N° d'ordre : .../...

UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE

Faculté des Sciences et Techniques

Béni Mellal

Centre des Études Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Mohamed HANNABOU

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques

Contribution à l'étude des équations intégro-différentielles fractionnaires hybrides et impulsives

Soutenue le 18/07/2020 devant le jury composé de :

Pr. Lalla Saadia CHADLI	Faculté des sciences et Technique, Béni Mellal,	Présidente -Rapporteur
Pr. Adil ABBASSI	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal,	Rapporteur
Pr. Mohamed OUKESSOU	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal,	Examinateur
Pr. Abdelmajid ELHAJAJI	École Nationale du Commerce et Gestion , El Jadida,	Examinateur
Pr. Khalid HILAL	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal,	Encadrant
Pr. Chakir ALLALOU	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal,	Invité

Travail réalisé au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (LMACS)

Table des matières

Liste des publications

Publications dans des journaux :

1. S. Melliani, K. Hilal and M.Hannabou" Existence Results of Hybrid Fractional Integro-Differential Equations : Theoretical Aspects and Applications '', Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems, Studies in Fuzziness and Soft Computing 372, Springer .(2019).
2. Mohamed Bouaouid , Mohamed Hannabou and Khalid Hilal" Nonlocal Conformable-Fractional Differential Equations with a Measure of Noncompactness in Banach Spaces", Hindawi Publishing Corporation Journal of Mathematics Volume 2020, Article ID 5615080.
3. Mohamed Hannabou and Khalid Hilal " Investigation of a Mild Solution to Coupled Systems of Impulsive Hybrid Fractional Differential Equations ", Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations Volume 2019, Article ID 2618982.
4. Mohamed Hannabou and Khalid Hilal " Existence Results for a System of Coupled Hybrid Differential Equations with Fractional Order ", Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations Volume 2020, Article ID 3038427.

Conférences internationales :

1. Participation au " 5éme congrès international de la SM2A Meknès du 16 au 18 mars (2017). Meknès" , Maroc, par Communication Orale : " Existence Results of Hybrid Fractional Integro-Differential Equations : Theoretical Aspects and Applications ''.
2. Participation au " International Conference on Intuitionistic Fuzzy Sets and Mathematical Sciences- ICIFSMAS' (2018)".Ifran, Maroc, par Communication Orale :

" Existence Results of Hybrid Fractional Integro-Differential Equations : Theoretical Aspects and Applications ‘’.

3. Participation au “ 6éme congrès international de la SM2A Béni mellal du 07 au 09 november (2019). Béni mellal ” , Maroc, par Communication Orale : ‘’Mild Solution for controlled Impulsive Fractional Integro-differential Equations with Measure of Non-compactness ‘’..

Résumé

Au cours de ces dernières années, l'étude des équations différentielles fractionnaires a fait l'objet de divers travaux de recherches. Ces équations concourent dans la modélisation de certains phénomènes physiques présentant des termes mémoires dans leurs structures. Le but de cette thèse est de contribuer au développement de cette théorie émergente, et en s'intéressant au problème de l'existence de solutions de quelques équations intégro-différentielles fractionnaires hybrides et équations intégro-différentielles fractionnaires impulsives . Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les théorèmes du point fixe de Banach, leary-Schaudr, Darbo-Sadovskii, Dhage et Mönch.
Tout d'abord, nous présentons les éléments de base de la théorie du calcul fractionnaire, tels que : la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, définitions relatives aux opérateurs d'ordre fractionnaire, l'exponentielle de Mittag-Leffler, sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans cette thèse.
Ensuite, nous nous intéressons à l'étude d'existence de solutions de quelques problèmes aux limites concernant une équation intégro-différentielle hybride et une autre équation intégro-différentielle fractionnaire impulsive, nous établissons quelques résultats d'existence de solution de ces équations.

Remerciements

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.
J'exprime ma reconnaissance à mon directeur de thèse, le professeur **Khalid Hilal**, professeur à la Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille, des rendez-vous et des délais de relecture des documents que je lui ai adressés. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail de recherche.
Je remercie également mon enseignante **Lalla Saadia CHADLI**, professeur à la Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier aussi Monsieur **Adil ABBASSI**, professeur à la Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal, d'avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie Monsieur **Abdelmajid EL HAJAJI**, professeur à l'Ecole nationale du Commerce et Gestion, El Jadida, d'avoir accepté d'examiner ma thèse et faire partie du jury.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur **Mohamed OUKESSOU**, professeur à la Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'évaluer ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur **Chakir ALLALOU**, professeur à la Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal, d'avoir accepté de se joindre aux membres du jury.

