_n^m}{I_n^{m+1}} - 1 \quad \text{et} \quad \ln \frac{V_n^m}{V_n^{m+1}} < \frac{V_n^m}{V_n^{m+1}} - 1,$$

alors

$$\begin{aligned} G^{m+1} - G^m &\leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{\Delta t} \left[\left(1 - \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T_n^{m+1}, I^*, V^*)} \right) (T_n^{m+1} - T_n^m) + \left(1 - \frac{I^*}{I_n^{m+1}} \right) (I_n^{m+1} - I_n^m) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{k} \left(1 - \frac{V^*}{V_n^{m+1}} \right) (V_n^{m+1} - V_n^m) + a \frac{\mu}{k} \Delta t \left(V_n^{m+1} - V_n^m + V^* \ln \frac{V_n^m}{V_n^{m+1}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} G^{m+1} - G^m &\leq \sum_{n=0}^N \left\{ dT^* \left(1 - \frac{T_n^{m+1}}{T^*} \right) \left(1 - \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T_n^{m+1}, I^*, V^*)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{ad_v}{k(\Delta x)^2} (V_{n+1}^{m+1} - 2V_n^{m+1} + V_{n-1}^{m+1}) \left(1 - \frac{V^*}{V_n^{m+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. - aI^* \left[g \left(\frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T_n^{m+1}, I^*, V^*)} \right) + g \left(\frac{f(T_n^{m+1}, I^*, V^*)}{f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)} \right) + g \left(\frac{f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m) V_n^m I^*}{f(T^*, I^*, V^*) V^* I_n^m} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g \left(\frac{I_n^{m+1} V^*}{I^* V_n^{m+1}} \right) \right] + aI^* \left[-1 - \frac{V_n^m}{V^*} + \frac{f(T_n^{m+1}, I^*, V^*)}{f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)} + \frac{f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m) V_n^m}{f(T_n^{m+1}, I^*, V^*) V^*} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^N \frac{ad_v}{k(\Delta x)^2} (V_{n+1}^{m+1} - 2V_n^{m+1} + V_{n-1}^{m+1}) \left(1 - \frac{V^*}{V_n^{m+1}} \right) \\ &= \frac{ad_v}{k(\Delta x)^2} \left[\left(\sum_{n=0}^N V_{n+1}^{m+1} - V_n^{m+1} + \sum_{n=0}^N V_{n-1}^{m+1} - V_n^{m+1} \right) \right. \\ &\quad \left. - V^* \left(\sum_{n=0}^N \frac{V_{n+1}^{m+1} - V_n^{m+1}}{V_n^{m+1}} + \sum_{n=0}^N \frac{V_{n-1}^{m+1} - V_n^{m+1}}{V_n^{m+1}} \right) \right] \\ &= -\frac{ad_v V^*}{k(\Delta x)^2} \left(\sum_{n=0}^N \left(\frac{V_{n+1}^{m+1}}{V_n^{m+1}} - 2 + \frac{V_{n-1}^{m+1}}{V_n^{m+1}} \right) \right) \\ &= -\frac{ad_v V^*}{k(\Delta x)^2} \left(\sum_{n=0}^N \frac{V_{n+1}^{m+1}}{V_n^{m+1}} - 2 + \sum_{n=-1}^{N-1} \frac{V_n^{m+1}}{V_{n+1}^{m+1}} \right) \\ &= -\frac{ad_v V^*}{k(\Delta x)^2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{V_{n+1}^{m+1}}{V_n^{m+1}} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{V_n^{m+1}}{V_{n+1}^{m+1}} \right) \\ &= -\frac{ad_v V^*}{k(\Delta x)^2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(V_{n+1}^{m+1} - V_n^{m+1})^2}{V_n^{m+1} V_{n+1}^{m+1}} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Utilisant (H_2) et (H_4) , on obtient

$$\left(1 - \frac{T_n^{m+1}}{T^*}\right) \left(1 - \frac{f(T^*, I^*, V^*)}{f(T_n^{m+1}, I^*, V^*)}\right) \leq 0,$$

et

$$-1 - \frac{V_n^m}{V^*} + \frac{f(T_n^{m+1}, I^*, V^*)}{f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)} + \frac{f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)V_n^m}{f(T_n^{m+1}, I^*, V^*)V^*} \leq 0.$$

D'après la monotoné de g , on a

$$G^{m+1} - G^m \leq 0, \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

D'où l'existence d'une constante \tilde{G} tel que $\lim_{m \rightarrow +\infty} G^m = \tilde{G}$. Par conséquent

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (G^{m+1} - G^m) = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} T_n^m = T^* \text{ et } \lim_{m \rightarrow +\infty} g\left(\frac{I_n^{m+1}V^*}{I^*V_n^{m+1}}\right) = 0,$$

donc

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{I_n^{m+1}V^*}{I^*V_n^{m+1}} = 1, \text{ et } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{I_n^{m+1}}{V_n^{m+1}} = \frac{I^*}{V^*}.$$

Finallement

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} T_n^m = T^*, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} I_n^m = I^*, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} V_n^m = V^*, \quad \text{pour tout } n \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Donc E^* est globalement asymptotiquement stable si $R_0 > 1$. Ceci complète la preuve.

3.4 Applications et Simulations numériques

Le principe de toutes les méthodes de résolutions numériques des équations aux dérivées partielles est d'obtenir des valeurs numériques discrètes qui approchent la solution

exacte. A part dans quelques cas très particulières, il est impossible de calculer explicitement des solutions des différents modèles présentés ci-dessus. Il est donc nécessaire d'avoir recours au calcul numérique sur ordinateur pour estimer qualitativement et quantitativement ces solutions.

Dans la pratique, le modèle proposé ne peut pas être résolu explicitement, en outre les données relatives aux tests cliniques concernant les maladies infectieuses sont collectées en temps discret. Pour ces raisons, nous discrétisons le système en utilisant la méthode mixte d'Euler.

Dans cette section nous analysons notre système par la méthode des différences finies, cette méthode qui est l'une des plus anciennes méthodes de simulation numérique, encore utilisée pour certaines applications et qui est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

L'idée de la méthode est de remplacer les dérivées apparaissant dans l'équation par des différences finies qui les approximent.

Cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en oeuvre car elle procède en deux étapes :

- d'une part la discrétisation par différence finie des opérateurs de dérivation ou différentiation.
- d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenue lorsque la distance entre les points diminue.

Nous commençons par appliquer la méthode de différence finie sur le système (3.2) avec les

conditions aux bords de Neumann et les valeurs initiales (3.3), puis sur des cas particuliers de notre modèle HBV.

3.4.1 Méthode numérique

Nous considérons le modèle (3.2) dans le cas $i = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda - dT(x, t) - f(T(x, t), I(x, t), V(x, t))V(x, t) \\ \frac{\partial I}{\partial t} = f(T(x, t), I(x, t), V(x, t))V(x, t) - aI(x, t) \\ \frac{\partial V}{\partial t} = d_v \Delta V + kI(x, t) - \mu V \end{cases}$$

avec les conditions aux bords de Neuman et les valeurs initiales suivantes :

$$\begin{cases} T(x, 0) = \phi_1(x) \geq 0, I(x, 0) = \phi_2(x) \geq 0, V(x, 0) = \phi_3(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial V}{\partial n} = 0, t > 0, x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

où $\Omega = [p, q]$ avec $p, q \in \mathbb{R}$.

On considère la discrétisation

$$\begin{cases} t_m = m\Delta t & \text{pour } m \in \mathbb{N}. \\ x_n = p + n\Delta x & \text{pour } n \in \{0, 1, \dots, N\} \end{cases}$$

avec Δt et $\Delta x = \frac{q-p}{N}$ les pas de temps et d'espace respectivement.

Notant

$$T(x_n, t_m) = T_n^m, I(x_n, t_m) = I_n^m, V(x_n, t_m) = V_n^m.$$

Le modèle discret s'écrit

$$\begin{cases} \frac{T_n^{m+1} - T_n^m}{\Delta t} = \lambda - dT_n^{m+1} - f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)V_n^m, \\ \frac{I_n^{m+1} - I_n^m}{\Delta t} = f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)V_n^m - aI_n^{m+1}, \\ \frac{V_n^{m+1} - V_n^m}{\Delta t} = d_v \frac{V_{n+1}^{m+1} - 2V_n^{m+1} + V_{n-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} + kI_n^{m+1} - \mu V_n^{m+1}, \end{cases}$$

Les conditions initiales et les données aux bords discrètes sont

$$T_n^0 = \phi_1(x_n), I_n^0 = \phi_2(x_n), V_n^0 = \phi_3(x_n), \text{ pour } n \in \{0, 1, \dots, N\},$$

et

$$V_{-1}^m = V_0^m, V_N^m = V_{N+1}^m \text{ pour } m \in \mathbb{N}.$$

ce qui nous donne le schéma suivant

$$\begin{cases} T_n^{m+1} = T_n^m + \Delta t (\lambda - dT_n^{m+1} - f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)V_n^m), \\ I_n^{m+1} = \frac{I_n^m + \Delta t f(T_n^{m+1}, I_n^m, V_n^m)V_n^m}{1 + a\Delta t}, \\ BV^{m+1} = V^m + k\Delta t I^{m+1} \end{cases} \quad (3.9)$$

où la matrice carrée B de dimension $(N+1) \times (N+1)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1 + \frac{d_v \Delta t}{(\Delta x)^2} + \mu \Delta t, \\ \sigma_2 &= -\frac{d_v \Delta t}{(\Delta x)^2}, \\ \sigma_3 &= 1 + \frac{2d_v \Delta t}{(\Delta x)^2} + \mu \Delta t. \end{aligned}$$

3.4.2 Applications

Nous donnons quelques exemples afin d'appliquer nos résultats théoriques obtenus.

Pour ceci, nous considérons le système (3.9), où $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ et $m \in \mathbb{N}$, et

$$f(T, I, V) = \frac{\beta T}{\alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 I + \alpha_3 V + \alpha_4 IV}, \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq 0, \alpha_0 \geq 0 \text{ et } \beta > 0.$$

La fonction f ainsi considérée vérifie les hypothèses **(H1)** – **(H2)** – **(H3)**.

Exemple 46 Le cas $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ et $\alpha_0 = 1$ donne $f(T, I, V) = \beta T$.

Après discrétisation, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \frac{T_n^{m+1} - T_n^m}{\Delta t} = \lambda - dT_n^{m+1} - \beta T_n^{m+1} V_n^m, \\ \frac{I_n^{m+1} - I_n^m}{\Delta t} = \beta T_n^{m+1} V_n^m - aI_n^{m+1}, \\ \frac{V_n^{m+1} - V_n^m}{\Delta t} = d_v \frac{V_{n+1}^{m+1} - 2V_n^{m+1} + V_{n-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} + kI_n^{m+1} - \mu V_n^{m+1}, \end{cases} \quad (3.10)$$

Les conditions initiales et aux bords discrètes sont

$$T_n^0 = \phi_1(x_n), I_n^0 = \phi_2(x_n), V_n^0 = \phi_3(x_n), \text{ pour } n \in \{0, 1, \dots, N\},$$

et

$$V_{-1}^m = V_0^m, V_N^m = V_{N+1}^m \text{ pour } m \in \mathbb{N}.$$

Il est facile de vérifier **(H4)**. De plus,

$$R_0 = \frac{\lambda k \beta}{d \mu a}, T^* = \frac{\lambda}{d R_0}, V^* = \frac{k I^*}{\mu}, I^* = \frac{d \mu (R_0 - 1)}{k \beta}$$

ainsi $E_f \left(\frac{\lambda}{d}, 0, 0 \right)$ l'équilibre sans infection et $E^* (T^*, I^*, V^*)$ l'équilibre d'infection chronique. Par conséquent, en appliquant les théorèmes 41 et 43, nous obtenons les résultats suivants

Corollaire 47 Pour tout $\Delta t > 0$ et $\Delta x > 0$, on a

(i) si $R_0 \leq 1$, alors l'équilibre sans infection E_f du système (3.10) est globalement asymptotiquement stable .

(ii) si $R_0 > 1$, alors l'équilibre d'infection chronique E^* du système (3.10) est globalement asymptotiquement stable.

Maintenant, on va vérifier nos résultats précédemment étudiés avec des simulations numériques.

