Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

1 Historique

Les équations différentielles ou les équations aux dérivées partielles sont des outils habituels dans la modélisation de phénomènes physiques, chimiques, économiques, ou même encore du vivant. Cependant, de nombreux événements nécessitent la prise en compte explicite du retard dans l'apparition ou l'exécution d'un phénomène ou d'un processus. Cela signifie que l'évolution d'un processus dépend non seulement de son état actuel, mais aussi des états antérieurs. D'une manière générale, les retards apparaissent à cause du temps nécessaire pour que le système réponde à une certaine évolution, ou parce qu'un certain seuil doit être atteint avant que le système ne soit activé. En effet, le retard peut apparaître comme un retard de transport, comme un décalage de communication, comme une phase de prolifération dans le modèle cellulaire ou comme une période de grossesse dans des dynamiques de populations. Parmi les modèles mathématiques qui peuvent décrire au mieux de tels phénomènes, on rencontre des équations différentielles à retard (ou des équations différentielles fonctionnelles), dont les retards peuvent être de type neutre. Les équations différentielles mixtes avec arguments avancés et retardés peuvent également apparaître, comme par exemple les équations définissants les ondes progressives dans les réseaux non linéaires.

La nature du retard peut être multiple. Discret, lorsque un temps T précédent t s'exprime sous la forme $t - a$, indiquant que l'état du système au temps t dépend de son état au temps $t - a$ (a peut décrire un temps de gestation par exemple, ou le temps nécessaire à une cellule pour devenir résistante à une drogue, ou encore un temps de rémission, etc.). Continu, ou distribué, lorsque l'évolution au temps t dépend de tout ce qui s'est déroulé entre le temps t et un temps plus ancien (éventuellement infini). On parle souvent d'effet mémoire. Ces termes temporels non locaux faisant intervenir les valeurs de l'état à des instants antérieurs, discrets ou distribués sont soit d'ordre 0 (équations à retard), soit d'ordre 1 (équations de type neutre).

Le comportement asymptotique des solutions d'équations à retard est souvent très riche, le retard étant souvent perçu comme un facteur déstabilisant, pouvant par exemple faire apparaître des solutions oscillantes dans des systèmes non-oscillants en l'absence de retard. La nature du retard (discret, continu, infini, dépendant de l'état,...) et la présence de la dérivée de l'état au temps passé (type neutre) rendent l'analyse des équations à retard plus complexe. Ceci nécessite une étude mathématique plus élaborée que pour les équations différentielles ordinaires.

L'importance des systèmes à retard a été mise en évidence par Volterra dans [118] dans l'étude des matériaux visco-élastiques et dans l'interaction des espèces, par York [128] en épidémiologie, par Wang [120] dans la théorie du contrôle et par Hetzer [85] en climatologie. Des motivations biologiques pour modéliser et étudier théoriquement les systèmes à retard peuvent être trouvées dans les livres de May [98], de Smith [114] et de Pielou [107]. Des exemples concrets de modèles à retard en biologie mathématique sont contenus dans les livres de Cushing [55], MacDonald [97] et Gopalsamy [68]. Nous citons aussi le livre de Hale [73] qui a poussé l'étude des équations à retard à un niveau très avancé.

Une équation différentielle à retard peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $f : I\!R^+ \times \mathcal{B} \to E$, $\mathcal{B}$ est appelé espace de phase et $x_t \in \mathcal{B}$. Si le retard est fini, $\mathcal{B}$ est souvent un sous espace des fonctions définies de $[-r, 0]$ dans E. Quand le retard est infini, $\mathcal{B}$ est constitué des fonctions définies de $]-\infty, 0]$ dans E. Dans tous les cas x_t est définie par :

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \quad \text{pour } \theta \in [-r, 0] \quad \text{ou } \theta \in \left]-\infty,\ 0\right].$$

Un exemple simple d'équation à retard est l'équation linéaire scalaire suivante :

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t-\tau), \quad \tau > 0. \tag{1.2}$$

Soit φ une fonction donnée, définie et continue sur $[-\tau, 0]$, alors il existe une fonction unique x(t) définie sur $[-\tau, +\infty[$, qui coincide avec φ sur $[-\tau, 0]$ et qui est solution de l'équation (1.2), pour $t > 0$. En effet, si x est telle solution, alors elle doit vérifier

$$x(t) = \varphi(0) - \int_0^t x(s-\tau)ds, \quad t \geq 0$$

et en particulier,

$$x(t) = \varphi(0) - \int_0^t \varphi(s-\tau)ds, \ \ \tau \geq t \geq 0,$$

cette dernière équation définit x sur $[-\tau, 0]$ et itérativement on définit x sur $[\tau, 2\tau]$...

Un exemple de modèle régi par une équation différentielle à retard est celui qu'on trouve dans [61], d'une population biologique composée d'individus adulte et juvénile . Dans ce modèle $N(t)$ représente la densité des adultes au temps t et μ dénote le taux de mortalité par unité de temps. On suppose que la durée de la période juvénile est exactement r unités de temps pour chaque individu, que les adultes produisent des œufs en nombre m et que les nouveaux nés survivent la période juvénile avec une probabilité p. Alors la dynamique de N peut être décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}N(t) = -\mu N(t) + \lambda N(t-r),$$

qui fait intervenir un terme non local, avec $\lambda = mp$. Le terme $\lambda N(t-r)$ signifie que les nouveaux-nés deviennent adultes avec un certain retard. Ainsi la variation instantanée de la densité de population fait intervenir des valeurs présentes et passées de N.

Les équations aux dérivées partielles de type neutre font intervenir le produit de composition d'opérateurs de dérivation en temps et espace, et de mesures à support sur la demi-droite temporelle négative. Ces dernières équations trouvent leur motivation dans l'apparition récente de modèles de circuits électriques constitués d'une grande quantité d'oscillateurs. C'est un exemple classique, dans la théorie des équations différentielles, qu'un circuit électrique non linéaire peut être «réduit» à une équation de type neutre. L'étude de ce problème a été initiée, ces dernières années, par Wu et ses collaborateurs ([125], [126] et [127]) et Hale ([71] et [72]).

2 Modèles à retard

2.1 Modèle de compétition de Lotka-Volterra

Nous nous plaçons dans la ligne des travaux d'écologie mathématique initiée dans les années 1920 par les travaux de Lotka et Volterra, travaux dans lesquels a été introduite la représentation des interactions entre espèces par des systèmes d'équations différentielles. Les modèles prédateur-proie élaborés par ces deux scientifiques séparément sont les modèles fondateurs de l'écologie moderne. L'objectif poursuivi par l'élaboration du modèle de Volterra était d'expliquer un phénomène très répandu dans les systèmes prédateur-proie réels, à savoir les oscillations avec décalage de phase des abondances des proies et des prédateurs. Le modèle suivant a été proposé en 1928 [119] pour décrire l'interaction entre une population de proies $(P1)$ et une population de prédateurs ($P2$). Les coefficients d_1 et d_2 représentent, respectivement, les taux de mortalité de proies et de prédateurs et m_1 et m_2 sont des paramètres de prédation. La conversion des proies mangées par les prédateurs s'effectue de façon continue durant un temps r, à compter de la mort de la proie, ce qui est décrit par le dernier terme de la seconde équation qui fait apparaître un retard fini continu distribué.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P_1(t) = (d_1 - m_1 P_2(t))P_1(t), \quad t \geq 0, \\ \dfrac{d}{dt}P_2(t) = \left(-d_2 + m_2 P_1(t) + \int_{-r}^{0} k(s)P_1(s+t)ds\right) P_2(t), \quad t \geq 0, \\ P_1(\theta) = \varphi_1(\theta) \ \text{ pour } \ -r \leq \theta \leq 0 \ \text{ et } \ P_2(0) = P_2^0, \end{cases} \tag{1.3}$$

où k est une fonction noyau qui décrit la manière dont le gain du prédateur à chaque instant t dépend de l'abondance de la population des proies P_1 dans un intervalle de temps passé $[t-r, t]$, $r > 0$. Dans [41], Brelot a ensuite introduit le retard infini ($r = +\infty$) dans le modèle de Volterra pour modéliser un problème biologique héréditaire :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P_1(t) = \left(d_1 - m_1 P_2(t) - \int_{0}^{+\infty} k(s)P_1(t-s)ds\right) P_1(t), \quad t \geq 0, \\ \dfrac{d}{dt}P_2(t) = \left(-d_2 + m_2 P_1(t) - \int_{0}^{+\infty} k(s)P_1(t-s)ds\right) P_2(t), \quad t \geq 0, \\ P_1(\theta) = \varphi_1(\theta) \ \text{ et } P_2(\theta) = \varphi_2(\theta) \ \text{ pour } \ \theta \leq 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

La circulation spatiale et la migration des espèces d'un endroit à un autre peuvent compliquer les interactions écologiques et influencer le comportement de leur évolution. Par exemple, si la nourriture est fournie de façon homogène dans l'espace, la diffusion spatiale peut découler de la tendance des espèces à migrer des régions de plus grande densité de population vers les régions de faible densité de population. Dans [102] et [51], les auteurs ont construit le modèle de compétition de réaction-diffusion à retard infini suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \int_0^{+\infty} l(s)u(t-s,x)ds - \int_0^{+\infty} k(s)u(t-s,x)ds, \tag{1.5}$$

où l et k sont des fonctions poids pour les effets héréditaires. Dans ce modèle, le premier terme intégral représente la croissance et le processus de décroissance de proies et le deuxième la consommation des prédateurs dans la population de proies. Dans [118], on trouve le modèle plus général de compétition de réaction-diffusion de Volterra de type n espèces.

2.2 Modèle de la dynamique d'une population distribuée

La dynamique des populations s'intéresse à l'évolution, au cours du temps, de populations d'êtres vivants (des cellules par exemple) présentant bien souvent des caractéristiques propres. Parmi les axes de recherche actuels dans ce domaine, nous citons celui lancé par le groupe M3b d'Adimy, dans le cadre de la modélisation mathématique en médecine et en biologie, qui s'intéresse à la dynamique du prion, à savoir comment les bonnes protéines de prion interagissent-elles avec les mauvaises, conduisant à de graves maladies, ainsi qu'à une réflexion plus générale concernant la notion d'adaptation dans une population.

Le modèle à retard infini suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}P(x,t) = d\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,t) + cP(x,t)\left[1 - \int_{-\infty}^{0} G(\theta)P(x,t+\theta)d\theta\right], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}P(0,t) = \dfrac{\partial}{\partial x}P(\pi,t) = 0, \ \ t > 0, \\ P(x,\theta) = \phi(\theta)(x), \ \ 0 \leq x \leq \pi, \ \ -\infty < \theta \leq 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

décrit les dynamiques d'une population distribuée d'une seule espèce, où $P(x,t)$ représente la taille de la population totale à la position x et à l'instant t, les deux constantes d et c sont positives mesurant respectivement le taux de diffusion et la croissance intrinsèque et $G :]-\infty, 0] \to I\!R^+$ est une fonction intégrable vérifiant $\int_{-\infty}^{0} G(\theta)d\theta = 1$. La fonction ϕ est un élément d'un espace vectoriel approprié de fonctions allant de $]-\infty, 0]$ à $E := L^2([0,\pi])$. Le modèle a été étudié par plusieurs auteurs, à savoir Bonilla et Linan [29], Britton [42] et Ruan et Wu [110].

2.3 Modèle de pêcherie : Effets d'un stock de poissons sur la dynamique de la pêche

Un exemple récent de modèle à retard infini en bioéconomie est celui proposé en 2009 par Auger et Ducrot dans [23]. Il s'agit d'un modèle qui permet d'étudier les effets d'un stock de poissons sur la dynamique de la pêche. Les pêcheries sont de bons exemples de la problématique de gestion des ressources renouvelables. La modélisation bioéconomique peut être considérée comme un outil pour le développement durable des pêcheries. La bioéconomie considère principalement la dynamique de ces ressources de point de vue de la théorie du contrôle (Clarck [48]) mettant l'accent sur l'existence d'un rendement maximal durable. La plupart des modèles bioéconomiques prennent en compte deux variables d'état : la ressource en masse et le nombre d'entreprises impliquées dans l'exploitation de la ressource. Le point de départ des auteurs dans leur modélisation est l'étude des modèles simples de la pêche comme ceux donnés par Barbier et al. [24], Mchich et al. ([99] et [100]). Ces modèles tiennent compte de deux variables d'état : la densité de la ressource $N(t)$ et l'effort de pêche $E(t)$, pour $t \geq 0$. De tels modèles prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN(1-N) \ + \varphi(N,E), \\ \dfrac{dE}{dt} = p\varphi(N,E) - cE. \end{cases} \tag{1.7}$$

Ici, la ressource N est supposée avoir une croissance logistique. Par souci de simplicité, les auteurs ont mis la capacité de charge à 1. La fonction $\varphi(N,E)$ désigne la capture par unité de temps. Elle prend généralement la forme $\varphi(N,E) = qNE$, tandis que le paramètre p désigne le prix constant. $p\varphi(N,E)$ représente le bénéfice instantané. Le terme $-cE$ désigne le coût monétaire en termes de salaires, carburant, taxes, etc. c est le coût par unité d'effort de pêche et unité de temps. Ainsi, la deuxième équation suppose que la variation de l'effort de pêche augmente quand l'exploitation est rentable et inversement.

Dans ce modèle simple, on suppose que toutes les captures sont immédiatement vendues et contribuent à l'effort de pêche E. Toutefois, et plus généralement, on peut supposer qu'une certaine partie de la capture instantanée est immédiatement vendue tandis que tout le reste entre en stock pour être fabriqué (congelé ou fumé par exemple). Après un certain temps, le stock de poissons retourne au marché de poissons pour être vendu. Ce qui a motivé les auteurs à généraliser le modèle simple (1.7) en introduisant une nouvelle variable de stock notée S. Une fraction $\eta \in [0,1]$ de la capture du poisson entrera dans le compartiment de stock alors que l'autre fraction $1-\eta$ sera immédiatement vendue pour contribuer à l'effort de pêche E. Sous ces hypothèses, ils ont considéré le nouveau modèle de pêche suivant

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN(1-N) - \varphi(N,E), \\ \dfrac{dE}{dt} = p\left[(1-\eta)\varphi(N,E) + \delta S\right] - cE, \\ \dfrac{dS}{dt} = \eta\varphi(N,E) - \delta S. \end{cases} \tag{1.8}$$

Ici, le paramètre $\delta > 0$ désigne le taux de retour au marché et de contribution avec le prix p à l'effort de pêche du stock de poissons. Par souci de simplicité, les auteurs ont supposé que le prix du poisson immédiatement vendu est le même pour celui provenant du stock. Sous certaines conditions appropriées sur la condition initiale, ils ont pu éliminer la variable S en intégrant la troisième équation. Par conséquent, ils ont pu réduire le système d'équations différentielles ordinaires (1.8) ci-dessus et ont abouti au système d'équations différentielles à retard infini suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt}(t) = rN(t)(1-N(t)) - \varphi(N(t),E(t)), \\ \dfrac{dE}{dt}(t) = (1-\eta)p\varphi(N(t),E(t)) + \eta p \int_{-\infty}^{0} \delta e^{\delta\theta}\varphi(N(t+\theta),E(t+\theta))d\theta - cE(t). \end{cases} \tag{1.9}$$

En prenant $\varphi(N(t),E(t)) = qN(t)E(t)$ et $w(\theta) = \delta e^{\delta\theta}$, $\theta \in]-\infty,\ 0]$, les auteurs ont étudié le système d'équations différentielles à retard infini suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt}(t) = rN(t)(1 - N(t)) - qN(t)E, \\ \dfrac{dE}{dt}(t) = (1-\eta)pqN(t)E + \eta pq \int_{-\infty}^{0} w(\theta)N_t(\theta)E_t(\theta)d\theta - cE. \end{cases} \tag{1.10}$$

Ici, les paramètres r, q, p et c sont tous positifs et $\eta \in [0, 1]$. w représente le noyau retard et correspond à une pondération du retard. De manière générale, le noyau w est normalisé de sorte que

$$\int_{-\infty}^{0} w(\theta)d\theta = 1.$$

3 Travaux préalables

Les équations aux dérivées partielles et (intégro)différentielles à retard ont été l'objet de plusieurs réflexions. Différents aspects quantitatifs ont été étudiés : existence locale et globale, unicité, dépendance continue par rapport aux données initiales et régularité de solutions, autant que des aspects qualitatifs : stabilité, comportement asymptotique, attractivité, existence de solutions bornées, périodiques et automorphes. Le passage du retard fini au retard infini complique la situation du point de vue quantitative et qualitative. Les méthodes et techniques utilisées ainsi que les résultats obtenus dans le cas du retard infini ne sont pas similaires au cas retard fini en plusieurs aspects. Le premier desquels est le choix de l'espace de phase. Pour éviter les répétitions et clarifier l'utilisation des propriétés de l'espace, nous sommes amenés à travailler sur un espace axiomatique. Les axiomes vérifiés par cet espace ne sont autres que des propriétés de plusieurs exemples d'espaces concrets. L'espace de fonctions continues de $]-\infty, 0]$ à valeurs dans E n'est pas parmi ces espaces. D'autre part, dans le cas du retard fini, plusieurs méthodes de démonstrations classiques utilisent certaines estimations qui dépendent du retard. Ce qui les rend non généralisables au cas retard infini. Ceci apparaît même au niveau des résultats obtenus. Par exemple, sous des conditions appropriées, le résultat qui affirme que pour les équations différentielles fonctionnelles standards, le semi groupe solution est compact si le temps dépasse le retard fini n'a pas d'équivalent direct dans le cas retard infini. Ce sujet de recherche contribue à la résolution de ce genre de complications et à la construction d'une théorie mathématique pour les équations intégro-différentielles à retard infini de type neutre.

3.1 Equations différentielles à retard fini

Une équation différentielle à retard fini peut prendre la forme générale abstraite suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + F(t, x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{C}, \end{cases} \tag{1.11}$$

où $\mathcal{C}$ est l'espace des fonctions continues de $[-r, 0]$ à valeurs dans un espace de Banach E, muni de la topologie de convergence uniforme, $A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur linéaire fermé sur E, pour tout $t \geq 0$, la fonction histoire $x_t \in \mathcal{C}$ est définie par $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, pour $-r \leq \theta \leq 0$, $r > 0$ et $F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to E$ une fonction continue.

Il est bien connu ([117] et [125]) que la méthode des semi-groupes permet d'étudier cette équation dans le cas où A est générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe sur E, c'est-à-dire dans le cas où A satisfait les conditions suivantes :

(**a**) $\overline{D(A)} = E$,

(**b**) Il existe deux constantes $\bar{M} \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telles que si $\lambda > \omega$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\left\|(\lambda - \omega)^n (\lambda I - A)^{-n}\right\| \leq \bar{M} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Toutefois, la non densité de $D(A)$ dans E se produit dans de nombreuses situations à cause des restrictions sur l'espace où les problèmes sont considérés (par exemple, les fonctions périodiques continues et les fonctions Hölderiennes continues) ou à cause des conditions aux limites (par exemple, l'espace des fonctions de classe C^1 à valeurs nulles sur la frontière est non dense dans l'espace des fonctions continues).

L'étude de l'équation (1.11) a fait l'objet de plusieurs travaux. Dans le cas où A est générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ dans E et F est autonome et globalement Lipschitzienne, Travis et Webb ont étudié tous les aspects d'existence, régularité et stabilité pour l'équation (1.11). Ils ont montré que la solution

$$x(t,\varphi) = \begin{cases} T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)F(x_s)ds, & \text{pour } t \geq 0, \\ \varphi(t), \quad \text{pour } -r \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

définit un semi-groupe non linéaire $(U(t))_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{C}$. Lorsque le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est compact, ils ont démontré que le semi-groupe solution $U(t)$ est compact pour $t > r$. Cette dernière propriété a permis dans le cas linéaire d'étudier la stabilité en terme d'une équation caractéristique qui caractérise le spectre ponctuel du générateur infinitésimal de $(U(t))_{t\geq 0}$. Pour plus de détails sur ce sujet, nous référons le lecteur au livre de Hale et Lunel [75] et celui de Wu [125]. Dans [1], [2] et [10], Adimy et Ezzinbi ont repris l'étude de l'équation (1.11) dans le cas où l'opérateur A est à domaine non dense et vérifie la condition de Hille-Yosida (b).

3.2 Equations différentielles à retard infini

Dans le cas du retard infini, l'équation (1.11) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + F(t, x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{1.13}$$

où $\mathcal{B}$ est l'espace de phase constitué des fonctions définies de $]-\infty,\ 0]$ à valeurs dans E vérifiant certains axiomes introduits par Hale et Kato [74]. Pour tout $t \geq 0$, la fonction histoire $x_t \in \mathcal{B}$

est définie par :

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad \text{pour } \theta \in \left]-\infty,\ 0\right].$$

L'étude des équations différentielles à retard infini en dimension finie a été initiée par Hale et Kato dans [74] où les auteurs ont donné une théorie de base pour les espaces de phase associés aux équations différentielles à retard.afin de pouvoir étudier les problèmes quantitatifs et qualitatifs. Cet approche a permis par la suite à plusieurs auteurs de développer considérablement une théorie générale pour les équations différentielles à retard infini en dimension finie et infinie. Plusieurs résultats ont été obtenus dans le cas où A engendre un C_0-semi-groupe dans E. Nous référons à Arino et al, [18], qui ont étudié l'équation (1.13) avec $A = 0$, à Henriquez [78]-[80], qui a traité l'existence et la régularité de solutions, dans le cas où A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu et à Adimy, Bouzahir et Ezzinbi ([3] et [4]) qui ont abordé l'existence et la stabilité dans le cas où A est un opérateur de Hille-Yosida à domaine non dense.

3.3 Equations différentielles à retard de type neutre

La théorie des équations différentielles de type neutre a été développée récemment par plusieurs auteurs, nous référons par exemple à Adimy, Ezzinbi et Bouzahir ([7], [5] et [6]), Hale ([71] et [72]), Hernandez et Henriquez ([82] et [83]) et Wu et Xia ([126] et [127]).

En 1994, Hale a considéré dans [71] et [72] un modèle en physique qui s'agit d'un circuit électrique formé de plusieurs oscillateurs identiques connectés entre eux par une résistence et formant une boucle fermée. Ce modèle est régi par une équation aux dérivées partielles de type neutre et à retard fini de forme générale abstraite suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}x_t = k\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}\mathcal{D}x_t + F\left(x_t\right), \ \ t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in C, \end{cases} \tag{1.14}$$

avec $k > 0$, $C := C\left([-r, 0]\,; H^1(S^1)\right)$ est l'espace des fonctions continues sur $[-r, 0]$ à valeurs dans l'espace de sobolev $H^1(S^1)$ muni de la topologie de la convergence uniforme, S^1 est la boule unité, $F : C \to H^1(S^1)$ est une fonction assez régulière et

$$\mathcal{D}\phi(s) := \phi(\theta)(0) - \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\,\phi(\theta)(s) \quad \text{ pour } s \in S^1 \text{ et } \phi \in C,$$

où η est à variation bornée et atomique en 0, c'est à dire, il existe une fonction croissante $\delta : [0, r] \to [0, +\infty[$ telle que $\delta(0) = 0$ et

$$\left|\int_{-s}^{0} [d\eta(\theta)]\,\psi(\theta)\right| \leq \delta(s) \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |\psi(\theta)|\,, \quad \text{ pour } s \in [0, r] \text{ et } \psi \in C.$$

L'opérateur de Laplace $A = k\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}$, de domaine $D(A) = H^2(S^1)$, est générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu sur $E = H^1(S^1)$. Hale a initié l'étude de l'existence, la stabilité, l'attractivité et la bifurcation pour les équations de type (1.14).

