

N° d'ordre : 266/2020



UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY
SLIMANE
Faculté des Sciences et Techniques
Béni Mellal



Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Hamid OUAISSA

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques Appliquées

**Étude théorique et approximation numérique d'un problème
inverse modélisant l'écoulement d'air dans les poumons.**

Soutenue le 21/09/2020 devant le jury :

Noureddine ASKOUR,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Président.
Lekbir AFRAITES,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Rapporteur.
Mohamed CHABI,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Examineur.
Abdelkrim CHAKIB,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Encadrant.
François JAUBERTEAU,	Professeur à l'Université de Nantes, France	Rapporteur.
Mourad NACHAOUI,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Co-encadrant.
Ahmed TOUHAMI,	Professeur à l'ENSA, Béni Mellal, Maroc	Rapporteur.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah de m'avoir donné le courage et la patience sans lesquels je n'aurais certainement jamais pu mener ce projet à terme.

Ensuite, je tiens à adresser plus particulièrement mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse le professeur Abdelkrim Chakib pour l'aide combien précieuse et efficace qu'il m'a apportée, pour sa patience, sa rigueur et ses encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail. Malgré ses nombreuses responsabilités, il a toujours répondu présent, me montrant ainsi la voie tout en me laissant une grande liberté de pensée et d'action. Ses discussions utiles et fructueuses ont été un atout pour moi pour mener à bien les travaux de cette thèse. J'ai eu ainsi la chance de travailler sous sa direction pendant ces années. Que soit tout aussi remercié mon co-directeur de thèse le professeur Mourad Nachaoui pour m'avoir encouragé et conseillé tout au long de ce travail. Ses discussions ont été d'intérêt considérable.

Ce fut un grand honneur que les professeurs Lekbir Afraïtes, François Jauberteau et Ahmed Touhami aient accepté de rapporter sur ma thèse. Merci pour vos remarques avisées et pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail.

Je remercie respectueusement le professeur Noureddine Askour, pour le temps qu'il a consacré à examiner cette thèse et pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury. Je tiens à remercier le professeur Mohamed Chabi d'avoir participé en tant qu'examinateur à mon jury de thèse.

Mes remerciements vont à M. Abdeljalil Nachaoui qui m'a initié à la recherche et m'orienter dans la bonne voie et qui a su inspirer le titre de cette thèse.

Un grand merci aux membres du Laboratoire LMA, surtout les professeurs Amine Laghrib Mustapha Johri et Aissam Hadri, aussi bien les doctants Azzedine, Hssaine, Soufiane, Abou-bakre et Naoufel, pour les bons moments que nous avons partagés.

Je tiens à remercier ma famille, en particulier mes parents pour leur soutien permanent, constant et surtout sans aucune faille. Grâce à la patience et la confiance qu'ils m'ont toujours insufflées, ils m'ont permis d'avancer en toute quiétude. J'espère qu'ils trouveront en ce modeste travail une récompense pour ce qu'ils ont fait pour moi.

Pour finir, Toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'élaboration/l'enrichissement et à la réalisation de cette thèse, trouveront ici l'expression de mes sincères sentiments.

Table des matières

Remerciements	2
Résumé	13
1 Introduction générale	15
2 Rappels et résultats préliminaires	21
2.1 Opérateurs différentiels linéaires et formules vectorielles	21
2.2 Espaces fonctionnels	23
Les espaces $L^p(\Omega)$	23
Espaces de Sobolev vectoriels	24
2.3 Inégalités sur les espaces de Sobolev	25
2.4 Problème de Stokes et formulation mixte	26
2.5 Existence et unicité de la solution d'une formulation mixte	28
2.6 Approximation de la formulation mixte	32
2.7 Théorème de point fixe et degrés topologiques	34
Degré topologique de Brouwer	34
Degré topologique de Leray-Schauder	35
3 Modélisation de l'appareil respiratoire	37
3.1 Importance du mécanisme des poumons	37
Architecture de l'appareil respiratoire	38
Tests des fonctions pulmonaires	39
3.2 Modèle d'écoulement d'air dans les poumons	40
Modèle linéaire à un compartiment	40
Modèle considéré	43
3.3 Problème inverse de Cauchy issu du modèle pulmonaire considéré	45
4 Étude du problème de Cauchy basée sur une approche en décomposition de domaine	47
4.1 Position du problème inverse	47
4.2 Résultat d'existence	50
Propriétés de l'opérateur local de Steklov-Poincaré	51

Formulation point fixe du problème 4.10	53
Existence et unicité du point fixe	54
4.3 Approximation numérique de notre problème	61
Algorithme de point fixe	61
Algorithmes issus de la décomposition de domaine	62
4.4 Résultats numériques et discussion	64
Exemples numériques	65
Convergence numérique	69
Stabilité numérique	75
Influence des conditions de compatibilité	86
5 Approche à caractère régularisant pour la résolution du problème inverse de Cauchy	91
5.1 Position et formulation du problème	91
Formulation complexe du problème de Cauchy	93
Formulation en optimisation du problème	94
5.2 Approche régularisante du problème	96
Régularisation de Tikhonov du problème	96
Résultats d'existence et de la convergence du problème régularisé	98
5.3 Étude numérique du problème régularisé	106
Discrétisation du problème	107
Existence de la solution optimale discrète	111
Résultat de convergence	112
5.4 Simulation numérique du problème régularisé	118
5.5 Résultats numériques	119
Test numérique 1	119
Test numérique 2	125
6 Simulation numérique du problème inverse modélisant l'écoulement d'air dans les poumons	130
6.1 Position du problème inverse sur l'arbre bronchique simulée	130
6.2 Résolution du problème inverse par l'algorithme de Robin-Robin	133
Résultats numériques	133
Stabilité numérique	138
6.3 Résolution du problème inverse par la seconde approche	148
Résultats numériques	148
Stabilité numérique	154

TABLE DES MATIÈRES

5

Conclusion

160

Table des figures

2.1	Élément fini du type P_{1Bulle}/P_1	33
3.1	Appareil respiratoire [1]	38
3.2	Ramifications des voies aériennes [24]	39
3.3	Courbe volume-débit normale [44]	40
3.4	Courbes volume-débit. Les images proviennent de [44]	41
3.5	Le modèle à un compartiment [27].	42
3.6	Loi de Poiseuille et flux d'air à travers un conduit cylindrique [27].	42
3.7	Arbre bronchique reconstruit numériquement [13]	43
3.8	Schéma simplifié de la modélisation de l'arbre bronchique [44]	44
4.1	Domaine Ω	65
4.2	Les solutions exacte et approchée de la première composante de la vitesse u_1	66
4.3	Les solutions exacte et approchée de la deuxième composante de la vitesse u_2	67
4.4	Les solutions exacte et approchée de la pression p	67
4.5	Evolution d'erreur de la vitesse en fonction de s_1 et s_2 pour $\theta = 1$	68
4.6	Evolution d'erreur de la pression en fonction de s_1 et s_2 pour $\theta = 1$	69
4.7	Evolution d'erreur en fonction de θ pour $(s_1, s_2) = (0.1, 1)$	69
4.8	Evolution d'erreur de vitesse en fonction de γ_1 et γ_2	70
4.9	Evolution d'erreur de pression en fonction de γ_1 et γ_2	70
4.10	La solution exacte (composante de la vitesse u_1) et la solution approchée obtenue par la méthode du point fixe pour les différentes valeurs de h	71
4.11	La solution exacte (composante de la vitesse u_2) et la solution approchée obtenue par la méthode du point fixe pour les différentes valeurs de h	71
4.12	La pression exacte et approchée obtenue par la méthode du point fixe pour les différentes valeurs de h	72
4.13	La solution exacte (composante de la vitesse u_1) et la solution approchée obtenue par l'algorithme "Neumann-Neumann" pour les différentes valeurs de h	72

4.14	La solution exacte (composante de la vitesse u_2) et la solution approchée obtenue par l'algorithme "Neumann-Neumann" pour les différentes valeurs de h	73
4.15	La pression exacte et approchée obtenue par l'algorithme "Neumann-Neumann" pour les différentes valeurs de h	73
4.16	La solution exacte (composante de la vitesse u_1) et la solution approchée obtenue par l'algorithme Robin-Robin pour les différentes valeurs de h . . .	74
4.17	La solution exacte (composante de la vitesse u_2) et la solution approchée obtenue par l'algorithme Robin-Robin pour les différentes valeurs de h . . .	74
4.18	La pression exacte et approchée obtenue par l'algorithme Robin-Robin pour les différentes valeurs de h	75
4.19	la variation d'erreur de la composante de la vitesse u_1 sur Γ_1 en fonction du nombre d'itérations pour les différents algorithmes.	76
4.20	la variation d'erreur de pression p sur Γ_1 en fonction du nombre d'itérations pour les différents algorithmes.	76
4.21	Solution exacte (composante de la vitesse u_1), approchée et perturbée obtenues par l'algorithme du point fixe.	77
4.22	Solution exacte (composante de vitesse u_2), approchée et perturbée obtenues par l'algorithme du point fixe.	78
4.23	Pression exacte, approchée et perturbée obtenues par l'algorithme du point fixe.	78
4.24	Solution exacte (composante de la vitesse u_1), approchée et perturbée obtenues par l'algorithme "Neumann-Neumann".	79
4.25	Solution exacte (composante de la vitesse u_2), approchée et perturbée obtenues par l'algorithme "Neuamnn-Neumann".	79
4.26	Pression exacte, approchée et perturbée obtenues par l'algorithme "Neuamnn-Neumann".	80
4.27	Solutions exacte (composante de la vitesse u_1), approchée et perturbée obtenues par l'algorithme "Robin-Robin".	80
4.28	Solution exacte (composante de la vitesse u_2), approchée et perturbée obtenues par l'algorithme "Robin-Robin".	81
4.29	Pression exacte, approchée et perturbée obtenues par l'algorithme "Robin-Robin".	81
4.30	Les solutions exacte et approchée de la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_1	83

4.31	Les solutions exacte et approchée de la deuxième composante de la vitesse u_2 sur Γ_1 .	83
4.32	Les solutions exacte et approchée de la pression p sur Γ_1 .	84
4.33	Domaine Ω .	84
4.34	Les solutions exacte et approchée de la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_1 .	86
4.35	Les solutions exacte et approchée de la deuxième composante de la vitesse u_2 sur Γ_1 .	86
4.36	Les solutions exacte et approchée de la pression p sur Γ_1 .	87
4.37	Les solutions exacte et approchée $u_{1 \Gamma_1}$	88
4.38	Les solutions exacte et approchée $u_{2 \Gamma_1}$	89
4.39	Les solutions exacte et approchée $p_{ \Gamma_1}$	89
5.1	Domaine Ω	120
5.2	La solution (φ, ζ) exacte et approchée	121
5.3	La solution ζ_ε^h pour les différentes valeurs de ε	122
5.4	La solution φ_ε^h pour les différentes valeurs de ε	122
5.5	La vitesse et la pression exactes et approchées sur Γ_1	123
5.6	La solution ζ_1 pour différents niveaux du bruit δ	124
5.7	La solution ζ_2 pour différents niveaux du bruit δ .	124
5.8	La solution φ_1 pour différents niveaux du bruit δ	125
5.9	La solution φ_2 pour différents niveaux du bruit δ	125
5.10	La solution ζ_1 sur Γ_1	127
5.11	La solution ζ_2 sur Γ_1	127
5.12	La pression p sur Γ_1	128
5.13	La composante du flux φ_1 sur Γ_1	128
5.14	La composante du flux φ_2 sur Γ_1	129
6.1	Schéma simulant l'arbre bronchique étudiée	131
6.2	Maillage de l'arbre bronchique 2d	132
6.3	L'erreur entre les deux composantes de vitesse et la pression (u_1, u_2, p) exactes et leur approximations obtenues au cours des premières itérations à l'aide de l'algorithme 4	134
6.4	L'erreur entre la composante de la vitesse u_1 exacte et son approximation obtenue à la convergence de l'algorithme Robin-Robin	135
6.5	L'erreur entre la composante de la vitesse u_2 exacte et son approximation obtenue à la convergence de l'algorithme Robin-Robin	136

6.6	L'erreur entre la pression p exacte et son approximation obtenue à la convergence de l'algorithme Robin-Robin	136
6.7	Les composantes de la vitesse u_1 exacte et approchée par l'algorithme 4	137
6.8	Les composantes de la vitesse u_2 exacte et approchée par l'algorithme 4	137
6.9	Les pressions p exacte et approchée par l'algorithme 4	137
6.10	La composante de la vitesse u_1 sur les frontières artificielles Γ_i , pour $i = 1, 2, 3, 4$	138
6.11	La composante de la vitesse u_1 sur les frontières artificielles Γ_i pour $i = 5, 6, 7, 8$	139
6.12	La composante de la vitesse la u_2 sur les frontières artificielles Γ_i , pour $i = 1, 2, 3, 4$	139
6.13	La composante de la vitesse u_2 sur les frontières artificielles Γ_i pour $i = 5, 6, 7, 8$	140
6.14	La pression p sur les frontières artificielles Γ_i , pour $i = 1, 2, 3, 4$	140
6.15	La pression p sur les frontières artificielles Γ_i pour $i = 5, 6, 7, 8$	141
6.16	L'erreur entre les solutions exacte et approchée perturbée pour un niveau de bruit $\delta = 0.1\%$ associées à la composante de la vitesse u_1	142
6.17	L'erreur entre les solutions exacte et approchée perturbée pour un niveau de bruit $\delta = 0.1\%$ associées à la composante de la vitesse u_2	142
6.18	L'erreur entre les solutions exacte et approchée perturbée pour un niveau de bruit $\delta = 0.1\%$ associées à la pression p	143
6.19	L'erreur entre les solutions exacte et approchée perturbée pour un niveau de bruit $\delta = 10\%$ associées à la composante de la vitesse u_1	143
6.20	L'erreur entre les solutions exacte et approchée perturbée pour un niveau de bruit $\delta = 10\%$ associées à la composante de la vitesse u_2	144
6.21	L'erreur entre les solutions exacte et approchée perturbée pour un niveau de bruit $\delta = 10\%$ associées à la pression p	144
6.22	Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit d'ordre 0.1%, 1%, 5% et 10% pour la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_5 (a), sur Γ_6 (b) sur Γ_7 (c) et sur Γ_8 (d)	145
6.23	Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit d'ordre 0.1%, 1%, 5% et 10% pour la première composante de la vitesse u_2 sur Γ_i pour $i = 1, 2, 3, 4$	145
6.24	Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit d'ordre 1%, 5% et 10% pour la pression p sur Γ_1 (a) sur Γ_2 (b).	146

6.25	Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit d'ordre 1%, 5% et 10% pour la pression p sur Γ_3 (a) sur Γ_4 (b)	146
6.26	Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit d'ordre 1%, 5% et 10% pour la pression p sur Γ_5 (a), sur Γ_6 (b), sur Γ_7 (c) et sur Γ_8 (d)	147
6.27	L'erreur entre les solutions exacte et approchée sur l'arbre bronchique simulée pour la première composante de la vitesse u_1	148
6.28	L'erreur entre les solutions exacte et approchée sur l'arbre bronchique simulée pour la deuxième composante de la vitesse u_2	149
6.29	L'erreur entre les solutions exacte et approchée sur l'arbre bronchique simulée pour la pression p	149
6.30	Les solutions exacte et approchée pour la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_1 et Γ_2	150
6.31	Les solutions exacte et approchée pour la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_3 et Γ_4	150
6.32	la pression exacte et approchée sur $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$ et sur Γ_8	151
6.33	Les solutions exacte et approchée pour la deuxième composante de la vitesse u_2 sur Γ_1 et Γ_2	151
6.34	Les solutions exacte et approchée pour la deuxième composante de la vitesse u_2 sur Γ_3 et Γ_4	152
6.35	Les solutions exacte et approchée pour la deuxième composante de la vitesse u_2 sur $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$ et sur Γ_8	152
6.36	La pression exacte et approchée sur Γ_1 et Γ_2	153
6.37	La pression exacte et approchée sur Γ_3 et Γ_4	153
6.38	La pression exacte et approchée p sur $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$ et sur Γ_8	154
6.39	Les solutions exacte et approchée pour la première composante du flux ϕ_1 sur Γ_1 et Γ_2	154
6.40	Les solutions exacte et approchée pour la première composante du flux ϕ_1 sur Γ_3 et Γ_4	155
6.41	Les solutions exacte et approchée pour la deuxième composante du flux ϕ_2 sur Γ_5 et Γ_6	155
6.42	Les solutions exacte et approchée pour la deuxième composante du flux ϕ_2 sur Γ_7 et Γ_8	156
6.43	Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit de l'ordre $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$ pour la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_1 et Γ_2	157

6.44	Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit de l'ordre $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$ pour la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_3 et Γ_4	157
6.45	Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit d'ordre de l'ordre $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$ pour la première composante de la vitesse u_2 sur Γ_5 et Γ_6	158
6.46	Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit de l'ordre $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$ pour la première composante de la vitesse u_2 sur Γ_7 et Γ_8	158
6.47	Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit de l'ordre $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$ pour la pression p sur Γ_1 et Γ_2	159
6.48	Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit de l'ordre $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$ pour la pression p sur Γ_7 et Γ_8	159

Liste des tableaux

4.1	Comparaison entre les algorithmes du point fixe, "Neumann-Neumann" et "Robin-Robin" $h = \frac{1}{32}, \gamma_1 = 0.3, \gamma_2 = 0.1$	68
4.2	Les erreurs entre la solution exacte et approchée obtenue par la méthode du point fixe pour les différentes valeurs du pas de la discrétisation h	75
4.3	Les erreurs entre la solution exacte et approchée obtenue par la méthode Neumann-Neumann pour les différentes valeurs du pas de la discrétisation h	75
4.4	Les erreurs entre la solution exacte et approchée obtenue par la méthode de Robin-Robin pour les différentes valeurs du pas de discrétisation h	75
4.5	Les erreurs entre les solutions exacte et approchée pour les deux méthodes pour $h = 1/32$	90
4.6	Les erreurs entre les solutions exacte et approchée pour les deux méthodes pour $h = 1/32$	90
5.1	La variation des erreurs en fonction de h	123

Résumé

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de la résolution mathématique et numérique d'un problème inverse de Cauchy, provenant de la modélisation de l'écoulement d'air dans les poumons. Il s'agit de développer des méthodes permettant d'identifier la pression et la vitesse d'air dans les poumons, notamment sur les frontières artificielles de l'arbre bronchique à partir de mesures effectuées sur la partie proximale. Pour cela, nous avons proposé deux approches à caractère régularisant permettant de remédier au problème d'instabilité sévère que connaît ce genre de problèmes inverses. La première approche, basée sur la technique de décomposition de domaine, vise à reformuler le problème inverse en un problème de point fixe en introduisant un opérateur du type Steklov-Poincaré. Nous avons d'abord établi un résultat d'existence et d'unicité du point fixe à l'aide du degré topologique de Leray-Schauder pour pallier au problème de manque de coercivité de tel opérateur. Ensuite, nous avons proposé un algorithme de point fixe pour résoudre notre problème. Cette approche nous offre l'opportunité d'exploiter différents algorithmes issus des méthodes de décomposition de domaine à savoir "Neumann-Neumann" et "Robin-Robin". Enfin, en utilisant une approximation par la méthode des éléments finis de type P_{1Bulle}/P_1 , nous avons présenté plusieurs tests afin de valider cette approche numériquement en discutant la convergence et la stabilité numériques et comparant aussi les différents algorithmes mis en œuvre. Quant à la deuxième approche, elle vise dans un premier temps à réécrire notre problème sous forme d'un problème aux limites avec des conditions du type Robin complexes, dont la solution admet une partie imaginaire nulle. Nous avons proposé ainsi une formulation en optimisation de ce problème basée sur la méthode de régularisation de Tikhonov. Puis nous avons établi un résultat d'existence de la solution du problème d'optimisation obtenue, laquelle nous l'identifions en fonction de la solution d'un problème d'état adjoint. Nous avons aussi prouvé la convergence d'une sous-suite de solutions des problèmes régularisés vers la solution du problème de Cauchy, quand le niveau du bruit tend vers zéro. Nous avons montré également l'existence et la convergence des solutions des problèmes régularisés discrets obtenues via une approximation par éléments finis P_{1Bulle}/P_1 . Ensuite, nous avons proposé un algorithme de résolution directe et rapide permettant de produire des solutions numériques convergentes et stables. Finalement, dans le but de concrétiser les résultats déjà obtenus, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique d'un problème inverse de Cauchy modéli-

sant l'écoulement d'air dans un domaine 2d simulant l'arbre bronchique. Nous avons ainsi exploité les différentes approches proposées dans cette thèse pour présenter quelques résultats numériques d'approximation du champ de vitesse et de pression sur les frontières artificielles de l'arbre bronchique, tout en discutant leur stabilité.

Introduction générale

Au cours des cinquante dernières années, les problèmes inverses ont constitué un domaine de recherche très actif en analyse mathématiques et en approximation numérique, alimentés par des applications ayant un impact économique et social important. Par définition, un problème inverse est un phénomène dont on cherche à identifier les causes à partir d'un ensemble d'observations expérimentales de ses effets. Ainsi, ce type de problèmes est l'inverse de celui appelé direct, consistant à déduire les effets, étant donnée les causes. En effet, prédire l'état futur d'un système physique, en connaissant son état actuel, est l'exemple type de problèmes directs. Nous pouvons envisager divers problèmes inverses : par exemple, reconstituer l'état passé d'un système connaissant son état actuel (si le système est irréversible), ou déterminer des paramètres d'un système, connaissant son évolution "problème d'identification de paramètres", ou encore reconstruire des données sur une partie du bord d'un domaine à partir de mesures observées sur l'autre partie du bord "problèmes de complétion des données". Ces problèmes inverses sont largement étudiés en raison de l'intérêt qui s'attache à leurs domaines d'application [28, 58]. Nous citons à titre d'exemple : la sismologie, plus précisément la localisation de l'origine d'un tremblement de terre à partir de mesures effectuées par plusieurs stations sismiques réparties sur la surface du globe terrestre. Nous pouvons citer aussi l'amélioration des techniques d'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X, ...) ou les méthodes de prospection pétrolière, la conception des capteurs à l'échelle moléculaire, la prévision des régimes météorologiques ou l'identification des perméabilités hydrauliques en hydrogéologie, la détermination des constantes de réaction en chimie, l'identification de la forme d'un obstacle en acoustique sous-marine et le traitement d'image (restauration d'images floues).

Ce genre de problèmes est mal posé au sens de Hadamard [54]. La notion de problèmes bien posés a été introduite par Hadamard en 1923. Il s'agit d'un problème dont : la solution existe, elle est unique et elle dépend continûment des données (stabilité). Ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels les données et la solution évoluent. Ces trois conditions semblent naturelles pour les problèmes directs. Mais les problèmes inverses ne vérifient souvent pas l'une ou l'autre de ces conditions.

Le manque de stabilité est sans doute le plus problématique, en particulier, lorsqu'il s'agit d'une résolution numérique du problème. Il est ainsi difficile d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème puisqu'en général les données sont bruitées.

Les problèmes de complétion des données font partie des problèmes inverses qui ont été largement étudiés (voir par exemple [30, 82, 26]). Ce type de problèmes sont régi par des équations aux dérivées partielles où la donnée sur une partie accessible du bord est surdéterminée (satisfait assez de conditions), tandis qu'aucune donnée n'est disponible sur l'autre partie. Ainsi, le but est de reconstruire la donnée manquante sur cette partie. Ces problèmes dits encore problèmes inverses de Cauchy sont souvent rencontrés dans la modélisation des problèmes de transfert de la chaleur [60, 5], électroencéphalographie [46], électrocardiographie [50, 79], hémodynamique [42, 18], géophysique [71], génie civil [55] et tomographie par impédance électrique [80, 11, 10, 9, 57, 62]. Cette classe de problèmes inverses présente spécialement un caractère mal posé qui rend leur résolution mathématique assez délicate du fait que d'une part, les mesures expérimentales ne suffisent pas pour identifier fidèlement les données manquantes du modèle et d'autre part, il est souvent nécessaire d'ajouter au problème mathématique qui modélise le phénomène physique des informations a priori ou des contraintes sur la solution, afin de mieux l'identifier. De plus, la résolution de ces problèmes souffrent souvent d'une instabilité importante de la solution. En effet, la solution numérique reste très sensible à de faibles perturbations de ces mesures. Il est donc nécessaire de proposer des approches de résolution numérique afin d'identifier de façon stable les solutions de ces problèmes. Notamment dans le cas de données bruitées. Ce qui présente un défi qui attire l'attention des chercheurs, comme en témoignent les contributions immenses dans la littérature. Elles consistent à proposer différentes approches théoriques et numériques pour l'étude de cette classe de problèmes. Plus précisément, de nombreuses méthodes ont été proposées pour la résolution des problèmes inverses de Cauchy, régis par des équations elliptiques, utilisant des méthodes itératives [63, 59, 72, 45], la théorie de Steklov-Poincaré [17, 8], les méthodes de régularisation [36, 8], la méthode de régularisation complexe et couplée [33], la méthode des équations intégrales de surface [19], la méthode quasi-réversibilité [65, 21, 25], la technique des solutions fondamentales [70, 81] et la méthode des moindres carrés en contrôle optimal [6, 29, 61, 17].

Ce travail de thèse est consacré à l'étude d'un problème inverse de Cauchy régi par l'équation de Stokes, modélisant l'écoulement d'air dans l'arbre bronchique. Il s'agit de reconstruire la solution du problème de Stokes, le couple vitesse-pression sur une partie du bord (des frontières artificielles inaccessibles) d'un domaine simplifié simulant l'arbre bronchique, en se basant sur des mesures de vitesse et de pression sur l'autre partie du

bord (la partie proximale). Cette classe de problèmes est rencontrée dans la modélisation de l'écoulement d'air dans les poumons [13] ainsi qu'en hémodynamique [42, 18], où il est possible d'avoir à la fois des mesures de la vitesse et de la pression (ou leurs substituts) sur la partie accessible du bord (dans une section coronaire, proximale ou d'entrée), alors qu'il est plus difficile de récupérer des mesures de flux sortant dans la section distale. Ceci conduit en général aux problèmes de données dits défectueux tels qu'ils ont été examinés dans [56, 48, 49, 77, 47] en utilisant des formulations en optimisation. Par ailleurs, différents types de problèmes inverses régis par le système de Stokes ont été étudiés. Ainsi, différents résultats y sont obtenus et ont été mis en oeuvre. A titre d'exemple, un problème inverse gouverné par des équations de Stokes en dimension deux a été considéré dans [84]. Il s'agit de déterminer le champ de la vitesse, ou l'une de ces composantes, sur une partie du bord, en introduisant des mesures de pression intérieure supplémentaires. Ensuite, plusieurs approches ont été proposées pour la résolution de ce type de problèmes. En particulier, la méthode alternative [14], la technique des solutions fondamentales suggérée dans [31], et bien d'autres travaux (voir par exemple [52, 66, 20, 64]).

La première approche de résolution proposée dans ce travail de thèse consiste à développer des algorithmes à caractère régularisant, basés sur des méthodes de décomposition de domaine et une reformulation du problème inverse en un problème de point fixe. Cette idée a été initialement introduite pour résoudre un problème de Cauchy elliptique dans [73]. Nous l'avons développé pour résoudre un problème inverse régi par l'équation de Stokes modélisant l'écoulement d'air dans les poumons. En effet, la méthode de décomposition du domaine sans recouvrement vise à résoudre un problème aux limites sur un domaine partagé en deux sous-domaines avec des conditions aux limites d'interface. Ainsi en pliant le domaine au niveau de l'interface et en faisant coïncider les deux sous-domaines, le problème se ramène à la résolution d'un problème aux limites avec données abondantes sur une partie de la frontière et sans aucune donnée sur l'autre partie du bord. Ceci émet donc l'idée que les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement peuvent être utilisées pour la résolution du problème inverse de Cauchy. Nous reformulons ainsi le problème inverse sous forme d'un problème de point fixe en introduisant un opérateur de type Steklov-Poincaré. Cependant, le manque de la coercivité d'un tel opérateur complique l'étude de l'existence du point fixe. Pour surmonter cette difficulté, nous optons pour le degré topologique de Leray-Schauder [41] afin de montrer l'existence du point fixe. Ainsi, pour résoudre numériquement ce problème inverse, nous proposons un algorithme de point fixe, qui permet de reproduire l'algorithme alternatif introduit par Kozlov-Mazya-Fomin [63]. L'approche proposée peut être alors considérée comme une généralisation de cet algorithme et offre l'opportunité d'exploiter d'autres algorithmes issus

des méthodes classiques de la décomposition de domaine [75] pour résoudre ce problème inverse. Ensuite nous proposons une approximation du problème, en utilisant les différents algorithmes suggérés, par la méthode des éléments finis du type P_{1Bulle}/P_1 [7]. Nous présentons également une comparaison entre les différentes méthodes mises en œuvre en terme de précision aussi bien qu'en fonction du nombre d'itérations et du temps d'exécution. Les résultats numériques ainsi obtenus montrent bien l'efficacité de cette approche.

La seconde approche adoptée dans cette thèse vise à développer une méthode de régularisation du problème inverse de Cauchy afin de pallier au problème d'instabilité sévère que connaît ce genre de problèmes. Nous nous inspirons ainsi d'une méthode de régularisation proposée dans [34] pour la résolution d'un problème d'identification d'un terme source. Cette approche consiste à réécrire toutes les données sur le bord (connues et inconnues) sous forme de conditions aux limites de type Robin complexes. Le problème de Cauchy se réduit alors à identifier les données inconnues de telle sorte que la partie imaginaire de la solution soit égale à zéro sur tout le domaine. Nous proposons ainsi une formulation d'optimisation du problème basée sur la méthode de régularisation de Tikhonov. Nous établissons un résultat d'existence de la solution du problème d'optimisation régularisé. Nous identifions ensuite cette solution en fonction de la solution d'un problème d'état adjoint. Nous prouvons également la convergence d'une sous-suite de solutions optimales des problèmes régularisés vers la solution du problème de Cauchy quand le niveau de bruit tend vers zéro. Sur le plan numérique, nous utilisons la méthode des éléments finis de type P_{1Bulle}/P_1 pour la discrétisation du problème régularisé. Nous prouvons l'existence de la solution optimale du problème régularisé discret sans bruit et nous montrons la convergence d'une sous-suite de solutions optimales discrètes du problème régularisé vers la solution du problème continu quand le pas de la discrétisation tend vers zéro. Ensuite, en utilisant la méthode du gradient adjoint, nous proposons un algorithme pour déterminer la solution régularisée. Il s'agit d'une résolution directe d'un système linéaire ne nécessitant aucune itération et rendant la résolution rapide. Enfin, nous donnons quelques résultats numériques dans le but de confirmer la fiabilité de cette approche à bien produire des solutions numériques convergentes et stables.

Dans la suite, nous allons décrire brièvement le contenu de cette thèse. Dans le deuxième chapitre, nous rappelons quelques outils de base et nous présentons quelques résultats préliminaires essentiels pour ce travail. Nous donnons ainsi quelques résultats fondamentaux, sur les espaces de Sobolev, les espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles et des injections et des inégalités sur les espaces de Sobolev. Ensuite, nous rappelons quelques résultats d'existence pour les formulations mixtes, en l'occurrence le cas du problème de Stokes, aussi bien que l'approximation par la méthode des éléments finis de type

P_{1Bulle}/P_1 , qui est la plus appropriée pour résoudre ce type de problèmes. En effet, cet élément comporte un nombre de degrés de liberté relativement bas tout en donnant une bonne approximation de la solution. Nous présentons aussi quelques outils de résolution des problèmes non linéaires via la méthode de point fixe, notamment le degré topologique de Leray-Schauder.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation de l'appareil respiratoire, plus précisément l'arbre bronchique qui constitue notre domaine d'application, puisque nous nous intéressons à un problème inverse de Cauchy modélisant l'écoulement d'air dans les poumons. Nous donnons un aperçu sur la structure de l'arbre bronchique, et sur le mécanisme des poumons d'une manière générale. Nous rappelons aussi les tests spirométriques qui sont un outil important dans le diagnostic des pathologies pulmonaires. Nous présentons finalement notre problème sur un domaine simplifié simulant l'arbre bronchique.

Le quatrième chapitre est dédié à la résolution du problème inverse de Cauchy par une approche inspirée de la décomposition de domaine, tout en reformulant notre problème de telle sorte à résoudre une équation de type Steklov-Poincaré. Nous proposons ainsi une formulation en point fixe équivalente du problème. Nous prouvons l'existence du point fixe en utilisant le degré topologique de Leray-Schauder [67]. Ensuite, nous proposons un algorithme de point fixe pour la résolution de notre problème. Nous exploitons aussi d'autres algorithmes dérivées de la décomposition de domaine à savoir "Neumann-Neumann" et "Robin-Robin". Nous présentons ainsi une comparaison entre les différents algorithmes en termes de précision et du temps d'exécution. Enfin, nous présentons plusieurs tests numériques, tout en discutant la stabilité numérique de ces algorithmes et l'influence des conditions de compatibilité sur la solution obtenue par ces différents algorithmes.

Dans le cinquième chapitre, nous proposons une approche à caractère régularisant pour la résolution du problème inverse de Cauchy. Nous commençons par reformuler ce dernier en un problème aux limites avec des conditions de type Robin complexes, dont la solution admet une partie imaginaire nulle. Ensuite, nous proposons une formulation en un problème d'optimisation du problème aux limites obtenu. Puis, nous utilisons la régularisation de Tikhonov pour le problème d'optimisation tout en faisant intervenir des niveaux de bruit. Nous prouvons l'existence de la solution du problème d'optimisation ainsi obtenu. Nous l'identifions ensuite en fonction de la solution d'un problème d'état adjoint et nous montrons la convergence d'une suite de solutions optimales des problèmes régularisés vers la solution du problème de Cauchy quand le niveau de bruit tend vers zéro. Sur le plan numérique, nous étudions le problème régularisé discret sans bruit, nous proposons ainsi l'approximation de ce problème par la méthode des éléments finis P_{1Bulle}/P_1 . Nous montrons l'existence de la solution optimale discrète aussi bien que la

convergence d'une suite de solutions approchées vers la solution du problème continu quand le pas de la discrétisation tend vers zéro. Nous présentons ensuite un algorithme de résolution du problème régularisé via la méthode du gradient adjoint. Enfin, nous donnons quelques résultats numériques montrant l'efficacité de cette approche.

Le dernier chapitre sera consacré à la simulation numérique d'un problème inverse de Cauchy concret modélisant l'écoulement d'air dans un domaine 2d simulant l'arbre bronchique. Nous exploitons ainsi les différents algorithmes proposés dans les chapitres 4 et 5, dans le but de présenter quelques résultats numériques du champ de vitesse et de pression sur les frontières artificielles de l'arbre bronchique, tout en discutant leur stabilité.

Enfin, nous terminons cette thèse par une conclusion et quelques perspectives.

Rappels et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques outils de base et présentons quelques résultats préliminaires essentiels pour l'étude du problème inverse de Cauchy régi par l'équation de Stokes. Afin d'étudier la formulation variationnelle de ce problème, il est donc nécessaire de donner quelques résultats d'analyse vectorielle et de rappeler quelques inégalités et propriétés sur les espaces de Sobolev vectoriels, ainsi que la condition inf-sup garantissant l'existence et l'unicité de la solution du problème de Stokes. Nous nous intéressons également à l'approximation numérique du problème, pour cela nous rappelons la méthode des éléments finis du type P_{1Bulle}/P_1 . Ensuite, nous présentons quelques outils de résolution des problèmes non linéaires par la méthode de point fixe, notamment le degré topologique de Leray Schauder.

Dans toute la suite, nous notons par $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) un ouvert borné de frontière Γ lipschitzienne.

2.1 Opérateurs différentiels linéaires et formules vectorielles

Dans cette section, nous adoptons quelques notations et définitions que nous utiliserons par la suite.

Soit $v = (v_1, \dots, v_d)$ un champ vectoriel de fonctions définies de Ω à valeurs dans \mathbb{R}^d , on définit les opérateurs différentiels suivants :

— La divergence de v :

$$\operatorname{div}(v) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

— La matrice jacobienne de v :

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \nabla v_1 \\ \vdots \\ \nabla v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial x_d} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial v_d}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_d}{\partial x_d} \end{pmatrix}.$$

— Le laplacien de v :

$$\Delta v = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_d \end{pmatrix}.$$

— Le tenseur de déformation $D(v)$:

$$D(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^t).$$

où $(\nabla v)^t$ est le transposé de ∇v .

— Soit $w = (w_1, w_2, \dots, w_d)^t$ une matrice carrée d'ordre d , avec $w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{id})$, pour $i = 1, 2, \dots, d$, on définit la divergence de w comme suit :

$$\operatorname{div}(w) = (\operatorname{div}(w_1), \operatorname{div}(w_2), \dots, \operatorname{div}(w_d))^t.$$

— Soient U et V deux matrices carrées d'ordre d , on définit le produit scalaire de U par V comme suit :

$$U \cdot V = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d U_{ij} V_{ij}.$$

— On désigne par $U : V$ la trace de la matrice produit de U par V

Nous rappelons maintenant le théorème de la divergence (ou de Gauss-Ostrogradski) [51].

Théorème 2.1 *Si u est une fonction vectorielle de classe C^1 définie de Ω à valeurs dans \mathbb{R}^d , alors :*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) \, dx = \int_{\Gamma} u \cdot n \, ds. \quad (2.1)$$

où n le vecteur normal unitaire à Γ dirigé vers l'extérieur de Ω .

Il existe de nombreuses formes sous lesquelles le théorème de la divergence peut être présenté. Nous citons ici quelques unes.

Corollaire 2.1 *Si le champ de vecteurs u se présente sous la forme particulière :*

$$u = (0, 0, \dots, f, 0, \dots, 0),$$

où f est une fonction de classe C^1 qui apparaît à la $i^{\text{ème}}$ composante de u , alors le résultat précédent s'énonce comme suit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Gamma} f n_i \, ds, \quad (2.2)$$

où n_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de n .

Corollaire 2.2 Soient h une fonction de classe C^1 et u une fonction vectorielle de classe C^1 sur Ω , alors :

$$\int_{\Omega} h \operatorname{div}(u) dx + \int_{\Omega} \nabla h \cdot u dx = \int_{\Gamma} h u \cdot n ds. \quad (2.3)$$

La formule de la divergence s'étend au cas vectoriel qui est très utile pour l'étude du problème de Stokes, sous la forme

Corollaire 2.3 Soient σ est une matrice symétrique d'ordre d et w est un vecteur de d composantes, alors on a :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma) \cdot w dx + \int_{\Omega} \sigma : \nabla w dx = \int_{\Gamma} (\sigma n) \cdot w ds. \quad (2.4)$$

2.2 Espaces fonctionnels

Nous rappelons des définitions et des propriétés de quelques espaces fonctionnels. Nous présentons, en particulier, quelques définitions des espaces de Sobolev. Pour cela, nous commençons par définir les espaces de Lebesgue. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur par exemple, aux références [2, 38, 68].

Les espaces $L^p(\Omega)$

Soit $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables dont la $p^{\text{ième}}$ puissance est intégrable, au sens de Lebesgue. L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.5)$$

est un espace de Banach.

En particulier, pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est l'espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.6)$$

associée au produit scalaire :

$$(\varphi, \psi)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} \varphi(x)\psi(x)dx. \quad (2.7)$$

$L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables φ , dont la norme :

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{\substack{M \subset \Omega \\ \text{mes} M = 0}} \sup_{x \in \Omega \setminus M} |\varphi(x)| \equiv \text{ess sup}_{x \in \Omega} |\varphi(x)|, \quad (2.8)$$

est finie, où *ess sup* désigne le borne supérieure essentielle.

$L^\infty(\Omega)$ muni de la norme (2.8) est un espace de Banach.

Notons également par $L_0^2(\Omega)$ l'espace

$$L_0^2(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) / \int_{\Omega} \varphi \, dx = 0\}. \quad (2.9)$$

Soit $u = (u_1, \dots, u_d)$ une fonction vectorielle de $(L^2(\Omega))^d$, on définit la norme dans $(L^2(\Omega))^d$ par :

$$\|u\|_{(L^2(\Omega))^d} = \sqrt{\sum_{i=1}^d \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Soit maintenant $u = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ une fonction à valeur matricielle de $(L^2(\Omega))^{d \times d}$, on définit la norme de u dans $(L^2(\Omega))^{d \times d}$ par

$$\|u\|_{(L^2(\Omega))^{d \times d}} = \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \|u_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Espaces de Sobolev vectoriels

Soit m un entier naturel, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par

$$H^m(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) / D^\alpha \varphi \in L^2(\Omega), \text{ pour tout } |\alpha| \leq m\}, \quad (2.10)$$

où D^α est la dérivée au sens des distributions d'ordre $|\alpha|$ de φ .

L'espace de Hilbert $H^m(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{m, \Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{0, \Omega}^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

Pour $m=1$, l'espace de Sobolev $(H^1(\Omega))^d$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{(H^1(\Omega))^d} = \left(\sum_{i=1}^d \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $u = (u_1, \dots, u_d)$.

On définit également l'espace $(\mathcal{D}(\Omega))^d$ comme étant l'espace des fonctions vectorielles

de classe C^∞ à support compact dans Ω . Ainsi l'espace $(H_0^1(\Omega))^d$ est la fermeture de $(\mathcal{D}(\Omega))^d$ dans l'espace $(H^1(\Omega))^d$ muni de la norme :

$$\|u\|_{(H_0^1(\Omega))^d} = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^d}. \quad (2.12)$$

Pour Γ_0 une partie de Γ de mesure non nulle, on note par $(H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^d$ l'espace des fonctions de $(H^1(\Omega))^d$ dont la trace sur la partie du bord Γ_0 est nulle. Cet espace est aussi muni de la norme (2.12).

Enfin, on définit l'espace de Sobolev trace suivant :

$$\Lambda = (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^d = \{v|_{\Gamma_0} / v \in (H^1(\Omega))^d, \text{ tel que } v|_{\Gamma \setminus \Gamma_0} = 0\},$$

muni de la norme :

$$\|\eta\|_\Lambda = \inf_{\substack{v \in (H^1(\Omega))^d \\ v|_{\Gamma_0} = \eta}} \|v\|_{(H^1(\Omega))^d}.$$

$(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^d$ désigne l'espace duale de $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^d$.

2.3 Inégalités sur les espaces de Sobolev

L'inégalité de Poincaré [78] joue un rôle fondamental dans l'étude mathématique de l'équation de Poisson dans un ouvert borné Ω . Dans cette équation, la solution est une fonction scalaire. En mécanique des fluides, la vitesse est une fonction à valeur vectorielle, on aura ainsi affaire à d'autres inégalités.

Lemme 2.1 *Pour tout $u \in H^1(\Omega)^d$, on a*

$$\|D(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.13)$$

$$\|\operatorname{div}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq d \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.14)$$

Dans le cas des fonctions de $(H_0^1(\Omega))^d$, l'inégalité 2.13 est vérifiée dans l'autre sens à une constante multiplicative près. En effet, pour toute fonction $u \in (H_0^1(\Omega))^d$, on a

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} \|D(u)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.15)$$

Nous énonçons maintenant l'inégalité de Korn, qui généralise l'inégalité précédente à des fonctions de $(H^1(\Omega))^d$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la référence

[22].

Proposition 2.1 (*Inégalité de Korn*)

Il existe une constante $C_\Omega > 0$ (qui dépend de Ω) telle que, pour toute fonction $u \in (H^1(\Omega))^d$, on a

$$\|u\|_{(H^1(\Omega))^d}^2 \leq C_\Omega (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D(u)\|_{L^2(\Omega)}^2) \quad (2.16)$$

Remarque 2.1 Les inégalités (2.15) et (2.16) sont loin d'être triviales. En effet, le terme gauche ne fait apparaître que les dérivées partielles de u , tandis que le terme droit fait intervenir des combinaisons linéaires de ses dérivées partielles.

Nous donnons maintenant deux résultats très utiles pour l'étude de l'existence et l'unicité du problème de Stokes que nous allons énoncer par la suite. Le premier est une conséquence de l'inégalité de Korn, donné dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.4 Si Ω est un ouvert connexe et $\Gamma_0 \subset \Gamma$ une partie de la frontière de mesure non nulle, il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^d$, on a

$$\|u\|_{(H^1(\Omega))^d} \leq C_\Omega \|D(u)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.17)$$

Quant au deuxième, il permet d'écrire une fonction scalaire de carré intégrable comme étant la divergence d'un champ de vecteurs.

Lemme 2.2 . Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in L^2(\Omega)$, il existe $v \in H^1(\Omega)^d$ tel que

$$\operatorname{div} v = p \quad \text{et} \quad \|v\|_{(H^1(\Omega))^d} \leq C \|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, si p vérifie $\int_\Omega p \, dx = 0$ alors on peut prendre $v \in H_0^1(\Omega)^d$.

2.4 Problème de Stokes et formulation mixte

Nous rappelons que le problème de Stokes vise à déterminer le couple (vitesse, pression) noté (u, p) solution d'une équation de continuité du mouvement, une équation d'incompressibilité et satisfait des conditions aux limites. Dans ce cas, nous avons affaire à une formulation mixte. Le terme "mixte" fait référence à la formulation vitesse/pression. Ainsi, étant données un ouvert borné Ω de frontière lipschitzienne $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ tel que $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ et deux fonctions $f \in (L^2(\Omega))^d$ et $g \in (L^2(\Gamma_1))^d$. On cherche à identifier (u, p) solution du problème

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u)) + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma(u)n = g & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (2.18)$$

où $D(u)$ est le tenseur de déformation défini par :

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t),$$

$\sigma(u)$ est le tenseur de Cauchy défini par :

$$\sigma(u) = 2\mu D(u) - pI, \quad I \text{ est la matrice identité,}$$

Afin d'écrire la formulation variationnelle mixte de (2.18). On suppose que $u \in (H^2(\Omega))^d$ est solution de (2.18), en multipliant la première équation de (2.18) par un champ vectoriel test $v \in (H^1(\Omega))^d$ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$-2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div}(D(u)) \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx.$$

En utilisant les corollaires 2.2 et 2.3, on aura

$$2\mu \int_{\Omega} D(u) : \nabla v \, dx - 2\mu \int_{\partial\Omega} D(u) n \cdot v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) \, dx + \int_{\partial\Omega} p n \cdot v \, ds = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx.$$

Ce qui nous permet d'obtenir l'équation variationnelle suivante

$$2\mu \int_{\Omega} D(u) : D(v) \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} (\sigma(u) n) \cdot v \, ds.$$

Si on prend la trace de v nulle sur Γ_0 , on obtient :

$$2\mu \int_{\Omega} D(u) : D(v) \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, ds. \quad (2.19)$$

Ensuite, en multipliant l'équation d'incompressibilité $\operatorname{div}(u) = 0$ par $q \in L^2(\Omega)$ et en intégrant sur Ω , on aura la forme intégrale suivante

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div}(u) \, dx = 0.$$

Posons maintenant

$$V := (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^d \quad \text{et} \quad Q := L^2(\Omega).$$

définissons les formes bilinéaires $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$a(u, v) := 2\mu \int_{\Omega} D(u) : D(v) \, dx,$$

$$b(v, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div}(v) \, dx,$$

et la forme linéaire $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$F(v) := \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, ds.$$

Ainsi, $(u, p) \in V \times Q$ est solution du problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V, p \in Q \text{ tel que} \\ a(u, v) + b(v, p) = F(v) & \forall v \in V, \\ b(u, q) = 0 & \forall q \in Q. \end{cases} \quad (2.20)$$

Remarque 2.2 • Si f et g sont assez régulières et Ω un ouvert de bord régulier, on peut montrer que la solution (u, p) du problème (2.20) est telle que $u \in (H^2(\Omega))^d$ [39]. On aura ainsi l'équivalence entre les problèmes (2.20) et (2.18). Dans le cas échéant, (u, p) est une solution au sens faible de (2.18).

- Le problème (2.20) est appelé une formulation mixte faible de l'équation de Stokes, puisque $-\mu\Delta u + \nabla p \in L^2(\Omega)^d$ n'entraîne pas que $u \in (H^2(\Omega))^d$.
- Il est important de chercher la pression p à moyenne nulle ($p \in L_0^2(\Omega)$) afin d'assurer son unicité. Puisque, si p vérifie la première équation de (2.18) alors il en est de même pour $p + cte$.

2.5 Existence et unicité de la solution d'une formulation mixte

Nous rappelons tout d'abord le résultat abstrait d'existence et d'unicité d'une formulation mixte. Cette formulation se présente d'une manière générale comme suit :

Soient X et Y deux espaces de Hilbert et

$$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad b : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

deux formes bilinéaires. On note respectivement par $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ la norme sur X (respectivement sur Y). Les formes a et b sont supposées continues. Etant donné $f \in X'$ (où X' est le dual de X), trouver $(u, p) \in X \times Y$ solution de

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle_{X', X} & \forall v \in X \\ b(u, q) = 0 & \forall q \in Y, \end{cases} \quad (2.21)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$ est un crochet de dualité.

Le résultat d'existence et d'unicité de (2.21) se base sur la condition "inf-sup" qui se traduit par

$$\inf_{q \in Y, q \neq 0} \sup_{v \in X, v \neq 0} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_Y} \geq \beta. \quad (2.22)$$

où β est une constante strictement positive. Ainsi, nous avons le résultat suivant

Lemme 2.3 *Si les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

1. *La forme a est coercive sur X :*

$$\text{Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X. \quad (2.23)$$

2. *La forme b satisfait la condition (2.22).*

Alors, le problème (2.21) admet une unique solution $(u, p) \in X \times Y$.

En utilisant ce lemme, nous prouvons le théorème suivant

Théorème 2.2 *Le problème (2.20) admet une solution unique.*

Démonstration

Dans le but, de vérifier les hypothèses du théorème 2.3, notons d'abord $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} = \|\cdot\|_0$. Nous commençons par montrer que la forme bilinéaire a est continue sur $V \times V$. En effet, pour tout $u, v \in V$, on a

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= 2\mu \left| \int_{\Omega} D(u) : D(v) \, dx \right| \\ &\leq 2\mu \left| \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d D_{ik}(u) D_{ki}(v) \, dx \right|, \\ &\leq 2\mu \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} \frac{1}{4} \left| \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \right| \, dx, \\ &\leq \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right| \left| \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right| + \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right| + \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right| + \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right| \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que $\|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\|_0 \leq \|\nabla u_i\|_0$, pour tous i, j on obtient

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \|\nabla u_i\|_0 \|\nabla v_k\|_0 + \|\nabla u_k\|_0 \|\nabla v_i\|_0 + \|\nabla u_i\|_0 \|\nabla v_i\|_0 + \|\nabla u_k\|_0 \|\nabla v_k\|_0, \\ &\leq \mu d \sum_{i=1}^d \|\nabla u_i\|_0 \|\nabla v_i\|_0 + \mu \sum_{i=1}^d \|\nabla u_i\|_0 \sum_{k=1}^d \|\nabla v_k\|_0, \\ &\leq \mu d \sum_{i=1}^d \|u_i\|_1 \|v_i\|_1 + \mu \sum_{i=1}^d \|u_i\|_1 \sum_{k=1}^d \|v_k\|_1. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on aura

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \mu d \left(\sum_{i=1}^d \|u_i\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^d \|v_i\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \mu d \left(\sum_{k=1}^d \|u_k\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^d \|v_k\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\mu d \|u\|_{(H^1(\Omega))^d} \|v\|_{(H^1(\Omega))^d}, \end{aligned}$$

D'où la continuité de a .

Ensuite, montrons que la forme bilinéaire a est coercive sur V . Soit $u \in V$, on a

$$a(u, u) = 2\mu \int_{\Omega} D(u) : D(u) \, dx = 2\mu \int_{\Omega} D(u) \cdot D(u) \, dx.$$

D'après le corollaire 2.4, il existe une constante $C_{\Omega} > 0$ telle que

$$\int_{\Omega} D(u) \cdot D(u) \, dx = \|D(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{C_{\Omega}^2} \|u\|_{(H^1(\Omega))^d}^2.$$

Donc

$$a(u, u) \geq \frac{2\mu}{C_{\Omega}^2} \|u\|_{(H^1(\Omega))^d}^2.$$

D'où la coercivité de a . Montrons maintenant que la forme bilinéaire b est continue sur $V \times Q$. Pour cela prenons $u \in V$ et $q \in Q$, d'après l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned} |b(u, q)| &= \left| \int_{\Omega} q \operatorname{div}(u) \, dx \right|, \\ &\leq \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_k} q \, dx \right|, \\ &\leq \sum_{k=1}^d \left\| \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\|_{L^2(\Omega)} \|q\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

2.5. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION D'UNE FORMULATION MIXTE 31

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} |b(u, q)| &\leq \left(\sum_{k=1}^d \|u_k\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{d} \|q\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\leq \sqrt{d} \|u\|_V \|q\|_Q. \end{aligned}$$

D'où b est continue.

Pour conclure, il suffit d'établir que la forme bilinéaire b satisfait la condition "inf-sup". Soit $q \in L^2(\Omega)$ tel que $q \neq 0$, on note par \tilde{q} son prolongement par zéro dans un domaine Lipschitz Ω' , tel que $\Omega \subset \Omega'$ et de telle sorte que $\Gamma_0 \subset \partial\Omega'$.

On définit

$$\tilde{q}_{\Omega'} := \frac{1}{\text{mes}(\Omega')} \int_{\Omega'} \tilde{q} \, dx,$$

comme

$$\tilde{q} - \tilde{q}_{\Omega'} \in L_0^2(\Omega') = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega') \mid \int_{\Omega'} \varphi \, dx = 0 \right\},$$

d'après le lemme 2.2, il existe $v' \in H_0^1(\Omega')^d$ et une constante $C > 0$ tels que

$$\text{div } v' = \tilde{q}_{\Omega'} - \tilde{q} \quad \text{et} \quad \|v'\|_{H^1(\Omega')^d} \leq C \|\tilde{q} - \tilde{q}_{\Omega'}\|_{0, \Omega'}.$$

Comme

$$- \int_{\Omega'} (\tilde{q} - \tilde{q}_{\Omega'}) \text{div}(v') \, dx = \|\tilde{q} - \tilde{q}_{\Omega'}\|_{0, \Omega'}^2,$$

alors

$$- \int_{\Omega'} (\tilde{q} - \tilde{q}_{\Omega'}) \text{div}(v') \, dx \geq \beta_0 \|v'\|_{1, \Omega'} \|\tilde{q} - \tilde{q}_{\Omega'}\|_{0, \Omega'}.$$

où $\beta_0 = \frac{1}{C}$.

Posons $v := v'|_{\Omega} \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^d$, or comme $v'|_{\partial\Omega'} = 0$ alors

$$\int_{\Omega'} \text{div}(v') \, dx = 0.$$

Ce qui permet d'avoir

$$\begin{aligned} b(v, q) &= - \int_{\Omega} \text{div}(v) q \, dx \\ &= - \int_{\Omega'} \text{div}(v') \tilde{q} \, dx \\ &= - \int_{\Omega'} \text{div}(v') (\tilde{q} - \tilde{q}_{\Omega'}) \, dx \\ &\geq \beta_0 \|v'\|_{H^1(\Omega')^d} \|\tilde{q} - \tilde{q}_{\Omega'}\|_{0, \Omega'} \\ &\geq \beta_0 \|v\|_{H^1(\Omega)^d} \|\tilde{q} - \tilde{q}_{\Omega'}\|_{0, \Omega}. \end{aligned}$$

De plus

$$\|q\|_{0,\Omega} \leq \|q - \tilde{q}_{\Omega'}\|_{0,\Omega} + \|\tilde{q}_{\Omega'}\|_{0,\Omega},$$

puisque

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}_{\Omega'}\|_{0,\Omega}^2 &= \frac{\text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(\Omega')^2} \left(\int_{\Omega'} \tilde{q} \, dx \right)^2 \\ &= \frac{\text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(\Omega')^2} \left(\int_{\Omega} q \, dx \right)^2 \\ &\leq \frac{\text{mes}(\Omega)^2}{\text{mes}(\Omega')^2} \|q\|_{0,\Omega}^2, \end{aligned}$$

alors

$$\left(1 - \frac{\text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(\Omega')} \right) \|q\|_{0,\Omega} \leq \|q - \tilde{q}_{\Omega'}\|_{0,\Omega},$$

en prenant

$$\lambda = \left(1 - \frac{\text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(\Omega')} \right) \beta_0,$$

on aura ainsi montré que

$$b(v, q) \geq \lambda \|v\|_{H^1(\Omega)^d} \|q\|_{0,\Omega} \quad \forall v \in V \quad \forall q \in Q.$$

Ce qui permet de conclure que le problème (2.20) admet une solution unique $(u, p) \in V \times Q$.

□

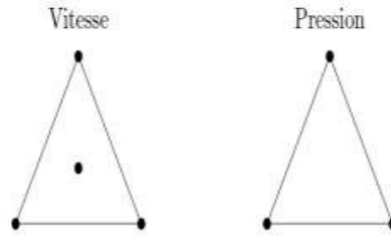
2.6 Approximation de la formulation mixte

La discrétisation par éléments finis du problème (2.18) consiste à approcher les espaces V et Q respectivement par les sous espaces V_h et Q_h de dimension finie. Puis à considérer le problème discret

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h, p_h \in Q_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = F(v_h) & \forall v_h \in V_h, \\ b(u_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (2.24)$$

D'après le théorème 2.3, le problème (2.24) est bien posé si et seulement si la condition "inf-sup" est satisfaite dans le cas discret, c'est-à-dire, il existe une constante $\beta_h > 0$ telle que

$$\inf_{q_h \in Q_h, q_h \neq 0} \sup_{v_h \in V_h, v_h \neq 0} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v\|_{V_h} \|q\|_{Q_h}} \geq \beta_h. \quad (2.25)$$

FIGURE 2.1 – Élément fini du type P_{1Bulle}/P_1

Les approximations des champs de vitesse et de pression (u_h, p_h) vérifiant cette condition sont dites compatibles. Ainsi, le choix des éléments finis est contraint au fait que la condition "inf-sup" (2.25) doit être satisfaite sur les espaces approchés V_h et Q_h . Il existe plusieurs choix possibles, nous optons ici pour l'élément P_{1Bulle}/P_1 compatible, illustré dans la figure 2.1, dit élément mini (voir [7]). La discrétisation de la pression est linéaire tandis que la vitesse est linéaire mais enrichie par un nœud au centre de l'élément. Chaque élément fini contient donc 4 degrés de liberté en vitesse u_h par composante et 3 en pression p_h dans le cas bidimensionnel. Ce choix est justifié par son faible nombre de degrés de liberté par rapport à l'élément de Taylor-Hood P_2/P_1 , qui est encore un choix possible. On considère alors $\{\mathcal{T}_h\}_h$ une famille de triangulations régulières de $\bar{\Omega}$ telle que $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$.

On désigne par $\lambda_i^{(T)}$, $1 \leq i \leq 3$ les coordonnées barycentriques associés aux sommets d'un triangle T . On définit la fonction "bulle" notée $b^{(T)}$ associée au triangle T par

$$b^{(T)} = \prod_{i=1}^3 \lambda_i^{(T)}.$$

La fonction $b^{(T)}$ est une fonction polynomiale de degré 3 qui s'annule sur les arrêts de T . On définit l'espace associé à la fonction bulle par

$$\mathbb{B}_h = \left\{ v_h \in C(\bar{\Omega}); \forall T \in \mathcal{T}_h \ v_{h|T} = b^{(T)} \right\}.$$

On définit ensuite les espaces fonctionnels discrets

$$V_i^h = \left\{ v_h \in C(\bar{\Omega}); v_{h|T} \in \mathbb{P}_1 \ \forall T \in \mathcal{T}_h \right\} \oplus \mathbb{B}_h \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ pour } d = 2,$$

où \oplus désigne la somme directe.

$$Q^h = \left\{ q_h \in C(\bar{\Omega}); q_{h|T} \in \mathbb{P}_1 \ \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \int_{\Omega} q_h dx = 0 \right\}.$$

On note alors

$$V_h = V_1^h \times V_2^h.$$

Notons que la condition de compatibilité (2.25) est satisfaite pour ces espaces et que le problème discret (2.24) admet bien une solution unique. Dans la suite, nous allons introduire la notion de degré topologique qui est un outil puissant de recherche de point fixe.

2.7 Théorème de point fixe et degrés topologiques

Soit E un espace de Banach et $F : E \rightarrow E$ une application. On considère le problème de recherche de point fixe : trouver x tel que

$$F(x) = x$$

Nous avons alors le résultat de point fixe Schauder 1930.

Théorème 2.3 *Soit W un convexe fermé non vide de E et $F : W \rightarrow W$ une application continue telle que $F(W)$ est relativement compacte dans E . Alors F admet un point fixe : il existe $x \in W$ tel que $F(x) = x$.*

Degré topologique de Brouwer

Soit $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en x_0 , on note par $J_f(x_0) = \det f'(x_0)$ le jacobien de f en x_0 .

Définition 2.1 *Soit $f \in C^1(\bar{\Omega})$. On désigne par*

$$S := \{x \in \Omega; J_f(x) = 0\},$$

l'ensemble des points singuliers de f et on suppose que $p \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$. On définit alors le degré topologique de Brouwer par :

$$\deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J_f(x),$$

où $\operatorname{sgn} J_f(x)$ est le signe de $J_f(x)$; avec $\deg(f, \Omega, p) = 0$ si $f^{-1}(p) = \emptyset$.

Nous avons alors le résultat cité dans la référence [74], qui rappelle quelques propriétés du degré topologique de Brouwer.

Théorème 2.4 Soit $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application continue. Si $p \notin f(\partial\Omega)$, alors il existe un entier $\deg(f, \Omega, p)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. Normalité : $\deg(I, \Omega, p) = 1$ si et seulement si $p \in \Omega$, où I est l'application identité ;
2. Solvabilité : Si $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$, alors $f(x) = p$ admet au moins une solution dans Ω ;
3. Invariance par homotopie : $\forall t \in [0, 1]$ $f_t : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est continue et $p \notin \bigcup_{t \in [0, 1]} f_t(\partial\Omega)$, alors $\deg(f_t, \Omega, p)$ ne dépend pas de $t \in [0, 1]$;
4. Additivité : Supposons que Ω_1 et Ω_2 sont deux sous-ensembles disjoints et ouverts de Ω et $p \notin f(\bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2)$. Alors

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p);$$

5. $\deg(f, \Omega, p)$ est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$.

En 1934, Leray et Schauder (cf. [67]) ont généralisé le degré topologique de Brouwer à des espaces de Banach de dimension infinie. Ainsi, ils ont défini ce qu'on appelle le degré topologique de Leray-Schauder. Ce résultat est devenu un outil très efficace pour montrer des résultats d'existence pour différentes équations aux dérivées partielles non linéaires.

Degré topologique de Leray-Schauder

Pour introduire cette notion du degré de Leray-Schauder, nous avons besoin de quelques résultats et définitions [74].