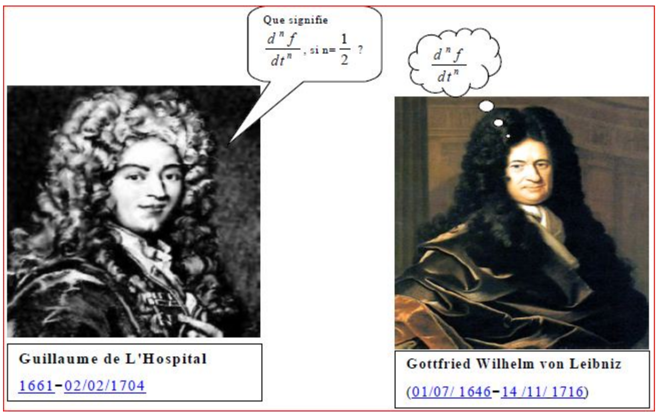
J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier mon père, ma mère, ma femme et ma fille.
Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Introduction

Le calcul fractionnaire connait à l'heure actuelle une grande popularité parmi les chercheurs en sciences fondamentales et appliquées. En fait, il étend les opérations dérivation et d'intégration aux ordres non entiers. Au début, c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordres entiers à des ordres fractionnaires, permettant le calcul de la dérivée d'ordre α réel ou complexe d'une fonction différentiable $f(t)$ soit :

$$(\mathcal{D}^{\alpha} f)(t) = \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}}$$

Bien que le concept de la dérivation d'ordre fractionnaire ne soit pas nouveau, ses origines remontaient à la fin du $17^{\text{ième}}$ siècle, partant de la réponse de G.W. Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée sur la signification de $\frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}}$ si $n = \frac{1}{2}$.



Son intérêt n'est reconnu que durant les deux dernières décennies du $20^{\text{ième}}$ siècle où de nombreuses applications ont été développées utilisant ce concept. Un exposé historique détaillé est donné en introduction de [10] ; De plus, cet ouvrage est sans doute l'un des premiers à rassembler des résultats épars.
Le calcul fractionnaire a été intensivement développé depuis la première conférence sur ce domaine en 1974 [23]. Depuis, il a gagné une popularité et une considération importante dues principalement aux nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie où il a été remarqué que le comportement d'un grand nombre

de systèmes physiques peut être décrit en utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire qui fournit un excellent instrument pour la description de plusieurs propriétés de matériaux et processus [14], [19], [48], [56], [29], [51], [60], [27]. Donc, il est très important d'établir une théorie claire et nette pour l'étude et l'analyse des opérateurs et systèmes d'ordres fractionnaires.

Tout d'abord, plusieurs mathématiciens ont apporté des contributions importantes jusqu'à la moitié du dernier siècle : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel $(1823-1826)$, H. Holmgren $(1865-67)$, A.K. Grünwald $(1867-1872)$, A.V. Letnikov $(1868-1872)$, H.Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), J. Hadamard (1892), O. Heaviside $(1892-1912)$, S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood $(1917-1928)$, H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A.Marchaud (1927), H.T. Davis $(1924-1936)$, A. Zygmund $(1935-1945)$, E.R. Love $(1938-1996)$, A. Erdélyi $(1939-1965)$, H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Ces développements mathématiques obtenus, était très différents de ceux utilisés dans le calcul ordinaire. A cette époque, Il n'y avait presque pas d'applications du calcul fractionnaire. Depuis longtemps, il a été considéré par certains, comme un domaine abstrait ne contenant que des manipulations mathématiques avec peu ou pas d'utilité. Il y a presque 30 ans, ce paradigme a commencé à se passer des mathématiques pures aux applications dans différents domaines. Les opérateurs et les systèmes d'ordres fractionnaires ont été appliqués dans presque tous les domaines de la science. Les divers domaines où le calcul fractionnaire a fait un impact profond, comprend la viscoélasticité et la rhéologie, le génie électrique, l'électrochimie, la biologie, la biophysique et le génie biologique, le traitement du signal et d'image, la mécanique, la mécatronique, la physique, et la théorie de la commande.

Bien que certaines questions mathématiques restent non résolues, beaucoup de difficultés ont été surmontées, et la plupart des problèmes mathématiques clés documentés dans le domaine était résolus à un point où plusieurs outils mathématiques sont les mêmes pour les deux calculs, régulier et fractionnaire. Les ouvrages déjà cités précédemment ont été très utiles dans l'introduction du calcul fractionnaire aux chercheurs des différentes communautés scientifiques. En plus, on peut compter plusieurs travaux fondamentaux [42], [36], [22], [37], [55], [31], [40], qui fournissent une bonne compréhension des opérateurs et des systèmes d'ordres fractionnaires.