Une présentation des travaux sur les équations aux dérivées partielles de type neutre et à retard fini qui ont visé l'étude des phénomènes électriques se trouve dans le livre de Wu [125]. Wu et Xia ([126] et [127]) ont abouti à un système hyperbolique qui est équivalent à une équation différentielle de type neutre et à retard fini. Ils ont considéré des équations de la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[w(\xi,t) - qw(\xi,t-r)] \quad &= k\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}[w(\xi,t) - qw(\xi,t-r)] \\ &\quad + f\left(w_t(\xi,.)\right), \ \ \xi \in S^1, \ t \geq 0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

où $w_t(\xi, \theta) = w(\xi, t + \theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$, $t \geq 0$, $\xi \in S^1$, $k > 0$, f est une fonction continue et

$0 \leq q < 1$. Le livre de Wu [125] contient aussi une analyse détaillée des résultats obtenus dans les articles [71], [72], [126] et [127]. Des généralisations des travaux de Hale et ceux de Wu et Xia ont été faites par Adimy et Ezzinbi ([7], [8], [9], [11]) dans le cas du retard fini, par Adimy et al. ([5] et [6]) et par Bouzahir ([34], [35], [36], [37] et [38]) dans le cas du retard infini.

Hernandez et Henriquez ([82] et [83]) ont étudié des résultats d'existence et d'unicité de solutions pour l'équation de type neutre suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[x(t) - G(t, x_t)\right] = Ax(t) + F(t, x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}. \end{cases} \tag{1.16}$$

où A est générateur d'un semi-groupe analytique dans un espace de Banach E. Adimy et Ezzinbi ([7] et [11]) ont repris la même équation lorsque l'opérateur A est à domaine non dense et ils ont montré des résultats sur l'existence, la régularité et la stabilité. Dans [5], ces même auteurs et Bouzahir ont considéré le cas du retard infini pour l'équation de type neutre étudiée dans [9] :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[x(t) - G(t, x_t)\right] = A\left[x(t) - G(t, x_t)\right] + F(t, x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}. \end{cases} \tag{1.17}$$

L'équation abstraite (1.17) est la vraie généralisation au cas du retard infini de l'équation (1.15). Toutefois, selon [7], l'équation (1.16) peut s'écrire sous la forme (1.17), si on suppose que l'image de G est inclue dans $D(A)$ ($Im(G) \subseteq D(A)$).

3.4 Equations intégro-différentielles à retard

Grimmer [69] a étudié l'existence et la régularité de solutions pour l'équation intégro-différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + g(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x^0 \in E, \end{cases} \tag{1.18}$$

où $g : I\!R^+ \to E$ est une fonction continue. L'opérateur résolvent joue un rôle important pour résoudre l'equation (1.18), il généralise la notion d'un C_0-semi-groupe. L'auteur a établi une théorie de base pour les équations intégro-différentielles sur les espaces de Banach.

Dans [25], les auteurs ont étudié l'équation intégro-différentielle de type neutre à retard infini suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + \int_0^t k(t,s,x(s))ds + F(t,x_t), & t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{1.19}$$

où $A(t) : D \subset E \to E$, $\forall t \in [0,T]$, est un opérateur linéaire de l'espace de Banach $(D, \|\cdot\|_D)$ dans E, $x \to k(t,s,x)$ est définie de $(D, \|\cdot\|_D)$ dans E et F une fonction définie sur $[0,T] \times \mathcal{B}$ à valeurs dans E. Ils ont établi l'existence et l'unicité des solutions strictes sous une condition locale de Lipschitz sur la partie non linéaire et une condition d'intégrabilité sur le noyau k.

Dans [60], l'existence et le comportement asymptotique de solutions pseudo presque automorphes ont été étudiés pour l'équation intégro-différentielle de type neutre à retard infini suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,x_t) = A\mathcal{F}(t,x_t) + \int_0^t B(t-s)\mathcal{F}(t,x_s)ds + G(t,x_t), & t \in [\sigma, \sigma + a[\,, \\ x_\sigma = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{1.20}$$

où les opérateurs A, $B(t) : D(A) \subset E \to E$ sont linéaires fermés à domaine commun $D(A)$ dense dans E. La théorie des opérateurs résolvents a été aussi appliquée pour cette équation.

Dans [84], Hernandez et al. ont étudié l'existence et la régularité de solutions faibles pour la classe d'équations intégro-différentielles de type neutre à retard infini de forme abstraite suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(x(t) + f(t,x_t)\right) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + g(t,x_t), & t \in I = [0,a]\,, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{1.21}$$

où $A : D(A) \subset E \to E$ et $B(t) : D(B(t)) \subset E \to E$, $t \geq 0$, sont des opérateurs linéaires fermés et $f, g : I \times \mathcal{B} \to E$ sont des fonctions appropriées. En 2011, ces auteurs ont établi dans [62], des résultats d'existence de solutions faibles, strictes et classiques pour la classe d'équations intégro-différentielles de type neutre à retard infini suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(x(t) + \int_{-\infty}^{t} N(t-s)x(s)ds\right) = Ax(t) + \int_{-\infty}^{t} B(t-s)x(s)ds + f(t, x_t), \quad t \in I = [0, a], \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{1.22}$$

où A et $B(t), t \geq 0$, sont des opérateurs linéaires fermés à domaine commun $D(A)$ dense dans E et $N(t), t \geq 0$, sont des opérateurs linéaires bornés sur E.

Ezzinbi et al. ([65] et [66]) ont utilisé récemment la notion des opérateurs résolvents pour étudier une classe d'équations intégro-différentielles dans les deux cas retard fini et infini :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \int_{0}^{t} B(t-s)x(s)ds + f(t, x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi, \end{cases} \tag{1.23}$$

où $A : D(A) \to E$ est générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe sur un espace de Banach E. Les auteurs ont abouti à des résultats sur l'existence et la régularité de solutions.

En 2010, Ezzinbi et al. [64] ont étendu les résultats sur l'équation (1.19) pour étudier l'existence et la régularité de solutions pour l'équation intégro-différentielle de type neutre suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{F}(t, x_t) = A\mathcal{F}(t, x_t) + \int_{0}^{t} B(t-s)\mathcal{F}(t, x_s)ds + G(t, x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{1.24}$$

où $\mathcal{F} : I\!R^{+} \times \mathcal{B} \to E$ est définie par

$$\mathcal{F}(t, \phi) = \phi(0) - F(t, \phi), \quad (t, \phi) \in I\!R^{+} \times \mathcal{B},$$

avec G, $F : I\!R^+ \times \mathcal{B} \to E$ et $(B(t))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires fermés sur E ayant le même domaine $D(B)$ contenant $D(A)$.

4 Présentation de la thése

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse ont donné lieu aux trois publications [30], [31] et [32]. Ils s'articulent autour de deux classes d'équations intégro-différentielles fonctionnelles de type neutre à retard infini en dimension infinie. Nous nous plaçons dans la ligne des travaux développés par Adimy, Bouzahir et Ezzinbi. Nous présentons principalement des résultats sur l'aspect quantitatif pour ces équations. Plus exactement, nous étudions l'existence locale, l'existence globale, l'unicité et la régularité de solutions. Nous utilisons la théorie des semi-groupes intégrés introduite par Arendt et al. et le théorème du point fixe de Banach.

Nous nous intéressons aux deux classes d'équations intégro-différentielles de type neutre à retard infini suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}x_t = A\mathcal{D}x_t + \int_0^t k(t,s,x(s))ds + F(t,x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{1.25}$$

et

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{G}(t,x_t) = A\mathcal{G}(t,x_t) + \int_0^t k(t,s,x(s))ds + F(t,x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{1.26}$$

où $A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Banach $(E, |\cdot|)$, le noyau k est une fonction continue définie sur $\Delta \times E$ à valeurs dans E, avec $\Delta = \{(t,s) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$, pour tous $x :]-\infty, b] \to E$, $b > 0$ et $t \in [0,b]$, la fonction d'histoire $x_t :]-\infty, 0] \to E$ définie par

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \quad \text{pour tout } \theta \in]-\infty, 0],$$

appartient à un espace de phase abstrait $\mathcal{B}$ décrit axiomatiquement, $\mathcal{D}, \mathcal{D}_0 : \mathcal{B} \to E$ sont deux opérateurs linéaires bornés tels que

$$\mathcal{D}\phi = \phi(0) - \mathcal{D}_0\phi, \; \forall \; \phi \in \mathcal{B},$$

$\mathcal{G} : I\!R^+ \times \mathcal{B} \to E$ est définie par

$$\mathcal{G}(t, \phi) = \phi(0) - G(t, \phi) \quad \text{pour tout } (t, \phi) \in I\!R^+ \times \mathcal{B},$$

où G et F sont deux fonctions continues définies sur $I\!R^+ \times \mathcal{B}$ à valeurs dans E et $\varphi \in \mathcal{B}$ une fonction donnée.

Nous supposons que A n'est pas nécessairement à domaine dense dans E ($\overline{D(A)} \neq E$) et que la résolvante de A satisfait la condition de Hille-Yosida introduite dans le chapitre suivant. Nous supposons aussi que $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ est semi-normé et satisfait les axiomes fondamentaux (**A**), (**A1**) et (**B**) introduits dans le chapitre suivant.

Les équations intégro-différentielles fonctionnelles de type neutre à retard infini émanent, par exemple, du développement de la théorie par Gurtin et Pipkin [70] et Nunziato [105] pour la description de la conduction thermique dans les matériaux à mémoire. Dans la théorie classique de la conduction thermique, on suppose que l'énergie interne et le flux de chaleur dépendent linéairement de la température $u(\cdot)$ et de son gradient $\nabla u(\cdot)$. Dans ces conditions, l'équation de la chaleur classique décrit assez bien l'évolution de la température dans différents types de matériaux. Cependant, cette description ne donne pas satisfaction dans les matériaux à mémoire. Dans la théorie développée dans ([70] et [105]), l'énergie interne et le flux thermique sont décrits comme des fonctionnelles de u et u_x. Le système suivant, voir par exemple ([44],

[49], [50] et [96]), a été fréquemment utilisé pour décrire ce phénomène :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(c_0 u(t,x) + \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)u(s,x)ds\Big) = c_1 \Delta u(t,x) + \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)\Delta u(s,x)ds, \quad t \geq 0, \\ u(t,x) = 0, ...x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans ce système, $\Omega \subset I\!R^n$ est un ouvert borné à frontière lisse, $(t,x) \in [0,+\infty[\times \Omega$, $u(t,x)$ représente la température au point x à l'instant t, c_0, c_1 sont des constantes physiques et $k_i : R \to R, i = 1,2$, sont respectivement l'énergie interne et la relaxation thermique. En supposant que la solution $u(\cdot)$ est connue sur $]-\infty,0]$, nous pouvons transformer ce système en un système abstrait d'équations intégro-différentielles de type neutre à retard infini. Au mieux de nos connaissances, l'étude de l'existence et des propriétés qualitatives de solutions des équations intégro-différentielles de type neutre à retard infini décrites par les formes abstraites (1.25) et (1.26) étaient des sujets non traités dans la littérature et c'était la motivation principale de notre sujet de recherche.

L'équation (1.25) a été étudiée lorsque $k = 0$, Bouzahir [37] a obtenu des résultas d'existence et de régularité de solutions dans le cas où A est un opérateur de Hille-Yosida à domaine non dense en utilisant la théorie des semi-groupes intégrés. L'équation (1.26) a été beaucoup étudiée lorsque $k = 0$ et/ou $G = 0$. Pour $k = 0$, l'équation (1.26) prend la forme de l'équation (1.17), avec la même hypothèse sur A, Adimy et al. [5] ont établi des résultats sur l'existence, la régularité et la stabilité pour cette dernière équation. Ce travail de thèse peut être considéré comme la suite des travaux de Bouzahir. Pour notre part, nous généralisons les résultats de [5] et [37] aux équations intégro-différentielles fonctionnelles de type neutre à retard infini de type (1.26) et (1.25).

Nous soulignons qu'au niveau de l'équation (1.23), étudiée dans [64] et [67], on peut écrire

$$\int_0^t B(t-s)\mathfrak{F}(t,x_s)ds = \int_0^t B(t-s)x(s)ds - \int_0^t B(t-s)F(t,x_s)ds$$

et en posant

$$\widetilde{G}(t, x_t) = -\int_0^t B(t-s)F(t, x_s)ds + G(t, x_t)$$

et

$$\widetilde{k}(t, s, x(s)) = B(t-s)x(s),$$

on obtient alors l'équation semi-linéaire ($\widetilde{k}$ est linéaire) suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{F}(t, x_t) = A\mathcal{F}(t, x_t) + \int_0^t \widetilde{k}(t, s, x(s))ds + \widetilde{G}(t, x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B} \end{cases} \tag{1.27}$$

et ça devient un cas particulier de notre équation plus générale (1.26).

Nous signalons aussi qu'au niveau du terme intégral $\int_0^t k(t, s, x(s))ds$, si on effectue le changement de variable s en $t+u$, on obtient le terme

$$\int_{-t}^0 k(t, t+u, x(t+u))du = \int_{-t}^0 k(t, t+u, x_t(u))du,$$

qui a la forme $F_0(t, x_t)$, avec $F_0(t, \phi(u)) = \int_{-t}^0 k(t, t+u, \phi(u))du$, mais si on veut l'inclure dans le terme $F(t, x_t)$, on doit supposer que k est définie sur $\Delta \times \mathcal{B}$, ce qui est différent de notre supposition sur k qui est définie sur $\Delta \times E$ et non sur $\Delta \times \mathcal{B}$ et généralement on peut pas appliquer les conclusions de [37] et [5] pour notre cas.

Cette thèse est organisée comme suit :

Le Chapitre 2 est consacré à la présentation de quelques notions et résultats fondamentaux sur la théorie des semi-groupes intégrés et sur la théorie fondamentale des espaces de phase pour l'étude des équations différentielles à retard infini.

Dans le chapitre 3, nous établissons l'existence locale et l'unicité de solutions pour l'équation (1.25). Nous obtenons un résultat d'existence locale d'une solution sous une condition locale de Lipschitz sur la partie non linéaire et sur le noyau et sous des conditions restrictives sur les données initiales.

Dans le chapitre 4, nous étudions l'existence globale et la régularité de solutions pour l'équation (1.26). Une solution est qualifiée de globale s'elle est définie pour tout temps t positif. Au contraire, si une solution existe seulement sur un intervalle de temps $[0; T[$ borné, elle est dite locale. Dans ce dernier cas et quand le temps maximal d'existence est relié à une alternative d'explosion, on dit aussi que la solution explose en temps fini.

Chapitre 2

Semi-groupes Intégrés et Espaces de Phase

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions et résultas de base, nécessaires tout au long de cette thèse, sur la théorie des semi-groupes intégrés et sur la théorie des espaces de phase pour les équations différentielles fonctionnelles à retard infini.

1 Semi-groupes intégrés et Opérateurs de Hille-Yosida

Nous rappelons que $(E, |\cdot|)$ ou tout simplement E désigne un espace de Banach muni de la norme $|\cdot|$. Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire de domaine $D(A)$. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est l'ensemble des nombres complexes $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda I - A : D(A) \to E$ est bijectif et $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, où $\mathcal{L}(E)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans E et I l'opérateur identité de E. Le spectre $\sigma(A)$ de A est le complémentaire de $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$. Pour $\lambda \in \rho(A)$, nous écrivons $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$.

Définition 2.1 *Nous appelons semi-groupe fortement continu (ou C_0-semi-groupe) toute famille $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach E vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $T(0) = I$;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall\ t, s \geq 0$;

(iii) $\lim\limits_{t \to 0} T(t)x = x$, $\forall\, x \in E$.

Définition 2.2 *Nous appelons générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur A défini sur l'ensemble*

$$D(A) = \left\{ x \in E \mid \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}$$

par

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \ \forall\, x \in D(A).$$

Il est bien connu que la méthode des semi-groupes permet de traiter une large classe de problèmes de Cauchy telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + f(t),\ t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in E, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subseteq E$ (f et x_0 sont donnés). Afin que cette méthode peut être utile, il est nécessaire que A soit le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe satisfaisant les deux conditions d'application du théorème de Hille-Yosida :

(**a**) $\overline{D(A)} = E$,

(**b**) Il existe deux constantes $\bar{M} \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telles que si $\lambda > \omega$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\left\| (\lambda - \omega)^n (\lambda I - A)^{-n} \right\| \leq \bar{M} \ \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Toutefois, la non densité de $D(A)$ dans E se produit dans de nombreuses situations à cause des restrictions sur l'espace où les problèmes sont considérés (par exemple, les fonctions périodiques continues et les fonctions Hölderiennes continues) ou à cause des conditions aux limites (par exemple, l'espace C^1 des fonctions de classe C^1 à valeurs nulles sur la frontière est non dense dans l'espace des fonctions continues). Quelques exemples d'opérateurs de Hille-Yosida à domaine non dense sont donnés à la fin de cette section.

Il est vrai que lorsque l'opérateur f est égale à zéro, le problème de Cauchy (2.1) peut encore être traité en utilisant la théorie classique des semi-groupes car A génère un semi-groupe fortement continu dans l'espace $\overline{D(A)}$. Mais, lorsque $f \neq 0$, il est nécessaire d'imposer des restrictions supplémentaires, dont la plus simple est que f prend ses valeurs dans $\overline{D(A)}$. C'est la théorie des semi-groupes intégrés qui permet que l'image de l'opérateur f soit un sous-ensemble de E qui n'est pas nécessairement contenu dans $\overline{D(A)}$.

Les semi-groupes (une fois) intégrés sont motivés en définissant formellement

$$S(t) = \int_0^t T(s)ds,$$

avec $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et en découvrant que

$$\begin{cases} S(0) = 0, \\ S(s)S(t) = \int_0^{t+s} S(\tau)d\tau - \int_0^s S(\tau))d\tau - \int_0^t S(\tau))d\tau, \quad t, s \geq 0. \end{cases}$$

Les définitions suivantes sont dues à Arendt :

Définition 2.3 *[17] Nous appelons semi-groupe intégré toute famille* $(S(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $S(0) = 0$ *;*

(ii) *pour tout* $x \in E$, $S(t)x$ *est une fonction continue en* $t \geq 0$ *à valeurs dans* E *;*

(iii) *pour tous* $t, s \geq 0$, $S(s)S(t) = \int_0^s (S(t+\tau) - S(\tau))d\tau$.

Définition 2.4 *[17] Un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$ est dit exponentiellement borné, s'il existe deux constantes $\bar{M} \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telles que*

$$\|S(t)\| \leq \bar{M}e^{\omega t} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

De plus, on dit que $(S(t))_{t\geq 0}$ est non-dégénéré si pour tout $t \geq 0$, $S(t)x = 0$ implique $x = 0$.

Nous avons la définition générale suivante :

Définition 2.5 *[17] Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \to E$ est appelé générateur d'un semi-groupe intégré s'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ vérifiant $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et il existe une famille fortement continue et exponentiellement bornée $(S(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés telle que*

$$\begin{cases} S(0) = 0, \\ (\lambda I - A)^{-1} = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)dt \text{ pour tout } \lambda > \omega. \end{cases}$$

Proposition 2.1 *[17] Soit A le générateur d'un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$, alors pour tous $x \in E$ et $t \geq 0$,*

$$\begin{cases} \int_0^t S(s)xds \in D(A), \\ S(t)x = A\left(\int_0^t S(s)xds\right) + tx. \end{cases}$$

De plus, pour tous $x \in D(A)$ et $t \geq 0$,

$$\begin{cases} S(t)x \in D(A), \\ AS(t)x = S(t)Ax, \\ S(t)x = \int_0^t S(s)Ax\, ds + tx. \end{cases}$$

Corollaire 2.1 *[17] Soit A le générateur d'un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$, alors pour tous $x \in E$ et $t \geq 0$, $S(t)x \in \overline{D(A)}$.*

En outre, soit $x \in E$, alors $S(\cdot)x$ est différentiable à droite en $t \geq 0$ si et seulement si $S(t)x \in D(A)$. Dans ce cas,

$$S'(t)x = AS(t)x + x.$$

Proposition 2.2 *[86] Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire et $(S(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ une famille exponentiellement bornée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\int_0^t S(s)xds \in D(A)$ et $S(t)x = A\left(\int_0^t S(s)xds\right) + tx$, pour tous $t \geq 0$ et $x \in E$,*

(ii) *$(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré sur E généré par A.*

Un cas particulier important est lorsque le semi-groupe intégré est localement Lipschitzien (par rapport au temps).

Définition 2.6 *[89] Un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$ est appelé localement Lipschitzien si pour tout $a > 0$, il existe une constante $l(a) > 0$ telle que*

$$\|S(t) - S(s)\| \leq l(a)\,|t-s| \text{ pour tous } t,\ s \in [0,a]\,.$$

Dans ce cas, nous savons d'après [89] que $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement borné.

Définition 2.7 *[89] Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \to E$ est dit qu'il satisfait la condition de Hille-Yosida s'il existe deux constantes $\bar{M} \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telles que*

$$\begin{cases}]\omega, +\infty[\subset \rho(A), \\ \sup\left\{(\lambda-\omega)^n \left\|R(\lambda, A)^n\right\|, n \in \mathbb{N},\ \lambda > \omega\right\} \leq \bar{M}. \end{cases}$$

Le théorème suivant montre que la condition de Hille-Yosida caractérise les générateurs des semi-groupes intégrés localement Lipschitziens.

Théorème 2.1 *[89] Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est le générateur d'un semi-groupe intégré localement Lipschitzien non-dégénéré ;*

(ii) *A satisfait la condition de Hille-Yosida.*

En outre, $l(a)$ dans la définition (2.6) peut être prise telle que $l(a) \leq \bar{M}^2 e^{\omega a}$.

Proposition 2.3 *[89] Soit $A : D(A) \subset E \to E$ le générateur d'un semi-groupe intégré localement Lipschitzien $(S(t))_{t\geq 0}$. Si on détermine pour tout $\lambda \in I\!R$,*

$$\begin{cases} B : D(A) \subset E \to E, \\ Bu = Au - \lambda u, \end{cases}$$

alors B est le générateur d'un semi-groupe intégré localement Lipschitzien $(S_\lambda(t))_{t\geq 0}$ donné par

$$S_\lambda(t) = e^{-\lambda t} S(t) + \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} S(s)\, ds.$$

De plus, en relation avec le théorème (2.1) ci-dessus et la définition (2.7), B satisfait la condition de Hille-Yosida, avec $\omega_B = \omega_A - \lambda$.

Tout au long de ce texte, un opérateur linéaire qui satisfait la condition de Hille-Yosida, sans être nécessairement à domaine dense, est appelé opérateur de Hille-Yosida.

Théorème 2.2 *Soit A un opérateur de Hille-Yosida et $(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe intégré localement Lipschitzien généré par A. Il est bien connu d'après [116], que la dérivée $(S'(t))_{t\geq 0}$ sur $\overline{D(A)}$ est un semi-groupe fortement continu (C_0-semi-groupe) généré par la part A_0 de* *l'opérateur A dans $\overline{D(A)}$, définie par*

$$\begin{cases} D(A_0) = \left\{x \in D(A_0) : Ax \in \overline{D(A)}\right\}, \\ A_0 x = Ax, \text{ pour tout } x \in D(A_0). \end{cases}$$

Dans la suite, nous donnons quelques résultats concernant l'existence des solutions pour le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + f(t), \, t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in E, \end{cases} \tag{2.2}$$

où A est un opérateur linéaire fermé sur E.

Les résultats suivants sont dus à Da Prato et Sinestrari.