Lemme 2.4 Soient E un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert borné et $F : \bar{\Omega} \mapsto E$ une application continue compacte. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un espace de dimension finie M_ϵ et une application continue $F_\epsilon : \bar{\Omega} \mapsto M_\epsilon$ telle que

$$\|F_\epsilon(x) - F(x)\| < \epsilon \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

Définition 2.2 Soient E un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert borné et $F : \bar{\Omega} \mapsto E$ une application continue compacte. Supposons maintenant que $0 \notin (I - F)(\partial\Omega)$. Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, le degré de Brouwer $\deg(I - F_\epsilon, \Omega \cap M_\epsilon, 0)$ est bien défini, où F_ϵ et M_ϵ sont définis comme dans le lemme 2.4. Par conséquent, nous définissons le degré de Leray-Schauder par

$$\deg(I - F, \Omega, 0) = \deg(I - F_\epsilon, \Omega \cap M_\epsilon, 0).$$

Théorème 2.5 *Le degré de Leray-Schauder possède les propriétés suivantes :*

1. Normalité : $\deg(I, \Omega, 0) = 1$ si et seulement si $0 \in \Omega$;
2. Solvabilité : Si $\deg(I - F, \Omega, 0) \neq 0$ alors $F(x) = x$ admet au moins une solution dans Ω ;
3. Invariance par homotopie : Soit $F_t : [0, 1] \times \bar{\Omega} \mapsto E$ continu compact et $F_t(x) \neq x$ pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$. Alors $\deg(I - F_t, \Omega, 0)$ ne dépend pas de $t \in [0, 1]$;
4. Additivité : Soit Ω_1 et Ω_2 deux sous-ensembles disjoints ouverts de Ω et

$$0 \notin (I - F)(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)).$$

Alors

$$\deg(I - F, \Omega, 0) = \deg(I - F, \Omega_1, 0) + \deg(I - F, \Omega_2, 0).$$

Modélisation de l'appareil respiratoire

La modélisation mathématique et numérique des phénomènes rencontrés en pratique médicale est de plus en plus sollicitée par les chercheurs intervenant dans le secteur de la santé. En effet, la modélisation peut aider à une meilleure interprétation de ces phénomènes, et permet par conséquent de prendre les mesures adéquates en milieu hospitalier. Plus précisément, les modèles proposés peuvent aider à développer de nouvelles méthodes de diagnostic des maladies et de nouvelles techniques thérapeutiques. En particulier, de tels modèles peuvent aider à une meilleure compréhension du système pulmonaire ainsi que de ses diverses pathologies. Par exemple, les tests spirométriques sont d'une importance remarquable dans le diagnostic et le suivi d'un certain nombre de maladies pulmonaires, notamment celles impliquant des anomalies liées au fonctionnement mécanique des poumons. Ces tests consistent à décrire l'écoulement d'air dans les poumons.

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter certains mécanismes relatifs au fonctionnement des poumons via une lecture structurale de l'appareil respiratoire, ce qui va constituer le cadre physique de notre problématique. Ensuite, nous décrivons brièvement le modèle d'écoulement d'air dans les poumons. Nous terminons ce chapitre par présenter le problème inverse à étudier dans cette thèse.

3.1 Importance du mécanisme des poumons

La respiration est essentiellement un processus mécanique dans lequel les muscles du thorax et de l'abdomen produisent les pressions nécessaires pour agrandir le poumon de manière à ce que l'air y soit aspiré. Ces pressions doivent être suffisantes pour s'accorder mutuellement à la tendance au recul des tissus pulmonaires et thoraciques, comme si vous gonfliez un ballon. La pression est également nécessaire pour conduire l'air le long des voies respiratoires pulmonaires, un système de conduits de branchement qui commence à partir de la bouche et se termine profondément dans les poumons au point où l'air et le sang sont suffisamment proches pour permettre l'échange d'oxygène et de dioxyde de carbone [16].

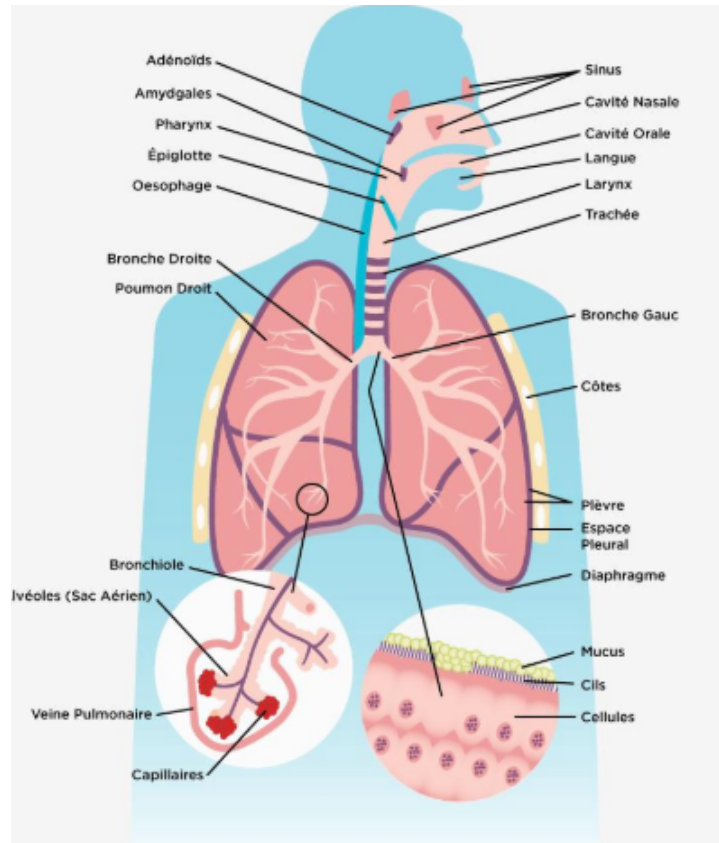


FIGURE 3.1 – Appareil respiratoire [1]

Les propriétés mécaniques des poumons déterminent ainsi la relation entre les pressions musculaires, les écoulements dans les voies respiratoires et les volumes pulmonaires. La mécanique des poumons est concernée ainsi par l'étude de ces propriétés, qui nécessitent tout d'abord une bonne connaissance de l'architecture de l'appareil respiratoire.

Architecture de l'appareil respiratoire

Le système respiratoire regroupe les organes qui permettent d'inspirer et d'expirer l'air dans le but de fournir d'oxygène (O_2) à l'organisme et d'éliminer le dioxyde de carbone (CO_2). Ce système respiratoire est composé des voies respiratoires, appelées également voies aériennes, qui sont divisées en voies aériennes supérieures et inférieures et comprennent les éléments suivants : (voir Figure 3.1)

- Voies aériennes supérieures : cavités nasales, pharynx et larynx.
- Voies aériennes inférieures : trachée, arbre bronchique qui est en fait un réseau des bronches (bronches souches, bronches lobaires, bronches segmentaires,..., bronchioles) et se termine par des alvéoles (voir Figure 3.2).

Fonctionnellement, on distingue deux parties au sein du système respiratoire :

- La zone de conduction d'air, portée par les cavités nasales, le pharynx, le larynx, la

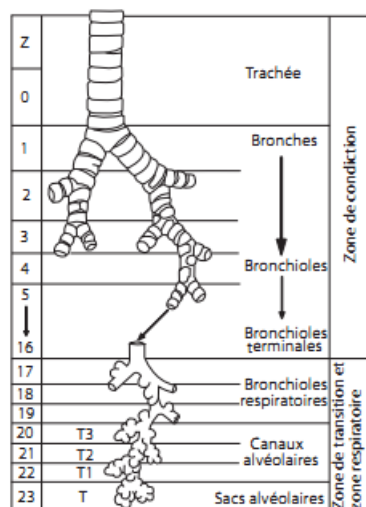


FIGURE 3.2 – Ramifications des voies aériennes [24]

trachée et une grande partie de l'arbre bronchique. Cette zone de conduction est à la fois extra et intra-pulmonaire.

- La zone des échanges gazeux : retrouvée au sein du poumon, à l'extrémité terminale de l'arbre bronchique, au niveau de zones spécialisées, les alvéoles pulmonaires.

Après cette lecture structurale de l'appareil respiratoire, nous passons aux tests des fonctions pulmonaires permettant d'examiner les performances du système respiratoire.

Tests des fonctions pulmonaires

La structure aussi bien que les propriétés fonctionnelles du poumon nous permettent de bien évaluer les performances du système respiratoire. Un moyen de détecter la présence d'une restriction consiste à effectuer des tests de la fonction pulmonaire. Ces tests sont d'une importance capitale dans le diagnostic de certaines pathologies pulmonaires reflétant toute anomalie du comportement mécanique des poumons [16]. Ils consistent à mesurer le débit et le volume d'air mobilisés au cours d'un cycle respiratoire, où l'on demande à une personne, après une inspiration lente et maximale, une expiration forcée et complète suivie d'une inspiration jusqu'à la capacité pulmonaire totale (CPT). Une courbe volume-débit, correspondant à la courbe paramétrée $t \rightarrow (\text{volume}(t), \text{débit}(t))$ est ainsi obtenue. Nous signalons qu'une courbe de profil normal est illustrée dans la figure 3.3. Ainsi, un diagnostic relativement objectif nécessite une étude quantitative : la courbe volume-débit est comparée à des profils «normaux» provenant d'un large nombre de patients présentant les mêmes caractéristiques (age, sexe, taille,...). A part l'analyse quantitative, le médecin réalise également une analyse qualitative de l'allure de la courbe. En effet, de nombreuses

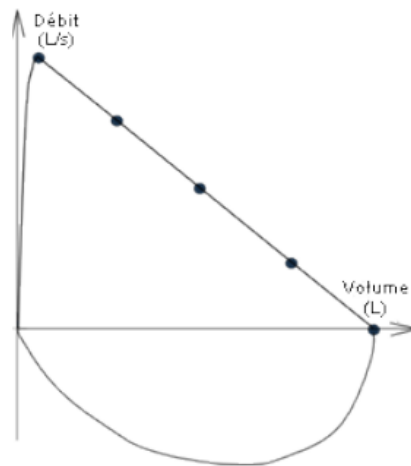


FIGURE 3.3 – Courbe volume-débit normale [44]

maladies pulmonaires impliquant des anomalies mécaniques des poumons sont classifiées en deux catégories appelées obstructives et restrictives avec des courbes volume-débit présentant des profils différents (voir Figure 3.4).

Les tests des fonctions pulmonaires sont basés sur le processus de respiration. Nous nous intéressons par la suite à la modélisation de ce processus. Nous allons ainsi identifier l'écoulement d'air dans les poumons, plus précisément dans l'arbre bronchique.

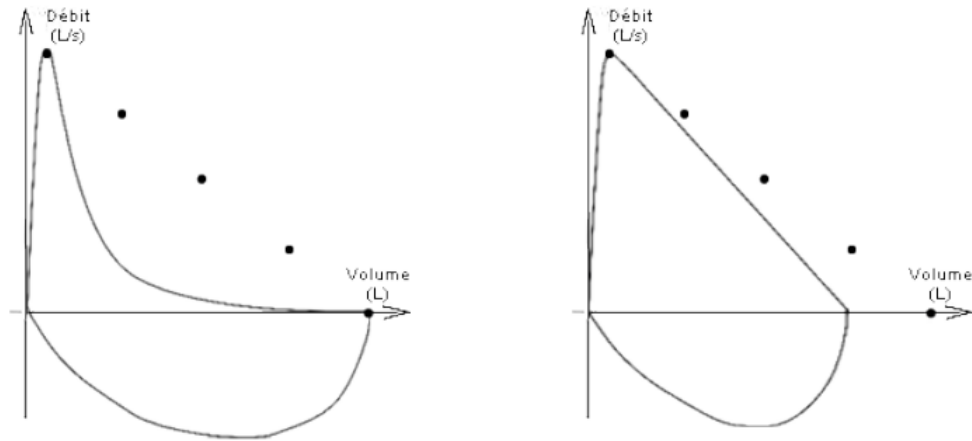
3.2 Modèle d'écoulement d'air dans les poumons

Lors du processus respiratoire, l'air s'écoule dans les voies aériennes de l'appareil respiratoire jusqu'à atteindre les alvéoles pulmonaires. A ce niveau, le modèle le plus connu et utilisé depuis longtemps est dit le modèle à un compartiment [16].

Modèle linéaire à un compartiment

Il s'agit d'un modèle mathématique plus simple appelé aussi le modèle mono-compartiment présenté dans (la Figure 3.5) modélisant le processus de la respiration. En effet, le ballon représente les tissus élastiques du poumon, tandis que le tube représente l'arbre bronchique qui relie le nez et la bouche à la région alvéolaire du poumon. Lors d'un cycle respiratoire, le volume du compartiment V est lié à la pression alvéolaire P_{alv} et la pression P exercée par le diaphragme via l'élastance des tissus (notée E). Cela s'exprime par une équation traduisant l'équilibre élastique du compartiment :

$$P_{alv} - P = EV \quad (3.1)$$



(a) Courbe volume-débit correspondant à une pathologie obstructive.

(b) Courbe volume-débit correspondant à une pathologie restrictive.

FIGURE 3.4 – Courbes volume-débit. Les images proviennent de [44]

Par ailleurs, le flux d'air Φ est proportionnel à la différence entre la pression alvéolaire P_{alv} et la pression atmosphérique au niveau de la bouche P_0 , où la constante de proportionnalité n'est rien que la résistance R des tissus pulmonaires à l'écoulement. Elle dépend des dimensions du tube (le diamètre D et la longueur L) et de la viscosité d'air, en particulier, plus le tube est long et fin, plus il est difficile de faire passer l'air dedans (voir Figure 3.6). On peut exprimer cela par une équation, appelée Loi de Poiseuille du nom du médecin français qui l'a établie en 1844, qui se traduit par :

$$P_0 - P_{alv} = R\Phi = R\frac{d}{dt}V \quad (3.2)$$

Notons que la loi (3.2) s'écrit encore explicitement :

$$P_0 - P_{alv} = \frac{8\mu L}{\pi D^4}\Phi \quad (3.3)$$

où μ est la viscosité d'air. On obtient ainsi la loi mécanique du modèle linéaire à un compartiment tout en combinant les équations (3.1) et (3.2). On écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta P &= P_0 - P \\ &= EV + R\frac{d}{dt}V \end{aligned} \quad (3.4)$$

Notons que chacun des paramètres du modèle, l'élasticité du tissu pulmonaire, la résistance des voies aériennes, aussi bien que le flux d'air ont une vraie signification physique.

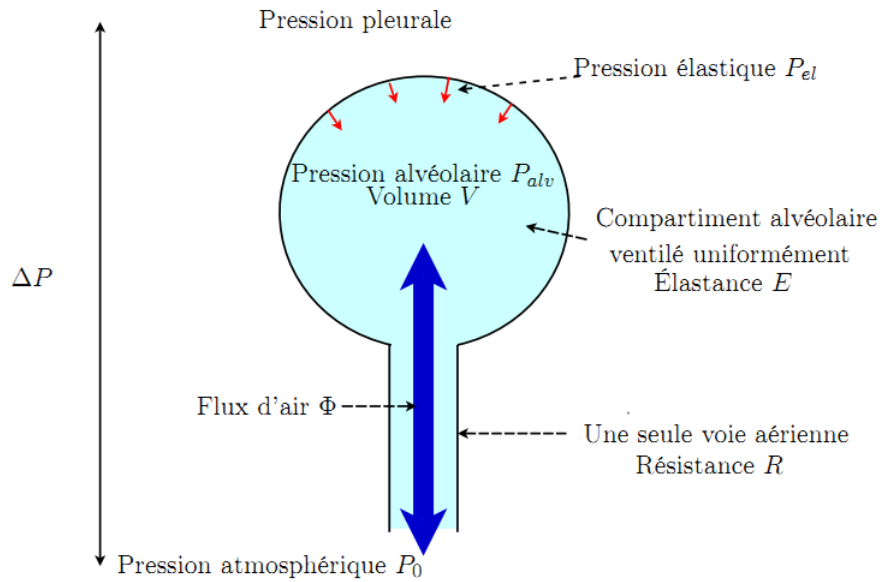


FIGURE 3.5 – Le modèle à un compartiment [27].

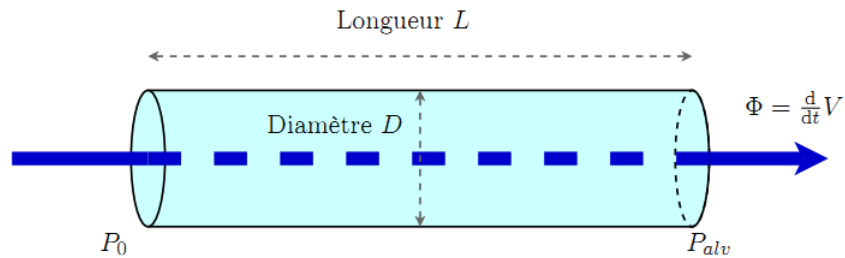


FIGURE 3.6 – Loi de Poiseuille et flux d'air à travers un conduit cylindrique [27].

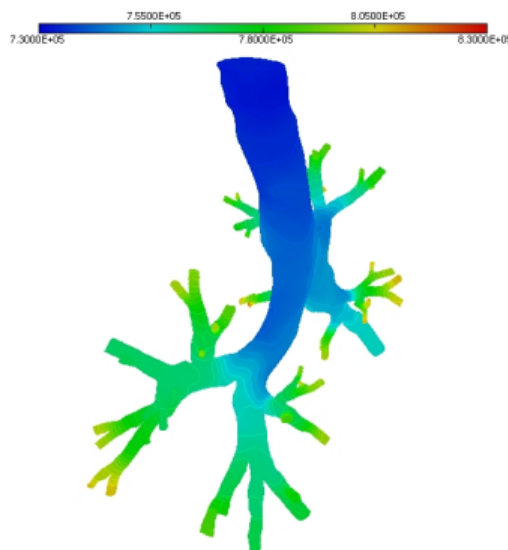


FIGURE 3.7 – Arbre bronchique reconstruit numériquement [13]

En effet, toute modification de ces paramètres peut entraîner l'apparition d'un certain nombre de pathologies, dans les limites du modèle (à titre d'exemple l'asthme peut être traduit par une augmentation de la résistance des voies aériennes, l'élastance E des tissus diminue en cas d'emphysème). D'autre part, de tels paramètres sont liés à la vitesse d'air, le flux correspondant aussi bien qu'à la pression. En effet, cette vitesse et cette pression dépendent fortement de ce qui se passe au delà de la dixième bifurcation de l'arbre bronchique, et en particulier du mouvement du diaphragme et de l'élasticité des tissus pulmonaires. D'où la motivation de ce travail de thèse qui vise à résoudre le problème inverse consistant à identifier le champ de vitesse et de pression au niveau des extrémités de l'arbre bronchique à partir de mesures effectuées au niveau de la bouche. Compte tenu de la complexité du processus dichotomique de l'arbre bronchique qui présente bien des difficultés pour effectuer des simulations numériques sur l'arbre tout entier, on peut donc considérer l'écoulement d'air dans un domaine simplifié correspondant à une coupe de branchements issus de l'arbre bronchique (voir Figure 3.7).

Modèle considéré

Dans cette thèse, nous allons considérer un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$, ($d = 2$ ou 3) simplifié correspondant à une coupe de branchement de l'arbre bronchique. On note par u la vitesse et p la pression d'air dans l'arbre bronchique. La frontière de Ω est donnée par

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_l \cup (\cup_{i=1}^{i=N} \Gamma_i)$$

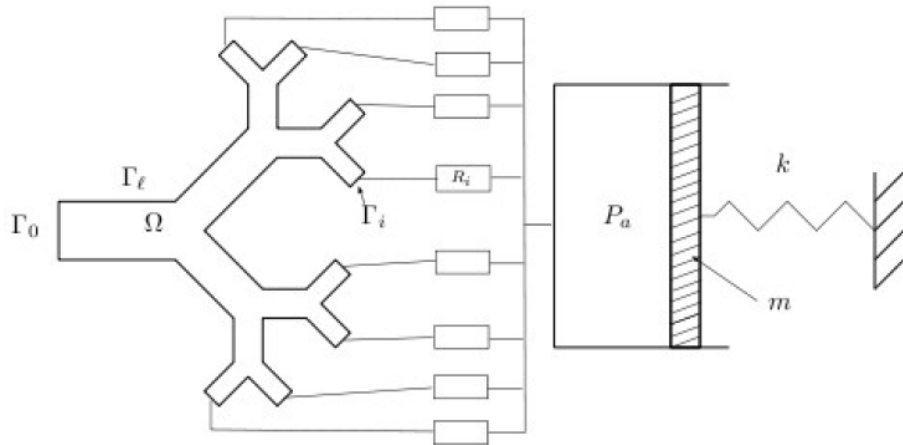


FIGURE 3.8 – Schéma simplifié de la modélisation de l'arbre bronchique [44]

où les Γ_i correspondent aux frontières artificielles, Γ_0 désigne la frontière correspondant à la trachée, et Γ_l la partie du bord reliant Γ_0 aux frontières artificielles Γ_i pour $i = 1, \dots, N$ (voir Figure 3.8 avec $N = 8$). L'utilisation de ces frontières vise de manière classique à simplifier ce mécanisme complexe afin de pouvoir le modéliser. Ceci est rencontré également dans la modélisation du système cardiovasculaire (voir [76, 83]).

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'écoulement d'air dans l'arbre bronchique. Il est modélisé par les équations de Stokes incompressibles qui s'écrivent sous forme tensorielle comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Conservation de la quantité de mouvement :} \\ -2\mu \operatorname{div}(D(u)) + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega \\ \text{Conservation de la masse (incompressibilité) :} \\ \operatorname{div}(u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \text{Conditions aux limites sur } \Gamma \\ \left\{ \begin{array}{lll} \text{Dirichlet :} & u = h & \text{sur } \Gamma_0 \\ \text{Dirichlet :} & u = 0 & \text{sur } \Gamma_l \\ \text{Neumann :} & \sigma(u)n = g & \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

La première équation décrit la conservation de la quantité de mouvement, tandis que la deuxième décrit l'incompressibilité du fluide. Le terme μ est le coefficient de viscosité, qui est supposé constant (dans le cas d'un fluide newtonien). Le tenseur de déformation $D(u)$ s'écrit comme suit :

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t), \quad (3.6)$$

Le terme $\sigma(u)$ désigne le tenseur de Cauchy donné par

$$\sigma(u) = 2\mu D(u) - pI, \quad I \text{ le tenseur identité ,}$$

f , g et h sont des fonctions données, et n désigne le vecteur normal à $\partial\Omega$ sortant de Ω .

Sur les parois solides du bord $\partial\Omega$, le fluide y adhère et ainsi la vitesse est nulle, ce qui se traduit par

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_l. \quad (3.7)$$

On suppose que nous pouvons mesurer la vitesse sur la partie du bord Γ_0 .

$$u = h \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (3.8)$$

On suppose également qu'on peut mesurer le flux de vitesse sur la même partie de la frontière Γ_0

$$\sigma(u)n = g \quad \text{sur } \Gamma_0, \quad (3.9)$$

via les conditions aux limites de type Neumann.

Notons enfin qu'il n'y a pas de condition essentielle sur la pression p . On ne peut ainsi imposer une pression (ou un gradient de pression) que par le biais de la condition (3.9). Mais il est aussi possible de combiner les deux types de conditions. Il s'agit des conditions mixtes.

3.3 Problème inverse de Cauchy issu du modèle pulmonaire considéré

Nous nous intéressons à la résolution d'un problème inverse de Cauchy modélisant l'écoulement d'air dans l'arbre bronchique régi par les équations de Stokes incompressibles. Il s'agit d'un problème de complétion des données qui consiste à reconstituer des données (la vitesse et la pression) sur les frontières artificielles Γ_i pour $i = 1, \dots, N$ à partir de mesures observées sur l'autre partie du bord Γ_0 et Γ_l (Figure 3.8). Autrement dit, nous considérons le système suivant : On cherche alors à identifier le champ de vitesse $u|_{\Gamma_i}$, et

de pression $p|_{\Gamma_i}$ sur les frontières artificielles Γ_i pour $i = 1, \dots, N$ solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u)) + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = h & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u)n = g & \text{sur } \Gamma_0 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_l \end{cases} \quad (3.10)$$

Les questions que l'on se pose sont classiques dans le domaine des problèmes inverses : existence, unicité et stabilité des solutions par rapport aux mesures. Nos contributions s'inscrivent pleinement dans la résolution mathématique et numérique de ce problème inverse de Cauchy. Il s'agit de développer des méthodes de résolution mathématique et de la simulation numérique permettant d'identifier la pression et la vitesse d'air sur les frontières artificielles en se basant sur des mesures effectuées au niveau de la trachée.

Étude du problème de Cauchy basée sur une approche en décomposition de domaine

Dans ce chapitre, nous proposons une étude du problème inverse de Cauchy basée sur une approche inspirée de la technique de la décomposition de domaine sans recouvrement. Cette technique vise à résoudre un problème aux limites sur un domaine partagé en deux sous-domaines avec des conditions aux limites d'interface. Ainsi en pliant le domaine au niveau de l'interface et en faisant coïncider les deux sous-domaines, on se ramène à la résolution d'un problème aux limites avec données abondantes sur une partie de la frontière et sans aucune donnée sur l'autre partie du bord. Ceci émet donc l'idée que les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement peuvent être utilisées pour la résolution du problème inverse de Cauchy. Nous développons ainsi une méthode de résolution permettant d'introduire un opérateur de type Steklov-Poincaré et de reformuler ce problème en un problème de recherche de point fixe. Nous montrons d'abord l'existence et l'unicité du point fixe à l'aide du degré topologique de Leray-Schauder. Ensuite, nous proposons un algorithme de point fixe permettant de reproduire l'alternative de Kozlov-Mazyra-Formin KMF[63]. Cette approche nous offre également l'opportunité d'exploiter d'autres algorithmes issus de la décomposition de domaine pour résoudre notre problème inverse de Cauchy. Finalement, nous nous intéressons à l'approximation numérique du problème par la méthode des éléments finis P_{1Bulle}/P_1 , tout en utilisant des algorithmes dérivant de la décomposition de domaine de type "Neumann-Neumann" et "Robin-Robin".

4.1 Position du problème inverse

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de bord Lipschitzien. On suppose que $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, tel que $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Nous cherchons à résoudre le problème qui consiste à trouver (u, p)

solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u)) + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = h & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u)n = g & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où f, g et h sont des fonctions données (le cadre fonctionnel sera précisé par la suite). Il s'agit d'un problème de complétion de données dont les conditions aux limites sur la partie du bord Γ_1 sont inconnues. Nous cherchons alors à les identifier à partir des conditions aux limites données sur la partie accessible Γ_0 . Ainsi, afin de reconstruire la solution sur la partie Γ_1 , en se basant sur ces données supplémentaires sur Γ_0 , nous optons pour une approche inspirée de la technique de la décomposition de domaine. Elle consiste à dupliquer la solution (u, p) en deux solutions (u_1, p_1) et (u_2, p_2) satisfaisant l'équation de Stokes sur Ω , dont leurs traces coïncident sur Γ_1 , mais l'une satisfait la condition de Dirichlet, tandis que l'autre satisfait la condition de Neumann sur Γ_0 .

Étant donnée une fonction φ , on considère le problème qui vise à trouver (u_1, p_1) et (u_2, p_2) solutions respectives des problèmes suivants :

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u_1)) + \nabla p_1 = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u_1) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 = h & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_1 = \varphi & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u_2)) + \nabla p_2 = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u_2) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u_2)n = g & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_2 = \varphi & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Ainsi, si la condition de transmission suivante est satisfaite pour u_1, u_2, p_1, p_2

$$\sigma(u_1)n = \sigma(u_2)n \quad \text{sur } \Gamma_1. \quad (4.4)$$

Nous aurons que $u = u_1 = u_2$ et $p = p_1 = p_2$, tel que (u, p) est solution du problème inverse (4.1), qui est équivalent alors à trouver φ tel que $(u_1(\varphi), p_1(\varphi))$ et $(u_2(\varphi), p_2(\varphi))$ solutions respectives de (4.2) et (4.3) et vérifiant la condition (4.4). Pour ce faire, on peut écrire u_1 et p_1 comme une somme de deux contributions :

$$u_1 = H_1\varphi + G_1f$$

$$p_1 = H_1 p + G_1 p$$

tel que $(H_1 \varphi, H_1 p)$ est solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(H_1 \varphi)) + \nabla H_1 p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(H_1 \varphi) = 0 & \text{dans } \Omega \\ H_1 \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ H_1 \varphi = \varphi & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (4.5)$$

et $(G_1 f, G_1 p)$ solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(G_1 f)) + \nabla G_1 p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(G_1 f) = 0 & \text{dans } \Omega \\ G_1 f = h & \text{sur } \Gamma_0 \\ G_1 f = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (4.6)$$

De même, On peut écrire u_2 et p_2 comme suit

$$u_2 = H_2 \varphi + G_2 f$$

$$p_2 = H_2 p + G_2 p$$

avec $(H_2 \varphi, H_2 p)$ solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(H_2 \varphi)) + \nabla H_2 p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(H_2 \varphi) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(H_2 \varphi)n = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ H_2 \varphi = \varphi & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (4.7)$$

et $(G_2 f, G_2 p)$ solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(G_2 f)) + \nabla G_2 p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(G_2 f) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(G_2 f)n = g & \text{sur } \Gamma_0 \\ G_2 f = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.8)$$

Ainsi, en partant de la condition (4.4), on montre que φ est solution d'une équation d'interface, pour un opérateur de type Steklov-Poincaré.

En effet, d'après (4.4) on a

$$\sigma(H_1\varphi)n + \sigma(G_1f)n = \sigma(H_2\varphi)n + \sigma(G_2f)n,$$

ce qui entraîne que

$$\sigma(H_1\varphi)n - \sigma(H_2\varphi)n = \sigma(G_2f)n - \sigma(G_1f)n.$$

Si, on note par S l'opérateur du type Steklov-Poincaré défini par

$$S\varphi := \sigma(H_1\varphi)n - \sigma(H_2\varphi)n, \quad (4.9)$$

et par χ la fonction définie par

$$\chi := \sigma(G_2f)n - \sigma(G_1f)n.$$

On aura que φ est solution de l'équation

$$S\varphi = \chi, \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (4.10)$$

où $S\varphi = S_1\varphi - S_2\varphi$ avec

$$S_i\varphi := \sigma(H_i\varphi)n \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (4.11)$$

S_1 et S_2 sont dits les opérateurs de Steklov locaux.

Dans la méthode de décomposition de domaine [75], l'opérateur de Steklov s'écrit $S = S_1 + S_2$ et donc il est facile de prouver qu'il est coercif et par suite bijectif. Par contre, l'opérateur S défini par (4.9) n'est pas coercif, nous optons ainsi pour le degré topologique de Leray-Schauder pour montrer l'existence d'une solution de (4.10).

4.2 Résultat d'existence

Dans le but de prouver l'existence de la solution de l'équation du type Steklov-Poincaré, nous devons tout d'abord montrer quelques propriétés utiles relatives à l'opérateur local de type Steklov-Poincaré S_i pour $i = 1, 2$. Pour cela, nous aurons besoin des hypothèses de compatibilité sur les données à savoir

$$f \in (L^2(\Omega))^d, \quad h \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^d \quad \text{et } g \in (H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^d$$

Propriétés de l'opérateur local de Steklov-Poincaré

Nous présentons quelques propriétés des opérateurs locaux de type Steklov-Poincaré énoncées sous forme de lemmes que nous prouvons dans la suite.

Lemme 4.1 *Pour $i = 1, 2$, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) *Il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que*

$$c_1 \|\varphi\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} \leq \|H_i \varphi\|_{(H^1(\Omega))^d} \leq c_2 \|\varphi\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d}, \quad \forall \varphi \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d. \quad (4.12)$$

(ii) *L'opérateur S_i défini de $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$ dans $(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$ est symétrique, continu et coercif.*

Démonstration

On se restreint à montrer le lemme pour $i = 1$, et en utilisant les mêmes arguments, on obtient le résultat pour $i = 2$. Pour montrer l'inégalité droite de (4.12), soit $\varphi \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$ alors il existe $\phi \in (H^1(\Omega))^d$ tel que $\phi|_{\Gamma_1} = \varphi$ et $\phi|_{\Gamma_0} = 0$, on peut donc écrire

$$H_1 \varphi = \phi + u_0$$

où $u_0 \in (H_0^1(\Omega))^d$ est solution de la formulation faible de (4.5) :

$$2\mu \int_{\Omega} D(u_0) : D(v) dx = \int_{\Omega} H_1 p \operatorname{div}(v) dx - 2\mu \int_{\Omega} D(\phi) : D(v) dx \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^d.$$

Ainsi, en prenant $v = u_0$, il existera une constante $c_{\Omega} > 0$, telle que

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{c_{\Omega}} \|u_0\|_{(H^1(\Omega))^d}^2 &\leq 2\mu d \|\phi\|_{(H^1(\Omega))^d} \|u_0\|_{(H^1(\Omega))^d} \\ \frac{2\mu}{c_{\Omega}} \|u_0\|_{(H^1(\Omega))^d} &\leq 2\mu d \|\phi\|_{(H^1(\Omega))^d} \\ \|u_0\|_{(H^1(\Omega))^d} &\leq c'_{\Omega} \|\phi\|_{(H^1(\Omega))^d}, \end{aligned}$$

où $c'_{\Omega} = c_{\Omega} d$. Par suite

$$\begin{aligned} \|H_1 \varphi\|_{(H^1(\Omega))^d} &= \|\phi + u_0\|_{(H^1(\Omega))^d} \\ &\leq \|\phi\|_{(H^1(\Omega))^d} + \|u_0\|_{(H^1(\Omega))^d} \\ &\leq (1 + c'_{\Omega}) \|\phi\|_{(H^1(\Omega))^d}, \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est satisfaite pour tout $\phi \in (H^1(\Omega))^d$ tel que $\phi|_{\Gamma_1} = \varphi$ et $\phi|_{\Gamma_0} = 0$,

alors

$$\|H_1\varphi\|_{(H^1(\Omega))^d} \leq (1 + c_{\Omega'}) \inf_{\phi \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^d, \phi|_{\Gamma_1} = \varphi} \|\phi\|_{(H^1(\Omega))^d}.$$

Donc

$$\|H_1\varphi\|_{(H^1(\Omega))^d} \leq c_2 \|\varphi\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d},$$

avec $c_2 = (1 + c_{\Omega'})$.

D'autre part, l'inégalité gauche de (4.12) découle de la définition de la norme dans $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$, en effet, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} &= \inf_{\phi \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^d, \phi|_{\Gamma_1} = \varphi} \|\phi\|_{(H^1(\Omega))^d} \\ &\leq \|H_1\varphi\|_{(H^1(\Omega))^d}. \end{aligned}$$

Montrons maintenant l'assertion (ii). Puisque l'opérateur S_i agit de l'espace $\Lambda = (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$ dans son dual $(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$, en utilisant le théorème de la divergence [51] et le fait que $(H_i\eta, H_ip)$, pour $i = 1, 2$, sont solutions respectives des équations (4.5) et (4.7), on aura pour tout $\eta, \xi \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$:

$$\begin{aligned} \langle S_i\eta, \xi \rangle &= \int_{\Gamma_1} \sigma(H_i\eta) n \xi \, ds \\ &= \int_{\Gamma_1} 2\mu \operatorname{div}(D(H_i\eta)) \cdot n \xi - H_ip \cdot n \xi \, ds \end{aligned}$$

si on note par $R_i : (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d \rightarrow (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^d$ l'opérateur d'extension qui satisfait $R_i\xi|_{\Gamma_1} = \xi$, on écrit

$$\begin{aligned} \langle S_i\eta, \xi \rangle &= \int_{\partial\Omega} 2\mu D(H_i\eta) \cdot n R_i \xi \, ds - \int_{\partial\Omega} H_ip \cdot n R_i \xi \, ds \\ &= 2\mu \int_{\Omega} D(H_i\eta) : \nabla R_i \xi \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div}(D(H_i\eta)) R_i \xi \, dx - \int_{\Omega} \nabla H_ip R_i \xi \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} H_ip \operatorname{div}(R_i \xi) \, dx \\ &= 2\mu \int_{\Omega} D(H_i\eta) : D(R_i \xi) \, dx \\ &:= a(H_i\eta, R_i \xi), \end{aligned}$$

en prenant $R_i \xi = H_i \xi$, on obtient

$$\langle S_i\eta, \xi \rangle = a(H_i\eta, H_i \xi). \quad (4.13)$$

Donc, la symétrie de S_i découle de la symétrie de la forme bilinéaire a , et on a

$$\langle S_i \varphi, \eta \rangle \leq \|H_i \varphi\|_{(H^1(\Omega))^d} \|H_i \eta\|_{(H^1(\Omega))^d}.$$

D'après l'assertion (i), on aura

$$\langle S_i \varphi, \eta \rangle \leq c_2 \|\varphi\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} \|\eta\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d}.$$

Donc

$$\|S_i \varphi\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} \leq c_2 \|\varphi\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d}.$$

Donc S_i est continu. D'autre part, on a

$$\langle S_i \eta, \eta \rangle \geq \alpha \|H_i \eta\|_{(H^1(\Omega))^d}^2$$

où $\alpha > 0$ est la constante de coercivité de la forme bilinéaire a . En utilisant l'assertion (i), on obtient

$$\langle S_i \eta, \eta \rangle \geq \alpha c_1 \|\eta\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d}^2.$$

Ce qui achève la preuve du lemme. □

Nous allons par la suite reformuler l'équation (4.10) en un problème de point fixe.

Formulation point fixe du problème 4.10

Notons que l'étude de l'existence de la solution de (4.10) présente des difficultés provenant du fait que l'opérateur S n'est pas coercif (contrairement à ce qui est connu dans le cadre de la décomposition de domaine). Pour surmonter cette difficulté, nous proposons une autre formulation point fixe de (4.10). Ainsi, en utilisant le fait que l'opérateur S_1 est coercif, symétrique et continu, alors l'opérateur inverse S_1^{-1} existe en tant qu'opérateur continu, ainsi l'équation (4.10) est équivalente à

$$S_1^{-1} S \varphi = S_1^{-1} \chi. \quad (4.14)$$

Donc

$$S_1^{-1} (S_1 - S_2) \varphi = S_1^{-1} \chi. \quad (4.15)$$

Par suite

$$\varphi = S_1^{-1} S_2 \varphi + S_1^{-1} \chi, \quad (4.16)$$

On note ainsi par $F : (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d \rightarrow (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$ l'opérateur défini par

$$F(\varphi) = S_1^{-1}S_2\varphi + S_1^{-1}\chi.$$

Donc, on se ramène à un problème de point fixe qui consiste à trouver φ dans $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$ solution de l'équation

$$F(\varphi) = \varphi. \quad (4.17)$$

Existence et unicité du point fixe

Pour montrer l'existence du point fixe de (4.17), nous aurons besoin des résultats des lemmes suivants.

Lemme 4.2 *Pour tout $\psi \in (H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$, l'opérateur S_1^{-1} est défini par $S_1^{-1}\psi = \omega|_{\Gamma_1}$, où (ω, q) est la solution de*

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(\omega)) + \nabla q = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\omega) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \omega = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma(\omega)n = \psi & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.18)$$

De plus, S_1^{-1} est compact.

Démonstration

Soit $\psi \in (H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$, on a

$$S_1\psi = \sigma(u)n|_{\Gamma_1},$$

où (u, p_u) est la solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u)) + \nabla p_u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ u = \psi & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.19)$$

On doit alors prouver que pour tout $\psi \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$

$$S_1^{-1}S_1\psi = \psi.$$

En effet, on a

$$S_1^{-1}S_1\psi = S_1^{-1}\sigma(u)n|_{\Gamma_1}.$$

Soit (v, p_v) la solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(v)) + \nabla p_v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(v) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma(v)n = \sigma(u)n & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.20)$$

Donc, $\omega = u - v$ et $p_\omega = p_u - p_v$ sont tels que (ω, p_ω) est solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(\omega)) + \nabla p_\omega = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\omega) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \omega = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma(\omega)n = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.21)$$

Donc

$$\omega = 0 \text{ p.p. dans } \Omega \quad \text{et } p_\omega = 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Par conséquent

$$u = v \text{ p.p. dans } \Omega \quad \text{et } p_u = p_v \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Ce qui implique que

$$v|_{\Gamma_1} = u|_{\Gamma_1} = \psi,$$

Donc S_1^{-1} est bien défini en tant que trace de la solution de (4.5) sur Γ_1 .

Afin de montrer la compacité de S_1^{-1} , soit $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$. Pour tout élément de $(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$, on considère (ω_k, p_k) la solution du problème suivant

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(\omega_k)) + \nabla p_k = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\omega_k) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \omega_k = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma(\omega_k)n = \varphi_k & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (4.22)$$

dont la formulation faible s'écrit

$$\begin{aligned} 2\mu \int_{\Omega} D(\omega_k) : D(v) dx - \int_{\Omega} p_k \operatorname{div}(v) dx &= \int_{\Gamma_1} \sigma(\omega_k) n v ds \\ &= \int_{\Gamma_1} \varphi_k v ds \\ &= \langle \varphi_k, v \rangle_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d, (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d}. \end{aligned}$$

En prenant $v = \omega_k$ et en utilisant la coercivité de la forme bilinéaire a et la continuité de l'application trace, il existera une constante c_0 , telle que

$$\alpha \|\omega_k\|_{(H^1(\Omega))^d}^2 \leq c_0 \|\varphi_k\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} \|\omega_k\|_{(H^1(\Omega))^d}.$$

Par suite, il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\|\omega_k\|_{(H^1(\Omega))^d} \leq C \|\varphi_k\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d}. \quad (4.23)$$

Donc, $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $(H^1(\Omega))^d$, on peut alors extraire une sous-suite notée encore $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$, telle que

$$\omega_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \omega^* \quad \text{dans } (H^1(\Omega))^d. \quad (4.24)$$

D'après l'injection compacte de $(H^1(\Omega))^d$ dans $(L^2(\Omega))^d$, on peut extraire une sous-suite notée encore $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$, telle que

$$\omega_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \omega^* \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^d.$$

On peut aussi montrer que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $L^2(\Omega)$, en utilisant la formulation faible de (4.22) aussi bien que la condition inf-sup (2.22). En effet, on a

$$-2\mu \int_{\Omega} D(\omega_k) : D(\omega_k) dx + \langle \varphi_k, \omega_k \rangle_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d, (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} = \int_{\Omega} p_k \operatorname{div}(\omega_k) dx. \quad (4.25)$$

Donc

$$2\mu \|\omega_k\|_{(H^1(\Omega))^d}^2 + c_0 \|\varphi_k\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} \|\omega_k\|_{(H^1(\Omega))^d} \geq \beta \|p_k\|_{L^2(\Omega)} \|\omega_k\|_{(H^1(\Omega))^d}. \quad (4.26)$$

D'où

$$\|p_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2\mu}{\beta} \|\omega_k\|_{(H^1(\Omega))^d} + \frac{c_0}{\beta} \|\varphi_k\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d}. \quad (4.27)$$

Ce qui permet d'extraire une sous-suite de $(p_k)_k$ notée encore $(p_k)_k$ qui converge faiblement

dans $L^2(\Omega)$

$$p_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p^*. \quad (4.28)$$

Par suite

$$-2\mu \operatorname{div}(D(\omega_k)) + \nabla p_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -2\mu \operatorname{div}(D(\omega^*)) + \nabla p^* \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(\Omega))^d,$$

ceci, puisque pour tout $\phi \in (\mathcal{D}(\Omega))^d$, on a

$$\langle -2\mu \operatorname{div}(D(\omega_k)) + \nabla p_k, \phi \rangle = 2\mu \int_{\Omega} D(\omega_k) : D(\phi) dx - \int_{\Omega} p_k \operatorname{div} \phi dx, \quad (4.29)$$

ainsi, d'après les convergences (4.24) et (4.28), le deuxième terme de l'égalité (4.29) converge vers

$$2\mu \int_{\Omega} D(\omega^*) : D(\phi) dx - \int_{\Omega} p^* \operatorname{div}(\phi) dx = \langle -2\mu \operatorname{div}(D(\omega^*)) + \nabla p^*, \phi \rangle \quad \forall \phi \in (\mathcal{D}(\Omega))^d.$$

Or

$$-2\mu \operatorname{div}(D(\omega_k)) + \nabla p_k = 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(\Omega))^d, \quad \text{pour tout } k,$$

Alors, on a

$$-2\mu \operatorname{div}(D(\omega^*)) + \nabla p^* = 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(\Omega))^d.$$

Donc

$$-2\mu \operatorname{div}(D(\omega^*)) + \nabla p^* = 0 \quad p.p. \quad \text{dans } \Omega.$$

D'autre part, pour tout $v \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^d$, on a

$$\begin{aligned} 2\mu \int_{\Omega} D(\omega_k) : D(v) dx - \int_{\Omega} p_k \operatorname{div}(v) dx &= -2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div}(D(\omega_k)) v dx + \int_{\Omega} \nabla p_k v dx \\ &+ \langle \sigma(\omega_k) n, v \rangle_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d, (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} \\ &= \langle \varphi_k, v \rangle_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d, (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

qui converge vers

$$\begin{aligned} 2\mu \int_{\Omega} D(\omega^*) : D(v) dx - \int_{\Omega} p^* \operatorname{div}(v) dx &= -2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div}(D(\omega^*)) v dx + \int_{\Omega} \nabla p^* v dx \\ &+ \langle \sigma(\omega^*) n, v \rangle_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d, (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} \\ &= \langle \sigma(\omega^*) n, v \rangle_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d, (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d}. \end{aligned}$$

Alors

$$\varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \sigma(\omega^*)n \quad \text{dans} \quad (H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d.$$

C'est-à-dire que $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$. Donc elle est de Cauchy dans $(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$. Pour conclure, il reste à prouver que $(\omega_k|_{\Gamma_1})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$. Soient $j, k \in \mathbb{N}$ et $(\omega_j, p_j), (\omega_k, p_k)$ sont respectivement les solutions de (4.22) associées à φ_j et φ_k , en utilisant les mêmes techniques que pour l'inégalité (4.23), on obtient

$$\|\omega_j - \omega_k\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} \leq C \|\varphi_j - \varphi_k\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d}.$$

Comme $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$, alors $(\omega_k|_{\Gamma_1})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$ qui est un espace complet. Alors, la suite $(\omega_k|_{\Gamma_1})$ converge dans $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$. D'où le résultat. □

Dans la suite, nous allons montrer l'existence du point fixe de (4.17), pour cela, nous aurons besoin d'énoncer un résultat d'estimation sur la solution de (4.10) (qui est la solution de (4.17)) lorsqu'elle existe. Nous avons besoin de montrer que si la solution de (4.10) existe, elle sera bornée dans $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$. D'abord, nous commençons par rappeler quelques définitions et propriétés concernant les problèmes mal posés.

Définition 4.1 • Pour tout $\chi \in H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)^d$, on définit la taille d'incompatibilité μ_S associée au problème (4.10) par

$$\mu_S(\chi) = \inf_{\varphi \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} \|S\varphi - \chi\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d}.$$

• Le problème (4.10) est dit χ -compatible si

$$\mu_S(\chi) = 0.$$

Nous avons alors le résultat de bornitude de la solution dû à Badeva et Morozov [12].

Lemme 4.3 *Le problème (4.10) est χ -compatible, alors sa solution φ est bornée dans $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$.*

En se basant sur ce lemme, nous prouvons le résultat d'existence suivant.

Théorème 4.1 *Le problème (4.17) admet un point fixe unique dans $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$.*

Démonstration

Notons tout d'abord que si φ appartient à une boule, on ne peut pas réussir à montrer que $F(\varphi)$ appartient à la même boule, alors nous ne pouvons pas utiliser le résultat classique de Leray-Schauder pour montrer l'existence du point fixe. Pour ce faire, nous optons ici pour le degré topologique de Leray-Schauder [41]. En effet, pour tout $t \in [0, 1]$ on définit l'opérateur F_t comme suit

$$\begin{aligned} F_t : (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d &\longrightarrow (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d \\ \bar{\varphi} &\longmapsto F_t(\bar{\varphi}) = tS_1^{-1}S_2\bar{\varphi} + S_1^{-1}\chi. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.1, on a l'opérateur F_t est continu et d'après le lemme 4.2, il est compact. Aussi, d'après le lemme 4.3, il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\|\varphi\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} \leq C.$$

Pour prouver que F_t admet un point fixe, on considère la boule B définie par

$$B = \{\varphi \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d / \|\varphi\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} \leq R\},$$

avec $R = C + 1$. Il est clair que l'opérateur n'a pas de point fixe sur ∂B , le bord de B . En utilisant la notion du degré topologique de Leray-Schauder [41], on a $\deg[I - F_t, B, 0]$ est défini et indépendant de t , où la fonction \deg est bien connue comme étant le degré de Leray-Schauder et I est l'application identité sur $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$. Puisque F_0 admet la solution triviale

$$\varphi = S_1^{-1}\chi.$$

Alors $\deg[I - F_0, B, 0] = 1$. Par conséquent $\deg[I - F_1, B, 0] = 1$ et il existe alors $\varphi \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$, tel que $F_1(\varphi) = \varphi$. C'est-à-dire l'opérateur F_1 admet un point fixe à l'intérieur de B . D'où, le problème (4.17) admet un point fixe.

Pour montrer l'unicité du point fixe, si on suppose qu'il existe φ_1 et φ_2 dans $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$ distincts tels que

$$\varphi_1 = S_1^{-1}S_2\varphi_1 + S_1^{-1}\chi, \quad (4.31)$$

et

$$\varphi_2 = S_1^{-1}S_2\varphi_2 + S_1^{-1}\chi, \quad (4.32)$$

En soustrayant (4.32) de (4.31), on aura

$$S_2(\varphi_1 - \varphi_2) = S_1(\varphi_1 - \varphi_2)$$

C'est-à-dire

$$\sigma(H_2(\varphi_1 - \varphi_2))n = \sigma((H_1(\varphi_1 - \varphi_2))n) \quad \text{sur } \Gamma_1$$

où $(H_1(\varphi_1 - \varphi_2), H_1p)$ et $(H_2(\varphi_1 - \varphi_2), H_2p)$ sont solutions respectives des problèmes (4.5) et (4.7) associées à $\varphi_1 - \varphi_2$. Par suite $(H_1(\varphi_1 - \varphi_2) - H_2(\varphi_1 - \varphi_2), H_1p - H_2p)$ est solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u)) + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u)n = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (4.33)$$

alors en utilisant le théorème d'Holmgren [40], on aura

$$H_1(\varphi_1 - \varphi_2) = H_2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{p. p dans } \Omega \quad (4.34)$$

$$H_1p = H_2p \quad \text{p. p dans } \Omega \quad (4.35)$$

Par unicité de la solution des problèmes (4.5) et (4.7), on a $(H_1(\varphi_1 - \varphi_2), H_1p)$ est solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u)) + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u)n = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (4.36)$$

En appliquant le théorème d'Holmgren encore une fois, on aura

$$H_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad \text{p. p dans } \Omega$$

par suite

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

D'où le résultat.

□

Dans la suite, nous entamons la question d'approximation numérique du problème inverse de Cauchy (4.1), en utilisant un algorithme du point fixe, ainsi que d'autres algorithmes issus de la décomposition de domaine pour l'approximation de ce problème.

4.3 Approximation numérique de notre problème

Dans cette section, nous allons proposer d'abord un algorithme de point fixe pour résoudre le problème inverse de Cauchy. Cet algorithme peut être considéré comme une forme équivalente de l'alternatif KMF [63]. Ensuite, nous exploitons deux types d'algorithmes issus de la décomposition de domaine pour résoudre notre problème (4.1). Ces approches itératives vont nécessiter la résolution d'une suite de problèmes directs, dont les solutions seront approchées par la méthode des éléments finis de type P_{1Bulle}/P_1 .

Algorithme de point fixe

L'algorithme de point fixe consiste tout d'abord à choisir une donnée initiale sur Γ_1 $\varphi_0 \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d$ qui satisfait la condition de compatibilité [53] avec la donnée sur $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1$, telle que :

$$\int_0^\mu \frac{|\varphi_0(A - t\tau_0(t)) - h(A + t\tau_1(t))|^2}{t} dt < \infty, \quad (4.37)$$

où $A \in \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1$, $0 < \mu < \min\{\text{meas}(\Gamma_0), \text{meas}(\Gamma_1)\}$, $\tau_0(t)$ et $\tau_1(t)$ sont respectivement les vecteurs tangents dans la même direction à Γ_0 et Γ_1 . Puis, à résoudre alternativement les problèmes bien posés (4.2) et (4.3) de manière itérative, jusqu'à ce que le test d'arrêt soit satisfait. L'algorithme se résume comme suit

Algorithme 1 1. *Étant donné une précision $0 < \varepsilon \ll 1$.*

2. *Pour $k = 0$, on choisit une donnée initiale $\varphi_0 \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^2$ qui satisfait la condition de compatibilité (4.37).*

3. *On calcule $\chi = \sigma(G_2 f)n_{|\Gamma_1} - \sigma(G_1 f)n_{|\Gamma_1}$, où $(G_1 f, G_1 p)$ et $(G_2 f, G_2 p)$ sont respectivement solutions approchées de (4.6) et (4.8) à calculer.*

4. *On calcule $S_1^{-1}\chi = \omega_{|\Gamma_1}$, où (ω, p_ω) est la solution approchée de*

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(v)) + \nabla p_v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(v) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma(v)n = \chi & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.38)$$

5. On calcule $\psi_k = S_2\varphi_k = \sigma(H_2\varphi_k)n$, où $(H_2\varphi_k, H_2p_k)$ est la solution approchée de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(v)) + \nabla p_v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(v) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(v)n = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ v = \varphi_k & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.39)$$

6. On calcule $S_1^{-1}\psi_k = u_{k|\Gamma_1}$, où (u_k, p_{u_k}) est la solution approchée de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(v)) + \nabla p_v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(v) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma(v)n = \psi_k & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.40)$$

7. On calcule $F(\varphi_k) = u_{k|\Gamma_1} + \omega_{|\Gamma_1}$.

8. à l'étape k , si $\|F(\varphi_k)\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^d} \leq \varepsilon$, aller à 10.

9. On actualise $\varphi_{k+1} \leftarrow F(\varphi_k)$, aller à 5.

10. Fin.

Remarque 4.1 Le résultat d'existence du point fixe peut être vu comme un résultat de convergence de l'algorithme ci-dessus qui est une forme équivalente de l'algorithme KMF [63]. Donc, ce résultat de point fixe peut être aussi vu comme un résultat de convergence de l'algorithme KMF.

L'approche proposée nous donne la possibilité d'exploiter d'autres algorithmes de la décomposition de domaine [75] pour résoudre ce problème inverse.

Algorithmes issus de la décomposition de domaine

En se basant sur les algorithmes classiques de la méthode de décomposition de domaine [75], nous proposons des algorithmes dérivés de celui de "Neumann-Neumann" et de "Robin-Robin" pour résoudre ce problème inverse de Cauchy. A ce stade, nous notons que les algorithmes "Neumann-Neumann" et "Robin-Robin" sont proposés dans des premiers travaux [4, 3, 69] et ils ont été utilisés dans plusieurs applications [43, 32].

Ces algorithmes nécessitent la résolution des problèmes bien posés suivants : pour une donnée initiale $v^{(0)}$ de u sur Γ_1 , qui satisfait la condition de compatibilité (4.37), on

considère le problème bien posé : trouver $(u^{(2k)}, p^{(2k)})$ solution de

$$(P^{(2k)}) \begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(w)) + \nabla p_w = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(w) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(w)n = g & \text{sur } \Gamma_0, \\ w = v^{(k)} & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (4.41)$$

et pour $v^{(k+1)} = u^{(k)}$, on considère le problème suivant : trouver $(u^{(2k+1)}, p^{(2k+1)})$ solution de

$$(P^{(2k+1)}) \begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(w)) + \nabla p_w = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(w) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = h & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma(w)n = \sigma(v^{(k+1)})n & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.42)$$

Ainsi, l'algorithme de "Neumann-Neumann", pour résoudre notre problème inverse (4.1), est résumé comme suit :

Algorithme 2 1. Pour $k = 0$, on se donne deux coefficients positifs s_1, s_2 , une précision $\varepsilon > 0$, un paramètre d'accélération $\theta > 0$ et une approximation initiale $v^{(0)}$ de u sur Γ_1 satisfaisant la condition de compatibilité (4.37).

2. Résoudre le problème $(P^{(2k)})$.

3. Résoudre le problème $(P^{(2k+1)})$, avec la condition suivante sur Γ_1

$$u^{(2k+1)} = v^{(k)}.$$

4. Résoudre le problème $(P^{(2k)})$ pour $\Psi^{(2k)}$ satisfaisant la condition suivante sur Γ_1

$$\Psi^{(2k)} = s_1 \sigma(u^{(2k)})n - s_2 \sigma(u^{(2k+1)})n.$$

5. Résoudre le problème $(P^{(2k+1)})$ pour $\Psi^{(2k+1)}$ satisfaisant la condition suivante sur Γ_1 .

$$\Psi^{(2k+1)} = s_1 \sigma(u^{(2k)})n - s_2 \sigma(u^{(2k+1)})n.$$

6. Calculer $v^{(k+1)} \leftarrow v^{(k)} - \theta(s_1 \Psi_{|\Gamma_1}^{(2k)} - s_2 \Psi_{|\Gamma_1}^{(2k+1)})$, pour $k \geq 1$.

7. Si $\|u^{(2k)} - u^{(2k+1)}\|_{(L^2(\Gamma_1))^d} \leq \varepsilon$ on arrête. Sinon $k \leftarrow k + 1$ aller à l'étape 2.

Tandis que l'algorithme de Robin-Robin se résume comme suit :

Algorithme 3 1. Choisir deux paramètres d'accélération positifs γ_1 et γ_2 , tels que $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ et se donner une précision $\varepsilon > 0$.

2. Pour $k = 0$, choisir une donnée initiale $v^{(0)}$ de u sur Γ_1 satisfaisant la condition de compatibilité (4.37).

3. Résoudre le problème $(P^{(2k)})$ avec la condition de Robin :

$$\sigma(u^{(2k)})_n + \gamma_1 u^{(2k)} = \sigma(u^{(2k+1)})_n + \gamma_1 u^{(2k+1)} \text{ sur } \Gamma_1$$

au lieu de la condition de Dirichlet :

$$u^{(2k)} = v^{(k)} \text{ sur } \Gamma_1$$

4. Résoudre le problème $(P^{(2k+1)})$ avec la condition de Robin :

$$\sigma(u^{(2k+1)})_n - \gamma_2 u^{(2k+1)} = \sigma(u^{(2k)})_n - \gamma_2 u^{(2k)} \text{ sur } \Gamma_1$$

au lieu de la condition de Neumann :

$$\sigma(u^{(2k+1)})_n = \sigma(v^{(k+1)})_n \text{ sur } \Gamma_1$$

5. Si $\|u^{(2k)} - u^{(2k+1)}\|_{(L^2(\Gamma_1))^d} \leq \varepsilon$, on arrête. Sinon $k \leftarrow k + 1$, aller à l'étape 3.

Dans la suite, nous allons donner quelques résultats numériques montrant l'efficacité de cette approche proposée, en discutant la qualité d'approximation de la solution, la convergence numérique, aussi bien que la stabilité des différents algorithmes proposés.

4.4 Résultats numériques et discussion

Dans le but de prouver l'efficacité de notre approche, nous présentons quelques résultats numériques obtenus en utilisant l'algorithme du point fixe, qui peut être considéré comme une forme équivalente de l'alternatif KMF, et les algorithmes dérivés des méthodes de la décomposition du domaine "Neumann-Neumann" et "Robin-Robin", pour résoudre ce problème inverse. Notre objectif est de montrer que les algorithmes dérivant de la décomposition du domaine nous offrent des alternatives robustes et efficaces pour la résolution du problème inverse de Cauchy. Par ailleurs ces algorithmes font intervenir un nombre de paramètres qui sont à savoir γ_1 et γ_2 pour l'algorithme "Robin-Robin" et θ, s_1 et s_2 pour l'algorithme "Neumann-Neumann", dont le choix nécessite une attention particulière. Ainsi, une analyse de sensibilité d'évolution de l'erreur en fonction de ces paramètres sera faite dans le but de choisir les meilleurs paramètres.