D'autre part, les équations différentielles impulsives apparaissaient comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel. La majorité des processus dans les sciences appliquées sont représentés par des équations différentielles. Cependant, la situation est différente dans certains phénomènes physiques subissant des changements brusques au cours de leur évolution comme les systèmes mécaniques avec impact, les systèmes biologiques (flux du sang,...), la dynamique des populations, les désastres naturels, etc. Ces changements sont souvent de très courtes durées et sont donc produits instantanément sous forme d'impulsions. La modélisation de tels phénomènes nécessite l'utilisation des formes qui font intervenir explicitement et simultanément l'évolution continue du phénomène ainsi que les changements instantanés.

De tels modèles sont dits "impulsifs" ; ils sont évolutifs de processus continus régis par des équations différentielles combinées avec des équations aux différences représentant l'effet impulsif subi.

Présentation de la thèse

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'étude de deux classes d'équations différentielles d'ordres fractionnaires, elle est organisée en six chapitres :

Au première chapitre nous citons quelques principales étapes historiques de l'élaboration du calcul fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre nous présentons des notions préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit. Ce chapitre est partagé en trois sections. La première section présente une base théorique du calcul fractionnaire nécessaire pour le développement des chapitres qui suivent. Les concepts de base et les principales propriétés des opérateurs d'ordres fractionnaires y sont répertoriés. Enfin nous rappelons les différents théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

L'objet du troisième chapitre est l'étude de l'existence de la solution du problème intégro-différentiel fractionnaire hybride suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left(\frac{x(t)-I^{\beta}h(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))}{f(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))}\right) = g(t,x(t),I^{\beta_1}x(t),\ldots,I^{\beta_k}x(t)),\ t\in J=[0,T],\ 1<\alpha\leq 2 \\ \frac{x(0)}{f(0,x(0),\underbrace{0,0\ldots,0}_{n})} = x_0, \qquad \frac{x(T)}{f(T,x(T),I^{\alpha_1}x(T),\ldots,I^{\alpha_n}x(T))} = x_T, \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha_1,\ldots,\alpha_n > 0$, $\beta_1,\ldots,\beta_n > 0$, $x\in\mathbb{R}$, D^{α} désigne la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α. I^{β} est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\beta > 0$. $f : J\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $h : J\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues et $h(0,x(0),\underbrace{0,0\ldots,0}_{n}) = 0$, et $g\in\mathcal{C}(J\times\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$ est une fonction a certaines propriétés.

Nous commençons d'abord par établir une équivalence entre ce problème et une certaine équation intégrale. Ensuite, nous présentons dans la deuxième section notre premier résultat d'existence en utilisant le théorème du point fixe de Dhage. La validité de ce résultat sera illustrée par un exemple.

Un deuxième résultat d'existence sera présenté dans la dernière section de ce chapitre. Il s'agit d'un résultat d'existence de la solution du problème intégro-différentiel fractionnaire séquentiel hybride suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left(\frac{D^{\omega}x(t)-I^{\beta}h(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))}{f(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))}\right) = g(t,x(t),I^{\beta_1}x(t),\ldots,I^{\beta_k}x(t)),\quad t\in J=[0,T],\quad 0<\alpha<1 \\ x(0)=x_0,\quad D^{\omega}x(0)=0, \end{cases} \tag{2}$$

où $0<\alpha,\omega\leq 1$, $1<\alpha+\omega\leq 2$, les fonctions $f\in C(J\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $h\in C(J\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et $h(0,x(0),\underbrace{0,0\ldots,0}_{n}) = 0$ et $g\in\mathcal{C}(J\times\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$. I^{β} est l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d' ordre β. D^{α}, D^{ω} sont les opérateurs de dérivée fractionnaire d'ordre α, β respectivement.