Définition 2.8 *[57] Une fonction $u : [0, a] \to E$, $a > 0$, est dite solution stricte de l'équation (2.2) dans $[0, a]$ si les conditions suivantes sont réalisées :*

(i) $u \in C^1([0, a]\,; E) \cap C([0, a]\,; D(A))$;

(ii) *u satisfait l'équation (2.2) sur $[0, a]$.*

Théorème 2.3 *[57] Soient $A : D(A) \subseteq E \to E$ un opérateur linéaire, $f : [0, a] \to E$ et $x \in D(A)$ tels que*

(i) *A est un opérateur de Hille-Yosida,*

(ii) *$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\, ds$ pour certaine fonction g intégrable au sens de Bochner,*

(iii) *$Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$,*

alors il existe une solution stricte unique u de l'équation (2.2) sur l'intervalle $[0, a]$ vérifiant pour chaque $t \in [0, a]$

$$|u(t)| \leq \bar{M} e^{\omega t} \left(|x| + \int_0^t e^{-\omega s} \, |f(s)| \, ds \right). \tag{2.3}$$

Dans le cas où x_0 n'est pas suffisamment régulière (x_0 est dans $\overline{D(A)}$ seulement), il se peut qu'il existe une solution stricte $x(t) \in E$, mais, suite aux travaux de Da Prato et Sinestrari [57], l'équation (2.2) peut encore avoir une solution dite intégrale. C'est le motif pour lequel nous introduisons la définition suivante :

Définition 2.9 *[57] Étant donné $f \in L^1_{loc}([0,+\infty[\,; E)$ et $x \in E$, nous disons que $u : [0,+\infty[\to E$ est une solution intégrale de l'équation (2.2) si les assertions suivantes sont vérifiées :*

(i) $u \in C([0,+\infty[\,; E)$,

(ii) $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$, *pour tout* $t \geq 0$,

(iii) $u(t) = x + A\left(\int_0^t u(s)ds\right) + \int_0^t f(s)ds$, *pour tout* $t \geq 0$.

De cette définition, nous en déduisons que pour une solution intégrale x, nous avons $x(t) \in \overline{D(A)}$ pour tout $t > 0$, car $x(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \int_t^{t+h} x(s)ds$ et $\int_t^{t+h} x(s)ds \in D(A)$. En particulier, $x_0 \in \overline{D(A)}$ est une condition nécessaire pour l'existence d'une solution intégrale pour l'équation (2.2).

Théorème 2.4 *([43] et [57]) Supposons que A est un opérateur de Hille-Yosida, $x \in \overline{D(A)}$ et $f : [0,+\infty[\to E$ une fonction continue, alors le problème (2.2) a une solution intégrale unique qui est donnée par la formule de la variation de la constante suivante :*

$$u(t) = S'(t)x + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t S(t-s)f(s)ds\right) \text{ pour tout } t \geq 0, \tag{2.4}$$

où $S(t)$ est le semi-groupe intégré généré par A.

En outre, la fonction u satisfait l'inégalité (2.3).

Le théorème ci-dessus indique également que $t \to \int_0^t S(t-s)f(s)ds$ est différentiable.

Le résultat suivant est nécessaire tout au long de cette thèse.

Proposition 2.4 *([1], [89] et [115]) Soient $A : D(A) \subseteq E \to E$ un opérateur de Hille-Yosida, $(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe intégré généré par A et $G : [0,a] \to E$, $a > 0$, une fonction intégrable au sens de Bochner. Il en résulte que la fonction $B : [0,a] \to E$ définie par*

$$B(t) = \int_0^t S(t-s)G(s)\,ds$$

est continuement différentiable sur $[0,a]$ et satisfait pour tout $t \in [0,a]$ les propriétés suivantes :

(i) $B'(t) = \lim\limits_{h \searrow 0} \dfrac{1}{h} \int_0^t S'(t-s)S(h)G(s)\,ds$,

(ii) $B(t) \in D(A)$,

(iii) $B'(t) = AB(t) + \int_0^t G(s)\,ds$,

(iv) $\mathcal{R}(\lambda)B'(t) = \int_0^t S'(t-s)\mathcal{R}(\lambda)G(s)\,ds$, *pour tout* $\lambda > \omega$,

(v) $|B'(t)| \leq 2l \int_0^t |G(s)|\,ds$,

(vi) $B'(t) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_0^t S'(t-s)B_\lambda G(s)\,ds$,

où $B_\lambda := \lambda\mathcal{R}(\lambda)$ et $l = l(a)$ est la constante de Lipschitz de $S(.)$ sur $[0,a]$.

Nous terminons cette section en introduisant quelques exemples classiques d'opérateurs de Hille-Yosida à domaine non dense (voir [57] pour plus de détails).

Exemple 2.1

$$\begin{cases} E = C([0,a]\,, I\!R), \\ D(A) = \{u \in C^1([0,a]\,, I\!R);\ u(0) = 0\}\,, \\ Au = -u'. \end{cases}$$

Exemple 2.2

$$\begin{cases} E = \{u \in C^{\alpha}([0,a], I\!R);\ u(0) = 0\},\ 0 < \alpha < 1, \\ D(A) = \{u \in C^{1+\alpha}([0,a], I\!R);\ u(0) = u'(0) = 0\}, \\ Au = -u', \end{cases}$$

où

$$C^{\alpha}([0,a], I\!R) = \left\{ u : [0,a] \to I\!R;\ [u]_{C^{\alpha}([0,a],I\!R)} = \sup_{0 \leq t \leq s \leq a} \frac{|u(t) - u(s)|}{|t-s|^{\alpha}} < \infty \right\},$$

et

$$C^{\alpha+1}([0,a], I\!R) = \{u : [0,a] \to I\!R;\ u' \in C^{\alpha}([0,a], I\!R)\},$$

avec

$$\|u\|_{C^{\alpha}([0,a],I\!R)} = \|u\|_{C([0,a],I\!R)} + [u]_{C^{\alpha}([0,a],I\!R)}.$$

Exemple 2.3

$$\begin{cases} E = C([0,a], I\!R), \\ D(A) = \{u \in C^{2}([0,a], I\!R);\ u(0) = u(a) = 0\}, \\ Au = u''. \end{cases}$$

Exemple 2.4

$$\begin{cases} E = C(\overline{\Omega}, I\!R), \\ D(A) = \left\{u \in C(\overline{\Omega}, I\!R);\ u = 0 \ sur\ \Gamma \ et\ \Delta u \in C(\overline{\Omega}, I\!R)\right\}, \\ Au = \Delta u, \end{cases}$$

ici, Ω un ouvert borné de $I\!R^n$ de frontière régulière Γ et Δ est le Laplacien au sens des distributions sur Ω.

2 Espaces de phase pour les équations différentielles à retard infini

Dans la littérature consacrée aux équations différentielles fonctionnelles à retard fini ($r \geq 0$), l'espace de phase, l'espace des données initiales, est dans la plupart de temps l'espace des fonctions continues sur $[r, 0]$ et à valeurs dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme. Toutefois, lorsque le retard est infini ($r = +\infty$), la sélection de l'espace de phase $\mathcal{B}$ joue un rôle important dans l'étude des deux théories qualitative et quantitative. Comme une grande variété d'espaces de phase pourrait être utilisée pour construire une théorie appropriée pour les équations différentielles fonctionnelles à retard infini dans un espace de phase abstrait, il est devenu souhaitable d'approcher le problème axiomatiquement. En effet, avant 1966, chaque auteur choisit un espace qui pensait que cela implique des propriétés intéressantes de l'équation sous investigation. Mais, beaucoup de répétitions ont été soulignées. Ainsi, de nombreux essais ont été faits afin d'éviter les répétitions et résumer les résultats. L'objectif était la discussion des équations différentielles fonctionnelles à retard infini dans un espace de phase abstrait défini par certains axiomes. Ces axiomes ne sont que quelques propriétés de nombreux espaces concrets utilisés avant. Effectivement, la première approche axiomatique a été donnée par Coleman et Mizel dans [53] et [54]]. Après ces papiers, de nombreuses contributions ont été publiées par de nombreux auteurs jusqu'en 1978, quand Hale et Kato ont organisé l'étude des équations différentielles fonctionnelles à retard infini dans [74]. Ce qui a conduit à de nombreuses études sur cette théorie. Nos résultats sont obtenus, autant que possible sur l'espace de phase introduit par ces derniers. C'est un espace semi-normé satisfaisant des axiomes appropriés considérés par Kappel et Schappacher [88] et Schumacher [112]. Le livre de Hino et al. [87] contient une bibliographie exhaustive et une discussion détaillée sur ce sujet. À l'instar de ce livre, nous supposerons que l'espace de phase $\mathcal{B}$ est un espace de fonctions définies sur $]-\infty, \ 0]$ à valeurs dans E muni d'une semi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ et vérifiant les axiomes fondamentaux suivants, intoduits à l'origine dans [74] et largement discutés dans [87].

($\mathbf{A}$) Il existe une constante positive H et deux fonctions $K(\cdot)$ continue et $M(\cdot)$ localement bornée définies sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$ telles que pour tous $\sigma \in I\!R$ et $a > 0$, si $x :]-\infty, \sigma + a] \to E$, $x_\sigma \in \mathcal{B}$ et $x(\cdot)$ est continue sur $[\sigma, \sigma + a]$, alors pour tout t dans $[\sigma, \sigma + a]$ les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $x_t \in \mathcal{B}$,

(ii) $|x\,(t)| \leq H\ \|x_t\|_{\mathcal{B}}$,

(iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t-\sigma) \sup\limits_{\sigma \leq s \leq t} |x\,(s)| + M\,(t-\sigma)\,\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}$.

($\mathbf{A1}$) Pour la fonction $x(\cdot)$ dans ($\mathbf{A}$), $t \mapsto x_t$ est une fonction continue à valeurs dans $\mathcal{B}$ pour tout t dans $[\sigma, \sigma + a]$.

($\mathbf{B}$) L'espace $\mathcal{B}$ est complet.

Remarque 2.1 *[87] Comme $||.||_{\mathcal{B}}$ est une semi-norme, $||\phi - \psi||_{\mathcal{B}} = 0$ n'implique pas nécessairement que $\phi(\theta) = \psi(\theta)$ pour tout $\theta \in]-\infty, 0]$, mais d'après* (**ii**) *dans* (A)*, si $||\phi - \psi||_{\mathcal{B}} = 0$, alors $\phi(0) = \psi(0)$. En effet, l'axiome* ($\mathbf{A} - \mathbf{ii}$) *est equivalent au suivant :*

($\mathbf{A}$) $(\mathbf{ii})'$ $|\phi(0)| \leq H\,||\phi||_{\mathcal{B}}$*, pour chaque* $\phi \in \mathcal{B}$.

Remarque 2.2 *[87] L'axiome* ($\mathbf{B}$) *est équivalent à dire que l'espace des classes d'équivalence $\widehat{\mathcal{B}} := \mathcal{B}\,/\,\|.\|_{\mathcal{B}} = \left\{\widehat{\phi} : \phi \in \mathcal{B}\right\}$ est un espace de Banach.*

Nous mettons fin à cette section en donnant quelques exemples concrets d'espaces fonctionnels vérifiant les axiomes ($\mathbf{A}$), ($\mathbf{A1}$) et ($\mathbf{B}$).

Exemple 2.5 *Pour toute fonction continue $g :]-\infty, 0] \to]0, +\infty[$, soit C_g^0 l'espace défini par*

$$C_g^0 := \{\phi \in C(]-\infty, 0]\,; E) : \lim_{\theta \to -\infty} \frac{|\phi(\theta)|}{g(\theta)} = 0\},$$

et muni de la norme

$$\|\phi\|_g := \sup_{-\infty<\theta\leq 0} \frac{|\phi(\theta)|}{g(\theta)}.$$

Il a été prouvé dans les théorèmes 1.3.2 et 1.3.6 de [87] que si g est décroissante alors $\left(C_g^0, \|\cdot\|_g\right)$ satisfait les axiomes (**A**), (**A1**) et (**B**).

Exemple 2.6 *Considérons l'espace $C_r \times L^1(g)$ de toutes les fonctions $\phi :]-\infty, 0] \to E$ telle que ϕ est continue sur $[-r, 0]$, pour un $r \geq 0$, mesurable au sens de Lebesgue et $g(.)\,|\phi(.)|$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $]-\infty, -r[$, où $g :]-\infty, -r[\to I\!R$ est une fonction positive mesurable au sens de Lebesgue. Supposons que g satisfait les conditions suivantes :*

(i) g est intégrable sur $]-d, -r[$ pour tout $d \geq r$,

(ii) Il existe une fonction $G :]-\infty, 0] \to [0, +\infty[$ localement bornée telle que

$$g(\xi+\theta) \leq G(\xi) g(\theta), \text{ pour tous } \xi \leq 0 \text{ et } \theta \in]-\infty, -r[\setminus N_\xi,$$

où $N_\xi \subseteq]-\infty, -r[$ est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Ainsi, le théorème 1.3.8 dans [87] affirme que l'espace $C_r \times L^1(g)$, muni de la semi-norme

$$\|\phi\|_r := \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |\phi(\theta)| + \int_{-\infty}^{-r} g(\theta)\,|\phi(\theta)|\,d\theta,$$

est un espace de phase qui vérifie les axiomes (**A**), (**A**1) *et* (**B**).

Plus récemment, Ruess et Summers dans [111] ont considéré un autre axiome pour étudier l'existence des solutions strictes et la caractérisation du générateur du semi-groupe solution.

(**D1**) Pour une suite $(\phi_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{B}$, si $\|\phi_n\|_{\mathcal{B}} \to 0$, alors $|\phi_n(s)| \to 0$ pour tout $s \in]-\infty, 0]$.

Exemple 2.7 *A titre d'exemple, on peut vérifier sans difficultés que l'axiome ci-dessus est satisfait par l'espace C_g^0 dans le cas particulier où $g(\theta) = e^{-\gamma\theta}$, $\gamma > 0$:*

$$C_\gamma^0 = \left\{ \phi \in C(]-\infty, 0]\,; E) : \lim_{\theta \to -\infty} e^{\gamma\theta}\phi(\theta) = 0 \right\},\ \gamma > 0,$$

muni de la norme $\|\phi\|_\gamma = \sup\limits_{\theta \leq 0} e^{\gamma\theta} |\phi(\theta)|$, $\phi \in C_\gamma^0$. Il est satisfait, en général, par l'espace

$$C_\gamma = \left\{ \phi \in C(]-\infty, 0]\,; E) : \lim_{\theta \to -\infty} e^{\gamma\theta}\phi(\theta) \ \textit{existe dans}\ E \right\},\ \gamma > 0.$$

Chapitre 3

Existence locale pour une classe d'équations intégro-différentielles semi-linéaires à retard infini

1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la classe d'équations intégro-différentielles fonctionnelles de type neutre à retard infini de forme générale abstraite suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}x_t = A\mathcal{D}x_t + \int_0^t k(t,s,x(s))ds + F(t,x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Nous rappelons que $(E, |.|)$ est un espace de Banach, $\mathcal{B}$ est l'espace de phase de fonctions définies sur $]-\infty, 0]$ à valeurs dans E, muni d'une semi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ et satisfaisant les axiomes fondamentaux (**A**), (**A1**) et (**B**) introduits dans le chapitre 2, $A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur linéaire fermé pas nécessairement à domaine dense dans E, $\mathcal{D} : \mathcal{B} \to E$ est un

0. Ce chapitre est basé sur un article publié en 2010, en collaboration avec H. Bouzahir et A. Maaden. Voir [32].

opérateur linéaire borné défini par

$$\mathcal{D}\phi = \phi(0) - \mathcal{D}_0\phi, \quad \forall \phi \in \mathcal{B},$$

avec $\mathcal{D}_0 : \mathcal{B} \to E$ un opérateur linéaire borné, $k : \Delta(0,T) \times E \to E$ $(T > 0)$ est une fonction continue, avec $\Delta(0,T) = \{(t,s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$, $F : [0,+\infty[\times \mathcal{B} \to E$ est une fonction non linéaire continue, $x_t : \left]-\infty,\ 0\right] \to E$ est définie par

$$x_t\,(\theta) = x(t+\theta) \quad \text{pour tout } \theta \in \left]-\infty,\ 0\right],$$

et $\varphi \in \mathcal{B}$ une fonction donnée.

Dans [11], les auteurs ont montré des résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions de l'équation non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x(t) - Lx_t) = Ax(t) + F(t, x_t),\ t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in X, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $L : X \to E$ est un opérateur linéaire continu, $A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur différentiel qui satisfait la condition de Hille-Yosida et F une fonction définie de $[0,T] \times X$, $T > 0$ dans E. Dans [9], les mêmes auteurs ont étudié une classe plus générale d'équations différentielles de type neutre et à retard fini :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\mathcal{D}x_t - G(t, x_t)) = A(\mathcal{D}x_t - G(t, x_t)) + F(t, x_t),\ t \geq 0, \\ x_0 = \varphi, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\mathcal{D} : X \to E$ est un opérateur linéaire continu défini par

$$\mathcal{D}\phi = \phi(0) - P\phi, \quad \text{pour tout } \phi \in X$$

et F et G sont deux fonctions définies de $[0,+\infty[\times X$ à valeurs dans E. Ils ont supposé qu'il existe une fonction continue et croissante $\delta:[0,r]\to[0,+\infty[$, vérifiant $\delta(0)=0$ et une famille d'opérateurs linéaires continus $W_\varepsilon : X\to E$, $\varepsilon\in[0,r]$, telles que

$$\|P\phi - P_\varepsilon\phi\| \leq \delta(\varepsilon)\,\|\phi\|\,,\ \phi\in X,\ \varepsilon\in[0,r]\,,$$

où $P_\varepsilon : X\to E$ est défini pour $\varepsilon\in[0,r]$ par

$$\begin{cases} P_\varepsilon = W_\varepsilon\circ\tau_\varepsilon, & \\ \tau_\varepsilon(\phi)(\theta)=\phi(\frac{r-\varepsilon}{r}\theta-\varepsilon), & \text{pour tout } \ (\theta,\phi)\in[-r,0]\times X. \end{cases}$$

Sous des conditions de Lipschitz, ils ont obtenu des résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions de l'équation (3.3).

Dans [37], l'auteur a étudié l'équation (3.1) dans le cas où $k=0$, il a obtenu des résultas d'existence et d'unicité des solutions intégrales en utilisant la théorie des semi-groupes intégrés et le théorème du point fixe de Banach.

Nous généralisons la théorie de base développée dans [37] pour établir l'existence locale et l'unicité des solutions intégrales de l'équation (3.1). Dans la section suivante, nous rappelons quelques résultats préliminaires et nous formulons quelques hypothèses qui seront utilisées tout au long de ce chapitre.

2 Préliminaires

Puisque dans l'axiome (**A**) les fonctions $K(\cdot)$ et $M(\cdot)$ sont respectivement continue et localement bornée, nous utilisons les notations K_a et M_a pour noter respectivement $\max\limits_{0\leq s\leq a} K(s)$ et $\sup\limits_{0\leq s\leq a} M(s)$ pour $a>0$ fixé.

Nous supposons que l'opérateur A satisfait l'hypothèse suivante :

(**H3.1**) $A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur de Hille-Yosida : il existe deux constantes $\bar{M} \geq 0$ et $\omega \in I\!R$ telles que $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et

$$\sup \left\{ (\lambda - \omega)^n \left\| (\lambda I - A)^{-n} \right\|, \, n \in I\!N, \, \lambda > \omega \right\} \leq \bar{M}.$$

Nous savons d'après [89] que sous la condition (**H3.1**), l'opérateur A est générateur d'un semi-groupe intégré continu et localement Lipschitzien $(S(t))_{t\geq 0}$ sur E. De plus, $(S'(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $\overline{D(A)}$ tel que

$$|S'(t)x| \leq \bar{M} e^{\bar{\omega} t} |x|, \qquad \text{pour tous } t \geq 0 \text{ et } x \in \overline{D(A)}.$$

Soit A_0 la part de l'opérateur A dans $\overline{D(A)}$, définie par

$$\begin{cases} D(A_0) = \left\{ x \in D(A) : Ax \in \overline{D(A)} \right\}, \\ A_0 x = Ax, \text{ pour tout } x \in D(A_0). \end{cases}$$

Il est bien connu que $\overline{D(A_0)} = \overline{D(A)}$ et que l'opérateur A_0 génére un semi-groupe fortement continu $(T_0(t))_{t\geq 0}$ sur $\overline{D(A)}$.

Rappelons que ([106]) si $x \in \overline{D(A)}$ et $t \geq 0$, alors $\int_0^t T_0(s)x \in D(A_0)$ et

$$\left(A \int_0^t T_0(s)x ds \right) + x = T_0(t)x. \tag{3.4}$$

Rappelons aussi que $(T_0(t))_{t\geq 0}$ coincide sur $\overline{D(A_0)}$ avec la dérivée du semi-groupe intégré localement Lipschitzien $(S(t))_{t\geq 0}$ généré par A sur E. Ce semi-groupe intégré est exponentiellement borné, c'est à dire il existe deux constantes $\overline{M}$ et $\overline{\omega}$ telles que $\|S(t)\| \leq \overline{M} e^{\overline{\omega} t}$, $\forall t \geq 0$.

Nous avons besoin de rappeler les résultats suivants.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}u_t = A\mathcal{D}u_t \text{ si } t \geq 0, \\ u(\theta) = \varphi(\theta) \text{ si } \theta \in \left]-\infty,\ 0\right] \text{ avec } \varphi \in \mathcal{B}. \end{cases} \tag{3.5}$$

En utilisant l'égalité (3.4), nous concluons qu'une condition nécessaire pour que $u : \left]-\infty, b\right[\to E$, $b > 0$, soit une solution de l'équation (3.5) est qu'elle vérifie l'équation intégrale suivante sur $\left]-\infty, b\right[$.

$$\begin{cases} \mathcal{D}u_t = T_0(t)\mathcal{D}\varphi,\ t \geq 0, \\ u_0 = \varphi, \end{cases} \tag{3.6}$$

où

$$\varphi \in \mathcal{Y} := \left\{\phi \in \mathcal{B} : \mathcal{D}\phi \in \overline{D(A)}\right\}.$$

Proposition 3.1 *[37] Supposons que la condition* (**H3.1**) *est satisfaite et que* $\|\mathcal{D}_0\| K(0) < 1$, *alors, pour* $\varphi \in \mathcal{Y}$ *donnée, il existe une unique fonction* u *continue sur* $[0, T[$ *et solution de l'équation (3.6) sur* $\left]-\infty, T\right[$*. En outre, la famille d'opérateurs* $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ *définie sur* $\mathcal{Y}$ *par* $\mathcal{T}(t)\varphi = u_t(., \varphi)$ *est un* C_0*-semi-groupe sur* $\mathcal{Y}$.

Dans la suite, nous définissons une solution intégrale fondamentale $Z(t)$ associée à l'équation (3.1).

Considérons l'équation suivante pour un $e \in E$ donné :

$$\begin{cases} \mathcal{D}z_t = S(t)e, \quad \text{pour tout } t \geq 0, \\ z(t) = 0, \quad \text{pour tout } t \in \left]-\infty,\ 0\right]. \end{cases} \tag{3.7}$$

Nous faisons l'hypothèse suivante :

(**H3.2**) Il existe une fonction continue croissante $\delta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $\delta(0) = 0$ et une famille d'opérateurs linéaires continus $W_\varepsilon : \mathcal{B} \to E$, $\varepsilon \in [0, +\infty[$, telles que

$$|\mathcal{D}_0\phi - \mathcal{D}_\varepsilon\phi| \leq \delta(\varepsilon) \|\phi\|_{\mathcal{B}}, \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{B},$$

où l'opérateur linéaire $\mathcal{D}_\varepsilon : \mathcal{B} \to E$ est défini pour tout $\varepsilon \in [0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} \mathcal{D}_\varepsilon = W_\varepsilon \circ \tau_\varepsilon, \\ \tau_\varepsilon(\phi)(\theta) = \phi(\theta - \varepsilon), \quad \text{pour tous } \phi \in \mathcal{B} \text{ et } \theta \in \,]-\infty, \ 0] \,. \end{cases}$$

Ici $\mathcal{D}_\varepsilon$ est la version en retard infini de celui introduit dans [8] et [9].