Exemples numériques

Exemple 1

Nous supposons que le domaine est rectangulaire $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, dont le bord est $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, avec $\Gamma_0 = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \Gamma_{03}$ (Figure 4.1). Dans cet exemple, on cherche à

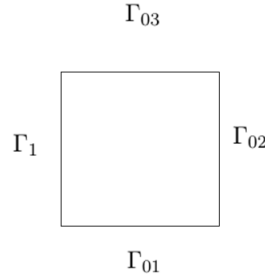


FIGURE 4.1 – Domaine Ω .

approcher la solution du problème inverse de Cauchy (4.1) associée aux données suivantes :

- La donnée de Dirichlet sur Γ_{01} , notée par $h_{|\Gamma_{01}} = (h_{01}^{(1)}, h_{01}^{(2)})$, est donnée par :

$$\begin{cases} h_{01}^{(1)}(x, y) = \cosh(x) \sinh(0), \\ h_{01}^{(2)}(x, y) = -\cosh(0) \sinh(x). \end{cases} \quad (4.43)$$

- Les données de Dirichlet et Neumann sur Γ_{02} , notées respectivement par $h_{|\Gamma_{02}} = (h_{02}^{(1)}, h_{02}^{(2)})$ et $g_{|\Gamma_{02}} = (g_{02}^{(1)}, g_{02}^{(2)})$, sont données par :

$$\begin{cases} h_{02}^{(1)}(x, y) = \cosh(1) \sinh(y), \\ h_{02}^{(2)}(x, y) = -\cosh(y) \sinh(1), \end{cases} \quad (4.44)$$

$$\begin{cases} g_{02}^{(1)}(x, y) = \mu \sinh(x) \sinh(y) - \left(y \cosh(x) - \frac{\sinh(1)}{2} \right), \\ g_{02}^{(2)}(x, y) = -\mu \cosh(x) \cosh(y). \end{cases} \quad (4.45)$$

- La donnée de Neumann sur Γ_{03} , notée par $g_{|\Gamma_{03}} = (g_{03}^{(1)}, g_{03}^{(2)})$, est donnée par :

$$\begin{cases} g_{03}^{(1)}(x, y) = \mu \cosh(y) \cosh(x), \\ g_{03}^{(2)}(x, y) = -\mu \sinh(y) \sinh(x) - \left(y \cosh(x) - \frac{\sinh(1)}{2} \right). \end{cases} \quad (4.46)$$

- Le terme source sur Ω noté par $f = (f_1, f_2)$, est donné par :

$$\begin{cases} f_1(x, y) = -2\mu \cosh(x) \sinh(y) + y \sinh(x), \\ f_2(x, y) = 2\mu \cosh(y) \sinh(x) + \cosh(x), \end{cases} \quad (4.47)$$

où $\mu = 0.1$,

Nous visons ainsi à reconstruire le champ de vitesse et de pression sur la partie du bord Γ_1 , en utilisant les données ci-dessus qui sont associées à la solution exacte suivante :

$$\begin{cases} ue_1(x, y) = \cosh(x) \sinh(y), \\ ue_2(x, y) = -\cosh(y) \sinh(x), \\ pe(x, y) = y \cosh(x) - \frac{\sinh(1)}{2}. \end{cases} \quad (4.48)$$

Alors, en se basant sur les données (4.43), (4.44), (4.45), (4.46) et (4.47) et en choisissant une donnée initiale adéquate satisfaisant la condition de compatibilité (4.37), nous présentons quelques résultats numériques prouvant l'efficacité de l'approche proposée. Dans les figures 4.2, 4.3 et 4.4, nous présentons les solutions exacte et approchée des deux composantes du champ de vitesse et de la pression. Ces résultats numériques obtenus, par les algorithmes du point fixe, de "Neumann-Neumann" et de "Robin-Robin" montrent que ces méthodes donnent de bonnes approximations de la solution. La comparaison entre les

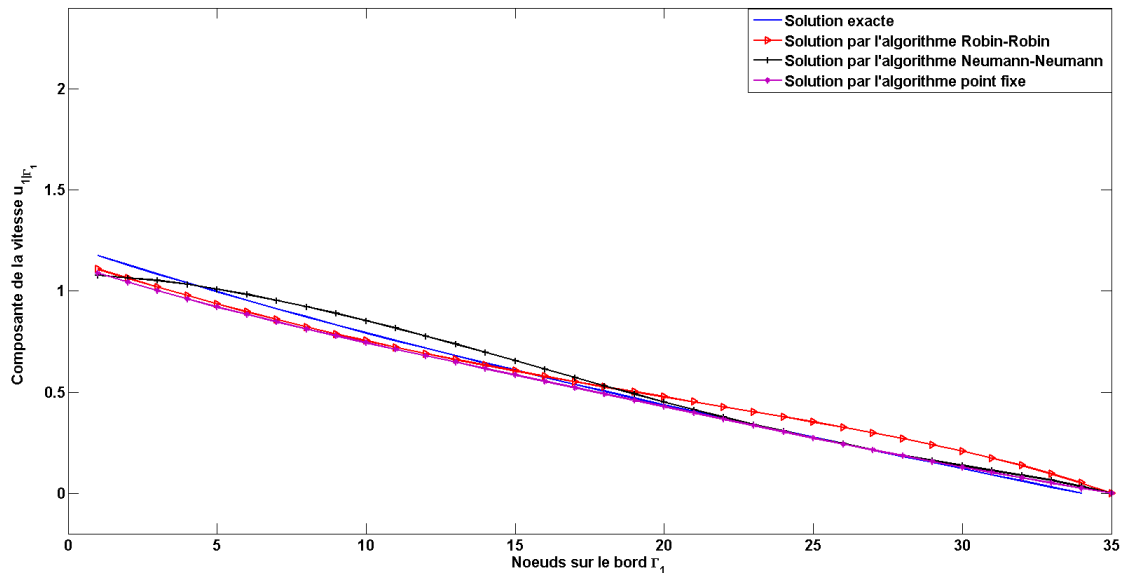


FIGURE 4.2 – Les solutions exacte et approchée de la première composante de la vitesse u_1 .

algorithmes du point fixe, "Neumann-Neumann" et "Robin-Robin" en fonction du nombre d'itérations et du temps d'exécution est illustrée dans la table 4.1, pour $\theta = 1.8$, $s_1 = 0.1$

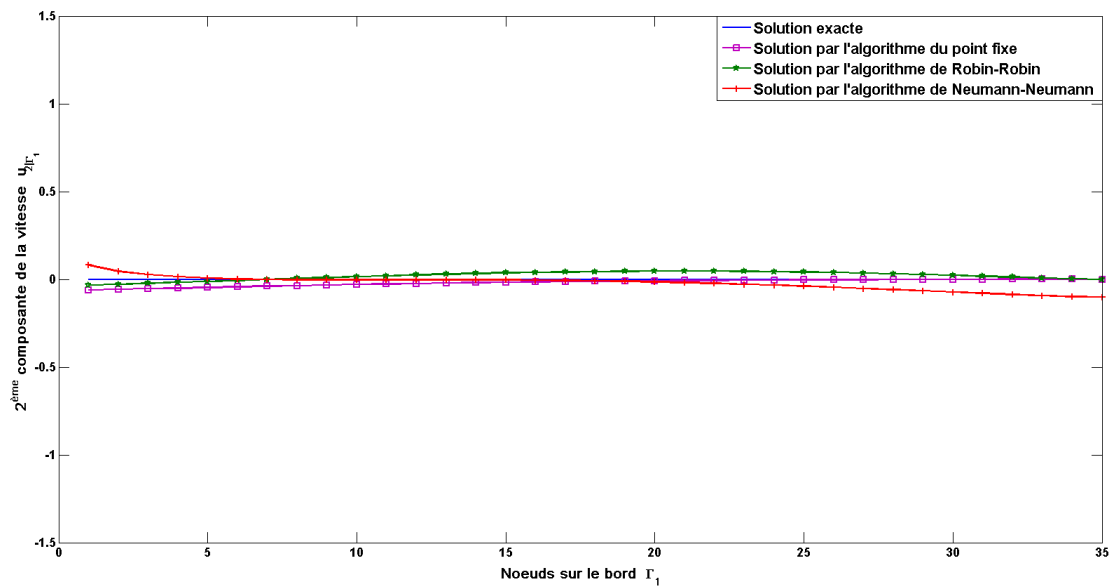


FIGURE 4.3 – Les solutions exacte et approchée de la deuxième composante de la vitesse u_2 .

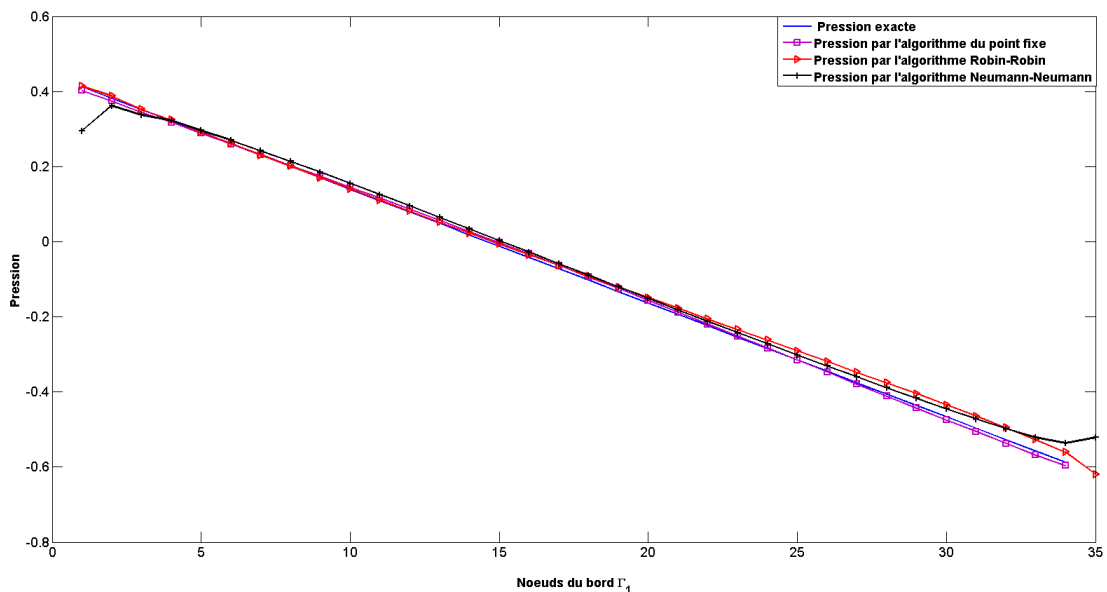


FIGURE 4.4 – Les solutions exacte et approchée de la pression p .

et $s_2 = 1$ dans le cas d'algorithme de "Neumann-Neumann" et pour $\gamma_1 = 0.3$ et $\gamma_2 = 0.1$ dans le cas d'algorithme de "Robin-Robin". Ce choix optimal de ces paramètres a été approuvé par une étude de la variation de l'erreur de la vitesse et de la pression en fonction de ces paramètres. On peut bien constater, en outre de la bonne approximation de la solution, que ces algorithmes dérivant de la décomposition du domaine offrent une approche alternative efficace et rapide pour résoudre numériquement le problème inverse de

Cauchy.

	Erreur sur Γ_1	Nombre d'itérations	Temps d'exécution (s)
Algorithme du point fixe	0.034	64	70.92
Algorithme du Neumann-Neumann	0.035	55	60.11
Algorithme du Robin-Robin	0.031	37	19.5

TABLE 4.1 – Comparaison entre les algorithmes du point fixe, "Neumann-Neumann" et "Robin-Robin" $h = \frac{1}{32}$, $\gamma_1 = 0.3$, $\gamma_2 = 0.1$

Dans le but de choisir les paramètres adéquats θ , s_1 , s_2 , γ_1 et γ_2 intervenant dans les algorithmes "Neumann-Neumann" et "Robin-Robin," nous étudions la variation de l'erreur commise pour la vitesse et la pression. Nous présentons ainsi dans les figures 4.5 et 4.6 l'évolution de l'erreur de la vitesse et de la pression par rapport à s_1 et s_2 en fixant θ . On

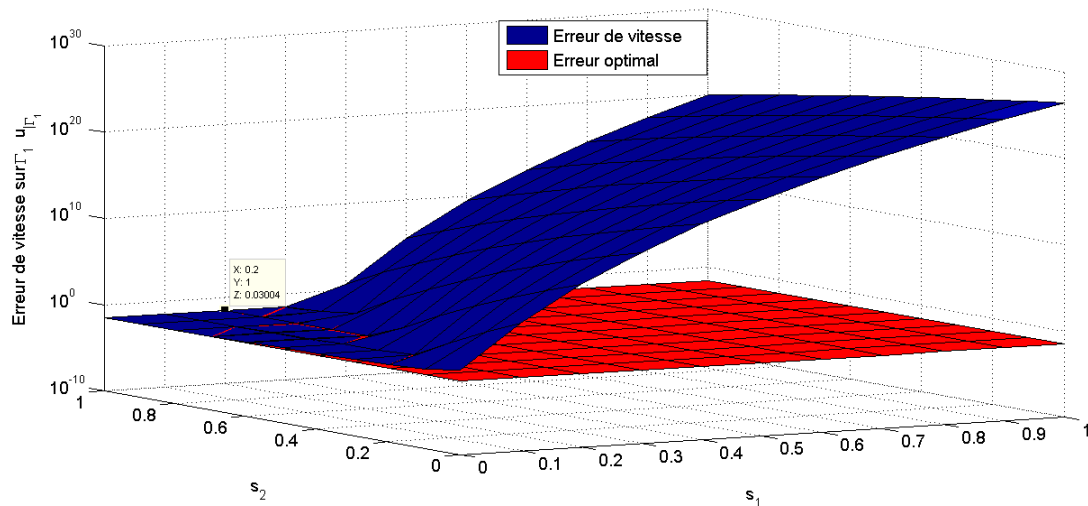
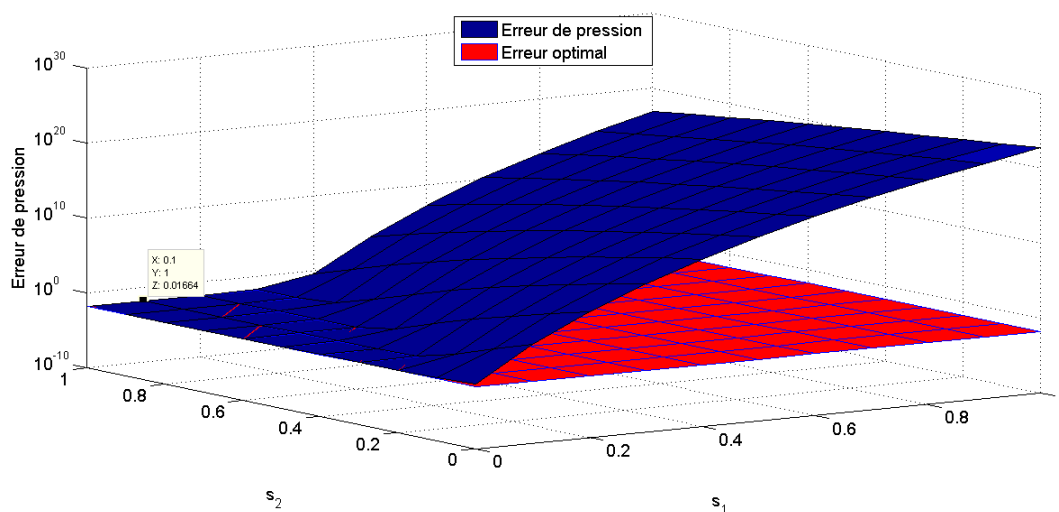
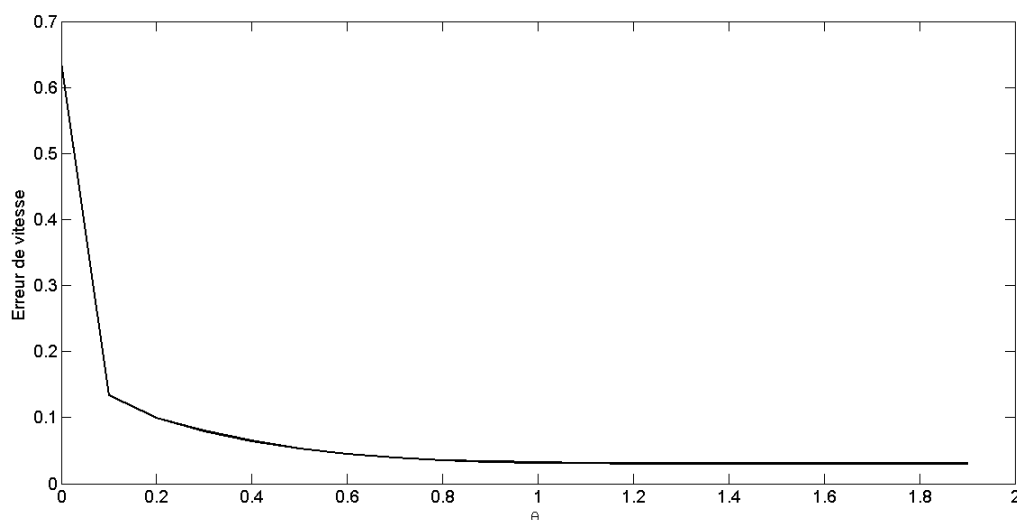


FIGURE 4.5 – Evolution d'erreur de la vitesse en fonction de s_1 et s_2 pour $\theta = 1$

constate ainsi que pour une valeur fixée $\theta = 1$, l'algorithme "Neumann-Neumann" converge pour (s_1, s_2) appartient à l'intervalle $[0, 0.2] \times [0.6, 1]$ et diverge ailleurs. A partir de ces figures, la valeur optimale de (s_1, s_2) correspondant à l'erreur optimale associée aux champs de vitesse et de pression est $(0.1; 1)$. Maintenant, en fixant (s_1, s_2) à sa valeur optimale, nous faisons varier θ . Nous présentons ainsi dans la figure 4.7 la variation de l'erreur en fonction de θ , nous pouvons déduire que la valeur optimale est $\theta = 1.8$.

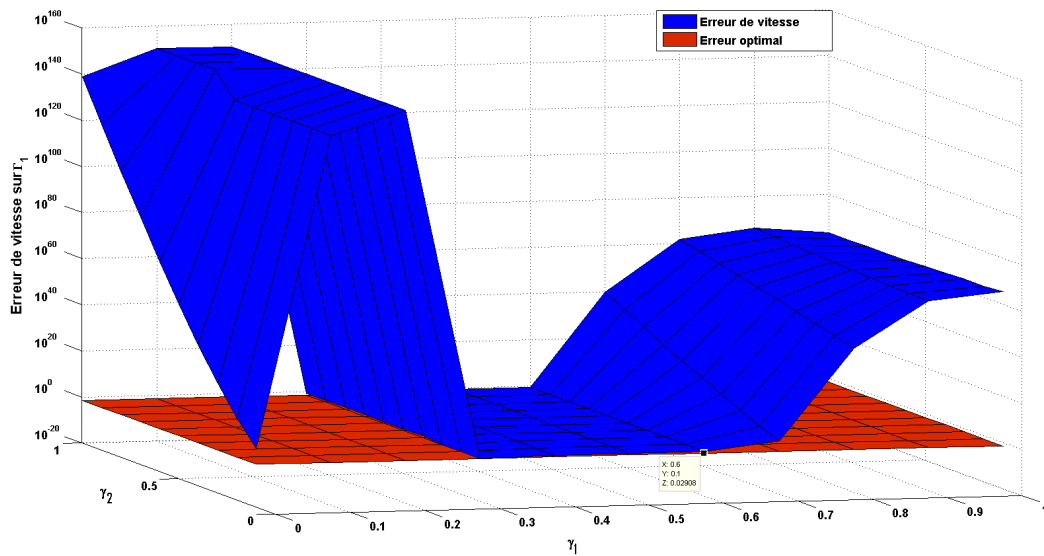
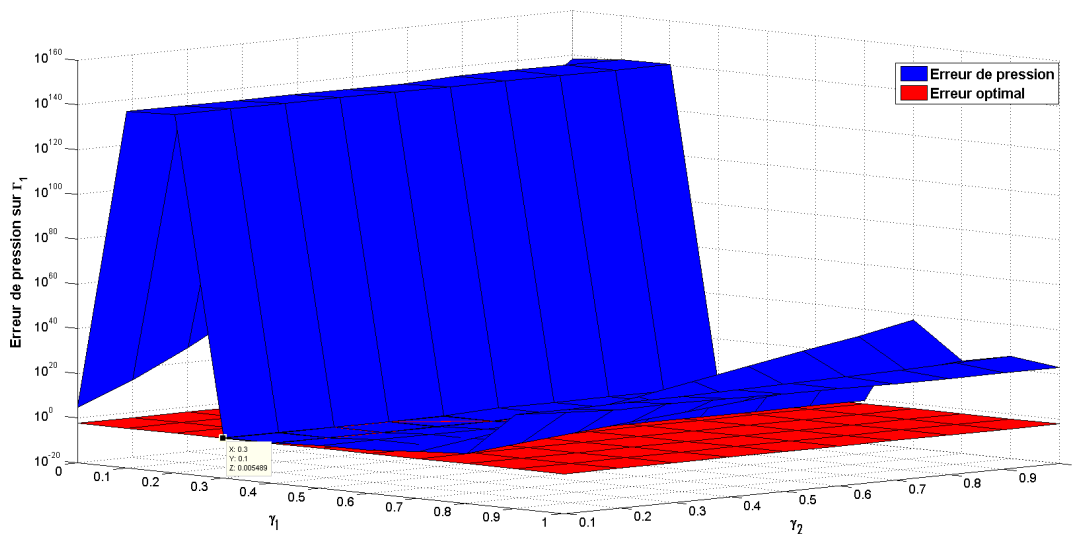
Nous présentons dans les figures 4.8 et 4.9 l'évolution de l'erreur de la vitesse et de la pression par rapport à γ_1 et γ_2 . Comme nous pouvons le remarquer, l'algorithme "Robin-Robin" converge pour (γ_1, γ_2) appartenant à l'intervalle $[0.3, 0.6] \times [0, 1]$ et diverge ailleurs. A partir de ces figures, nous constatons que la valeur optimale de (γ_1, γ_2) correspondant à l'erreur optimale associée aux champs de vitesse et de pression est $(0.3, 0.1)$.

FIGURE 4.6 – Evolution d’erreur de la pression en fonction de s_1 et s_2 pour $\theta = 1$ FIGURE 4.7 – Evolution d’erreur en fonction de θ pour $(s_1, s_2) = (0.1, 1)$

Dans la suite, nous allons nous intéresser à la convergence numérique des différents algorithmes présentés ci-dessus.

Convergence numérique

Dans cette section, nous cherchons à étudier la convergence des solutions en fonction du pas de la discrétisation. Pour cela, nous résolvons le problème de Cauchy (4.1) en utilisant les différents algorithmes mentionnés ci-dessus, pour les données (4.43), (4.44), (4.45), (4.46) et (4.47). Ainsi, en prenant le pas de discrétisation $h \in \{1/16, 1/32, 1/64, 1/128\}$, on re-

FIGURE 4.8 – Evolution d’erreur de vitesse en fonction de γ_1 et γ_2 .FIGURE 4.9 – Evolution d’erreur de pression en fonction de γ_1 et γ_2 .

marque que les trois algorithmes sont convergents. Ceci est illustré dans les figures 4.10, 4.11 et 4.12, dans lesquelles nous présentons l’évolution de la solution numérique obtenue par l’algorithme 1 en fonction du pas de la discrétisation h . Dans les figures 4.13, 4.14 et 4.15, nous présentons également la convergence de la solution obtenue en utilisant l’algorithme 2, et dans les figures 4.16, 4.17 et 4.18, nous illustrons la variation de la solution numérique obtenue par l’algorithme 3 en fonction du pas de la discrétisation h .

Des résultats de comparaison des erreurs entre les solutions exacte et approchée pour les différentes valeurs de h sont illustrés, respectivement pour les trois algorithmes dans les tables 4.2, 4.3 et 4.4. Nous constatons ainsi que l'erreur décroît en fonction du pas de la discrétisation.

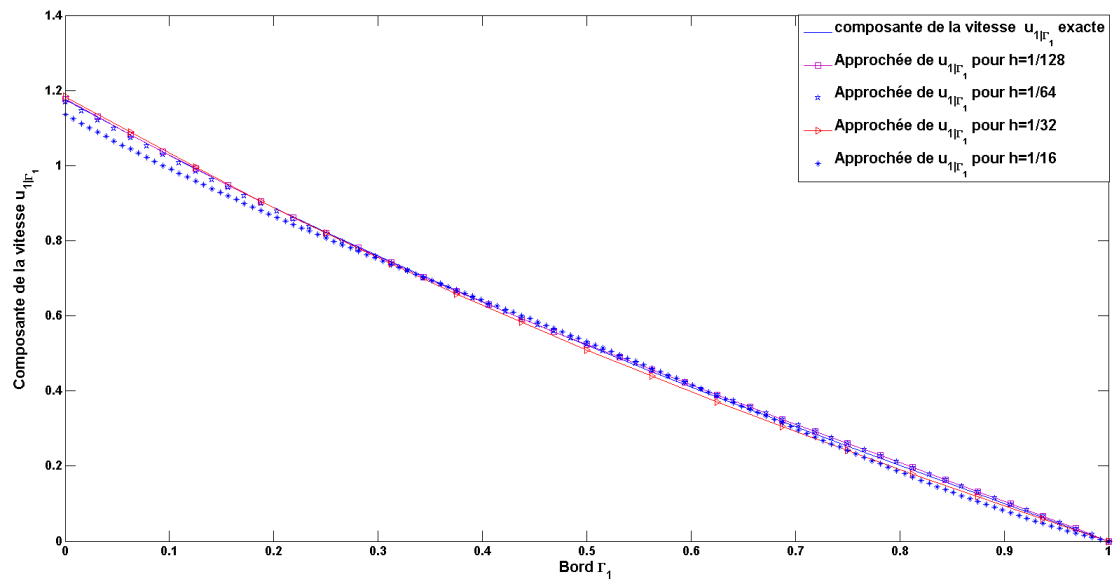


FIGURE 4.10 – La solution exacte (composante de la vitesse u_1) et la solution approchée obtenue par la méthode du point fixe pour les différentes valeurs de h .

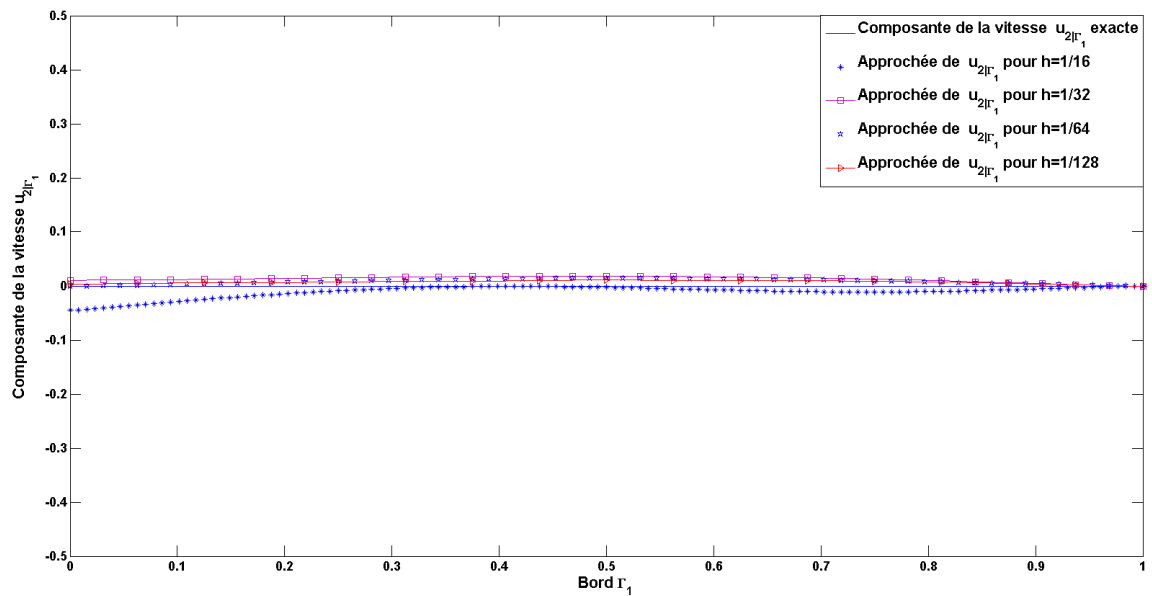


FIGURE 4.11 – La solution exacte (composante de la vitesse u_2) et la solution approchée obtenue par la méthode du point fixe pour les différentes valeurs de h .

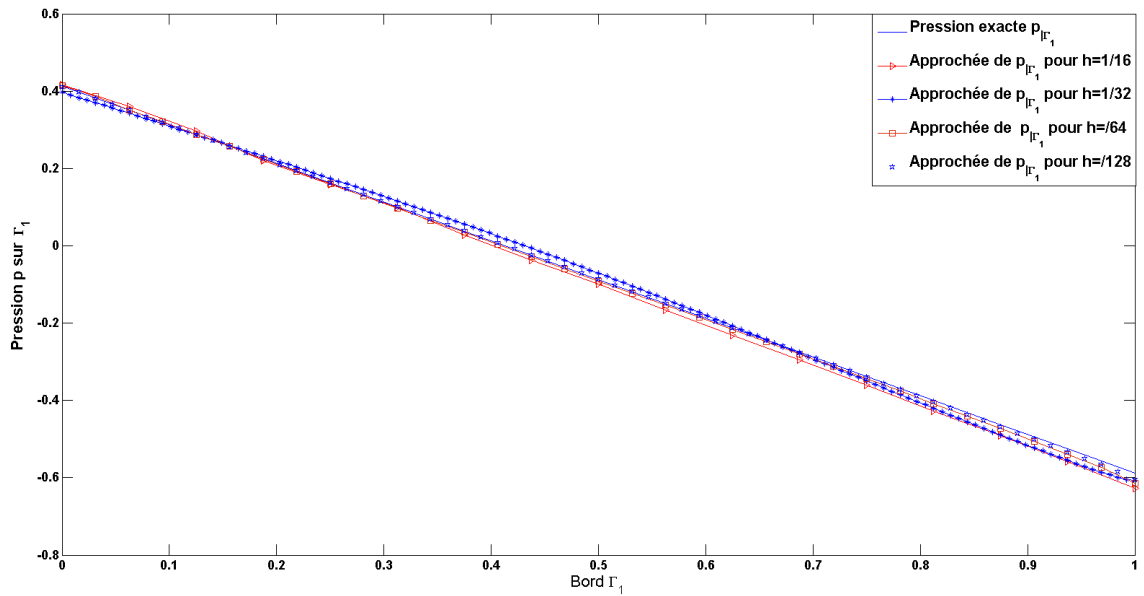


FIGURE 4.12 – La pression exacte et approchée obtenue par la méthode du point fixe pour les différentes valeurs de h .

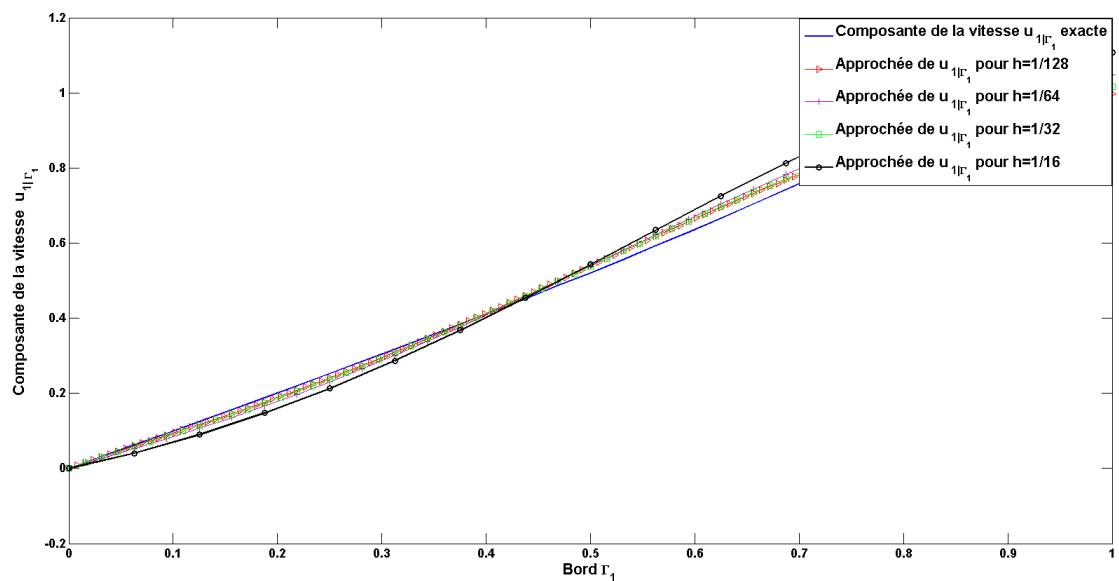


FIGURE 4.13 – La solution exacte (composante de la vitesse u_1) et la solution approchée obtenue par l'algorithme "Neumann-Neumann" pour les différentes valeurs de h .

Nous nous intéressons maintenant à la comparaison entre les différents algorithmes point fixe, "Neumann-Neumann" et "Robin-Robin" en terme d'évolution de l'erreur des deux grandeurs vitesse et pression en fonction du nombre d'itérations. Ainsi, nous présentons dans la figure 4.19 la variation de l'erreur de la composante de la vitesse u_1 sur la

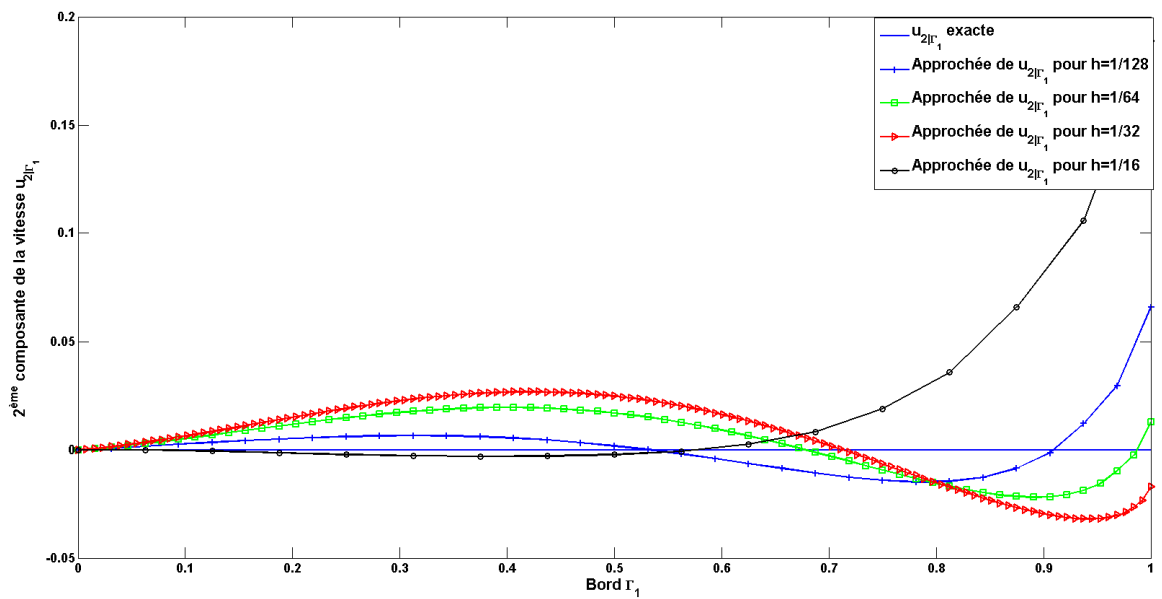


FIGURE 4.14 – La solution exacte (composante de la vitesse u_2) et la solution approchée obtenue par l'algorithme "Neumann-Neumann" pour les différentes valeurs de h .

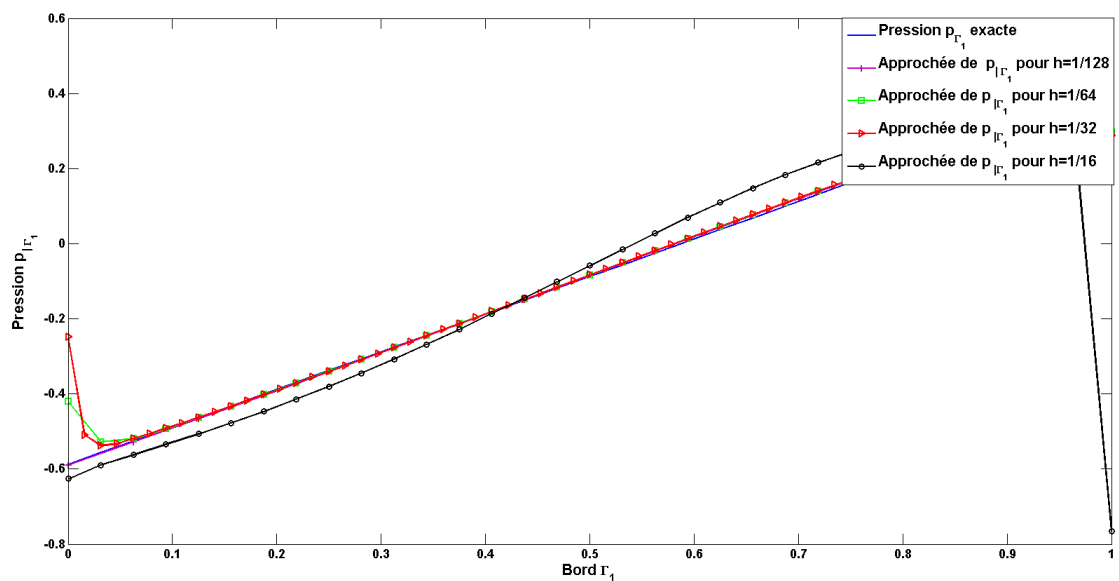


FIGURE 4.15 – La pression exacte et approchée obtenue par l'algorithme "Neumann-Neumann" pour les différentes valeurs de h .

partie du bord inaccessible Γ_1 en fonction du nombre d'itérations, la variation de l'erreur sur la pression est illustrée dans la figure 4.20.

Cette comparaison nous permet donc de constater que l'algorithme "Robin-Robin" est le meilleur de point de vue qualité de la solution aussi bien qu'au niveau de la vitesse

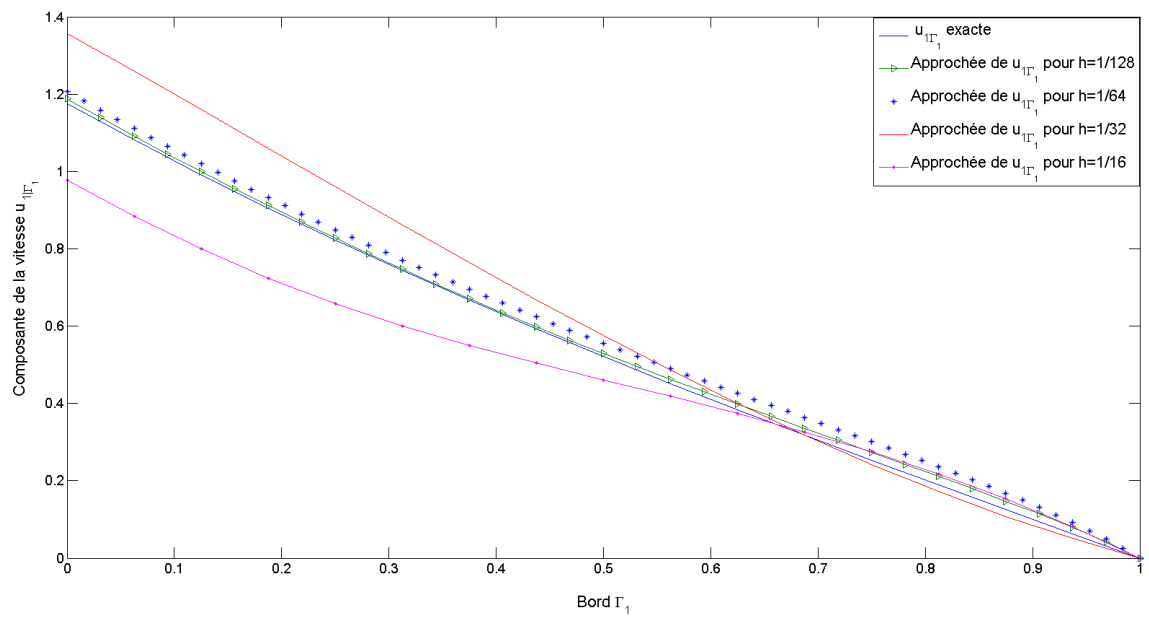


FIGURE 4.16 – La solution exacte (composante de la vitesse u_1) et la solution approchée obtenue par l’algorithme Robin-Robin pour les différentes valeurs de h .

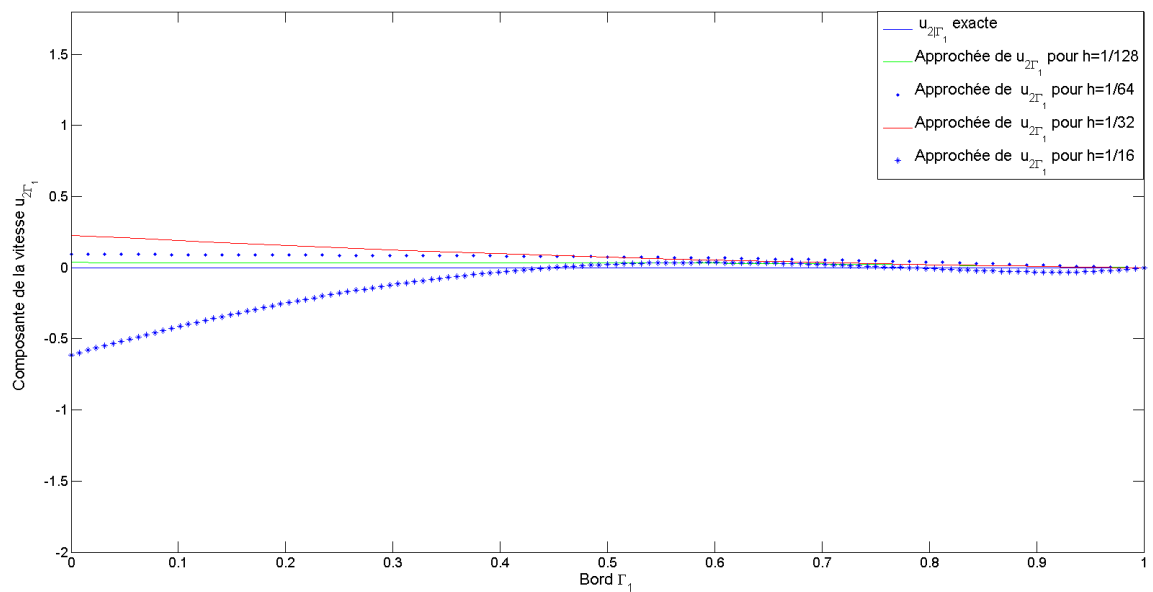


FIGURE 4.17 – La solution exacte (composante de la vitesse u_2) et la solution approchée obtenue par l’algorithme Robin-Robin pour les différentes valeurs de h .

d’exécution.

Nous allons par la suite, étudier la question de la stabilité numérique des solutions obtenues en utilisant les différents algorithmes.

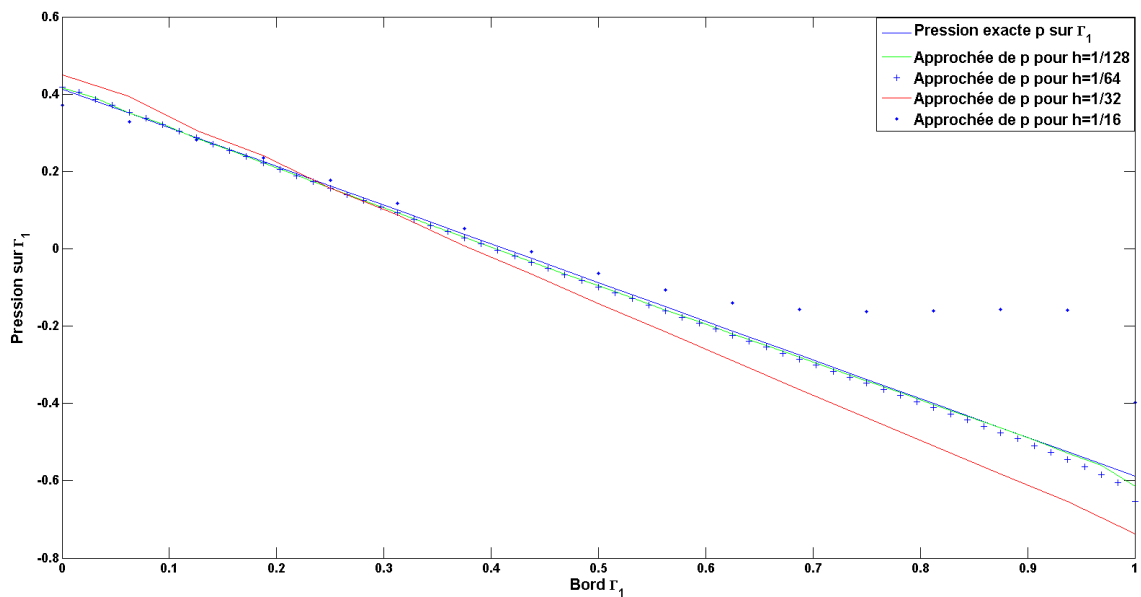


FIGURE 4.18 – La pression exacte et approchée obtenue par l’algorithme Robin-Robin pour les différentes valeurs de h .

h	1/16	1/32	1/64	1/128
Erreur sur la composante de vitesse $u_1 _{\Gamma_1}$	$1.84 \cdot 10^{-2}$	$8.80 \cdot 10^{-3}$	$5.18 \cdot 10^{-3}$	$3.50 \cdot 10^{-3}$
Erreur sur la composante de vitesse $u_2 _{\Gamma_1}$	$1.51 \cdot 10^{-2}$	$1.38 \cdot 10^{-2}$	$9.24 \cdot 10^{-3}$	$7.91 \cdot 10^{-3}$
Erreur sur la pression $p _{\Gamma_1}$	$1.89 \cdot 10^{-2}$	$1.63 \cdot 10^{-2}$	$6.91 \cdot 10^{-3}$	$3.75 \cdot 10^{-3}$

TABLE 4.2 – Les erreurs entre la solution exacte et approchée obtenue par la méthode du point fixe pour les différentes valeurs du pas de la discrétisation h .

h	1/16	1/32	1/64	1/128
Erreur sur $u_1 _{\Gamma_1}$	$4.78 \cdot 10^{-2}$	$4.18 \cdot 10^{-2}$	$3.30 \cdot 10^{-2}$	$3.11 \cdot 10^{-2}$
Erreur sur $u_2 _{\Gamma_1}$	$6.63 \cdot 10^{-2}$	$3.99 \cdot 10^{-2}$	$3.96 \cdot 10^{-2}$	$3.07 \cdot 10^{-2}$
Erreur sur $p _{\Gamma_1}$	$2.07 \cdot 10^{-2}$	$1.80 \cdot 10^{-2}$	$1.78 \cdot 10^{-2}$	$1.65 \cdot 10^{-2}$

TABLE 4.3 – Les erreurs entre la solution exacte et approchée obtenue par la méthode Neumann-Neumann pour les différentes valeurs du pas de la discrétisation h .

h	1/16	1/32	1/64	1/128
Erreur sur $u_1 _{\Gamma_1}$	$3.55 \cdot 10^{-1}$	$3.55 \cdot 10^{-2}$	$1.28 \cdot 10^{-2}$	$6.07 \cdot 10^{-3}$
Erreur sur $u_2 _{\Gamma_1}$	$1.41 \cdot 10^{-1}$	$7.12 \cdot 10^{-2}$	$2.69 \cdot 10^{-2}$	$1.13 \cdot 10^{-2}$
Erreur sur $p _{\Gamma_1}$	$3.37 \cdot 10^{-1}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$8.51 \cdot 10^{-3}$	$4.96 \cdot 10^{-3}$

TABLE 4.4 – Les erreurs entre la solution exacte et approchée obtenue par la méthode de Robin-Robin pour les différentes valeurs du pas de discrétisation h .

Stabilité numérique

Il est bien connu que les problèmes inverses de Cauchy sont mal posés au sens de Hadamard [54]. Il est ainsi indispensable d’examiner la stabilité numérique des solutions

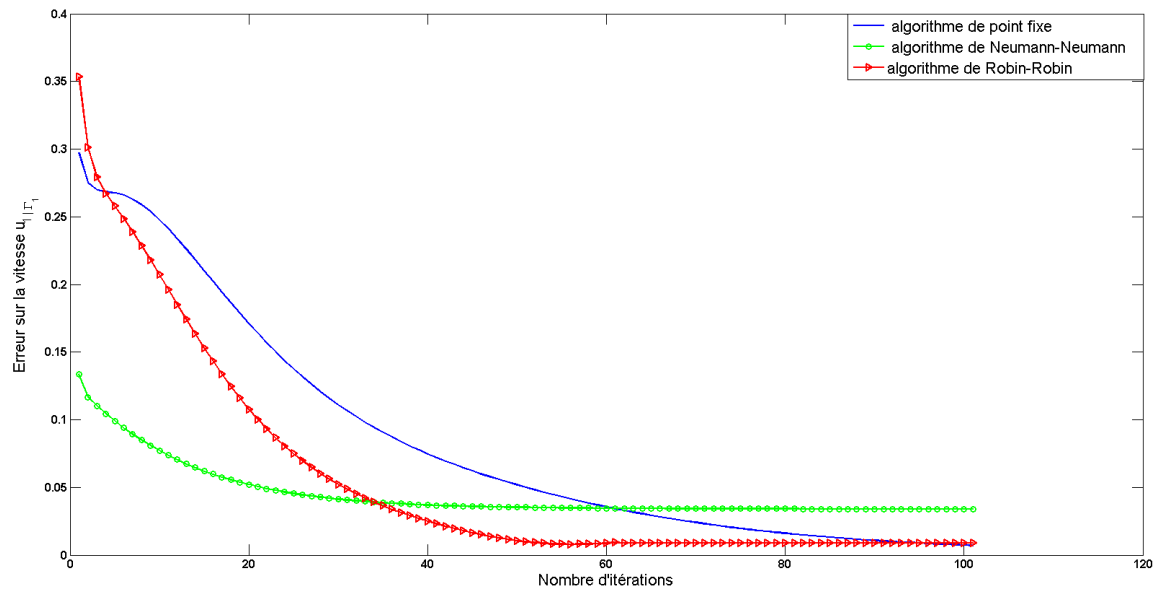


FIGURE 4.19 – la variation d’erreur de la composante de la vitesse u_1 sur Γ_1 en fonction du nombre d’itérations pour les différents algorithmes.

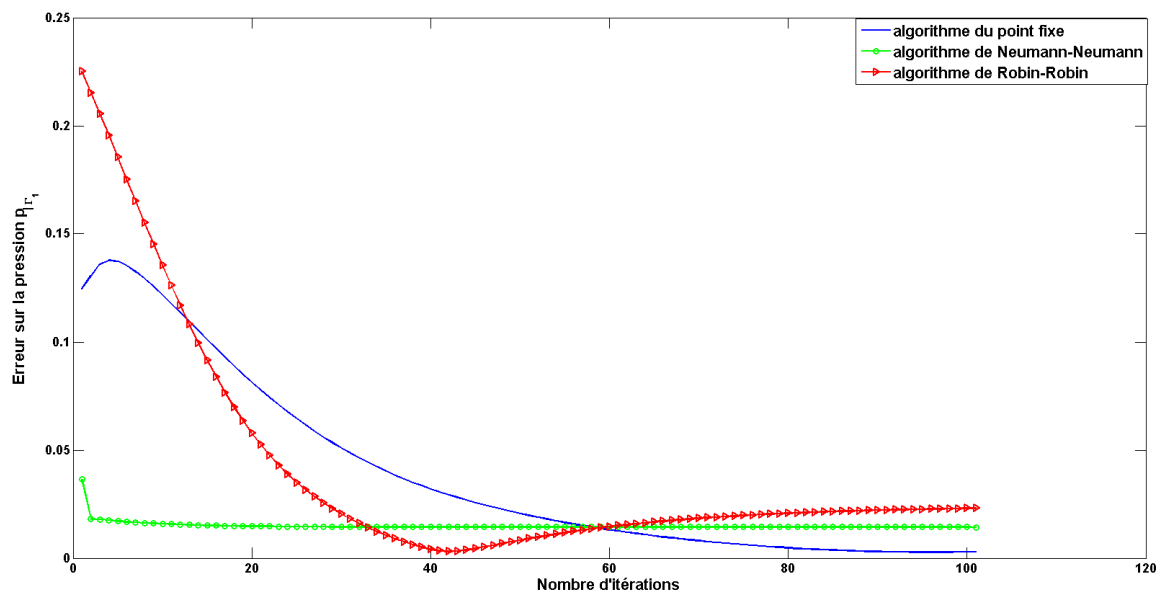


FIGURE 4.20 – la variation d’erreur de pression p sur Γ_1 en fonction du nombre d’itérations pour les différents algorithmes.

obtenues par les différents algorithmes proposés. Plus précisément, nous allons étudier le comportement de ces algorithmes en présence de petites perturbations sur les données. En effet, les données de type Dirichlet et Neumann sur Γ_0 sont perturbées pour simuler des erreurs de mesure telles que

$$g_{02}^\delta = g_{02} + \delta g_{02} \text{ sur } \Gamma_{02} \text{ et } h_{02} = h_{02} + \delta h_{02} \text{ sur } \Gamma_{02},$$

où δ est le niveau de bruit, $\delta g_{02} = g_{02} * \delta * (2 * rand - 1)$ et $\delta h_{02} = h_{02} * \delta * (2 * rand - 1)$ sont des bruits gaussiens de moyenne nulle. Ils sont générés par une fonction appropriée "rand" qui retourne une valeur pseudo-aléatoire choisie par une distribution uniforme sur $[0, 1]$. Notons par la suite par (u^δ, p^δ) la solution du problème inverse perturbé. Afin de montrer que les approches proposées sont numériquement stables, nous introduisons un bruit uniformément distribué pour différentes valeurs du niveau $\delta = 0.025, \delta = 0.05$ et $\delta = 0.1$ sur les données correspondant au même exemple présenté dans la section 4.4. Ensuite, nous allons comparer la solution exacte et la solution approchée associée aux différents niveaux de bruit δ pour les algorithmes du point fixe, "Neumann-Neumann" et "Robin-Robin".

Dans les figures 4.21, 4.22 et 4.23, nous présentons la solution exacte, approchée et perturbée des deux composantes de la vitesse (u_1, u_2) aussi bien la pression p .

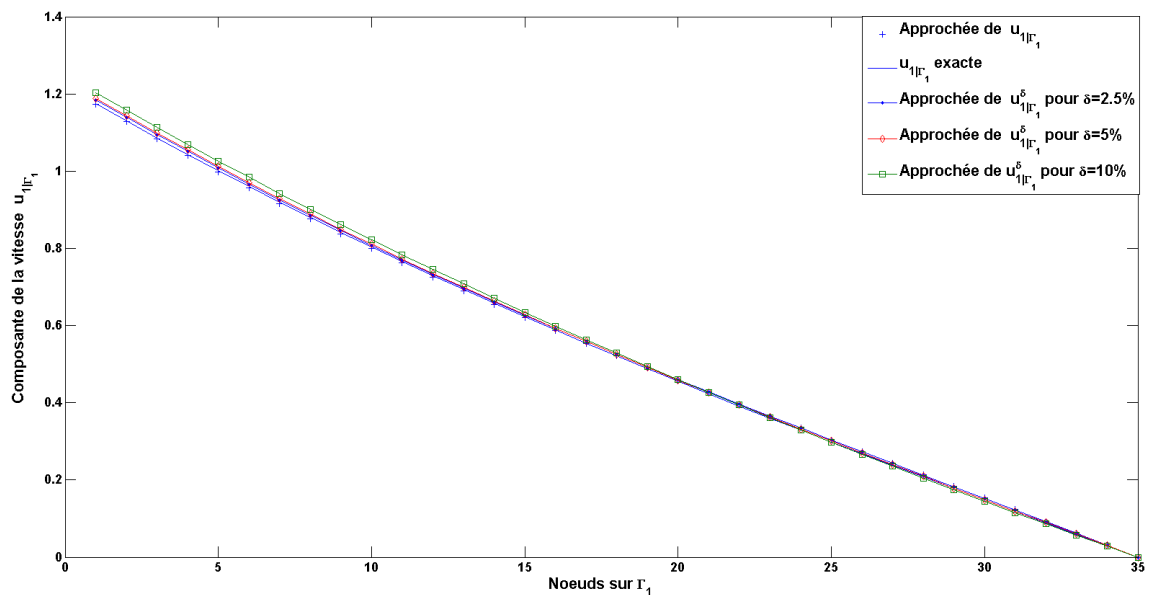


FIGURE 4.21 – Solution exacte (composante de la vitesse u_1), approchée et perturbée obtenues par l'algorithme du point fixe.

Nous constatons des petites variations de la solution en fonction du niveau de bruit, mais l'erreur satisfait tout de même l'estimation de stabilité suivante

$$\|u_{exacte} - u_{approchée}^\delta\|_{0,\Gamma_1,d} \leq \delta.$$

Ainsi en utilisant l'algorithme "Neumann-Neumann", pour les valeurs optimales $s_1 = 0.1$,

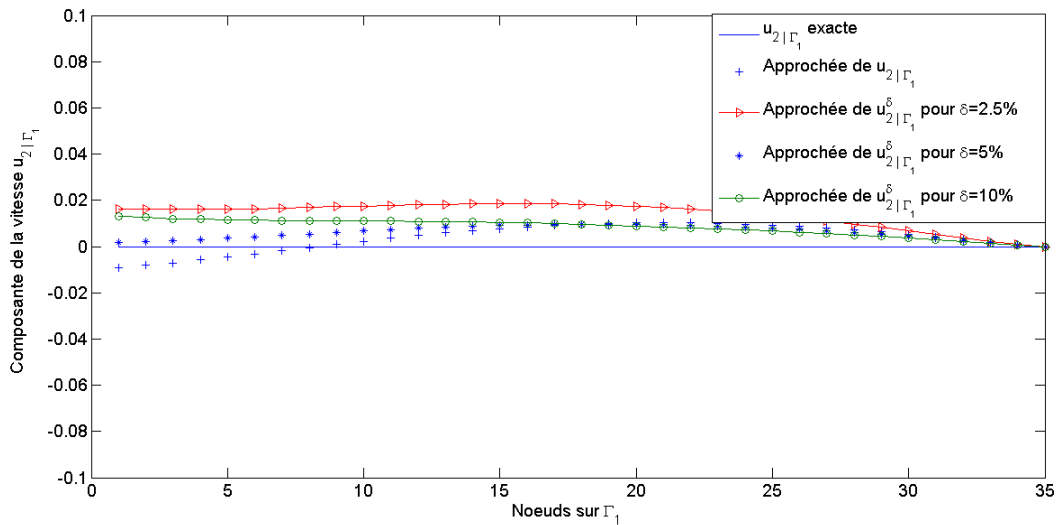


FIGURE 4.22 – Solution exacte (composante de vitesse u_2), approchée et perturbée obtenues par l'algorithme du point fixe.

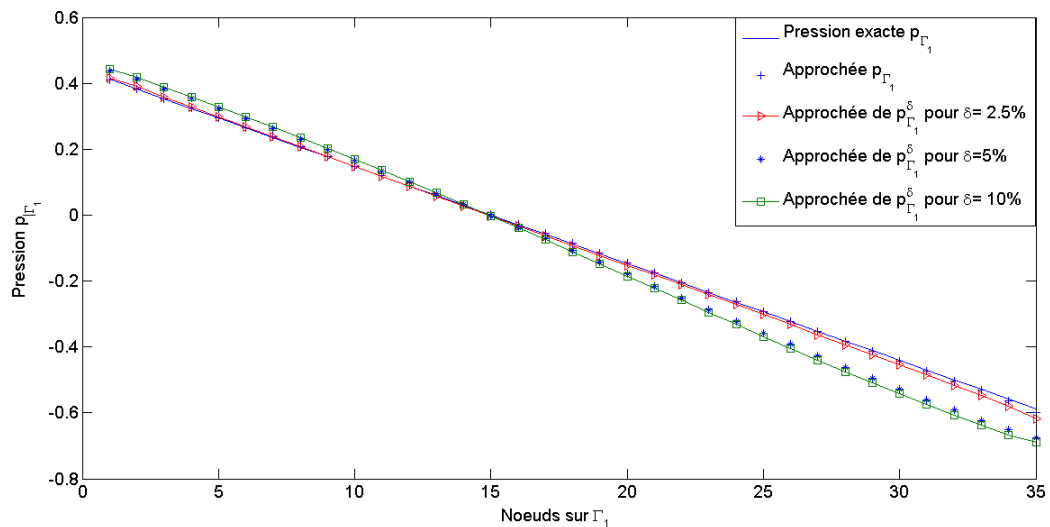


FIGURE 4.23 – Pression exacte, approchée et perturbée obtenues par l'algorithme du point fixe.

$s_2 = 0.2$ et $\theta = 1.8$, nous présentons dans les figures 4.24, 4.25 et 4.26 les solutions exacte, approchée et perturbée pour différentes valeurs du niveau de bruit 2.5%, 5%, 10%. Ces figures montrent que l'algorithme "Neumann-Neumann" est stable.

Maintenant, en utilisant l'algorithme "Robin-Robin", pour les valeurs optimales $\gamma_1 = 0.3$ et $\gamma_2 = 0.1$, nous présentons dans les figures 4.27, 4.28 et 4.29 les solutions exacte, approchée et perturbée pour les différentes valeurs des niveaux de bruit 2.5%, 5%, 10%. Ces figures illustrent bien la stabilité de la solution obtenue via l'algorithme Robin-Robin. Nous constatons à partir de cette analyse que les approches proposées ont les mêmes

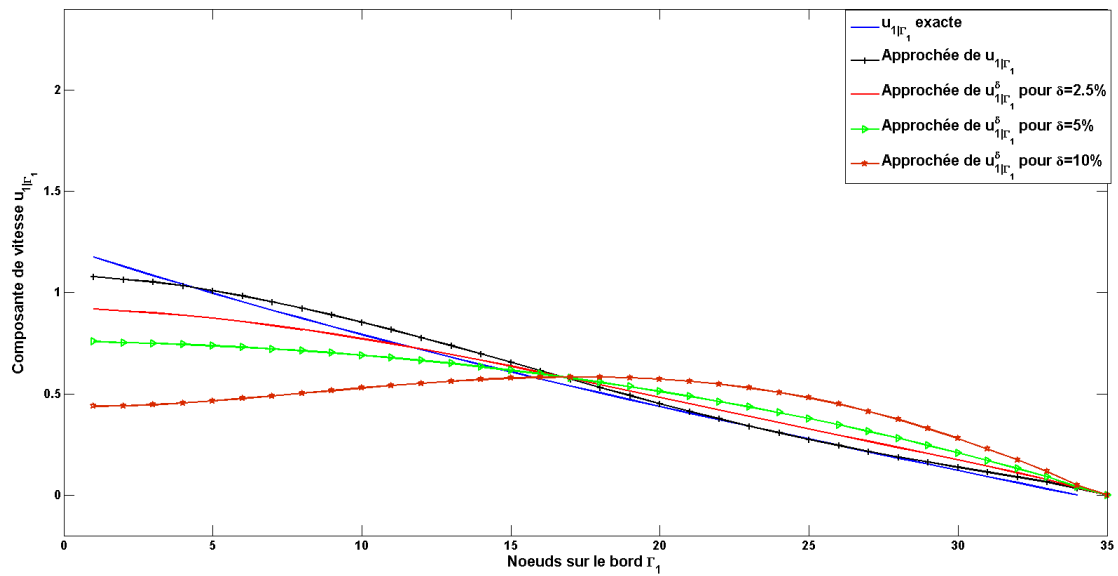


FIGURE 4.24 – Solution exacte (composante de la vitesse u_1), approchée et perturbée obtenues par l'algorithme "Neumann-Neumann".