Au quatrième chapitre de ce travail et vu que la condition non locale joue aussi un rôle important dans la modélisation de plusieurs phénomènes physiques, nous nous intéressons à l'étude de l'existence de la solution du système couple d'équations différentielles d'ordre fractionnaires hybrides impulsives et à condition non locale suivante :

$$\begin{cases} D^{\alpha}\Big(\frac{u(t)}{f_1(t,u(t),v(t))}\Big) = g_1(t,u(t),v(t)), \quad t\in[0,1], t\neq t_i \quad i=1,2,\dots,n, \quad 0<\alpha<1 \\ u(t_i^+) = u(t_i^-) + I_i(u(t_i^-)), \quad t_i\in(0,1), i=1,2,\dots,n \\ D^{\beta}\Big(\frac{v(t)}{f_2(t,u(t),v(t))}\Big) = g_2(t,u(t),v(t)), \quad t\in[0,1], t\neq t_j, \quad j=1,2,\dots,m, \quad 0<\beta<1 \\ v(t_j^+) = v(t_j^-) + I_j(v(t_j^-)), \quad t_j\in(0,1), j=1,2,\dots,m \\ \frac{u(0)}{f_1(0,u(0),v(0))} = \phi(u), \quad \frac{v(0)}{f_2(0,u(0),v(0))} = \psi(v), \end{cases} \tag{3}$$

D^{α}, D^{β} représente la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α, β, respectivement.
Au cinquième chapitre, nous traitons l'existence de solutions intégrales du problème de Cauchy suivant :

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}} = Ax(t) + f(t,x(t)), \;\; x(0) = x_0 + g(x), \;\; t\in[0,\tau], \tag{4}$$

où $\frac{d^{\alpha}(.)}{dt^{\alpha}}$ représente la dérivée fractionnaire conforme.
La partie linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X, f et g des fonctions données. Le résultat principal est prouvé en utilisant le théorème du point fixe de Darbo-Sadovskii sans supposer la compacité de la famille $(T(t))_{t\geq 0}$ et la condition de Lipschitz sur la partie non locale g.
Dans le sixième chapitre nous étudions l'existence de solutions du problème des équations intégro-différentielles fractionnaires impulsives suivantes :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = Au(t) + f(t,u(t),\int_0^t \rho(t,s)h(t,s,u(s))ds) + B(t)c(t), \; t\in(s_i,t_{i+1}], i=0,1,\dots,n, c\in\mathcal{U}_{ad} \\ u(t) = I_i(u(t_i)) + g_i(t,u(t)), \quad t\in(t_i,s_i], i=1,2,\dots,n \\ u(0) = u_0 + k(u) \end{cases} \tag{5}$$

où ${}^{C}D^{\alpha}$ est la dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha\in(0,1)$. A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique d'opérateurs linéaires $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach $(X,\|.\|)$. $u_0\in X$, $0=t_0=s_0<t_1\leq s_1\leq t_2<,\dots,<t_n\leq s_n\leq t_{n+1}=b$, les fonctions $k: X\longrightarrow X$, $g_i\in\mathcal{C}((t_i,s_i]\times X, X)$ et $I_i: X\longrightarrow X$ pour tout $i=1,2,\dots,n$, $f:[0,b]\times X\times X\longrightarrow X$ et $h\in\mathcal{C}(D,\mathbb{R}^+)$, où $D=\{(t,s)|t,s\in[0,b], t\geq s\}$.
En utilisant la théorie des opérateurs de semi-groupes, fonctions densité de probabilité, le théorème du point fixe de Mönch, nous établissons quelques résultats d'existence de solution pour ces types de problèmes, en se basant sur la mesure de non-compacité de Hausdorff.
Nous terminons notre travail par une conclusion générale récapitulant nos principaux résultats et quelques perspectives.

Chapitre 1

Aperçu historique

1.1 Introduction

Notre but dans cette partie n'est pas de dresser un état de l'art complet sur le calcul fractionnaire et ce pour deux raisons :

1. Les domaines de recherche sont actuellement si variés qu'il semble difficile d'avoir un aperçu complet, même si plusieurs ouvrages tels que [37], [55] offrent une vision trés large sur ce domaine.

2. Des historiques très détaillés sont donnés dans les ouvrages de références tels que [9],[23].

Nous présentons ici les principales étapes historiques de l'élaboration du calcul fractionnaire, jusqu'à son essor dans le développement d'applications dans les années 1970. Nous nous appuyons sur les ouvrages [9]-[57] pour couvrir la période de 1695 à 1974.

1695

L'origine du calcul fractionnaire semble remonter à Leibniz. Dans une lettre au Marquis de l'Hospital, il propose de généraliser sa formule pour la dérivée n ième d'un produit de deux fonctions à $n \succ 0$ et introduit la notation $d^{\frac{1}{2}}h$. Il écrit notamment que "$d^{\frac{1}{2}}x = x\sqrt{dx : x}$".

Dans une autre lettre à Bernoulli, il mentionne des dérivées "d'ordres généraux".