Proposition 3.2 *[36] Supposons que les deux hypothèses* (**H3.1**) *et* (**H3.2**) *sont vérifiées telles que $K(0)\,\|\mathcal{D}_0\| < 1$, alors pour un $e \in E$ donné, l'équation (3.7) admet une solution intégrale unique $z := z(.)e : \,]-\infty, +\infty[\to E$. De plus, l'opérateur $Z(t) : E \to \mathcal{B}$ défini par*

$$Z(t)e = z_t(.)e$$

satisfait, pour toute fonction continue $f : [0, +\infty[\to E$, les propriétés suivantes :

(i) *Pour tout $T > 0$, il existe une fonction $\alpha(.) \in L^\infty([0, T], I\!R^+)$ et $\beta \in I\!R$ tels que $\|Z(t)\| \leq \alpha(t)e^{t\beta}$ pour tout $t \in [0, T]$;*

(ii) *$Z(t)(E) \subseteq \mathcal{Y}$, pour tout $t \geq 0$;*

(iii) *pour tout $\tau > 0$ il existe une constante $k(\tau) > 0$ telle que*

$$\|Z(t)e - Z(s)e\|_{\mathcal{B}} \leq k(\tau)\,|t - s|\,|e| \ \textit{ pour tous } t, \ s \in [0, \tau] \ \textit{ et } e \in E.$$

(iv) *Pour toute fonction continue $f : [0, +\infty[\to E$, les deux fonctions*

$$t \mapsto \int_0^t Z(t-s)f(s)\,ds \ \textit{ et } t \mapsto \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds$$

sont continuement différentiables pour tout $t \geq 0$ et satisfont

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t Z(t-s)f(s)\,ds\right) = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(h)f(s)ds \text{ pour tout } t \geq 0,$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(\frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)f(s)\,ds\right) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^t S'(t-s)S(h)f(s)ds \\ &= \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s)ds.\end{aligned}$$

Nous rappelons la définition suivante :

Définition 3.1 *[30] Soient $T > 0$ et $\varphi \in \mathcal{B}$. Nous disons qu'une fonction $x := x(.,\varphi) :]-\infty, T[\to E$, $0 < T \leq +\infty$, est une solution intégrale de l'équation (3.1), si*

(i) *x est continue sur $[0, T[$;*

(ii) *$\int_0^t \mathcal{D}x_s\,ds \in D(A)$ pour tout $t \in [0, T[$;*

(iii) *$\mathcal{D}x_t = \mathcal{D}\varphi + A\int_0^t \mathcal{D}x_s\,ds + \int_0^t [\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau]\,ds + \int_0^t F(s,x_s)\,ds$ pour tout $t \in [0, T[$;*

(iv) *$x(t) = \varphi(t)$, pour tout $t \in]-\infty, 0]$.*

Nous déduisons de [5] et [116] que les solutions intégrales de l'équation (3.1) sont données pour $\varphi \in \mathcal{B}$ vérifiant $\mathcal{D}\varphi \in \overline{D(A)}$, par le système suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}x_t = S'(t)\mathcal{D}\varphi + \dfrac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds \\ \qquad + \dfrac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(s,x_s)ds,\ t \in [0, T[, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Nous supposons également que $\mathcal{B}$ est normé et satisfait l'axiome (**C**1) suivant :

($\mathbf{C}1$) Si $(\phi_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}$ et si $(\phi_n)_{n\geq 0}$ converge compactement vers ϕ sur $]-\infty,\ 0]$, alors ϕ est dans $\mathcal{B}$ et $\|\phi_n - \phi\|_{\mathcal{B}} \to 0$ quand $n \to \infty$.

Lemme 3.1 *[104] Supposons que $\mathcal{B}$ est normé et satisfait l'axiome ($\mathbf{C}1$) et soit $f : [0, a] \to \mathcal{B}$, $a > 0$, une fonction continue telle que $f(t)(\theta)$ est continue pour $(t, \theta) \in [0, a] \times]-\infty, 0]$, alors*

$$\left[\int_0^a f(t)dt\right](\theta) = \int_0^a f(t)(\theta)dt, pour tout \theta \in]-\infty, 0] .$$

Proposition 3.3 *Soit $\mathcal{B}$ un espace normé satisfaisant l'axiome ($\mathbf{C}1$). S'il existe une solution intégrale $x := x(., \varphi) :] - \infty, T[\to E,\ 0 < T \leq +\infty$, de l'équation (3.1), alors pour tout $t \in [0, T[$, la fonction $t \mapsto x_t \in \mathcal{B}$ satisfait*

$$\begin{aligned} x_t &= \mathcal{T}(t)\varphi + \frac{d}{dt}\textstyle\int_0^t Z(t-s)\left[\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds \\ &\quad + \frac{d}{dt}\textstyle\int_0^t Z(t-s)F(s,x_s)ds \\ &= \mathcal{T}(t)\varphi + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\textstyle\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(h)\left[\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds \\ &\quad + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\textstyle\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(h)F(s,x_s)ds. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Réciproquement, s'il existe une fonction $y \in C([0, T[\,, \mathcal{B})$ telle que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{T}(t)\varphi + \frac{d}{dt}\textstyle\int_0^t Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds \\ &\quad + \frac{d}{dt}\textstyle\int_0^t Z(t-s)F(s,y(s))ds,\ t \in [0,T[\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

alors $y(t) = x_t$ pour tout $t \in [0, T[$, où

$$x(t) = \begin{cases} y(t)(0),\ t \in [0,T[\,, \\ \varphi(t),\ t \in]-\infty,\ 0]\,, \end{cases}$$

avec $x(.)$ une solution intégrale de l'équation (3.1).

Preuve. Par la proposition 3.2, il est immédiat que pour toute fonction continue $f : [0, T[\to E$, la fonction W définie par

$$W(t) := \int_0^t Z(t-s)f(s)ds,$$

est continuement différentiable et vérifie $W'(0) = 0$.

Posons

$$w(t) = \begin{cases} W(t)(0) \text{ si } t \geq 0, \\ 0 \text{ si } t \in \left]-\infty,\ 0\right]. \end{cases}$$

Par l'utilisation de l'axiome $(\mathbf{A} - (\mathbf{ii})')$, $w(t)$ est continuement différentiable. Le lemme 3.1 implique que pour tout $t \in [0, T[$

$$\begin{aligned} w(t) &= \left(\int_0^t Z(t-s)f(s)ds \right)(0) \\ &= \int_0^t (Z(t-s)f(s))(0)ds \\ &= \int_0^t z(t-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

En général, pour tous $t \in [0, T[$ et $\theta \in \left]-\infty,\ 0\right]$

$$\begin{aligned} (W(t))(\theta) &= \left(\int_0^t Z(t-s)f(s)ds \right)(\theta) \\ &= \int_0^t (Z(t-s)f(s))(\theta)ds \\ &= \int_0^t z(t+\theta-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

D'ailleurs, puisque $z(s) = 0$ pour tout $s \in \left]-\infty,\ 0\right]$, nous obtenons

$$\int_0^t z(t+\theta-s)f(s)ds = \int_0^{t+\theta} z(t+\theta-s)f(s)ds \tag{3.11}$$

et $(W(t))(\theta) = w(t+\theta)$. Ce qui est équivalent à $W(t) = w_t$. D'autre part, nous avons

$$(W'(t))(\theta) = w'(t+\theta), \quad \text{pour tous } t \in [0,T[\text{ et } \theta \in]-\infty,\ 0].$$

Ainsi $W'(t) = (w')_t$ pour tout $t \in [0,T[$.

Maintenant, supposons que $y(.,\varphi)$ est une solution de l'équation (3.10). La fonction $\mathcal{T}(t)\varphi = u_t$ avec $u :]-\infty, T[\to E$ est la solution intégrale de $\mathcal{D}u_t = S'(t)\mathcal{D}\varphi$ telle que $u_0 = \varphi$. Posons

$$w(t) = \int_0^t z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds + \int_0^t z(t-s)F(s,y(s))ds. \tag{3.12}$$

De (3.11) et (3.12), nous avons pour tous $t \in [0,T[$ et $\theta \in]-\infty,\ 0]$

$$\begin{aligned}
w(t+\theta) &= \int_0^{t+\theta} z(t+\theta-s)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds \\
&\quad + \int_0^{t+\theta} z(t+\theta-s)F(s,y(s))ds \\
&= \int_0^{t} z(t+\theta-s)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds \\
&\quad + \int_0^{t} z(t+\theta-s)F(s,y(s))ds \\
&= \int_0^{t} z_{t-s}(\theta)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds \\
&\quad + \int_0^{t} z_{t-s}(\theta)F(s,y(s))ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(t+\theta) &= \int_0^{t} \left(Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau\right)(\theta) ds \\
&\quad + \int_0^{t} \left(Z(t-s)F(s,y(s))\right)(\theta)ds \\
&= \left(\int_0^{t} Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds\right)(\theta) \\
&\quad + \left(\int_0^{t} Z(t-s)F(s,y(s))ds\right)(\theta).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
w'(t+\theta) &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^t Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds\right)(\theta) \\
&\quad + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t Z(t-s)F(s,y(s))ds\right)(\theta) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds\right)(\theta) \\
&\quad + \left(\frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)F(s,y(s))ds\right)(\theta).
\end{aligned}$$

Par définition de $y(t)$ dans (3.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}
y(t)(\theta) &= (\mathcal{T}(t)\varphi)(\theta) + \left(\frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds\right)(\theta) \\
&\quad + \left(\frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)F(s,y(s))ds\right)(\theta) \\
&= u_t(\theta) + w'(t+\theta).
\end{aligned}$$

Donc

$$y(t) = u_t + (w')_t = (u+w')_t.$$

Si nous posons $x(t) = u(t) + w'(t)$, nous obtenons $y(t) = x_t$ et

$$\begin{aligned}
x_t &= \mathcal{T}(t)\varphi + \frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds \\
&\quad + \frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)F(s,y(s))ds \\
&= \mathcal{T}(t)\varphi + \frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds \\
&\quad + \frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)F(s,x_s)ds.
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{D}(\mathcal{T}(t)\varphi) = S'(t)\mathcal{D}\varphi$ et par la proposition 3.2 nous avons

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}\left(\frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds + \frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)F(s,x_s)ds\right)\\&= \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(s,x_s)ds,\end{aligned}$$

donc $x(t)$ est une solution intégrale de l'équation (3.1).

Réciproquement, soit $x(.,\varphi)$ une solution intégrale de l'équation (3.1) sur $]-\infty,T[$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{D}x_t = S'(t)\mathcal{D}\varphi &+ \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds\\&+\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(s,x_s)ds.\end{aligned}$$

Par définition de $\mathcal{T}(t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{D}x_t &= \mathcal{D}(\mathcal{T}(t)\varphi) + \mathcal{D}(\frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds\\&\quad+\frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)F(s,x_s)ds)\\&= \mathcal{D}(\mathcal{T}(t)\varphi) + \frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds\\&\quad+\frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)F(s,x_s)ds)\\&= \mathcal{D}\,(u_t + (w')_t),\end{aligned}$$

où $u :]-\infty,T[\, \to E$ est la solution intégrale de l'équation $\mathcal{D}u_t = S'(t)\mathcal{D}\varphi$ et $w(t)$ est définie par

$$w(t) = \int_0^t z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds + \int_0^t z(t-s)F(s,y(s))ds.$$

Nous en déduisons que $\mathcal{D}\left[(x-(u+w'))_t\right] = 0$, ainsi $x-(u+w') = 0$. En conséquence,

$$\begin{aligned}x_t &= u_t + (w')_t\\&= \mathcal{T}(t)\varphi + \frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds\\&\quad+\frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)F(s,x_s)ds.\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de la proposition. ■

3 Existence locale

Pour établir l'existence locale et l'unicité des solutions intégrales pour l'équation (3.1), nous imposons les hypothèses suivantes :

(**H3.3**) $F : [0, +\infty[\times \mathcal{B}$ est Lipschitzienne par rapport au second argument sur toute boule de $\mathcal{B}$. C'est à dire, pour chaque $r_0 > 0$, il existe une fonction $\widetilde{L}_0(\cdot, r_0) > 0$ définie sur $[0, +\infty[$ et localement bornée telle que si $t \geq 0$, ϕ_1, $\phi_2 \in \mathcal{B}$ et $\|\phi_1\|_{\mathcal{B}}, \|\phi_2\|_{\mathcal{B}} \leq r_0$, alors

$$|F(t, \phi_1) - F(t, \phi_2)| \leq \widetilde{L}_0(t, r_0) \|\phi_1 - \phi_2\|_{\mathcal{B}}.$$

(**H3.4**) $k : \Delta(0, T) \times E \to E$, avec $\Delta(0, T) = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$, est localement Lipschitzienne : pour chaque $r_1 > 0$, il existe $\widetilde{L}_1(\cdot, \cdot, r_1) > 0$ localement bornée sur $\Delta(0, T)$ telle que

$$\begin{aligned} |k(t, s, x_1) - k(t, s, x_2)| &\leq \widetilde{L}_1(t, s, r_1) |x_1 - x_2|, \\ \text{pour tous } (t, s) &\in \Delta(0, T) \text{ et } |x_1|, \ |x_2| \leq r_1. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat d'existence locale suivant.

Théorème 3.1 *Soit $\mathcal{B}$ un espace normé satisfaisant l'axiome* (**C**1)*. Supposons que les hypothèses* (**H3.1**), (**H3.2**), (**H3.3**) *et* (**H3.4**) *sont satisfaites. Pour chaque fonction $\varphi \in \mathcal{B}$ donnée, telle que $\mathcal{D}\varphi \in \overline{D(A)}$, l'équation (3.1) admet une solution intégrale unique $x := x(., \varphi)$ dans un intervalle maximal d'existence $]-\infty, b_\varphi[$, $b_\varphi > 0$. De plus, une des deux conditions suivantes est* *vérifiée : ou bien $b_\varphi = +\infty$, ou bien*

$$\limsup_{t \to b_\varphi^-} |x(t,\varphi)| = +\infty.$$

Preuve. Soit $b \in \,]0,T]$. Notons que (**H3.4**) implique que pour chaque $r_1 > 0$, il existe une constante $L_1(r_1) = \sup\{\widetilde{L}_1(t,s,r_1), 0 \leq s \leq t \leq T\} > 0$ telle que

$$\begin{aligned} |k(t,s,x)| &\leq |k(t,s,x) - k(t,s,0)| + |k(t,s,0)| \\ &\leq L_1(r_1)\,|x| + |k(t,s,0)|\,, \\ &\leq r_1 L_1(r_1) + \sup_{0\leq s\leq t\leq b} |k(t,s,0)|\,, \text{ pour tout } x \text{ tel que } |x| \leq r_1. \end{aligned}$$

De (**H3.3**) il s'ensuit que, pour chaque $r_0 > 0$, il existe une constante $L_0(r_0) > 0$ telle que

$$|F(t,\phi)| \leq r_0 L_0(r_0) + \sup_{t\in[0,b]} |F(t,0)|\,, \text{ pour tous } t \in [0,b] \text{ et } \phi \in \mathcal{B}, \text{ avec } \|\phi\|_{\mathcal{B}} \leq r_0.$$

Posons

$$c_0 = r_0 L_0(r_0) + \sup_{t\in[0,b]} |F(t,0)|\,, \tag{3.13}$$

et

$$c_1 = r_1 L_1(r_1) + \sup_{0\leq s\leq t\leq b} |k(t,s,0)|\,. \tag{3.14}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{B}$ telle que $\mathcal{D}\varphi \in \overline{D(A)}$, $r_0 = \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + 1$ et $r_1 = H(\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + 1)$. Nous définissons le sous-ensemble fermé non vide Ω_φ de $C([0,b],\mathcal{B})$ par

$$\Omega_\varphi := \left\{ y \in C([0,b],\mathcal{B}) : \sup_{0\leq s\leq b} \|y(s) - \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq 1 \right\},$$

où $C([0,b],\mathcal{B})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme.

Considérons l'opérateur

$$J : \Omega_\varphi \to C\left([0,b], \mathcal{B}\right),$$

défini pour $y \in \Omega_\varphi$ et $t \in [0,b]$ par

$$\begin{aligned} J\left(y\right)\left(t\right) \quad &:= \mathcal{T}(t)\varphi + \frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds \\ &+\frac{d}{dt}\int_0^t Z(t-s)F(s,y(s))ds, \\ &= \mathcal{T}(t)\varphi + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(h)\int_0^s k(s,\tau,y(\tau)(0))d\tau ds \\ &+\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(h)F(s,y(s))ds. \end{aligned}$$

Dans la suite nous montrons que

$$J\left(\Omega_\varphi\right) \subseteq \Omega_\varphi.$$

De la proposition 2.2 dans [89], nous avons

$$\limsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\|Z(h)\right\| < +\infty,$$

Posons donc

$$c := \limsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\|Z(h)\right\|. \tag{3.15}$$

Nous avons pour des constantes convenables $\overline{M}$ et ω

$$\begin{aligned} \left\|J\left(y\right)\left(t\right)-\varphi\right\|_{\mathcal{B}} \quad &\leq \left\|\mathcal{T}(t)\varphi-\varphi\right\|_{\mathcal{B}} \\ &+\overline{M}e^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\tfrac{1}{h}\left\|Z(h)\right\|\int_0^s \left|k(s,\tau,y(\tau)(0))\right|d\tau ds \\ &+\overline{M}e^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\tfrac{1}{h}\left\|Z(h)\right\|\left|F(s,y(s))\right|ds. \end{aligned}$$

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\omega > 0$. Ainsi nous obtenons la majoration suivante

$$\begin{aligned}\|J(y)(t)-\varphi\|_{\mathcal{B}} &\leq \|\mathcal{T}(t)\varphi-\varphi\|_{\mathcal{B}}+\overline{M}ce^{\omega t}\int_0^t\int_0^s |k(s,\tau,y(\tau)(0))|\,d\tau ds\\ &\quad +\overline{M}ce^{\omega t}\int_0^t |F(s,y(s))|\,ds.\end{aligned}$$

Comme $\|y(s)-\varphi\|_{\mathcal{B}}\leq 1$, pour tout $s\in[0,b]$ et $r_0=\|\varphi\|_{\mathcal{B}}+1$, nous avons

$$\|y(s)\|_{\mathcal{B}}\leq \|y(s)-\varphi\|_{\mathcal{B}}+\|\varphi\|_{\mathcal{B}}\leq r_0, \text{ pour tout } s\in[0,b],$$

alors

$$|F(s,y(s))|\leq L_0(r_0)\,\|y(s)\|_{\mathcal{B}}+|F(s,0)|\leq c_0.$$

De l'axiome $(\mathbf{A}-\mathbf{ii})$, nous avons

$$\begin{aligned}|y(\tau)(0)| &\leq H\,\|y(\tau)\|_{\mathcal{B}}\\ &\leq H\,(\|y(s)-\varphi\|_{\mathcal{B}}+\|\varphi\|_{\mathcal{B}})\\ &\leq H\,(1+\|\varphi\|_{\mathcal{B}}), \text{ pour } 0\leq\tau\leq s\leq t\leq b.\end{aligned}$$

Puisque $r_1=H(\|\varphi\|_{\mathcal{B}}+1)$, alors

$$\begin{aligned}|k(s,\tau,y(\tau)(0))| &\leq L_1(r_1)\,|y(\tau)(0)|+\sup_{0\leq\tau\leq s\leq b}|k(s,\tau,0)|\\ &\leq L_1(r_1)H\,\|y(\tau)\|_{\mathcal{B}}+\sup_{0\leq\tau\leq s\leq b}|k(s,\tau,0)|\\ &\leq L_1(r_1)H\,(1+\|\varphi\|_{\mathcal{B}})+\sup_{0\leq\tau\leq s\leq b}|k(s,\tau,0)|\\ &\leq c_1.\end{aligned}$$

Choisissons $b>0$ assez petit tel que

$$\sup_{0\leq s\leq b}\left\{\|\mathcal{T}(s)\varphi-\varphi\|_{\mathcal{B}}+\overline{M}ce^{\omega s}c_1s^2+\overline{M}ce^{\omega s}c_0 s\right\}<1.$$

Notons que $\lim\limits_{s\to 0}\|\mathcal{T}(s)\varphi-\varphi\|_{\mathcal{B}}=0$ car $\mathcal{B}$ est normé. Alors nous en déduisons que pour tout $t\in[0,b]$

$$\|J(v)(t)-\varphi\|_{\mathcal{B}}\leq\|\mathcal{T}(t)\varphi-\varphi\|_{\mathcal{B}}+\overline{M}ce^{\omega s}c_1t^2+\overline{M}ce^{\omega t}c_0t<1.$$

D'où

$$J(\Omega_{\varphi})\subseteq\Omega_{\varphi}.$$

D'autre part, soient $u,v\in\Omega_{\varphi}$ et $t\in[0,b]$, alors nous avons

$$\begin{aligned}\|J(u)(t)-J(v)(t)\|_{\mathcal{B}} &\leq \overline{M}e^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\tfrac{1}{h}\|Z(h)\|\int_0^s|k(s,\tau,u(\tau)(0))-k(s,\tau,v(\tau)(0))|\,d\tau ds\\ &+\overline{M}e^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\tfrac{1}{h}\|Z(h)\|\,|F(s,u(s))-F(s,v(s))|\,ds.\end{aligned}$$

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\omega>0$. Ainsi nous obtenons la majoration suivante

$$\begin{aligned}\|J(u)(t)-J(v)(t)\|_{\mathcal{B}} &\leq \overline{M}ce^{\omega t}\int_0^t\int_0^s|k(s,\tau,u(\tau)(0))-k(s,\tau,v(\tau)(0))|\,d\tau ds\\ &+\overline{M}ce^{\omega t}\int_0^t|F(s,u(s))-F(s,v(s))|\,ds\\ &\leq \overline{M}ce^{\omega t}L_1(r_1)\int_0^t\int_0^s|u(\tau)(0)-v(\tau)(0)|\,d\tau ds\\ &+\overline{M}ce^{\omega t}L_0(r_0)\int_0^t\|u(s)-v(s)\|_{\mathcal{B}}\,ds\\ &\leq \overline{M}ce^{\omega t}L_1(r_1)H\int_0^t\int_0^s\|u(\tau)-v(\tau)\|_{\mathcal{B}}\,d\tau ds\\ &+\overline{M}ce^{\omega t}L_0(r_0)\int_0^t\|u(s)-v(s)\|_{\mathcal{B}}\,ds\\ &\leq (\overline{M}ce^{\omega b}L_1(r_1)Hb^2\\ &+\overline{M}ce^{\omega b}L_0(r_0)b)\,\|u-v\|_{C([0,b],\mathcal{B})}.\end{aligned}$$

Comme $r_0=\|\varphi\|_{\mathcal{B}}+1>0$, par définition de c_0 dans (3.13), nous avons $L_0(r_0)\leq c_0$. De même, puisque $c_1=r_1L_1(r_1)+\sup\limits_{0\leq s\leq t\leq b}|k(t,s,0)|$ avec $r_1=H(\|\varphi\|_{\mathcal{B}}+1)$, alors nous avons $HL_1(r_1)$ $\leq c_1$. En conséquence

$$\begin{aligned}\overline{M}ce^{\omega b}L_1(r_1)b^2H+\overline{M}ce^{\omega b}L_0(r_0)b &\leq \sup_{0\leq s\leq b}\{\|\mathcal{T}(s)\varphi-\varphi\|_{\mathcal{B}}+\overline{M}ce^{\omega s}c_1s^2+\overline{M}ce^{\omega s}c_0s\}\\ &<1.\end{aligned}$$

Donc

$$\|J(u)(t)-J(v)(t)\|_{\mathcal{B}}<\|u-v\|_{C([0,b],\mathcal{B})}.$$

Cela signifie que J est strictement contractant sur Ω_φ. Nous concluons alors qu'il existe une fonction unique $y \in \Omega_\varphi$ telle que $J(y) = y$. Ceci entraîne que l'équation (3.1) admet une et une seule solution intégrale $x :]-\infty, b[\to E$ définie par

$$x(t) = \begin{cases} y(t)(0), & t \in [0, b[\,, \\ \varphi(t), & t \in]-\infty,\ 0]\,. \end{cases}$$