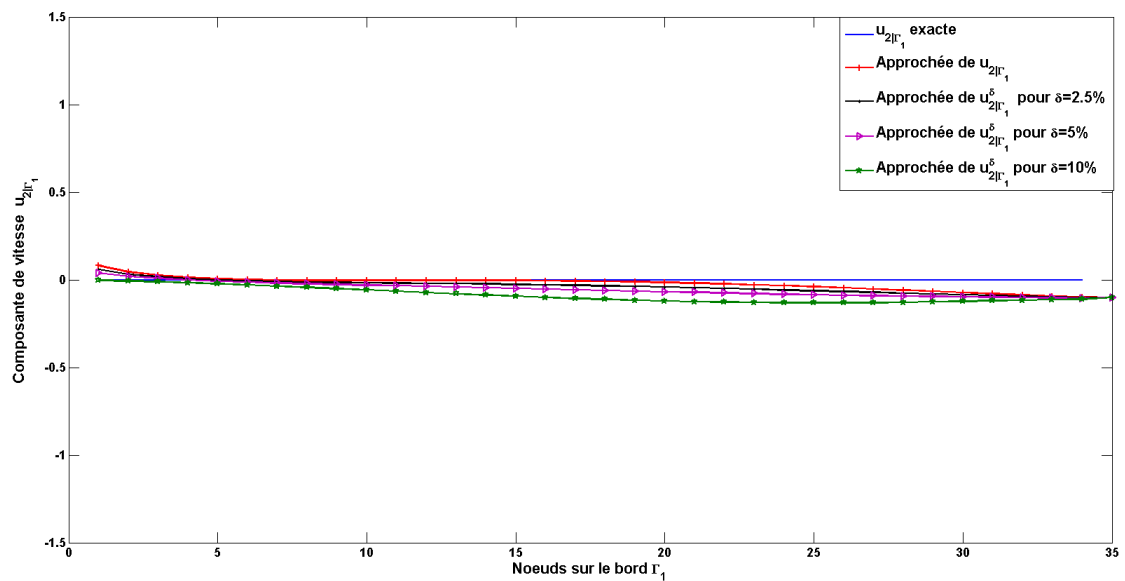


FIGURE 4.25 – Solution exacte (composante de la vitesse u_2), approchée et perturbée obtenues par l'algorithme "Neuamnn-Neumann".

avantages connus de l'algorithme KMF, en l'occurrence le caractère régularisant.

Nous allons maintenant considérer d'autres exemples afin de valider l'efficacité des différents algorithmes proposés.

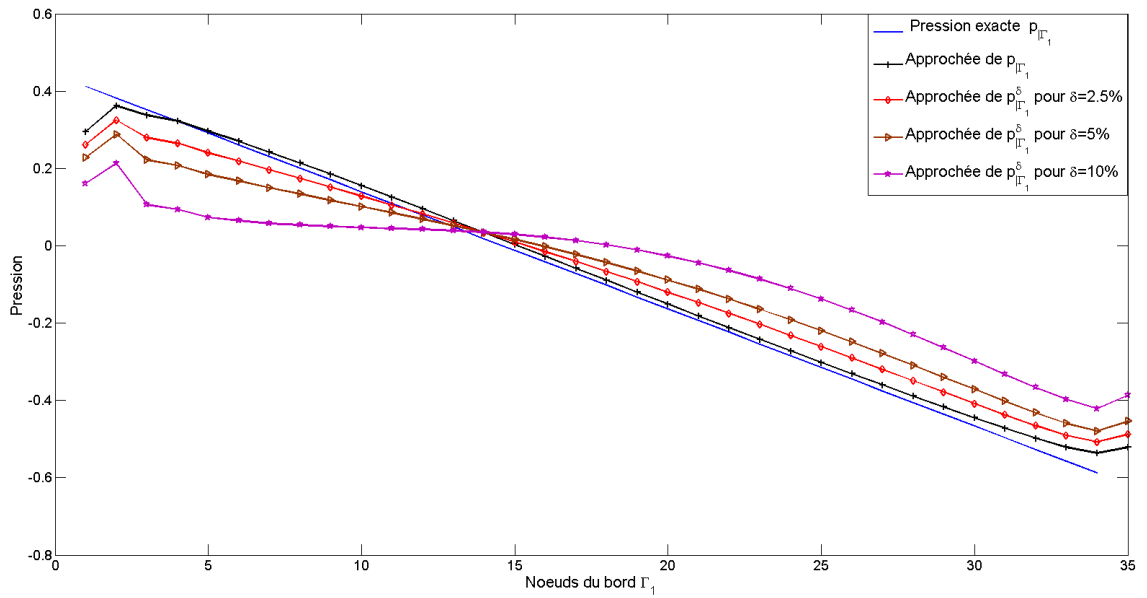


FIGURE 4.26 – Pression exacte, approchée et perturbée obtenues par l'algorithme "Neumann-Neumann".

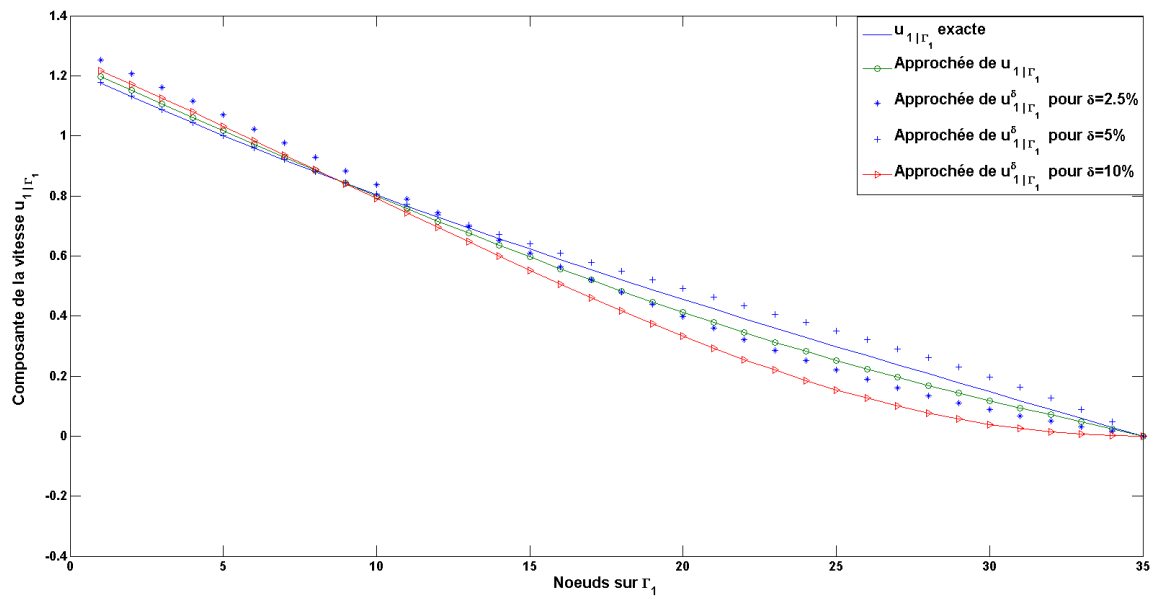


FIGURE 4.27 – Solutions exacte (composante de la vitesse u_1), approchée et perturbée obtenues par l'algorithme "Robin-Robin".

Exemple 2

Dans cette exemple, nous allons considérer encore le domaine rectangulaire (Figure 4.1), et nous cherchons à approcher une solution trigonométrique du problème inverse de Cauchy (4.1) associée aux données suivantes :

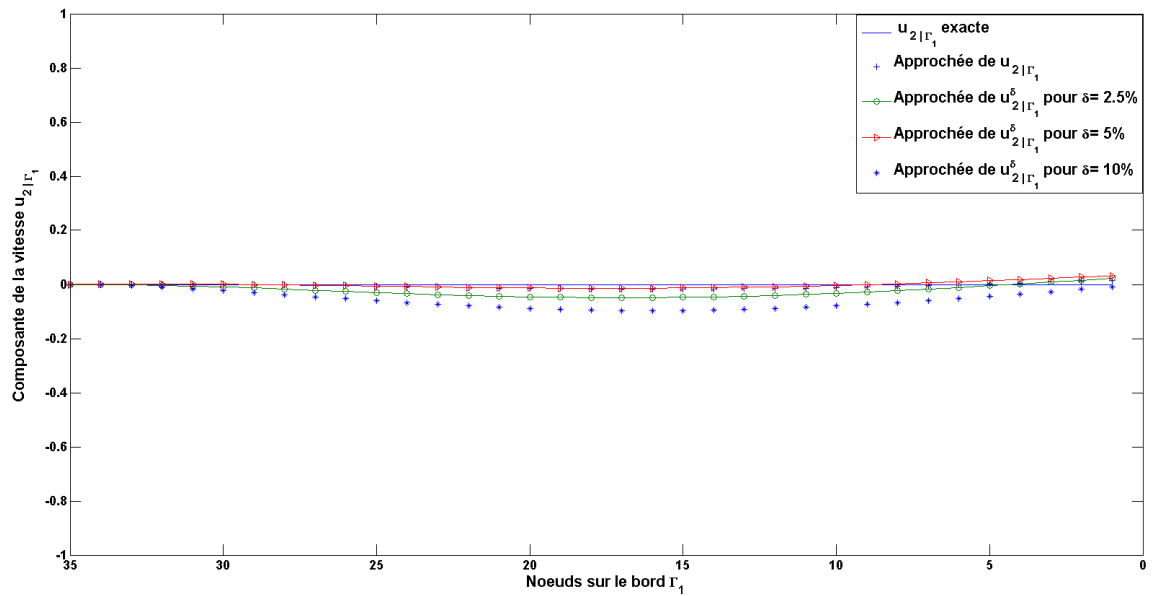


FIGURE 4.28 – Solution exacte (composante de la vitesse u_2), approchée et perturbée obtenues par l'algorithme "Robin-Robin".

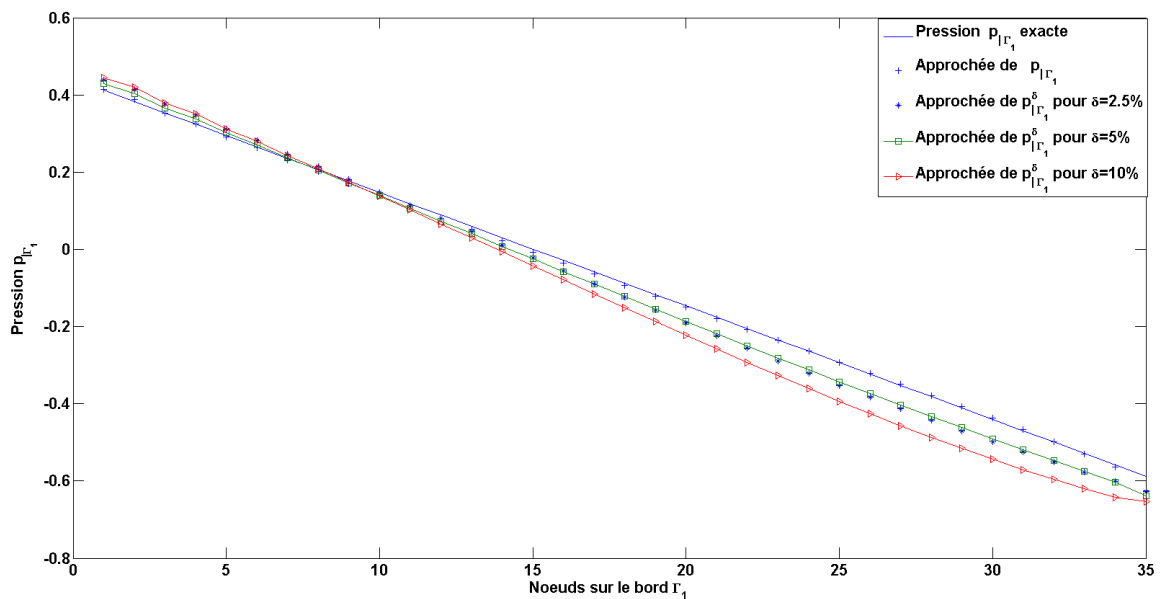


FIGURE 4.29 – Pression exacte, approchée et perturbée obtenues par l'algorithme "Robin-Robin".

- La donnée de Dirichlet sur Γ_{01} , est donnée par :

$$\begin{cases} h_{01}^{(1)}(x, y) = 0, \\ h_{01}^{(2)}(x, y) = \sin(x). \end{cases} \quad (4.49)$$

- Les données de Dirichlet et Neumann sur Γ_{02} , sont données par :

$$\begin{cases} h_{02}^{(1)}(x, y) = -\cos(1) \sin(y), \\ h_{02}^{(2)}(x, y) = \sin(1) \cos(y), \end{cases} \quad (4.50)$$

$$\begin{cases} g_{02}^{(1)}(x, y) = \mu(\sin(x) \sin(y)) - 2\pi(\cos(2\pi y) - \cos(2\pi x)), \\ g_{02}^{(2)}(x, y) = \mu(\cos(x) \cos(y)). \end{cases} \quad (4.51)$$

- La donnée de Neumann sur Γ_{03} , est donnée par :

$$\begin{cases} g_{03}^{(1)}(x, y) = -\mu \cos(x) \cos(y), \\ g_{03}^{(2)}(x, y) = -\mu \sin(x) \sin(y) - 2\pi(\cos(2\pi y) - \cos(2\pi x)). \end{cases} \quad (4.52)$$

- Le terme source sur Ω est donné par :

$$\begin{cases} f_1(x, y) = -2\mu \cos(x) \sin(y) + 4\pi^2 \sin(2\pi x), \\ f_2(x, y) = 2\mu \sin(x) \cos(y) - 4\pi^2 \sin(2\pi y), \end{cases} \quad (4.53)$$

où $\mu = 0.1$,

De même, nous visons à reconstruire le champ de vitesse et de pression sur la partie du bord Γ_1 , en utilisant les données ci-dessus qui sont associées à la solution exacte suivante :

$$\begin{cases} ue_1(x, y) = -\cos(x) \sin(y), \\ ue_2(x, y) = \sin(x) \cos(y), \\ pe(x, y) = 2\pi(\cos(2\pi y) - \cos(2\pi x)). \end{cases} \quad (4.54)$$

Alors, en se basant sur les données (4.49), (4.50), (4.51), (4.52) et (4.53) et en choisissant une donnée initiale adéquate satisfaisant la condition de compatibilité (4.37), nous présentons quelques résultats numériques prouvant également l'efficacité de l'approche proposée. Dans les figures 4.30, 4.31 et 4.32, nous présentons les solutions exacte et approchée des deux composantes du champ de vitesse et de la pression sur Γ_1 . Ces résultats numériques obtenus, par les algorithmes du point fixe, de "Neumann-Neumann" et de "Robin-Robin" montrent encore que ces méthodes donnent de bonnes approximations de la solution.

Exemple 3

Dans cette exemple, nous allons considérer cette fois-ci un domaine Ω sous la forme d'une couronne (Figure 4.33), dont le bord est $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, avec $\Gamma_0 = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \Gamma_{03}$, tel que

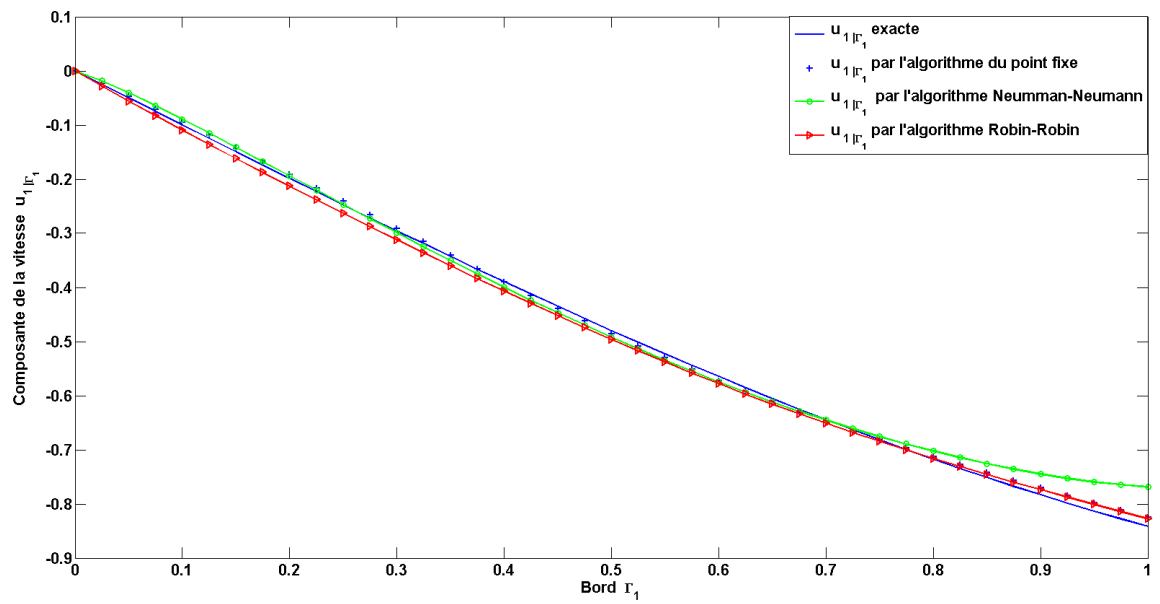


FIGURE 4.30 – Les solutions exacte et approchée de la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_1 .

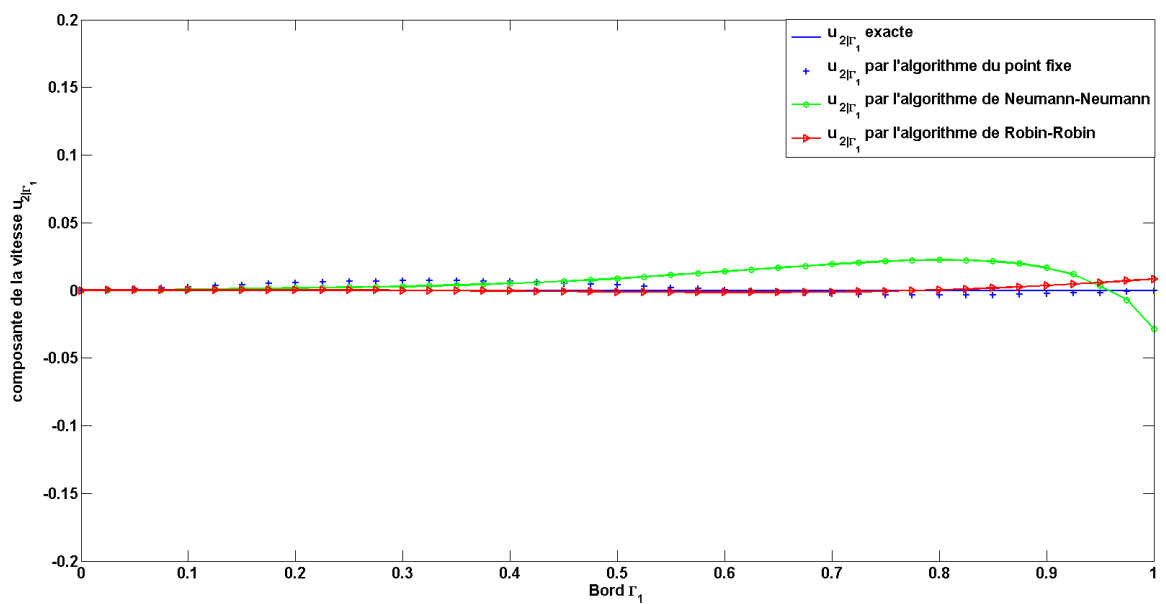


FIGURE 4.31 – Les solutions exacte et approchée de la deuxième composante de la vitesse u_2 sur Γ_1 .

$$\Gamma_{01} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = t \cos(\frac{\pi}{4}); \quad y = t \sin(\frac{\pi}{4}) \quad ; \quad t \in [r_2, r_1]\}$$

$$\Gamma_{02} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = r_1 \cos(\theta); \quad y = r_1 \sin(\theta) \quad ; \quad \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]\}$$

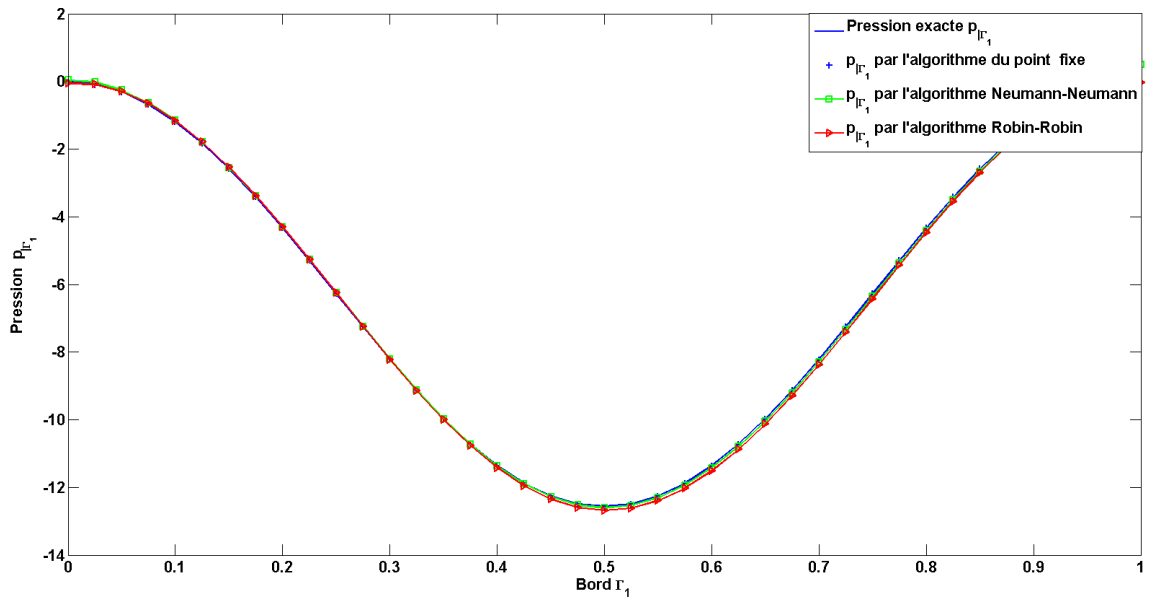


FIGURE 4.32 – Les solutions exacte et approchée de la pression p sur Γ_1 .

$$\Gamma_{03} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = t \cos(\frac{3\pi}{4}); \quad y = t \sin(\frac{3\pi}{4}) \quad ; \quad t \in [r_2, r_1]\}$$

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = r_2 \cos(\theta); \quad y = r_2 \sin(\theta) \quad ; \quad \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]\}$$

où $r_1 = 0.4$ et $r_2 = 0.8$

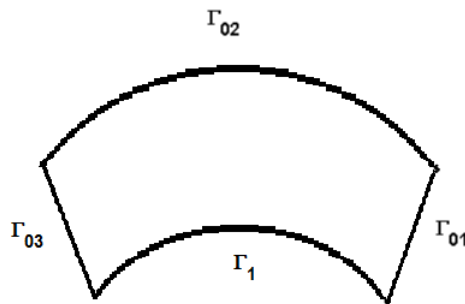


FIGURE 4.33 – Domaine Ω .

Dans cet exemple, nous cherchons à approcher une solution polynomiale du problème inverse de Cauchy (4.1) associée aux données suivantes :

- La donnée de Dirichlet sur Γ_{01} , est donnée par :

$$\begin{cases} h_{01}^{(1)}(x, y) = 4y^3 - x^2, \\ h_{01}^{(2)}(x, y) = 4x^3 + 2xy - 1. \end{cases} \quad (4.55)$$

- Les données de Dirichlet et Neumann sur Γ_{02} , sont données par :

$$\begin{cases} h_{02}^{(1)}(x, y) = 4y^3 - x^2, \\ h_{02}^{(2)}(x, y) = 4x^3 + 2xy - 1, \end{cases} \quad (4.56)$$

$$\begin{cases} g_{02}^{(1)}(x, y) = \mu((-2x) * N.x + (12y^2) * N.y) - (24xy - 12x) * N.x, \\ g_{02}^{(2)}(x, y) = \mu * ((12x^2 + 2y) * N.x + (2x) * N.y) - (24xy - 12x) * N.y. \end{cases} \quad (4.57)$$

- La donnée de Neumann sur Γ_{03} , est donnée par :

$$\begin{cases} g_{03}^{(1)}(x, y) = \mu((-2x) * N.x + (12y^2) * N.y) - (24xy - 12x) * N.x, \\ g_{03}^{(2)}(x, y) = \mu((12x^2 + 2y) * N.x + (2x) * N.y) - (24xy - 12x) * N.y. \end{cases} \quad (4.58)$$

- Le terme source sur Ω est donné par :

$$\begin{cases} f_1(x, y) = -\mu(24y - 2) + 24y - 12, \\ f_2(x, y) = -24\mu x + 24x, \end{cases} \quad (4.59)$$

où $\mu = 0.01$,

Nous visons également à reconstruire le champ de vitesse et de la pression sur la partie du bord Γ_1 , en utilisant les données ci-dessus qui sont associées à la solution exacte suivante :

$$\begin{cases} ue_1(x, y) = 4y^3 - x^2, \\ ue_2(x, y) = 4x^3 + 2xy - 1, \\ pe(x, y) = 24xy - 12x. \end{cases} \quad (4.60)$$

Ainsi, en se basant sur les données (4.55), (4.56), (4.57), (4.58) et (4.59) et en choisissant une donnée initiale adéquate satisfaisant la condition de compatibilité (4.37), nous présentons quelques résultats numériques montrant encore l'efficacité de l'approche proposée. Dans les figures 4.34, 4.35 et 4.36, nous présentons les solutions exacte et approchée des deux composantes du champ de vitesse et la pression sur Γ_1 . Ces résultats numériques obtenus, par les algorithmes du point fixe, de "Neumann-Neumann" et de "Robin-Robin" montrent que ces méthodes donnent de bonnes approximations de la solution.

Nous constatons pour ces différents exemples que nous obtenons une meilleure approximation de la solution pour les algorithmes de point fixe et "Robin-Robin".

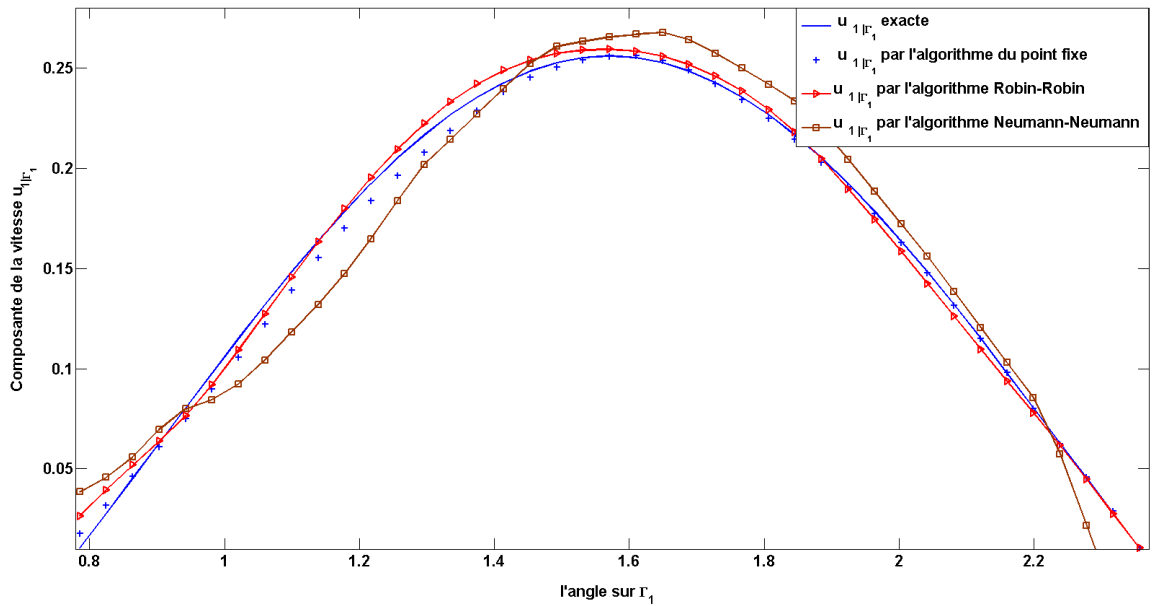


FIGURE 4.34 – Les solutions exacte et approchée de la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_1 .

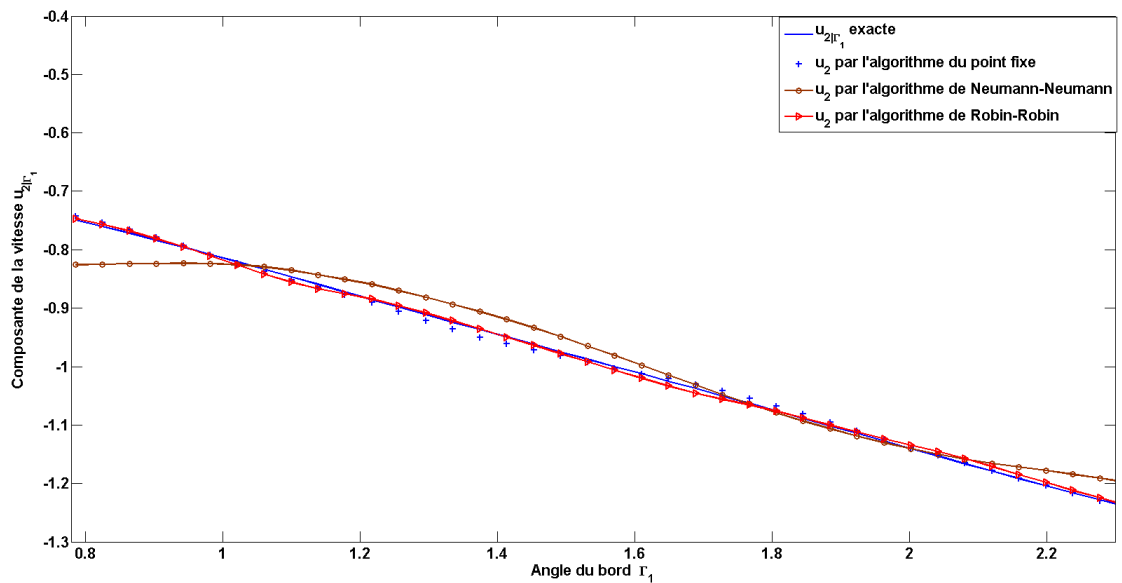
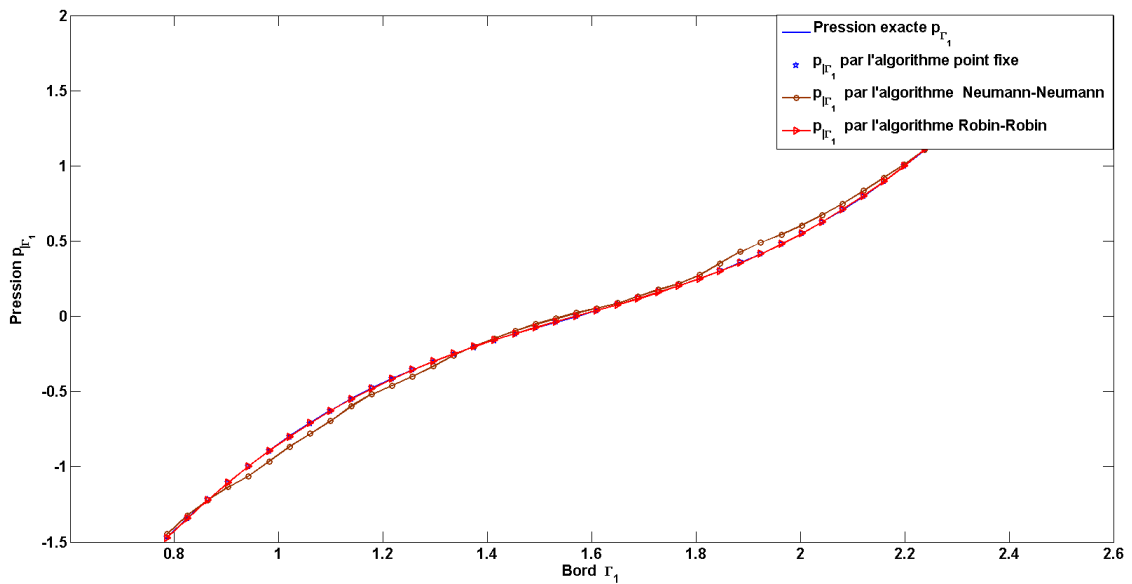


FIGURE 4.35 – Les solutions exacte et approchée de la deuxième composante de la vitesse u_2 sur Γ_1 .

Influence des conditions de compatibilité

Dans cette section, nous nous intéressons à la question d'influence de la condition de compatibilité (4.37) sur la convergence des algorithmes dans la résolution du problème inverse de Cauchy. Nous nous limitons à étudier cette influence pour les algorithmes 1 et

FIGURE 4.36 – Les solutions exacte et approchée de la pression p sur Γ_1 .

3 (puisque ces deux algorithmes donnent la meilleure précision sur la solution). Pour cela, nous allons traiter un exemple numérique pour lequel la donnée initiale satisfait la condition de compatibilité. Ensuite, nous traitons ce même exemple, mais cette fois-ci, pour une donnée initiale qui ne satisfait pas la condition de compatibilité.

Exemple 4.1 *Nous considérons une solution polynomiale de ce problème inverse de Cauchy (4.1) associée aux données suivantes :*

- La donnée de type Dirichlet sur Γ_{01} est donnée par :

$$\begin{cases} h_{01}^{(1)}(x, y) = x^2 + 2x, \\ h_{01}^{(2)}(x, y) = 0. \end{cases} \quad (4.61)$$

- Les données de Dirichlet et Neumann sur Γ_{02} sont respectivement données par :

$$\begin{cases} h_{02}^{(1)}(x, y) = 3 + y, \\ h_{02}^{(2)}(x, y) = -4 + y, \end{cases} \quad (4.62)$$

$$\begin{cases} g_{02}^{(1)}(x, y) = 2\mu x + 2\mu - x - y + 1; \\ g_{02}^{(2)}(x, y) = -2\mu y. \end{cases} \quad (4.63)$$

- La donnée de Neumann sur Γ_{03} est donnée par :

$$\begin{cases} g_{03}^{(1)}(x, y) = \mu, \\ g_{03}^{(2)}(x, y) = -2\mu x - 2\mu - x - y + 1. \end{cases} \quad (4.64)$$

- Le second membre est donné par :

$$\begin{cases} f_1(x, y) = -2\mu + 1, \\ f_2(x, y) = 1, \end{cases} \quad (4.65)$$

où $\mu = 0.1$.

La solution exacte associée s'écrit

$$\begin{cases} ue_1(x, y) = x^2 + 2x + y, \\ ue_2(x, y) = -2xy - 2y, \\ pe(x, y) = x + y - 1. \end{cases} \quad (4.66)$$

Maintenant, en prenant une donnée initiale $u_0 = (0, 0)$ pour laquelle la condition de compatibilité est satisfaite, nous cherchons à reconstruire le champ de vitesse et de pression sur la partie du bord Γ_1 , en utilisant les données ci-dessus. Dans les figures 4.37, 4.38 et 4.39, nous présentons les solutions exacte et approchée des composantes de la vitesse $u_{1|\Gamma_1}, u_{2|\Gamma_1}$ et de la pression $p_{|\Gamma_1}$ obtenues par les algorithmes du point fixe et "Robin-Robin". Nous constatons que les deux méthodes convergent vers la solution pour cette

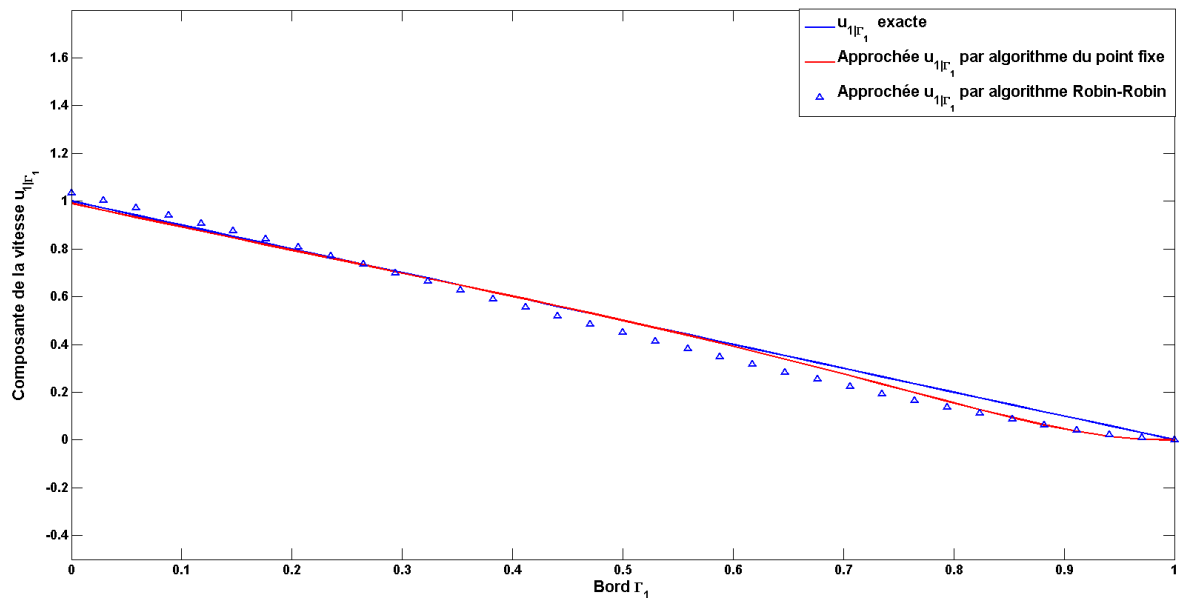
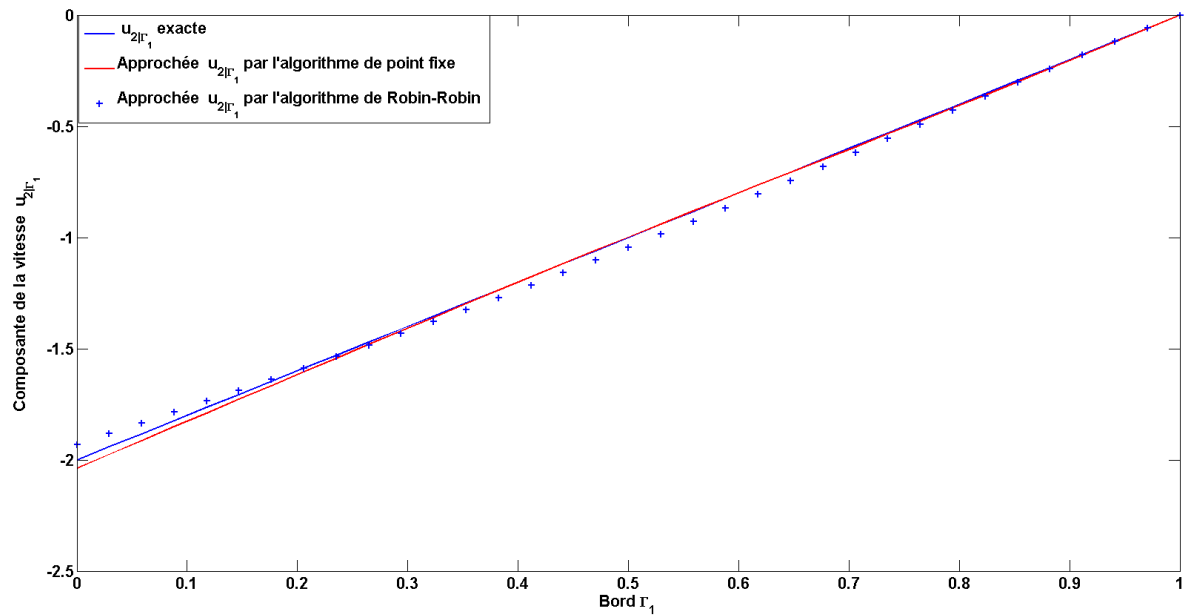
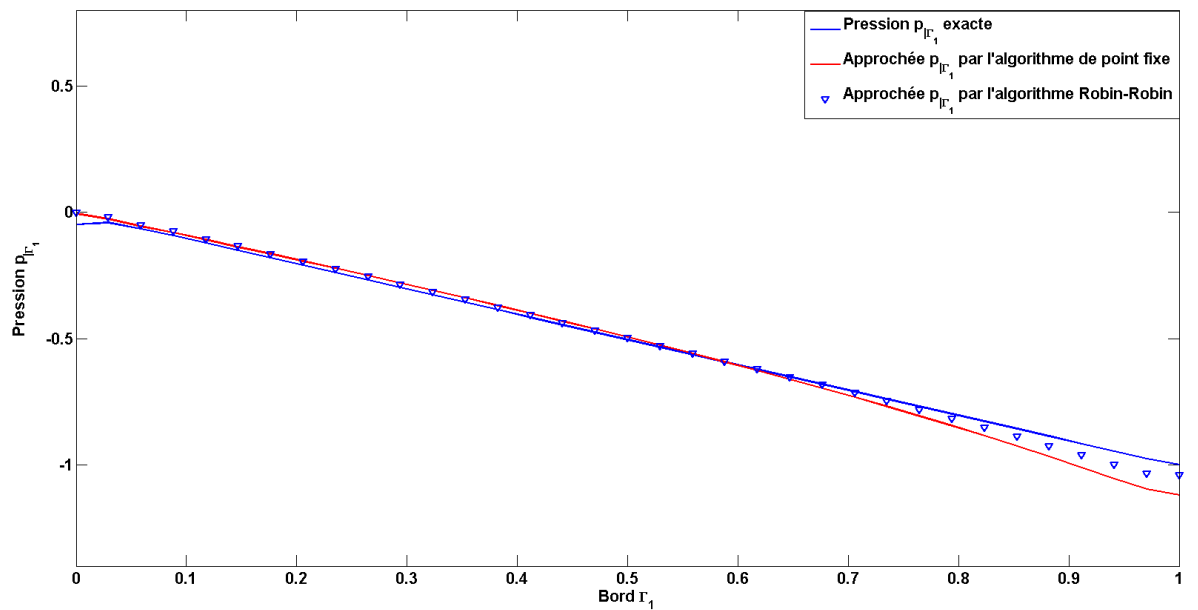


FIGURE 4.37 – Les solutions exacte et approchée $u_{1|\Gamma_1}$

donnée initiale qui satisfait la condition de compatibilité. Ceci est illustré dans la table 4.5, où nous présentons les valeurs de l'erreur pour les deux composantes de vitesse $u_{1|\Gamma_1}, u_{2|\Gamma_1}$ aussi bien que la pression $p_{|\Gamma_1}$, obtenues en utilisant ces algorithmes. Nous considérons maintenant le même exemple polynomiale avec une donnée initiale $u_0 = (y^2, 1)$ pour

FIGURE 4.38 – Les solutions exacte et approchée $u_{2|\Gamma_1}$ FIGURE 4.39 – Les solutions exacte et approchée $p_{|\Gamma_1}$

laquelle la condition de compatibilité (4.37) n'est plus satisfaite. Les erreurs obtenues pour les composantes de la vitesse $u_{1|\Gamma_1}$, $u_{2|\Gamma_1}$ et de la pression $p_{|\Gamma_1}$, en utilisant les algorithmes du point fixe et de "Robin-Robin" sont présentés dans la table 4.6.

Nous pouvons conclure à travers les précisions obtenues que les deux algorithmes ne convergent pas vers la solution. Ces résultats numériques confirment le résultat théo-

	Méthode du point fixe	Méthode Robin-Robin
Erreur de la composante de vitesse $u_1 _{\Gamma_1}$	$2.28 \cdot 10^{-2}$	$4.05 \cdot 10^{-2}$
Erreur de la composante de vitesse $u_2 _{\Gamma_1}$	$1.03 \cdot 10^{-2}$	$3.06 \cdot 10^{-2}$
Erreur de pression	$3.99 \cdot 10^{-2}$	$1.84 \cdot 10^{-2}$

TABLE 4.5 – Les erreurs entre les solutions exacte et approchée pour les deux méthodes pour $h = 1/32$.

	Méthode du point fixe	Méthode "Robin-Robin"
Erreur de la composante de vitesse $u_1 _{\Gamma_1}$	0.96	1.24
Erreur de la composante de vitesse $u_2 _{\Gamma_1}$	1.30	1.04
Erreur de pression	0.92	1.41

TABLE 4.6 – Les erreurs entre les solutions exacte et approchée pour les deux méthodes pour $h = 1/32$.

rique d'existence qui est basée sur la condition de compatibilité, spécifiée comme étant le minimum de régularité requis pour avoir l'existence de la solution.

Approche à caractère régularisant pour la résolution du problème inverse de Cauchy

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution du problème inverse de Cauchy en utilisant une approche à caractère régularisant. Elle consiste à réécrire toutes les données sur le bord (connues et inconnues) sous forme de conditions aux limites de type Robin complexes. Le problème de Cauchy se réduit alors à identifier les données inconnues de telle sorte que la partie imaginaire de la solution soit égale à zéro sur tout le domaine. Nous proposons ainsi une formulation d'optimisation du problème basée sur la méthode de régularisation de Tikhonov. Nous établissons un résultat d'existence de la solution du problème d'optimisation régularisé. Nous identifions ensuite cette solution en fonction de la solution d'un problème d'état adjoint. Nous prouvons également la convergence d'une sous-suite de solutions optimales des problèmes régularisés vers la solution du problème de Cauchy, quand le niveau de bruit tend vers zéro. Sur le plan numérique, nous utilisons la méthode des éléments finis de type P_{1Bulle}/P_1 pour la discrétisation du problème régularisé. Nous prouvons l'existence de la solution optimale du problème régularisé discret sans bruit et nous montrons la convergence d'une sous-suite de solutions optimales discrètes du problème régularisé vers la solution du problème continu, quand le pas de la discrétisation tend vers zéro. Ensuite, en utilisant la méthode du gradient adjoint, nous proposons un algorithme pour déterminer la solution régularisée. Il s'agit de la résolution directe d'un système linéaire ne nécessitant aucune itération et rendant la résolution rapide. Enfin, nous donnons quelques résultats numériques dans le but de confirmer la fiabilité de cette approche.

5.1 Position et formulation du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) un ouvert borné de bord lipschitzien $\Gamma := \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$, où $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 = \emptyset$. Notons toujours par n la normale à Γ sortante de Ω . Étant données les

fonctions μ et f définis sur Ω et ψ et κ les données de Cauchy définis sur Γ_0 , on cherche à déterminer le couple vitesse et flux sur Γ_1 notée par (φ, ζ) , tel que $(u(\varphi, \zeta), p(\varphi, \zeta))$ solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u)) + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u)n = \psi, \quad u = \kappa & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u)n = \varphi, \quad u = \zeta & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (5.1)$$

On note que u est sur-déterminée sur le partie du bord Γ_0 , en effet deux conditions de type Dirichlet et Neumann sont imposées sur cette partie, tandis que Γ_1 est la partie du bord inaccessible, sur laquelle on cherche à reconstruire la solution. Pour ce faire, on aura besoin de quelques notations et hypothèses. On note par

$$\Theta := L^2(\Omega)^d,$$

$$\Theta_0 = \{v \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} v(x) dx = 0\},$$

$$\Theta_{\Gamma_0} := (L^2(\Gamma_0))^d$$

et

$$\Theta_{\Gamma_1} := (L^2(\Gamma_1))^d.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $(H^m(\Omega))^d$, l'espace de Sobolev complexe équipé du produit scalaire $((\cdot, \cdot))_{m,\Omega,d}$ et de la norme $||| \cdot |||_{m,\Omega,d}$ définis respectivement comme suit :

$$\forall u, v \in (H^m(\Omega))^d \quad ((u, v))_{m,\Omega,d} = \sum_{j=1}^d (u_j, \bar{v}_j)_{m,\Omega}$$

où \bar{v}_j est le conjugué de v_j pour $j = 1, \dots, d$.

$$|||v|||_{m,\Omega,d} = \sqrt{((v, v))_{m,\Omega,d}}.$$

Notons en particulier par $V = (H^1(\Omega))^d$, On utilise également les hypothèses suivantes

$$f \in \Theta, \quad \psi \in \Theta_{\Gamma_0} \quad \text{et} \quad \kappa \in \Theta_{\Gamma_0}.$$

Dans ce qui suit, nous notons par C une constante générique strictement positive, qui peut avoir différentes valeurs dans différents endroits.

Nous allons proposer une méthode de régularisation qui permet d'obtenir une solution approchée stable du problème inverse de Stokes (5.1). Elle est basée sur une méthode qui vise à reformuler le problème inverse en un problème avec des conditions aux limites

complexes de type Robin.

Formulation complexe du problème de Cauchy

La formulation proposée consiste à combiner les deux conditions au bord Γ_0 , afin d'obtenir des conditions aux limites complexes de type Robin. On peut ainsi considérer le problème aux limites complexe : trouver (φ, ζ) défini sur Γ_1 tel que $(u(\varphi, \zeta), p(\varphi, \zeta))$ solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u)) + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u)n + iu = \psi + i\kappa & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u)n + iu = \varphi + i\zeta & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (5.2)$$

où i est l'unité imaginaire.

Il est clair que si $(u(\varphi, \zeta), p(\varphi, \zeta))$ est solution de (5.1) telle que (φ, ζ) est défini sur Γ_1 , alors elle est solution de (5.2). Inversement, soit $(u, p) := (u(\varphi, \zeta), p(\varphi, \zeta))$ une solution de (5.2), alors on peut écrire

$$u = u_1 + iu_2, \quad (5.3)$$

$$p = p_1 + ip_2, \quad (5.4)$$

où (u_1, p_1) et (u_2, p_2) sont respectivement les parties réelles et imaginaires de (u, p) , qui sont respectivement solutions de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u_1)) + \nabla p_1 = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u_1) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u_1)n - u_2 = \psi & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u_1)n - u_2 = \varphi & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u_2)) + \nabla p_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u_2) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u_2)n + u_1 = \kappa & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u_2)n + u_1 = \zeta & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Ainsi, si $u_2 = 0$ et $p_2 = 0$ dans Ω alors $\sigma(u_2)n = 0$ sur Γ , alors d'après les problèmes aux limites (5.5)-(5.6), on obtient que (φ, ζ) est solution de (5.1) associée à (u_1, p_1) . On peut

alors reformuler le problème de Cauchy (5.1) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\varphi, \zeta) \text{ défini sur } \Gamma_1 \text{ tel que la solution } (u, p) \text{ du problème (5.2) satisfait} \\ u_2 = 0, p_2 = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{où } (u_2, p_2) \text{ est la partie imaginaire de } (u, p). \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Formulation en optimisation du problème

Afin de résoudre le problème (5.7), nous optons pour sa reformulation en un problème d'optimisation comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\varphi, \zeta) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1} \\ J(\varphi, \zeta) = \inf_{(\eta, s) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}} J(\eta, s), \end{array} \right. \quad (5.8)$$

avec $J(\eta, s) = \frac{1}{2} \|u_2(\eta, s)\|_{0, \Omega, d}^2 + \frac{1}{2} \|p_2(\eta, s)\|_{0, \Omega}^2$, où u_2 et p_2 sont respectivement les parties imaginaires de u et p tel que (u, p) solution de (5.2).

Dans la suite, nous allons proposer une approche régularisante de (5.8) basée sur la méthode de régularisation de Tikhonov. Pour ce faire, nous allons tout d'abord montrer que le problème (5.8) est bien posé c'est-à-dire que pour tout $(\eta, s) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$, nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (5.2). Pour cela, nous considérons sa formulation faible donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (u, p) \in V \times \Theta_0 \\ a(u, v) + b(v, p) = F(\varphi, \zeta, v) \quad \forall v \in V \\ b(u, q) = 0 \quad \forall q \in \Theta_0 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

dont, les formes bilinéaires a , b et la forme linéaire F sont respectivement définies par

$$a(u, v) = 2\mu \int_{\Omega} D(u) : D(\bar{v}) dx + i \int_{\Omega} u \bar{v} ds \quad \forall u, v \in V,$$

$$b(u, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div}(u) dx \quad \forall (u, q) \in V \times \Theta_0,$$

et

$$F(\varphi, \zeta, v) = \int_{\Omega} f \bar{v} dx + \int_{\Gamma_0} (\psi + i\kappa) \bar{v} ds + \int_{\Gamma_1} (\varphi + i\zeta) \bar{v} ds \quad \forall v \in V.$$

Le résultat d'existence de la solution du problème (5.2) s'énonce comme suit

Proposition 5.1 *Etant donné $f \in \Theta$, $(\psi, \kappa) \in \Theta_{\Gamma_0} \times \Theta_{\Gamma_0}$ et $(\varphi, \zeta) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$, le*

problème (5.9) admet une solution unique $(u, p) \in V \times \Theta_0$ qui dépend continument des données. Il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, telles que

$$\|u\|_{1,\Omega,d} \leq c_1(\|f\|_{0,\Omega,d} + \|\psi\|_{0,\Gamma_0} + \|\kappa\|_{0,\Gamma_0} + \|\varphi\|_{0,\Gamma_1} + \|\zeta\|_{0,\Gamma_0}) \quad (5.10)$$

et

$$\|p\|_{0,\Omega} \leq c_2(\|f\|_{0,\Omega} + \|\psi\|_{0,\Gamma_0} + \|\kappa\|_{0,\Gamma_0} + \|\varphi\|_{0,\Gamma_1} + \|\zeta\|_{0,\Gamma_0}) \quad (5.11)$$

Démonstration

D'après le lemme 2.3, la preuve d'existence et d'unicité de la solution de (5.9) découle de la continuité de a sur $V \times V$, sa coercivité sur V , la continuité de F sur V et la condition inf-sup satisfaite par b . En effet, pour tout $u, v \in V$, en utilisant l'inégalité de Hölder et la continuité de l'opérateur trace de V dans Θ_{Γ_0} et Θ_{Γ_1} , on obtient la continuité de $a(\cdot, \cdot)$ et de $F(\varphi, \zeta, \cdot)$:

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \quad (5.12)$$

$$|F(\varphi, \zeta, v)| \leq C(\|f\|_{0,\Omega} + \|\psi\|_{0,\Gamma_0} + \|\kappa\|_{0,\Gamma_0} + \|\varphi\|_{0,\Gamma_1} + \|\zeta\|_{0,\Gamma_1})\|v\|_{1,\Omega} \quad (5.13)$$

De plus, la coercivité de a est obtenue grâce à l'inégalité de Korn, donc il existe une constante $\alpha > 0$, telle que :

$$Re(a(u, u)) = 2\mu\|D(u)\|_{0,\Omega,d}^2 \geq \alpha\|u\|_{1,\Omega,d}^2, \quad \forall u \in V \quad (5.14)$$

Pour conclure, en utilisant les mêmes techniques que celles dans le théorème 2.2, nous signalons que la condition inf-sup est satisfaite par b , ce qui veut dire qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\inf_{q \in \Theta, q \neq 0} \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{b(v, q)}{\|v\|_{1,\Omega}\|q\|_{L^2(\Omega)}} \geq \beta \quad (5.15)$$

Alors, le problème (5.9) admet une solution unique $(u, p) \in V \times \Theta_0$.

De plus, les estimations (5.10) et (5.11) découlent directement des inégalités (5.13), (5.14) et (5.15).

□

Nous allons maintenant proposer une méthode de régularisation de Tikhonov du problème d'optimisation (5.8).

5.2 Approche régularisante du problème

Dans cette section, nous présentons une approche de minimisation basée sur la régularisation de Tikhonov pour résoudre le problème (5.8). Nous montrons l'existence de la solution optimale du problème régularisé, puis nous prouvons la convergence d'une sous-suite de solutions optimales de la formulation de Tikhonov vers la solution du problème de Cauchy (5.1).

Régularisation de Tikhonov du problème

Nous considérons le problème de Cauchy (5.1) avec donnée bruitée, nous supposons ainsi la donnée de Cauchy (ψ, κ) bruitée selon un niveau de bruit connu δ , et sera notée par $(\psi^\delta, \kappa^\delta)$, telle que

$$\|\|\|\psi^\delta - \psi\|\|\|_{0,\Gamma_0} \leq \delta, \quad (5.16)$$

$$\|\|\|\kappa^\delta - \kappa\|\|\|_{0,\Gamma_0} \leq \delta \quad (5.17)$$

Etant donnée $(\varphi, \zeta) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$, considérons maintenant le problème d'état, trouver (u^δ, p^δ) solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u^\delta)) + \nabla p^\delta = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u^\delta) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u^\delta)n + iu^\delta = \psi^\delta + i\kappa^\delta & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u^\delta)n + iu^\delta = \varphi + i\zeta & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (5.18)$$

dont, la formulation variationnelle s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u^\delta, p^\delta) \in V \times \Theta_0 \\ a(u^\delta, v) + b(v, p^\delta) = F^\delta(\varphi, \zeta, v) \quad \forall v \in V \\ b(u^\delta, q) = 0 \quad \forall q \in \Theta_0 \end{cases} \quad (5.19)$$

où

$$F^\delta(\varphi, \zeta, v) = \int_{\Omega} f \bar{v} dx + \int_{\Gamma_0} (\psi^\delta + i\kappa^\delta) \bar{v} ds + \int_{\Gamma_1} (\varphi + i\zeta) \bar{v} ds \quad \forall v \in V \quad (5.20)$$

Notons que si $(\psi^\delta, \kappa^\delta) \in \Theta_{\Gamma_0} \times \Theta_{\Gamma_0}$, grâce à la proposition 5.1, le problème (5.19) admet une solution unique qui est continue en fonction des données, et satisfait

$$\|\|\|u^\delta\|\|\|_{1,\Omega,d} \leq c_1 (\|\|\|f\|\|\|_{0,\Omega,d} + \|\|\|\psi^\delta\|\|\|_{0,\Gamma_0,d} + \|\|\|\kappa^\delta\|\|\|_{0,\Gamma_0,d} + \|\|\|\varphi\|\|\|_{0,\Gamma_1,d} + \|\|\|\zeta\|\|\|_{0,\Gamma_1,d}) \quad (5.21)$$

$$\|p^\delta\|_{0,\Omega} \leq c_2(\|f\|_{0,\Omega,d} + \|\psi^\delta\|_{0,\Gamma_0,d} + \|\kappa^\delta\|_{0,\Gamma_0,d} + \|\varphi\|_{0,\Gamma_1,d} + \|\zeta\|_{0,\Gamma_1,d}) \quad (5.22)$$

Nous avons alors le résultat d'estimation d'erreur entre les solutions de (5.9) et (5.19) en fonction de δ .

Lemme 5.1 *Soient (u, p) et (u^δ, p^δ) les solutions respectives de (5.9) et (5.19), alors on a*

$$\|u^\delta - u\|_{1,\Omega,d} \leq C\delta \quad (5.23)$$

et

$$\|p^\delta - p\|_{0,\Omega} \leq C\delta \quad (5.24)$$

Démonstration

En soustrayant la formulation (5.9) de (5.19), et en prenant $v = u^\delta - u$, puis en utilisant la coercivité de la forme bilinéaire a , la condition inf-sup et la continuité de F , on obtient

$$\alpha\|u^\delta - u\|_{1,\Omega,d}^2 + \beta\|u^\delta - u\|_{1,\Omega,d}\|p^\delta - p\|_{0,\Omega} \leq (\|\psi^\delta - \psi\|_{0,\Gamma_0,d} + \|\kappa^\delta - \kappa\|_{0,\Gamma_0,d})\|u^\delta - u\|_{1,\Omega,d}, \quad (5.25)$$

Les estimations (5.23) et (5.24) découlent alors de (5.16), (5.17) et (5.25). □

Notons maintenant que la solution $(u^\delta(\varphi, \zeta), p^\delta(\varphi, \zeta)) \in V \times \Theta_0$ de (5.19), peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} u^\delta(\varphi, \zeta) &= u_1^\delta(\varphi, \zeta) + i u_2^\delta(\varphi, \zeta), \\ p^\delta(\varphi, \zeta) &= p_1^\delta(\varphi, \zeta) + i p_2^\delta(\varphi, \zeta), \end{aligned}$$

pour tout $(\varphi, \zeta) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, considérons la fonctionnelle coût

$$J_\varepsilon^\delta(\varphi, \zeta) = \frac{1}{2}\|u_2^\delta(\varphi, \zeta)\|_{0,\Omega,d}^2 + \frac{1}{2}\|p_2^\delta(\varphi, \zeta)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\varphi\|_{0,\Gamma_1,d}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\zeta\|_{0,\Gamma_1,d}^2 \quad (5.26)$$

Introduisons ensuite une approche régularisante du problème (5.8) par la méthode de Tikhonov comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\varphi_\varepsilon^\delta, \zeta_\varepsilon^\delta) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1} \text{ tel que} \\ J_\varepsilon^\delta(\varphi_\varepsilon^\delta, \zeta_\varepsilon^\delta) = \inf_{(\eta, s) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}} J_\varepsilon^\delta(\eta, s) \end{array} \right. \quad (5.27)$$

Dans la suite, nous allons présenter quelques résultats d'existence et de convergence du problème (5.27).

Résultats d'existence et de la convergence du problème régularisé

Dans cette section, nous montrons d'abord l'existence de la solution optimale de (5.27) que nous identifions par la suite en fonction de la solution d'un problème d'état adjoint. Ensuite, nous montrons la convergence d'une sous-suite de solutions optimales de la formulation de régularisation de Tikhonov (5.27) vers la solution du problème de Cauchy (5.1) quand le niveau de bruit tend vers zéro. Pour cela, nous commençons par montrer le résultat d'existence suivant :

Lemme 5.2 *Le problème (5.27) admet une solution unique.*

Démonstration

Soit $((\varphi^n, \zeta^n))_n$ une suite minimisante de J_ε^δ dans $\Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$, i.e,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_\varepsilon^\delta(\varphi^n, \zeta^n) = \inf_{(\eta, s) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}} J_\varepsilon^\delta(\eta, s). \quad (5.28)$$

Or, comme on a

$$\lim_{\|(\varphi, \zeta)\|_{\Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}} \rightarrow +\infty} J_\varepsilon^\delta(\varphi, \zeta) = +\infty,$$

alors $((\varphi^n, \zeta^n))_n$ est bornée dans $\Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$. Ainsi, on peut extraire une sous-suite notée encore $((\varphi^n, \zeta^n))_n$ qui converge faiblement dans $\Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$ vers un élément $(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$.

$$(\varphi^n, \zeta^n) \rightharpoonup (\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}) \text{ dans } \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1} \quad (5.29)$$

D'après la proposition 5.1, la solution de la formulation variationnelle (5.9) associée à (φ^n, ζ^n) notée (u^n, p^n) satisfait

$$\|u^n\|_{1, \Omega} \leq c_1 (\|f\|_{0, \Omega} + \|\psi\|_{0, \Gamma_0} + \|\kappa\|_{0, \Gamma_0} + \|\varphi^n\|_{0, \Gamma_1} + \|\zeta^n\|_{0, \Gamma_0}) \quad (5.30)$$

et

$$\|p^n\|_{0, \Omega} \leq c_2 (\|f\|_{0, \Omega} + \|\psi\|_{0, \Gamma_0} + \|\kappa\|_{0, \Gamma_0} + \|\varphi^n\|_{0, \Gamma_1} + \|\zeta^n\|_{0, \Gamma_0}). \quad (5.31)$$

Ce qui implique que la suite $(u^n)_n$ (respectivement $(p^n)_n$) est bornée dans V (respectivement dans Θ). On peut donc extraire une sous-suite notée encore, respectivement $(u^n)_n$ et $(p^n)_n$ qui converge faiblement, respectivement dans V et dans Θ . Alors, on a

$$u^n \rightharpoonup \tilde{u} \text{ dans } V \quad (5.32)$$

et

$$p^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tilde{p} \text{ dans } \Theta \quad (5.33)$$

Il reste alors à vérifier que $(\tilde{u}, \tilde{p}) = (u(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}), p(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}))$ est la solution de (5.9) associée à $(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta})$. En effet, comme $(u^n, p^n) \in V \times \Theta_0$ est solution de

$$\begin{cases} a(u^n, v) + b(v, p^n) = F(\varphi^n, \zeta^n, v) & \forall v \in V \\ b(u^n, q) = 0 & \forall q \in \Theta_0, \end{cases} \quad (5.34)$$

en passant à la limite dans cette équation quand n tend vers ∞ et en utilisant les convergences (5.29), (5.32) et (5.33), on obtient que (\tilde{u}, \tilde{p}) est l'unique solution de

$$\begin{cases} a(\tilde{u}, v) + b(v, \tilde{p}) = F(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}, v) & \forall v \in V \\ b(\tilde{u}, q) = 0 & \forall q \in \Theta_0 \end{cases} \quad (5.35)$$

De plus, on a les convergences suivantes

$$u_2^n = u_2(\varphi^n, \zeta^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tilde{u}_2(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}) \text{ dans } \Theta \quad (5.36)$$

$$p_2^n = p_2(\varphi^n, \zeta^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tilde{p}_2(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}) \text{ dans } \Theta \quad (5.37)$$

Donc, d'après la semi-continuité inférieure des normes dans L^2 , on obtient

$$\inf_{(\eta, s) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}} J_\varepsilon^\delta(\eta, s) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} J_\varepsilon^\delta(\varphi^n, \zeta^n) \geq J_\varepsilon^\delta(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}). \quad (5.38)$$

Donc, le problème (5.27) admet au moins une solution. Pour conclure, l'unicité de la solution de (5.27) est obtenue grâce à la stricte convexité de J_ε^δ qui découle de la linéarité de (u, p) par rapport à (φ, ζ) et la stricte convexité du carré de la norme dans L^2 .