1730

Euler est le second grand mathématicien à aborder la question. Dans son article [1] où il introduit sa célèbre fonction Gamma Γ qui généralise la factorielle ($\Gamma(n+1) = n!$), il conclut en proposant une définition pour la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ de x^{β}, avec $\beta > 0$. Son cheminement est le suivant : pour $m, n \in N$ avec $m \geq n$, on a tout d'abord

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$$

Grâce à sa fonction Gamma cette formule s'étend directement à une puissance $m \succ 0$:

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n} \tag{1.1}$$

Le terme de droite de (1.1) conservant un sens pour un réel $n > 0$ (tel que $n < m+1$), on peut donc le considérer comme une définition pour la dérivée d'ordre réel $\alpha > 0$ de la puissance réelle $\beta > 0$:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha} \tag{1.2}$$

Notons ici qu'Euler ne considère en fait que des nombres rationnels (appelès aussi fractionnaires) et non des nombres réels. La dénomination actuelle de dérivée "fractionnaire" pour exprimer en fait une dérivée d'ordre réel pourrait donc trouver son origine historique dans ce travail.

1822

Mentionnons ensuite le travail de Fourier qui, grâce à sa célèbre transformée, obtient une autre définition de la dérivée d'ordre réel. En composant la transformée de Fourier (réelle) d'une fonction f avec sa transformée inverse, Fourier retrouve l'identité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos(p(x-\alpha))d\alpha dp \tag{1.3}$$

Il remarque ensuite que la dérivée nième ($n \in N$) du terme en cos peut s'écrire comme :

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos(p(x-\alpha)) = p^n\cos[p(x-\alpha)+\frac{n\pi}{2}] \tag{1.4}$$

Le membre de droite garde un sens si on remplace n par $u > 0$, ce qui permet de définir la dérivée d'ordre u de $\cos(p(x-\alpha))$. En utilisant cette définition dans (1.3), Fourier obtient ainsi la dérivée d'ordre $u > 0$ de f :

$$\frac{d^u}{dx^u}f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)p^u\cos[p(x-\alpha)+\frac{u\pi}{2}]d\alpha dp \tag{1.5}$$

1823

Abel utilise le calcul fractionnaire pour résoudre le problème du tautochrone généralisé.

1832-37

Liouville est le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire, comme semblent l'attester les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837 . Partant de la relation

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{ax} = a^n e^{ax} \tag{1.6}$$

pour $n \in N$, il propose de l'étendre pour $\alpha \succ 0$, définissant ainsi la dérivée d'ordre α de e^{ax}.

Par conséquent toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x} \tag{1.7}$$

admet une dérivée d'ordre $\alpha \succ 0$ donnée par

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^n e^{a_k x} \tag{1.8}$$

Afin d'étendre cette définition à d'autres types de fonctions que (1.7), Liouville remarque que :

$$\forall \beta \succ 0, \forall x \succ 0, x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{-\beta} e^{-xu} du$$

À l'aide de (1.6), il trouve :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\beta)} u^{\alpha+\beta-1} e^{-xu} du$$

soit

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta} \tag{1.9}$$

Même si (1.2) et (1.9) concernent des exposants β différents, la limite $\beta = 0$ est problématique. Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{2}$,

- avec la définition d'Euler

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

Ce paradoxe est en fait résolu si on utilise les définitions modernes des dérivées fractionnaires.

On peut vérifier que la définition d'Euler correspond à la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Liouville à sa propre version moderne. Par exemple, pour $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$

$$\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Euler} x^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-y)^{-\alpha} y^\beta dy$$

$$\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Liouville} x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy$$

Comme il est signalé dans [57], ces définitions diffèrent en fait par les bornes de leurs intégrales.

Remarque L'expression

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy$$

est définie ici comme

$$\lim_{s \longrightarrow -\infty} \frac{d}{dx} \int_s^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy$$

1847

À partir d'une généralisation de la formule de Taylor, Riemann propose une définition d'intégrale fractionnaire :

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-y)^{-\alpha} f(y)dy + \psi(x)$$

où $\psi(x)$ est une fonction complémentaire qui le gênera en fait dans ses travaux ultérieurs. Elle sera finalement abandonnée pour donner la définition moderne de l'intégrale fractionnaire.

1867-68

Grünwald puis Letnikov proposent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie (opposée à infinitésimale) entre $f(x+h)$ et$f(x)$ divisée par h.