Soit $]-\infty, b_\varphi[$ l'intervalle maximal d'existence de x. Supposons que $b_\varphi < +\infty$ et que

$$\limsup_{t \to b_\varphi^-} |x(t,\varphi)| < +\infty.$$

Pour tous $t > 0$ et $h > 0$ tels que $t + h \in [0, b_\varphi[$, nous avons

$$\begin{aligned} x_{t+h} &= \mathfrak{T}(t+h)\varphi + \lim_{d\to 0^+} \frac{1}{d} \textstyle\int_0^{t+h} \mathfrak{T}(t+h-s)Z(d) \int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds \\ &\quad + \lim_{d\to 0^+} \frac{1}{d} \textstyle\int_0^{t+h} \mathfrak{T}(t+h-s)Z(d)F(s,x_s)ds \\ &= \mathfrak{T}(t+h)\varphi + \lim_{d\to 0^+} \frac{1}{d} \textstyle\int_0^{h} \mathfrak{T}(t)\mathfrak{T}(h-s)Z(d) \int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds \\ &+ \lim_{d\to 0^+} \frac{1}{d} \textstyle\int_h^{t+h} \mathfrak{T}(t+h-s)Z(d) \int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds \\ &+ \lim_{d\to 0^+} \frac{1}{d} \textstyle\int_0^{h} \mathfrak{T}(t)\mathfrak{T}(h-s)Z(d)F(s,x_s)ds \\ &+ \lim_{d\to 0^+} \frac{1}{d} \textstyle\int_h^{t+h} \mathfrak{T}(t+h-s)Z(d)F(s,x_s)ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_t &= \mathfrak{T}(t)\varphi + \lim_{d\to 0^+} \frac{1}{d} \int_0^t \mathfrak{T}(t-s)Z(d) \int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds \\ &\quad + \lim_{d\to 0^+} \frac{1}{d} \int_0^t \mathfrak{T}(t-s)Z(d)F(s,x_s)ds. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_h^{t+h} \mathfrak{T}(t+h-s)Z(d)F(s,x_s)ds = \int_0^t \mathfrak{T}(t-s)Z(d)F(s+h,x_{s+h})ds,$$

et

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_h^{t+h} \mathcal{T}(t+h-s)Z(d)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds\\&= \textstyle\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\int_0^{s+h} k(s+h,\tau,x(\tau))d\tau ds,\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}x_{t+h}-x_t &= \mathcal{T}(t+h)\varphi - \mathcal{T}(t)\varphi\\&+\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\mathcal{T}(t)\textstyle\int_0^h \mathcal{T}(h-s)Z(d)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds\\&+\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\textstyle\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\int_0^{s+h} k(s+h,\tau,x(\tau))d\tau ds\\&-\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\textstyle\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds\\&+\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\mathcal{T}(t)\textstyle\int_0^h \mathcal{T}(h-s)Z(d)F(s,x_s)ds\\&+\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\textstyle\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\left(F(s+h,x_{s+h})-F(s,x_s)\right)ds.\end{aligned} \tag{3.16}$$

De (**iv**) de la proposition 3.2, nous savons que

$$\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\int_0^h \mathcal{T}(h-s)Z(d)F(s,x_s)ds = \frac{d}{dh}\int_0^h Z(h-s)F(s,x_s)ds,$$

et que

$$\begin{aligned}&\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\textstyle\int_0^h \mathcal{T}(h-s)Z(d)\left[\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds\\&=\frac{d}{dh}\textstyle\int_0^h Z(h-s)\left[\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds,\end{aligned}$$

alors (3.16) devient

$$\begin{aligned}x_{t+h}-x_t &= \mathcal{T}(t+h)\varphi - \mathcal{T}(t)\varphi\\&+\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\mathcal{T}(t)\textstyle\int_0^h \mathcal{T}(h-s)Z(d)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds\\&+\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\textstyle\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\int_0^{s+h} k(s+h,\tau,x(\tau))d\tau ds\\&-\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\textstyle\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds\\&+\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\mathcal{T}(t)\textstyle\int_0^h \mathcal{T}(h-s)Z(d)F(s,x_s)ds\\&+\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\textstyle\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\left(F(s+h,x_{s+h})-F(s,x_s)\right)ds.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Dans la suite, nous majorons les quatre limites ci-dessus.

Nous avons

$$\begin{aligned}&\left\|\mathcal{T}(t)\int_0^h \mathcal{T}(h-s)Z(d)\left[\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds\right\|_{\mathcal{B}}\\ &\leq \overline{M}e^{\omega(t+h)}\int_0^h \|Z(d)\|\int_0^s |k(s,\tau,x(\tau))|\,d\tau ds\\ &\leq \overline{M}e^{\omega(t+h)}\|Z(d)\|\,h^2\left(r_1L_1(r_1)+\sup_{0\leq\tau\leq s\leq b_\varphi}|k(s,\tau,0)|\right).\end{aligned}$$

Notons que $\sup\limits_{0\leq\tau\leq s\leq b_\varphi}|k(s,\tau,0)| < \infty$ puisque $b_\varphi < \infty$. Nous obtenons alors la majoration suivante de la première limite

$$\left\|\lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\mathcal{T}(t)\int_0^h \mathcal{T}(h-s)Z(d)\left[\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds\right\|_{\mathcal{B}} \leq \overline{M}e^{\omega h}e^{\omega b_\varphi}ch^2c_3,$$

où

$$c_3 := r_1L_1(r_1)+\sup_{0\leq\tau\leq s\leq b_\varphi}|k(s,\tau,0)|.$$

Pour la deuxième limite, nous avons

$$\begin{aligned}&\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\left[\int_0^{s+h} k(s+h,\tau,x(\tau))d\tau-\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds\\ &=\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\left[\int_0^h k(s+h,\tau,x(\tau))d\tau+\int_0^s k(s+h,\tau+h,x(\tau+h))d\tau\right]ds\\ &-\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds\\ &=\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\int_0^h k(s+h,\tau,x(\tau))d\tau ds\\ &+\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\left[\int_0^s \left(k(s+h,\tau+h,x(\tau))-k(s,\tau,x(\tau))\right)d\tau\right]ds\\ &+\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\left[\int_0^s \left(k(s+h,\tau+h,x(\tau+h))-k(s+h,\tau+h,x(\tau))\right)d\tau\right]ds\\ &:=\; I_1+I_2+I_3.\end{aligned}\tag{3.18}$$

La première intégrale I_1 est majorée comme suit

$$\begin{aligned}\|\,I_1\|_{\mathcal{B}} &\leq \int_0^t \overline{M}e^{\omega(t-s)}\|Z(d)\|\int_0^h |k(s+h,\tau,x(\tau))|\,d\tau ds\\ &\leq \overline{M}e^{\omega b_\varphi}\|Z(d)\|\,b_\varphi hc_3.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Pour I_2, nous avons

$$\begin{aligned}\|I_2\|_{\mathcal{B}} &\leq \int_0^t \overline{M}e^{\omega(t-s)}\|Z(d)\|\int_0^s |k(s+h,\tau+h,x(\tau))-k(s,\tau,x(\tau))|\,d\tau ds\\ &\leq \overline{M}e^{\omega b_\varphi}\|Z(d)\|\int_0^t\int_0^s |k(s+h,\tau+h,x(\tau))-k(s,\tau,x(\tau))|\,d\tau ds.\end{aligned}$$

Posons

$$g(t,h) := \int_0^t \int_0^s |k(s+h,\tau+h,x(\tau)) - k(s,\tau,x(\tau))|\, d\tau ds.$$

Pour I_3, de $(\mathbf{A}-(\mathbf{ii})')$, nous avons $|x_{\tau+h}(0) - x_\tau(0)| \le H \|x_{\tau+h} - x_\tau\|_{\mathcal{B}}$, alors

$$\begin{array}{ll} \|I_3\|_{\mathcal{B}} & \le \int_0^t \overline{M} e^{\omega(t-s)} \|Z(d)\| \int_0^s |k(s+h,\tau+h,x(\tau+h)) - k(s+h,\tau+h,x(\tau))|\, d\tau ds \\ & \le \overline{M} e^{\omega b_\varphi} \|Z(d)\|\, b_\varphi L_1(r_1) \int_0^t \sup\limits_{0\le\tau\le s} |x(\tau+h) - x(\tau)|\, ds \\ & \le \overline{M} e^{\omega b_\varphi} \|Z(d)\|\, b_\varphi L_1(r_1) H \int_0^t \sup\limits_{0\le\tau\le s} \|x_{\tau+h} - x_\tau\|_{\mathcal{B}}\, ds. \end{array}$$

Donc nous obtenons la majoration suivante de la deuxième limite

$$\begin{array}{l} \left\| \lim\limits_{d\to 0^+} \dfrac{1}{d} \int_0^t \mathcal{T}(t-s) Z(d) \left[\int_0^{s+h} k(s+h,\tau,x(\tau)) d\tau - \int_0^s k(s,\tau,x(\tau)) d\tau \right] ds \right\|_{\mathcal{B}} \\ \qquad \le \overline{M} e^{\omega b_\varphi} c \left(b_\varphi h c_3 + g(t,h) + b_\varphi L_1(r_1) H \int_0^t \sup\limits_{0\le\tau\le s} \|x_{\tau+h} - x_\tau\|_{\mathcal{B}}\, ds \right). \end{array}$$

Pour la troisième limite, nous avons

$$\begin{array}{l} \left\| \mathcal{T}(t) \int_0^h \mathcal{T}(h-s) Z(d) F(s,x_s) ds \right\|_{\mathcal{B}} \\ \le \overline{M} e^{\omega(t+h)} \int_0^h \|Z(d)\|\, |F(s,x_s)|\, ds \\ \le \overline{M} e^{\omega(t+h)} \|Z(d)\|\, h \left(r_0 L_0(r_0) + \sup\limits_{s\in[0,b_\varphi[} |F(s,0)| \right). \end{array}$$

Donc

$$\left\| \lim_{d\to 0^+} \frac{1}{d} \mathcal{T}(t) \int_0^h \mathcal{T}(h-s) Z(d) F(s,x_s) ds \right\|_{\mathcal{B}} \le \overline{M} e^{\omega h} e^{\omega b_\varphi} c h c_2,$$

où

$$c_2 := r_0 L_0(r_0) + \sup_{s\in[0,b_\varphi[} |F(s,0)|,$$

Pour la quatrième limite dans (3.17), nous avons

$$\begin{array}{l} \int_0^t \mathcal{T}(t-s) Z(d) \left(F(s+h,x_{s+h}) - F(s,x_s) \right) ds \\ \qquad = \int_0^t \mathcal{T}(t-s) Z(d) \left(F(s+h,x_{s+h}) - F(s+h,x_s) \right) ds \\ \qquad\ + \int_0^t \mathcal{T}(t-s) Z(d) \left(F(s+h,x_s) - F(s,x_s) \right) ds. \end{array}$$

Ici, nous majorons la première intégrale comme suit

$$\begin{array}{l}\left\| \int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\left(F(s+h,x_{s+h})-F(s+h,x_s)\right)ds\right\|_{\mathcal{B}} \\ \qquad \leq \int_0^t \overline{M}e^{\omega(t-s)}\left\|Z(d)\right\| c_0(r)\left\|x_{s+h}-x_s\right\|_{\mathcal{B}} ds \\ \qquad \leq \overline{M}e^{\omega b_\varphi}\left\|Z(d)\right\| L_0(r)\int_0^t \left\|x_{s+h}-x_s\right\|_{\mathcal{B}} ds,\end{array}$$

et nous majorons la deuxième intégrale comme suit

$$\begin{array}{l}\left\| \int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\left(F(s+h,x_s)-F(s,x_s)\right)ds\right\| \\ \qquad \leq \int_0^t \overline{M}e^{\omega(t-s)}\left\|Z(d)\right\| \left|F(s+h,x_s)-F(s,x_s)\right| ds \\ \qquad \leq \overline{M}e^{\omega b_\varphi}\left\|Z(d)\right\| \int_0^t \left|F(s+h,x_s)-F(s,x_s)\right| ds.\end{array}$$

D'où

$$\begin{array}{l}\left\| \lim_{d\to 0^+}\frac{1}{d}\int_0^t \mathcal{T}(t-s)Z(d)\left(F(s+h,x_{s+h})-F(s,x_s)\right)ds\right\|_{\mathcal{B}} \\ \qquad \leq \overline{M}e^{\omega b_\varphi}c\left(L_0(r_0)\int_0^t \left\|x_{s+h}-x_s\right\| ds+f(t,h)\right),\end{array}$$

où

$$f(t,h) := \int_0^t \left|F(s+h,x_s)-F(s,x_s)\right| ds.$$

Ainsi, nous en déduisons que

$$\begin{array}{ll}\left\|x_{t+h}-x_t\right\|_{\mathcal{B}} & \leq \sup\limits_{0\leq\sigma\leq t}\left\|x_{\sigma+h}-x_\sigma\right\|_{\mathcal{B}} \\ & \leq \overline{M}e^{\omega b_\varphi}\left\|\mathcal{T}(h)\varphi-\varphi\right\|_{\mathcal{B}}+\overline{M}e^{\omega h}e^{\omega b_\varphi}ch^2c_3+\overline{M}e^{\omega b_\varphi}cf(t,h) \\ & +\overline{M}e^{\omega b_\varphi}cb_\varphi hc_3+\overline{M}e^{\omega b_\varphi}cg(t,h)+\overline{M}e^{\omega h}e^{\omega b_\varphi}chc_2 \\ & +\overline{M}e^{\omega b_\varphi}cb_\varphi L_1(r_1)H\sup\limits_{0\leq\sigma\leq t}\int_0^\sigma \sup\limits_{0\leq\tau\leq s}\left\|x_{\tau+h}-x_\tau\right\|_{\mathcal{B}} ds \\ & +\overline{M}e^{\omega b_\varphi}cL_0(r_0)\sup\limits_{0\leq\sigma\leq t}\int_0^\sigma \left\|x_{s+h}-x_s\right\|_{\mathcal{B}} ds.\end{array}$$

Nous avons

$$\sup_{0\leq\sigma\leq t}\int_0^\sigma \sup_{0\leq\tau\leq s}\left\|x_{\tau+h}-x_\tau\right\|_{\mathcal{B}} ds = \int_0^t \sup_{0\leq\tau\leq s}\left\|x_{\tau+h}-x_\tau\right\|_{\mathcal{B}} ds,$$

et

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq\sigma\leq t}\int_0^{\sigma}\|x_{s+h}-x_s\|_{\mathcal{B}}\,ds &= \int_0^t \|x_{s+h}-x_s\|_{\mathcal{B}}\,ds\\ &\leq \int_0^t \sup_{0\leq\tau\leq s}\|x_{\tau+h}-x_\tau\|_{\mathcal{B}}\,ds.\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}J_1 \quad &:= \overline{M}e^{\omega b_\varphi}\|\mathcal{T}(h)\varphi-\varphi\|_{\mathcal{B}} + \overline{M}e^{\omega h}e^{\omega b_\varphi}ch^2c_3 + \overline{M}e^{\omega b_\varphi}cf(t,h)\\ &+\overline{M}e^{\omega b_\varphi}cb_\varphi hc_3 + \overline{M}e^{\omega b_\varphi}cg(t,h) + \overline{M}e^{\omega h}e^{\omega b_\varphi}chc_2,\end{aligned}$$

et

$$J_2 \quad := \overline{M}e^{\omega b_\varphi}cb_\varphi L_1(r_1)H + \overline{M}e^{\omega b_\varphi}cL_0(r_0).$$

Donc

$$\begin{aligned}\|x_{t+h}-x_t\|_{\mathcal{B}} \quad &\leq \sup_{0\leq\sigma\leq t}\|x_{\sigma+h}-x_\sigma\|_{\mathcal{B}}\\ &\leq J_1 + J_2\int_0^t \sup_{0\leq\tau\leq s}\|x_{\tau+h}-x_\tau\|_{\mathcal{B}}\,ds.\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, il s'ensuit que

$$\|x_{t+h}-x_t\|_{\mathcal{B}} \leq J_1\exp\left(J_2\right).$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\lim_{h\to 0}f(b_\varphi,h)=0 \text{ et } \lim_{h\to 0}g(b_\varphi,h)=0.$$

Ainsi

$$\lim_{h\to 0}\|x_{t+h}(.,\varphi)-x_t(.,\varphi)\|_{\mathcal{B}}=0,$$

uniformément pour tout $t\in[0,b_\varphi[$. Par conséquent, l'axiome $(\mathbf{A}-\mathbf{ii})$ entraîne que

$$\lim_{h\to 0}|x(t+h,\varphi)-x(t,\varphi)|=0.$$

En utilisant le même raisonnement, nous obtenons le résultat précédent pour $h < 0$. Nous en déduisons que x est uniformément continue sur $[0, b_\varphi[$ et que $\lim\limits_{t \to b_\varphi^-} |x(t, \varphi)|$ existe. Cela implique que la solution $x(., \varphi)$ peut être prolongée en b_φ, ce qui contredit la maximalité de l'intervalle $]-\infty, b_\varphi[$. ■

4 Application

Soit $E := C\left([0, \pi]\,; I\!R\right)$ l'espace des fonctions continues de $[0, \pi]$ dans $I\!R$ muni de la topologie de la convergence uniforme et définissons l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ par

$$\begin{aligned} &D(A) = \left\{y \in C^2\left([0, \pi], I\!R\right) : y(0) = y(\pi) = 0\right\}, \\ &Ay = y''. \end{aligned}$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.2 *[57]. $]0, +\infty[\subset \rho(A)$, $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$ et*

$$\overline{D(A)} = \{y \in E : y(0) = y(\pi) = 0\} \neq E.$$

Soit $\gamma > 0$. Nous choisissons l'espace de phase

$$\mathcal{B} := \left\{\phi \in C\left(]-\infty, 0\right], \ E) \ \ \text{telle que} \lim_{\theta \to -\infty} e^{\gamma\theta}\phi(\theta) \ \ \text{existe dans } E\right\}.$$

Lemme 3.3 *([87] et [111]). L'espace $\mathcal{B}$ muni de la norme $\|\phi\|_{\mathcal{B}} = \sup\limits_{\theta \leq 0} e^{\gamma\theta} |\phi(\theta)|$, pour $\phi \in \mathcal{B}$, satisfait les axiomes $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{A1})$, $(\mathbf{B})$ et $(\mathbf{C1})$, avec $K(0) = 1$.*

Considérons l'équation suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}x_t = A\mathcal{D}x_t + \int_0^t k(t,s,x(s))ds + F(t,x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi, \end{cases} \tag{3.20}$$

avec

$$\begin{cases} x(t)(\xi) = w(t,\xi), \quad t \geq 0,\ \xi \in [0,\pi], \\ \varphi(\theta)(\xi) = w_0(\theta,\xi), \quad \theta \leq 0,\ \xi \in [0,\pi], \end{cases}$$

et pour tous $\xi \in [0,\pi]$ et $\phi \in \mathcal{B}$

$$\begin{cases} k(t,s,x(s))(\xi) = g_2\left(t-s, x(s)(\xi)\right), \quad t \geq s \geq 0, \\ F(t,\phi)(\xi) = c\int_{-\infty}^0 g_1(\theta)\phi(\theta)(\xi)d\theta + a(t)h_1\left(\phi(-r)\right)(\xi) + h_2(t,\xi), \quad t \geq 0, \end{cases}$$

où r et c sont des constantes positives, g_1 est une fonction intégrable positive, $g_2 : [0,+\infty[\times I\!R \to I\!R$, $a : [0,+\infty[\to I\!R$, $h_1 : I\!R \to I\!R$, $h_2 : [0,+\infty[\times[0,\pi] \to I\!R$ et $w_0 :]-\infty,\ 0]\times[0,\pi] \to I\!R$ sont des fonctions continues et $\mathcal{D} : \mathcal{B} \to E$ est un opérateur linéaire borné défini par $\mathcal{D}\phi = \phi(0) - \mathcal{D}_0\phi$ pour chaque $\phi \in \mathcal{B}$, avec $\mathcal{D}_0$ un opérateur linéaire de $\mathcal{B}$ dans E.

La part A_0 de l'opérateur A dans $\overline{D(A)}$ est définie par

$$\begin{cases} D(A_0) = \{y \in C^2\left([0,\pi], I\!R\right) : y(0) = y(\pi) = y''(0) = y''(\pi) = 0\}, \\ A_0 y = y'', \end{cases}$$

avec $\overline{D(A_0)} = \overline{D(A)}$.

L'équation (3.20) est la forme abstraite du modèle suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left[w(t,\xi) - \left(\mathcal{D}_0 w_t\right)(\xi)\right] = \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[w(t,\xi) - \left(\mathcal{D}_0 w_t\right)(\xi)\right] + h_2(t,\xi) \\ \qquad\qquad + c\int_{-\infty}^0 g_1(\theta)w(t+\theta,\xi)d\theta + \int_0^t g_2\left(t-s, w(s,\xi)\right)ds \\ \qquad\qquad + a(t)h_1\left(w(t-r,\xi)\right), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \\ w(t,0) - \left(\mathcal{D}_0 w_t\right)(0) = w(t,\pi) - \left(\mathcal{D}_0 w_t\right)(\pi) = 0, \quad t \geq 0, \\ w(\theta,\xi) = w_0(\theta,\xi), \quad -\infty < \theta \leq 0, \quad 0 \leq \xi \leq \pi. \end{cases} \tag{3.21}$$

Le lemme (3.2) implique que l'hypothèse (**H3.1**) est satisfaite. Nous supposons que :

(**i**) h_1 est continue et localement Lipschitzienne,

(**ii**) $g_1(.)e^{-\gamma\cdot}$ est intégrable sur $]-\infty,\ 0]$,

(**iii**) $\lim\limits_{\theta\to-\infty}\left(e^{\gamma\theta}\sup\limits_{0\leq\xi\leq\pi}|w_0(\theta,\xi)|\right)$ existe.

(**iv**) a est bornée sur $[0,+\infty[$,

(**v**) $g_2 : [0,+\infty[\times I\!R\to I\!R$ est continue et localement Lipschitzienne par rapport au second argument.

Nous avons pour tous ϕ_1 et $\phi_2\in\mathcal{B}$

$$\begin{array}{l}
\sup\limits_{0\leq\xi\leq\pi}\int_{-\infty}^{0}g_1(\theta)\left|\phi_1(\theta)(\xi)-\phi_2(\theta)(\xi)\right|d\theta\\
=\sup\limits_{0\leq\xi\leq\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{-\gamma\theta}g_1(\theta)\left(e^{\gamma\theta}\left|\phi_1(\theta)(\xi)-\phi_2(\theta)(\xi)\right|\right)d\theta\\
\leq\left(\int_{-\infty}^{0}e^{-\gamma\theta}g_1(\theta)d\theta\right)\sup\limits_{-\infty<\theta\leq0,\ 0\leq\xi\leq\pi}e^{\gamma\theta}\left|\phi_1(\theta)(\xi)-\phi_2(\theta)(\xi)\right|\\
\leq\left(\int_{-\infty}^{0}e^{-\gamma\theta}g_1(\theta)d\theta\right)\|\phi_1-\phi_2\|_{\mathcal{B}}.
\end{array}$$

Prenons $\alpha_0>0$ et $\phi_1,\ \phi_2\in\mathcal{B}$ tels que $\|\phi_1\|_{\mathcal{B}},\|\phi_2\|_{\mathcal{B}}\leq\alpha_0$. Donc,

$$\left|\phi_1(-r)(\xi)\right|,\ \left|\phi_2(-r)(\xi)\right|\leq\alpha_0e^{\gamma r},\text{ pour chaque }\xi\in[0,\pi].$$

Ainsi d'après l'hypothèse (**i**), il existe une constante positive $b_0(\alpha_0)$ qui ne dépend que de α_0 telle que

$$\begin{array}{l}
\sup\limits_{s\geq0}|a(s)|\sup\limits_{0\leq\xi\leq\pi}\left|h_1(\phi_1(-r)(\xi))-h_1(\phi_2(-r)(\xi))\right|\\
\quad\leq|a|_\infty\,b_0(\alpha_0)\sup\limits_{0\leq\xi\leq\pi}\left|\phi_1(-r)(\xi)-\phi_2(-r)(\xi)\right|\\
\quad\leq|a|_\infty\,b_0(\alpha_0)e^{\gamma r}\|\phi_1-\phi_2\|_{\mathcal{B}}.
\end{array}$$

Nous concluons d'après (**i**), (**ii**) et (**iv**) que F satisfait l'hypothèse (**H3.3**). En outre, l'hypothèse (**v**) entraîne que, pour $\alpha_1>0$, il existe une constante positive $b_1(\alpha_1)$ telle que

$$\begin{array}{rl}
|k(t,s,x_1)-k(t,s,x_2)| & =\sup\limits_{0\leq\xi\leq\pi}\left|g_2\left(t-s,x_1(\xi)\right)-g_2\left(t-s,x_2(\xi)\right)\right|\\
& \leq\sup\limits_{0\leq\xi\leq\pi}b_1(\alpha_1)\left|x_1(\xi)-x_2(\xi)\right|\\
& \leq b_1(\alpha_1)\left|x_1-x_2\right|,
\end{array}$$

pour tous $t \geq 0$, $t \geq s \geq 0$ et x_1, $x_2 \in E$, avec $|x_1|$, $|x_2| \leq \alpha_1$. Il s'ensuit que l'hypothèse (**H3.4**) est vérifiée. De (**iii**) nous avons $\varphi \in \mathcal{B}$. En définitive, si l'opérateur $\mathcal{D}$ satisfait l'hypothèse (**H3.2**)**,** avec $D\varphi \in \overline{D(A)}$, alors le théorème 3.1 assure l'existence d'un intervalle maximal d'existence $]-\infty, b_{w_0}[$ et d'une solution intégrale unique $w(t,\xi)$ de l'équation (3.20) sur $]-\infty, b_{w_0}[\times[0,\pi]$.