□

Afin de pouvoir identifier la solution de ce problème, nous calculons le gradient de J_ε^δ .

Lemme 5.3 *Soit $(\varphi, \zeta) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$, alors pour tout $(\eta, s) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$, le gradient de J_ε^δ est donné par*

$$\begin{aligned} \nabla J_\varepsilon^\delta(\varphi, \zeta)(\eta, s) = & (u_2^\delta(\varphi, \zeta), u_2^\delta(\eta, s) - u_2^\delta(0, 0))_{0, \Omega} + (p_2^\delta(\varphi, \zeta), p_2^\delta(\eta, s) - p_2^\delta(0, 0))_{0, \Omega} \\ & + \varepsilon(\varphi, \eta)_{0, \Gamma_1} + \varepsilon(\zeta, s)_{0, \Gamma_1} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Démonstration

Soient (φ, ζ) et (η, s) des éléments de $\Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$, et $\tau > 0$ un réel destiné à tendre vers 0.

On considère $(u_2^\delta(\varphi + \tau\eta, \zeta + \tau s), p_2^\delta(\varphi + \tau\eta, \zeta + \tau s))$ la solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u_2^\delta)) + \nabla p_2^\delta = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u_2^\delta) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u_2^\delta)n + u_1^\delta = \kappa^\delta & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u_2^\delta)n + u_1^\delta = \zeta + \tau s & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (5.40)$$

où $(u_1^\delta(\varphi + \tau\eta, \zeta + \tau s), p_1^\delta(\varphi + \tau\eta, \zeta + \tau s))$ est la solution de

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(u_1^\delta)) + \nabla p_1^\delta = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u_1^\delta) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u_1^\delta)n - u_2^\delta = \psi^\delta & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u_1^\delta)n - u_2^\delta = \varphi + \tau\eta & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (5.41)$$

On peut alors écrire

$$u_2^\delta(\varphi + \tau\eta, \zeta + \tau s) = u_2^\delta(\varphi, \zeta) + \tau (u_2^\delta(\eta, s) - u_2^\delta(0, 0)) \quad (5.42)$$

et

$$p_2^\delta(\varphi + \tau\eta, \zeta + \tau s) = p_2^\delta(\varphi, \zeta) + \tau (p_2^\delta(\eta, s) - p_2^\delta(0, 0)), \quad (5.43)$$

en utilisant ces relations, on obtient

$$\begin{aligned} & (u_2^\delta(\varphi + \tau\eta, \zeta + \tau s), u_2^\delta(\varphi + \tau\eta, \zeta + \tau s))_{0,\Omega} - (u_2^\delta(\varphi, \zeta), u_2^\delta(\varphi, \zeta))_{0,\Omega} \\ &= 2\tau (u_2^\delta(\varphi, \zeta), u_2^\delta(\eta, s) - u_2^\delta(0, 0))_{0,\Omega} + \tau^2 (u_2^\delta(\eta, s) - u_2^\delta(0, 0), u_2^\delta(\eta, s) - u_2^\delta(0, 0))_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (5.44)$$

et

$$\begin{aligned} & (p_2^\delta(\varphi + \tau\eta, \zeta + \tau s), p_2^\delta(\varphi + \tau\eta, \zeta + \tau s))_{0,\Omega} - (p_2^\delta(\varphi, \zeta), p_2^\delta(\varphi, \zeta))_{0,\Omega} \\ &= 2\tau (p_2^\delta(\varphi, \zeta), p_2^\delta(\eta, s) - p_2^\delta(0, 0))_{0,\Omega} + \tau^2 (p_2^\delta(\eta, s) - p_2^\delta(0, 0), p_2^\delta(\eta, s) - p_2^\delta(0, 0))_{0,\Omega}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

De plus, on a

$$(\varphi + \tau\eta, \varphi + \tau\eta)_{0,\Gamma_1} - (\varphi, \varphi)_{0,\Gamma_1} = 2\tau(\varphi, \eta)_{0,\Gamma_1} + \tau^2(\eta, \eta)_{0,\Gamma_1}, \quad (5.46)$$

et

$$(\zeta + \tau s, \zeta + \tau s)_{0,\Gamma_1} - (\zeta, \zeta)_{0,\Gamma_1} = 2\tau(\zeta, s)_{0,\Gamma_1} + \tau^2(s, s)_{0,\Gamma_1} \quad (5.47)$$

Donc, la formule du gradient de J_ε^δ découle des équations (5.44), (5.45), (5.46) et (5.47) en tendant τ vers zéro.

A partir de ce résultat, nous pouvons identifier la solution de (5.27) via la solution d'un problème d'état adjoint comme suit

Proposition 5.2 *Pour tout $\varepsilon > 0$, la solution unique du problème (5.27) notée par $(\varphi_\varepsilon^\delta, \zeta_\varepsilon^\delta) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$ est donnée par*

$$\varphi_\varepsilon^\delta = -\frac{1}{\varepsilon} w_{2|\Gamma_1}^\delta, \quad \zeta_\varepsilon^\delta = -\frac{1}{\varepsilon} w_{1|\Gamma_1}^\delta, \quad (5.48)$$

où $w_1^\delta = w_1^\delta(\varphi_\varepsilon^\delta, \zeta_\varepsilon^\delta)$ et $w_2^\delta = w_2^\delta(\varphi_\varepsilon^\delta, \zeta_\varepsilon^\delta)$ sont les parties réelle et imaginaire de w^δ , tel que $(w^\delta, \tilde{p}^\delta)$ la solution du problème d'état adjoint suivant :

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(w^\delta)) + \nabla \tilde{p}^\delta = u_2^\delta & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(w^\delta) = -p_2^\delta & \text{dans } \Omega \\ \sigma(w^\delta)n + iw^\delta = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (5.49)$$

où $u_2^\delta = u_2^\delta(\varphi_\varepsilon^\delta, \zeta_\varepsilon^\delta)$ et $p_2^\delta = p_2^\delta(\varphi_\varepsilon^\delta, \zeta_\varepsilon^\delta)$ sont les parties imaginaires de la solution (u^δ, p^δ) du problème (5.19), associée à $(\varphi_\varepsilon^\delta, \zeta_\varepsilon^\delta)$.

Démonstration

Pour tout $\varepsilon > 0$, la solution $(\varphi_\varepsilon^\delta, \zeta_\varepsilon^\delta)$ de (5.27) satisfait

$$\nabla J_\varepsilon^\delta(\varphi_\varepsilon^\delta, \zeta_\varepsilon^\delta)(\eta, s) = 0 \quad (5.50)$$

Par ailleurs, posons $\tilde{u} = u^\delta(\eta, s) - u^\delta(0, 0)$ et $q = p^\delta(\eta, s) - p^\delta(0, 0)$, on a bien que (\tilde{u}, q) est solution du problème

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(\tilde{u})) + \nabla q = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\tilde{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(\tilde{u})n = 0, \quad \tilde{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(\tilde{u})n = \eta, \quad \tilde{u} = s & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (5.51)$$

qu'on peut réécrire avec des conditions aux limites de type Robin sous la forme

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}(D(\tilde{u})) + \nabla q = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\tilde{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(\tilde{u})n + i\tilde{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(\tilde{u})n + i\tilde{u} = \eta + is & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (5.52)$$

En multipliant la formulation faible de l'équation (5.49) par (\tilde{u}, q) et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned} -2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div}(D(w^\delta))\tilde{u}dx + \int_{\Omega} \nabla \tilde{p}^\delta \tilde{u}dx &= \int_{\Omega} u_2^\delta \tilde{u}dx \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} w^\delta q dx &= - \int_{\Omega} p_2^\delta q dx. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, on aura

$$\begin{aligned} 2\mu \int_{\Omega} D(w^\delta) : D(\tilde{u})dx - 2\mu \int_{\Gamma} D(w^\delta)n\tilde{u}ds + \int_{\Gamma} \tilde{p}n\tilde{u}ds - \int_{\Omega} \tilde{p}^\delta \operatorname{div}(\tilde{u})dx &= \int_{\Omega} u_2^\delta \tilde{u}dx \\ - \int_{\Omega} \nabla q w^\delta dx + \int_{\Gamma} w^\delta q n ds &= - \int_{\Omega} p_2^\delta q dx. \end{aligned}$$

Donc, par la formule de Green encore une fois, on aura

$$\begin{aligned} -2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div}(D(\tilde{u}))w^\delta dx + 2\mu \int_{\Omega} D(\tilde{u})nw^\delta dx - 2\mu \int_{\Gamma} D(w^\delta)n\tilde{u}ds + \int_{\Gamma} \tilde{p}^\delta n\tilde{u}ds \\ - \int_{\Omega} \tilde{p}^\delta \operatorname{div}(\tilde{u})dx &= \int_{\Omega} u_2^\delta \tilde{u}dx \end{aligned} \quad (5.53)$$

et

$$- \int_{\Omega} \nabla q w^\delta dx + \int_{\Gamma} w^\delta q n ds = - \int_{\Omega} p_2^\delta q dx \quad (5.54)$$

en soustrayant (5.54) de (5.53), on obtient

$$\begin{aligned} -2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div}(D(\tilde{u}))w^\delta dx + \int_{\Omega} \nabla q w^\delta dx + \int_{\Gamma} \sigma(\tilde{u})nw^\delta ds - \int_{\Gamma} \sigma(w^\delta)n\tilde{u}ds \\ - \int_{\Omega} \tilde{p}^\delta \operatorname{div}(\tilde{u})dx &= \int_{\Omega} u_2^\delta \tilde{u}dx + \int_{\Omega} p_2^\delta q dx. \end{aligned} \quad (5.55)$$

D'où

$$\int_{\Gamma} \sigma(\tilde{u})nw^\delta ds - \int_{\Gamma} \sigma(w^\delta)n\tilde{u}ds = \int_{\Omega} u_2^\delta \tilde{u}dx + \int_{\Omega} p_2^\delta q dx.$$

Par suite

$$\int_{\Gamma_1} (\eta + is)w^\delta ds = \int_{\Omega} u_2^\delta \tilde{u}dx + \int_{\Omega} p_2^\delta q dx.$$

Par conséquent

$$(\eta, \omega_1^\delta)_{0, \Gamma_1} - (s, \omega_2^\delta)_{0, \Gamma_1} + i((\eta, \omega_2^\delta)_{0, \Gamma_1} + (s, \omega_1^\delta)_{0, \Gamma_1}) = \int_{\Omega} u_2^\delta \tilde{u}dx + \int_{\Omega} p_2^\delta q dx.$$

Donc

$$(\eta, \omega_1^\delta)_{0, \Gamma_1} - (s, \omega_2^\delta)_{0, \Gamma_1} = (u_2^\delta(\varphi, \zeta), u_1^\delta(\eta, s) - u_1^\delta(0, 0))_{0, \Omega} + (p_2^\delta(\varphi, \zeta), p_1^\delta(\eta, s) - p_1^\delta(0, 0))_{0, \Omega} \quad (5.56)$$

et

$$(\eta, \omega_2^\delta)_{0, \Gamma_1} + (s, \omega_1^\delta)_{0, \Gamma_1} = (u_2^\delta(\varphi, \zeta), u_2^\delta(\eta, s) - u_2^\delta(0, 0))_{0, \Omega} + (p_2^\delta(\varphi, \zeta), p_2^\delta(\eta, s) - p_2^\delta(0, 0))_{0, \Omega}. \quad (5.57)$$

En remplaçant la dernière expression de (5.57) dans la formule du gradient, on obtient

$$(\eta, \omega_2^\delta)_{0, \Gamma_1} + (s, \omega_1^\delta)_{0, \Gamma_1} + \varepsilon(\varphi, \eta)_{0, \Gamma_1} + \varepsilon(\zeta, s)_{0, \Gamma_1} = 0.$$

Donc

$$(\eta, w_2^\delta + \varepsilon\varphi)_{0, \Gamma_1} + (s, w_1^\delta + \varepsilon\zeta)_{0, \Gamma_1} = 0,$$

en prenant en particulier $\eta = w_2^\delta + \varepsilon\varphi$ et $s = w_1^\delta + \varepsilon\zeta$, on aboutit à la formule (5.48).

Nous allons maintenant étudier le comportement de $(\varphi_\varepsilon^\delta, \zeta_\varepsilon^\delta)$ quand $\delta \rightarrow 0$ et $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour ce faire, si on suppose que la donnée de Cauchy (ψ, κ) satisfait les conditions de compatibilité. Alors, d'après [58], le problème (5.1) admet une solution unique (φ^*, ζ^*) appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)^d \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)^d$.

Si on suppose de plus que (φ^*, ζ^*) appartient à $\Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$, alors pour une suite de niveaux de bruits $\{\delta_n\}_{n \geq 1}$ qui tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, on considère $\varepsilon_n = \varepsilon(\delta_n)$ une suite choisie de telle sorte que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et $\frac{\delta_n^2}{\varepsilon_n} \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$. On note par $(\varphi_{\varepsilon_n}^{\delta_n}, \zeta_{\varepsilon_n}^{\delta_n}) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$ la solution de (5.27) associée à $(\psi^{\delta_n}, \kappa^{\delta_n})$ et pour $\varepsilon = \varepsilon_n$. On a donc le résultat suivant :

Proposition 5.3 *Il existe une sous-suite de solutions de (5.27) notée encore par $\{(\varphi_{\varepsilon_n}^{\delta_n}, \zeta_{\varepsilon_n}^{\delta_n})\}_n$ qui converge vers (φ^*, ζ^*) solution de (5.2) dans $\Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$ quand $n \rightarrow \infty$.*

Démonstration

Pour simplifier l'écriture, notons $\psi^n := \psi^{\delta_n}$, $\kappa^n := \kappa^{\delta_n}$, $\varphi^n := \varphi_{\varepsilon_n}^{\delta_n}$, $\zeta^n := \zeta_{\varepsilon_n}^{\delta_n}$ et $u^n = u_1^n + i u_2^n = u_n^\delta(\varphi_n, \zeta_n) \in V$ la solution de (5.19) associée à (φ^n, ζ^n) . Il est clair que (φ^*, ζ^*) la solution unique de (5.1), est aussi l'unique solution de (5.2), grâce à l'équivalence entre les deux problèmes, alors

$$u_2(\varphi^*, \zeta^*) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad p_2(\varphi^*, \zeta^*) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

où $(u_2(\varphi^*, \zeta^*), p_2(\varphi^*, \zeta^*))$ est la partie imaginaire de la solution du problème (5.9) associée à (φ^*, ζ^*) . Donc, en utilisant le fait que (φ^n, ζ^n) est solution de (5.27) aussi bien que les

inégalités (5.23) et (5.24), on aura

$$\begin{aligned}
J_{\varepsilon_n}^{\delta_n}(\varphi^n, \zeta^n) \leq J_{\varepsilon_n}^{\delta_n}(\varphi^*, \zeta^*) &= \frac{1}{2} \|u_2^{\delta_n}(\varphi^*, \zeta^*)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|p_2^{\delta_n}(\varphi^*, \zeta^*)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\varepsilon_n}{2} \|\varphi^*\|_{0,\Gamma_1}^2 \\
&\quad + \frac{\varepsilon_n}{2} \|\zeta^*\|_{0,\Gamma_1}^2 \\
&= \frac{1}{2} \|u_2^{\delta_n}(\varphi^*, \zeta^*) - u_2(\varphi^*, \zeta^*)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|p_2^{\delta_n}(\varphi^*, \zeta^*) - p_2(\varphi^*, \zeta^*)\|_{0,\Omega}^2 \\
&\quad + \frac{\varepsilon_n}{2} \|\varphi^*\|_{0,\Gamma_1}^2 + \frac{\varepsilon_n}{2} \|\zeta^*\|_{0,\Gamma_1}^2 \\
&\leq c\delta_n^2 + \frac{\varepsilon_n}{2} \|\varphi^*\|_{0,\Gamma_1}^2 + \frac{\varepsilon_n}{2} \|\zeta^*\|_{0,\Gamma_1}^2.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Donc

$$\|\varphi^n\|_{0,\Gamma_1}^2 + \|\zeta^n\|_{0,\Gamma_1}^2 \leq c \frac{\delta_n^2}{\varepsilon_n} + \|\varphi^*\|_{0,\Gamma_1}^2 + \|\zeta^*\|_{0,\Gamma_1}^2. \tag{5.59}$$

De plus, d'après (5.21) et (5.22), on a

$$\begin{aligned}
\|u^n\|_{1,\Omega} &\leq c_1 (\|f\|_{0,\Omega} + \|\psi^n\|_{0,\Gamma_0} + \|\kappa^n\|_{0,\Gamma_0} + \|\varphi^n\|_{0,\Gamma_1} + \|\zeta^n\|_{0,\Gamma_1}) \\
&\leq c_1 (\|f\|_{0,\Omega} + 2\delta_n + \|\psi\|_{0,\Gamma_0} + \|\kappa\|_{0,\Gamma_0} + \|\varphi^n\|_{0,\Gamma_1} + \|\zeta^n\|_{0,\Gamma_1})
\end{aligned} \tag{5.60}$$

et

$$\|p^n\|_{0,\Omega} \leq c_2 (\|f\|_{0,\Omega} + 2\delta_n + \|\psi\|_{0,\Gamma_0} + \|\kappa\|_{0,\Gamma_0} + \|\varphi^n\|_{0,\Gamma_1} + \|\zeta^n\|_{0,\Gamma_1}). \tag{5.61}$$

Donc, en combinant (5.59), (5.60) et (5.61), pour n assez grand, la suite $\{(\varphi^n, \zeta^n, u^n, p^n)\}_n$ est uniformément bornée dans $\Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1} \times V \times \Theta$. On peut alors extraire une sous-suite notée encore par $\{(\varphi^n, \zeta^n, u^n, p^n)\}_n$ qui converge faiblement vers $(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}, \tilde{u}, \tilde{p}) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1} \times V \times \Theta$, en effet, on a

$$\{(\varphi^n, \zeta^n)\}_n \rightharpoonup (\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}) \text{ dans } \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1} \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}
u^n &\rightharpoonup \tilde{u} \text{ dans } V \\
p^n &\rightharpoonup \tilde{p} \text{ dans } \Theta.
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Or puisque Ω est assez régulier, en utilisant l'injection compacte de V dans Θ et la compacité de l'application trace de V dans Θ_{Γ} , on peut extraire une sous-suite de $(u^n)_n$ notée encore $(u^n)_n$ telle que

$$\begin{aligned}
u^n &\rightarrow \tilde{u} \text{ dans } \Theta \\
u^n &\rightarrow \tilde{u} \text{ dans } \Theta_{\Gamma},
\end{aligned} \tag{5.64}$$

en utilisant les mêmes techniques que dans la démonstration du lemme 5.2, on peut donc aisément vérifier que $(\tilde{u}, \tilde{p}) = (u(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}), p(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}))$ est la solution de (5.9) associée à $(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta})$.

D'autre part, d'après la semi-continuité inférieure de la norme dans L^2 , on aura

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_n}^{\delta_n}(\varphi^n, \zeta^n) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|u_2^n\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|p_2^n\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\varepsilon_n}{2} \|\varphi^*\|_{0,\Gamma_1}^2 + \frac{\varepsilon_n}{2} \|\zeta^*\|_{0,\Gamma_1}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|\tilde{u}_2\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{p}_2\|_{0,\Omega}^2, \end{aligned} \quad (5.65)$$

or d'après (5.58), on a

$$0 \leq J_{\varepsilon_n}^{\delta_n}(\varphi^n, \zeta^n) \leq J_{\varepsilon_n}^{\delta_n}(\varphi^*, \zeta^*) \leq c\delta_n^2 + \frac{\varepsilon_n}{2} \|\varphi^*\|_{0,\Gamma_1}^2 + \frac{\varepsilon_n}{2} \|\zeta^*\|_{0,\Gamma_1}^2 \quad (5.66)$$

Ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_n}^{\delta_n}(\varphi^n, \zeta^n) = 0. \quad (5.67)$$

Donc, d'après (5.65), on aura

$$\tilde{u}_2 = 0 \quad \tilde{p}_2 = 0 \text{ p.p dans } \Omega,$$

ce qui montre que $(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}) \in \Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$ est une solution du problème (5.27). Or comme (φ^*, ζ^*) est l'unique solution du problème (5.27), on conclut que $(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}) = (\varphi^*, \zeta^*)$. De plus, la suite $\{(\varphi^n, \zeta^n)\}_n$ converge vers (φ^*, ζ^*) dans $\Theta_{\Gamma_1} \times \Theta_{\Gamma_1}$ quand $n \rightarrow \infty$. En effet, en utilisant (5.59), on a

$$\begin{aligned} \|\varphi^n - \varphi^*\|_{0,\Gamma_1}^2 + \|\zeta^n - \zeta^*\|_{0,\Gamma_1}^2 &= \|\varphi^n\|_{0,\Gamma_1}^2 + \|\zeta^n\|_{0,\Gamma_1}^2 + \|\varphi^*\|_{0,\Gamma_1}^2 + \|\zeta^*\|_{0,\Gamma_1}^2 \\ &\quad - 2(\varphi^n, \varphi^*)_{0,\Gamma_1} - 2(\zeta^n, \zeta^*)_{0,\Gamma_1} \\ &\leq c \frac{\delta_n^2}{\varepsilon_n} + 2\|\varphi^*\|_{0,\Gamma_1}^2 + 2\|\zeta^*\|_{0,\Gamma_1}^2 - 2(\varphi^n, \varphi^*)_{0,\Gamma_1} - 2(\zeta^n, \zeta^*)_{0,\Gamma_1}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la convergence (5.62), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|\varphi^n - \varphi^*\|_{0,\Gamma_1}^2 + \|\zeta^n - \zeta^*\|_{0,\Gamma_1}^2 \right) = 0. \quad (5.68)$$

ce qui achève la preuve de la proposition. □

Dans la suite, nous allons étudier l'approximation du problème régularisé dans le cas de la dimension $d = 2$. Plus précisément, nous allons nous pencher sur la convergence d'une suite de solutions discrètes obtenues par approximation en éléments finis vers la solution du problème continu. Pour cela, sans faire aucune restriction à notre étude, nous considérons la situation où le niveau de bruit est nul ($\delta = 0$).

5.3 Étude numérique du problème régularisé

Dans cette section, nous utilisons la méthode des éléments finis de type P_{1Bulle}/P_1 pour l'approximation du problème d'optimisation régularisé sans bruit ($\delta = 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{(\varphi, \zeta) \in K_1 \times K_2} J(\varphi, \zeta, u, p) \quad , \\ \text{où } J(\varphi, \zeta, u, p) = \frac{1}{2} \|u_2(\varphi, \zeta)\|_{0, \Omega}^2 + \frac{1}{2} \|p_2(\varphi, \zeta)\|_{0, \Omega}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi\|_{0, \Gamma_1}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\zeta\|_{0, \Gamma_1}^2, \\ \text{et } (u_2, p_2) \text{ la partie imaginaire de la solution } (u, p) \text{ du problème d'état :} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -2\mu \operatorname{div}(D(u)) + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u)n + iu = \psi + i\kappa & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u)n + iu = \varphi + i\zeta & \text{sur } \Gamma_1, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.69)$$

où $K_1 = K_2 = \Theta_{\Gamma_1}$. Nous montrons ensuite l'existence de la solution du problème discret régularisé, nous prouvons également la convergence d'une suite de solutions du problème régularisé discret vers la solution du problème continu dans des espaces appropriés. Pour cela, on réduit notre étude au cas où le bord Γ_1 est supposé être défini comme suit

$$\Gamma_1 = \{(r, x) \quad / \quad 0 \leq x \leq b\} \quad (5.70)$$

où $r > 0$ et $b > 0$ sont des constantes données.

Remarque 5.1 *Notons que notre étude restera valable pour tout domaine Ω , de bord suffisamment régulier Γ_1 qui peut être défini via une transformation régulière sous la forme (5.70). En particulier, il restera valable dans le cas où Γ_1 est côté d'un rectangle où un arc de cercle, qui sont les plus fréquemment rencontrés dans les tests numériques utilisés dans la littérature.*

Nous avons également besoin d'hypothèses de régularité supplémentaires sur K_1 et K_2 , on les définit alors comme suit :

$$K_1 = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in C(\Gamma_1)^2 / \quad \varphi^j(r, \cdot)_{|[0, b]} \in \mathbb{P}_1, \quad |\varphi^j(r, x) - \varphi^j(r, x')| < c_1 |x - x'| \quad \forall x, x' \in [0, b] \\ \text{et } \|\varphi^j\|_{L^\infty(\Gamma_1)} < c_2 \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, 2 \end{array} \right\} \quad (5.71)$$

$$K_2 = \left\{ \begin{array}{l} \zeta \in C(\Gamma_1)^2 / \quad \zeta^j(r, \cdot)_{|[0, b]} \in \mathbb{P}_1, \quad |\zeta^j(r, x) - \zeta^j(r, x')| < c_3 |x - x'| \quad \forall x, x' \in [0, b] \\ \text{et } \|\zeta^j\|_{L^\infty(\Gamma_1)} < c_4 \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, 2 \end{array} \right\} \quad (5.72)$$

avec c_1, c_2, c_3, c_4 sont des constantes strictement positives données.

On les munit de la convergence suivante : si $(\varphi_n, \zeta_n)_n$ une suite de $K_1 \times K_2$ et $(\varphi, \zeta) \in K_1 \times K_2$ alors

$$(\varphi_n, \zeta_n) \rightarrow (\varphi, \zeta) \iff \begin{cases} \varphi_n^j(r, \cdot) \rightarrow \varphi^j(r, \cdot) \text{ uniformément dans } [0, b] & \text{pour } j = 1, 2 \\ \zeta_n^j(r, \cdot) \rightarrow \zeta^j(r, \cdot) \text{ uniformément dans } [0, b] & \text{pour } j = 1, 2 \end{cases} \quad (5.73)$$

On définit l'espace

$$X = \{(u, p) \in V \times \Theta / (u, p) \text{ est la solution faible du problème (5.2) associée à } (\varphi, \zeta) \in K_1 \times K_2\}, \quad (5.74)$$

Donc, le problème de minimisation (5.69) peut s'écrire :

$$\text{Minimiser } J(\varphi, \zeta, u, p) \text{ pour tout } (u, p) \in X. \quad (5.75)$$

Remarque 5.2 *On note que le résultat d'existence prouvé dans le lemme 5.2 reste valable pour $K_1 \times K_2$ avec K_1 et K_2 définis dans (5.71) et (5.72) munis de la convergence (5.73). En effet, Il suffit tout simplement d'utiliser la compacité de $K_1 \times K_2$, qui découle du théorème d'Ascoli-Arzelà, et du fait que $K_1 \times K_2$ est fermé pour la convergence (5.73). Ainsi de toute suite $(\varphi_n, \zeta_n)_n$ de $K_1 \times K_2$, on peut extraire une sous-suite qui converge vers $(\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}) \in K_1 \times K_2$ pour la convergence (5.73), il suffit ensuite de suivre les mêmes démarches que la preuve du lemme 5.2.*

Discrétisation du problème

On considère une partition uniforme $(x_i)_{i=0}^{N-1}$ de l'intervalle $[0, b]$, telle que

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} = b, \quad x_i - x_{i-1} = h \quad \text{pour } i = 1, \dots, N-1$$

on définit les ensembles discrets associés respectivement à K_1 et K_2 par

$$K_1^h = \{\varphi_h \in C(\Gamma_1)^2 / \varphi_h^j(r, \cdot)|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_1, \quad \left| \frac{\varphi_h^j(r, x_i) - \varphi_h^j(r, x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right| < c_1 \text{ et} \\ \|\varphi_h^j\|_{L^\infty(\Gamma_1)} < \frac{c_1 h}{2} + c_2 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N-1, j = 1, 2\}$$

$$K_2^h = \{ \zeta_h \in C(\Gamma_1)^2 / \zeta_h^j(r, \cdot)|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_1, \quad \left| \frac{\zeta_h^j(r, x_i) - \zeta_h^j(r, x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right| < c_3 \text{ et} \\ \|\zeta_h^j\|_{L^\infty(\Gamma_1)} < \frac{c_3 h}{2} + c_4 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N-1, j = 1, 2 \}$$

avec c_1, c_2, c_3, c_4 sont les mêmes constantes données dans la définition de K_1 et K_2 .

On considère $\{\mathcal{T}_h\}_h$ une triangulation régulière de $\bar{\Omega}$. On désigne par $\lambda_i^{(T)}$, $1 \leq i \leq 3$ les coordonnées barycentriques associées aux sommets d'un triangle T . La fonction "Bulle" notée $b^{(T)}$ associée au triangle T est définie par

$$b^{(T)} = \prod_{i=1}^3 \lambda_i^{(T)}$$

La fonction $b^{(T)}$ est une fonction polynomiale de degré 3 qui s'annule sur les arrêts de T . On définit l'espace associé à la fonction bulle par

$$\mathbb{B}_h = \{ v_h \in C(\bar{\Omega}); \forall T \in \mathcal{T}_h \ v_{h|T} = b^{(T)}(x) \}.$$

On définit ensuite les espaces fonctionnels

$$V_i^h = \{ v_h \in C(\bar{\Omega}); v_{h|T} \in \mathbb{P}_1 \ \forall T \in \mathcal{T}_h \} \oplus \mathbb{B}_h \quad \text{pour } i = 1, 2$$

$$\Theta_0^h = \left\{ q_h \in C(\bar{\Omega}); q_{h|T} \in \mathbb{P}_1 \ \forall T \in \mathcal{T}_h, \int_{\Omega} q_h dx = 0 \right\}$$

On note également par

$$V^h = V_1^h \times V_2^h.$$

Pour $(\varphi_h, \zeta_h) \in K_1^h \times K_2^h$, on considère le problème d'état discret associé au problème (5.2) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h(\varphi_h, \zeta_h), p_h(\varphi_h, \zeta_h)) \in V^h \times \Theta^h \\ a(u_h, \phi_h) + b(\phi, p_h) = F^h(\varphi_h, \zeta_h, \phi_h) & \forall \phi_h \in V^h \\ b(u_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in \Theta_0^h, \end{cases} \quad (5.76)$$

où

$$F^h(\varphi_h, \zeta_h, \phi_h) = \int_{\Omega} f_h \phi_h dx + \int_{\Gamma_0} (\psi_h + i\kappa_h) \phi_h ds + \int_{\Gamma_1} (\varphi_h + i\zeta_h) \phi_h ds \quad \forall \phi_h \in V^h \quad (5.77)$$

avec f_h, ψ_h et κ_h sont respectivement des fonctions approchées de f, ψ et κ qui sont uniformément bornées en fonction de h et convergent presque partout respectivement vers f, ψ et κ , quand h tend vers 0.

L'espace des solutions admissibles discret s'écrit

$$X^h = \{(u_h(\varphi_h, \zeta_h), p_h(\varphi_h, \zeta_h)) \text{ solution de (5.76)} / (\varphi_h, \zeta_h) \in K_1^h \times K_2^h\}$$

ainsi, on peut écrire le problème d'optimisation discret comme suit

$$\text{Minimiser } J(\varphi_h, \zeta_h, u_h, p_h) \text{ pour tout } (u_h, p_h) \in X^h. \quad (5.78)$$

On note également que $K_1^h \times K_2^h$ peut être identifier à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N}$ notée $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$, tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 = \{ & \varphi \in \mathbb{R}^{2N} / -c_1 h \leq \varphi_i^j - \varphi_{i-1}^j \leq c_1 h, \quad i = 1, \dots, N-1 \\ & \text{et } |\varphi_i^j| \leq \frac{c_1}{2} h + c_2, \quad i = 0, \dots, N-1, j = 1, 2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 = \{ & \zeta \in \mathbb{R}^{2N} / -c_3 h \leq \zeta_i^j - \zeta_{i-1}^j \leq c_3 h, \quad i = 1, \dots, N-1 \\ & \text{et } |\zeta_i^j| \leq \frac{c_3}{2} h + c_4, \quad i = 0, \dots, N-1, j = 1, 2 \} \end{aligned}$$

On note respectivement par $M_\Omega^1(h)$ et $M_\Omega^2(h)$ les ensembles d'indices de noeuds appartenant à $\bar{\Omega}$, associés respectivement à l'approximation éléments finis de type P_{1Bulle} et \mathbb{P}_1 . On note aussi par $M_{\Gamma_1}(h)$ et $M_{\Gamma_0}(h)$ respectivement l'ensemble des indices de noeuds appartenant à Γ_1 et Γ_0 . Notons par N_{V_h} et N_{Θ_h} respectivement le cardinal des ensembles $M_\Omega^1(h)$, $M_\Omega^2(h)$, et par M et N respectivement le cardinal de $M_{\Gamma_0}(h)$ et $M_{\Gamma_1}(h)$. On désigne par $\{\Phi_i\}_{i=1}^{N_{V_h}}$ une base de V_j^h , $j = 1, 2$, et par $\{\Psi_i\}_{i=1}^{N_{\Theta_h}}$ une base de Θ^h . Ainsi tout $u_h \in V^h$ et $p_h \in \Theta_0^h$ s'écrivent

$$u_h^k(x) = \sum_{j=1}^{N_{V_h}} u_j^k \Phi_j(x) \quad \text{pour } k = 1, 2,$$

$$p_h(x) = \sum_{j=1}^{N_{\Theta_h}} p_j \Psi_j(x).$$

Donc, le problème (5.76) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (U, P) \in \mathbb{R}^{2N_{V_h}} \times \mathbb{R}^{N_{\Theta_h}} \text{ tel que} \\ \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} + C(\psi, \kappa) + G(\varphi, \zeta) \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (5.79)$$

où les matrices $A \in \mathcal{M}_{2N_{V_h} \times 2N_{V_h}}$ et $B \in \mathcal{M}_{N_{\Theta_h} \times 2N_{V_h}}$ sont données par

$$A = (a_{kj})_{k,j \in M_{\Omega}^1(h) \cup M_{\Gamma_0}(h) \cup M_{\Gamma_1}(h)} \quad \text{avec} \quad a_{k,j} = 2\mu_h \int_{\Omega} D(\Phi_k) : D(\Phi_j) dx + i \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} \Phi_k \Phi_j d\sigma \quad (5.80)$$

$$B = (b_{kj})_{k \in M_{\Omega}^2(h), j \in M_{\Omega}^1(h)} \quad \text{avec} \quad b_{k,j} = - \int_{\Omega} \Phi_k \operatorname{div} \Phi_j dx \quad (5.81)$$

et les vecteurs $C(\psi, \kappa) \in \mathbb{R}^{2N_{V_h}}$, $G(\varphi, \zeta) \in \mathbb{R}^{2N_{V_h}}$ et $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{2N_{V_h}}$ sont définis comme suit

$$C(\psi, \kappa) = (C_k^m(\psi, \kappa))_{k \in M_{\Omega}^1(h) \cup M_{\Gamma_0}(h)}, \quad m = 1, 2 \quad \text{avec} \quad C_k^m(\psi, \kappa) = \sum_{j \in M_{\Gamma_0}(h)} (\psi_j^m + i\kappa_j^m) \int_{\Gamma_0} \Phi_k \Phi_j d\sigma \quad (5.82)$$

$$G(\varphi, \zeta) = (G_k^m(\varphi, \zeta))_{k \in M_{\Omega}^1(h) \cup M_{\Gamma_1}(h)}, \quad m = 1, 2 \quad \text{avec} \quad G_k^m(\varphi, \zeta) = \sum_{j \in M_{\Gamma_1}(h)} (\varphi_j^m + i\zeta_j^m) \int_{\Gamma_1} \Phi_k \Phi_j d\sigma \quad (5.83)$$

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_j^m)_{j \in M_{\Omega}^1(h)}, \quad m = 1, 2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}_j^m = \sum_{k \in M_{\Omega}^1(h)} \int_{\Omega} f_k^m \Phi_k \Phi_j dx \quad (5.84)$$

Par ailleurs, l'ensemble X^h peut être identifié à un sous-ensemble \mathcal{X} de $\mathbb{R}^{2N_{V_h}} \times \mathbb{R}^{N_{\Theta_h}}$ défini par

$$\mathcal{X} = \{(U, P) \in \mathbb{R}^{2N_{V_h}} \times \mathbb{R}^{N_{\Theta_h}} / \text{où } (U = U_1 + iU_2, P = P_1 + iP_2) \text{ solution de (5.79)} \\ \text{associée à } (\varphi, \zeta) \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2\} \quad (5.85)$$

Donc, pour tout $(\varphi_h, \zeta_h) \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$, la fonctionnelle coût discrète s'écrit

$$J(\varphi_h, \zeta_h, U, P) = \frac{1}{2} \langle RU_2, U_2 \rangle_{2N_{V_h}} + \frac{1}{2} \langle SP_2, P_2 \rangle_{N_{\Theta_h}} + \frac{\varepsilon}{2} \langle L\varphi_h, \varphi_h \rangle_{2N} + \frac{\varepsilon}{2} \langle L\zeta_h, \zeta_h \rangle_{2N} \quad (5.86)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^s et les matrices $R = (r_{k,j})_{k,j \in M_{\Omega}^1(h)}$, $S = (s_{k,j})_{k,j \in M_{\Omega}^2(h)}$ et $L = (l_{k,j})_{k,j \in M_{\Gamma_1}(h)}$ sont définies par

$$r_{k,j} = \begin{cases} \int_{\Omega} \Phi_k \Phi_j dx & k, j \in M_{\Omega}^1(h) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.87)$$

$$s_{k,j} = \begin{cases} \int_{\Omega} \Psi_k \Psi_j dx & k, j \in M_{\Omega}^2(h) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.88)$$

$$l_{k,j} = \begin{cases} \int_{\Gamma_1} \Phi_k \Phi_j dx & k, j \in M_{\Gamma_1}(h) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.89)$$

Donc, la forme matricielle du problème d'optimisation s'écrit

$$\text{Minimiser } J(\varphi_h, \zeta_h, U, P) \text{ pour tout } (U, P) \in \mathcal{X}. \quad (5.90)$$

Existence de la solution optimale discrète

Dans cette section, nous montrons l'existence de la solution optimale du problème régularisé (5.90) pour tout pas $h > 0$, ce qui fait l'objet du résultat suivant.

Théorème 5.1 *Le problème (5.90) admet une solution dans \mathcal{X} , pour tout $h > 0$.*

Démonstration

Il suffit de montrer que \mathcal{X} est compact dans $\mathbb{R}^{2N_{V_h}} \times \mathbb{R}^{N_{\Theta_h}}$ et que J est continue sur \mathcal{X} . En effet, soit $(U_n, P_n)_n$ une suite de \mathcal{X} telle que $(U_n, P_n) \equiv (U(\varphi_n, \zeta_n), P(\varphi_n, \zeta_n))$ est la solution de (5.79) associée à $(\varphi_n, \zeta_n) \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$, pour tout n .

En utilisant le fait que \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 sont bornés et fermés (compacts) dans \mathbb{R}^{2N} , on peut extraire de la suite $(\varphi_n, \zeta_n)_n$ une sous-suite notée encore par $(\varphi_n, \zeta_n)_n$ qui converge dans \mathbb{R}^{2N} vers $(\varphi^*, \zeta^*) \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$.

Notons par (U^*, P^*) la solution de (5.79) associée à (φ^*, ζ^*) . Afin de montrer que \mathcal{X} est compact dans $\mathbb{R}^{2N_{V_h}} \times \mathbb{R}^{N_{\Theta_h}}$, il suffit de prouver que la suite $((U_n, P_n))_n$ converge vers (U^*, P^*) dans $\mathbb{R}^{2N_{V_h}} \times \mathbb{R}^{N_{\Theta_h}}$. En effet, en utilisant le fait que (U_n, P_n) et (U^*, P^*) sont respectivement solutions du problème (5.90) associées à (φ_n, ζ_n) et (φ^*, ζ^*) , on obtient ainsi

$$\langle AU_n, U_n - U^* \rangle_{2N_{V_h}} + \langle BP_n, P_n - P^* \rangle_{N_{\Theta_h}} = \langle G(\varphi_n, \zeta_n), U_n - U^* \rangle_{2N}, \quad (5.91)$$

$$\langle AU^*, U_n - U^* \rangle_{2N_{V_h}} + \langle BP^*, P_n - P^* \rangle_{N_{\Theta_h}} = \langle G(\varphi^*, \zeta^*), U_n - U^* \rangle_{2N}. \quad (5.92)$$

En soustrayant (5.92) de (5.91), on aura

$$\langle A(U_n - U^*), U_n - U^* \rangle_{2N_{V_h}} + \langle B(P_n - P^*), P_n - P^* \rangle_{N_{\Theta_h}} = \langle G(\varphi_n, \zeta_n) - G(\varphi^*, \zeta^*), U_n - U^* \rangle_{2N}. \quad (5.93)$$

En utilisant la condition Inf-sup dans le cas discret et le fait que les matrices A et B sont

symétriques et définies positives, il existe deux constantes positives α, β tel que

$$\alpha \|U_n - U^*\|_{2N_{V_h}}^2 \leq \|G(\varphi_n, \zeta_n) - G(\varphi^*, \zeta^*)\|_{2N} \|U_n - U^*\|_{2N} \quad (5.94)$$

$$\beta \|P_n - P^*\|_{N_{\Theta_h}} \leq 2\mu \|U_n - U^*\|_{2N} + \|G(\varphi_n, \zeta_n) - G(\varphi^*, \zeta^*)\|_{2N}. \quad (5.95)$$

De la convergence $(\varphi_n, \zeta_n)_n$ vers (φ, ζ) dans $\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N}$, on peut facilement voir que $G(\varphi_n, \zeta_n)$ converge vers $G(\varphi^*, \zeta^*)$ dans \mathbb{R}^{2N} , quand n tend vers ∞ . Ainsi, la compacité de \mathcal{X} découle du passage à la limite dans les inégalités (5.94) et (5.95). Il nous reste à montrer que $J(\varphi_n, \zeta_n, U_n, P_n)$ converge vers $J(\varphi^*, \zeta^*, U^*, P^*)$, on a

$$\begin{aligned} J(\varphi_n, \zeta_n, U_n, P_n) - J(\varphi^*, \zeta^*, U^*, P^*) &= \frac{1}{2} \langle RU_{2,n}, U_{2,n} \rangle_{2N_{V_h}} - \frac{1}{2} \langle RU_2^*, U_2^* \rangle_{2N_{V_h}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle SP_{2,n}, P_{2,n} \rangle_{N_{\Theta_h}} - \frac{1}{2} \langle SP_2^*, P_2^* \rangle_{N_{\Theta_h}} \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \langle L\varphi_n, \varphi_n \rangle_{2N} - \frac{\varepsilon}{2} \langle L\varphi^*, \varphi^* \rangle_{2N} \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \langle L\zeta_n, \zeta_n \rangle_{2N} - \frac{\varepsilon}{2} \langle L\zeta^*, \zeta^* \rangle_{2N} \\ &= \frac{1}{2} \langle R(U_{2,n} - U_2^*), U_{2,n} \rangle_{2N_{V_h}} + \frac{1}{2} \langle RU_2^*, (U_{2,n} - U_2^*) \rangle_{2N_{V_h}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle S(P_{2,n} - P_2^*), P_{2,n} \rangle_{N_{\Theta_h}} + \frac{1}{2} \langle SP_2^*, (P_{2,n} - P_2^*) \rangle_{N_{\Theta_h}} \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \langle L(\varphi_n - \varphi^*), \varphi_n \rangle_{2N} + \frac{\varepsilon}{2} \langle L\varphi^*, (\varphi_n - \varphi^*) \rangle_{2N} \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \langle L(\zeta_n - \zeta^*), \zeta_n \rangle_{2N} + \frac{\varepsilon}{2} \langle L\zeta^*, (\zeta_n - \zeta^*) \rangle_{2N}. \end{aligned}$$

En utilisant les convergences des parties imaginaires $(U_{2,n}, P_{2,n})$ vers (U_2^*, P_2^*) , dans $\mathbb{R}^{2N_{V_h}} \times \mathbb{R}^{N_{\Theta_h}}$, la continuité découle du passage à la limite dans l'équation précédente.

□

Résultat de convergence

Dans cette section, nous prouvons qu'il existe une sous-suite des solutions discrètes du problème régularisé (5.78), qui converge vers la solution du problème continu. Pour cela, nous introduisons les définitions suivantes.

Soit $((\varphi_h, \zeta_h))_h$ une suite telle que $(\varphi_h, \zeta_h) \in K_1^h \times K_2^h$ pour tout h , on définit la convergence de $(\varphi_h, \zeta_h)_h$ vers $(\varphi, \zeta) \in K_1 \times K_2$ quand $h \rightarrow 0$, comme suit

$$(\varphi_h, \zeta_h) \rightarrow (\varphi, \zeta) \iff (\varphi_h^j(r, \cdot), \zeta_h^j(r, \cdot)) \rightarrow (\varphi^j(r, \cdot), \zeta^j(r, \cdot)) \text{ uniformément dans } [0, b] \text{ pour } j = 1, 2.$$

La convergence de la suite $((u_h, p_h))_h \subset X^h$ vers $(u, p) \in V \times \Theta_0$, quand $h \rightarrow 0$, est définie par

$$(u_h, p_h) \rightarrow (u, p) \iff \begin{cases} u_h \rightharpoonup u & \text{dans } V \\ p_h \rightharpoonup p & \text{dans } \Theta \end{cases}$$

Ainsi, le résultat de convergence est basé sur le lemme suivant.

Lemme 5.4 *Les assertions suivantes sont satisfaites.*

- i)** Soit $(u, p) \in X$ tel que $(u, p) \equiv (u(\varphi, \zeta), p(\varphi, \zeta))$ est la solution faible de (5.2) associée à $(\varphi, \zeta) \in K_1 \times K_2$, alors il existe une suite $(u_h, p_h)_h$ tel que $(u_h, p_h) = (u_h(\varphi_h, \zeta_h), p_h(\varphi_h, \zeta_h)) \in X^h$ tel que $(\varphi_h, \zeta_h) \in K_1^h \times K_2^h$ et

$$(u_h, p_h) \rightarrow (u, p) \quad \text{quand } h \rightarrow 0. \quad (5.96)$$

- ii)** Soit $((u_h, p_h))_h$ une suite telle que $(u_h, p_h) = (u_h(\varphi_h, \zeta_h), p_h(\varphi_h, \zeta_h)) \in X^h$ avec $(\varphi_h, \zeta_h) \in K_1^h \times K_2^h$. Alors, il existe une sous-suite notée encore $((u_h, p_h))_h$ et un élément $(u, p) \in X$ tels que

$$(u_h, p_h) \longrightarrow (u, p) \quad \text{quand } h \rightarrow 0. \quad (5.97)$$

- iii)** Soient $((u_h, p_h))_h$ une suite telle que $(u_h, p_h) \equiv (u_h(\varphi_h, \zeta_h), p_h(\varphi_h, \zeta_h)) \in X^h$ et $(u, p) \equiv (u(\varphi, \zeta), p(\varphi, \zeta))$ un élément de X tels que

$$(u_h, p_h) \longrightarrow (u, p) \quad \text{quand } h \rightarrow 0,$$

alors

$$J(\varphi_h, \zeta_h, u_h, p_h) \longrightarrow J(\varphi, \zeta, u, p) \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

Démonstration

Pour montrer i), soit $(u, p) = (u(\varphi, \zeta), p(\varphi, \zeta))$ un élément de X tel que $(\varphi, \zeta) \in K_1 \times K_2$.

Pour $h > 0$, on construit la suite $(\varphi_h)_h$ comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi_h &\in C(\Gamma_1)^2 \text{ such that } \varphi_h^j(r, \cdot)|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_1 && \text{pour } i = 1, \dots, N-1, j = 1, 2 \\ \varphi_h^j(r, x_i) &= \frac{1}{h} \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} \varphi^j(r, \tau) d\tau && \text{pour } i = 1, \dots, N-1, j = 1, 2 \\ \varphi_h^j(r, 0) &= \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} \varphi^j(r, \tau) d\tau \text{ pour } \varphi_h^j(r, b) = \frac{2}{h} \int_{b-\frac{h}{2}}^b \varphi^j(r, \tau) d\tau && \text{pour } j = 1, 2, \end{aligned}$$

on a

$$|\varphi_h^j(r, x_i) - \varphi_h^j(r, x_{i-1})| = \left| \frac{1}{h} \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} \varphi^j(r, \tau) d\tau - \frac{1}{h} \int_{(i-\frac{3}{2})h}^{(i-\frac{1}{2})h} \varphi^j(r, \tau) d\tau \right|$$

En utilisant un changement de variable, on aura

$$\begin{aligned}
|\varphi_h^j(r, x_i) - \varphi_h^j(r, x_{i-1})| &= \frac{1}{h} \left| \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} \varphi^j(r, \tau) - \varphi^j(r, \tau - h) d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} |\varphi^j(r, \tau) - \varphi^j(r, \tau - h)| d\tau \\
&\leq c_1 \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} d\tau \quad \text{pour } i = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2,
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$|\varphi_h^j(r, x_i) - \varphi_h^j(r, x_{i-1})| \leq c_1 h \quad \text{pour } i = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2, \quad (5.98)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|\varphi_h^j(r, x_i) - \varphi^j(r, x_i)| &= \left| \frac{1}{h} \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} \varphi^j(r, \tau) d\tau - \varphi^j(r, x_i) \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} \varphi^j(r, \tau) - \frac{1}{h} \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} \varphi^j(r, x_i) d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} |\varphi^j(r, \tau) - \varphi^j(r, x_i)| d\tau \\
&\leq \frac{1}{h} \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} c_1 |\tau - x_i| d\tau \\
&\leq \frac{1}{h} \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} c_1 \frac{h}{2} d\tau \quad \text{pour } i = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2,
\end{aligned}$$

ce qui entraîne l'estimation suivante :

$$\|\varphi_h^j - \varphi^j\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \leq \frac{c_1}{2} h \quad \text{pour } j = 1, 2$$

On en déduit ainsi

$$\|\varphi_h^j\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \leq \frac{c_1}{2} h + c_2 \quad \text{pour } j = 1, 2. \quad (5.99)$$

De la même manière, on construit ζ_h une approximation de ζ , telle que

$$|\zeta_h^j(r, x_i) - \zeta_h^j(r, x_{i-1})| \leq c_3 h \quad \text{pour } i = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2, \quad (5.100)$$

$$\|\zeta_h^j - \zeta^j\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \leq \frac{c_3}{2} h \quad \text{pour } j = 1, 2,$$

et

$$\|\zeta_h^j\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \leq \frac{c_3}{2}h + c_4 \quad \text{pour } j = 1, 2. \quad (5.101)$$

Donc, on a $(\varphi_h, \zeta_h) \in K_1^h \times K_2^h$ pour tout h et $((\varphi_h, \zeta_h))_h$ converge vers (φ, ζ) , quand h tend vers 0. Maintenant, soit $(u_h, p_h) \equiv (u_h(\varphi_h, \zeta_h), p_h(\varphi_h, \zeta_h))$ un élément de X^h , c'est-à-dire que $(u_h, p_h) \in V^h \times \Theta_0^h$ est la solution de

$$\begin{cases} a(u_h, \phi_h) + b(\phi_h, p_h) = F(\varphi_h, \zeta_h, \phi_h) & \forall \phi_h \in V^h \\ b(u_h, \tilde{q}_h) = 0 & \forall \tilde{q}_h \in \Theta_0^h. \end{cases} \quad (5.102)$$

En utilisant la proposition 5.1 et l'estimation (5.99) et (5.101), on peut montrer que $((u_h, p_h))_h$ est uniformément bornée dans $V \times \Theta$. On peut extraire ainsi une sous-suite notée encore par $((u_h, p_h))_h$ qui est faiblement convergente vers (u, p) dans $V \times \Theta$. Il suffit de montrer que (u, p) est la solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} a(u, \phi) + b(\phi, p) = F(\varphi, \zeta, \phi) & \forall \phi \in V \\ b(u, \tilde{q}) = 0 & \forall \tilde{q} \in \Theta_0. \end{cases} \quad (5.103)$$

Soit $(\phi, \tilde{q}) \in V \times \Theta_0$ et notons que $\Phi_h = \Pi_h \phi \in V^h$ et $\tilde{Q}_h = P_h \tilde{q} \in \Theta_0^h$ où Π_h est l'opérateur d'interpolation linéaire par morceaux agissant sur ϕ (voir [35]) et P_h l'opérateur de projection de Clément agissant sur \tilde{q} (voir [37]). Donc, on a

$$\begin{cases} a(u_h, \Phi_h) + b(\Phi_h, p_h) = F(\varphi_h, \zeta_h, \Phi_h) & \forall \Phi_h \in V^h \\ b(u_h, \tilde{Q}_h) = 0 & \forall \tilde{Q}_h \in \Theta_0^h. \end{cases} \quad (5.104)$$

Par passage à la limite dans l'équation (5.104) quand $h \rightarrow 0$, on obtient alors (u, p) est solution de (5.103). En effet, on peut utiliser les décompositions suivantes

$$a(u_h, \Phi_h) + b(\Phi_h, p_h) - a(u, \phi) - b(\phi, p) = I_1^h + I_2^h \quad (5.105)$$

où I_1^h et I_2^h sont donnés par

$$I_1^h = a(u_h, \phi) - a(u, \phi) + b(\phi, p_h) - b(\phi, p)$$

$$I_2^h = a(u_h, \Phi_h) - a(u_h, \phi) + b(\Phi_h, p_h) - b(\phi, p_h)$$

et

$$b(u_h, \tilde{Q}_h) - b(u, \tilde{q}) = E_1^h + E_2^h \quad (5.106)$$

où E_1^h et E_2^h sont donnés par

$$E_1^h = b(u_h, \tilde{Q}_h) - b(u_h, \tilde{q}), \quad E_2^h = b(u_h, \tilde{q}) - b(u, \tilde{q}).$$

D'après la convergence $(u_h, p_h) \rightarrow (u, p)$ et la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)^2$ dans Θ_Γ^2 , on aura $I_1^h \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. D'après, le résultat de convergence $\Phi_h \rightarrow \phi$ dans $H^1(\Omega)^2$ quand $h \rightarrow 0$ (voir [35]), on aura $\|\operatorname{div} \Phi_h - \operatorname{div} \phi\|_{L^2(\Omega)}$ tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$, alors, en utilisant le fait que (u_h, p_h) est uniformément bornée dans $H^1(\Omega)^2 \times \Theta$, et la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)^2$ dans Θ_Γ , on obtient que I_2^h tend vers 0, quand $h \rightarrow 0$. Maintenant, en utilisant la convergence faible de u_h vers u dans $H^1(\Omega)^2$, on aura que E_2^h converge vers 0 quand $h \rightarrow 0$ et d'après le résultat de convergence $\tilde{Q}_h \rightarrow \tilde{q}$ dans $L^2(\Omega)$ quand $h \rightarrow 0$ (voir [37]), on aura que E_1^h converge vers 0. Il reste à montrer que $F^h(\varphi_h, \zeta_h, \Phi_h)$ converge vers $F(\varphi, \zeta, \phi)$ quand $h \rightarrow 0$. En effet

$$\begin{aligned} F(\varphi, \zeta, \phi) - F(\varphi_h, \zeta_h, \Phi_h) &= F(\varphi_h, \zeta_h, \phi) - F(\varphi, \zeta, \phi) + F(\varphi_h, \zeta_h, \Phi_h) - F(\varphi_h, \zeta_h, \phi) \\ &= \int_{\Omega} (f_h - f)\phi \, dx + \int_{\Gamma_0} ((\psi_h - \psi) + i(\kappa_h - \kappa))\phi \, ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} ((\varphi_h - \varphi) + i(\zeta_h - \zeta))\phi \, ds + \int_{\Omega} f_h(\Phi_h - \phi) \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} (\psi_h + i\kappa_h)(\Phi_h - \phi) \, ds + \int_{\Gamma_1} (\varphi_h + i\zeta_h)(\Phi_h - \phi) \, ds \\ &= L_1^h + L_2^h + L_3^h + L_4^h + L_5^h + L_6^h \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} L_1^h &= \int_{\Omega} (f_h - f)\phi \, dx, & L_2^h &= \int_{\Gamma_0} ((\psi_h - \psi) + i(\kappa_h - \kappa))\phi \, ds \\ L_3^h &= \int_{\Gamma_1} ((\varphi_h - \varphi) + i(\zeta_h - \zeta))\phi \, ds, & L_4^h &= \int_{\Omega} f_h(\Phi_h - \phi) \, dx \end{aligned}$$

et

$$L_5^h = \int_{\Gamma_0} (\psi_h + i\kappa_h)(\Phi_h - \phi) \, ds, \quad L_6^h = \int_{\Gamma_1} (\varphi_h + i\zeta_h)(\Phi_h - \phi) \, ds$$

Puisque les suites $(f_h)_h$, $(\psi_h)_h$ et $(\kappa_h)_h$ sont uniformément bornées et convergent respectivement presque partout vers f , ψ et κ , en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue [23], on aura que $L_1^h \rightarrow 0$ et $L_2^h \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. En utilisant la convergence uniforme de φ_h vers φ et ζ_h vers ζ , on obtient $L_3^h \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. D'autre part, comme Φ_h converge faiblement vers ϕ dans V et en utilisant le fait que $(f_h)_h$, $(\psi_h)_h$ et $(\kappa_h)_h$ sont uniformément bornées, on aura que $L_4^h \rightarrow 0$, $L_5^h \rightarrow 0$ et $L_6^h \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Ce qui achève la preuve de l'assertion (i).

Pour montrer (ii), prenons $((u_h, p_h))_h$ une suite telle que $(u_h, p_h) \equiv (u_h(\varphi_h, \zeta_h), p_h(\varphi_h, \zeta_h))$ un élément de X^h . Comme $(\varphi_h, \zeta_h) \in K_1^h \times K_2^h$, on a pour tout h , $\varphi_h \in T_1$ et $\zeta_h \in T_2$ où

T_1, T_2 sont les espaces définis par

$$T_1 = \left\{ \begin{array}{l} \psi \in C(\Gamma_1)^2 \quad / \quad |\psi^j(r, x) - \psi^j(r, x')| \leq c_1|x - x'| \quad \forall x, x' \in [0, b] \\ \text{et } \|\psi^j\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \leq \frac{c_1}{2} + c_2 \text{ pour } j = 1, 2 \end{array} \right\}$$

$$T_2 = \left\{ \begin{array}{l} \psi \in C(\Gamma_1)^2 \quad / \quad |\psi^j(r, x) - \psi^j(r, x')| \leq c_3|x - x'| \quad \forall x, x' \in [0, b] \\ \text{et } \|\psi^j\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \leq \frac{c_3}{2} + c_4 \text{ pour } j = 1, 2 \end{array} \right\}$$

D'après le théorème d'Ascoli-Arzela[23], on peut extraire une sous-suite notée encore par $(\varphi_h, \zeta_h)_h$ qui converge dans $T_1 \times T_2$ vers $(\varphi, \zeta) \in T_1 \times T_2$. Ensuite, par passage à la limite dans les inégalités (5.99) et (5.101), on aura alors $(\varphi, \zeta) \in K_1 \times K_2$. En utilisant les mêmes techniques que dans la preuve de (i), on montre que (u_h, p_h) converge faiblement dans $H^1(\Omega)^2 \times \Theta$ vers $(u, p) \equiv (u(\varphi, \zeta), p(\varphi, \zeta)) \in X$.

Pour montrer l'assertion (iii), on utilise la convergence des parties imaginaires $u_{2h} \rightarrow u_2$ et $p_{2h} \rightarrow p_2$ dans $L^2(\Omega)$ qui découle de la convergence $(u_h, p_h) \rightarrow (u, p)$ quand $h \rightarrow 0$. En utilisant, également la convergence $(\varphi_h, \zeta_h) \rightarrow (\varphi, \zeta)$ quand $h \rightarrow 0$ et la continuité de J , on obtient alors

$$J(\varphi_h, \zeta_h, u_h, p_h) \rightarrow J(\varphi, \zeta, u, p) \text{ quand } h \rightarrow 0$$

D'où le résultat.

Nous pouvons maintenant prouver le résultat de convergence suivant.

Théorème 5.2 *Soit $((u_h^*, p_h^*))_h$ une suite telle que (u_h^*, p_h^*) est solution de (5.78), où $(u_h^*, p_h^*) \equiv (u_h^*(\varphi_h^*, \zeta_h^*), p_h^*(\varphi_h^*, \zeta_h^*)) \in X^h$. Alors, il existe une sous-suite notée encore $(u_h^*, p_h^*)_h$ et un élément $(u^*, p^*) \in X$ tels que*

$$(u_h^*, p_h^*) \rightarrow (u^*, p^*) \text{ quand } h \rightarrow 0$$

de plus (u^*, p^*) est la solution de (5.75).