1869

L'expression définitive de ce qui est maintenant appelé intégrale fractionnaire de Riemann apparait pour la première fois dans le travail de Sonin. Pour une fonction complexe, en dérivant n fois la formule de Cauchy ($n \in N$), on obtient :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(y)}{(y-z)^{n+1}}dz$$

Sonin, en choisissant un chemin approprié d'intégration, généralise cette formule à $n < 0$. Il obtient finalement une définition de l'intégrale d'ordre $\alpha > 0$, que l'on notera par la suite ${}_a\mathcal{I}_x^\alpha$:

$${}_a\mathcal{I}_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)dy$$

1892

Heaviside fournit cette année-là la première application concrète du calcul fractionnaire (le tautochrone d'Abel relevant davantage du cas d'école) pour la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle :

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t) \tag{1.10}$$

La démarche d'Heaviside est loin d'être rigoureuse (elle ne sera justifiée qu'en 1919), mais fournit toutefois la bonne solution, il trouve que

$$T(x,t) = T_0 exp(-axp^{\frac{1}{2}})$$

Il suppose ensuite que $p^{\frac{1}{2}}T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{\pi t}} \ldots$ ce qui correspond en fait à la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$ de T_0! En développant la solution en série entière, il obtient finalement la solution exacte de (1.10).

1917

Weyl définit une intégrale fractionnaire adaptée aux fonctions périodiques.

1927

Marchaud introduit une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire :

$$D_{+}^{\alpha} f(x) = c \int_{0}^{\infty} \frac{\triangle_{t}^{l} f(x)}{t^{1+\alpha}} dt,$$

où $\alpha > 0$, $l \in N$ avec $l > \alpha$ et c est une constante de renormalisation. L'opérateur Δ_t^l est une différence finie d'ordre l (par exemple, $\Delta_t^l f(x) = f(x) - f(x-t)$). L'avantage d'une telle définition par rapport aux autres est qu'elle est moins restrictive quant à la régularité de$f$.

1928

Hardy et Littlewood étudient comment agit l'intégrale fractionnaire ${}_a\mathcal{I}_x^{\alpha}$ sur certaines classes de fonctions. En particulier, leur théorème majeur stipule que pour $0 < \alpha < 1$ et $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, ${}_a\mathcal{I}_x^{\alpha}$ est un opérateur borné de L^p dans L^q, où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p-\alpha}$.

1937

Riesz cherche à donner un sens à l'intégrale fractionnaire pour des fonctions à plusieurs variables. Il donne la définition suivante :

$$\mathcal{I}^{\alpha} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-\alpha}} dy$$

Cet opérateur vérifie notamment $\mathcal{I}^{\alpha} \circ \mathcal{I}^{\beta} = \mathcal{I}^{\alpha+\beta}$ et $\Delta \mathcal{I}^{\alpha+2} = -\mathcal{I}^{\alpha}$, où Δ est l'opérateur Laplacien.

1970

Dans [7] Oldham et Spanier traitent le problème du flux de chaleur à la surface d'un conducteur thermique. Ils montrent que lors d'un phénomène de diffusion, le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée $\frac{1}{2}$ du paramètre physique (température, concentration d'espèces chimique, potentiel électrique, etc). D'après l'historique de Ross reproduit dans [9], ce problème semble être à l'origine de l'extension du calcul fractionnaire hors du champ des mathématiques.

1974

Cette année-là se tient à l'Université de New Haven (Connecticut) la première conférence sur le calcul fractionnaire organisée par Ross.

1.2 Exemples d'application des systèmes fractionnaires

Les systèmes fractionnaires apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents champs de recherches. Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces systèmes et les applications en sciences de l'ingénieur restent encore peu développés. On peut noter que pour la majeure partie des domaines présentés ci dessous, les opérateurs fractionnaires sont utilisés pour prendre en compte des effets de mémoire. Mentionnons les ouvrages [37],[55] qui regroupent diverses applications du calcul fractionnaire.