On considère $\Omega = [0, 50]$ $d_v = 0.01$, $\Delta t = 0.1$ et $\Delta x = 0.5$, $\lambda = 10$, $a = 0.5$, $\beta = 2.4 \times 10^{-5}$, $d = 0.0139$, $\mu = 3$

Pour $k = 50$, on obtient $R_0 = \frac{\lambda k \beta}{d \mu a} = 0.576 < 1$. L'équilibre sans infection $E_f (719.4245, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable, ce qui signifie que le virus est disparu (a été nettoyé de la cellule) et le patient est complètement guéri (voir Figure 11).

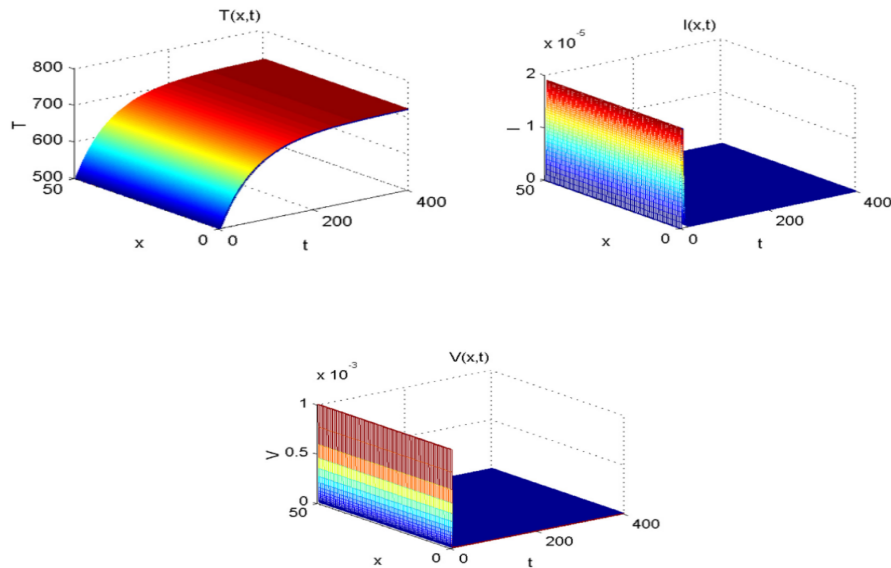


Figure 11

Maintenant, si $k = 1200$ et en gardant les mêmes valeurs pour les autres paramètres, $R_0 = 13.8129 > 1$ et le système (3.10) a un unique équilibre d'infection chronique $E^* (52.08, 18.55, 7.42)$. qui est globalement asymptotiquement stable, ce qui veut dire que le virus persiste dans le corps du patient et l'infection est devenue chronique (voir Figure 12).

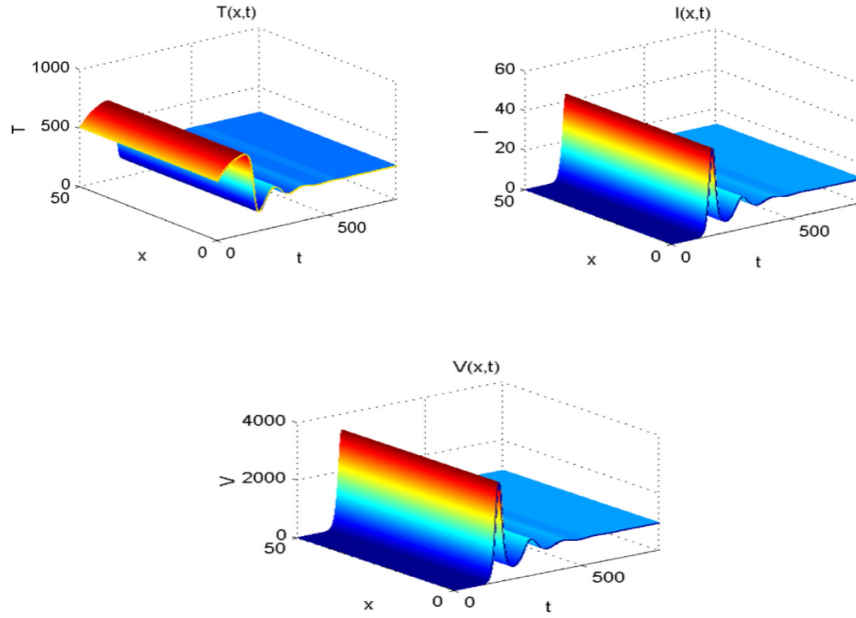


Figure 12

Exemple 48 Pour $\alpha_0 = 1, \alpha_2 = \alpha_4 = 0, \alpha_3 > 0$ on a $f(T, I, V) = \frac{\beta T}{1 + \alpha_3 V}$.

Le modèle dans ce cas est

$$\begin{cases} \frac{T_n^{m+1} - T_n^m}{\Delta t} = \lambda - dT_n^{m+1} - \frac{\beta T_n^{m+1} V_n^m}{1 + \alpha_3 V_n^m}, \\ \frac{I_n^{m+1} - I_n^m}{\Delta t} = \frac{\beta T_n^{m+1}}{1 + \alpha_3 V_n^m} V_n^m - aI_n^{m+1}, \\ \frac{V_n^{m+1} - V_n^m}{\Delta t} = d_v \frac{V_{n+1}^{m+1} - 2V_n^{m+1} + V_{n-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} + kI_n^{m+1} - \mu V_n^{m+1} \end{cases} \quad (3.11)$$

f ainsi écrite vérifie l'hypothèse **(H4)** puisque

$$\left(1 - \frac{f(T, I, V)}{f(T, I^*, V^*)}\right) \left(\frac{f(T, I^*, V^*)}{f(T, I, V)} - \frac{V}{V^*}\right) = \frac{-\alpha_3(V - V^*)^2}{V^*(1 + \alpha_3 V)^2} (1 + \alpha_3(V + V^*)) \leq 0.$$

Le nombre de reproduction de base du système(3.11)est donné par

$$R_0 = \frac{\lambda k \beta}{d}, T^* = \frac{\lambda - aI^*}{d}, V^* = \frac{d(R_0 - 1)}{\alpha_3 d + \beta}, I^* = \frac{d\mu(R_0 - 1)}{k(\alpha_3 d + \beta)}.$$

Par conséquent, en appliquant les théorèmes 41 et 43, Nous obtenons les résultats suivants.

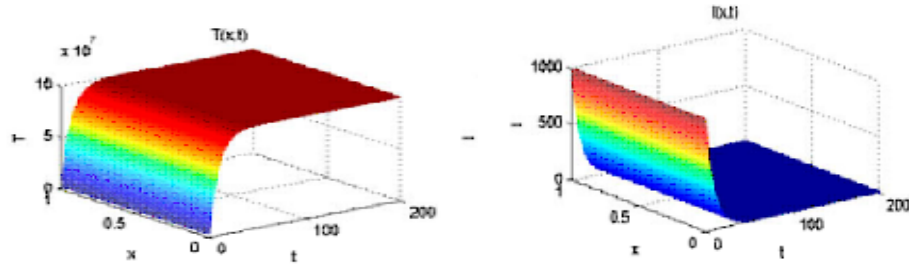
Corollaire 49 Pour tout $\Delta t > 0$ et $\Delta x > 0$, on a

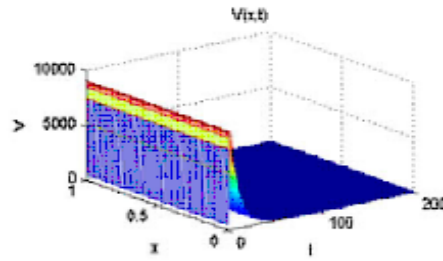
(i) si $R_0 \leq 1$, alors l'équilibre sans infection E_f du système (3.11) est globalement asymptotiquement stable

(ii) si $R_0 > 1$, alors l'équilibre d'infection chronique E^* du système (3.11) est globalement asymptotiquement stable.

Pour la simulation numérique du système (3.11); nous choisissons les valeurs des conditions initiales suivantes $T(x, 0) = 3 \times 10^6$, $I(x, 0) = 1000$, $V(x, 0) = 500$, les autres paramètres $\Omega = [0, 1]$ $d_v = 0.5$, $\Delta t = 0.2$, $\Delta x = 0.01$, $\lambda = 10^7$, $a = 0.1$, $d = 0.1$, $\mu = 5$ et $\alpha_3 = 0.002$ avec différent valeurs de β :

Pour $\beta = 5 \times 10^{-12}$, $R_0 = 0.05 < 1$, l'équilibre sans infection $E_f(10^8, 0, 0)$ du système (3.11) est globalement asymptotiquement stable (voir Figure 13).





Pour $\beta = 5 \times 10^{-10}$, $R_0 = 5 > 1$, l'équilibre d'infection chronique $E^* (10^8, 199.9995, 2000)$ du système (3.11) est globalement asymptotiquement stable (voir Figure14).

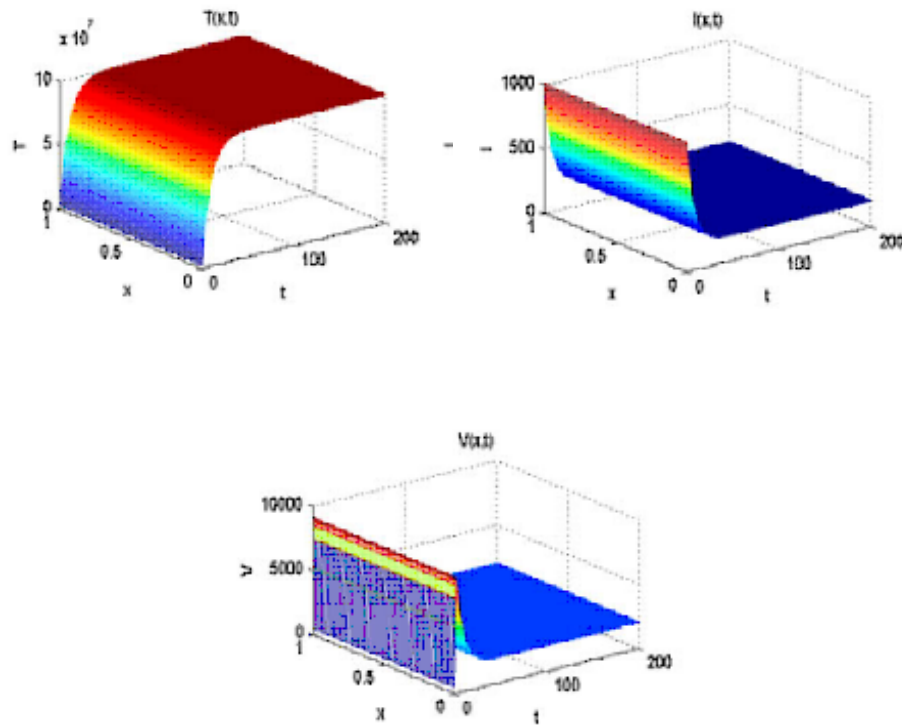


Figure 14

Notons que ce cas a été traité par W.Qin et al. [37] dans le cas discret et dans le cas continue avec retard par Hattaf [22] avec $\alpha_3 = 0$, par contre notre cas consiste une généralisation puisque Yang [25] l'a traité seulement dans le cas discret.

Exemple 50 cas : $\alpha_1 = 0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \neq 0$ et $\alpha_0 > 0$ et $f(T, I, V) = \frac{\beta T}{\alpha_0 + \alpha_2 I + \alpha_3 V + \alpha_4 IV}$;

on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \frac{T_n^{m+1} - T_n^m}{\Delta t} = \lambda - dT_n^{m+1} - \frac{\beta T_n^{m+1}}{\alpha_0 + \alpha_2 I_n^m + \alpha_3 V_n^m + \alpha_4 I_n^m V_n^m} V_n^m, \\ \frac{I_n^{m+1} - I_n^m}{\Delta t} = \frac{\beta T_n^{m+1}}{\alpha_0 + \alpha_2 I_n^m + \alpha_3 V_n^m + \alpha_4 I_n^m V_n^m} V_n^m - aI_n^{m+1}, \\ \frac{V_n^{m+1} - V_n^m}{\Delta t} = d_v \frac{V_n^{m+1} - 2V_n^{m+1} + V_n^{m+1}}{(\Delta x)^2} + kI_n^{m+1} - \mu V_n^{m+1}, \end{cases} \quad (3.12)$$

Il est facile de vérifier que les hypothèses **(H1)** – **(H2)** – **(H3)** et **(H4)** sont satisfaites.