Démonstration

Soit $(u(\varphi, \zeta), p(\varphi, \zeta))$ un élément de X , où $(\varphi, \zeta) \in K_1 \times K_2$. D'après l'assertion (i) du lemme 5.4, il existe une suite $((\varphi_h, \zeta_h))_h \in K_1^h \times K_2^h$ telle que $(u_h, p_h) \equiv (u_h(\varphi_h, \zeta_h), p_h(\varphi_h, \zeta_h))$ un élément de X^h et

$$(u_h, p_h) \rightarrow (u, p) \quad \text{quand } h \rightarrow 0, \quad (5.107)$$

d'après l'assertion (iii), on a

$$J(\varphi_h, \zeta_h, u_h, p_h) \longrightarrow J(\varphi, \zeta, u, p) \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

Soit maintenant $((u_h^*, p_h^*))_h$ une suite de solutions de (5.78), telle que

$(u_h^*, p_h^*) \equiv (u_h(\varphi_h^*, \zeta_h^*), p_h^*(\varphi_h^*, \zeta_h^*)) \in X^h$. D'après l'assertion (ii) du lemme 5.4, il existe une sous-suite notée encore (u_h^*, p_h^*) et un élément $(u^*, p^*) \in X$ tels que

$$(u_h^*, p_h^*) \rightarrow (u^*, p^*) \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

D'après l'assertion (iii), on aura

$$J(\varphi_h, \zeta_h, u_h, p_h) \rightarrow J(\varphi^*, \zeta^*, u^*, p^*) \text{ quand } h \rightarrow 0$$

Or, on a

$$J(\varphi_h^*, \zeta_h^*, u_h^*, p_h^*) \leq J_h(\varphi_h, \zeta_h, u_h, p_h) \quad \text{pour tout } h \quad (5.108)$$

Le résultat est alors obtenu par passage à la limite dans l'équation (5.108) quand $h \rightarrow 0$.

Dans la suite, nous nous intéressons à la résolution numérique du problème (5.27).

5.4 Simulation numérique du problème régularisé

Dans cette section, nous allons proposer une méthode d'approximation du problème d'optimisation (5.27), en utilisant un algorithme du type gradient, basé sur le processus d'identification de la solution suggéré dans la proposition (5.2).

Ainsi, en substituant d'abord (5.48) dans (5.19), on obtient

$$\begin{cases} a(u^\delta, v) + b(v, p^\delta) + \frac{1}{\varepsilon}(w_2^\delta, \bar{v})_{0, \Gamma_1} + i \frac{1}{\varepsilon}(w_1^\delta, \bar{v})_{0, \Gamma_1} = (f, \bar{v}) + (\psi^\delta + i\kappa^\delta, \bar{v})_{0, \Gamma_0} & \forall v \in V \\ b(u^\delta, q) = 0 & \forall q \in \Theta_0, \end{cases} \quad (5.109)$$

où (w^δ, \tilde{p}) est solution du problème d'état adjoint

$$\begin{cases} a(w^\delta, v) + b(v, \tilde{p}^\delta) = (u_2^\delta, \bar{v})_{0, \Omega} & \forall v \in V \\ b(w^\delta, q) = - \int_{\Omega} p_2^\delta q \, dx & \forall q \in \Theta_0. \end{cases} \quad (5.110)$$

Par suite, en combinant les formules (5.48), (5.109) et (5.110), on se ramène à résoudre les problèmes suivants

$$\begin{cases} 2\mu \int_{\Omega} D(u_1) : D(v) \, dx + \int_{\Omega} p_1 \operatorname{div} v \, dx - (u_2, v)_{0, \Gamma} + \frac{1}{\varepsilon}(w_2, v)_{0, \Gamma_1} = (f, v)_{0, \Omega} + (\psi^\delta, v)_{0, \Gamma_0} & \forall v \in V \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} u_1 \, dx = 0 & \forall q \in \Theta_0 \end{cases} \quad (5.111)$$

$$\begin{cases} 2\mu \int_{\Omega} D(u_2) : D(v) dx + \int_{\Omega} p_2 \operatorname{div} v dx + (u_1, v)_{0,\Gamma} + \frac{1}{\varepsilon} (w_1, v)_{0,\Gamma_1} = (\kappa^\delta, v)_{0,\Gamma_0} & \forall v \in V \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} u_2 dx = 0 & \forall q \in \Theta_0 \end{cases} \quad (5.112)$$

$$\begin{cases} 2\mu \int_{\Omega} D(w_1) : D(v) dx + \int_{\Omega} \tilde{p}_1 \operatorname{div} v dx - (u_2, v)_{0,\Omega} - (w_2, v)_{0,\Gamma} = 0 & \forall v \in V \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} w_1 dx = - \int_{\Omega} p_2^\delta q dx & \forall q \in \Theta_0 \end{cases} \quad (5.113)$$

$$\begin{cases} 2\mu \int_{\Omega} D(w_2) : D(v) dx - \int_{\Omega} \tilde{p}_2 \operatorname{div} v dx + (w_1, v)_{0,\Gamma} = 0 & \forall v \in V \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} w_2 dx = 0 & \forall q \in \Theta_0 \end{cases} \quad (5.114)$$

On calcule ainsi la solution $(\varphi_\varepsilon^\delta, \zeta_\varepsilon^\delta)$, en utilisant les relations

$$\varphi_\varepsilon^\delta = -\frac{1}{\varepsilon} w_{2/\Gamma_1}, \quad \zeta_\varepsilon^\delta = -\frac{1}{\varepsilon} w_{1/\Gamma_1} \quad (5.115)$$

Dans la suite, afin de calculer numériquement la solution approchée, nous allons opter pour une approximation des problèmes (5.111)-(5.114) par la méthode des éléments finis P_{1Bulle}/P_1 .

5.5 Résultats numériques

Dans cette section, nous nous intéressons à la simulation numérique de la solution en se basant sur l'approche de régularisation présentée dans l'algorithme ci-dessus. Ensuite, afin de tester la fiabilité de cet algorithme, nous présentons quelques tests numériques.

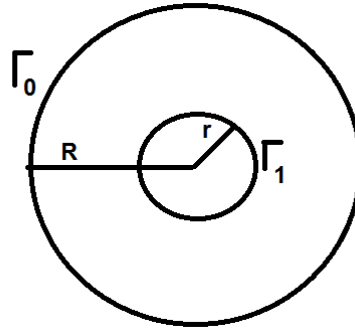
Test numérique 1

Nous considérons les données suivantes :

- Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un anneau défini par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$$

où $r = 0.6$ est le rayon intérieur et $R = 1$ est le rayon extérieur (Figure 5.1).

FIGURE 5.1 – Domaine Ω

- On suppose que le bord de Ω est défini par $\partial\Omega := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, où

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2\}$$

est le bord intérieur supposé inaccessible et

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, / x^2 + y^2 = R^2\}$$

est le bord extérieur.

- La donnée de Dirichlet κ pour le champ de la vitesse sur Γ_0 :

$$\begin{cases} \kappa_1 = ch(x) sh(y) \\ \kappa_2 = -ch(y) sh(x) \end{cases} \quad (5.116)$$

- Le flux ψ sur Γ_0

$$\begin{cases} \psi_1 = \mu (sh(x) sh(y) * N.x + ch(x) ch(y) * N.y) - \left(y ch(x) - \frac{sh(1)}{2}\right) * N.x \\ \psi_2 = \mu (ch(x) ch(y) * N.x + sh(y) sh(x) * N.y) - \left(y ch(x) - \frac{sh(1)}{2}\right) * N.y \end{cases} \quad (5.117)$$

où $N = (N.x, N.y)$ est la normale sortante de Ω .

- Le second membre

$$\begin{cases} f_1 = -2\mu ch(x)sh(y) + ysh(x) \\ f_2 = 2\mu ch(y)sh(x) + ch(x). \end{cases} \quad (5.118)$$

- Nous allons maintenant reconstruire $(\varphi_\varepsilon^h, \zeta_\varepsilon^h)$ une approximation du champ de vitesse φ^* , du flux ζ^* et une approximation de la pression sur Γ_1 , en considérant la

solution exacte du problème (5.1) associée aux données ci-dessus

$$\begin{cases} ue_1 = \text{ch}(x)\text{sh}(y) \\ ue_2 = -\text{ch}(y)\text{sh}(x) \\ pe = y\text{ch}(x) - \frac{\text{sh}(1)}{2} \end{cases} \quad (5.119)$$

Le couple vitesse et flux $(\varphi, \zeta)_{\Gamma_1}$ construit sur la partie du bord inaccessible Γ_1 est illustré dans la figure 5.2. Nous constatons que la solution approchée ainsi obtenue est de bonne qualité à partir des mesures de $(\psi, \kappa)_{\Gamma_0}$. Nous étudions également l'impact du pa-

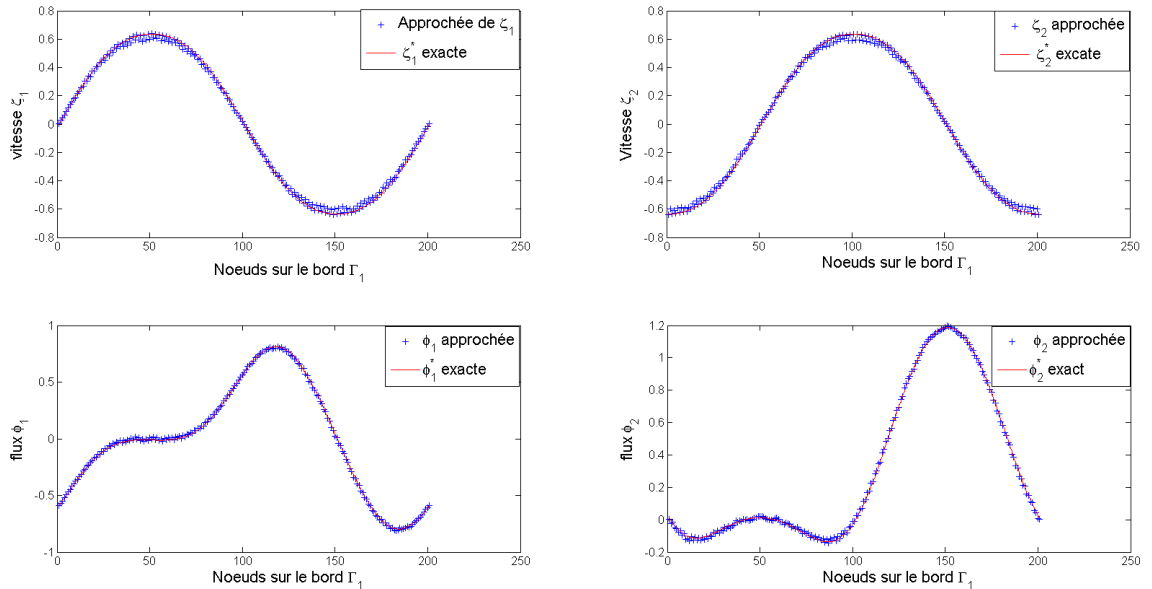
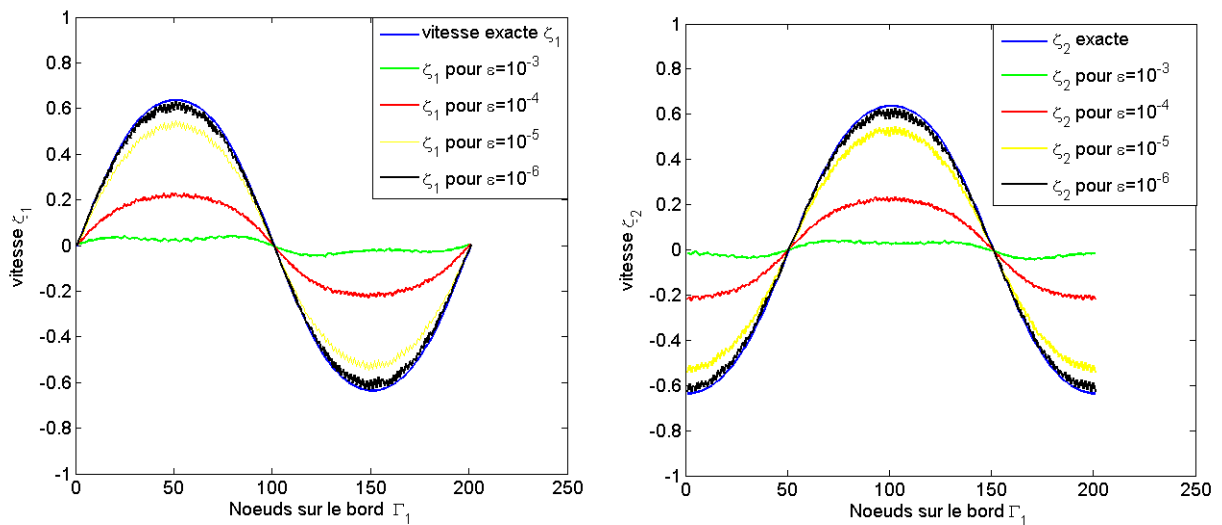
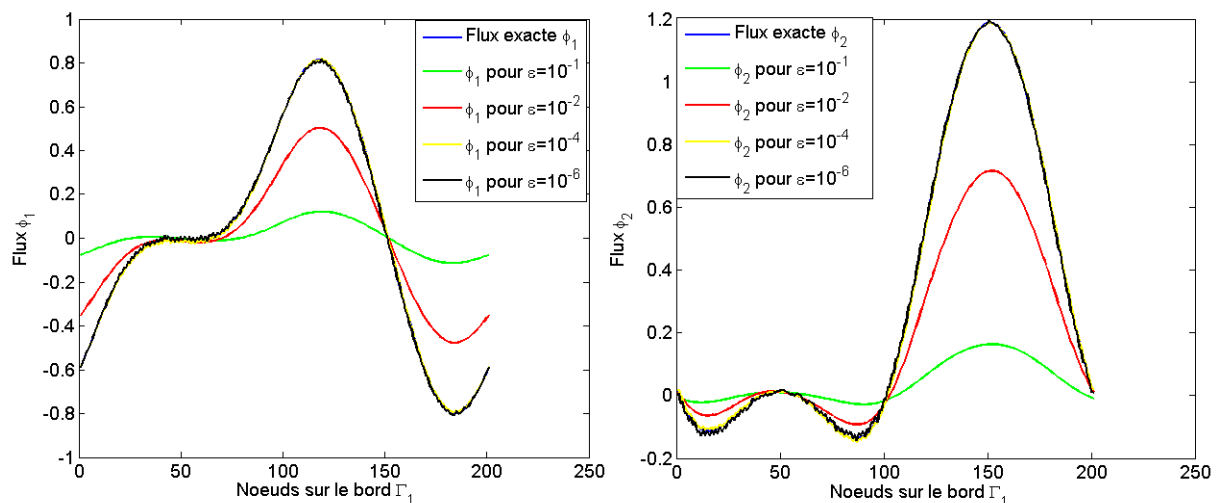


FIGURE 5.2 – La solution (φ, ζ) exacte et approchée

ramètre de régularisation ε sur la solution approchée $(\varphi_\varepsilon^h, \zeta_\varepsilon^h)$. Dans les figures 5.3 et 5.4, nous présentons le comportement des solutions $(\varphi_\varepsilon^h, \zeta_\varepsilon^h)$ en fonction de quelques valeurs de ε . Nous pouvons bien constater que pour des valeurs de ε qui varient entre 10^{-4} et 10^{-6} , nous obtenons de bonnes approximations. Ainsi, pour $\varepsilon = 10^{-6}$, les problèmes approchés (5.111), (5.112), (5.113) et (5.114) sont résolus pour construire des solutions approchées $(\varphi_\varepsilon^h, \zeta_\varepsilon^h)$ de (φ^*, ζ^*) à partir des données de Cauchy (ψ, κ) . Dans la figure 5.5, nous présentons une comparaison entre la solution exacte et la solution approchée sur le bord inaccessible Γ_1 . Comme nous pouvons le remarquer, les résultats numériques obtenus sont assez satisfaisants et les solutions approchées présentent de bonnes approximations de la solution. Afin de bien évaluer la précision de la solution, on considère les erreurs

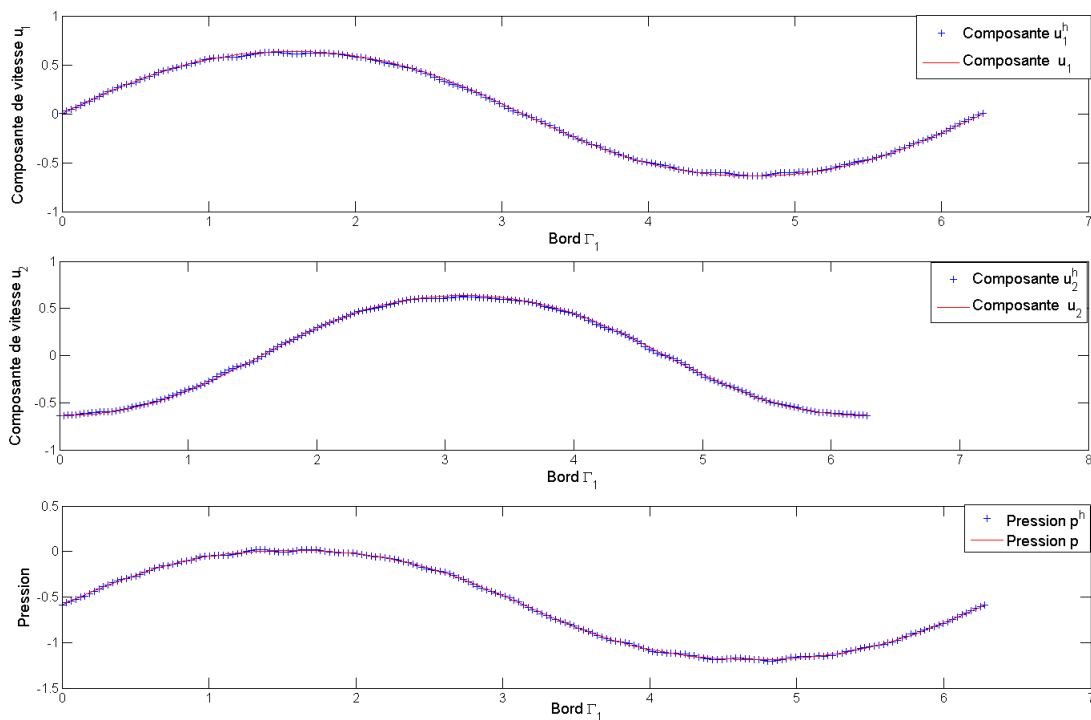
FIGURE 5.3 – La solution ζ_ε^h pour les différentes valeurs de ε FIGURE 5.4 – La solution φ_ε^h pour les différentes valeurs de ε

relatives en norme L^2 correspondant aux solutions φ_ε^h , ζ_ε^h , et (u_1^h, p_1^h) :

$$Err_\varphi = \frac{\|\varphi_\varepsilon^h - \varphi^*\|_{0,\Gamma_1}}{\varphi^*} \quad Err_\zeta = \frac{\|\zeta_\varepsilon^h - \zeta^*\|_{0,\Gamma_1}}{\zeta^*}$$

$$Err_u = \frac{\|u_1^h - u^*\|_{0,\Gamma_1}}{u^*} \quad Err_p = \frac{\|p_1^h - p^*\|_{0,\Gamma_1}}{u^*}$$

où (u^*, p^*) , est la solution exacte de (5.1) associée à (φ^*, ζ^*) . Dans la table 5.1, on examine la convergence numérique de la solution approchée $(\varphi_\varepsilon^h, \zeta_\varepsilon^h)$ vers la solution exacte $(\varphi_\varepsilon, \zeta_\varepsilon)$

FIGURE 5.5 – La vitesse et la pression exactes et approchées sur Γ_1

pour des valeurs décroissantes de h (pour $\varepsilon = 10^{-6}$). Nous concluons à partir cette table que l'approche proposée nous permet d'avoir une bonne convergence vers la solution (φ, ζ) quand h tend vers 0.

h	0.5	0.1	0.05	0.01
Err_t	0.058	0.035	0.019	0.018
Err_u	0.059	0.034	0.018	0.017
Err_p	0.017	0.0058	0.053	0.0015
Err_φ	0.06	0.019	0.009	0.0023

TABLE 5.1 – La variation des erreurs en fonction de h

Finalement, afin de vérifier la stabilité de l'approche considérée, nous introduisons un bruit uniformément distribué avec des niveaux de l'ordre $\delta = 2.5\%$, $\delta = 5\%$, et $\delta = 10\%$ sur la donnée (ψ, κ) qui sera notée par $(\psi^\delta, \kappa^\delta)$:

$$\psi_1^\delta = [1 + \delta \cdot (2 \text{rand}(x) - 1)]\psi_1$$

$$\psi_2^\delta = [1 + \delta \cdot (2 \text{rand}(x) - 1)]\psi_2$$

$$\kappa_1^\delta = [1 + \delta \cdot (2 \text{rand}(x) - 1)]\kappa_1$$

$$\kappa_2^\delta = [1 + \delta \cdot (2 \text{rand}(x) - 1)]\kappa_2,$$

où $rand(x)$ retourne une valeur pseudo-aléatoire tirée d'une distribution uniforme de $[0, 1]$. Le processus est répété sur le même maillage de pas de discrétisation $h = 0.03$ pour $\varepsilon = 10^{-6}$. Dans les figures 5.6 et 5.7, nous présentons respectivement le comportement

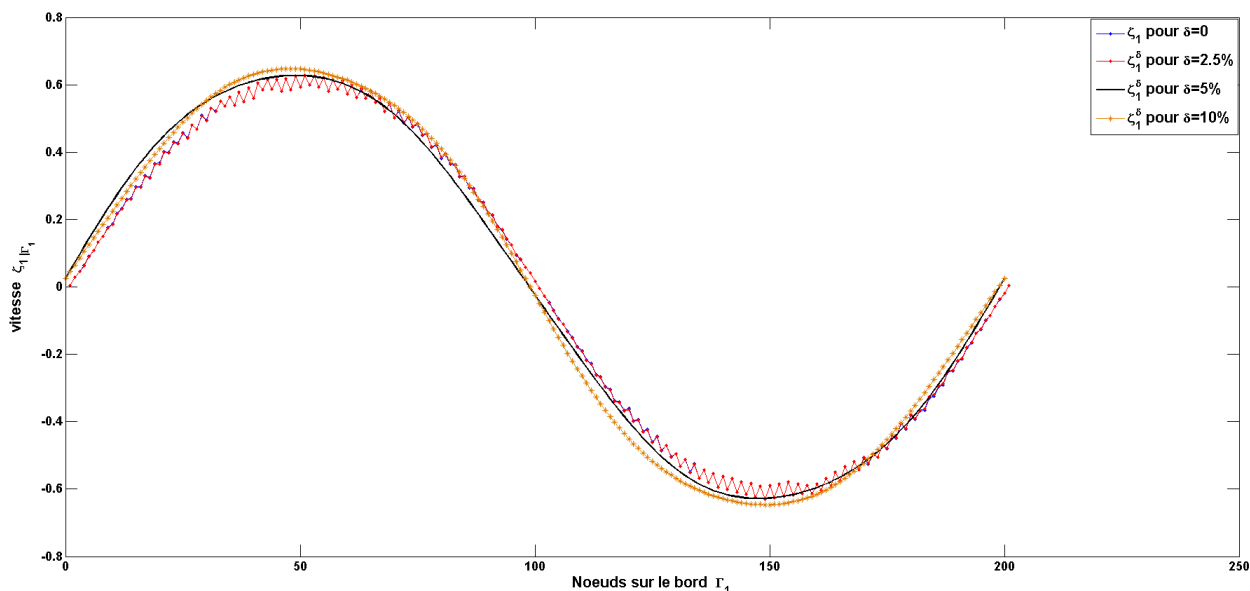


FIGURE 5.6 – La solution ζ_1 pour différents niveaux du bruit δ

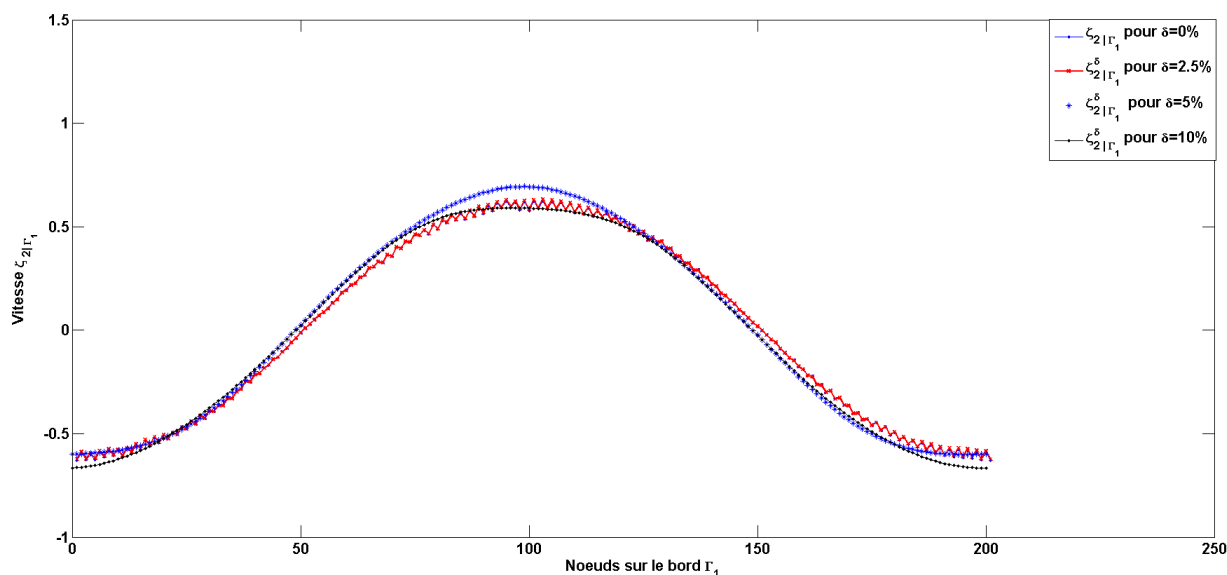
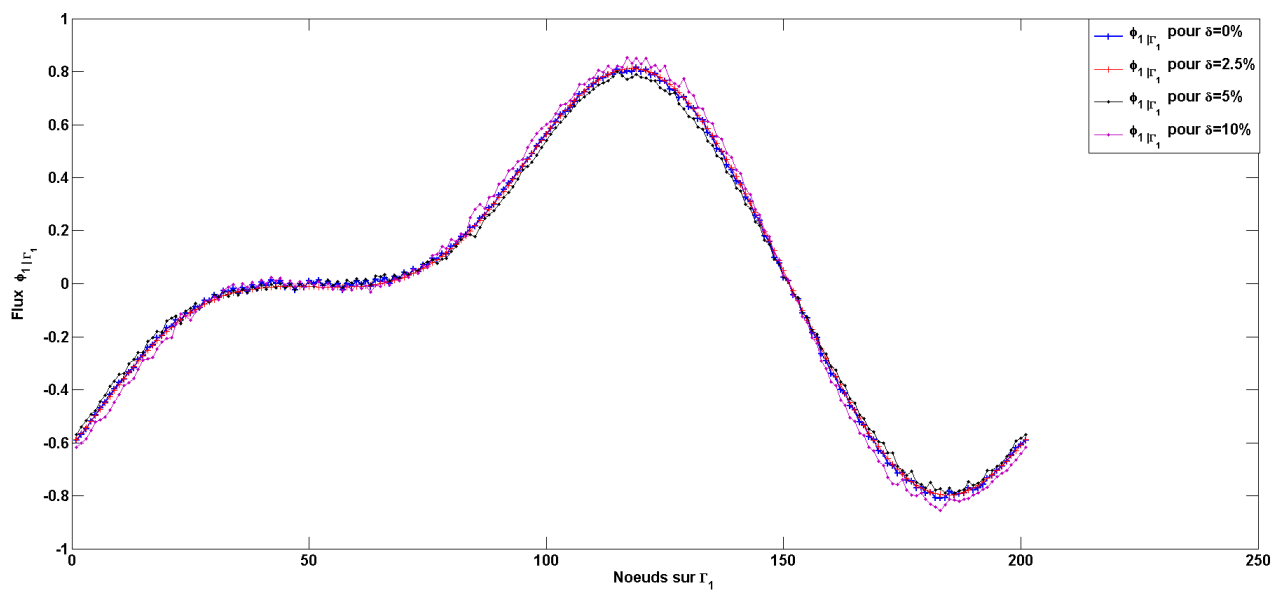
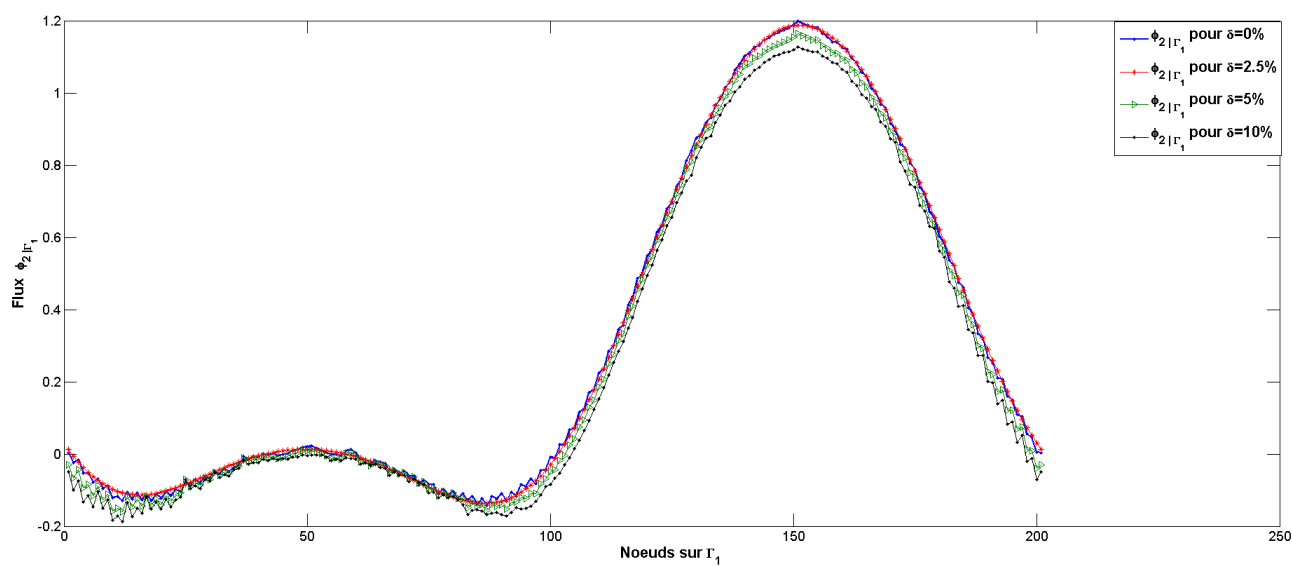


FIGURE 5.7 – La solution ζ_2 pour différents niveaux du bruit δ .

de la solution ζ_1 et ζ_2 en présence du bruit. Dans la figure 5.8 et 5.9), nous présentons également respectivement le comportement de la solution φ_1 et φ_2 . On remarque à partir de ces figures que, malgré l'instabilité sévère du problème, l'approche proposée produit

FIGURE 5.8 – La solution φ_1 pour différents niveaux du bruit δ FIGURE 5.9 – La solution φ_2 pour différents niveaux du bruit δ

des solutions numériques convergentes et stables par rapport aux petits bruits introduits sur les données de Cauchy.

Test numérique 2

Nous considérons le même domaine Ω (voir figure 5.1) et les données suivantes :

- La donnée de Dirichlet κ pour le champ de vitesse sur Γ_0 :

$$\begin{cases} \kappa_1 = 4y^3 - x^2 \\ \kappa_2 = 4x^3 + 2xy - 1 \end{cases} \quad (5.120)$$

- Le flux ψ sur Γ_0

$$\begin{cases} \psi_1 = \mu((-2x) * N.x + (12y^2) * N.y) - (24xy - 12x) * N.x \\ \psi_2 = \mu((12x^2 + 2y) * N.x + (2x) * N.y) - (24xy - 12x) * N.y \end{cases} \quad (5.121)$$

- Le second membre

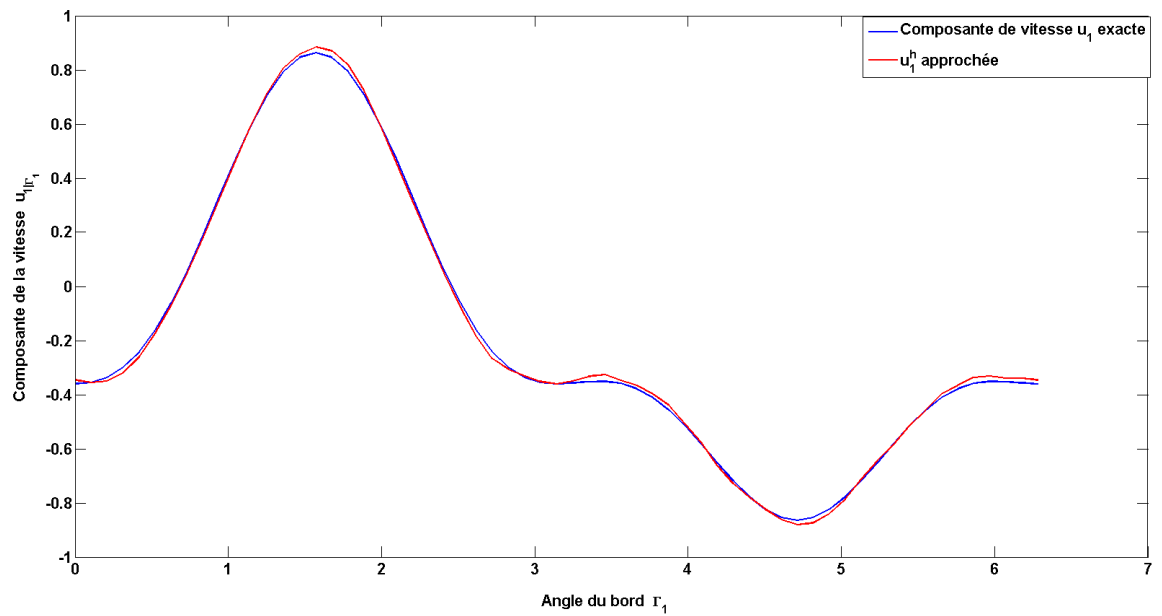
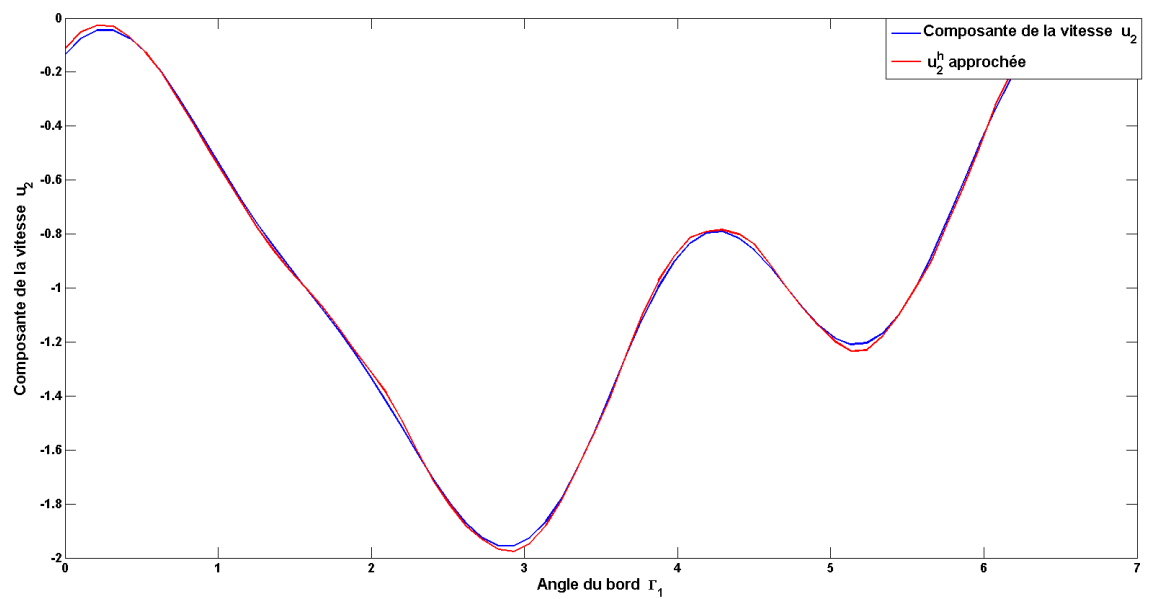
$$\begin{cases} f_1 = -\mu(24y - 2) + 24y - 12 \\ f_2 = -24\mu x + 24x. \end{cases} \quad (5.122)$$

- Nous allons reconstruire $(\varphi_\varepsilon^h, \zeta_\varepsilon^h)$ une approximation du champ de vitesse φ^* , et du flux ζ^* et une approximation de la pression sur Γ_1 , en considérant la solution exacte du problème (5.1) associée aux données ci-dessus

$$\begin{cases} ue_1 = 4y^3 - x^2 \\ ue_2 = 4x^3 + 2xy - 1 \\ pe = 24xy - 12x \end{cases} \quad (5.123)$$

Dans les figures 5.10, 5.11 et 5.12, nous présentons une comparaison entre les solutions exacte et approchée des composantes de la vitesse et la pression sur le bord inaccessible Γ_1 . Tandis que les deux composantes du flux sont présentées dans les figures 5.13 et 5.14. Ces résultats montrent pour cet exemple aussi la bonne qualité d'approximation de la solution.

Notons que cette approche est basée sur un solveur utilisant la technique du gradient adjoint ne nécessitant aucune itération, ainsi la résolution numérique est rapide. Cependant, nous remarquons que malgré le caractère régularisant de cette approche, elle reste très sensible aux petites perturbations sur les données de Cauchy.

FIGURE 5.10 – La solution ζ_1 sur Γ_1 FIGURE 5.11 – La solution ζ_2 sur Γ_1

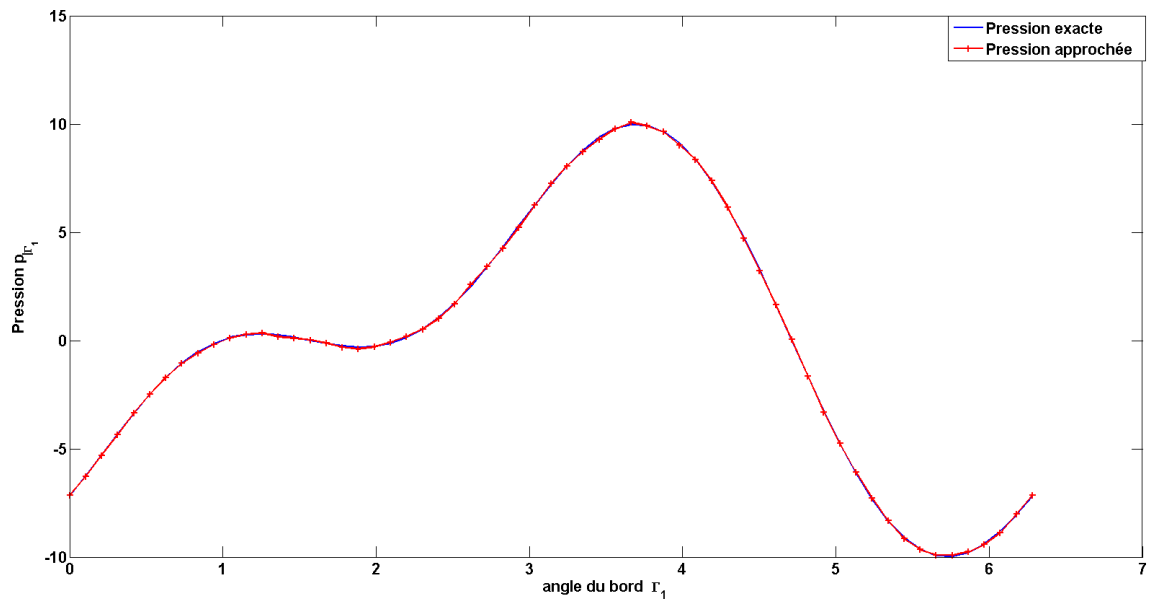


FIGURE 5.12 – La pression p sur Γ_1

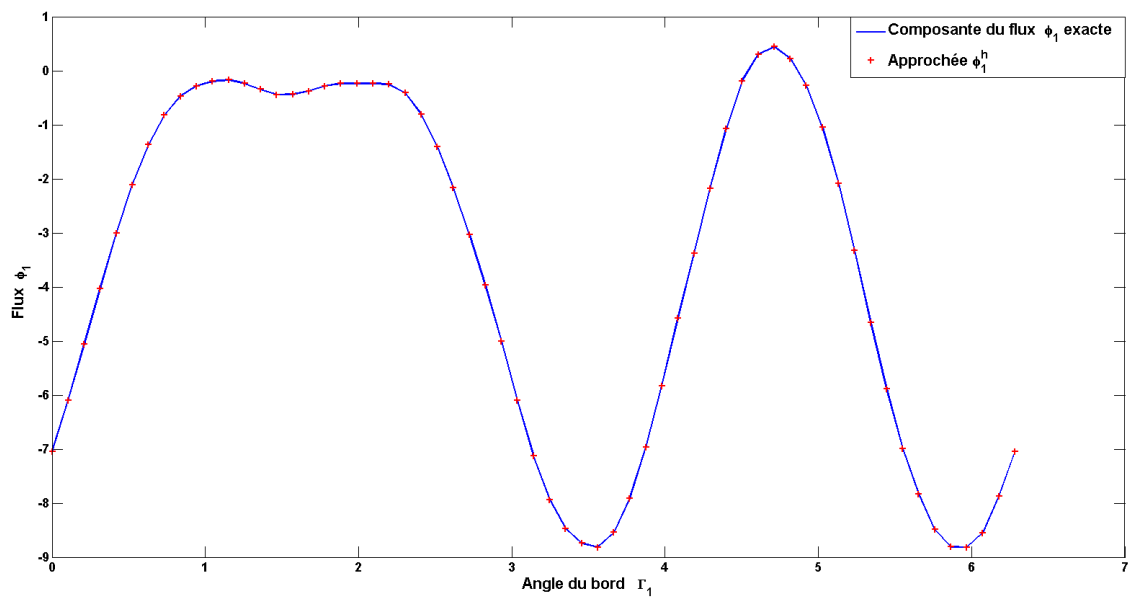
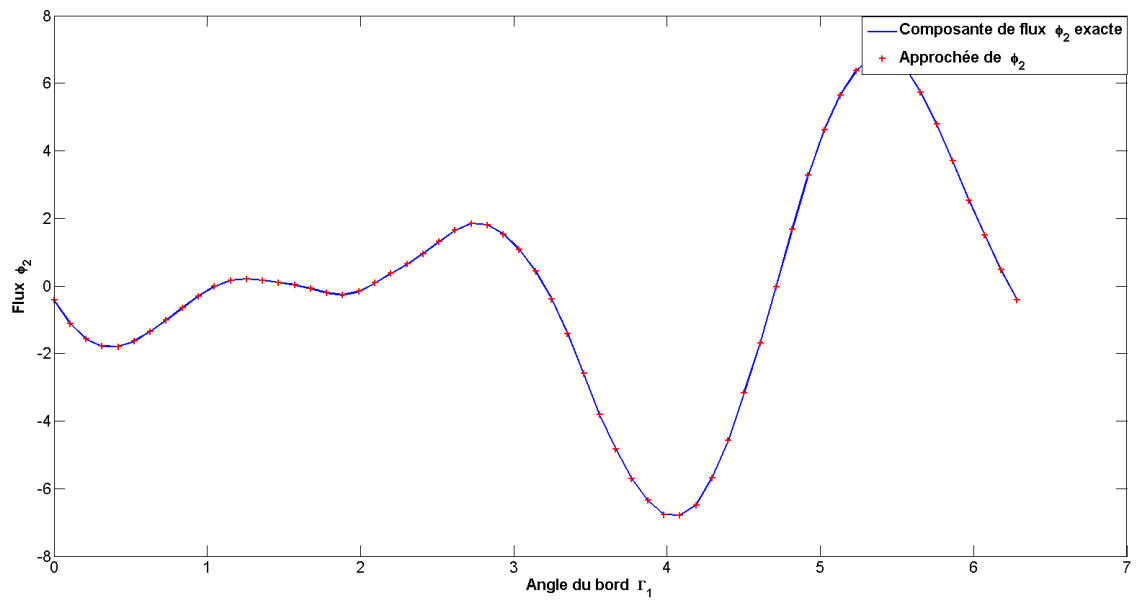


FIGURE 5.13 – La composante du flux φ_1 sur Γ_1

FIGURE 5.14 – La composante du flux φ_2 sur Γ_1

Simulation numérique du problème inverse modélisant l'écoulement d'air dans les poumons

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'approximation numérique d'un problème inverse de Cauchy modélisant l'écoulement d'air dans l'arbre bronchique. Cette approche a été réalisée sur un domaine 2D simulant la structure anatomique de l'arbre bronchique correspondant au système respiratoire humain (voir le chapitre 3). Dans ce cadre, nous exploitons les différents algorithmes, proposés dans les chapitres précédents, pour présenter quelques résultats numériques d'approximation du champ de la vitesse et de la pression sur les frontières artificielles de cet arbre, tout en utilisant une discrétisation par la méthode des éléments finis de type P_{1Bulle}/P_1 . La résolution numérique se fait dans un premier lieu en utilisant l'approche basée sur la technique de décomposition de domaine. Ainsi, dans le but de reconstruire la solution de l'équation de Stokes sur la partie du bord inaccessible, nous optons pour l'algorithme "Robin-Robin" dont nous avons montré la performance, par rapport aux autres algorithmes issus de la décomposition de domaine. Nous proposons ensuite la simulation numérique de ce problème inverse en utilisant l'approche basée sur la régularisation de Tikhonov. Nous exploitons ainsi l'algorithme suggéré dans le chapitre 5, qui consiste à résoudre de manière directe un système d'équations couplées, pour reconstruire le champ de vitesse et de pression sur les frontières artificielles de l'arbre bronchique. Enfin, nous étudions la stabilité numérique pour les deux approches proposées.

6.1 Position du problème inverse sur l'arbre bronchique simulée

Nous commençons d'abord par rappeler le problème inverse de Cauchy modélisant l'écoulement d'air dans l'arbre bronchique, tout en simulant de manière approximative la

structure anatomique de l'arbre bronchique, décrit par le domaine géométrique suivant (voir figure 6.1). Le problème inverse consiste à déterminer le couple vitesse-pression (u, p)

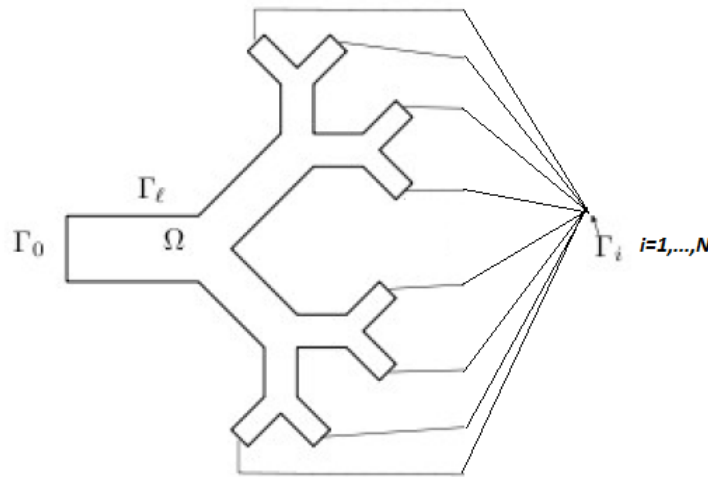


FIGURE 6.1 – Schéma simulant l'arbre bronchique étudiée

sur les parties inaccessibles du bord Γ_i , pour $i = 1, \dots, N$ (ici $N = 8$), solution de

$$\begin{cases} -\mu \operatorname{div}(D(u)) + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = h & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma(u)n = g & \text{sur } \Gamma_0, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (6.1)$$

où f , g et h sont des fonctions données, et μ est la viscosité d'air un réel positif assez petit [15]. Dans le problème (6.1), nous remarquons qu'il y a deux conditions de type Dirichlet et Neumann sur la partie du bord accessible Γ_0 (la partie proximale), nous supposons que la vitesse d'air est nulle sur la partie du bord Γ_ℓ , mais la solution est complètement inconnue sur les frontières artificielles Γ_i pour $i = 1, \dots, 8$. Ainsi dans le but de reconstruire des solutions approchées de ce problème, nous optons dans un premier lieu pour l'algorithme dérivant de la méthode de décomposition de domaine de type "Robin-Robin" présenté dans le chapitre 4. Ensuite, nous exploitons la seconde approche proposée dans le chapitre 5, tout en utilisant l'algorithme non itératif y suggéré. Ces algorithmes exigent la résolution des problèmes directs (problèmes de Stokes) dont l'approximation se fait à l'aide de la méthode des éléments finis de type P_{1Bulle}/P_1 . Il est ainsi nécessaire de considérer un maillage régulier de l'arbre bronchique (voir la figure 6.2) Dans la suite, pour tous les tests numériques que nous considérons, nous allons chercher à reconstruire

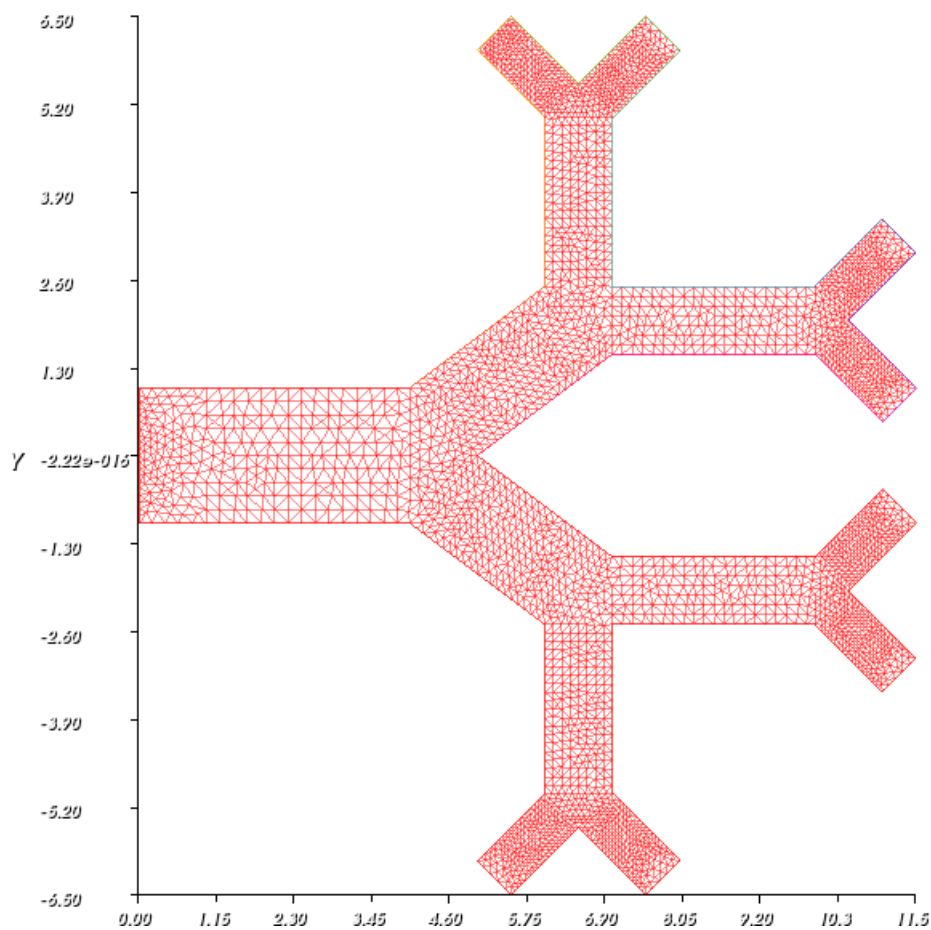


FIGURE 6.2 – Maillage de l'arbre bronchique 2d

la solution approchée du problème (6.1) dont la solution exacte correspond à celle de l'exemple 4.1. Les fonctions $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ et $h = (h_1, h_2)$ sont données par

$$\begin{cases} f_1(x, y) = -2\mu + 1, \\ f_2(x, y) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(x, y) = (1 - 2\mu)x + y - 2\mu - 1, \\ g_2(x, y) = 2\mu x, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} h_1(x, y) = y, \\ h_2(x, y) = -2y, \end{cases}$$

6.2 Résolution du problème inverse par l'algorithme de Robin-Robin

Nous rappelons que l'algorithme de "Robin-Robin" pour la résolution du problème inverse 6.1 est résumé, dans ce cas, comme suit

Algorithme 4 :

1. Choisir deux paramètres d'accélération positifs γ_1 et γ_2 , tels que $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ et se donner une précision $\varepsilon > 0$.
2. Pour $k = 0$, choisir une donnée initiale $v^{(0)}$ de u sur Γ_1 .
3. Résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2\mu \operatorname{div}(D(u^{(k+1)})) + \nabla p^{(k+1)} = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u^{(k+1)}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(u^{(k+1)})n = g & \text{sur } \Gamma_0, \\ u^{(k+1)} = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \sigma(u^{(k+1)})n + \gamma_1 u^{(k+1)} = \sigma(u^{(k)})n + \gamma_1 u^{(k)} & \text{sur } \Gamma_i, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 8 \end{array} \right. \quad (6.2)$$

4. Résoudre le problème suivant :

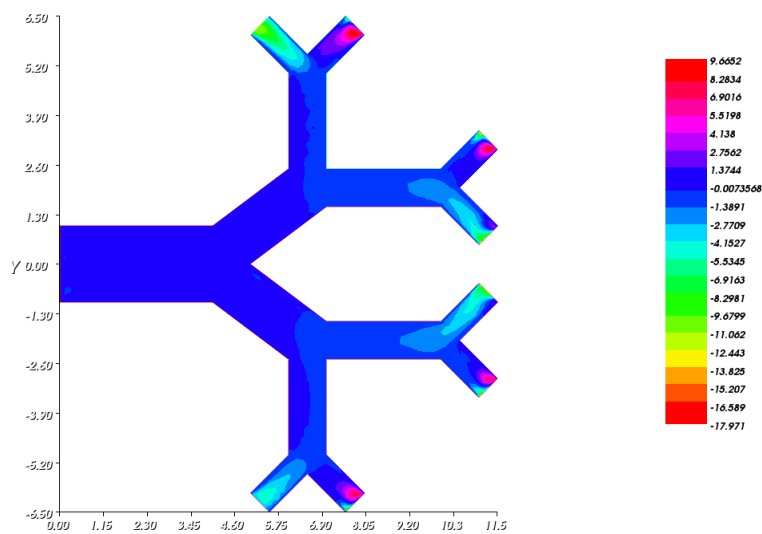
$$\left\{ \begin{array}{ll} -2\mu \operatorname{div}(D(u^{(k)})) + \nabla p^{(k)} = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u^{(k)}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u^{(k)} = h & \text{sur } \Gamma_0, \\ u^{(k)} = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \sigma(u^{(k)})n - \gamma_2 u^{(k)} = \sigma(u^{(k+1)})n - \gamma_2 u^{(k+1)} & \text{sur } \Gamma_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, 8 \end{array} \right. \quad (6.3)$$

5. Si $\|u^{(k)} - u^{(k+1)}\|_{(L^2(\Gamma_i))^d} \leq \varepsilon$, on arrête. Sinon $k = k + 1$, aller à l'étape 3.

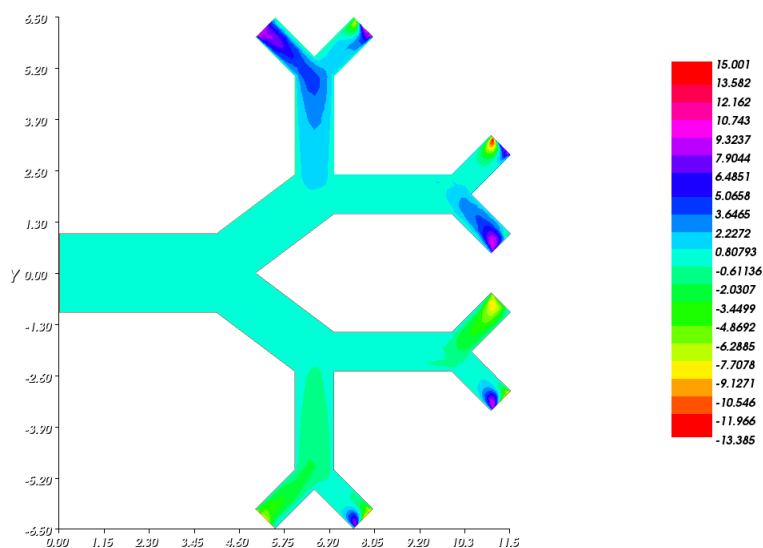
Dans la suite, nous présentons quelques résultats numériques en utilisant l'algorithme 4 pour une donnée initiale $v^{(0)} = (0, 0)$ et une précision $\varepsilon = 10^{-2}$.

Résultats numériques

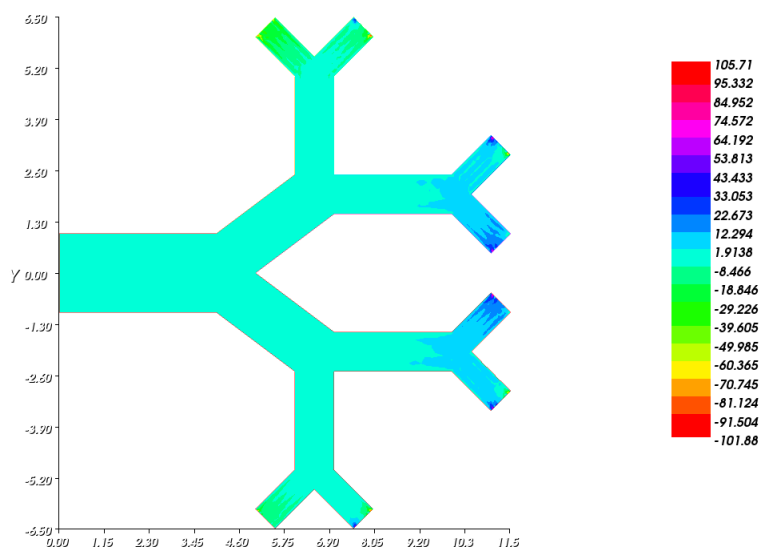
Dans la figure 6.3, nous présentons l'erreur entre les solutions exacte et approchée pour les deux composantes du champ de la vitesse et la pression (u_1, u_2, p) au cours des premières itérations. Nous remarquons ainsi qu'au début l'erreur est grande au voisinage des



(a) 1^{ère} composante de la vitesse u_1



(b) 2^{ème} composante de la vitesse u_2



(c) La pression p

FIGURE 6.3 – L'erreur entre les deux composantes de vitesse et la pression (u_1, u_2, p) exactes et leur approximations obtenues au cours des premières itérations à l'aide de l'algorithme 4

frontières artificielles inaccessibles Γ_i , pour $i = 1, \dots, 8$. Ensuite, nous présentons respectivement dans les figures 6.4, 6.5 et 6.6 les erreurs entre les solutions exacte et approchée de u_1 , u_2 et p , sur l'arbre bronchique, obtenues à la convergence de l'algorithme 4. Les solutions exacte et approchée associées à la première composante de la vitesse u_1 sont ainsi illustrées dans la figure 6.7, tandis que la deuxième composante de la vitesse u_2 est présentée dans la figure 6.8. Nous présentons également les pressions exacte et approchée dans la figure 6.9. Nous constatons que les résultats obtenus sont satisfaisants.