1.2.1 Électricité

Grâce à des données expérimentales, Shmidt et Drumheller [8] montrent que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension. En effet, en utilisant un composé ($LiN_2H_5SO_4$) et en procédant à des mesures sur une large gamme de températures et de fréquences, ils constatent que les parties réelles et imaginaires de la susceptibilité ou encore, de la fonction diélectrique $\epsilon = \epsilon' + j\epsilon''$ sont très grandes ($\epsilon' \approx \epsilon'' \approx 1O^6$) et varient en fonction de la fréquence suivant un ordre de puissance $\frac{1}{2}$ (avec $\epsilon' \in \mathbb{R}$ et $\epsilon'' \in \mathbb{R}$).
Dans [8]-[43], nous trouvons la relation suivante, valable pour un composé ($LiN_2H_5SO_4$) :

$$\epsilon = \epsilon' w^{-\frac{1}{2}}(1-j) = \epsilon'\sqrt{2}(jw)^{-\frac{1}{2}}, \quad avec \quad j = \sqrt{-1}. \tag{1.11}$$

En utilisant la relation entre la fonction diélectrique et l'impédance, on obtient la relation suivante :

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{jwC_e\epsilon}, \tag{1.12}$$

où C_e est une constante. En substituant la relation (1.11) dans (1.12), on a

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{jwC_e\epsilon'\sqrt{2}(jw)^{-\frac{1}{2}}}, \tag{1.13}$$

qu'on peut éventuellement mettre sous la forme

$$\mathcal{Z} = \frac{K}{(jw)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{où } K = \frac{1}{\sqrt{2}C_e\epsilon'} \tag{1.14}$$

ou encore, en fonction de la variable de Laplace s :

$$\mathcal{Z} = \frac{K}{s^{\frac{1}{2}}} \tag{1.15}$$

L'équation (1.15) montre en effet que l'on peut bien définir une impédance fractionnaire de capacité, qui peut être fabriquée à partir de composition de matériaux spécifiques et par conséquent définir le terme "Fractor", par analogie au terme anglais "Capacitor", pour mettre l'accent sur le caractère fractionnaire de l'impédance. K désigne alors la constante du "Fractor" (capacité fractionnaire). La réalisation d'une impédance fractionnaire peut se faire par juxtaposition en série de cellules Résistance-Capacité (d'impédance traditionnelle)

1.2.2 Thermique : Diffusion et équation de la chaleur

L'exemple le plus simple de système fractionnaire est l'équation de la chaleur à une dimension spatiale, commandée aux bords. En opérant un bon choix de la variable de sortie, nous obtenons une dérivation d'ordre $\frac{1}{2}$. A partir de ce transfert, il n'est pas compliqué de construire un système physique idéalisé qui représente un transfert fractionnaire propre, à savoir un transfert d'ordre deux avec une dérivation d'ordre $\frac{3}{2}$. Cet exemple a été traité dans [16] et repris dans [43], [32], [34]. On rappelle que l'équation de la chaleur est donnée par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = c\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x), \quad t>0, \quad -\infty < x < 0, \tag{1.16}$$

où t est une variable scalaire libre symbolisant le temps, x une variable libre scalaire ou vectorielle, représentant l'espace et c une constante positive. Nous nous intéressons ici à l'équation de la chaleur à une dimension spatiale ; où la variable libre x est scalaire. Nous considérons les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$v(0,x) = 0, \qquad x < 0$$

$$v(t,0) = u(t), \qquad x = 0$$

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} v(t,x) = 0, \qquad t > 0$$

Nous supposons que u est une fonction de type exponentiel avec variation bornée presque partout (ceci garanti l'existence de la transformée de Laplace de v et la validité de la formule intégrale de la transformée inverse). Ainsi, le problème peut être résolu par passage dans le plan opérationnel. En utilisant la transformée de Laplace nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(s,x) &= \frac{s}{c}v(s,x), \quad pour \;\; x>0 \\ v(s,0) &= u(s). \end{aligned} \tag{1.17}$$

La solution formelle de (1.17) est

$$v(s,x) = c_1(s)\exp\Big(-x\sqrt{\frac{s}{c}}\Big) + c_2(s)\exp\Big(x\sqrt{\frac{s}{c}}\Big) \tag{1.18}$$

Pour $x > 0$,

$$\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) = \mathcal{L}\left\{\frac{x}{2\sqrt{\pi c}} t^{-\frac{2}{3}} \exp\left(\frac{x^2}{4ct}\right)\right\} \tag{1.19}$$

soit

$$v(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi c}} \int_0^t \tau^{-\frac{2}{3}} \exp\left(\frac{x^2}{4ct} u(t-\tau) d\tau\right) \tag{1.20}$$

D'une part, on vérifie que (1.20) est bien une solution de l'équation (1.16), d'autre part, à partir de (1.18), on déduit que :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(s,x) = \frac{1}{\sqrt{c}} s^{\frac{1}{2}} v(s,x)$$

et en particulier,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(s,0) = \frac{1}{\sqrt{c}} s^{\frac{1}{2}} u(s)$$

Si nous définissons comme variable de sortie

$$y(t) \triangleq \sqrt{c} \frac{\partial v}{\partial x}(t,0) \tag{1.21}$$

nous obtenons le transfert suivant :

$$y(s) = s^{\frac{1}{2}} u(s) \tag{1.22}$$

Ce qui permet d'établir le constat suivant : l'équation de transfert de la chaleur avec l'entrée u et la sortie y est donc une dérivation d'ordre $\frac{1}{2}$.