Nous avons le résultat suivant :

Corollaire 51 Pour tout $\Delta t > 0$ et $\Delta x > 0$, on a

- (i) si $R_0 \leq 1$, alors l'équilibre sans infection E_f du système (3.12) est globalement asymptotiquement stable
- (ii) si $R_0 > 1$, alors l'équilibre sans infection E_f du système du système (3.12) devient instable et l'équilibre d'infection chronique E^* du système (3.12) est globalement asymptotiquement stable.

Pour la simulation numérique, nous choisissons les valeurs des paramètres comme suit :

$\lambda = 5.04 \times 10^5$, $k = 200$, $i = 0$, $a = 0.0693$, $\beta = 3.6 \times 10^{-5}$, $d = 0.0039$, $\mu = 0.67$,
ainsi $R_0 = \frac{\lambda k \beta}{d \mu a} = 0.1545 < 1$. Donc le système (3.12) a un équilibre sans infection $E_f (1.2923 \times 10^8, 0, 0)$. qui est globalement asymptotiquement stable, et la solution du problème (3.12) converge vers E_f (voir Figure 15), ce qui signifie que la disparition du virus

et de l'infection, et le patient est complètement guéri .

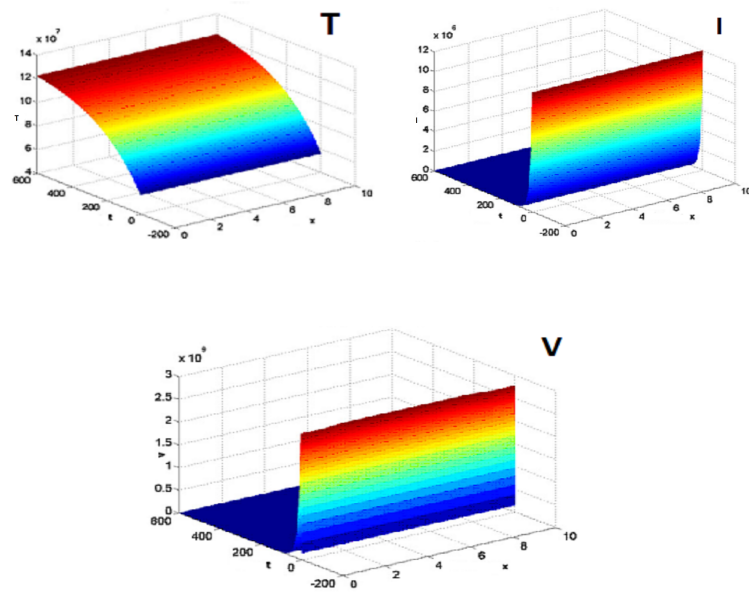
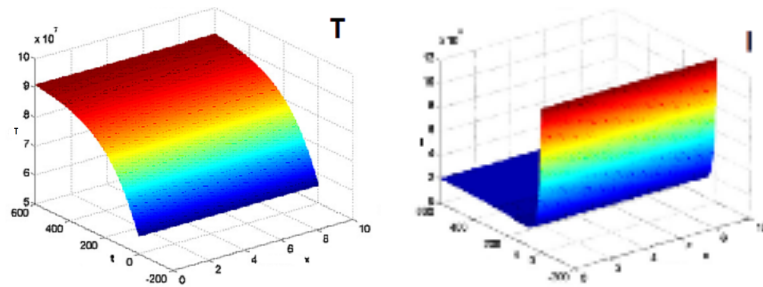


Figure 15

Pour le cas $\beta = 0.0018$ et avec les mêmes paramètres, on a $R_0 = 7.7233 > 1$ et le système (3.12) a un unique équilibre d'infection chronique $E^* (9.2191 \times 10^7, 2.0764 \times 10^6, 6.1982 \times 10^8)$ qui est globalement asymptotiquement stable, ce qui veut dire que le virus persiste dans le corps du patient et l'infection est devenue chronique (voir Figure 16).



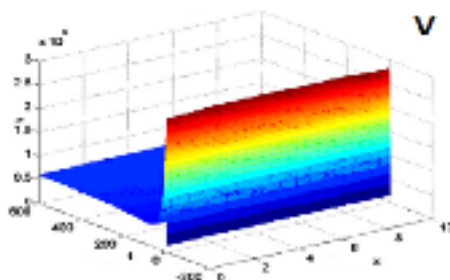


Figure 16

3.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif l'étude des maladies infectieuses, précisément la maladie de VHB. Notre but était de chercher la meilleure amélioration des modèles déterministes et de mettre en œuvre des modèles qui décrivent le mieux et d'une manière plus réaliste la dynamique des maladies infectieuses en tenant compte des diffusions dues à la mobilité des individus. Ainsi nous avons obtenus un système de réaction-diffusion représentant un modèle avec un taux d'incidence spécifique qui généralise plusieurs taux d'incidence existant dans la littérature, et étudier son impact sur la stabilité des équilibres.

L'étude de la stabilité des points d'équilibre avec infection et sans infection a été réalisée, en liant avec le nombre de reproduction et ceci dans le cas continu et discret.

L'étude numérique du phénomène a fait l'objet de la dernière partie. nous avons pour ceci adopté la méthode de différence finie pour la discrétisation et développer un code sous Matlab. Nos résultats numériques ont confirmé les résultats mathématiques pour prouver encore une fois que la dynamique du problème est complètement déterminée par le nombre basique de reproduction.

Chapitre 4

Etude Mathématique et Simulation

Numérique d'une classe de modèle

bioéconomique d'une pêcherie

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter l'étude mathématique et la simulation numérique d'un modèle bioéconomique d'une pêcherie [2]. En particulier, il traite l'application des mathématiques et de l'informatiques à la gestion de pêcheries.

Il existe de très nombreux modèles mathématiques élaborés selon différents paramètres et permettant de faire des projections sur l'évolution des pêcheries et des stocks des espèces marines [1]- [5].

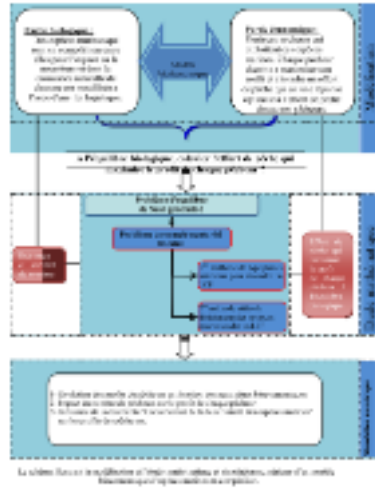
Ces modèles peuvent ensuite être classés en deux parties, celles purement biologiques qui ne tiennent pas compte des intérêts économiques et celles bioéconomiques qui intègrent la production et les bénéfices des pêcheurs [6]- [12].

Dans ce travail, nous proposons un modèle de deux pêcheurs agissant dans une zone contenant deux espèces de poissons marins. L'évolution des populations de poissons est décrite par un modèle dépendant de la densité tenant compte de la concurrence entre pêcheurs (voir le modèle de Verhulst [13]). Plus spécifiquement, le modèle bioéconomique comprend trois parties : une partie biologique qui relie les captures à la biomasse, une partie de l'exploitation qui relie les captures à l'effort de pêche à l'équilibre et une partie économique qui lie la pêche à but lucratif.

L'objectif de chaque pêcheur est de maximiser son revenu sans consulter l'autre en respectant deux contraintes : la gestion durable des ressources ; et préservation de la biodiversité. Avec toutes ces considérations, notre problème conduit à un problème d'équilibre de Nash Généralisé, qui lors de sa résolution, n'est transféré en un problème de complémentarité

linéaire.

Ce travail est organisé comme suit. Dans la section 1, nous présentons une étude mathématique du modèle bioéconomique d'une espèce marine capturée par un ou deux pêcheurs, dont le but est de trouver l'effort de pêche qui maximise le profit de chaque pêcheur en tenant compte des contraintes liées à la conservation de la biodiversité. La section 2 présente un modèle mathématique de deux espèces marines exploitées par deux pêcheurs, dont le point d'équilibre de Nash sera calculé dans la section 3. Dans la dernière section, nous donnons une simulation numérique du modèle mathématique et la discussion des résultats. le schéma suivant situe le contexte général de ce chapitre .:



4.2 Etat de l'art de la pêche : gestion optimale statique et dynamique

4.2.1 Modèle Biologique

Les facteurs biologiques qui jouent un rôle dans la dynamique des populations ne sont autres que le taux d'accroissement qui comprend la natalité et la mortalité ainsi que les mouvements d'individu.

D'après le modèle de dynamique de population de Malthus, la densité de population d'un stock suit l'équation suivante :

$$X_{t+1} = X_t + \frac{dX}{dt} \quad (4.1)$$

avec X_t : Densité de population au temps t

Pour une exploitation durable des ressources, il faut seulement prélever le surplus du stock.

Ainsi la population initiale ne sera pas impactée par l'activité et restera à l'équilibre.

Sur l'équation (4.1) cela revient à dire :

$$\frac{dX}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

soit

$$X_{t+1} = X_t \quad (4.3)$$

En utilisant le modèle de Verhulst :

$$\frac{dX}{dt} = rX \left(1 - \frac{X}{K} \right) - H \quad (4.4)$$

avec r : Taux de croissance du stock, K : Capacité de charge du système et H : Mortalité par exploitation.

D'après (4.2) et (4.4) il y a une exploitation durable si et seulement si :

$$rX \left(1 - \frac{X}{K} \right) = H \quad (4.5)$$

L'équilibre est atteint lorsque le recrutement R est égal à la mortalité par exploitation H .

L'exploitation du stock peut être soumise à différentes gestions permettant de contrôler le taux de mortalité. Un quota de capture peut être fixé, indépendant de la densité de population, mais il est également possible de faire varier le taux de mortalité en fonction des paramètres (biologiques ou économiques) du système.

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux gestions suivantes :

Gestion par quotas

Dans ce modèle, le nombre total de captures autorisées est fixe, la mortalité par exploitation sera constante et

$$R = rX \left(1 - \frac{X}{K} \right) \quad (4.6)$$

Il existe deux équilibres : E_2 qui est stable tandis que E_1 est instable. Cela signifie que l'application d'un TAC (Total autorisé de capture) sur une population à forte densité laisse un stock constant et stable, alors que pour une faible densité de population, le stock risque

de s'effondrer et de disparaître.

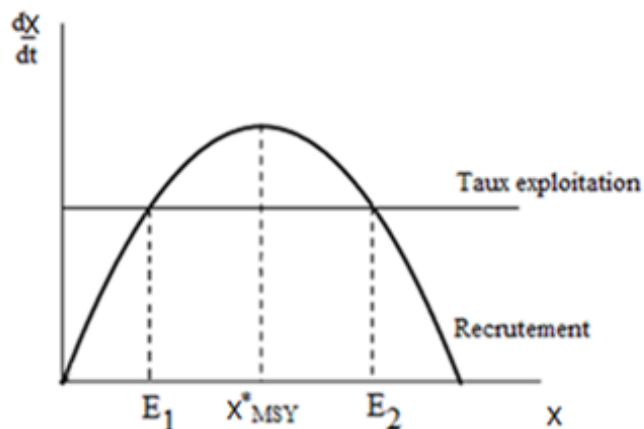


Figure 1 : Dynamique du stock en fonction de la population dans un modèle TAC

Plus le TAC est faible et plus les deux équilibres seront éloignés : à forte densité de population, l'équilibre reste stable. Cet idéal pose un problème d'un point de vue purement économique. En effet, un faible TAC pour les pêcheurs, limite leur nombre de captures et limite également leurs revenus. Ils ont alors tendance à pêcher plus afin d'arriver à un Rendement d'Exploitation Durable Maximale MSY (Maximum Sustainable Yield). Dans ce cas les deux équilibres se retrouvent confondus en un équilibre instable. Le modèle montre ici une limite puisqu'il ne permet pas d'exploiter au maximum les ressources [1]-[5].

Gestion par effort constant

Un autre modèle propose d'appliquer un effort constant sur le stock et de contrôler le nombre de captures en fonction de la densité de population.

D'où :

$$H = qEX \quad (4.7)$$

avec q : Capturabilité, X : Densité de population et E : Effort.

En utilisant cette méthode, il y a seulement un équilibre stable et ce, même si le MSY est atteint.