Chapitre 4

Existence globale et régularité pour une classe d'équations intégro-différentielles de type neutre à retard infini

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions une classe d'équations intégro-différentielles fonctionnelles de type neutre et à retard infini de forme générale abstraite suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{G}(t, x_t) = A\mathcal{G}(t, x_t) + \int_0^t k(t, \tau, x(\tau))d\tau + F(t, x_t), & t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Nous rappelons que $(E, \ |.|)$ est un espace de Banach, $\mathcal{B}$ est l'espace de phase des fonctions définies sur $]-\infty, \ 0]$ à valeurs dans E, muni d'une semi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ et satisfaisant les axiomes fondamentaux (**A**), (**A1**) et (**B**) introduits dans le chapitre 2, $A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur linéaire fermé qui n'est pas nécessairement à domaine dense dans E, k est une fonction continue définie sur $\Delta \times E$ à valeurs dans E, avec $\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$, pour

0. Ce chapitre est basé sur deux articles publiés en 2009 et 2010, en collaboration avec H. Bouzahir et A. Maaden. Voir [30] et [31].

tous $x : (-\infty, b] \to E$, $b > 0$ et $t \in [0, b]$, la fonction $x_t :]-\infty,\ 0] \to E$ définie par

$$x_t\,(\theta) = x(t+\theta)\,\text{pour tout}\ \theta \in \left]-\infty,\ 0\right],$$

appartient à l'espace de phase $\mathcal{B}$ et l'application $\mathcal{G} : I\!R^+ \times \mathcal{B} \to E$ est définie par

$$\mathcal{G}(t,\phi) = \phi(0) - G(t,\phi)\,\text{pour tout}\ (t,\phi) \in I\!R^+ \times \mathcal{B},$$

où F et G sont deux fonctions continues définies sur $I\!R^+ \times \mathcal{B}$ à valeurs dans E.

Les équations différentielles de type neutre et à retard ont de nombreuses applications dans les systèmes physiques et biologiques. Pour cette raison ces équations ont reçu beaucoup d'attention ces dernières années. La littérature relative aux équations différentielles de type (4.1) est vaste. De nombreux résultats intéressants concernant l'existence, la régularité, la stabilité et le bornage des solutions ont été obtenus, en particulier dans le cas où $k = 0$ et/ou $G = 0$.

Dans [59], Desch et al. ont étudié une équation différentielle fonctionnelle abstraite de type neutre et à retard infini. Ils ont prouvé que le modèle proposé par Gurtin et Pipkin [70] et Miller [101] peut être représenté par l'équation différentielle fonctionnelle abstraite de type neutre et à retard infini suivante :

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)x(\tau))d\tau\right] = A\left[x(t) - \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)x(\tau))d\tau\right] + F(t,x_t), \tag{4.2}$$

où l'opérateur A est générateur d'un C_0-semi-groupe sur un espace de Banach.

En outre, Hernandez et Henriquez ([83] et [87]) ont établi quelques résultats concernant l'existence, l'unicité des solutions de l'équation fonctionnelle aux dérivées partielles de forme générale suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[x(t) - G(t,x_t)\right] = Ax(t) + F(t,x_t),\ t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{4.3}$$

où A génère un semi-groupe analytique sur un espace de Banach E.

Dans [3], [4] et [28], les auteurs ont étendu de nombreux résultats similaires en général à ceux dans [8], [9], [11],[83], [87], [123] et [125] pour étudier l'équation (4.3) dans le cas où $G=0$ et ou A est un opérateur de Hille-Yosida qui n'est pas nécessairement dense dans E. Dans [5] et [6], ces auteurs et Bouzahir dans [36] et [37] ont prouvé que les mêmes résultats concernant l'existence et la stabilité peuvent être reproduits dans le cas neutre et à retard infini notamment pour la classe générale d'équations différentielles fonctionnelles de type :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[x(t)-G(t,x_t)\right]=A\left[x(t)-G(t,x_t)\right]+F(t,x_t),\ t\geq 0,\\ x_0=\varphi\in\mathcal{B}, \end{cases}\tag{4.4}$$

où A, G, F, x_t et $\mathcal{B}$ sont définis comme ci-dessus. Parmi les résultats obtenus dans [5] compte l'existence et la régularité des solutions intégrales de l'équation (4.4) en utilisant la théorie des semi-goupes et le théorème du point fixe de Banach.

Comme dans [103], nous considérons l'équation intégro-différentielle non linéaire de type hyperbolique de Volterra suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}w(t,\xi)=Aw(t,\xi)+\int_0^t g(t,\tau,w(\tau,\xi),...,D_\xi^\beta w(\tau,\xi))d\tau\\ \qquad\qquad +f(t,\xi),\ (t,\xi)\in[0,+\infty[\times\Omega,\\ B_0w(t,\xi)=0,\ (t,\xi)\in[0,+\infty[\times\partial\Omega,\\ w(0,\xi)=z(\xi),\ \xi\in\Omega, \end{cases}\tag{4.5}$$

où A et B_0 désignent deux opérateurs différentiels linéaires appropriés définis respectivement sur un sous-ensemble Ω de $I\!R^n$ et sur sa frontière $\partial\Omega$, et le noyau g ne dépend pas des dérivées $D_\xi^\beta w$ d'ordre supérieur à l'ordre de A. La version abstraite du problème (4.5) est donnée par :

$$\begin{cases} x'(t)=Ax(t)+\int_0^t k(t,\theta,x(\theta))d\theta+f(t),\ t\in[0,T],\\ x(0)=x_0\in D(A). \end{cases}\tag{4.6}$$

L'existence et l'unicité des solutions ont été prouvées pour cette équation sous quelques hypothèses appropriées. Certaines propriétés de la solution ont été également étudiées. Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de l'équation (4.6) dans différents aspects, notamment dans [76], [77], [108] et [122].

La classe suivante d'équations différentielles à retard a été étudiée par de nombreux auteurs (voir par exemple [3], [4], [74], [87], [109], [112] et [117]) :

$$\begin{cases} x^{'}(t) = Ax(t) + F(t, x_t), \ t \in [0, T], \\ x_0 = \varphi. \end{cases} \tag{4.7}$$

Dans [46], les auteurs ont étudié l'existence locale des solutions dans E pour l'équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra à retard infini de type :

$$\begin{cases} x^{'}(t) = Ax(t) + \int_0^t k(t, \theta, x(\theta))d\theta + F(t, x_t), \ t \in [0, T], \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}. \end{cases} \tag{4.8}$$

où $A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur de Hille-Yosida, $x \longmapsto k(t, s, x)$ est supposée être définie de $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ vers E et F une fonction définie sur $[0, T] \times \mathcal{B}$ à valeurs dans E. L'équation (4.8) est une combinaison des équations (4.6) et (4.7). Sur la base des résultats obtenus pour l'équation (4.7), les auteurs ont généralisé la méthode utilisée dans [103] pour obtenir l'existence locale et l'unicité de solutions pour l'équation (4.8).

L'équation (4.1) nous permet d'étudier une classe générale d'équations intégro-différentielles fonctionelles de Volterra de type neutre et à retard infini . Sur la base des résultats obtenus pour les équations (4.4) et (4.8), nous généralisons la méthode utilisée dans [5] pour obtenir l'existence globale, l'unicité et la régularité des solutions pour l'équation (4.1). Sous différentes hypothèses appropriées, nous prouvons premièrement l'existence globale et l'unicité des solutions intégrales, ensuite, nous montrons sous d'autres conditions plus restrictives que la solution intégrale est stricte.

2 Existence et régularité de solutions

Nous gardons l'hypothèse (**H3.1**) et nous donnons les définitions suivantes.

Définition 4.1 *[30]. Soit $\varphi \in \mathcal{B}$. Une fonction $x :]-\infty, a] \to E, a > 0$, est dite solution intégrale de l'équation (4.1) si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) *x est continue sur $[0, a]$;*

(ii) *$x(t) = \varphi(t)$, $-\infty < t \leq 0$;*

(iii) *$\int_0^t \mathcal{G}(s, x_s)ds \in D(A)$ pour $t \in [0, a]$;*

(iv) *$\mathcal{G}(t, x_t) = \mathcal{G}(0, \varphi) + A \int_0^t \mathcal{G}(s, x_s)ds$*

$$+ \int_0^t \left[\int_0^s k(s, \tau, x(\tau))d\tau\right] ds + \int_0^t F(s, x_s)ds \text{ pour } 0 \leq t \leq a.$$

Définition 4.2 *Soit $\varphi \in \mathcal{B}$. Une fonction $x :]-\infty, a] \to E$ est dite solution stricte de l'équation (4.1) si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) *$t \mapsto \mathcal{G}(t, x_t) \in C^1([0, a] ; E) \cap C([0, a] ; D(A))$;*

(ii) *x satisfait l'équation (4.1) sur $]-\infty, a]$.*

Nous avons besoin des résultats préliminaires suivants.

Lemme 4.1 *[5]. Si x est une solution intégrale de l'équation (4.1) sur $]-\infty, a]$, alors pour tout $t \in [0, a]$, $\mathcal{G}(t, x_t) \in \overline{D(A)}$. En particulier $\mathcal{G}(0, \varphi) \in \overline{D(A)}$.*

Lemme 4.2 *Si x est une solution intégrale de l'équation (4.1) sur $]-\infty, a]$ telle que $t \mapsto \mathcal{G}(t, x_t)$ appartient à $C^1([0, a] ; E)$ ou à $C([0, a] ; D(A))$, alors x est une solution stricte.*

Preuve. Soit x une solution intégrale de l'équation (4.1). Par définition, pour tous $t \in [0,a]$ et $h > 0$ tels que $t+h \leq a$, nous avons l'égalité

$$\begin{aligned} A\frac{1}{h}\textstyle\int_t^{t+h} \mathcal{G}(s,x_s)ds = \frac{1}{h}\left[\mathcal{G}(t+h,x_{t+h}) - \mathcal{G}(t,x_t)\right] \\ -\frac{1}{h}\textstyle\int_t^{t+h}\left[\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(s,x_s)ds. \end{aligned}$$

Si $s \mapsto \mathcal{G}(t,x_s)$ est différentiable, de la continuité de k et F, quand h tend vers 0^+, le terme à droite de l'égalité ci-dessus tend vers

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t,x_t) - \int_0^t k(t,\tau,x(\tau))d\tau - F(t,x_t),$$

et nous avons

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\mathcal{G}(s,x_s)ds = \mathcal{G}(t,x_t).$$

De la fermeture de l'opérateur A, nous obtenons $\mathcal{G}(t,x_t) \in D(A)$ et

$$A\mathcal{G}(t,x_t) = \frac{d}{dt}\mathcal{G}(t,x_t) - \int_0^t k(t,\tau,x(\tau))d\tau - F(t,x_t) \text{ pour } t \in [0,a]\,.$$

Donc x est une solution stricte.

D'autre part, supposons que $t \mapsto \mathcal{G}(t,x_t)$ appartient à $C([0,a]\,;D(A))$. Encore par définition, pour tous $t \in [0,a]$ et $h > 0$, avec $t+h \leq a$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\left[\mathcal{G}(t+h,x_{t+h}) - \mathcal{G}(t,x_t)\right] = \frac{1}{h}\textstyle\int_t^{t+h} A\mathcal{G}(s,x_s)ds \\ +\frac{1}{h}\textstyle\int_t^{t+h}\left[\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(s,x_s)ds. \end{aligned}$$

Puisque $A\mathcal{G}(s,x_s)$, k et F sont continues, quand h tend vers 0^+, le terme à droite de l'égalité ci-dessus tend vers $A\mathcal{G}(t,x_t) + \int_0^t k(t,\tau,x(\tau))d\tau + F(t,x_t)$. Ce qui implique que $\mathcal{G}(t,x_t)$ est différentiable à droite en t et satisfait

$$\frac{d^+}{dt}\mathcal{G}(t,x_t) = A\mathcal{G}(t,x_t) + \int_0^t k(t,\tau,x(\tau))d\tau + F(t,x_t).$$

Il est bien connu que si la dérivée à droite est continue alors la propriété C^1 est satisfaite. Nous concluons que $t \mapsto \mathcal{G}(t,x_t)$ est continuement différentiable sur $[0,a]$ et satisfait

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t,x_t) = A\mathcal{G}(t,x_t) + \int_0^t k(t,\tau,x(\tau))d\tau + F(t,x_t).$$

Ce qui achève la preuve du lemme. ■

2.1 Existence et unicité de solutions intégrales

Dans cette sous section, nous étudions l'existence globale et l'unicité des solutions intégrales. Pour cela, nous gardons la condition (**H3.1**) et nous faisons les hypothèses suivantes :

(**H4.1**) $G : [0,+\infty[\times \mathcal{B} \to E$ satisfait la condition globale de Lipschitz : il existe une constante $\alpha_0 > 0$ satisfaisant $\alpha_0 K(0) < 1$, telle que

$$|G(t,\phi_1) - G(t,\phi_2)| \leq \alpha_0 \|\phi_1 - \phi_2\|_{\mathcal{B}} \text{ pour tous } \phi_1,\ \phi_2 \in \mathcal{B} \text{ et } t \geq 0.$$

(**H4.2**) $F : [0,+\infty[\times \mathcal{B} \to E$ satisfait la condition globale de Lipschitz : il existe une constante $\beta_0 > 0$ telle que

$$|F(t,\phi_1) - F(t,\phi_2)| \leq \beta_0 \|\phi_1 - \phi_2\|_{\mathcal{B}} \text{ pour tous } \phi_1,\ \phi_2 \in \mathcal{B} \text{ et } t \geq 0.$$

(**H4.3**) $k : \Delta \times E \to E$ satisfait la condition globale de Lipschitz : il existe une constante $\gamma_0 > 0$

telle que

$$|k(t,s,x) - k(t,s,y)| \leq \gamma_0 |x-y| \text{ pour tous } x,\, y \in E \text{ et } (t,s) \in \Delta.$$

Avant d'énoncer notre premier résultat, nous réécrivons d'abord l'équation (4.1) sous une forme intégrale. Soit $\varphi \in \mathcal{B}$ telle que $\mathcal{G}(0,\varphi) \in \overline{D(A)}$. De la théorie des semi-groupes intégrés, il est bien connu que la fonction $x : (-\infty, a] \to E$, $a > 0$ est une solution intégrale de l'équation (4.1) si et seulement si x est une solution de l'équation

$$\begin{cases} \mathcal{G}(t,x_t) = S'(t)\mathcal{G}(0,\varphi) + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds \\ \qquad\qquad + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(s,x_s)ds,\ t \geq 0, \\ x_0 = \varphi. \end{cases} \tag{4.9}$$

Notons que le Corollaire 2.1 implique que $S(t)\mathcal{G}(0,\varphi)$ est différentiable par rapport à t. De plus, la proposition 2.3 montre que $\int_0^t S(t-s)F(s,x_s)ds$ et $\int_0^t S(t-s)\left[\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds$ sont aussi différentiables par rapport à t.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un premier résultat principal concernant l'existence et l'unicité des solutions intégrales.

Théorème 4.1 *[30]. Supposons que les hypothèses* (**H3.1**), (**H4.1**), (**H4.2**) *et* (**H4.3**) *sont satisfaites, alors, pour $\varphi \in \mathcal{B}$ telle que $\mathcal{G}(0,\varphi) \in \overline{D(A)}$, l'équation (4.1) admet une solution intégrale globale unique $x(.,\varphi)$ définie sur $]-\infty,+\infty[$.*

Preuve. Soit $a > 0$ et $C([0,a]\,;E)$ l'espace des fonctions continues de $[0,a]$ dans E muni de la topologie de la convergence uniforme. Soit $\varphi \in \mathcal{B}$ telle que $\mathcal{G}(0,\varphi) \in \overline{D(A)}$. Considérons le sous-ensemble fermé non vide $Z_a(\varphi)$ de $C([0,a]\,;E)$ défini par

$$Z_a(\varphi) := \{u \in C([0,a]\,;E) : u(0) = \varphi(0)\}\,.$$

Pour $u \in Z_a(\varphi)$, nous définissons $\tilde{u} :]-\infty, a] \to E$ par

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, a], \\ \varphi(t), & t \leq 0. \end{cases}$$

Posons $K_a := \max\limits_{0 \leq t \leq a} K(t)$. En vertu de la condition (**H4.2**) et de l'axiome (**A1**), $s \mapsto F(s, \tilde{u}_s)$ est continue sur $[0, a]$. De plus, la proposition 2.3 assure que $t \mapsto \int_0^t S(t-s)F(s, \tilde{u}_s)\, ds$ est continuement différentiable sur $[0, a]$.

Considérons l'opérateur $J : Z_a(\varphi) \longrightarrow Z_a(\varphi)$ defini par

$$\begin{array}{l} (Ju)(t) := G(t, \tilde{u}_t) + S'(t)\mathcal{G}(0, \varphi) + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)\left[\int_0^s k(s, \tau, \tilde{u}(\tau))d\tau\right] ds \\ \qquad + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(s, \tilde{u}_s)ds. \end{array}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\bar{\omega} \geq 0$. En utilisant les hypothèses, l'axiome $(\mathbf{A} - \mathbf{iii})$ et la proposition 2.3, nous avons pour tous u, $v \in Z_a(\varphi)$ et $t \in [0, a]$:

$$\begin{array}{rl} |(Ju)(t) - (Jv)(t)| & \leq |G(t, \tilde{u}_t) - G(t, \tilde{v}_t)| + \left|\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)\left[F(s, \tilde{u}_s) - F(s, \tilde{v}_s)\right] ds\right| \\ & \quad + \left|\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)\int_0^s \left[k(s, \tau, \tilde{u}(\tau)) - k(s, \tau, \tilde{v}(\tau))\right] d\tau ds\right| \\ & \leq \alpha_0 \left\|\tilde{u}_t - \tilde{v}_t\right\|_{\mathcal{B}} + \bar{M}e^{\bar{\omega}a}\int_0^t |F(s, \tilde{u}_s) - F(s, \tilde{v}_s)|\, ds \\ & \quad + \bar{M}e^{\bar{\omega}a}\int_0^t \left|\int_0^s \left[k(s, \tau, \tilde{u}(\tau)) - k(s, \tau, \tilde{v}(\tau))\right] d\tau\right| ds, \end{array}$$

soit

$$\begin{array}{rl} |(Ju)(t) - (Jv)(t)| & \leq \alpha_0 \left\|\tilde{u}_t - \tilde{v}_t\right\|_{\mathcal{B}} + \bar{M}e^{\bar{\omega}a}a\beta_0 \sup\limits_{0 \leq s \leq t} \left\|\tilde{u}_s - \tilde{v}_s\right\|_{\mathcal{B}} \\ & \quad + \bar{M}e^{\bar{\omega}a}a\int_0^t \gamma_0 \left|\tilde{u}(\tau) - \tilde{v}(\tau)\right| d\tau \\ & \leq \alpha_0 \left\|\tilde{u}_t - \tilde{v}_t\right\|_{\mathcal{B}} + \bar{M}e^{\bar{\omega}a}a\beta_0 \sup\limits_{0 \leq s \leq t} \left\|\tilde{u}_s - \tilde{v}_s\right\|_{\mathcal{B}} \\ & \quad + \bar{M}e^{\bar{\omega}a}a^2\gamma_0 \sup\limits_{0 \leq \tau \leq t} \left|\tilde{u}(\tau) - \tilde{v}(\tau)\right| \\ & \leq \left(\alpha_0 K_a + \bar{M}e^{\bar{\omega}a}a\beta_0 K_a + \bar{M}e^{\bar{\omega}a}a^2\gamma_0\right) \left\|u - v\right\|_{\infty}. \end{array}$$

Comme K est continue et $\alpha_0 K(0) < 1$, nous pouvons choisir $a > 0$ assez petit tel que

$$\left(\alpha_0 K_a + \bar{M}e^{\bar{\omega}a}a\beta_0 K_a + \bar{M}e^{\bar{\omega}a}a^2\gamma_0\right) < 1.$$

En conséquence, l'opérateur J est strictement contractant sur $Z_a(\varphi)$, et le point fixe de J

donne une solution intégrale unique $x(.,\varphi)$ de l'équation (4.1) sur $]-\infty, a]$.

Un raisonnement similaire peut être utilisé dans $[a, 2a]$,...$[na, (n+1)a]$, $n \geq 2$, pour conclure que la solution intégrale existe uniquement sur $]-\infty, +\infty[$. Ceci compléte la preuve du théorème. ■

2.2 Existence de solutions strictes

Le théorème suivant affirme que sous des conditions plus restrictives, nous obtenons une solution stricte unique pour l'équation (4.1). Afin de calculer l'intégrale dans $\mathcal{B}$ à partir de l'intégrale dans E, nous supposons que $\mathcal{B}$ est normé et satisfait l'axiome (**C**1) introduit dans le chapitre précédent.

Nous avons le résultat suivant :

Pour établir la régularité des solutions intégrales, nous ajoutons l'hypothèse suivante :

(**H4.4**) G et F sont continuement différentiables et leurs dérivées partielles sont localement Lipschitziennes par rapport au deuxième argument, dans le sens que, pour tout ensemble compact $Q \subset [0, +\infty[\times \mathcal{B}$, il existe une constante $\eta > 0$ telle que

$$\begin{cases} \|D_1F(t,\phi) - D_1F(t,\psi)\| \leq \eta \|\phi - \psi\|_{\mathcal{B}} , \\ \|D_2F(t,\phi) - D_2F(t,\psi)\| \leq \eta \|\phi - \psi\|_{\mathcal{B}} , \\ \|D_1G(t,\phi) - D_1G(t,\psi)\| \leq \eta \|\phi - \psi\|_{\mathcal{B}} , \\ \|D_2G(t,\phi) - D_2G(t,\psi)\| \leq \eta \|\phi - \psi\|_{\mathcal{B}} , \end{cases} \tag{4.10}$$

pour tous $(t, \phi), (t, \psi) \in Q$ et $t \geq 0$, où D_1F, D_2F, D_1G et D_2G désignent les dérivées partielles par rapport à t et ϕ. Pour tout $a > 0$ et quelles que soient x et y deux fonctions vérifiant les conditions de l'axiome (**A**), les ensembles $\{(s, x_s) : s \in [0, a]\}$ et $\{(s, y_s) : s \in [0, a]\}$ sont dans un ensemble compact de $[0,a]\times\mathcal{B}$. Il résulte de l'hypothèse (**H4.4**) que

$$\begin{cases} \|D_1F(s,x_s)-D_1F(s,y_s)\|\le\eta\,\|x_s-y_s\|_{\mathcal{B}}\,,\\ \|D_2F(s,x_s)-D_2F(s,y_s)\|\le\eta\,\|x_s-y_s\|_{\mathcal{B}}\,,\\ \|D_1G(s,x_s)-D_1G(s,y_s)\|\le\eta\,\|x_s-y_s\|_{\mathcal{B}}\,,\\ \|D_2G(s,x_s)-D_2G(s,y_s)\|\le\eta\,\|x_s-y_s\|_{\mathcal{B}}\,. \end{cases}$$

Nous présentons maintenant un résultat principal concernant l'existence des solutions strictes.