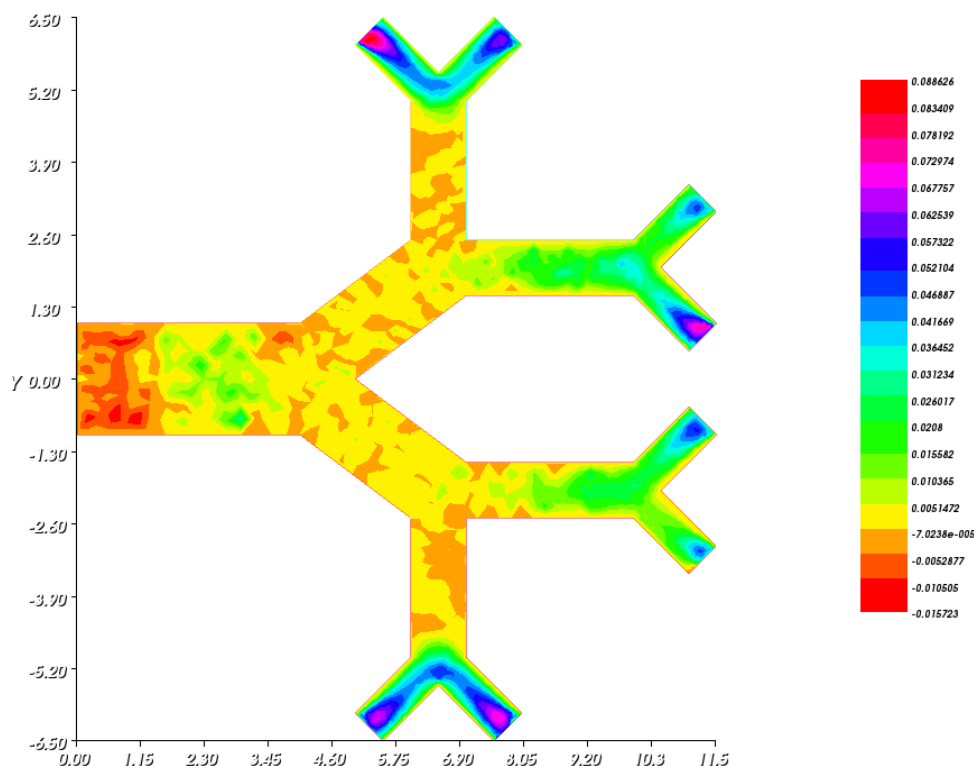


FIGURE 6.4 – L'erreur entre la composante de la vitesse u_1 exacte et son approximation obtenue à la convergence de l'algorithme Robin-Robin

Afin de donner encore une idée plus précise sur la qualité de l'approximation de la solution (u_1, u_2, p) obtenue sur les frontières artificielles Γ_i pour $i = 1, \dots, 8$. Nous présentons d'abord la composante de la vitesse u_1 sur les frontières Γ_i pour $i = 1, 2, 3, 4$ dans la figure 6.10, et sur les frontières Γ_i pour $i = 5, 6, 7, 8$, dans la figure 6.11. Nous présentons également la deuxième composante u_2 sur les frontières Γ_i pour $i = 1, 2, 3, 4$ dans la figure 6.12, et sur le reste des frontières artificielles dans la figure 6.13. La pression est illustrée sur les frontières Γ_i pour $i = 1, 2, 3, 4$ dans la figure 6.14, et sur le reste des frontières inaccessibles dans la figure 6.15. Nous pouvons ainsi constater que les résultats obtenus concernant le champ de vitesse sont très satisfaisants, et montrent bien la bonne qualité d'approximation de la solution. Tandis que les résultats d'approximation de la pression présentent des erreurs considérables sur quelques parties des frontières artificielles. Ceci

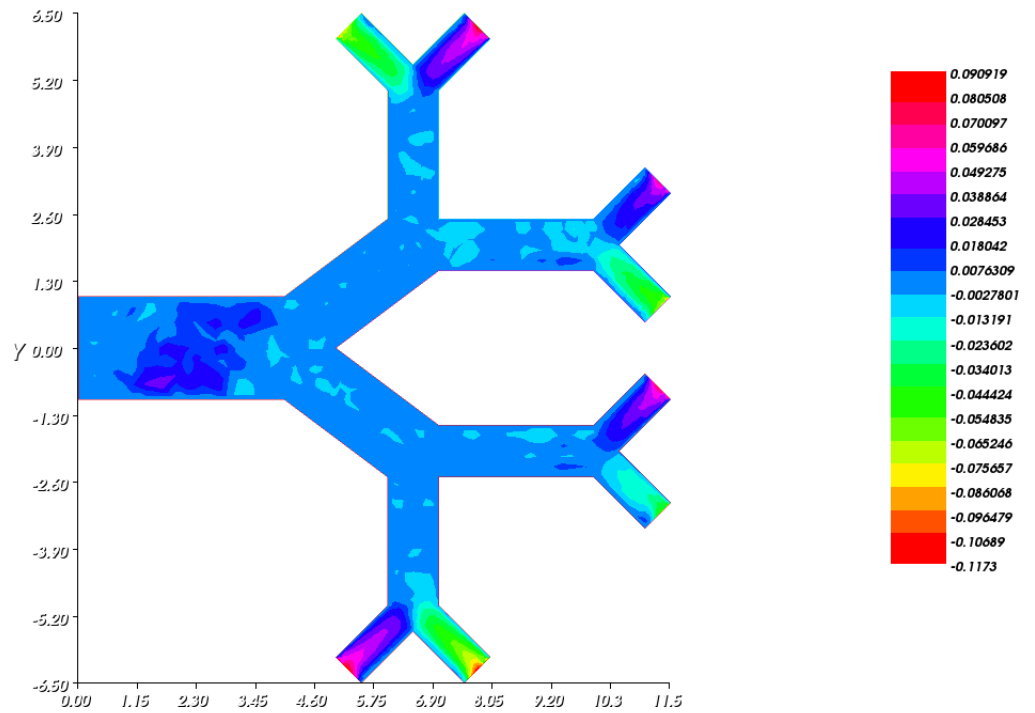


FIGURE 6.5 – L'erreur entre la composante de la vitesse u_2 exacte et son approximation obtenue à la convergence de l'algorithme Robin-Robin

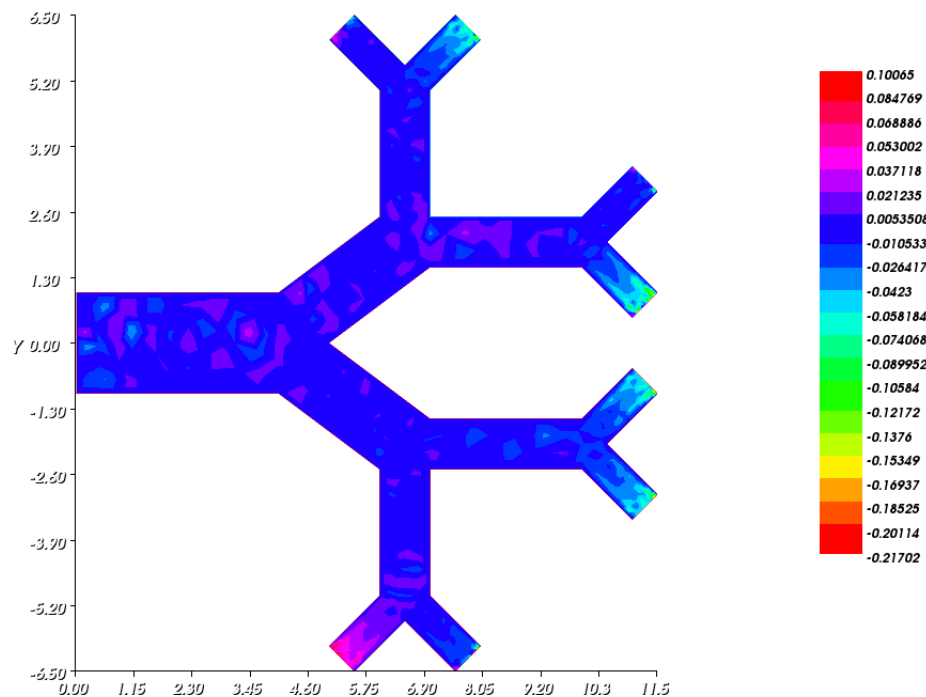


FIGURE 6.6 – L'erreur entre la pression p exacte et son approximation obtenue à la convergence de l'algorithme Robin-Robin

est dû à la complexité de la configuration considérée et au manque de conditions aux limites sur la pression qui influence considérablement la qualité d'approximation de la

6.2. RÉSOLUTION DU PROBLÈME INVERSE PAR L'ALGORITHME DE ROBIN-ROBIN137

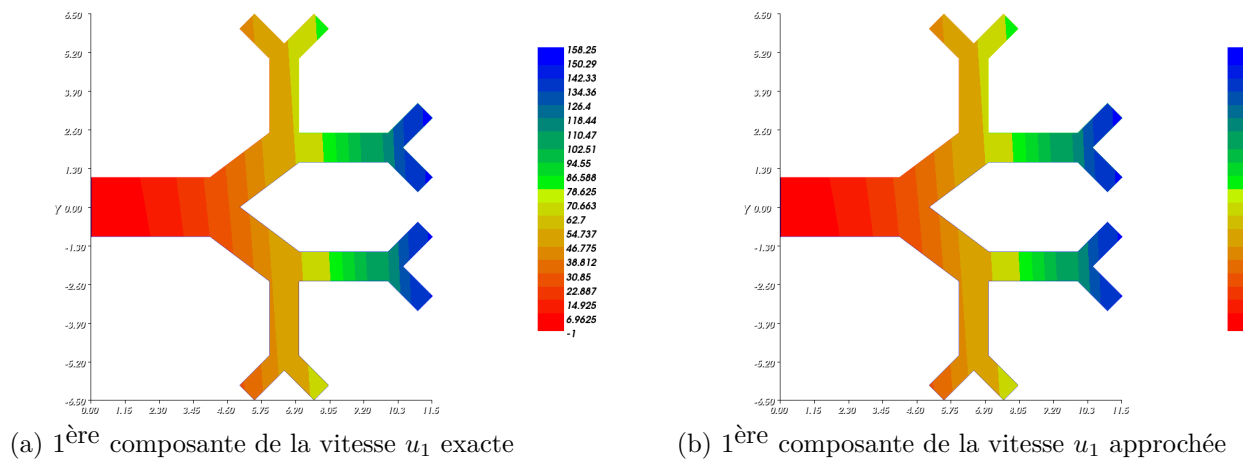


FIGURE 6.7 – Les composantes de la vitesse u_1 exacte et approchée par l'algorithme 4

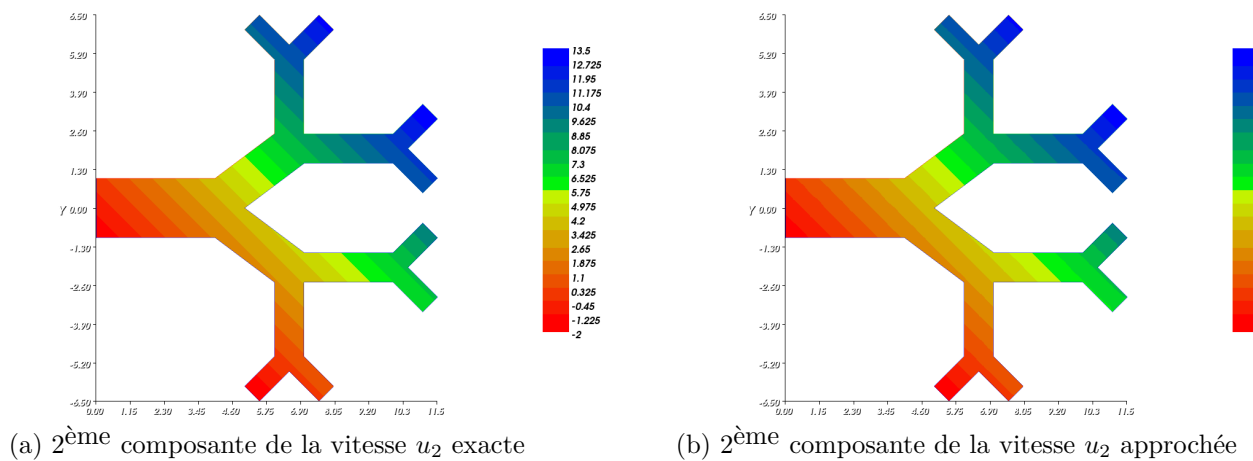


FIGURE 6.8 – Les composantes de la vitesse u_2 exacte et approchée par l'algorithme 4

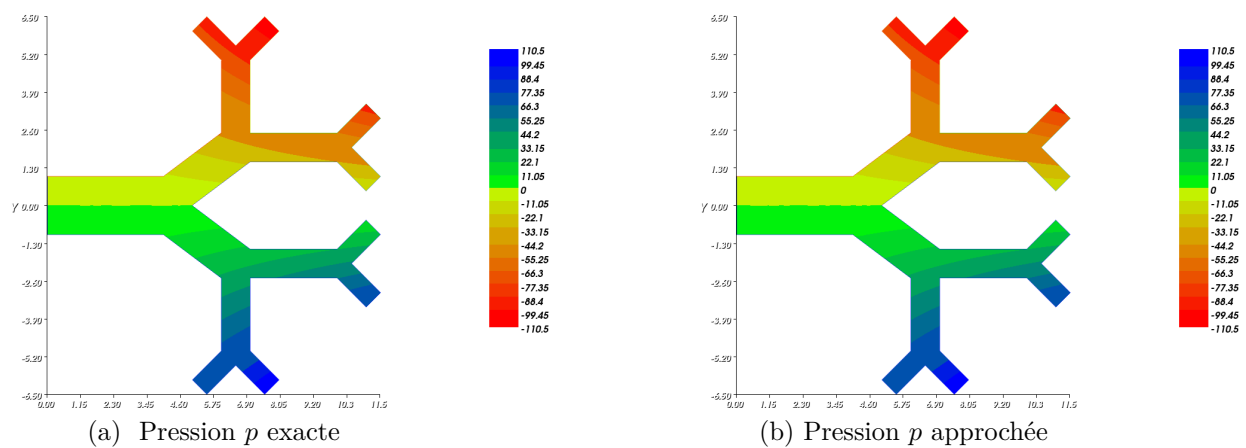


FIGURE 6.9 – Les pressions p exacte et approchée par l'algorithme 4

solution pour cette configuration.

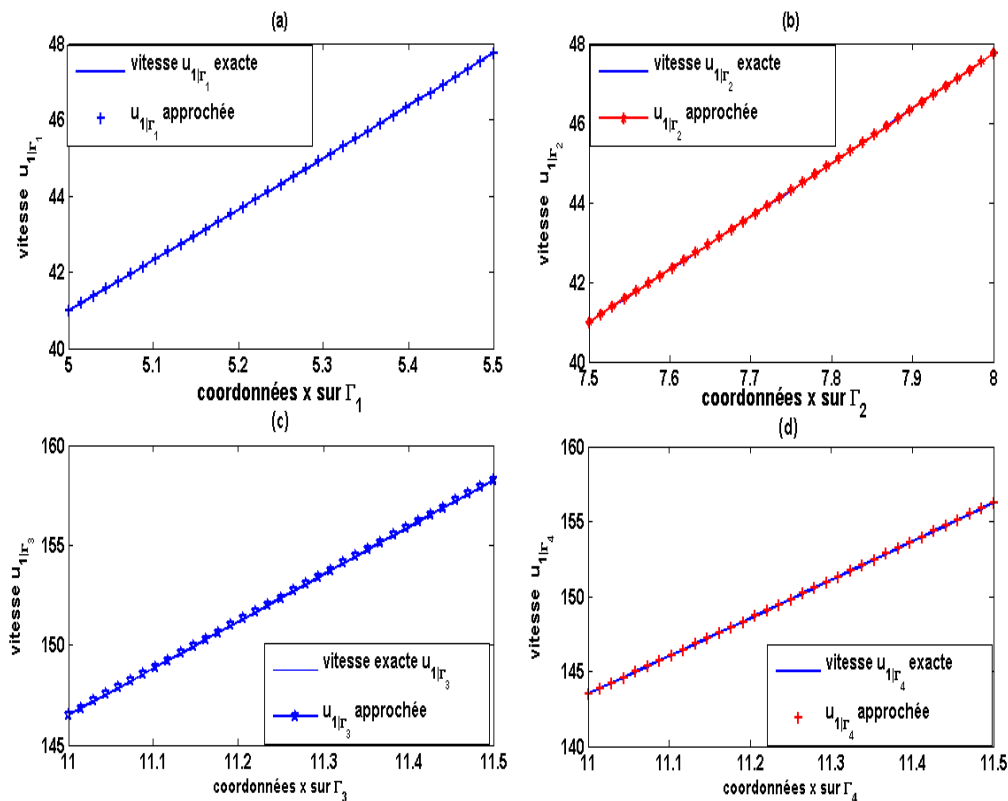


FIGURE 6.10 – La composante de la vitesse u_1 sur les frontières artificielles Γ_i , pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Dans la suite, nous nous intéressons à la stabilité numérique de la solution obtenue en utilisant ce même algorithme.

Stabilité numérique

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques prouvant la stabilité numérique de l'algorithme 4. Nous nous intéressons plus précisément au comportement de la solution obtenue en présence de petites perturbations sur les données de Cauchy. En effet, les données de type Dirichlet h et Neumann g sur Γ_0 sont perturbés par un bruit Gaussien de moyenne nulle uniformément distribuée avec des niveaux de bruit $\delta = 0.1\%, \delta = 1\%, \delta = 5\%$, et $\delta = 10\%$, pour simuler des erreurs de mesure sur les données, telles que

$$h^\delta = [1 + \delta \cdot (2 \text{rand}(x) - 1)]h$$

$$g^\delta = [1 + \delta \cdot (2 \text{rand}(x) - 1)]g$$

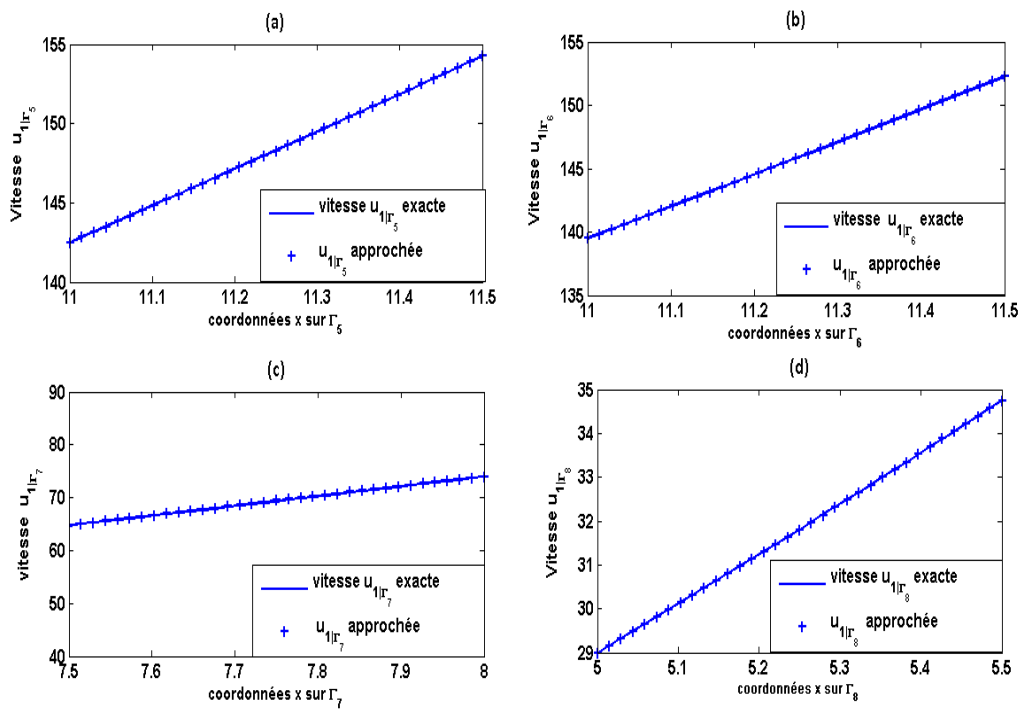


FIGURE 6.11 – La composante de la vitesse u_1 sur les frontières artificielles Γ_i pour $i = 5, 6, 7, 8$.

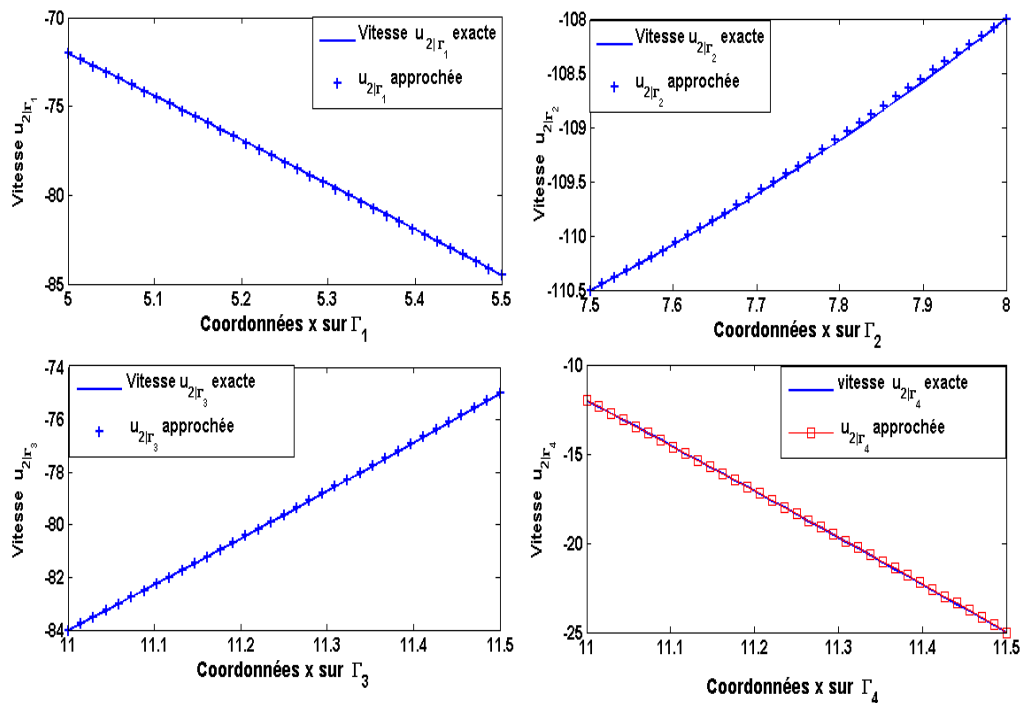


FIGURE 6.12 – La composante de la vitesse la u_2 sur les frontières artificielles Γ_i , pour $i = 1, 2, 3, 4$.

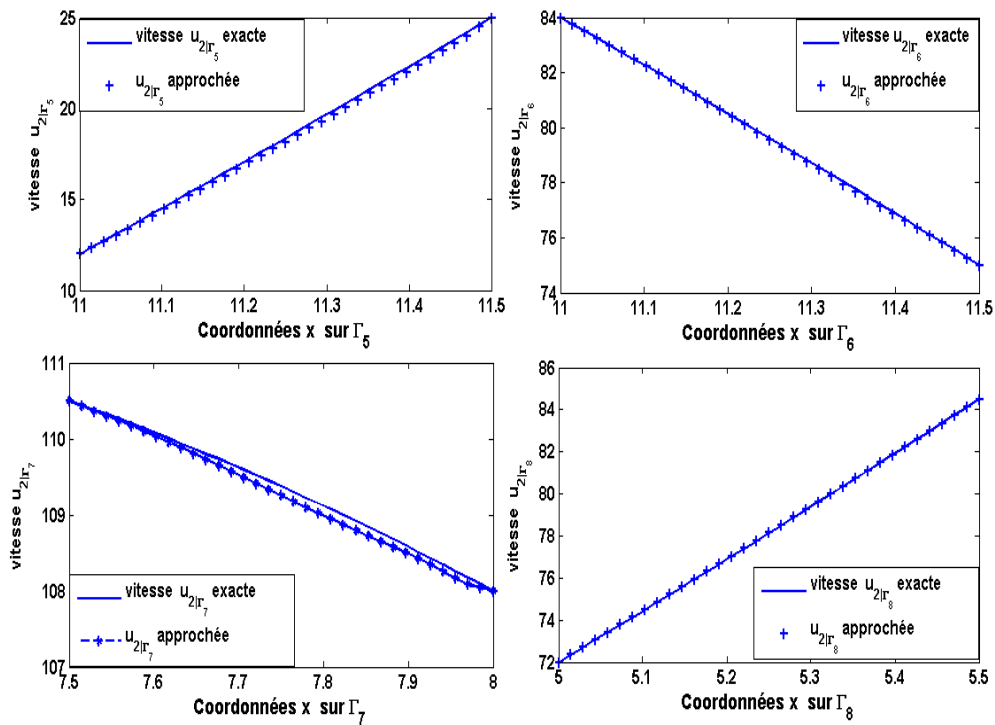


FIGURE 6.13 – La composante de la vitesse u_2 sur les frontières artificielles Γ_i pour $i = 5, 6, 7, 8$.

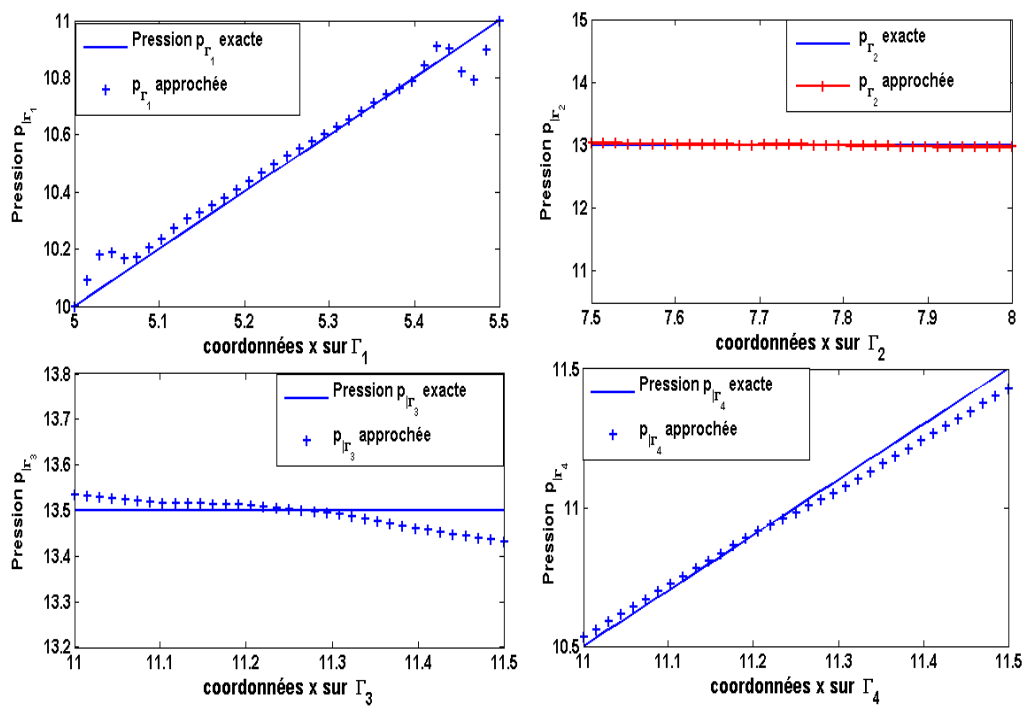
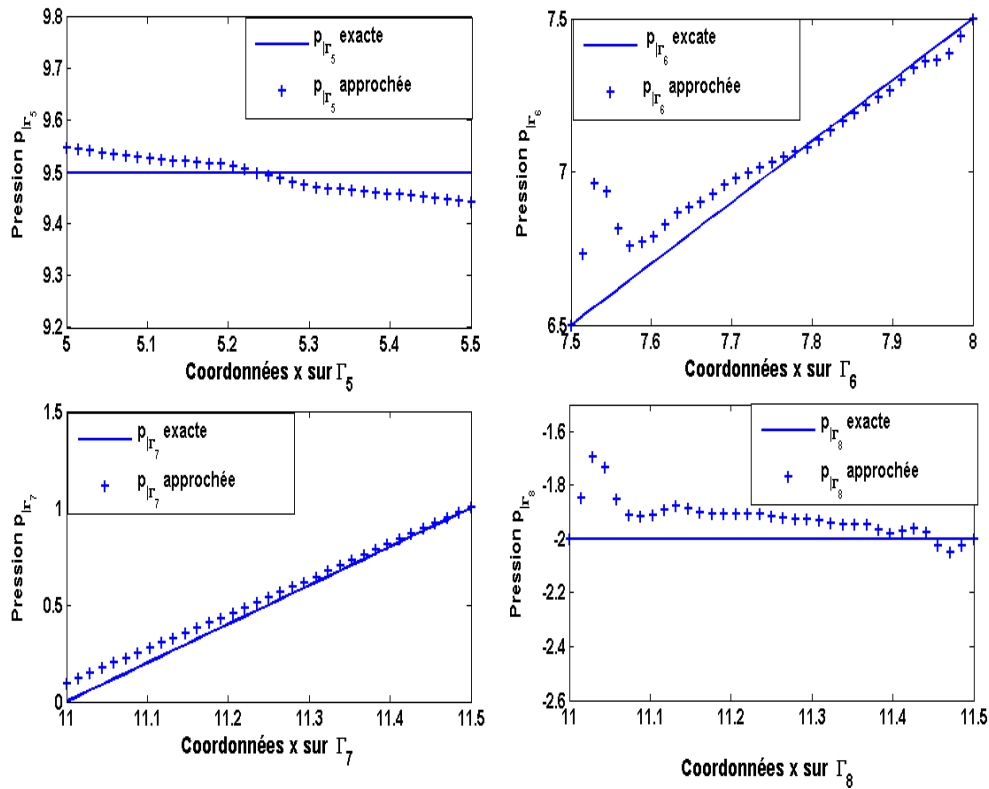


FIGURE 6.14 – La pression p sur les frontières artificielles Γ_i , pour $i = 1, 2, 3, 4$.

FIGURE 6.15 – La pression p sur les frontières artificielles Γ_i pour $i = 5, 6, 7, 8$.

où $rand$ est une fonction qui retourne une valeur pseudo-aléatoire choisie à partir d'une distribution uniforme sur $[0, 1]$. Notons par (u^δ, p^δ) la solution du problème inverse perturbé. Afin de montrer que cet algorithme est numériquement stable, nous introduisons alors des bruits uniformément distribués pour différentes valeurs du niveau $\delta \in [10^{-3}, 10^{-1}]$ sur les données de Cauchy, et nous allons comparer les solutions exacte et approchée associée aux différents niveaux de bruit δ .

Nous présentons dans les figures 6.16, 6.17 et 6.18 l'erreur entre les solutions exacte et approchée, associées aux composantes de la vitesse et la pression, pour un niveau de bruit $\delta = 0.1\%$. Dans les figures 6.19, 6.20 et 6.21, nous illustrons l'erreur entre les solutions exactes et perturbées cette fois-ci pour un niveau de bruit $\delta = 10\%$. Les résultats ainsi obtenus montrent que les petites perturbations n'ont pas d'effet considérable sur l'erreur comparé au cas de données non bruitées. Pour examiner la stabilité de la solution du problème sur les frontières artificielles, nous présentons dans la figure 6.22 les solutions exacte, approchée et perturbée, pour la première composante de la vitesse u_1 sur les frontières artificielles Γ_i , pour $i = 5, \dots, 8$, associée aux niveaux de bruit de l'ordre 0.1%, 1%, 5% et 10%. Ensuite, nous présentons dans la figure 6.23 les solutions exacte, approchée et perturbée pour la deuxième composante de la vitesse u_2 , associée aux mêmes niveaux de

bruit sur les frontières Γ_i pour $i = 1, \dots, 4$. Finalement, les pressions exacte, approchée et perturbée associée aux niveaux de bruit 1%, 5% et 10% sur les frontières Γ_1 et Γ_2 sont illustrées dans la figure 6.24, sur Γ_3 et Γ_4 dans la figure 6.25, et sur Γ_i , pour $i = 5, 6, 7, 8$ dans la figure 6.26.

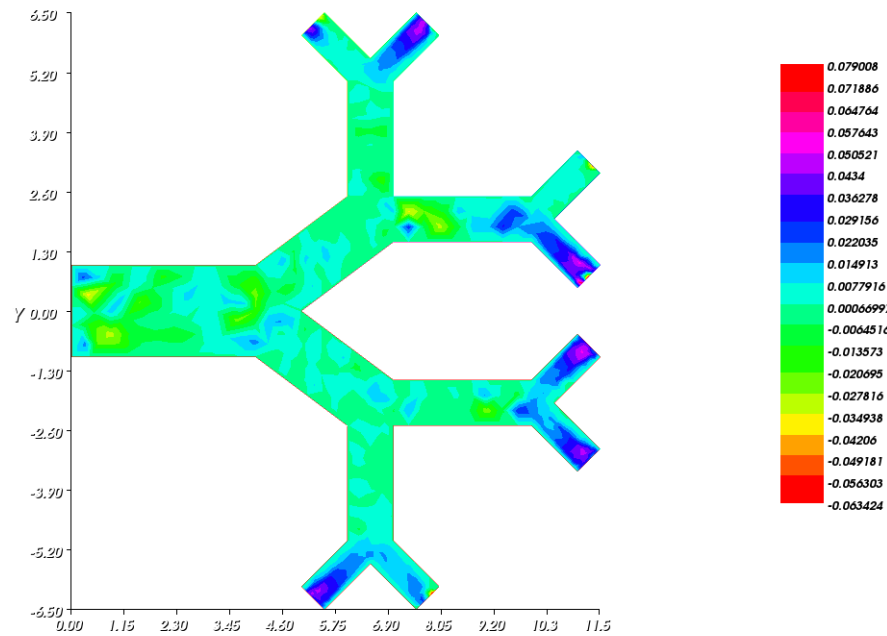


FIGURE 6.16 – L'erreur entre les solutions exacte et approchée perturbée pour un niveau de bruit $\delta = 0.1\%$ associées à la composante de la vitesse u_1 .

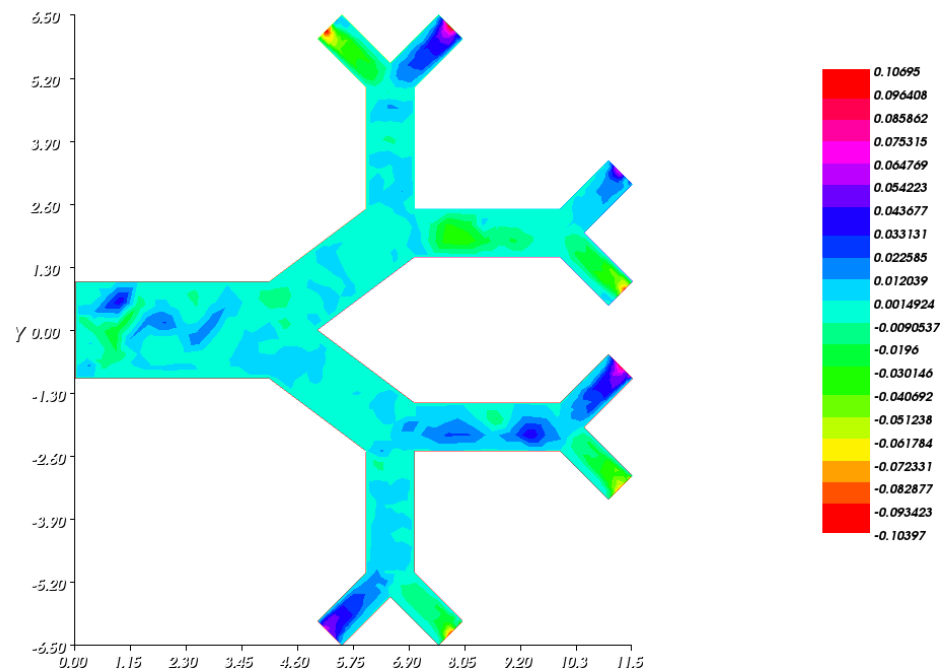


FIGURE 6.17 – L'erreur entre les solutions exacte et approchée perturbée pour un niveau de bruit $\delta = 0.1\%$ associées à la composante de la vitesse u_2 .

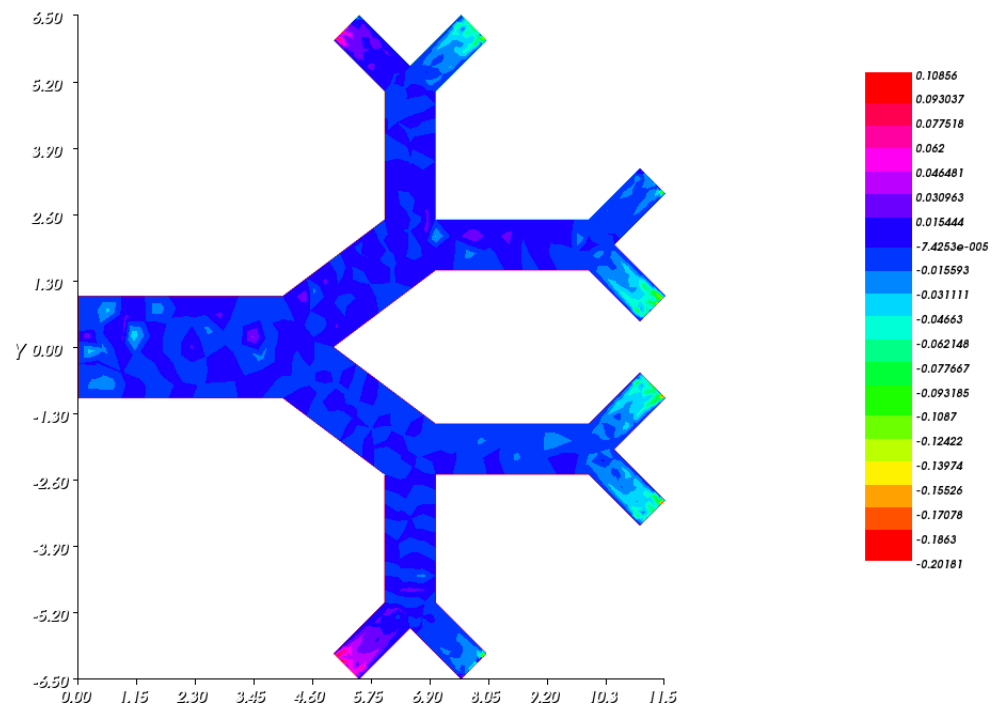


FIGURE 6.18 – L'erreur entre les solutions exacte et approchée perturbée pour un niveau de bruit $\delta = 0.1\%$ associées à la pression p .

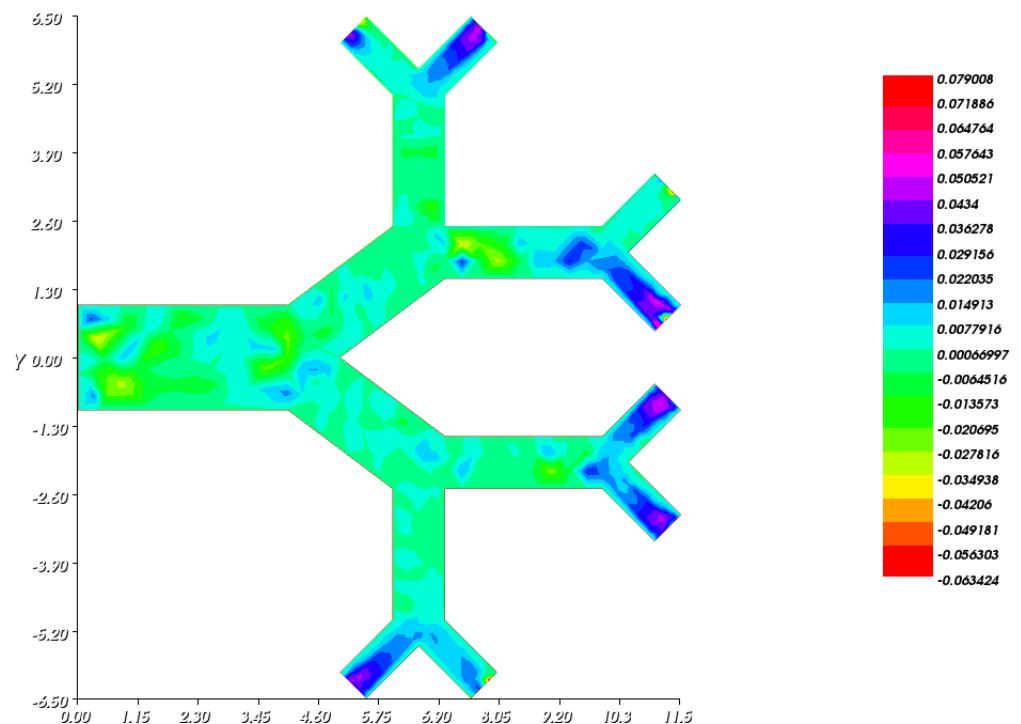


FIGURE 6.19 – L'erreur entre les solutions exacte et approchée perturbée pour un niveau de bruit $\delta = 10\%$ associées à la composante de la vitesse u_1 .

Ces résultats montrent bien la stabilité de la solution, et que les estimations suivantes

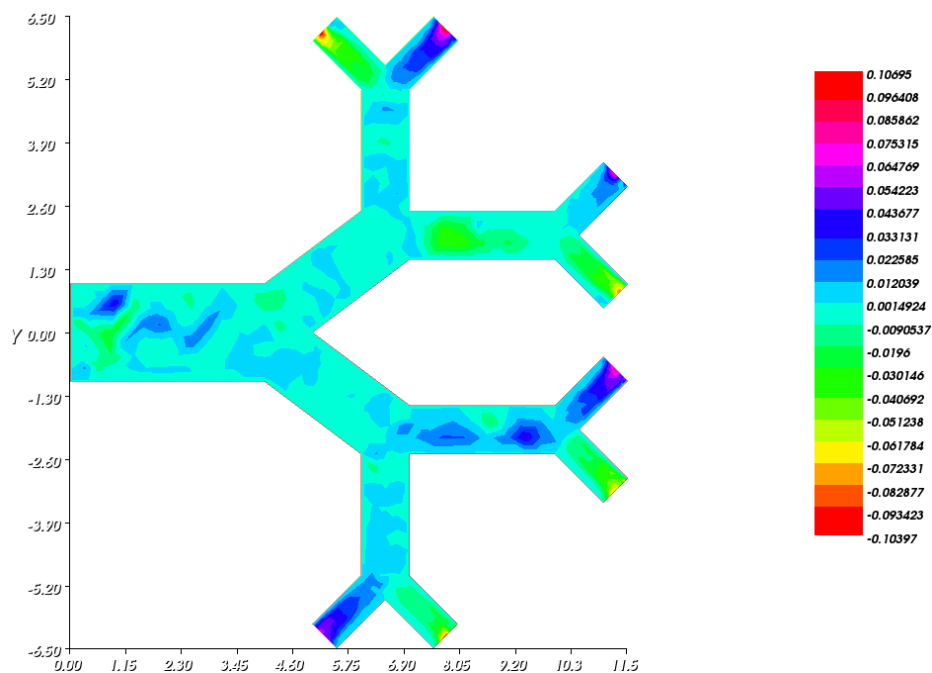


FIGURE 6.20 – L’erreur entre les solutions exacte et approchée perturbée pour un niveau de bruit $\delta = 10\%$ associées à la composante de la vitesse u_2 .

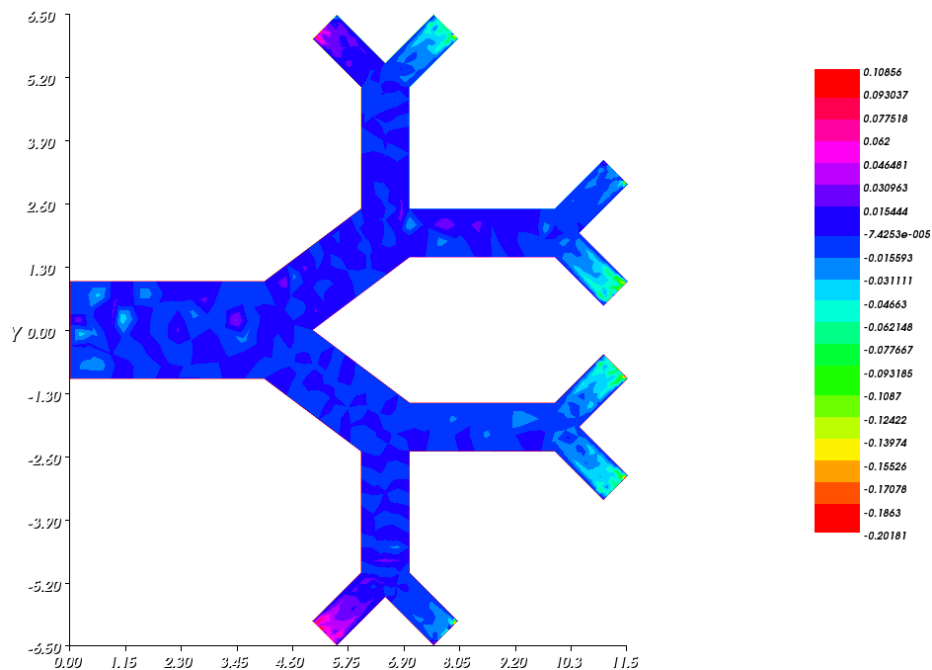


FIGURE 6.21 – L’erreur entre les solutions exacte et approchée perturbée pour un niveau de bruit $\delta = 10\%$ associées à la pression p .

sont bien vérifiées.

$$\begin{aligned}
 \|u_{exacte} - u_{approchée}\|_{(L^2(\Gamma_i))^d} &\leq \delta && \text{pour } i = 1, \dots, 8 \\
 \|p_{exacte} - p_{approchée}\|_{(L^2(\Gamma_i))^d} &\leq \delta && \text{pour } i = 1, \dots, 8
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

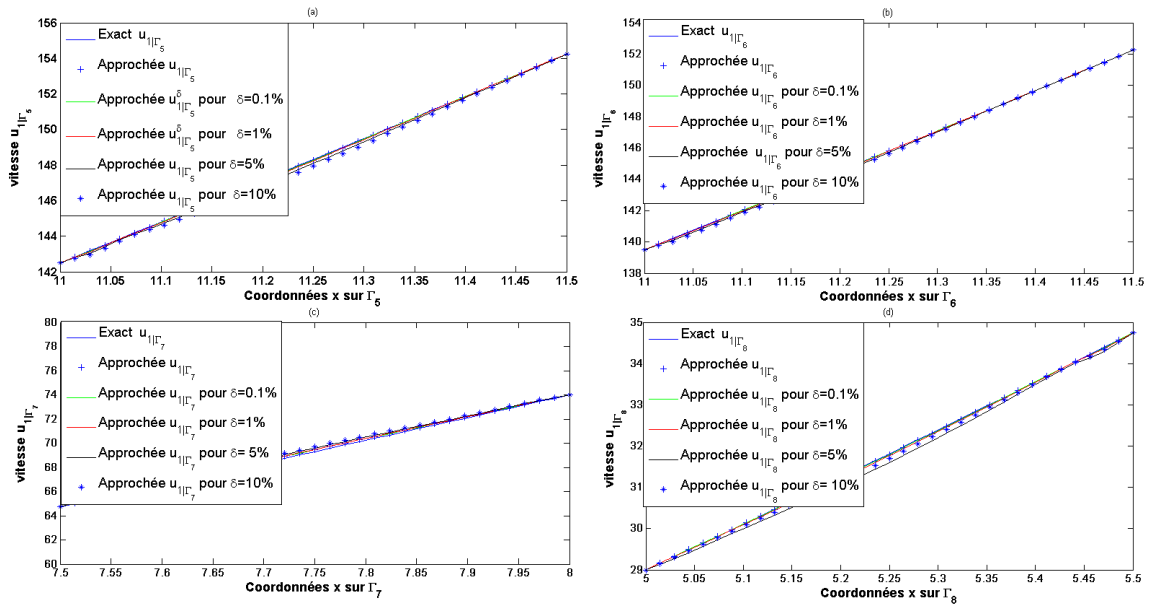


FIGURE 6.22 – Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit d'ordre 0.1%, 1%, 5% et 10% pour la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_5 (a), sur Γ_6 (b) sur Γ_7 (c) et sur Γ_8 (d)

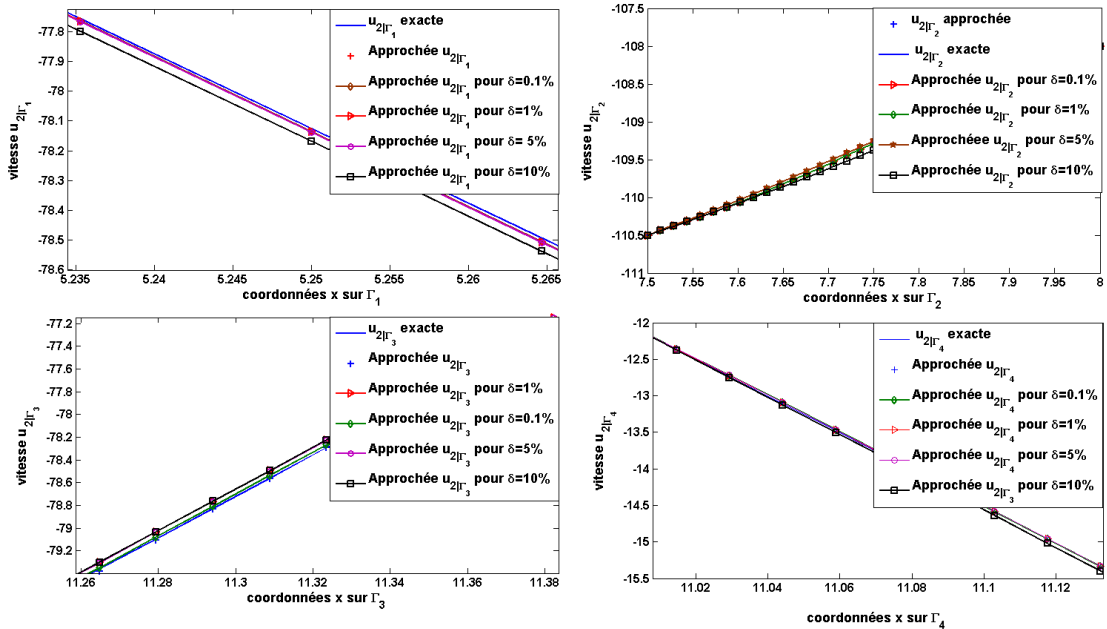


FIGURE 6.23 – Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit d'ordre 0.1%, 1%, 5% et 10% pour la première composante de la vitesse u_2 sur Γ_i pour $i = 1, 2, 3, 4$.

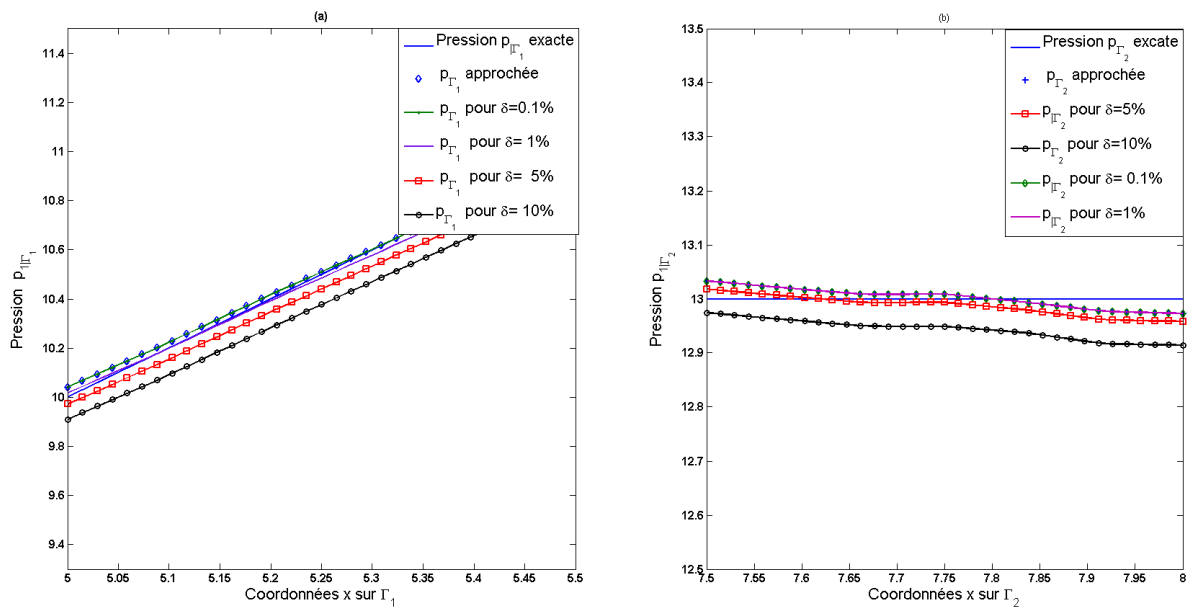


FIGURE 6.24 – Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit d'ordre 1%, 5% et 10% pour la pression p sur Γ_1 (a) sur Γ_2 (b).

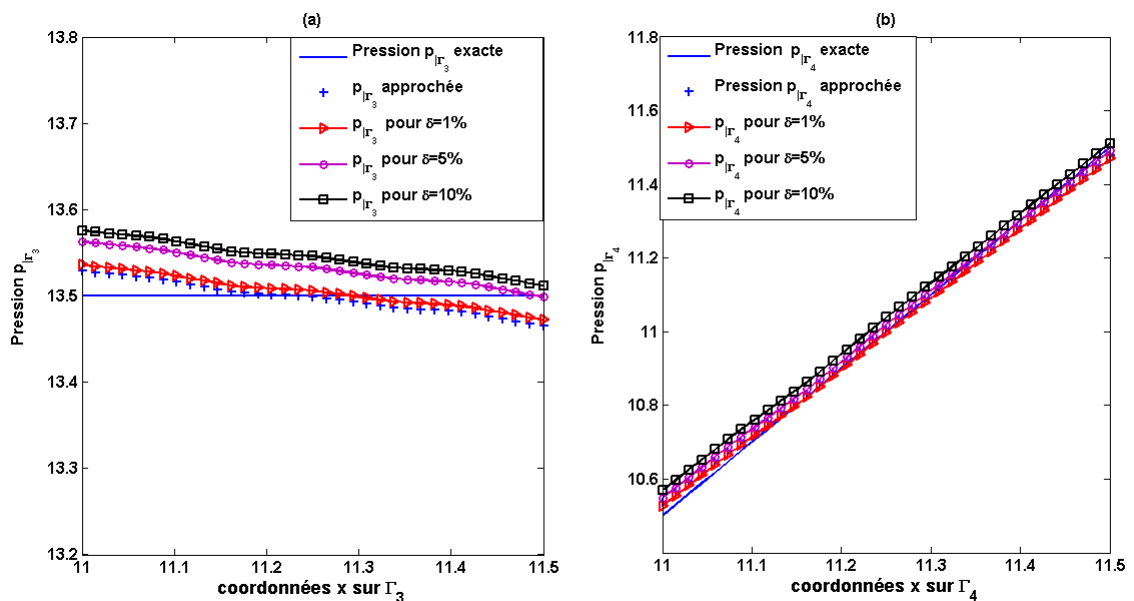


FIGURE 6.25 – Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit d'ordre 1%, 5% et 10% pour la pression p sur Γ_3 (a) sur Γ_4 (b)

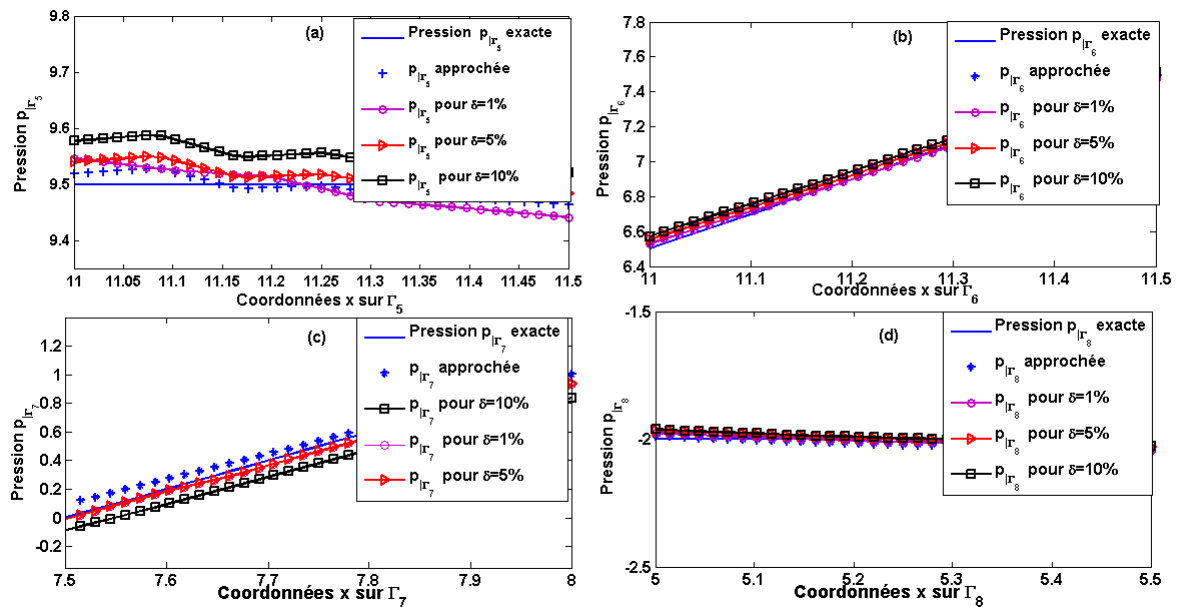


FIGURE 6.26 – Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit d'ordre 1%, 5% et 10% pour la pression p sur Γ_5 (a), sur Γ_6 (b), sur Γ_7 (c) et sur Γ_8 (d)

6.3 Résolution du problème inverse par la seconde approche

Dans cette section, nous proposons une approximation de la solution de ce problème inverse en se basant sur l'algorithme de résolution suggéré dans le chapitre 4 utilisant la régularisation de Tikhonov et qui vise à résoudre un système d'équations couplées pour reconstruire la solution de Stokes sur les frontières artificielles Γ_i pour $i = 1, \dots, 8$.

Résultats numériques

Nous présentons ainsi l'erreur entre les solutions exacte et approchée, sur l'arbre bronchique, associées à la première composante de la vitesse u_1 dans la figure 6.27, à la deuxième composante de la vitesse u_2 dans la figure 6.28 et à la pression dans la figure 6.29. A partir de ces résultats, nous pouvons constater l'efficacité de cette approche en terme de la qualité de la solution approchée ainsi obtenue. Nous nous intéressons ensuite

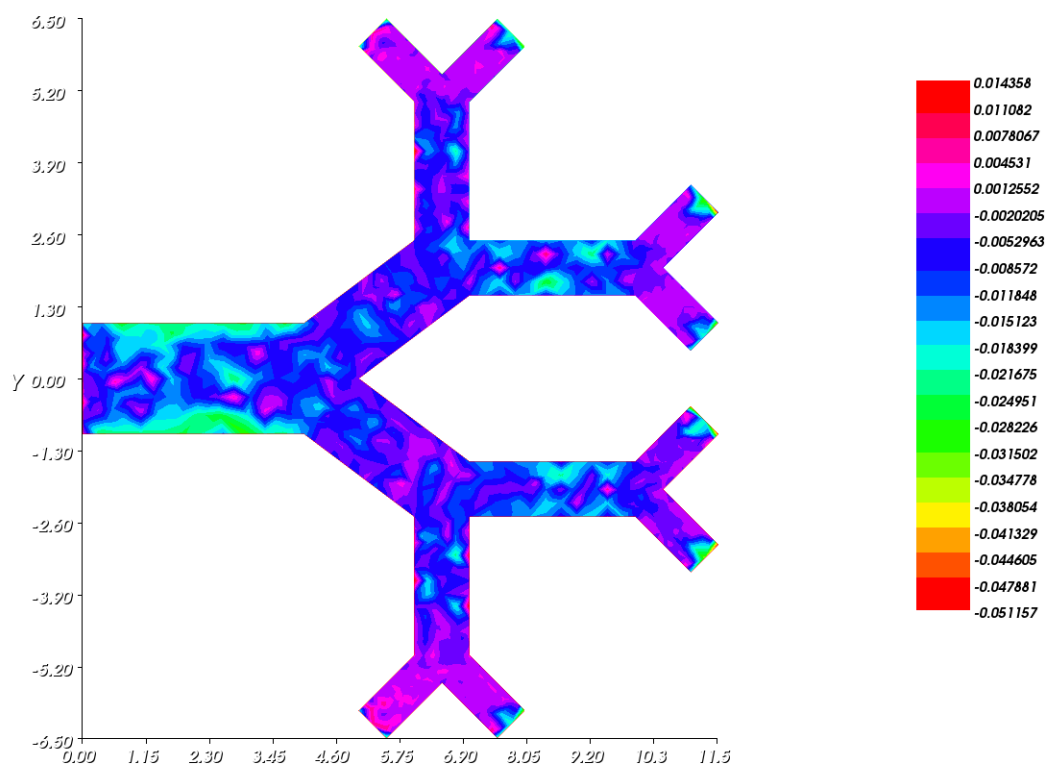


FIGURE 6.27 – L'erreur entre les solutions exacte et approchée sur l'arbre bronchique simulée pour la première composante de la vitesse u_1

à la solution approchée sur les frontières artificielles inaccessibles, nous présentons ainsi la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_1 et Γ_2 dans la figure 6.30, sur Γ_3 et Γ_4 dans la figure 6.31 et sur Γ_i , pour $i = 5, 6, 7, 8$ dans la figure 6.32.

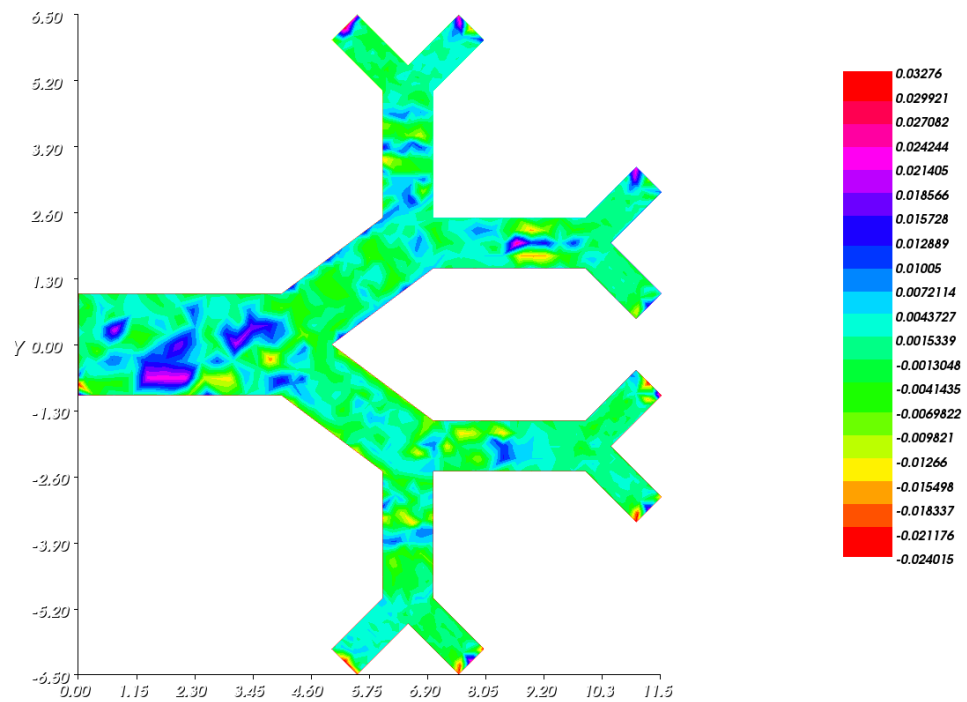


FIGURE 6.28 – L'erreur entre les solutions exacte et approchée sur l'arbre bronchique simulée pour la deuxième composante de la vitesse u_2

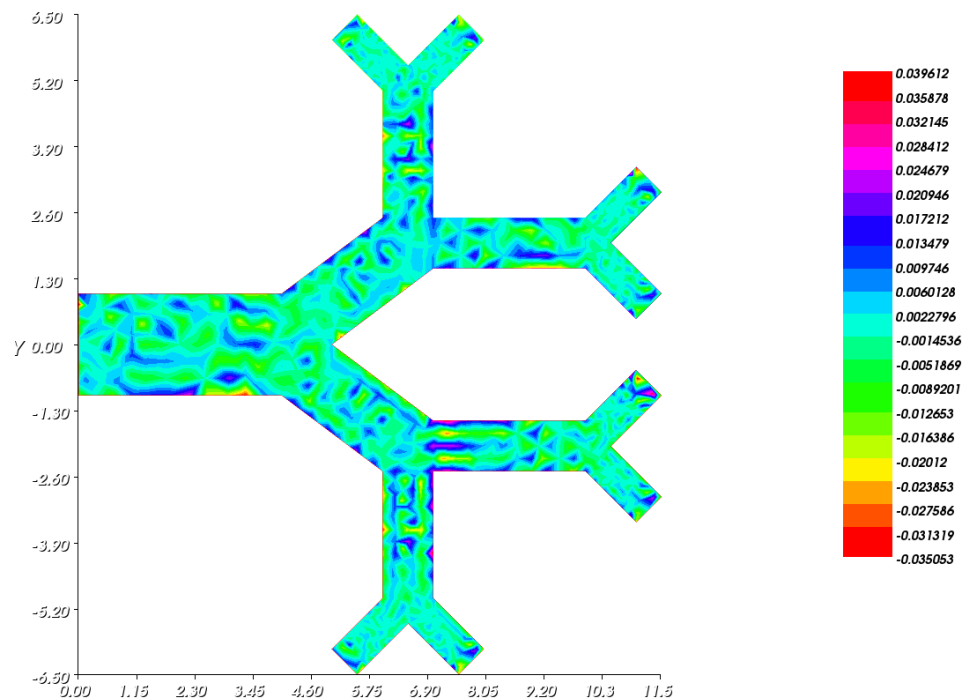


FIGURE 6.29 – L'erreur entre les solutions exacte et approchée sur l'arbre bronchique simulée pour la pression p

Nous illustrons également la deuxième composante de la vitesse u_2 sur les frontières Γ_1 et Γ_2 dans la figure 6.33, sur Γ_3 et Γ_4 dans la figure 6.34 et sur le reste des frontières

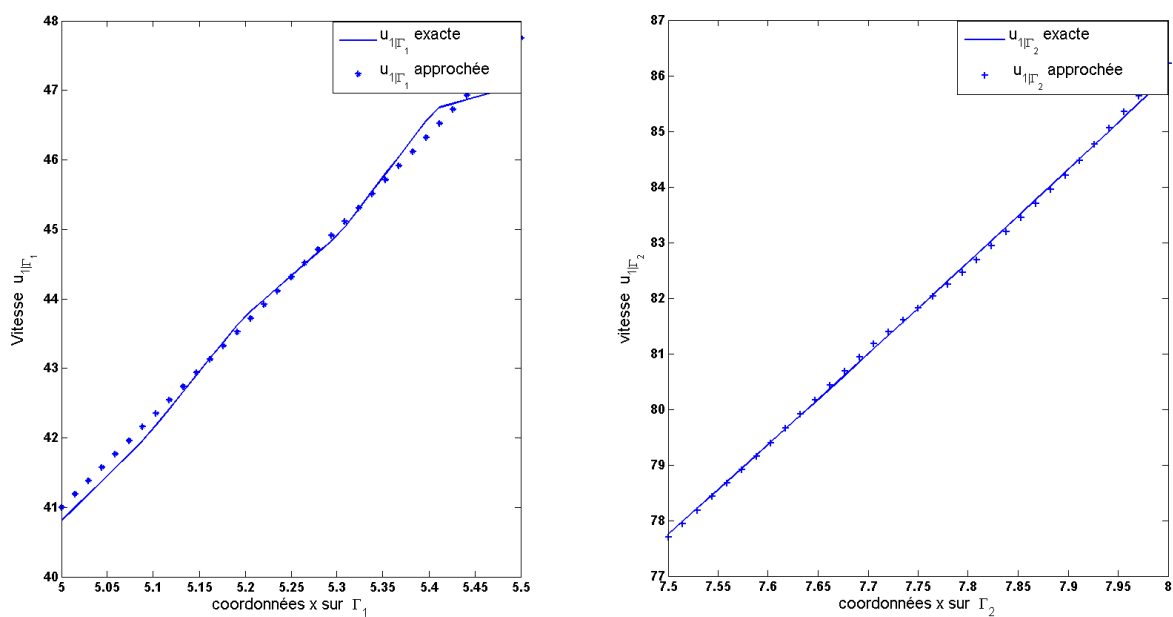


FIGURE 6.30 – Les solutions exacte et approchée pour la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_1 et Γ_2

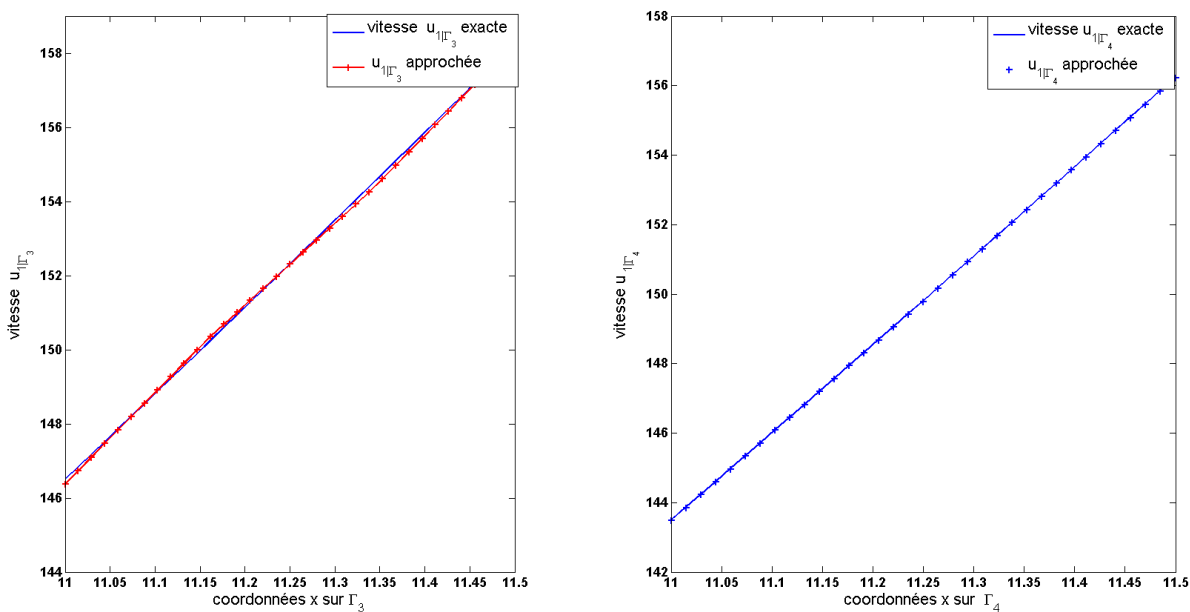


FIGURE 6.31 – Les solutions exacte et approchée pour la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_3 et Γ_4

artificielles dans la figure 6.35.