Le MSY est au maximum de la fonction de recrutement :

$$\frac{\partial rX \left(1 - \frac{X}{K}\right)}{\partial X} = 0.$$

Soit

$$\begin{aligned} r - \frac{2rX}{K} &= 0 \\ X &= \frac{K}{2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

En remplaçant(4.8) dans (4.6) et dans (4.7), cela donne :

$$E_{MSY} = qE \frac{K}{2}. \quad (4.9)$$

Pour tendre vers un point d'équilibre X^* , il faut que le taux de croissance r soit supérieur au produit de la capturabilité et de l'effort de pêche : $qE < r$

Il est possible de calculer la densité de population à l'équilibre X^* , en fonction de l'effort,

E :

$$\frac{dX}{dt} = 0 \quad (4.10)$$

soit

$$X^* = K - \frac{qK}{r}E \quad (4.11)$$

ce qui donne une droite d'ordonnée à l'origine K et de pente $\frac{-qK}{r}$.

On peut également calculer le rendement à l'équilibre en remplaçant (4.11) dans (4.7) :

$$H(X^*) = qEX^* = qEK \left(1 - \frac{qE}{r}\right)$$

les paramètres K et r peuvent être estimés d'après (4.9) si q est connu : $r = 2qE_{MSY}$

Grâce à ce type de gestion, les ressources peuvent être exploitées au maximum et cela permet d'estimer les paramètres du stock. Cependant, ce modèle suppose que K et r sont constants et que l'équilibre du système est atteint instantanément, alors qu'en réalité, la stochasticité agit sur les paramètres du système. De plus, il est difficile de faire respecter un effort constant, car la densité de population agit sur l'effort via le prix. La raréfaction d'une espèce augmente son prix de vente et tend à augmenter l'effort. Il est possible de complexifier ce modèle, en prenant en compte le fait qu'il existe une corrélation positive entre la densité du stock et le taux de croissance des individus qui le composent, appelée effet Allee ou densité dépendance positive du système.

(4.6) devient :

$$R = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) \left(\frac{X}{A} - 1\right) \quad (4.12)$$

avec $\left(\frac{X}{A} - 1\right)$: coefficient d'accélération, ainsi (3.5) devient

$$\frac{dX}{dt} = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) \left(\frac{X}{A} - 1\right) - qEX \quad (4.13)$$

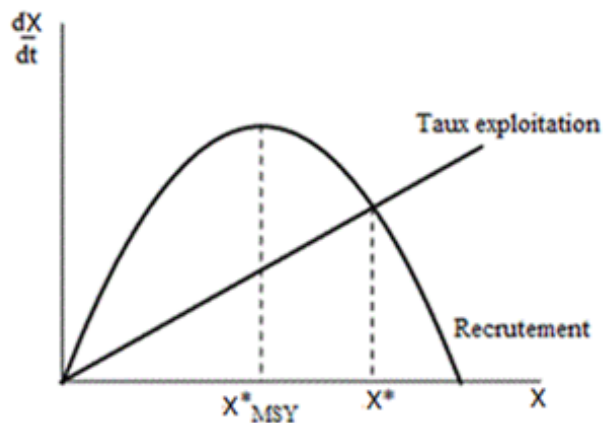


Figure 2 : Dynamique du stock en fonction de la population dans un modèle de gestion à effort constant

Il existe alors deux points d'équilibres : E_1 instable et E_2 stable. L'ajout de la densité dépendance positive déstabilise le système précédent, il faut garder le stock loin du point E_1 et donc limiter l'effort pour conserver l'équilibre. S'il y a effet Allee, le stock ne peut plus être exploité au MSY, car l'équilibre est semi stable et la population risquerait de s'effondrer à cause des facteurs stochastiques [6]-[8].

4.2.2 Modèle bioéconomiques

Les contraintes majeures à prendre en compte dans la gestion d'une pêcherie sont donc de types économiques.

Les modèles bioéconomiques permettent d'évaluer la rentabilité de l'activité, en incluant les paramètres économiques. L'aspect commercial des pêches peut être évalué avec ou sans gestion. La différence entre les bénéfices va résider entre la mise en commun ou non des ressources (assimilable à la théorie des jeux).

Pêcherie en libre service

Dans ce cas, aucune régulation de l'activité n'est considérée, les prédictions portent alors sur les bénéfices de la pêche selon l'effort et non plus sur la densité de population du stock. Le bénéfice B de la pêcherie dépend du prix de vente, du nombre d'individus capturés, du coût de l'effort de pêche et de l'effort.

D'où :

$$B(E) = pY - cE \quad (4.14)$$

avec p : Prix de vente et Y : Nombre de captures. Or

$$Y = H \text{ et } X^* = K \left(1 - \frac{qE}{r}\right)$$

ainsi

$$B(E) = pqEK \left(1 - \frac{qE}{r}\right) - cE$$

et

$$E^* = r/q \left(1 - \frac{c}{pqK}\right)$$

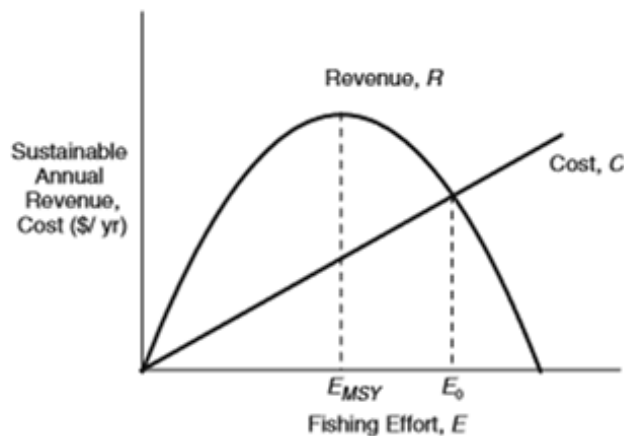


Figure 3 : The static Gordon model of fishery economics

Graphiquement, lorsque l'effort correspondant au MSY est dépassé, il y a une diminution des bénéfices. De plus, l'équilibre du système est alors atteint lorsque les revenus sont nuls. Une pêcherie non gérée (en libre accès) n'est pas économiquement rentable, puisque l'effort de pêche dépassera l'effort au MSY et le système tendra vers un équilibre sans bénéfices.

Pêcherie avec gestionnaire

Le modèle sans gestion a montré qu'il était impossible de faire des bénéfices individuels, sans réduire l'effort collectif de la pêcherie. Cela révèle un conflit entre intérêt personnel et intérêt du groupe, qui aboutit à un échec économique. Il faut donc réduire l'effort tout en maximisant les gains. Ainsi, le point MEY (Maximum Economic Yield) est défini comme l'effort pour un rendement économique maximum. Ce point correspond au maximum de la courbe des bénéfices, pour le déterminer, il suffit de trouver le point de la courbe pour lequel la pente est nulle :

$$\frac{\partial B(E)}{\partial E} = 0$$

soit

$$pqK - \frac{2pq^2K}{r}E_{MEY} = 0$$

$$E_{MEY} = r/2q(1 - c/pqK)$$

donc

$$E_{MEY} = 1/2E^*$$

Étant donné que l'effort pour optimiser le bénéfice (E_{MEY}) est inférieur à l'effort du point d'équilibre (E^*), le but est de baisser l'effort pour que le point d'équilibre tende vers E_{MEY} . Différentes stratégies de gestion ont donc été élaborées. La première consiste à réguler l'effort

par la mise en place de périodes de fermeture des zones de pêche. Cette méthode a des limites : lors des périodes de fermeture les bénéfices vont diminuer, alors qu'en période d'ouverture l'effort de pêche va fortement augmenter (via une optimisation des engins et des techniques de pêche par exemple). Cela induit un coût d'exploitation plus important et un déclin de la population. Une autre stratégie consiste à créer au sein des pêcheries, des Aires Marines Protégées (AMP) permettant de diminuer de manière efficace et durable l'effort de pêche appliqué [1].

La section suivante porte sur l'étude d'un problème bioéconomique d'une seule espèce marine exploitée par un seul pêcheur dans le premier cas et par deux pêcheurs dans le deuxième cas.

4.3 Modèle bioéconomique pour une espèce marine

4.3.1 Cas d'une espèce marine exploitée par un pêcheur

L'intérêt réside dans l'étude du problème bioéconomique d'une espèce marine exploitée par un pêcheur, caractérisé et présenté par l'équation suivante :

$$\frac{dX}{dt} = rX \left(1 - \frac{X}{K} \right) - qEX \quad (4.15)$$

où r est le taux de croissance intrinsèque, K est la capacité de charge, E est l'effort de pêche pour exploiter l'une des espèces marines par le pêcheur et q est le coefficient de capturabilité des espèces marines.

Notre objectif est de calculer l'effort E qui maximise les profits du pêcheur π

$$\pi(E) = pX - cE \quad (4.16)$$

où p est le prix de la population de poissons et $pH = pqEX$ est le revenu total.

À l'équilibre, $X = K \left(1 - \frac{q}{r}E\right)$. Ensuite

$$\pi(E) = -K \frac{pq^2}{r} E^2 + (pqK - c) E.$$

Comme π est une fonction de second ordre avec $-K \frac{pq^2}{r} < 0$, π a un maximum unique E^* donné par

$$E^* = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{c}{Kpq^2} \right).$$

4.3.2 Cas d'une espèce marine exploitée par deux pêcheurs

dans ce cas,

$$\frac{dX}{dt} = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - H_1 - H_2 \quad (4.17)$$

où $H_i = qE_iX$ pour $i = 1, 2$.

Programme d'optimisation

Notre objectif est de trouver $E(E_1, E_2)$ qui maximise le profit $\pi(\pi_1, \pi_2)$ des deux pêcheurs.

À l'équilibre, $X = K \left(1 - \frac{1}{r}q(E_1 + E_2)\right)$. Le premier pêcheur doit résoudre le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \pi_1(E) = -\frac{K}{r} pq^2 E_1^2 + \frac{K}{r} \left(r pq - \frac{c_1}{K} r - pq^2 E_2 \right) E_1 \\ \text{sujet à } \left\{ \begin{array}{l} q_1 E_1 + q_2 E_2 \leq r \\ E_1 > 0 \\ E_2 \text{ est donné} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

et le deuxième pêcheur doit résoudre le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \pi_2(E) = -\frac{K}{r}pq^2E_2^2 + \frac{K}{r}\left(rpq - \frac{c_2}{K}r - pq^2E_1\right)E_2 \\ \text{sujet à } \left\{ \begin{array}{l} q_1E_1 + q_2E_2 \leq r \\ E_2 > 0 \\ E_1 \text{ est donné} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Résolution du problème

L'objectif est de calculer l'effort de pêche qui maximise le profit de chaque pêcheur lors de l'équilibre biologique pour les deux problèmes (4.18) et (4.19).

Nous rappelons que le point $E^*(E_1^*, E_2^*)$ est appelé point d'équilibre de Nash si et seulement si E_1^* est une solution de problème (4.18) pour E_2^* donné, et E_2^* est une solution de problème (4.19) pour E_1^* donné

Les conditions essentielles de Karush-Kuhn-Tucker appliquées au problème (4.18) et (4.19) exigent que si E_1^* est une solution du problème (4.18) et si E_2^* est une solution du problème (4.19), alors il existe des constantes $m_1, m_2, v \geq 0$ tels que

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2\frac{K}{r}pq & \frac{K}{r}pq & -\frac{K}{r} \\ \frac{K}{r}pq & 2\frac{K}{r}pq & -\frac{K}{r} \\ -q & -q & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1^* \\ E_2^* \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Kp + \frac{c_1}{q} \\ -Kp + \frac{c_2}{q} \\ r \end{pmatrix}$$

Ce problème est équivalent au problème de complémentarité linéaire $LCP(M, b)$ où

$$M = \begin{bmatrix} 2\frac{K}{r}pq_1 & \frac{K}{r}pq_2 & -\frac{K}{r} \\ \frac{K}{r}pq_1 & 2\frac{K}{r}pq_2 & -\frac{K}{r} \\ -q_1 & -q_2 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} -Kp + \frac{c_1}{q} \\ -Kp + \frac{c_2}{q} \\ r \end{pmatrix}$$

La matrice M est P-matrice, alors $LCP(M, b)$ a une solution donnée par

$$\begin{cases} E_1^* = \frac{r}{pK} \frac{c_1}{q^2} \\ E_2^* = \frac{r}{pK} \frac{c_2}{q^2} \end{cases}.$$

4.4 Modèle bioéconomique pour deux espèces marines

De nombreux modèles mathématiques développés selon différents paramètres permettent de faire des projections sur l'évolution de la pêche et des stocks des espèces marines.. Les modèles peuvent ensuite être classés en deux parties : des composantes purement biologiques qui ne tiennent pas compte des intérêts économiques et des composantes bioéconomiques qui intègrent les rendements des pêcheurs.