Théorème 4.2 *[31]. Supposons que $\mathcal{B}$ est normé et satisfait l'axiome* (**C**1) *et supposons que les hypothèses* (**H3.1**)*,* (**H4.1**)*,* (**H4.2**)*,* (**H4.3**) *et* (**H4.4**) *sont vérifiées et que $D_1k\in C(\Delta\times E;E)$, alors, pour toute fonction $\varphi\in\mathcal{B}$ continuement différentiable telle que*

$$\varphi'\in\mathcal{B},\ \mathcal{G}(0,\varphi)\in D(A),\ D_2\mathcal{G}(0,\varphi)\varphi'+D_1\mathcal{G}(0,\varphi)\in\overline{D(A)},$$

et

$$D_2\mathcal{G}(0,\varphi)\varphi'+D_1\mathcal{G}(0,\varphi)=A\mathcal{G}(0,\varphi)+F(0,\varphi),\tag{4.11}$$

la solution intégrale de l'équation (4.1) donnée par le théorème 4.1 est une solution stricte.

Preuve. Soit $a>0$. D'après le théorème 4.1, nous savons que l'équation (4.1) admet une solution intégrale unique $x:=x(.,\varphi)$ qui est l'unique solution de l'équation

$$\begin{array}{c}\mathcal{G}(t,x_t)=S'(t)\mathcal{G}(0,\varphi)+\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds\\ +\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(s,x_s)ds,\ \text{pour}\,t\in[0,a].\end{array}\tag{4.12}$$

D'après le lemme 4.2, il suffit de montrer que x est continuement différentiable sur $[0,a]$. Par application du corollaire 2.1, la condition $\mathcal{G}(0,\varphi)\in D(A)$ implique que

$$S'(t)\mathcal{G}(0,\varphi)=S(t)A\mathcal{G}(0,\varphi)+\mathcal{G}(0,\varphi).$$

Il s'ensuit que l'équation (4.12) peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(t,x_t) = \mathcal{G}(0,\varphi) + S(t)A\mathcal{G}(0,\varphi) + \tfrac{d}{dt}\textstyle\int_0^t S(t-s)\int_0^s k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds \\ +\tfrac{d}{dt}\textstyle\int_0^t S(t-s)F(s,x_s)ds.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[D_1\mathcal{G}(t,x_t) + D_2\mathcal{G}(t,x_t)y_t\right] = A\left[D_1\mathcal{G}(t,x_t) + D_2\mathcal{G}(t,x_t)y_t\right] \\ \qquad +k(t,t,x(t)) + \int_0^t D_1k(t,\tau,x(\tau))d\tau \\ \qquad +D_1F(t,x_t) + D_2F(t,x_t)\,y_t,\ t\in[0,a]\,, \\ y_0 = \varphi'. \end{cases} \tag{4.14}$$

En utilisant le même raisonnement que dans la preuve du théorème 4.1, nous obtenons que l'équation (4.14) admet une solution intégrale unique y sur $]-\infty,a]$.

Soit $w :]-\infty,a] \to E$ une fonction définie par

$$w(t) = \begin{cases} \varphi(0) + \int_0^t y(s)\,ds,\ t\in[0,a]\,, \\ \varphi(t),\ t\in\,]-\infty,\ 0]\,. \end{cases}$$

À l'aide du lemme 3.1 nous avons

$$w_t = \varphi + \int_0^t y_s\,ds,\ t\in[0,a]\,. \tag{4.15}$$

Dans ce qui suit, nous allons prouver que $x = w$ sur $]-\infty,a]$. Comme dans la preuve du dernier théorème, nous procédons par étapes en prenant d'abord $a > 0$ suffisamment petit tel que $\alpha_0 K_a < 1$, ensuite nous utilisons le même raisonnement pour obtenir des résultats similaires sur $[a,2a]\,,\dots,\ [na,(n+1)a]$ pour chaque $n \geq 2$.

En utilisant la forme intégrale de l'équation (4.14) et les expressions satisfaites par φ, nous obtenons pour tout $t \in [0, a]$:

$$\begin{array}{rl} \int_0^t D_2\mathcal{G}(s, x_s)y_s\, ds = & -\int_0^t D_1\mathcal{G}(s, x_s)\, ds + S\,(t)\,(A\mathcal{G}(0, \varphi) + F(0, \varphi)) \\ & +\int_0^t S\,(t-s)\, k(s, s, x(s))\, ds + \int_0^t S\,(t-s) \int_0^s D_1 k(s, \tau, x(\tau)) d\tau\, ds \\ & +\int_0^t S\,(t-s)\,(D_1 F\,(s, x_s) + D_2 F\,(s, x_s)\, y_s)\; ds. \end{array} \tag{4.16}$$

D'autre part, l'équation (4.15) entraîne que la fonction $t \mapsto w_t$ est continuement différentiable. En conséquence, $t \to \int_0^t S\,(t-s)\, F\,(s, w_s)\, ds$ est aussi continuement différentiable et la formule suivante est valable pour chaque $t \in [0, a]$.

$$\begin{array}{rl} \dfrac{d}{dt}\int_0^t S\,(t-s)\, F\,(s, w_s)\, ds = & S\,(t)\, F(0, \varphi) \\ & +\int_0^t S\,(t-s)\,(D_1 F\,(s, w_s) + D_2 F\,(s, w_s)\, y_s)\, ds. \end{array}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{array}{rl} S\,(t)\, F(0, \varphi) = & \dfrac{d}{dt}\int_0^t S\,(t-s)\, F\,(s, w_s)\, ds \\ & -\int_0^t S\,(t-s)\,(D_1 F\,(s, w_s) + D_2 F\,(s, w_s)\, y_s)\, ds. \end{array} \tag{4.17}$$

Considérons les fonctions z_1 et z_2 définies sur $[0, a]$ par

$$z_1(t) = \mathcal{G}(t, x_t) \text{ et } \; z_2(t) = \mathcal{G}(t, w_t).$$

En utilisant la formule (4.13), nous obtenons

$$\begin{array}{l} z_1(t) = \mathcal{G}(0, \varphi) + S(t)A\mathcal{G}(0, \varphi) + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s) \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \\ \qquad +\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(s, x_s)ds. \end{array} \tag{4.18}$$

Comme $t \to \mathcal{G}(t, w_t)$ est continuement différentiable sur $[0, a]$, la formule suivante est vérifiée.

$$\begin{array}{rl} z_2(t) & = \int_0^t \dfrac{d}{ds}\mathcal{G}(s, w_s)\, ds + \mathcal{G}(0, \varphi) \\ & = \int_0^t (D_1\mathcal{G}(s, w_s) + D_2\mathcal{G}(s, w_s)y_s)\, ds + \mathcal{G}(0, \varphi). \end{array}$$

D'après l'expression (4.16), nous avons

$$
\begin{aligned}
z_2(t) = \ & \textstyle\int_0^t (D_1\mathcal{G}(s,w_s) - D_1\mathcal{G}(s,x_s))\, ds \\
& + \textstyle\int_0^t (D_2\mathcal{G}(s,w_s) - D_2\mathcal{G}(s,x_s))\, y_s ds \\
& + \mathcal{G}(0,\varphi) + S\,(t)\,(A\mathcal{G}(0,\varphi) + F(0,\varphi)) \\
& + \textstyle\int_0^t S\,(t-s)\, k(s,s,x(s))ds + \int_0^t S\,(t-s) \int_0^s D_1 k(s,\tau,x(\tau))d\tau ds \\
& + \textstyle\int_0^t S\,(t-s)\,(D_1 F\,(s,x_s) + D_2 F\,(s,x_s)\, y_s)\, ds.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
z_1(t) - z_2(t) = \ & \frac{d}{dt} \textstyle\int_0^t S\,(t-s)\, F\,(s,x_s)\, ds - S\,(t)\, F(0,\varphi) \\
& - \textstyle\int_0^t (D_1\mathcal{G}(s,w_s) - D_1\mathcal{G}(s,x_s))\, ds \\
& - \textstyle\int_0^t (D_2\mathcal{G}(s,w_s) - D_2\mathcal{G}(s,x_s))\, y_s ds \\
& - \textstyle\int_0^t S\,(t-s)\,(D_1 F\,(s,x_s) + D_2 F\,(s,x_s)\, y_s)\, ds.
\end{aligned}
$$

L'expression (4.17) donne

$$
\begin{aligned}
z_1(t) - z_2(t) = \ & \frac{d}{dt} \textstyle\int_0^t S\,(t-s)\,(F\,(s,x_s) - F\,(s,w_s))\, ds \\
& - \textstyle\int_0^t (D_1\mathcal{G}(s,w_s) - D_1\mathcal{G}(s,x_s))\, ds \\
& - \textstyle\int_0^t (D_2\mathcal{G}(s,w_s) - D_2\mathcal{G}(s,x_s))\, y_s ds \\
& + \textstyle\int_0^t S\,(t-s)\,(D_1 F\,(s,w_s) - D_1 F\,(s,x_s))\, ds \\
& + \textstyle\int_0^t S\,(t-s)\,(D_2 F\,(s,w_s) - D_2 F\,(s,x_s))\, y_s ds.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, nous en déduisons que

$$
|z_1(t) - z_2(t)| \leq \sigma(a) \int_0^t \|x_s - w_s\|_{\mathcal{B}}\, ds,
$$

où $\sigma(a) = \bar{M} e^{\overline{\omega} a} \beta_0 + \eta + (H + \eta)\, d_0 + \eta d_0 + d_0^2$ et

$$
d_0 = \max \left\{ \sup_{0 \leq s \leq a} \|S(s)\|\,,\ \sup_{0 \leq s \leq a} \|y_s\|_{\mathcal{B}} \right\}.
$$

Comme $x_0 = w_0 = \varphi$, l'axiome $(\mathbf{A} - \mathbf{iii})$ implique que

$$
\|x_t - w_t\|_{\mathcal{B}} \leq K_a \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - w(s)|\,,
$$

et nous avons

$$\begin{aligned} |x(t) - w(t)| & \leq \alpha_0 \|x_t - w_t\|_{\mathcal{B}} + \sigma(a) \int_0^t \|x_s - w_s\|_{\mathcal{B}} \, ds \\ & \leq \alpha_0 K_a \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - w(s)| + \sigma(a) \int_0^t \|x_s - w_s\|_{\mathcal{B}} \, ds. \end{aligned}$$

En conséquence, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|x_t - w_t\|_{\mathcal{B}} & \leq K_a \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - w(s)| \\ & \leq K_a (1 - \alpha_0 K_a)^{-1} \sigma(a) \int_0^t \|x_s - w_s\|_{\mathcal{B}} \, ds. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, nous concluons que

$$\|x_t - w_t\|_{\mathcal{B}} = 0 \text{ pour tout } t \in [0, a] \, .$$

D'où $x(t) = w(t)$ pour tout $t \in \left]-\infty, a\right]$. En répétant la même procédure dans $[a, 2a]$,..., $[na, (n+1)a]$, nous déduisons que $x(t) = w(t)$ pour tout $t \in \left]-\infty, +\infty\right[$. Donc x est continuement différentiable sur $\left]-\infty, +\infty\right[$. En définitive, x est une solution stricte grâce au lemme 4.2. Ceci complète la preuve du théorème.

3 Application

Pour illuster nos résultats précédents, nous considérons l'équation intégro-différentielle fonctionnelle de type neutre et à retard infini suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left[w(t,\xi) - \int_{-\infty}^0 G_1 \left(t, \theta, w(t+\theta, \xi)\right) d\theta \right] = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[w(t,\xi) - \int_{-\infty}^0 G_1 \left(t, \theta, w(t+\theta, \xi)\right) d\theta \right] \\ \qquad + \int_0^t G_3 \left(t, s, w(s,\xi)\right) ds + \int_{-\infty}^0 G_2 \left(t, \theta, w(t+\theta, \xi)\right) d\theta, \quad t \geq 0, \ \ 0 \leq \xi \leq 1, \\ w(t,0) - \int_{-\infty}^0 G_1 \left(t, \theta, w(t+\theta, 0)\right) d\theta = w(t,1) - \int_{-\infty}^0 G_1 \left(t, \theta, w(t+\theta, 1)\right) d\theta = 0, \ \ t \geq 0, \\ w(\theta, \xi) = w_0(\theta, \xi), \qquad -\infty < \theta \leq 0, \ \ 0 \leq \xi \leq 1, \end{cases} \tag{4.19}$$

où G_1, $G_2 : [0, +\infty[\times]-\infty,\ 0] \times I\!R \to I\!R$, $G_3 : \Delta \times I\!R \to I\!R$ et $w_0 :]-\infty,\ 0] \times [0, 1] \to I\!R$ sont des fonctions continues.

Nous choisissons $E := C([0, 1]\,; I\!R)$ muni de la topologie de la convergence uniforme et nous considérons l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ défini par

$$\begin{cases} D(A) = \left\{y \in C^2([0, 1], I\!R) : y(0) = y(1) = 0\right\}, \\ Ay = y''. \end{cases}$$

Il est bien connu (voir [57]) que l'opérateur A satisfait la condition (**H3.1**)**,** avec $]0, +\infty[\ \subset \rho(A)$, $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$ et que

$$\overline{D(A)} = \{y \in E : y(0) = y(1) = 0\} \neq E.$$

Pour le choix d'un espace de phase concret $\mathcal{B}$, nous considérons pour une constante positive γ l'espace standard suivant :

$$C_\gamma := \left\{\phi :]-\infty,\ 0] \to E \text{ continue telle que } \lim_{\theta \to -\infty} e^{\gamma\theta}\phi(\theta) \text{ existe dans } E\right\}.$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.3 *([87] et [111]) C_γ muni de la norme $\|\phi\|_\gamma = \sup_{\theta \leq 0} e^{\gamma\theta}\,|\phi(\theta)|$, $\phi \in C_\gamma$, satisfait les axiomes* (**A**), (**A1**), (**B**) *et* (**C1**), *avec $K(0) = 1$.*

Nous réécrivons l'équation (4.19) sous une forme abstraite en posant

$$\begin{cases} x(t)(\xi) = w(t, \xi),\ t \in I\!R,\ \xi \in [0, 1], \\ \varphi(\theta)(\xi) = w_0(\theta, \xi),\ \theta \leq 0,\ \ \xi \in [0, 1], \end{cases}$$

et pour tous $t \geq 0$, $\xi \in [0,1]$ et $\phi \in C_\gamma$,

$$\begin{cases} G(t,\phi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} G_1(t,\theta,\phi(\theta)(\xi))d\theta, \\ k(t,s,x(s))(\xi) = G_3(t,s,x(s)(\xi)),\ 0 \leq s \leq t, \\ F(t,\phi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} G_2(t,\theta,\phi(\theta)(\xi))d\theta. \end{cases}$$

Ainsi, l'équation (4.19) prend la forme abstraite suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{G}(t,x_t) = A\mathcal{G}(t,x_t) + \int_0^t k(t,\tau,x(\tau))d\tau + F(t,x_t), \quad t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in C_\gamma, \end{cases} \tag{4.20}$$

où $\mathcal{G} : I\!R^+ \times C_\gamma \to E$ est définie par

$$\mathcal{G}(t,\phi) \quad = \phi(0) - G(t,\phi) \text{ pour tout } (t,\phi) \in I\!R^+ \times C_\gamma,$$

Pour étudier l'existence des solutions pour l'équation (4.20), nous faisons les hypothèses suivantes :

(**i**) Pour tous $t \geq 0$, $\theta \leq 0$ et $\zeta_1, \zeta_2 \in I\!R$

$$|G_1(t,\theta,\zeta_1) - G_1(t,\theta,\zeta_2)| \leq g_1(\theta)\,|\zeta_1 - \zeta_2|$$

et

$$|G_2(t,\theta,\zeta_1) - G_2(t,\theta,\zeta_2)| \leq g_2(\theta)\,|\zeta_1 - \zeta_2|$$

où g_1, g_2 sont deux fonctions mesurables positives sur $]-\infty,\ 0]$ telles que

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\gamma\theta} g_1(\theta)d\theta < 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{0} e^{-\gamma\theta} g_2(\theta)d\theta < \infty.$$

(**ii**) $\lim\limits_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta} w_0(\theta,\xi)$ existe uniformément pour $\xi \in [0,1]$.

(**iii**) $w_0(0,.) - \int_{-\infty}^{0} G_1(t,\theta,w_0(\theta,.))d\theta \in \overline{D(A)}$.

(**iv**) Il existe une constante $\gamma_0 > 0$ telle que

$$|G_3(t,s,x) - G_3(t,s,y)| \leq \gamma_0 \, |x - y| \quad \text{pour tous } x, y \ \in I\!R \text{ et } (t,s) \in \Delta.$$

L'hypothèse (**i**) implique que pour $\phi_1, \phi_2 \in C_\gamma$, nous avons les inégalités suivantes :

$$\sup_{0 \leq \xi \leq 1} |G(t,\phi_1)(\xi) - G(t,\phi_2)(\xi)| \leq \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\gamma\theta} g_1(\theta) d\theta \right) \|\phi_1 - \phi_2\|_\gamma \quad \text{et}$$

$$\sup_{0 \leq \xi \leq 1} |F(t,\phi_1)(\xi) - F(t,\phi_2)(\xi)| \leq \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\gamma\theta} g_2(\theta) d\theta \right) \|\phi_1 - \phi_2\|_\gamma \,.$$

Par conséquent, (**H4.1**) et (**H4.2**) sont satisfaites.

L'hypothèse (**iii**) est vérifiée, par exemple si $w_0(.,0) = w_0(.,1) = 0$ et $G_1(.,.,0) = 0$. De plus, (**ii**) et (**iii**) impliquent respectivement que $\varphi \in C_\gamma$ et $\mathcal{G}(0,\varphi) \in \overline{D(A)}$.

Il reste à montrer que k satisfait l'hypothèse (**H4.3**). Le noyau k est une fonction continue de $\Delta \times E$ dans E. En outre, par l'hypothèse (**iv**), nous avons pour tous $(t,s) \in \Delta$ et $x_1, x_2 \in E$

$$\begin{aligned} |k(t,s,x_1) - k(t,s,x_2)| &= \sup_{0 \leq \xi \leq 1} |G_3(t,s,x_1(\xi)) - G_3(t,s,x_2(\xi))| \\ &\leq \sup_{0 \leq \xi \leq 1} \gamma_0 \, |x_1(\xi) - x_2(\xi)| = \gamma_0 \, |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

d'où, k satisfait l'hypothèse (**H4.3**)**.** Nous concluons que toutes les conditions énoncées dans le théorème 4.1 sont satisfaites. Cela implique l'existence d'une solution intégrale unique x de l'équation (4.20).

Pour affirmer que la solution intégrale x de l'équation (4.20) est stricte, nous ajoutons l'hypothèse suivante :

(**v**) Pour $i = 1$ et $i = 2$, G_i est deux fois continuement différentiable et pour tous $t \geq 0$, $\theta \leq 0$ et $\xi \in I\!R$:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} G_i(t,\theta,x(\theta)(\xi)) \right| \leq \widetilde{\eta}_i(\theta) \, |\xi| \quad \text{et}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_i(t,\theta,x(\theta)(\xi))\right| \leq \widetilde{\eta}_i(\theta)\,|\xi|\,,$$

où $\widetilde{\eta}_i$ est une fonction mesurable positive sur $]-\infty,\ 0]$ telle que

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-3\gamma\theta}\widetilde{\eta}_i(\theta)d\theta < \infty.$$

Par l'hypothèse (**v**), les fonctions F et G sont de classe C^1 et satisfont les relations suivantes pour $\phi,\psi \in C_\gamma$ et $\xi \in [0,1]$:

$$\begin{cases} D_1G(t,\phi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} \dfrac{\partial}{\partial t}G_1(t,\theta,\phi(\theta)(\xi))d\theta, \\ D_2G(t,\phi)(\psi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} \dfrac{\partial}{\partial \zeta}G_1(t,\theta,\phi(\theta)(\xi))(\psi)(\theta)(\xi)d\theta, \\ D_1F(t,\phi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} \dfrac{\partial}{\partial t}G_2(t,\theta,\phi(\theta)(\xi))d\theta. \\ D_2F(t,\phi)(\psi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} \dfrac{\partial}{\partial \zeta}G_2(t,\theta,\phi(\theta)(\xi))(\psi)(\theta)(\xi)d\theta. \end{cases}$$

Il s'ensuit que les dérivées partielles de F et G sont localement Lipschitziennes par rapport au deuxième argument dans $I\!R^+ \times C_\gamma$. En fait, c'est une conséquence de ce qui suit.

$$\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{0}\left|\dfrac{\partial}{\partial \zeta}G_i(t,\theta,\phi_1(\theta)(\xi))(\psi)(\theta)(\xi)d\theta - \dfrac{\partial}{\partial \zeta}G_i(t,\theta,\phi_2(\theta)(\xi))(\psi)(\theta)(\xi)\right|d\theta \\ \leq \int_{-\infty}^{0} e^{-2\gamma\theta}\widetilde{\eta}_i(\theta)(e^{\gamma\theta}\,|\phi_1(\theta)(\xi)-\phi_2(\theta)(\xi)|)(e^{\gamma\theta}\,|\psi(\theta)(\xi)|)d\theta \\ \leq \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-2\gamma\theta}\widetilde{\eta}_i(\theta)d\theta\right)\|\phi_1-\phi_2\|_\gamma\,\|\psi\|_\gamma, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{0}\left|\dfrac{\partial}{\partial t}G_i(t,\theta,\phi_1(\theta)(\xi))d\theta - \dfrac{\partial}{\partial t}G_i(t,\theta,\phi_2(\theta)(\xi))\right|d\theta \\ \leq \int_{-\infty}^{0} e^{-\gamma\theta}\widetilde{\eta}_i(\theta)(e^{\gamma\theta}\,|\phi_1(\theta)(\xi)-\phi_2(\theta)(\xi)|)d\theta \\ \leq \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\gamma\theta}\widetilde{\eta}_i(\theta)d\theta\right)\|\phi_1-\phi_2\|_\gamma. \end{array}$$

Ce qui montre que (**H4.4**) est satisfaite.

Nous supposons de plus que

(**vi**)

$$\frac{\partial}{\partial\theta}w_0 \in C_\gamma, w_0(0,.) - \int_{-\infty}^{0} G_1\left(0,\theta,w_0(\theta,.)\right)d\theta \in D(A) \text{ et}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}w_0(0,.) - \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial}{\partial\zeta}G_1(0,\theta,w_0(\theta,.))\frac{\partial}{\partial\theta}w_0(\theta,.)d\theta \in \overline{D(A)}.$$

La condition ci-dessus est satisfaite si par exemple $w_0 \in C^2(]-\infty,\ 0]\times[0,1]\,;\mathbb{R})$, $\lim\limits_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}w_0(\theta,\xi)$ existe uniformément pour $\xi \in [0,1]$ et satisfait

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\theta}w_0(0,0) - \int_{-\infty}^{0} \dfrac{\partial}{\partial\zeta}G_1(0,\theta,w_0(\theta,0))\dfrac{\partial}{\partial\theta}w_0(\theta,0)d\theta = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}w_0(0,1) - \int_{-\infty}^{0} \dfrac{\partial}{\partial\zeta}G_1(0,\theta,w_0(\theta,1))\dfrac{\partial}{\partial\theta}w_0(\theta,1)d\theta = 0. \end{cases}$$

De plus, par le théorème de convergence dominée, la fonction

$$\frac{\partial}{\partial\theta}w_0(0,.) - \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial}{\partial\zeta}G_1(0,\theta,w_0(\theta,.))\frac{\partial}{\partial\theta}w_0(\theta,.)d\theta$$

est continue sur $[0,1]$.