Finalement, nous présentons la pression p sur les frontières Γ_1 et Γ_2 dans la figure 6.36, sur Γ_3 et Γ_4 dans la figure 6.37 et sur le reste des frontières artificielles Γ_i pour

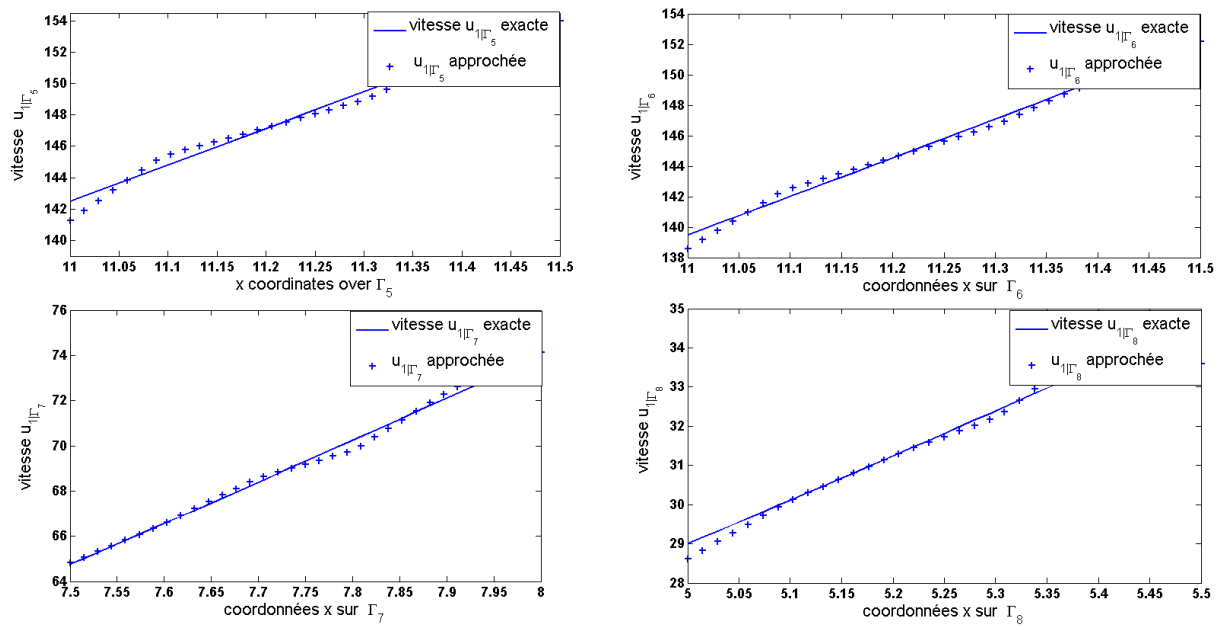


FIGURE 6.32 – la pression exacte et approchée sur $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$ et sur Γ_8

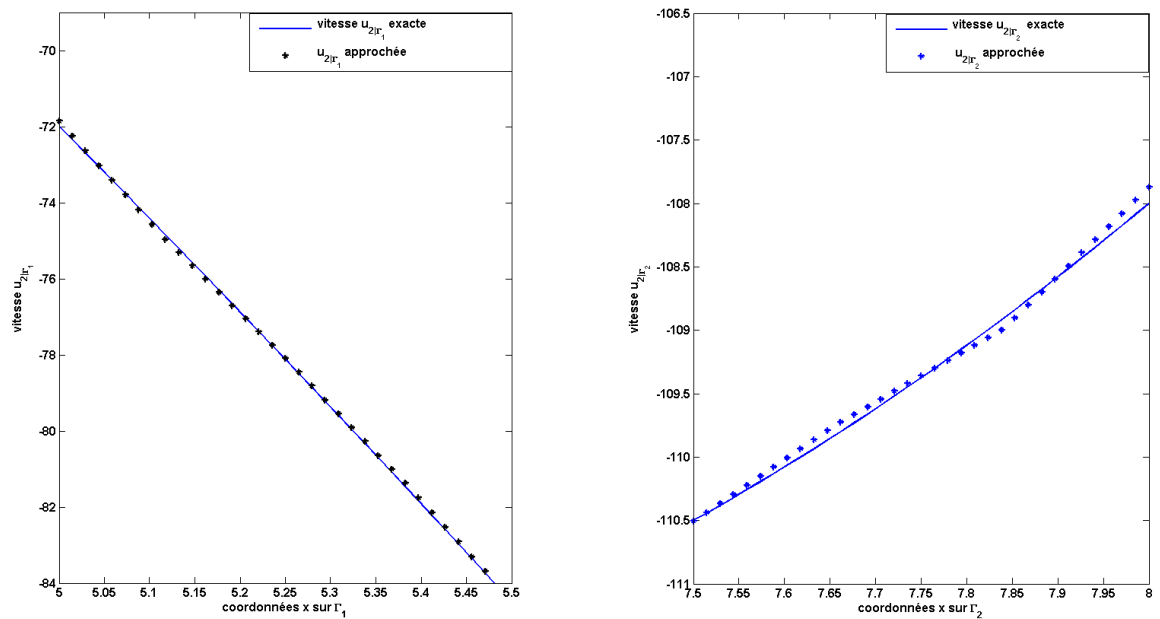


FIGURE 6.33 – Les solutions exacte et approchée pour la deuxième composante de la vitesse u_2 sur Γ_1 et Γ_2

$i = 5, 6, 7, 8$ dans la figure 6.38.

L'approche proposée nous permet également de reconstruire le flux sur les frontières inaccessibles. Pour cela, nous présentons la première composante du flux ϕ_1 sur les fron-

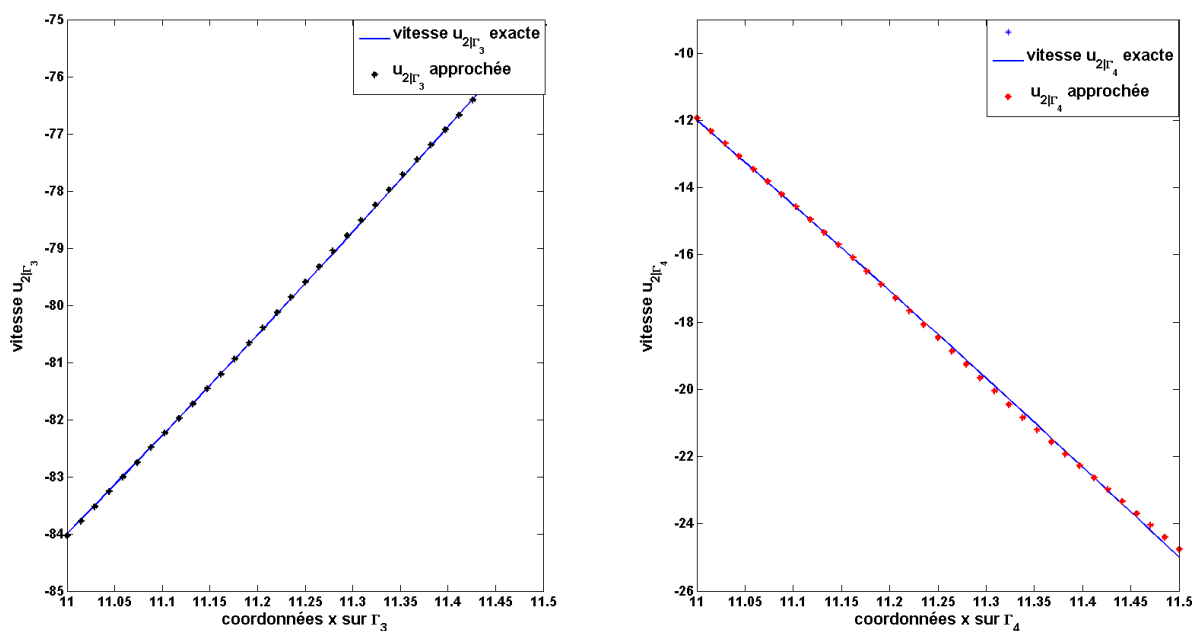


FIGURE 6.34 – Les solutions exacte et approchée pour la deuxième composante de la vitesse u_2 sur Γ_3 et Γ_4

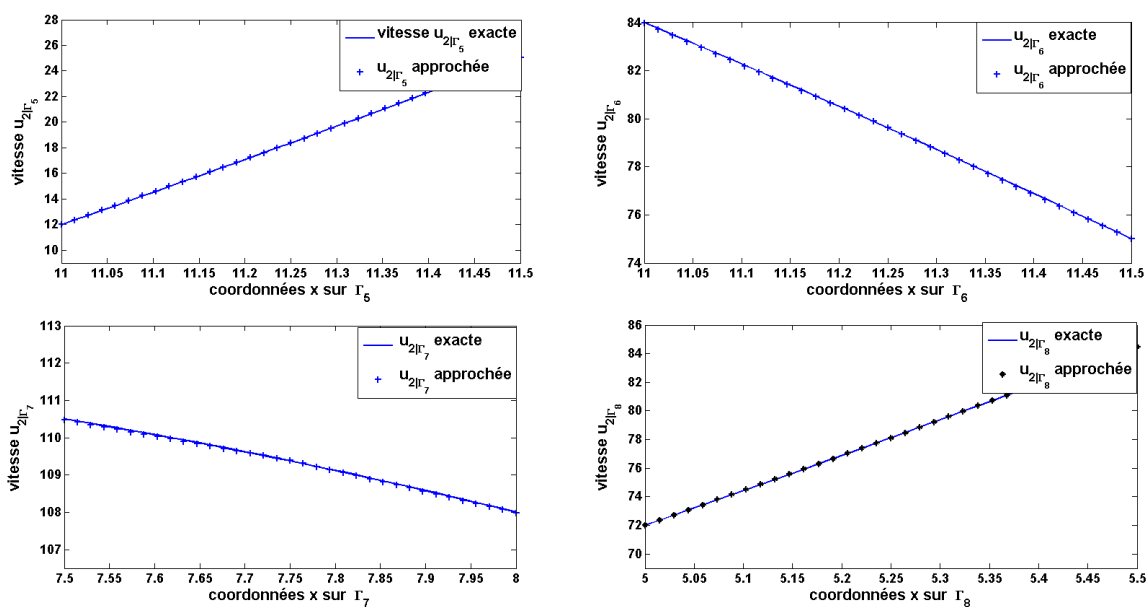


FIGURE 6.35 – Les solutions exacte et approchée pour la deuxième composante de la vitesse u_2 sur $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$ et sur Γ_8

tières Γ_1 et Γ_2 dans la figure 6.39, sur Γ_3 et Γ_4 dans la figure 6.40, puis nous présentons également la deuxième composante du flux ϕ_2 sur les frontières Γ_5 et Γ_6 dans la figure 6.41, et sur Γ_7 et Γ_8 dans la figure 6.42.

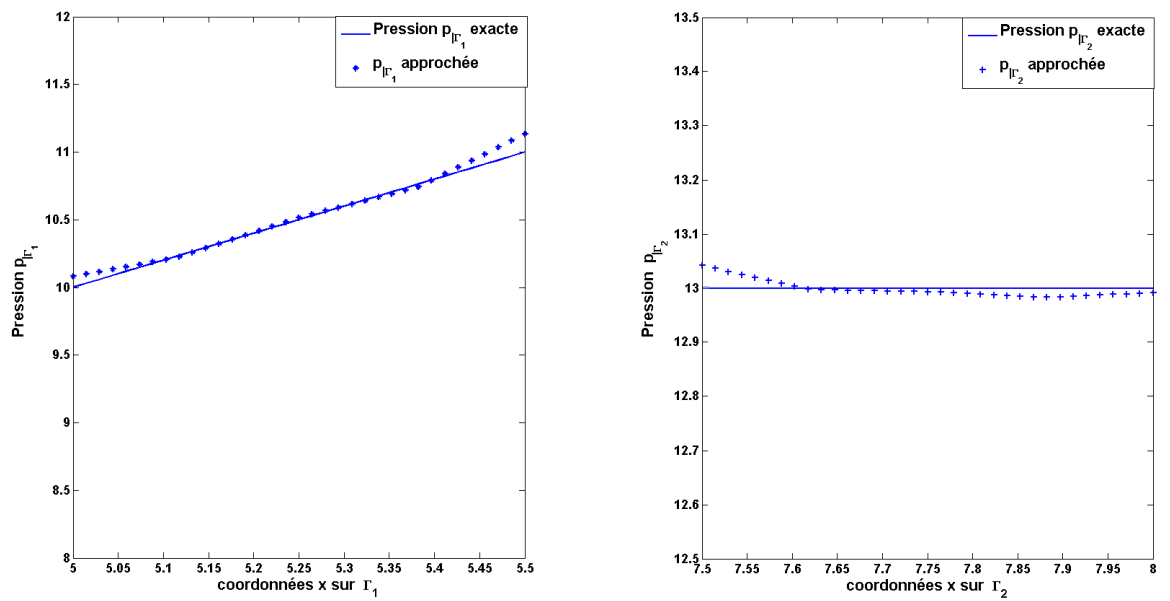


FIGURE 6.36 – La pression exacte et approchée sur Γ_1 et Γ_2

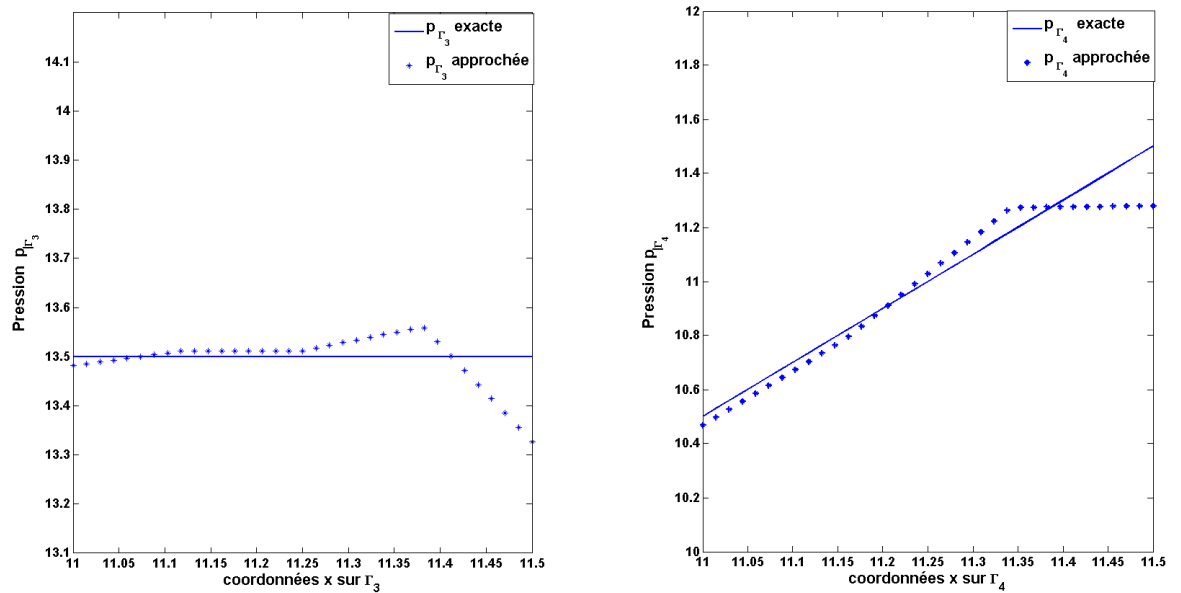


FIGURE 6.37 – La pression exacte et approchée sur Γ_3 et Γ_4

Les résultats ainsi obtenus sont satisfaisants en terme de précision et montrent également la bonne qualité d'approximation de la solution.

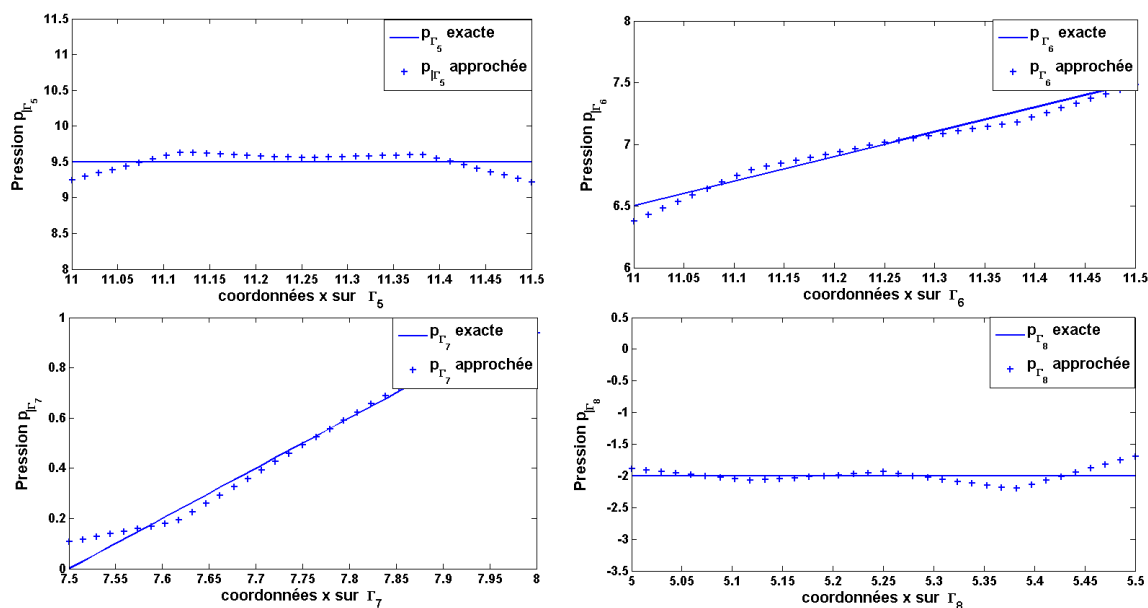


FIGURE 6.38 – La pression exacte et approchée p sur $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$ et sur Γ_8

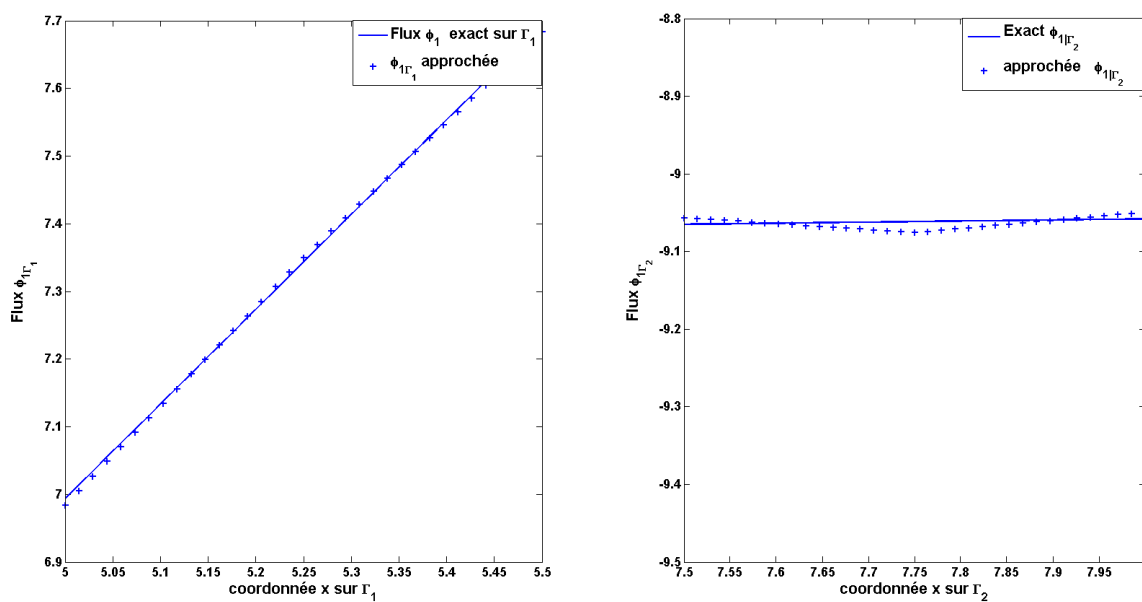


FIGURE 6.39 – Les solutions exacte et approchée pour la première composante du flux ϕ_1 sur Γ_1 et Γ_2

Stabilité numérique

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques prouvant la stabilité numérique de l'algorithme présenté dans le chapitre 4. Nous nous intéressons au comportement de la solution obtenue à l'aide de cet algorithme en présence de petites

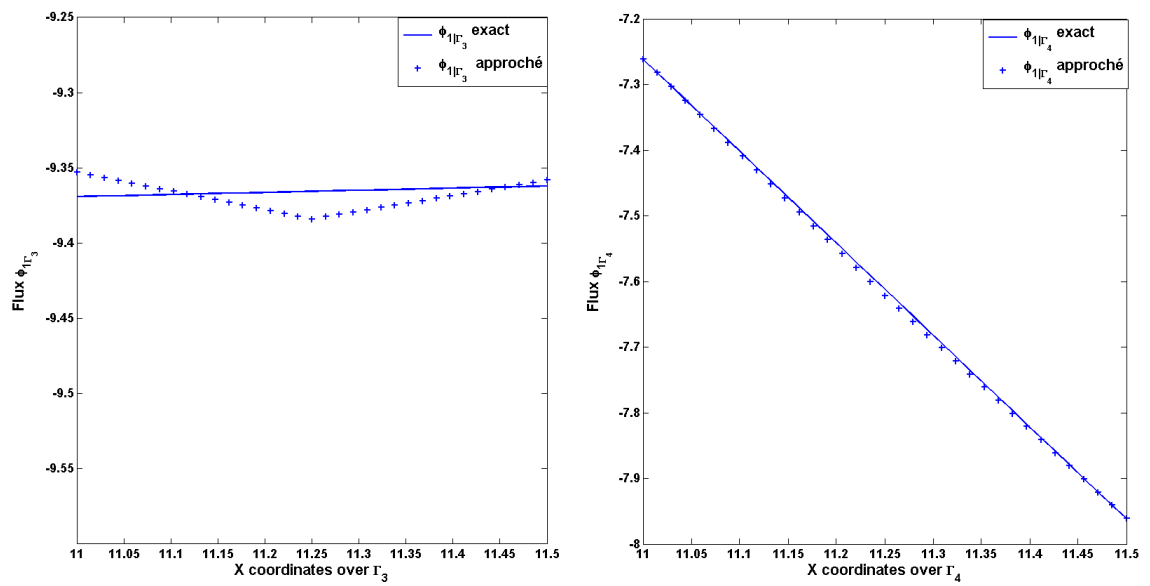


FIGURE 6.40 – Les solutions exacte et approchée pour la première composante du flux ϕ_1 sur Γ_3 et Γ_4

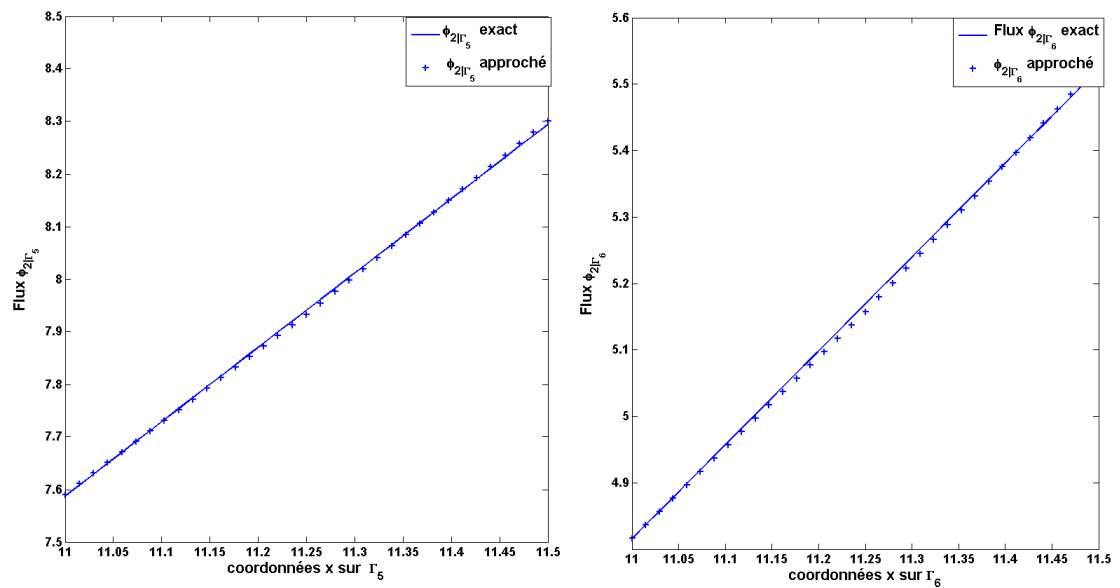


FIGURE 6.41 – Les solutions exacte et approchée pour la deuxième composante du flux ϕ_2 sur Γ_5 et Γ_6

perturbations au niveau des données de Cauchy. En effet, les données de type Dirichlet h et Neumann g sur Γ_0 sont perturbés avec un bruit Gaussien de moyenne nulle uniformément distribué avec des niveaux de bruit $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$, pour simuler des erreurs de mesure, telles que

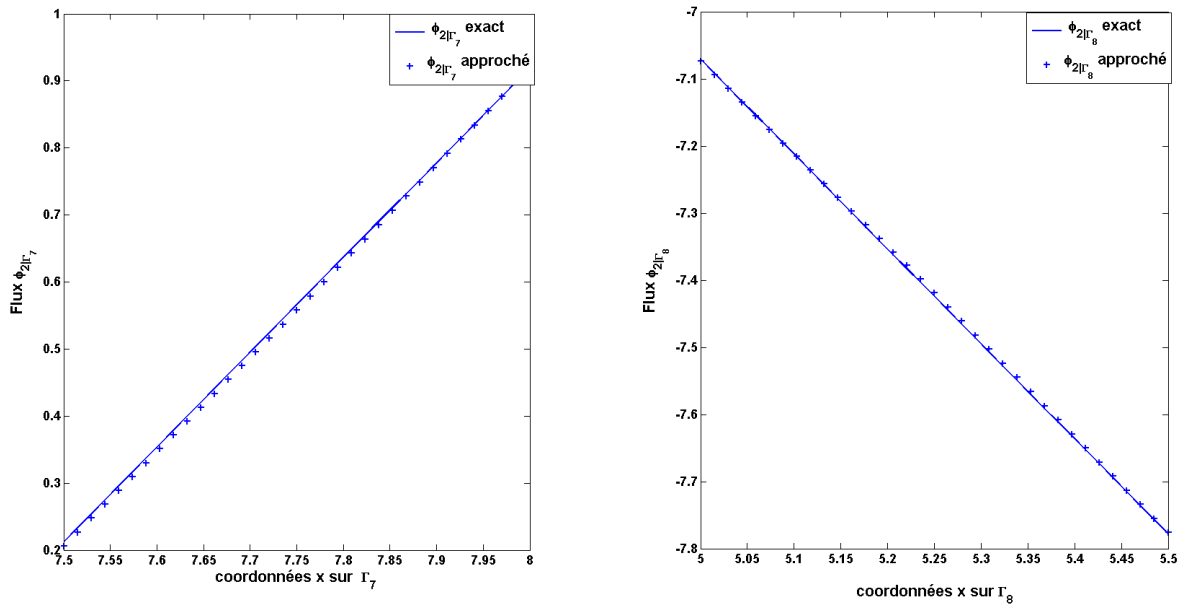


FIGURE 6.42 – Les solutions exacte et approchée pour la deuxième composante du flux ϕ_2 sur Γ_7 et Γ_8

$$h^\delta = [1 + \delta \cdot (2 \text{rand}(x) - 1)]h$$

$$g^\delta = [1 + \delta \cdot (2 \text{rand}(x) - 1)]g$$

Nous présentons ainsi les solutions exacte, approchée et perturbée, pour la première composante de la vitesse u_1 associée aux différents niveaux de bruit δ sur les frontières artificielles Γ_1 et Γ_2 , dans la figure 6.43 et sur Γ_3 et Γ_4 , dans la figure 6.44, Nous présentons également les solutions exacte, approchée et perturbée pour la deuxième composante de la vitesse u_2 associée aux mêmes niveaux de bruit δ sur les frontières artificielles Γ_5 et Γ_6 , dans la figure 6.45 et sur Γ_7 et Γ_8 , dans la figure 6.46. Finalement, nous présentons la pression exacte, approchée et perturbée associée aux différents niveaux de bruit δ sur les frontières inaccessibles Γ_1 et Γ_2 , dans la figure 6.47 et sur Γ_7 et Γ_8 , dans la figure 6.48.

Malgré l'instabilité sévère connue pour ce genre de problèmes, nous avons réussi grâce à cette approche de reconstruire des solutions stables sur les frontières artificielles Γ_i pour $i = 1, \dots, 8$, ceci est confirmé par les résultats ainsi obtenus.

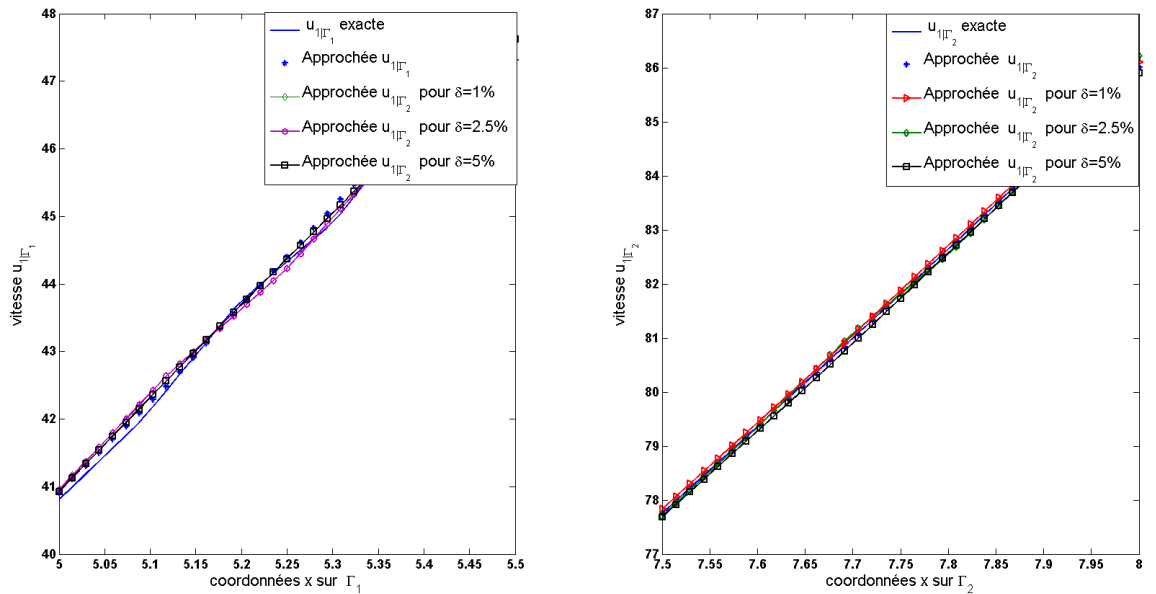


FIGURE 6.43 – Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit de l'ordre $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$ pour la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_1 et Γ_2

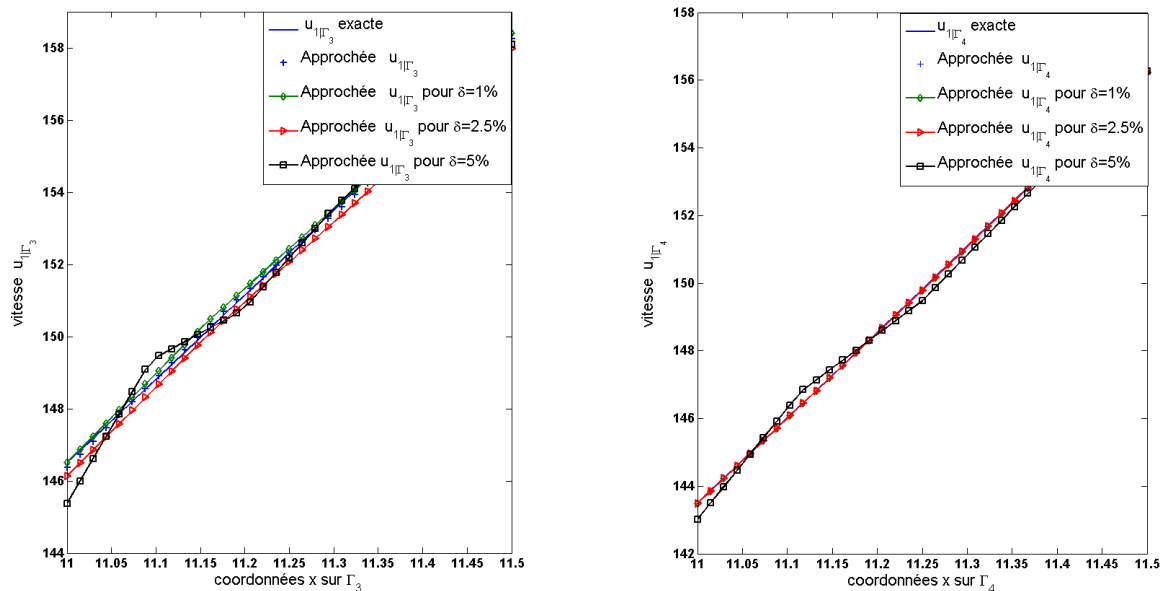


FIGURE 6.44 – Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit de l'ordre $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$ pour la première composante de la vitesse u_1 sur Γ_3 et Γ_4

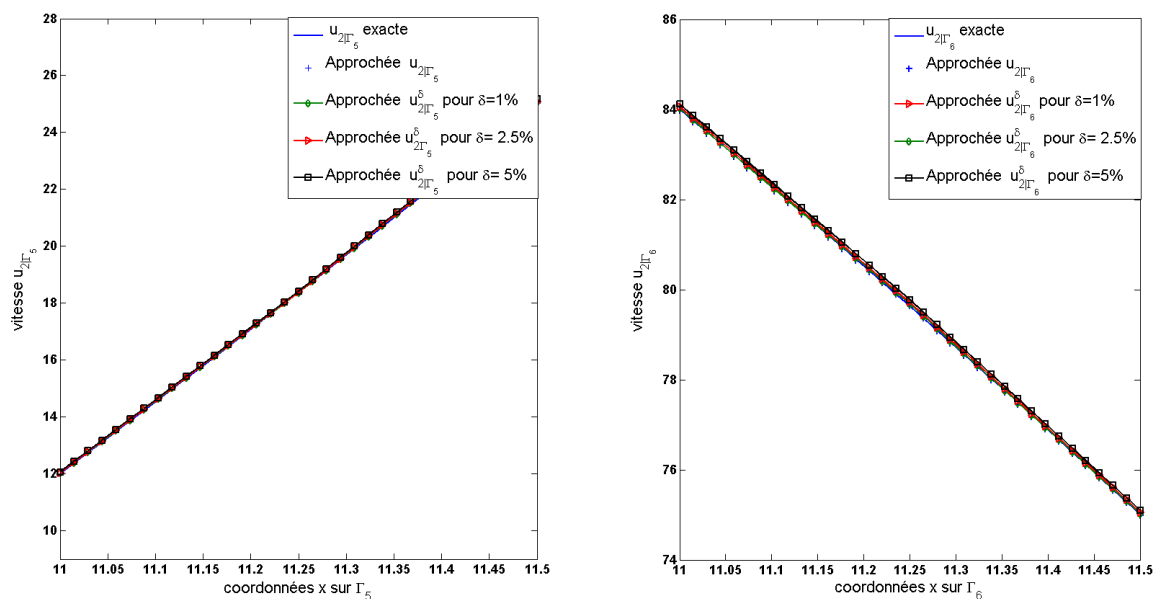


FIGURE 6.45 – Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit d'ordre de l'ordre $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$ pour la première composante de la vitesse u_2 sur Γ_5 et Γ_6

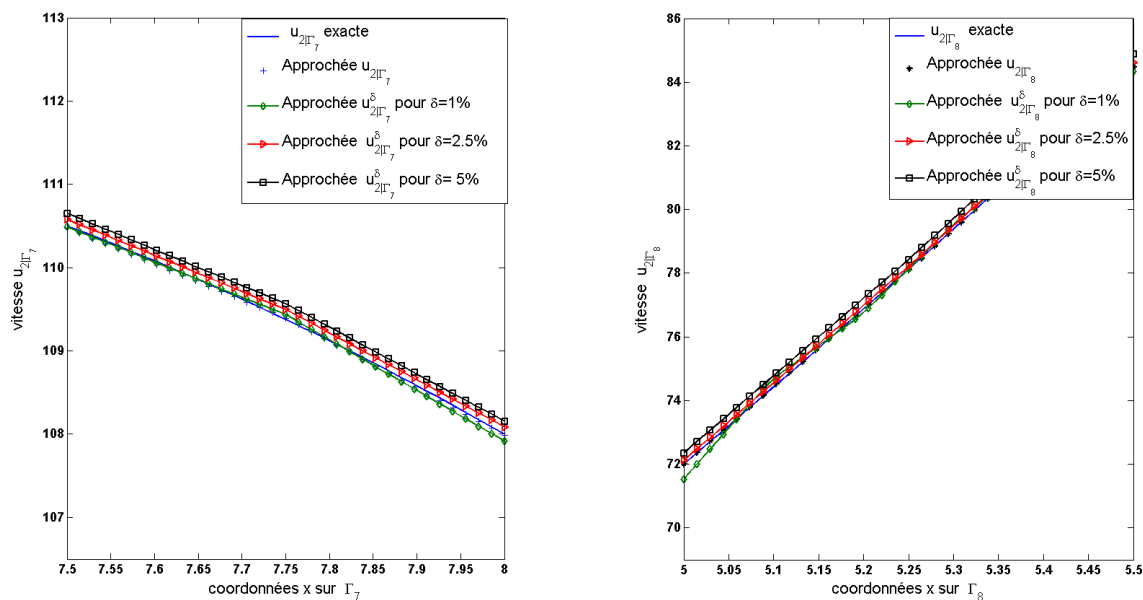


FIGURE 6.46 – Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit de l'ordre $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$ pour la première composante de la vitesse u_2 sur Γ_7 et Γ_8

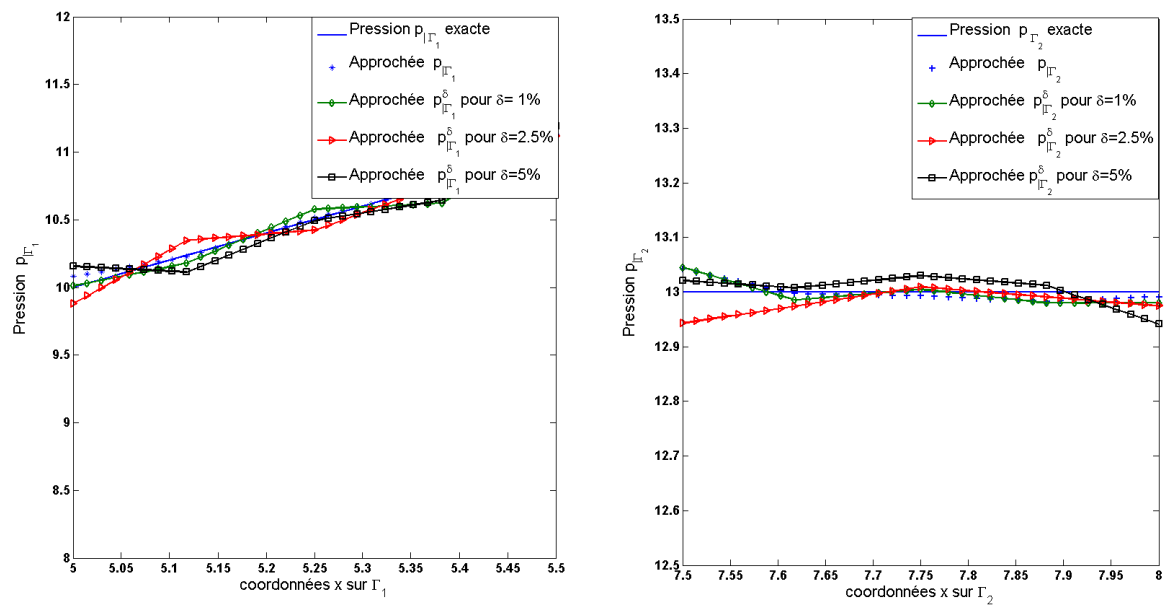


FIGURE 6.47 – Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit de l'ordre $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$ pour la pression p sur Γ_1 et Γ_2

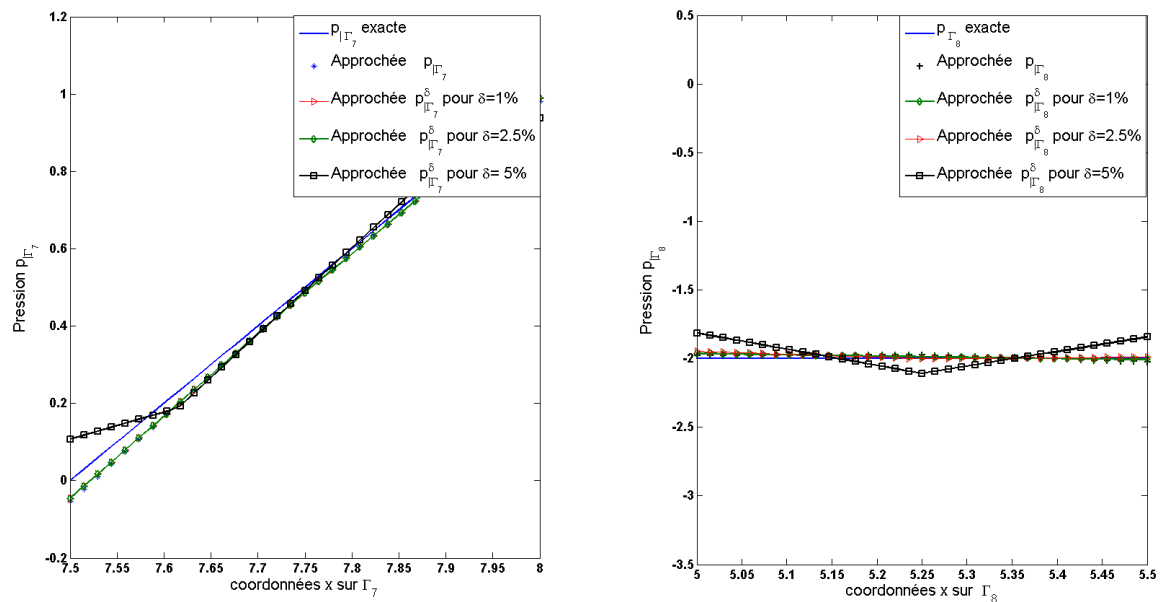


FIGURE 6.48 – Les solutions exacte, approchée et perturbée par les différents niveaux de bruit de l'ordre $\delta = 1\%$, $\delta = 2.5\%$ et $\delta = 5\%$ pour la pression p sur Γ_7 et Γ_8

Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude théorique et l'approximation numérique d'un problème inverse de Cauchy régi par l'équation de Stokes modélisant l'écoulement d'air dans les poumons. Nous avons ainsi proposé deux approches à caractère régularisant pour la résolution de ce problème, permettant de remédier à l'instabilité sévère que connaît cette classe de problèmes. En effet, la première approche consiste à reformuler ce problème inverse en un problème de point fixe en s'inspirant de la méthode de la décomposition de domaine. Nous avons suggéré un algorithme de résolution qui permet de reproduire l'algorithme classique Kozlov-Mazyra-Formin et offre l'opportunité d'exploiter d'autres algorithmes issus des méthodes classiques de la décomposition de domaine. Les résultats numériques obtenus en utilisant ces différents algorithmes permettent de reconstruire des solutions stables et convergentes.

La deuxième approche se base sur une reformulation du problème de Cauchy en un problème d'optimisation régularisé par la méthode de régularisation de Tikhonov, sous contrainte un problème aux limites avec des conditions de type Robin complexes. Nous avons proposé une étude numérique de ce problème tout en établissant des résultats d'existence et de convergence de ce problème. Ensuite, nous avons suggéré un algorithme rapide de résolution directe de ce problème permettant également de reproduire des solutions stables et convergentes.

Ainsi, dans le but de concrétiser les résultats obtenus, nous les avons exploités dans la simulation numérique d'un modèle d'écoulement d'air dans un domaine 2D simulant l'arbre bronchique. Pour cela, nous avons mis en œuvre quelques algorithmes déjà proposés dans cette thèse pour présenter quelques résultats numériques d'approximation du champ de vitesse et de pression sur les frontières artificielles de l'arbre bronchique, tout en discutant leur stabilité.

En perspective, nous souhaitons étendre ces résultats pour d'autres équations aux dérivées partielles à titre d'exemple le cas des équations de Navier-Stokes, et nous comptons éventuellement développer de nouvelles approches à caractère régularisant pour la résolution de ces problèmes.

Bibliographie

- [1] Système respiratoire. <https://www.poumon.ca/sante-pulmonaire/info-pulmonaire/systeme-respiratoire>, 2016. 6, 38
- [2] R. A. Adams and J. J. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140. Academic press, 2003. 23
- [3] V. I. Agoshkov. Poincaré-Steklov’s operators and domain decomposition methods in finite dimensional spaces. In *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, volume 1, page 73. SIAM Philadelphia, 1988. 62
- [4] V. I. Agoshkov and V. I. Lebedev. Poincaré-Steklov operators and methods of partition of the domain in variational problems. *Computational processes and systems*, 2 :173–227, 1985. 62
- [5] O. M. Alifanov. *Inverse heat transfer problems*. Springer Science & Business Media, 2012. 16
- [6] S. Andrieux, T. N. Baranger, and A. Ben Abda. Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional. *Inverse Problems*, 22(1) :115–133, 2006. 16
- [7] D. N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, 21(4) :337–344, 1984. 18, 33
- [8] M. Azaïez, F. Ben Belgacem, and H. El Fekih. On Cauchy’s problem : II. completion, regularization and approximation. *Inverse Problems*, 22(4) :1307, 2006. 16
- [9] V. Bacchelli. Uniqueness for the determination of unknown boundary and impedance with the homogeneous Robin condition. *Inverse Problems*, 25(1) :015004, 2008. 16
- [10] V. Bacchelli, A. Veneziani, and S. Vessella. Corrosion detection in a 2d domain with a polygonal boundary. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 18(3) :281–305, 2010. 16
- [11] V. Bacchelli and S. Vessella. Lipschitz stability for a stationary 2d inverse problem with unknown polygonal boundary. *Inverse problems*, 22(5) :1627, 2006. 16
- [12] V. Badeva and V. Morozov. *Problèmes incorrectement posés, Théorie et Applications*. Paris : Masson, 1991. 58

- [13] L. Baffico, C. Grandmont, and B. Maury. Multiscale modeling of the respiratory tract. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 20(01) :59–93, 2010. [6](#), [17](#), [43](#)
- [14] G. Bastay, T. Johansson, V. A. Kozlov, and D. Lesnic. An alternating method for the stationary Stokes system. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 86(4) :268–280, 2006. [17](#)
- [15] C. K. Batchelor and G. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 2000. [131](#)
- [16] J. H. Bates. *Lung mechanics : an inverse modeling approach*. Cambridge University Press, 2009. [37](#), [39](#), [40](#)
- [17] F. Ben Belgacem and H. El Fekih. On Cauchy’s problem : I. A variational Steklov–Poincaré theory. *Inverse Problems*, 21(6) :1915, 2005. [16](#)
- [18] L. Bertagna, M. D’Elia, M. Perego, and A. Veneziani. Data assimilation in cardiovascular fluid–structure interaction problems : an introduction. In *Fluid-Structure Interaction and Biomedical Applications*, pages 395–481. Springer, 2014. [16](#), [17](#)
- [19] Y. Boukari and H. Haddar. A convergent data completion algorithm using surface integral equations. *Inverse Problems*, 31(3) :035011, 2015. [16](#)
- [20] M. Boulakia, A. C. Egloffé, and C. Grandmont. Stability estimates for the unique continuation property of the Stokes system and for an inverse boundary coefficient problem. *Inverse Problems*, 29(11) :115001, 2013. [17](#)
- [21] L. Bourgeois. Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace’s equation. *Inverse Problems*, 22(2) :413, 2006. [16](#)
- [22] F. Boyer and P. Fabrie. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012. [26](#)
- [23] H. Brezis and J. Lions. *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*. Longoman Group Limited, 1994. [116](#), [117](#)
- [24] L. Broche. *Étude des lésions pulmonaires associées à la ventilation mécanique par imagerie synchrotron*. PhD thesis, Amiens, 2015. [6](#), [39](#)
- [25] H. Cao, M. V. Klibanov, and S. V. Pereverzev. A Carleman estimate and the balancing principle in the quasi-reversibility method for solving the Cauchy problem for the Laplace equation. *Inverse Problems*, 25(3) :035005, 2009. [16](#)

- [26] F. Caubet, J. Dardé, and M. Godoy. On the data completion problem and the inverse obstacle problem with partial Cauchy data for Laplace's equation. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 25 :30, 2019. 16
- [27] P. Cazeaux. *Quelques modèles mathématiques homogénéisés appliqués à la modélisation du parenchyme pulmonaire*. PhD thesis, 2012. 6, 42
- [28] K. Chadan and P. C. Sabatier. *Inverse problems in quantum scattering theory*. Springer Science & Business Media, 2012. 15
- [29] A. Chakib and A. Nachaoui. Convergence analysis for finite element approximation to an inverse Cauchy problem. *Inverse Problems*, 22(4) :1191, 2006. 16
- [30] A. Chakib, A. Nachaoui, M. Nachaoui, and H. Ouaisa. On a fixed point study of an inverse problem governed by Stokes equation. *Inverse Problems*, 35(1) :015008, 2019. 16
- [31] C. W. Chen, D. L. Young, C. C. Tsai, and K. Murugesan. The method of fundamental solutions for inverse 2d Stokes problems. *Computational Mechanics*, 37(1) :2–14, 2005. 17
- [32] W. Chen, M. Gunzburger, F. Hua, and X. Wang. A parallel Robin–Robin domain decomposition method for the Stokes–Darcy system. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(3) :1064–1084, 2011. 62
- [33] X. Cheng, R. Gong, and W. Han. A coupled complex boundary method for the Cauchy problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 24(9) :1510–1527, 2016. 16
- [34] X. Cheng, R. Gong, W. Han, and X. Zheng. A novel coupled complex boundary method for solving inverse source problems. *Inverse Problems*, 30(5) :055002, 2014. 18
- [35] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, 1978. 115, 116
- [36] A. Cimetiere, F. Delvare, M. Jaoua, and F. Pons. Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. *Inverse Problems*, 17(3) :553, 2001. 16
- [37] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 9(R2) :77–84, 1975. 115, 116
- [38] R. Dautray and J. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Volume 3*. Masson, 1985. 23
- [39] R. Dautray and J. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology : Evolution problems I*. Springer, 1992. 28

- [40] R. Dautray and J. L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology.*, volume 2. Berlin : Springer, 1988. [60](#)
- [41] K. Deimling. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, 2010. [17](#), [59](#)
- [42] M. D’Elia, M. Perego, and A. Veneziani. A variational data assimilation procedure for the incompressible Navier-Stokes equations in hemodynamics. *Journal of Scientific Computing*, 52(2) :340–359, 2012. [16](#), [17](#)
- [43] M. Discacciati, A. Quarteroni, and A. Valli. Robin–Robin domain decomposition methods for the Stokes–Darcy coupling. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(3) :1246–1268, 2007. [62](#)
- [44] A.-C. Egloffé. *Etude de quelques problèmes inverses pour le système de Stokes. Application aux poumons*. PhD thesis, Citeseer, 2012. [6](#), [40](#), [41](#), [44](#)
- [45] A. Ellabib and A. Nachaoui. An iterative approach to the solution of an inverse problem in linear elasticity. *Mathematics and Computers in Simulation*, 77 :189–201, 2008. [16](#)
- [46] Y. K. E.V. Zakharov. Formulation and numerical solution of inverse problems of electroencephalography. *Computational Mathematics and Modeling*, 3(2) :135–142, 1992. [16](#)
- [47] L. Formaggia, J.-F. Gerbeau, F. Nobile, and A. Quarteroni. Numerical treatment of defective boundary conditions for the Navier–Stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(1) :376–401, 2002. [17](#)
- [48] L. Formaggia, A. Veneziani, and C. Vergara. A new approach to numerical solution of defective boundary value problems in incompressible fluid dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(6) :2769–2794, 2008. [17](#)
- [49] L. Formaggia, A. Veneziani, and C. Vergara. Flow rate boundary problems for an incompressible fluid in deformable domains : formulations and solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9-12) :677–688, 2010. [17](#)
- [50] P. C. Franzone and E. Mageses. On the inverse potential problem of electrocardiology. *Calcolo*, 16(4) :459–538, 1979. [16](#)
- [51] G. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations : Steady-state problems*. Springer Science & Business Media, 2011. [22](#), [52](#)
- [52] G. C. García, C. Montoya, and A. Osses. A source reconstruction algorithm for the Stokes system from incomplete velocity measurements. *Inverse Problems*, 33(10) :105003, 2017. [17](#)

- [53] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 69 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2011. Reprint of the 1985 original, With a foreword by Susanne C. Brenner. [61](#)
- [54] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. New York : Dover, 1953. [15](#), [75](#)
- [55] R. Hadidi and N. Gucunski. Probabilistic approach to the solution of inverse problems in civil engineering. *Journal of computing in civil engineering*, 22(6) :338–347, 2008. [16](#)
- [56] J. G. Heywood, R. Rannacher, and S. Turek. Artificial boundaries and flux and pressure conditions for the incompressible Navier–Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 22(5) :325–352, 1996. [17](#)
- [57] G. Inglese. An inverse problem in corrosion detection. *Inverse Problems*, 13(4) :977, 1997. [16](#)
- [58] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*, volume 127. Springer, 2006. [15](#), [103](#)
- [59] M. Jourhmane and A. Nachaoui. An alternating method for an inverse Cauchy problem. *Numerical Algorithms*, 21(1) :247–260, Sep 1999. [16](#)
- [60] A. N. K. Kurpisz. Inverse thermal problems. *Computational Mechanics, Southampton, Boston*, 1995. [16](#)
- [61] S. I. Kabanikhin and A. L. Karchevsky. Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation. *Journal of Inverse Ill-Posed Problems*, 3 :21–46, 1995. [16](#)
- [62] P. G. Kaup and F. Santosa. Nondestructive evaluation of corrosion damage using electrostatic measurements. *Journal of Nondestructive Evaluation volume*, 14 :127–36, 1995. [16](#)
- [63] V. A. Kozlov, V. G. Maz'Ya, and A. V. Fomin. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 31(1) :45–52, 1991. [16](#), [17](#), [47](#), [61](#), [62](#)
- [64] R. Y. Lai, G. Uhlmann, and J. N. Wang. Inverse boundary value problem for the Stokes and the Navier–Stokes equations in the plane. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 215(3) :811–829, 2015. [17](#)
- [65] R. Lattés and J. L. Lions. *The method of quasi-reversibility : applications to partial differential equations*. Elsevier, New York, 1969. [16](#)

- [66] A. Lechleiter and T. Rienmüller. Factorization method for the inverse Stokes problem. *Inverse Problems and Imaging*, 7 :1271–1293, 2013. 17
- [67] J. Leray and J. Schauder. Topologie et équations fonctionnelles. *Ann. Sci. École Normale Supérieure. (3)*, 51 :45–78, 1934. 19, 35
- [68] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968. 23
- [69] P.-L. Lions. On the Schwarz alternating method iii : a variant for nonoverlapping subdomains, in “domain decomposition methods for partial differential equations”, 202–223. *SIAM, Philadelphia, PA*, 1990. 62
- [70] L. Marin and D. Lesnic. The method of fundamental solutions for the Cauchy problem in two-dimensional linear elasticity. *International journal of solids and structures*, 41(13) :3425–3438, 2004. 16
- [71] P. Martyshko. Inverse problems of electromagnetic geophysical fields. *Inverse and Ill-Posed Problems Series, Utrecht*, 1999. 16
- [72] A. Nachaoui. Numerical linear algebra for reconstruction inverse problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 162(1) :147 – 164, 2004. 16
- [73] A. Nachaoui, M. Nachaoui, A. Chakib, and M. Hilal. Some novel numerical techniques for an inverse Cauchy problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, page 113030, 2020. 17
- [74] D. O’Regan, Y. J. Cho, and Y. Q. Chen. *Topological degree theory and applications*. Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group, 2006. 34, 35
- [75] A. Quarteroni and A. Valli. *Domain decomposition methods for partial differential equations*. Oxford University Press, 1999. 18, 50, 62
- [76] A. Quarteroni and A. Veneziani. Analysis of a geometrical multiscale model based on the coupling of ode and pde for blood flow simulations. *Multiscale Modeling & Simulation*, 1(2) :173–195, 2003. 44
- [77] A. Quarteroni, A. Veneziani, and C. Vergara. Geometric multiscale modeling of the cardiovascular system, between theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 302 :193–252, 2016. 17
- [78] P. A. Raviart and J. M. Thomas. *Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. 25
- [79] Y. Rudy and B. Messinger-Rapport. The inverse problem in electrocardiography : solutions in terms of epicardial potentials. *Critical reviews in biomedical engineering*, 16(3) :215–268, 1988. 16

- [80] F. Santosa, M. Vogelius, and J.-M. Xu. An effective nonlinear boundary condition for a corroding surface. identification of the damage based on steady state electric data. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 49(4) :656–679, Jul 1998. [16](#)
- [81] T. Shigeta and D. L. Young. Method of fundamental solutions with optimal regularization techniques for the Cauchy problem of the Laplace equation with singular points. *Journal of Computational Physics*, 228(6) :1903–1915, 2009. [16](#)
- [82] C. Tajani and J. Abouchabaka. On the data completion problem for laplace’s equation. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 45(1) :11–36, 2018. [16](#)
- [83] I. E. Vignon-Clementel, C. A. Figueroa, K. E. Jansen, and C. A. Taylor. Outflow boundary conditions for three-dimensional finite element modeling of blood flow and pressure in arteries. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(29-32) :3776–3796, 2006. [44](#)
- [84] A. Zeb, L. Elliott, D. B. Ingham, and D. Lesnic. An inverse Stokes problem using interior pressure data. *Engineering analysis with boundary elements*, 26(9) :739–745, 2002. [17](#)