4.4.1 Modèle biologique

Les facteurs biologiques qui jouent un rôle dans la dynamique de ces populations ne sont autres que les taux de croissance de cette population, qui comprennent les naissances et les décès ainsi que les mouvements individuels.

Selon le modèle dynamique de population de Malthus(voir G. F. Gause [14]) :

$$\begin{cases} \frac{dX_1(t)}{dt} = r_1 X_1 \left(1 - \frac{X_1}{K_1} \right) - c_{12} X_1 X_2 \\ \frac{dX_2(t)}{dt} = r_2 X_2 \left(1 - \frac{X_2}{K_2} \right) - c_{21} X_1 X_2 \end{cases} \quad (4.20)$$

où r_i est le taux de croissance du stock pour $i = 1, 2$, K_i est la capacité de charge du système pour $i = 1, 2$, X_i est la densité de population $i = 1, 2$ et $(c_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq 2}$ Coefficient de compétition entre les espèces i et les espèces j .

$$\begin{cases} X_1^* = \frac{r_2 K_1 (r_1 - c_{12} K_2)}{r_1 r_2 - c_{12} c_{21} K_1 K_2} \\ X_2^* = \frac{r_1 K_2 (r_2 - c_{21} K_1)}{r_1 r_2 - c_{12} c_{21} K_1 K_2} \end{cases}$$

Cette solution peut donner la coexistence des deux espèces de poissons, auquel cas les biomasses des deux espèces de poissons sont positifs avec $r_1 - c_{12} K_2 > 0$ et $r_2 - c_{21} K_1 > 0$.

4.4.2 Analyse d'équilibre

Les solutions à l'état d'équilibre sont les solutions des équations

$$\begin{cases} r_1 X_1 \left(1 - \frac{X_1}{K_1}\right) - c_{12} X_1 X_2 = 0 \\ r_2 X_2 \left(1 - \frac{X_2}{K_2}\right) - c_{21} X_1 X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Ce système d'équations admet quatre solutions $P_1(0, 0)$, $P_2(K_1, 0)$, $P_3(0, K_2)$ et $P_4(X_1^*, X_2^*)$

où

$$\begin{cases} X_1^* = \frac{r_2 K_1 (r_1 - c_{12} K_2)}{r_1 r_2 - c_{12} c_{21} K_1 K_2} \\ X_2^* = \frac{r_1 K_2 (r_2 - c_{21} K_1)}{r_1 r_2 - c_{12} c_{21} K_1 K_2} \end{cases}.$$

La matrice variationnelle du système (4.21) est

$$J = \begin{bmatrix} r_1 \left(1 - \frac{2X_1}{K_1}\right) - c_{12} X_2 & -c_{12} X_1 \\ -c_{21} X_2 & r_2 \left(1 - \frac{2X_2}{K_2}\right) - c_{21} X_1 \end{bmatrix}$$

Lemme 52 1- le point $P_1(0, 0)$ est instable.

2- le point $P_2(K_1, 0)$ est instable.

3- le point $P_3(0, K_2)$ est instable.

2- le point $P_4(X_1^*, X_2^*)$ est stable.

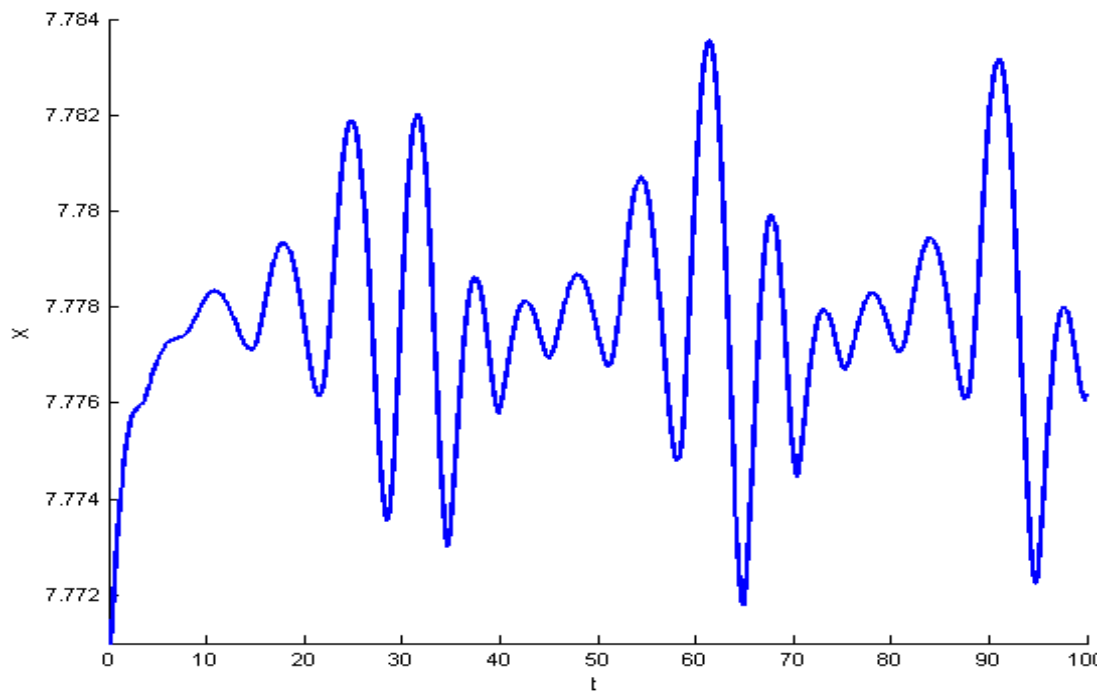
Preuve 53 La preuve est la même pour les quatre point d'équilibre. Nous allons ici présenter la preuve du point P_4 .

La matrice variationnelle du système (4.21) à l'état d'équilibre $P_4(X_1^*, X_2^*)$ est

$$J_4 = \begin{bmatrix} -r_1 \frac{X_1^*}{K_1} & -c_{12} X_1^* \\ -c_{21} X_2^* & -r_2 \frac{X_2^*}{K_2} \end{bmatrix}$$

$\text{trace}(J_4) = -r_1 \frac{X_1^*}{K_1} - r_2 \frac{X_2^*}{K_2} < 0$ et $\det(J_4) = \left(\frac{r_1}{K_1} \frac{r_2}{K_2} - c_{12} c_{21} \right) X_1^* X_2^* > 0$. Alors, le point

$P_4(X_1^*, X_2^*)$ est stable.



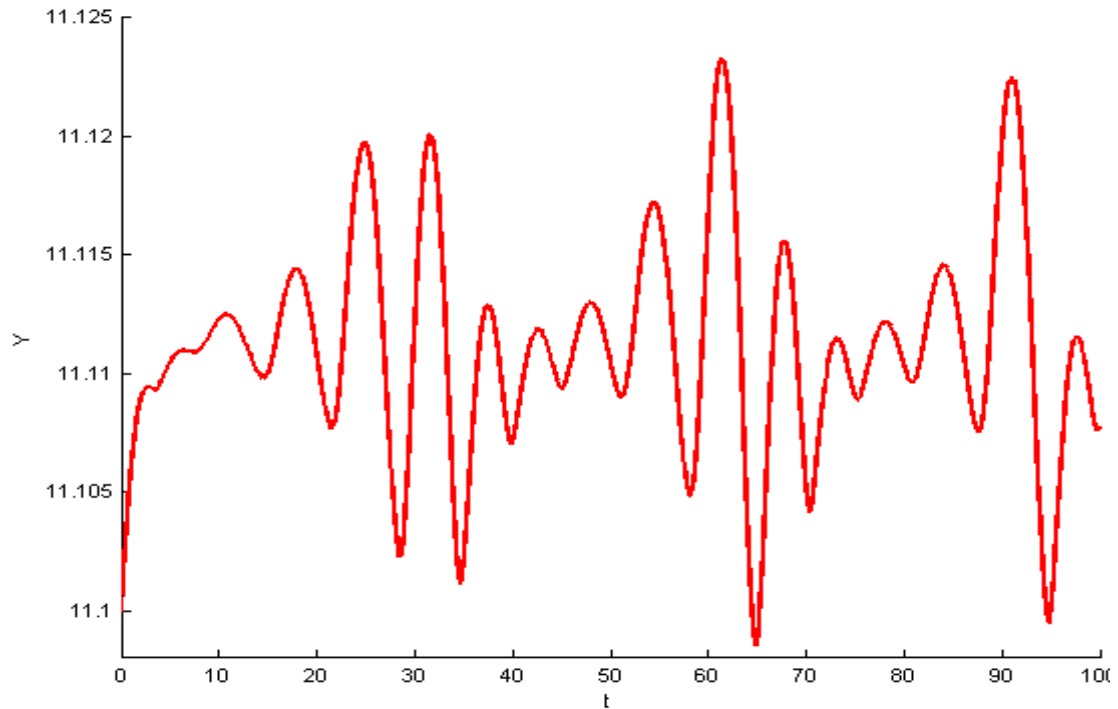


Figure 4 . Comportements et portrait de phase du système (4.21) au $P_4(7.776189158, 11.10779185)$. avec la valeur initial $x(0) = 7.77$, $y(0) = 11.10$. L'état d'équilibre P_4 du système (4) est stable. Ici $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.6$, $K_1 = 10$, $K_2 = 15$, $c_{12} = 0.01$ et $c_{21} = 0.02$.

4.4.3 Modèle bioéconomique

Le modèle pour l'évolution de la population de poissons devient

$$\begin{cases} X_1 = r_1 X_1 \left(1 - \frac{X_1}{K_1}\right) - c_{12} X_1 X_2 - q_1 E_1 X_1 \\ X_2 = r_2 X_2 \left(1 - \frac{X_2}{K_2}\right) - c_{21} X_1 X_2 - q_2 E_2 X_2 \end{cases} \quad (4.22)$$

où $(q_j)_{j=1,2,3}$ sont les coefficients de capturabilité des espèces j ; et $(E_j)_{j=1,2,3}$ sont l'effort de pêche pour exploiter une espèce j .

Le coefficient de capturabilité q est un paramètre clé dans le processus de validation du

modèle de simulation de pêche (voir [15]). Dans ce travail, ce paramètre est supposé être constant.

L'effort de pêche est défini comme le produit d'une activité de pêche et d'une puissance de pêche. L'effort de pêche déployé par une flotte est la somme de ces produits sur toutes les unités de pêche de la flotte. L'activité de pêche est en unités de temps. La puissance de pêche est la capacité d'une unité de pêche à capturer du poisson et constitue une fonction complexe selon le navire, l'engin et l'équipage. Cependant, étant donné que les mesures de la puissance de pêche peuvent ne pas être disponibles, l'activité (telle que les heures ou les jours de pêche) a souvent été utilisée comme substitut de l'effort.

Il est intéressant de noter que, selon la littérature, l'effort dépend de plusieurs variables, à savoir par exemple : le nombre d'heures consacrées à la pêche ; temps de recherche ; nombre d'heures depuis la dernière pêche ; nombre de jours de pêche ; nombre d'opérations ; nombre de sorties effectuées ; navire, technologie, engins de pêche, équipage, etc. Cependant, dans cet article, l'effort est traité comme une variable unidimensionnelle qui inclut une combinaison de tous ces facteurs. On donne maintenant l'expression de la biomasse en fonction de l'effort de pêche.

Les biomasses à l'équilibre biologique sont les solutions du système

$$\begin{cases} r_1(1 - \frac{X_1}{K_1}) = c_{12}X_2 + q_1E_1 \\ r_2(1 - \frac{X_2}{K_2}) = c_{21}X_1 + q_2E_2 \end{cases} \quad (4.23)$$

Les solutions de ce système sont données par

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}E_1 + a_{12}E_2 + X_1^* \\ X_2 = a_{21}E_1 + a_{22}E_2 + X_2^* \end{cases} \quad (4.24)$$

où, $a_{11} = -K_1 r_2 q_1 / \Delta$, $a_{12} = K_1 K_2 q_2 c_{12} / \Delta$, $a_{21} = K_1 K_2 c_{21} q_1 / \Delta$ et $a_{22} = -r_1 K_2 q_2 / \Delta$. Ou sous forme matricielle; $X = -AE + X^*$ où $A = (-a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ et $E = (E_1, E_2)^T$.