La condition (4.11) dans le théorème 4.2 est donnée pour $\xi \in [0,1]$ par la formule suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\theta}w_0(0,\xi) - \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial}{\partial\zeta}G_1(0,\theta,w_0(\theta,\xi))\frac{\partial}{\partial\theta}w_0(\theta,\xi)d\theta \\ &= \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[w_0(0,\xi) - \int_{-\infty}^{0} G_1(0,\theta,w_0(\theta,\xi))d\theta\right] + \int_{-\infty}^{0} G_2(0,\theta,w_0(\theta,\xi))d\theta. \end{aligned}$$

Si de plus $D_1G_3 \in C(\Delta \times \mathbb{R};\mathbb{R})$, alors toutes les hypothèses du théorème 4.2 sont satisfaites. Enfin, nous obtenons que la solution intégrale x de l'équation (4.20) est stricte. Par conséquent, la fonction w définie par

$$w(t,\xi) = x(t)(\xi) \quad \text{pour tous } t \geq 0 \text{ et } \xi \in [0,1]$$

est une solution de l'équation (4.19).

Bibliographie

[1] M. Adimy. Abstract semilinear functional differential equations with non-dense domain. Publications internes de l'Université de Pau et des Pays de L'Adour, URA 1204 Pau 95/18, (1995).

[2] M. Adimy, Semi-groupes intégrés et équations aux dérivées partielles non locales en temps, *Thèse d'Habilitation, Université de Pau et des Pays de L'Adour, (1999).*

[3] M. Adimy, H. Bouzahir and K. Ezzinbi. Existence for a class of partial functional differential equations with infinite delay, Nonlinear Anal. 46, no. 1, Ser. A : Theory Methods, 91–112, (2001).

[4] M. Adimy, H. Bouzahir and K. Ezzinbi. Local existence and stability for some partial functional differential equations with infinite delay. Nonlinear Anal. 48, no. 3, Ser. A : Theory Methods, 323–348*, (2002).*

[5] M. Adimy, H. Bouzahir and K. Ezzinbi. Existence and stability for some partial neutral functional differential equations with infinite delay. J. Math. Anal. Appl. 294, no. 2, 438–461*, (2004).*

[6] M. Adimy, H. Bouzahir and K. Ezzinbi. Local existence for a class of partial neutral functional differential equations with infinite delay. Differential Equations Dynam. Systems 12 , no. 3-4, 353–370, (2004).

[7] M. Adimy and K. Ezzinbi. A class of linear partial neutral functional differential equations with nondense domain. J. Differential Equations 147, no. 2, 285–332*, (1998).*

[8] M. Adimy and K. Ezzinbi. Existence and stability of solutions for a class of partial neutral functional differential equations. Hiroshima Math. J. 34, no. 3, 251–294, (2004).

[9] M. Adimy and K. Ezzinbi. Existence and linearized stability for partial neutral functional differential equations with non dense domains. Differential Equations Dynam. Systems 7, no. 4, 371–417*, (1999).*

[10] M. Adimy and K. Ezzinbi, Local existence and linearized stability for partial functional differential equations, *Dynamic Systems and Applications 7, no. 3, 389-404, (1998).*

[11] M. Adimy and K. Ezzinbi. Strict solutions of nonlinear hyperbolic neutral differential equations. Appl. Math. Lett. 12*, no. 1, 107–112, (1999).*

[12] E. Ait Dads, P. Cieutat and L. Lhachimi. Existence of positive almost periodic or ergodic solutions for some neutral nonlinear integral equations. Differential Integral Equations 22, no. 11-12, 1075–1096, (2009).

[13] E. Ait Dads, P. Cieutat and L. Lhachimi. Positive almost automorphic solutions for some nonlinear infinite delay integral equations. Dynam. Systems Appl. 17, no. 3-4, 515-38, (2008).

[14] E. Ait Dads, P. Cieutat and L. Lhachimi. Stucture of the set of bounded solutions and existence of pseudo almost periodic solutions of a Liénard equation, Journal of Differential and Integral Equations 20, no. 7, 793-813, (2007).

[15] E. Ait Dads and K. Ezzinbi. Boundedness and almost periodicity for some state-dependent delay differential equations. Electron. J. Differential Equations, no. 67, 13 pp. (2002).

[16] E. Ait Dads and K. Ezzinbi. Existence of pseudo almost periodic solution for some abstract semilinear functional diffrential equation. Dynam. Systems Appl. 11, 493-498, (2002).

[17] W. Arendt. Resolvent positive operators and integrated semigroups. Proc. London Math. Soc. (3) 54, no. 2, 321–349*, (1987).*

[18] O. Arino, A. Burton and J. R. Haddock. Periodic solutions to functional differential equations, *Proc. Royal Soc. Edinburgh A 101, no. 3-4, 253-271, (1985).*

[19] O. Arino and My. L. Hbid. Existence of periodic solutions for a delay differential equation via the Poincaré procedure, *J. Differential Equations and Dynamical Systems 4, no. 2, 125-148, (1996).*

[20] O. Arino, My. L. Hbid and R. Bravo de la Parra. A mathematical model of growth of population of fish in the larval stage : density and dependence effects, *Math. Biosc. 150, no. 1, 1-20, (1998).*

[21] O. Arino and E. Sanchez. Linear theory of abstract functional differential equations of retarded type, *J. Math. Anal. Appl. 191, no. 3, 547-571, (1995).*

[22] O. Arino and E. Sanchez. A variation of constants formula for an abstract functional differential equations of retarded type, *Differential and Integral Equations 6, no. 9, 1305-1320, (1996).*

[23] P. Auger and A. Ducrot. A model of a fishery with fish stock involving delay equa-

tions. Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 367, no. 1908, 4907–4922, (2009).

[24] E. B. Barbier, I. Strand and S. Sathirathai. Do open access conditions affect the valuation of an externality ? Estimating the welfare effects of mangrove-fishery linkages. Environmental and Resource Economics 21, no. 4, 343–367, (2002).

[25] D. Bahuguna, D. N. Pandey and A. Ujlayan. Non-autonomous nonlinear integro-differential equations with infinite delay. Nonlinear Anal. 70, no. 7, 2642–2653, (2009).

[26] R. Bellman and K. L. Cooke. Differential difference equations. Academie Press, New York, (1963).

[27] R. Benkhalti, A. Elazzouzi and K. Ezzinbi. Periodic solutions for some partial neutral functional differential equations. Electron. J. Differential Equations, no. 56, 14 pp, (2006).

[28] R. Benkhalti, H. Bouzahir and K. Ezzinbi. Existence of a periodic solution for some partial functional-differential equations with infinite delay. J. Math. Anal. Appl. 256, no. 1, 257–280, (2001).

[29] L. L. Bonilla and A. Linan. Relaxation oscillations, pulses and travelling waves in the diffusive Volterra delay-differential equations. SIAM J. Appl. Math. 44, no. 2, 369–391, (1984).

[30] A. Boufala, H. Bouzahir and A. Maaden. Neutral Volterra integrodifferential equations with infinite delay. Int. J. Math. Anal. (Ruse) 3, no. 1-4, 187–196, (2009).

[31] A. Boufala, H. Bouzahir and A. Maaden. Regularity of solutions for neutral Volterra integrodifferential equations with infinite delay. Journal of Abstract Differential Equations and Applications 1, no. 1, 61–74, (2010).

[32] A. Boufala, H. Bouzahir and A. Maaden. Local existence for partial neutral functional integrodifferential equations with infinite delay. Commun. Math. Anal. 9, no. 2, 149–168, (2010).

[33] H. Bounit, A. Driouich and O. El-Mennaoui. A direct approach to the Weiss conjecture for bounded analytic semigroups. Czechoslovak Math. J. 60(135), no. 2, 527–539, (2010).

[34] H. Bouzahir. Partial neutral functional differential equations with infinite delay : A contribution to quantitative and qualitative aspects of study in infinite dimension. VDM Verlag Dr. Müller, (2010).

[35] H. Bouzahir. Contribution à l'étude des aspects quantitatifs et qualitatifs pour une classe d'équations différentielles à retard infini en dimension infinie. Ph. D. thesis, Université Cadi Ayyad, no. 40, 05 April, (2001).

[36] H. Bouzahir. Existence and regularity of local solutions to partial neutral functional differential equations with infinite delay. Electron. J. Differential Equations, no. 88, 16 pp, (2006).

[37] H. Bouzahir. On neutral partial functional differential equations with infinite delay. Fixed Point Theory 6 , no. 1, 11–24, (2005).

[38] H. Bouzahir. On Controllability of neutral functional differential equations with infinity delay. Monografias del Seminario Matematico Garcia Galdeano 33, 75–81, (2006).

[39] H. Bouzahir. Variation of constants formula for partial functional differential equations with infinite delay. Int. J. Math. Anal. (Ruse) 1, no. 9-12, 507-528, (2007).

[40] H. Bouzahir. Semigroup approach to semilinear partial functional differential equations with infinite delay. J. Inequal. Appl. 2007, Art. ID 49125, 13 pp, (2007).

[41] M. Brelot. Sur le problème biologique héréditaire de deux espèces dévorante et dévoré. Annali di Matematica Pura ed Applicata 9, 57-74, (1931).

[42] N. F. Britton. Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction diffusion population model. SIAM J. Appl. Math. 50, no. 6, 1663–1688*, (1990).*

[43] S. Busenberg and B. Wu. Convergence theorems for integrated semigroups. Differential Integral Equations 5, no. 3, 509–520, (1992).

[44] P. Cannarsa and D. Sforza. Global solutions of abstract semilinear parabolic equations with memory terms. NoDEA Nonlinear Differential Equations. Appl. 10, no. 4, 399–430, (2003).

[45] J. -C. Chang. Local existence for retarded Volterra integrodifferential equations with Hille-Yosida operators. Nonlinear Anal. 66, no. 12, 2814–2832*, (2007).*

[46] J. -C. Chang and C. -L. Lang. Local existence for nonlinear Volterra integrodifferential equations with infinite delay. Nonlinear Anal. 68, no. 10, 2943–2956*, (2008).*

[47] J. -C. Chang and C. -L. Lang. Global existence for retarded Volterra integrodifferential equations with Hille-Yosida operators. Dynam. Systems Appl. 16, no. 4, 625–641*, (2007).*

[48] C. W. Clark. Mathematical bioeconomics : The optimal management of renewable resources (2nd edition), Wiley-Intersciences, New-York, (1990).

[49] P. Clément and J. A. Nohel. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels. SIAM J. Math. Anal. 12, no. 4, 514–535, (1981).

[50] P. Clément and J. Prüss. Global existence for a semilinear parabolic Volterra equation. Math. Z. 209, no. 1, 17–26, (1992).

[51] D. S. Cohen, P. S. Hagan and H. C. Simpson. Spacial structures in predator-prey communities with hereditary effects and diffusion. Math. Biosci. 44, no. 3-4, 167–177, (1979).

[52] B. D. Coleman and M. E. Gurtin. Equipresence and constitutive equations for rigid heat conductors. Z. Angew. Math. Phys. 18, 199–208, (1967).

[53] B. C. Coleman and V. J. Mizel. Norms and semigroups in the theory of fading memory. Arch. Rational Mech. Anal. 23, 87–123, (1966).

[54] B. C. Coleman and V. J. Mizel. On the stability of functional differential equations. Arch. Rational Mech. Anal. 30, 173–196, (1968).

[55] J. M. Cushing. Integrodifferential equations with delay models in population dynamics. Lecture Notes in Biomathematics 20. Springer-Verlag, Berlin-New York, iii+196 pp, (1977).

[56] G. Da Prato and E. Sinestrari. Nonautonomous evolution operators of hyperbolic type. Semigroup Forum 45, no. 3, 302–321, (1992).

[57] G. Da Prato and E. Sinestrari. Differential operators with non-dense domains. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 14, no. 2, 285–344, (1987).

[58] W. Desch, R. Grimmer and W. Schappacher. Well-posedness and wave propagation for a class of integrodifferential equations in Banach space. J. Differential Equations 74, no. 2, 391–411, (1988).

[59] W. Desch and W. Schappacher. Linearized stability for nonlinear semigroups. Differential equations in Banach spaces. Lecture Notes in Math. 1223, Springer, Berlin, 61–73*, (1986).*

[60] T. Diagana, E. Hernandez and J. P. C. dos Santos. Existence of asymptotically almost automorphic solutions to some abstract partial neutral integro-differential equations. Nonlinear Analysis 71, 248-257,(2009).

[61] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel and H. O. Walter. Delay equations. Functional, complex, and nonlinear analysis. Applied Mathematical Sciences 110, Springer-Verlag, New York, xii+534 pp, (1995).

[62] J. P. C. Dos Santos, H. Henriquez and E. Hernandez. Existence results for neutral integro-differential equations with unbounded delay. Journal of integral equations and applications 23, no. 2, (2011).

[63] A. Elazzouzi and A. Ouhinou. Variation of constants formula and reduction principle for a class of partial functional differential equations with infinite delay. Nonlinear Anal. 73, no. 7, 1980–2000, (2010).

[64] K. Ezzinbi, S. Ghnimi and M.A. Taoudi. Existence and regularity of solutions for neutral partial functional integrodifferential equations with infinite delay. Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 4, no. 1, 54–64, (2010).

[65] K. Ezzinbi, H. Toure and I. Zabsonre. Existence and regularity of solutions for some partial functional integrodifferential equations in Banach spaces. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 70, 2761-2771, (2009).

[66] K. Ezzinbi, H. Toure and I. Zabsonre. Local existence and regularity of solutions for some partial functional integrodifferential equations with infinite delay in Banach spaces. Nonlinear Anal. 70, no. 9, 3378-3389, (2009).

[67] S. Ghnimi. Contributions à l'existence et la régularité des équations intégro-différentielles de type neutre dans les espaces de Banach (Partie II). Thèse de doctorat, Université de Sfax, Tunisie, (2010).

[68] K. Gopalsamy. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Mathematics and its Applications, 74. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, xii+501 pp, (1992).

[69] R. Grimmer. Resolvent operators for integral equations in a Banach space. Trans. Amer. Math. Soc. 273, no. 1, 333–349, (1982).

[70] M. E. Gurtin and A. C. Pipkin. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. Arch. Rational Mech. Anal. 31, no. 2, 113–126, (1968).

[71] J. K. Hale. Partial neutral functional differential equations. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 39, no. 4, 339–344, (1994).

[72] J. K. Hale. Coupled oscillators on a circle. Dynamical phase transitions (São Paulo, 1994). Resenhas 1, no. 4, 441–457, (1994).

[73] J. K. Hale. Theory of functional differential equations. Second edition. Applied Mathematical Sciences 3, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, x+365 pp, (1977).

[74] J. K. Hale and J. Kato. Phase space for retarded equations with infinite delay. Funkcial. Ekvac. 21, no. 1, 11–41, (1978).

[75] J. K. Hale and S. Verduyn-Lunel. Introduction to functional differential equations. Applied Mathematical Sciences 99, Springer-Verlag, New York, (1993).

[76] M. L. Heard. A class of hyperbolic Volterra integro-differential equations. Nonlinear Anal. 8, no. 1, 79–93, (1984).

[77] M. L. Heard. An abstract semilinear hyperbolic Volterra integro-differential equation. J. Math. Anal. Appl. 80, no. 1, 175–202, (1981).

[78] H. R. Henriquez. Periodic solutions of quasi-linear partial functional differential equations with unbounded delay. *Funkcialaj Ekvaciaoj 37, no. 2, 329-343, (1994).*

[79] H. R. Henriquez. Approximation of abstract functional differential equations with unbounded delay. *Indian J. Pure Appl. Math. 27, no. 4, 357-386, (1996).*

[80] H. R. Henriquez. Regularity of solutions of abstract retarded functional differential equations with unbounded delay. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 28, no. 3, 513-531, (1997).*

[81] E. Hernandez. Existence results for partial neutral functional integrodifferential equations with unbounded delay. J. Math. Anal. Appl. 292, no. 1, 194–210, (2004).

[82] E. Hernandez and H. R. Henriquez. Existence results for partial neutral functional differential equations with unbounded delay. J. Math. Anal. Appl. 221, no. 2, 452–475, (1998).

[83] E. Hernandez and H. R. Henriquez. Existence of periodic solutions for partial neutral functional differential equations with unbounded delay. J. Math. Anal. Appl. 221, no. 2, 499–522, (1998).

[84] E. Hernandez, H. Henriquez and J. P. C. Dos Santos. Existence results for abstract partial neutral integro-differential equation with unbounded delay. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. No. 29, 1-23, (2009).

[85] G. Hetzer. A functional reaction-diffusion equation from climate modelling : S- shapedness of the principle branch of fixed points of the time-1-map, Differential and Integral equations, 8, no. 5, 1047-1059, (1995).

[86] M. Hieber. Integrated semigroups and differential operators on L^p. Math. Ann. 291, no. 1, 1–16, (1991).

[87] Y. Hino, S. Murakami and T. Naito. Functional differential equations with infinite delay. Lecture Notes in Mathematics 1473, Springer-Verlag, Berlin, (1991).

[88] F. Kappel and W. Schappacher. Some considerations to the fundamental theory of infinite delay equations. *J. Differential Equations 37, no. 2, 141-183, (1980).*

[89] H. Kellermann and M. Hieber. Integrated semigroup. J. Funct. Anal. 84, no. 1, 160-180, (1989).

[90] M. Laklach. Contribution à l'étude des équations aux dérivées partielles à retard et de type neutre, Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, (2001).

[91] K. Latrach, M. A. Taoudi and A. Zeghal. Some fixed point theorems of the Schauder and the Krasnosel'skii type and application to nonlinear transport equations. J. Differential Equations 221, , no. 1, 256–271, (2006).

[92] L. D. Lemle. Une étude comparative concernant les semi-groupes de classe C_0 et les semi-groupes intégrés. Lect. Mat. 26, no. 1, 27–88, (2005).

[93] F. Li and J. Zhang. Existence of mild solutions to fractional integrodifferential equations of neutral type with infinite delay. Advances in Difference Equations 2011, 15 pages, (2011).

[94] J. H. Liu. Integrodifferential equations with non-autonomous operators. Dynam. Systems Appl. 7, no. 3, 427–439, (1998).

[95] C. Lizama and G. M. N'Guérékata. Bounded mild solutions for semilinear integro differential equations in Banach spaces. Integral Equations Operator Theory 68 , no. 2, 207–227, (2010).

[96] A. Lunardi. On the linear heat equation with fading memory. SIAM J. Math. Anal. 21, no. 5, 1213–1224, (1990).

[97] N. MacDonald. Time lags in biological models. Lecture Notes in Biomathematics 27, Springer-Verlag, Berlin-New York, vii+112 pp, (1979).

[98] R. M. May. Biological population obeying difference equations : Stable points, stable cycles and chaos. J. Theor. Biol. 51, 511–524, (1975).

[99] R. Mchich, P. Auger, R. Bravo de la Parra and N. Raüssi. Dynamics of a fishery on two fishing zones with fish stock dependent migrations : aggregation and control. Ecol. Model. 158, 51–62, (2002).

[100] R. Mchich, N. Charouki, P. Auger, N. Raüssi and O. Ettahiri. Optimal spatial distribution of the fishing effort in a multi fishing zone model. Ecol. Model. 197, 274–280, (2006).

[101] R. K. Miller. An integrodifferential equation for rigid heat conductions with memory. J. Math. Anal. Appl. 66, no. 2, 313–332, (1978).

[102] J. D. Murray. Spatial structures in predator-prey communities - A nonlinear time delay diffusional model. Mathematical Biosciences 31, 73-85, (1976).

[103] R. Nagel and E. Sinestrari. Nonlinear hyperbolic Volterra integrodifferential equations. Nonlinear Anal. 27, no. 2, 167–186, (2001).

[104] T. Naito, J. S. Shin and S. Murakami. The generator of the solution semigroup for the general linear functional-differential equation. Bull. Univ. Electro-Comm. 11, no. 1, 29–38, (1998).

[105] J.W. Nunziato. On heat conduction in materials with memory. Quart. Appl. Math. 29, 187–204, (1971).

[106] A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, viii+279 pp, (1983).

[107] E. C. Pielou. Mathematical ecology. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, x+385 pp, (1977).

[108] J. Prüss. Evolutionary integral equations and applications. Basel etc., Birkhäuser Verlag, xxvi+366 pp, (1993).

[109] A. Rhandi. Extrapolation methods to solve non-autonomous retarded partial functional differential equations. Studia Math. 126, no. 3, 219–233, (1997).

[110] S. G. Ruan and J. Wu. Reaction-diffusion equations with infinite delay. Canad. Appl. Math. Quart. 2, no. 4, 485–550, (1994).

[111] W. M. Ruess and W. H. Summers. Linearized stability for abstract differential equations with delay. J. Math. Anal. Appl. 198, no. 2, 310–336, (1996).

[112] K. Schumacher. Existence and continuous dependence for differential equations with unbounded delay. Arch. Rational Mech. Anal. 67, no. 4, 315–335, (1978).

[113] A. Soufyane, M. Afilal, T. Aouam and M. Chacha. General decay of solutions of a linear one-dimensional porous-thermoelasticity system with a boundary control of memory type. Nonlinear Anal. 72, no. 11, 3903–3910, (2010).

[114] J. M. Smith. Models in Ecology. Cambridge U. Press, Cambridge, (1974).

[115] H. Thieme. Integrated semigroups and integrated solutions to abstract Cauchy problems. J. Math. Anal. Appl. 152, no. 2, 416–447, (1990).

[116] H. Thieme. Semiflows generated by Lipschitz perturbations of non-densely defined operators. Differential Integral Equations 3, no. 6, 1035–1066, (1990).

[117] C. C. Travis and G. F. Webb. Existence and stability for partial functional differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 200, 395–418, (1974).

[118] V. Volterra. Leçons sur la theorie mathématique de la lutte pour la vie, Gauthiers-Villars, Paris, 214, (1931).

[119] V. Volterra. Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires. Journal de Math Pures et Appliquées 7, 249-298, (1928).

[120] P. K. C. Wang. Asymptotic stability of a diffusion system with time-delays, Journal of Applied Mechanics, 30E, 500-5004, (1963).

[121] Z. C. Wang and J. Wu. Neutral functional differential equations with infinite delay. Funkcialj Ekvac 28, 157–170, (1985).

[122] G. F. Webb. An abstract semilinear Volterra integrodifferential equation. Proc. Amer. Math. Soc. 69, 255–260, (1978).

[123] G. F. Webb. Autonomous nonlinear functional differential equations and nonlinear semigroups. J. Math. Anal. Appl. 46, 1–12, (1974).

[124] G. F. Webb. Theory of nonlinear age-dependent population dynamics. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 89, Marcel Dekker, Inc., New York, vi+294 pp, (1985).

[125] J. Wu. Theory and applications of partial functional differential equations. Applied Mathematical Sciences 119, Springer-Verlag, New York, x+429, (1996).

[126] J. Wu and H. Xia. Self-sustained oscillations in a ring array of coupled lossless transmission lines. J. Differential Equations 124, no. 1, 247–278, (1996).

[127] J. Wu and H. Xia. Rotating waves in neutral partial functional differential equations. J. Dynam. Differential Equations 11, no. 2, 209–238, (1999).

[128] J. A. Yorke. Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations, Journal of Differential Equations 7, 189-202, (1970).

[129] I. Zabsonre. Systèmes dynamiques et équations aux dérivés partielles. Thèse de doctorat, Université de Ouagadougou, Burkina Faso, (2009).