Il est naturel de supposer que $r_j r_k > c_{ij} c_{ji} K_i K_j$ pour tous $j, k = 1, 2$ ce qui implique que $a_{ii} < 0$ pour tout $i = 1, 2$.

Le profit pour chaque pêcheur $\pi_i(E)$ est égal au revenu total $(TR)_i$ moins le coût total $(TC)_i$, autrement dit, le bénéfice de chaque pêcheur est représenté par la fonction suivante

$$\pi_i(E) = (TR)_i - (TC)_i$$

Nous utilisons, comme d'habitude dans les modèles bioéconomiques, le fait que le revenu total (TR) dépend linéairement de la prise, c.-à-d. Revenu total = Prix \times Prises.

Comme mentionné précédemment, nous notons que $H_{ij} = q_j E_{ij} X_j$ Captures d'espèces j par le pêcheur i , où E_{ij} est l'effort du pêcheur i afin d'exploiter l'espèce j . Il est clair que $H_j = \sum_{i=1}^n H_{ij}$ est le total des captures d'espèces j par tous les pêcheurs.

Par contre, on note $E_j = \sum_{i=1}^n E_{ij}$ l'effort de pêche total consacré aux espèces j par tous les pêcheurs et par $E^i = (E_{i1}, E_{i2})^T$ l'effort de pêche vectoriel doit être fourni par le pêcheur i attraper les trois espèces.

Avec ces notations nous avons

$$(TR)_i = \sum_{j=1}^2 p_j H_{ij} = \langle E^i, -pqAE^i \rangle + \langle E^i, pqX^* - \sum_{j=1, j \neq i}^2 pqAE^j \rangle \quad (4.25)$$

où $(p_j)_{j=1,2,3}$ est le prix par unité de biomasse de l'espèce j . Dans ce travail, nous prenons p_1 et p_2 être des constantes.

Nous supposons, conformément à de nombreux modèles de pêche standard (par exemple, le modèle de Clark [1] et de Gordon [6]), que $(TC)_i = \langle c, E^i \rangle$, où $(TC)_i$ est le coût total de

l'effort du pêcheur i , et $(H_j)_{j=1,2} =$ coût constant par unité d'effort de récolte des espèces j .

Comme mentionné précédemment, le revenu économique net de chaque pêcheur est représenté par la fonction suivante $\pi_i(E) = (TR)_i - (TC)_i$. Il s'ensuit que

$$\pi_i(E) = \langle E^i, -pqAE^i \rangle + \langle E^i, pqX^* - c - \sum_{j=1, j \neq i}^2 pqAE^j \rangle \quad (4.26)$$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le modèle biologique n'a de sens que dans la mesure où la biomasse de toutes les espèces marines est strictement positive (conservation de la biodiversité), alors nous avons $X = -AE + X^* \geq 0$. En d'autres termes, pour le pêcheur i

$$AE^i \leq X^* - \sum_{j=1, j \neq i}^n AE^j. \quad (4.27)$$

4.5 Equilibre de Nash Généralisé

Dans cette section, nous nous limitons au cas de deux pêcheurs. Nous allons donc présenter une méthode analytique qui permet de donner les solutions de manière explicite. Chaque pêcheur essaye de maximiser ses profits et d'obtenir un effort de pêche qui soit une réponse optimale à l'effort de l'autre pêcheur. Nous avons un équilibre de Nash généralisé dans lequel la stratégie de chaque pêcheur est optimale en prenant en considération les stratégies de l'autres pêcheur. Un équilibre de Nash existe lorsqu'il n'y a pas d'écart rentable unilatéral par rapport aux pêcheurs impliqués. En d'autres termes, aucun pêcheur ne prendrait une mesure différente tant que l'autre pêcheur ne change pas de stratégie. Cette situation peut être traduit mathématiquement selon les deux problèmes suivants :

Le premier pêcheur vérifie le problème (P_1) :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \max \pi_1(E) = \langle E^1, -pqAE^1 \rangle + \langle E^1, pqX^* - c - pqAE^2 \rangle \\ \text{avec} \\ AE^1 \leq -AE^2 + X^* \\ E^1 \geq 0 \\ E^2 \text{ est donné.} \end{array} \right.$$

tandis que la stratégie de deuxième pêcheur satisfait au problème (P_2) :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \max \pi_2(E) = \langle E^2, -pqAE^2 \rangle + \langle E^2, pqX^* - c - pqAE^1 \rangle \\ \text{avec} \\ AE^2 \leq -AE^1 + X^* \\ E^2 \geq 0 \\ E^1 \text{ est donné.} \end{array} \right.$$

Nous rappelons que (E^1, E^2) est appelé point d'équilibre de Nash généralisé si et seulement si E^1 est une solution de problème (P_1) pour E^2 donné, et E^2 est une solution de problème (P_2) pour E^1 donné.

Pour résoudre le problème d'équilibre de Nash, nous utilisons les conditions essentielles de Karush-Kuhn-Tucker. Ces conditions appliquées aux problèmes (P_1) et (P_2) , exigent que si E^1 est une solution de problème (P_1) et si E^2 est une solution de problème (P_2) , alors il existe des constantes $u^1, u^2, v, \lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{IR}_+^2$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} u^1 = 2pqAE^1 + c - pqX^* + pqAE^2 + A^T \lambda^1 \\ u^2 = 2pqAE^2 + c - pqX^* + pqAE^1 + A^T \lambda^2 \\ v = -AE^1 - AE^2 + X^* \\ \langle u^i, E^i \rangle = \langle \lambda^i, v \rangle = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, 2 \\ E^i, u^i, \lambda^i, v \geq 0 \quad \text{pour tous } i = 1, 2 \end{array} \right.$$

Pour maintenir la biodiversité des espèces, il est naturel de supposer que toutes les biomasses restent strictement positives, c'est-à-dire $X_j > 0$ pour tout $j = 1, 2$; donc $v > 0$.

Comme $\langle \lambda^i, v \rangle = 0$ alors $\lambda^i = 0$ pour tout $i = 1, 2$. Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} u^1 = 2pqAE^1 + pqAE^2 + c - pqX^* \\ u^2 = pqAE^1 + 2pqAE^2 + c - pqX^* \\ v = -AE^1 - AE^2 + X^* \\ \langle u^i, E^i \rangle = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, 2 \\ E^i, u^i, v \geq 0 \quad \text{pour tout } i = 1, 2 \end{array} \right.$$

D'où

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2pqA & pqA & A^T \\ pqA & 2pqA & 0 \\ -A & -A & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c - pqX^* \\ c - pqX^* \\ X^* \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Considérons les notations suivante

$$z = \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ v \end{pmatrix}, M = \begin{bmatrix} 2pqA & pqA & A^T \\ pqA & 2pqA & 0 \\ -A & -A & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{pmatrix} c - pqX^* \\ c - pqX^* \\ X^* \end{pmatrix}$$

alors notre problème est équivalent au problème de complémentarité linéaire $LCP(M, b)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver des vecteurs } z, w \in \mathbb{R}^6 \text{ tels que} \\ w = Mz + b \geq 0, \\ z, w \geq 0, \quad z^T w = 0. \end{array} \right.$$

Il est facile de montrer que la matrice M est P -matrice. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 54 : $LCP(M, b)$ a une solution unique pour chaque b si et seulement si M est P -matrice.

Preuve 55 : Voir [16].-[19].

Par conséquent, le problème de complémentarité linéaire $LCP(M, b)$ admet une et une seule solution. Par un simple calcul , cette solution est donnée par

$$E^* = \frac{1}{3} A^{-1} (X^* - \frac{c}{pq}) \quad (4.29)$$

où A^{-1} , l'inverse de A , est donnée par

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{K_1 q_1} & \frac{c_{12}}{q_1} \\ \frac{c_{21}}{q_2} & \frac{r_2}{K_2 q_2} \end{bmatrix}.$$

4.6 Simulations numériques

Nous prenons comme cas d'étude deux espèces marines présentant les caractéristiques suivantes :

| | | | | | |
|-----------|------------|------------|--------------------|------------|----------|
| $r_1=0,5$ | $K_1=1000$ | $q_1=0,1$ | $c_{12}=2.10^{-4}$ | $c_1=0,05$ | $p_1=40$ |
| $r_2=0,3$ | $K_2=700$ | $q_2=0,02$ | $c_{21}=10^{-5}$ | $c_2=0,10$ | $p_2=60$ |

Nous allons étudier l'influence du prix et du nombre de pêcheurs sur l'effort de capture, le niveau de capture et les bénéfices des pêcheurs.

4.6.1 Effect de la variation du prix sur l'effort de pêche, les captures et le profit

Comme premier résultat, nous avons le tableau 1 (présenté graphiquement par les figures ci dessous) qui montre qu'une augmentation des prix entraîne l'augmentation de l'effort de pêche et des niveaux de capture.

| Prix du première espèce | Prix du deuxième espèce | Effort total pour attraper les deux espèces | Captures total des deux espèces |
|-------------------------|-------------------------|---|---------------------------------|
| 02,00 | 03,00 | 62,89 | 530,02 |
| 05,00 | 07,50 | 63,34 | 532,17 |
| 08,00 | 12,00 | 63,45 | 532,71 |
| 10,00 | 15,00 | 63,49 | 532,89 |
| 14,00 | 21,00 | 63,53 | 533,09 |
| 18,00 | 27,00 | 63,55 | 533,20 |
| 20,00 | 30,00 | 63,56 | 533,24 |
| 30,00 | 45,00 | 63,59 | 533,36 |
| 40,00 | 60,00 | 63,60 | 533,42 |

Tableau 1

Effect de la variation du prix sur l'effort de pêche, les captures et le profit

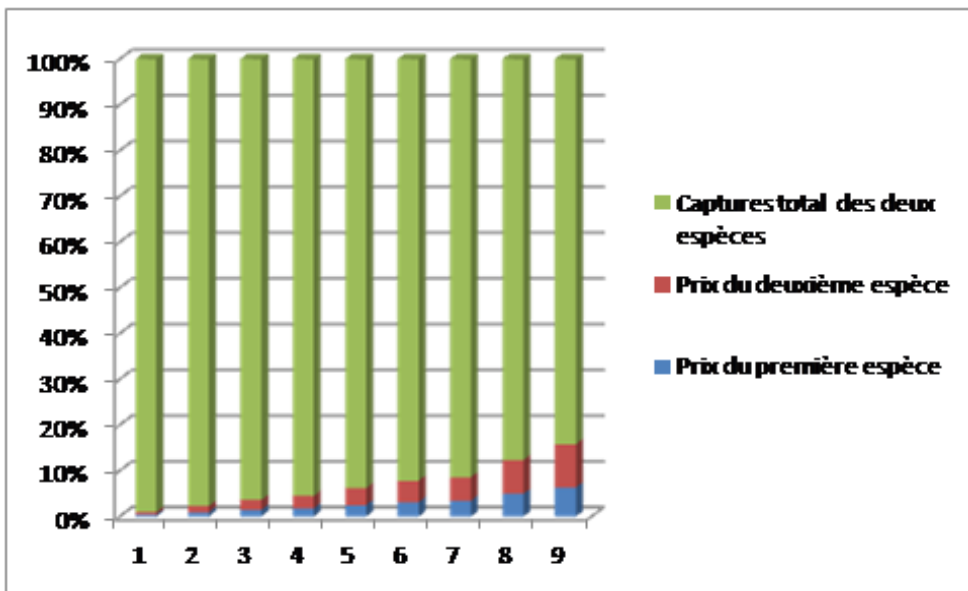


Figure 5

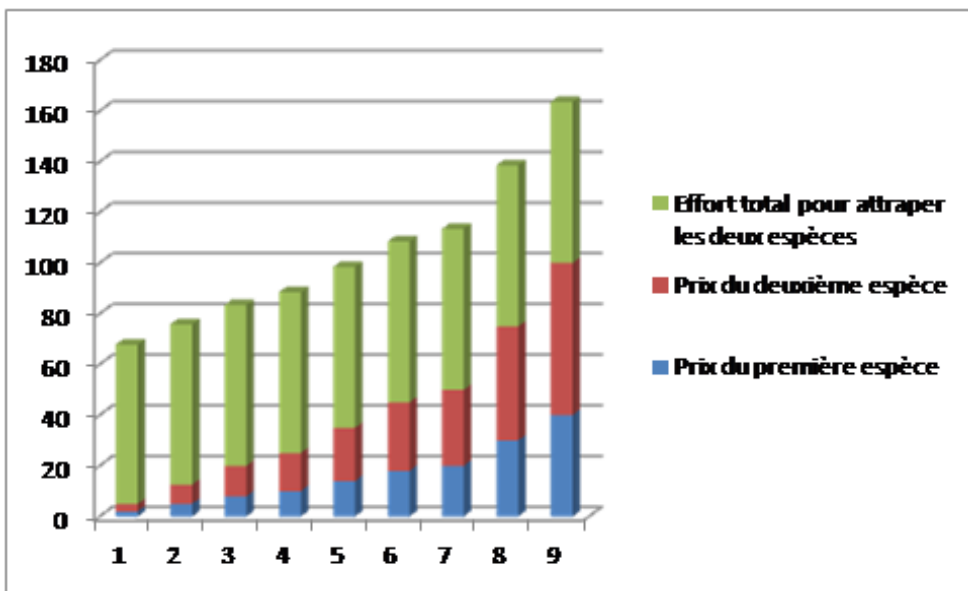


Figure 6

4.6.2 Effect de la variation du nombre de pêcheurs sur l'effort de pêche, les captures et le profit

Nous verrons maintenant l'influence du nombre de pêcheurs sur les niveaux de capture et sur les bénéfices (voir tableau 2). Pour ce faire, nous considérons trois situations :

Dans la première, nous considérons un seul pêcheur qui attrape les deux espèces marines. Afin de maximiser le profit de ce pêcheur contraint par la conservation de la biodiversité des deux espèces marines, il doit attraper 569,92, avec un bénéfice égal à 7260,31.

La seconde situation concerne deux pêcheurs avec deux espèces marines. Dans ce cas chaque pêcheur doit capturer 506,35 avec un bénéfice égal à 3226,80. Cette situation réduit les prises de chaque pêcheur de 88,85% et réduit les profits de chaque pêcheur de 44,44%.

Dans la troisième situation, nous considérons dix pêcheurs et deux espèces marines. Pour maximiser le profit, chaque pêcheur doit capturer 188,24, et le bénéfice de chacun est égal à 240,01. Cette situation réduit les prises de chaque pêcheur de 33,03% et réduit les profits de chaque pêcheur de 3,31%.

Les trois situations montrent donc que, lorsque le nombre de pêcheurs augmente, les prises et les bénéfices de chaque pêcheur diminuent. (voir la figure ci dessous). Par contre, si le nombre de pêcheurs augmente, la capture totale augmente, mais le bénéfice total diminue.

| | Capture/pêcheur | Bénéfice/pêcheur |
|--------------|-----------------|------------------|
| Situation n1 | 569,92 | 7260,31 |
| Situation n2 | 506,35 | 3226,80 |
| Situation n3 | 188,24 | 240,01 |

Tableau 2 : L'influence du nombre de pêcheurs sur les prises et les bénéfices.

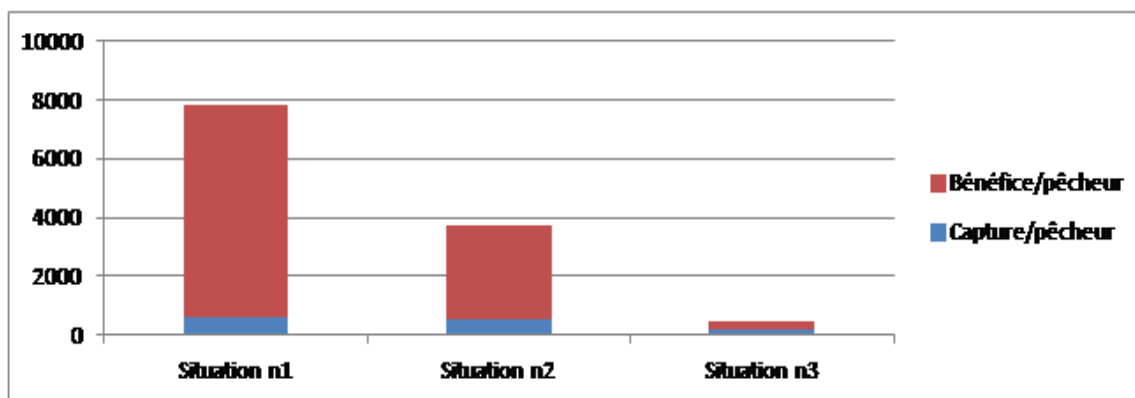


Figure 7

Nous constatons maintenant qu'une augmentation du nombre de pêcheurs entraîne une augmentation de l'effort de pêche total et une réduction du bénéfice total, comme indiqué dans le tableau 3 et présenté dans la figure

| Nombre de pêcheurs | Effort de pêche total | Bénéfice total |
|--------------------|-----------------------|----------------|
| 01 pêcheur | 34,98 | 7260,31 |
| 02 pêcheurs | 46,64 | 6453,61 |
| 03 pêcheurs | 52,47 | 5445,23 |
| 05 pêcheurs | 58,30 | 4033,50 |
| 10 pêcheurs | 63,60 | 2400,10 |
| 15 pêcheurs | 65,59 | 1701,63 |
| 20 pêcheurs | 66,63 | 1317,06 |
| 25 pêcheurs | 67,27 | 1074,01 |
| 30 pêcheurs | 67,70 | 906,59 |
| 35 pêcheurs | 68,02 | 784,29 |
| 40 pêcheurs | 68,25 | 691,05 |
| 45 pêcheurs | 68,44 | 617,61 |
| 50 pêcheurs | 68,59 | 558,27 |

Tableau 3 : L'influence du nombre de pêcheurs sur l'effort de pêche total et bénéfique total.

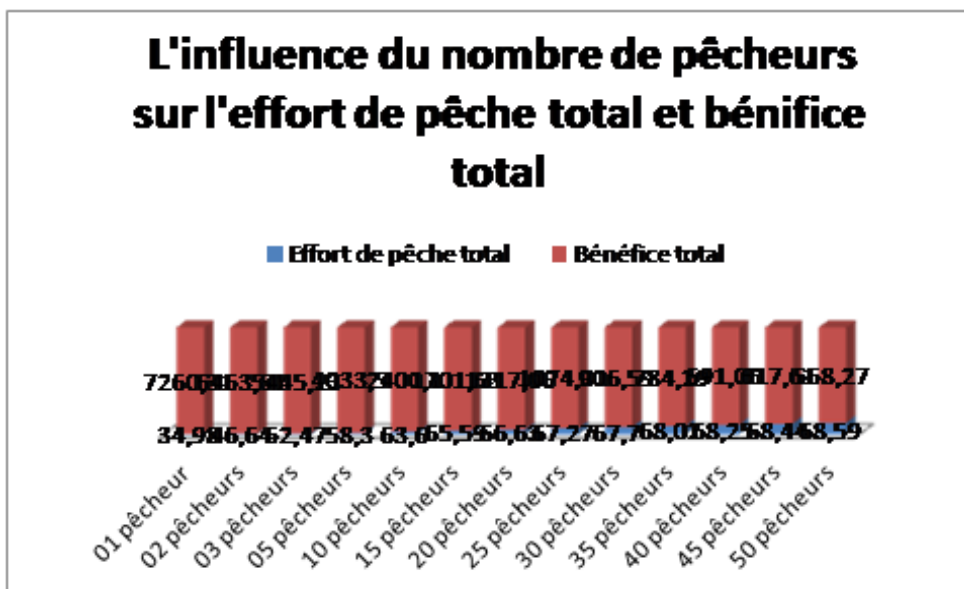


Figure 8

4.7 Conclusion

Ce quatrième chapitre a fait l'objet d'une étude mathématique d'un modèle bioéconomique modélisant un problème de pêche, où les pêcheurs cherchent à maximiser leurs profits en fonction des efforts de pêche déployés, et ceci de manière unilatérale sans qu'il ait de concertation préalable entre eux, sous la contrainte de la durabilité de la ressource et la conservation de la biodiversité. La croissance naturelle de chaque espèce est modélisée en utilisant une loi logistique, nous avons calculé l'effort de pêche qui maximise le profit de chaque pêcheur à l'équilibre biologique en utilisant le problème de l'équilibre de Nash généralisé et la technique de Complémentarité linéaire LCP. L'existence des états stables et leurs stabilités sont étudiés à l'aide d'une analyse à valeur propre. Enfin, quelques exemples numériques sont donnés pour illustrer les résultats. nous avons considéré que les prix des espèces de poisson sont constants.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

Au cours de cette thèse, nous avons proposé la modélisation, l'étude mathématique et la simulation numérique des modèles provenant de trois domaines différents : cinétique chimique ; épidémiologie et bioéconomie.

Nous avons démontré dans le premier chapitre que la modélisation en cinétique chimique de certaines réactions conduit à des systèmes de réaction-diffusion ; la quantité clef ici est celle de la vitesse de réaction. la première question abordée était celle de la positivité, de l'existence locale puis globale en temps des solutions pour des états initiaux donnés, et ceci en développant des techniques appropriées à ce type de problèmes paraboliques. La deuxième question est celle de la simulation numérique, en adoptant la méthode des éléments finis pour la partie linéaire, et celle de Newton-Raphson pour la partie non linéaire, un code en Matlab a été réalisé pour trois réactions chimiques : l'Ammoniac, l'Enzymatique et la réaction de l'Hydrogène et du Brome. Ce travail a donné fruit à deux articles, le premier **"Modélisation and Numerical Simulation of a Class of Reaction-Diffusion Sys-**

tem Resulting from Chemical Kinetics" [38] publié en janvier 2018 à **International Journal of Applied Physics and Mathematics (IJAPM)** et le deuxième est "Mathematical Study of a Class of Reaction-Diffusion System Resulting from Chemical Kinetics : Non-linear parabolic systems" [39] publié en janvier 2020 au journal " **Research and Analysis journal,**"

Comme perspectives, Nous mentionnons en particulier :

- les problèmes de stabilité liés au principe de linéarisation autour d'équilibre (ce qu'a été réalisé pour certains problèmes en liaison avec l'épidémiologie dans le troisième chapitre).

- le contrôle de réaction : comme illustration, on peut penser à la régulation du taux de glucose dans le sang d'un corps humain par des injections contrôlées d'insuline, ceci conduit à des systèmes de réaction diffusion avec contrôle.

Dans le deuxième chapitre nous avons proposé un modèle d'infection virale à diffusion et fonction d'infection générale, décrivant la dynamique de l'infection virale. Dans un premier lieu, nous avons prouvé l'existence la positivité et la bornitude de la solution du système réaction-diffusion modélisant la maladie VHB. En suite ,nous avons étudié la stabilité asymptotique globale de l'équilibre sans infection E_f , et l'équilibre d'infection chronique E^* . En effet, en analysant les versions continue et discrète, nous avons prouvé que la dynamique globale est complètement déterminée par le nombre de reproduction de base R_0 . L'équilibre sans infection E_f est globalement asymptotiquement stable si $R_0 \leq 1$, ce qui reflète la disparition du virus et de l'infection. Dans le cas où $R_0 > 1$, l'équilibre d'infection chronique E^* est globalement asymptotiquement stable ce qui prouve que la maladie persiste. La stabilité

globale des équilibres est prouvée par la construction de fonctions de Lyapunov appropriées. Pour la simulation numérique, nous avons utilisé la méthode d'Euler mixte et développé un code sous Matlab. Nos résultats numériques ont confirmé les résultats mathématiques pour prouver encore une fois que la dynamique du problème est complètement déterminée par le nombre de reproduction. Ce travail a donné comme résultat un article "**Dynamics of a class of viral infection models with diffusion**" [40] publié en février 2020 au journal "**Mathematical Biology and Neuroscience**".

En perspective, nous signalons quelques directions de recherches futures :

- Le taux de recrutement dans une population n'est pas en général constant, mais il suit une fonction logistique. Pour cela il serait important d'introduire le terme logistique dans le modèle pour modéliser les nouvelles naissances.

- Le traitement et la vaccination ont joué un rôle important pour limiter la propagation des épidémies. Pour cela, il serait important d'introduire deux fonctions de contrôle dans nos modèles, l'une pour la vaccination des susceptibles et l'autre pour le traitement des infectés.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à un modèle bioéconomique pour des espèces marines exploitées par plusieurs pêcheurs qui cherchent à maximiser leurs profits en fonction des efforts de pêche déployés, et ceci de manière unilatérale sans qu'il ait de concertation préalable entre pêcheurs qui sont tous contraints par la durabilité de la ressource et la conservation de la biodiversité. Le modèle que nous avons traité comprend trois parties : une partie biologique reliant les captures aux stocks de biomasses, une partie exploitation qui relie les captures aux efforts de pêche, et une troisième économique reliant les efforts

de pêche aux profits. L'évolution des biomasses des espèces marines est traduite par les équations mathématiques suivantes :

$$\frac{dX_i}{dt} = r_i X_i \left(1 - \frac{X_i}{K_i} \right) - \sum_{j \neq i}^m c_{ij} X_i X_j - C_i$$

où pour $i = 1, 2$, r_i le taux de croissance du stock, K_i la capacité de charge du système, X_i la densité de population, $(c_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq 2}$ coefficient de compétition entre les espèces i, j ; et C_i le total des captures de l'espèce marine i .

Nous avons démontrés qu'une telle modélisation débouche sur un problème d'équilibre de Nash généralisé, que nous avons transformés en un problème de complémentarité linéaire (LCP), pour lequel nous avons démontrés l'existence d'une solution unique qui représente le point d'équilibre de Nash généralisé. Une simulation numérique a été proposée montrant l'évolution des captures et des profits des pêcheurs en fonction des paramètres bioéconomiques, puis l'influence du prix et du nombre de pêcheurs sur les efforts et les profits des pêcheurs. Comme perspectives, nous envisageons dans un futur travail de définir des fonctions de fourniture à long terme, où le prix n'est plus une constante, mais dépend du niveau d'effort et du stock de biomasse de chaque espèce restante. Le travail de ce troisième chapitre a donné naissance à un article "**A Mathematical Bioeconomic Model of a Fishery : Profit Maximization of Fishermen**", nous l'avons publié au **Journal of Economics, Business and Management (JOEBM)** en Novembre 2017 [2].

Bibliographie

- [1] Clark CW (1985), Bioeconomic modelling and fisheries management, Wiley, New York.
- [2] S. Bakht, Y. EL Foutayeni, and N. Fatmi Idrissi, "A Mathematical Bioeconomic Model of a Fishery : Profit Maximization of Fishermen" Vol. 5, No. 11, November 2017 of JOEBM.
- [3] Clark CW, Fisheries bioeconomics : why is it so widely misunderstood ?, The Society of Population Ecology, 24 février 2006, p.95-98.
- [4] Colin W. Clark and Gordon R. Munro, The economics of Fishing and Modern Capital Theory : A Simplified Approach, Journal of environmental economics and management 2, 92-106 (1975).
- [5] C.W. Clark, Mathematical bio-economics : the optimal management of renewable resources (Wiley,New York, 1976).
- [6] Gordon R.Munro, The optimal management of transboundary renewable resources, Canadian Journal of Economics, XII, No. 3, août 1979.
- [7] Gordon, H.S : An economic approach to the optimum utilization of fisheries resources, Journal of the Fisheries Research Board of Canada, 10, P. 442-457, 1953.

- [8] Gordon, H.S. The economic theory of a common property resource : the fishery. *Journal of Political Economy*, 62, 124-142, 1954.
- [9] Y. EL Foutayeni, M. Khaladi, A generalized bio-economic model for competing multiple-fish populations where prices depend on harvest, *AMO Advanced Modeling and Optimisation*, 14 (2012) 531-542.
- [10] Y. EL Foutayeni, M. Khaladi, A Bio-economic model of fishery where prices depend on harvest, *AMO Advanced Modeling and Optimisation*, 14 (2012) 543-555.
- [11] Gulland, J.A. 1983. *Fish stock assessment : a manual of basic methods*. FAO/Wiley, Chichester,New York. 223 p.
- [12] Schaefer : Some aspects of the dynamics of populations important to the management of commercial marine fisheries. *Bulletin of the Inter-American tropical tuna commission* 1, 25-56.
- [13] Verhulst P.F., (1838) Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement, *con-. Math. Et Phys.*, 10 : 113-121.
- [14] Gause, G.F., *The struggle for existence*, Williams and Wilkins, Baltimore, (1935).
- [15] K.S. Chaudhuri, S. SahaRay, On the combined harvesting of a prey predator system, *J.Biol. Syst.*, 4 (1996) 373-389.
- [16] Murty Katta. *Principal pivoting methods for LCP*. Department of Industrial and Operations Engineering,University of Michigan, 1997.
- [17] Murty : On the number of solutions to the complementarity problem and spanning properties of complementary cones *Linear Algebra and Appl.* 5 (1972), 65-108.

- [18] Y. EL Foutayni, M.Khaladi, A New Interior Point method For Linear Complementarity Problem, *App.Math.Sci.*,4(2010) 3289-3306.
- [19] Cottle, J. S. Pang et R. E. Stone : The Linear Complementarity Problem, Academic Press, New York, 1992.
- [20] K. Wang, W. Wang, Propagation of HBV with spatial dependence, *Math. Biosci.* 210 (2007) 78–95.
- [21] M.A. Nowak, S. Bonhoeffer, A.M. Hill, R. Boehme, H.C. Thomas, H. McDade, Viral dynamics in hepatitis B virus infection, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 93 (1996) 4398–4402.
- [22] K. Hattaf and N. Yousfi, A generalized HBV model with diffusion and two delays, *Comput.Math. Appl.* 69 (2015), pp. 31-40.
- [23] K. Hattaf, N. Yousfi, Global stability for reaction–diffusion equations in biology, *Comput. Math. Appl.* 66 (2013) 1488–1497.
- [24] K. Hattaf, N. Yousfi, A. Tridane, Stability analysis of a virus dynamics model with general incidence rate and two delays, *Appl. Math. Comput.* 221(2013) 514–521.
- [25] Yu Yang & Jinling Zhou(2018), Global stability of a discrete virus dynamics model with diffusion and general infection function ;*International Journal of Computer Mathematics*, DOI :10.1080/00207160.2018.1527028
- [26] C.C. Travis, G.F. Webb, Existence and stability for partial functional differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 200 (1974) 395–418.
- [27] W.E. Fitzgibbon, Semilinear functional differential equations in Banach space, *J. Differential Equations* 29 (1978) 1–14.

- [28] R.H. Martin, H.L. Smith, Abstract functional differential equations and reaction–diffusion systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* 321 (1990) 1–44.
- [29] R.H. Martin, H.L. Smith, Reaction–diffusion systems with time delays : monotonicity, invariance, comparison and convergence, *J. Reine Angew. Math.* 413 (1991) 1–35.
- [30] J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1996.
- [31] M.H. Protter, H.F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.
- [32] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, in : *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 840, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1993.
- [33] J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [34] K. Hattaf, N. Yousfi, A. Tridane, Mathematical analysis of a virus dynamics model with general incidence rate and cure rate, *Nonlinear Anal. RWA* 13 (2012) 1866–1872
- [35] K. Hattaf, N. Yousfi, Global properties of a discrete viral infection model with general incidence rate, *Math. Methods Appl. Sci.* (2015)
<http://dx.doi.org/10.1002/mma.3536>.
- [36] K. Hattaf, N. Yousfi, A numerical method for delayed partial differential equations describing infectious diseases, *Computers and Mathematics with Applications* 72 (2016) 2741–2750
- [37] W. Qin, L. Wang, and X. Ding, A non-standard finite difference method for a hepatitis

- B virusinfection model with spatial diffusion, *J. Differ. Equ. Appl.* 20 (2014), pp. 1641-1651.
- [38] S,Bakht, N. Idrissi Fatmi. Modelisation and Numerical Simulation of a Class of Reaction Diffusion System Resulting from Chemical Kinetics., *International Journal of Applied Physics and Mathematics*,Volume8,Number1,January 2018, no. 84, 4185 - 4195.
- [39] S,Bakht, N. Idrissi Fatmi. "**Mathematical Study of a Class of Reaction-Diffusion System Resulting from Chemical Kinetics : Non-linear parabolic systems**" , "**Research and Analysis journa**Volume : 3 Issue : 01 January 2020, P 154-159 .
- [40] S,Bakht, Khalid Hattaf and Nadia Idrissi Fatmi "**Dynamics of a class of viral infection models with diffusion** " "**Mathematical Biology and Neuroscience**"
- [41] N. Alaa, N. Idrissi Fatmi. Gobal Existence for a Model of Nickel-Iron Alloy Electrodeposition on Rotating Disk Electrode in the Quadratic Case. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, 2012, no. 84, 4185 - 4195.
- [42] N. Alaa, N. Idrissi Fatmi and I. Mounir. Weak Solutions for Some Quasilinear Parabolic Systems with Data Measures and Arbitrary Growth Nonlinearities. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 4, 2009, no. 22, 1085 - 1099.
- [43] N. Alaa, I. Mounir, Global existence for some reaction-diffusion systems with mass control and critical growth nonlinearity with respect to the gradient. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 253, pp. 532-557, (2001).
- [44] N. Alaa, N. Idrissi Fatmi and M. Pierre. Quasilinear elliptic degenerate equations with nonlinearity in the gradient and L^1 data, *International Journal of Mathematics and Statistics*, Volume 7, Number W10, pp. 62-69, (2010).

- [45] H. Amann, Dynamic theory of quasilinear parabolic systems, III. Global existence, *Mathematische Zeitschrift*, Springer (1989).
- [46] P. Baras, Semilinear Problem With Convex Nonlinearity, In *Recent Advances in Non-linear Elliptic and Parabolic Problems*, Proc. Nancy 88, Ph. Bénéilan, M. Chipot, L.C. Evans, M. Pierre ed. Pitman Res. Notes in Math. (1989).
- [47] P. Baras, M. Pierre, Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données mesures. *Applicable Analysis*, , Vol. 18, pp. 11-1, (1984).
- [48] Ph. Bénéilan, L. Boccardo, T. Gallouet, R. Gariepy, M. Pierre, J.L. Vazquez, An L^1 theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations, *Annali Sc. Norm. Sup. Pisa.* 22, pp. 241–273, (1995).
- [49] L. Boccardo, A. Dall’Aglia, T. Gallouet and L. Orsina, Nonlinear parabolic equations with measure data, *J. Funct. Anal.* 147, 237-258, (1997).
- [50] N. Boudiba, "Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion paraboliques quasilineaires," Thèse de troisième cycle, Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene d’Alger, (1995).
- [51] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson, (1983).
- [52] R. Dautray and J. L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 8. *Masson*, (1988).
- [53] S. Hollis, R. H. Martin, and M. Pierre, Global existence and boundedness in reaction-diffusion system, *SIAM J. . Math. Anal.* 18 (1987), 744-761.
- [54] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonikov, and N. N. Ural’ceva, "Linear and Quasi Linear

- Equations of Parabolic Type," Translation on Mathematical Monographs, Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, (1968).
- [55] P. L. Lions, quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).
- [56] K. Masuda, On the Global Existence and Asymptotic Behavior of Reaction-Diffusion Equations, Hokkaido Math. J. 12, pp. 360-370, (1983).
- [57] J. Matulis and R. Slyzys, J. Electrochem. Soc. 9, 1177, (1964).
- [58] J. Morgan, Global existence for semilinear parabolic system, SIAM J. Math. Anal. 20, 1128-1144 (1989).
- [59] M. Pierre, An L^1 method to prove global existence in some reaction-diffusion systems, in Contributions to nonlinear partial differential equations, J. I et P. L. Lions, ed Pitman Res. Notes in Math. Series, pp. 220-231, (1987).
- [60] M. Pierre, Weak solutions and supersolutions in L^1 for reaction-diffusion systems. J. Evol. Equ. 3, no. 1, 153-168, (2003).
- [61] N. D. Alikakos, L^P -bounds of solutions of reaction-diffusion equations, Comm. Partial Differential Equations 4, pp. 827-888, (1979).
- [62] G. Duvaut, Mécanique des milieux continus, Masson, 1990.
- [63] S. Logan, Introduction à la cinétique chimique, Cours et exercices corrigés, Dunod, 1998.
- [64] R. H. Martin and M. Pierre, Nonlinear reaction-diffusion systems, in " Nonlinear Equations in the Applied Sciences" (W. F. Ames, C. Gorgers, and Kapell, Eds.). Academic Press, San Diego, 1992.

- [65] D. Lamberton, Equation d'évolution linéaires associées à des semi-groupes de contractions dans les espaces LP, *Journal of functional analysis* 72, 252-262 (1987).
- [66] P. Marchand, *Graphics and GUIs with MATLAB*, CRS Press LLC, 1999.
- [67] A.Pazy, "Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations", *Applied Math. Sciences*, 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [68] L.Sainsaulieu, *Calcul Scientifique, Cours et exercices corrigés*, Masson, 1996.