1.2.3 Acoustique

Pour certains instruments de musique à vent les pertes visco-thermique peuvent être modélisées efficacement à l'aide de dérivées fractionnaires temporelles [53].

1.2.4 Mécanique des milieux continus

La déformation des milieux continus (solides ou liquides) est souvent décrite à l'aide de deux tenseurs, celui des déformations noté ϵ_{ij} et celui des contraintes σ_{ij}. Certains matériaux, comme les polymères (gommes, caoutchouc,...), présentent un comportement intermédiaire entre caractères visqueux et élastiques, qualifié de visco-élastique. De tels systèmes peuvent être modélisés à l'aide de la relation suivante entre les deux tenseurs :

$$\sigma_{ij} = E\epsilon_{ij} + \eta \frac{d^\alpha}{T^\alpha} \epsilon_{ij}(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Cette loi est justifiée par Bagley et Torvik dans [14], [1] (pour $\alpha = \frac{1}{2}$). Dans [44], l'introduction de dérivée fractionnaire dans le cas de polymères est motivée par l'analyse suivante : à cause de la longueur des fibres, les déformations appliquées prennent du temps à être communiquées de proche en proche (la longueur des fibres, enroulées, étant bien supérieure à la distance géométrique). Elles sont progressivement amorties et induisent des effets de mémoire (l'état à l'instant t va dépendre des états antérieurs). Si la contrainte décroît comme $t^{-(1+\alpha)}$, elle pourra induire une dérivée fractionnaire d'ordre α. Cet opérateur permet ainsi de donner une description macroscopique simple (ne nécessitant que peu de paramètres) de phénomènes microscopiques complexes. Une présentation de la visco-élasticité via la dérivation fractionnaire est donnée dans [61].

Chapitre 2

Éléments de Calcul Fractionnaire

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, définitions relatives aux opérateurs d'ordre fractionnaire, l'exponentielle de Mittag-Leffler et d'autre notions dont on aura besoin dans la suite de notre travail. Nous commencerons par donner un aperçu historique sur le développement de la théorie de dérivation fractionnaire.

2.1 Bases mathématiques du calcul fractionnaire

2.1.1 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma, Bêta et Mittag-Leffler, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

La Fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma et qui généralise la notion du factoriel en la prolongeant aux valeurs réelles et complexes [5].

Définition 2.1.1. La fonction Gamma est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad Re(z) > 0. \tag{2.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty, \Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

Théorème 2.1.1. La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :

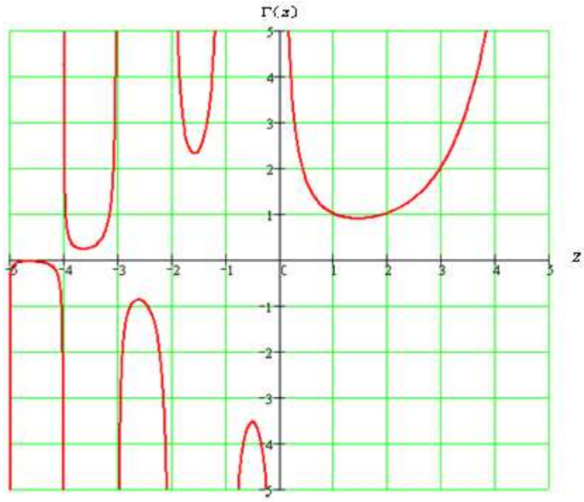


Fig.1 Allure de la fonction Gamma [REF]

1. La fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ tout entier.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties.

En particulier pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

et

$$\Gamma(z+m) \quad = \quad z(z+1)...(z+m-1)\Gamma(z). \tag{2.2}$$

En effet : En utilisant une intégration par partie

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^z dt \\ &= [-exp(-t)t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z\int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{z-1}dt \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

On a $\Gamma(1) = 1$ donc si on utilise cette formule pour $z = 1, 2, 3, ...$ il est facile de voir que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Les pôles de la fonction Γ sont $z = -n, \ n = 0, 1, 2, ...$ Pour plus d'informations sur la fonction Γ, voir [5].

La Fonction Bêta

Définition 2.1.2. La fonction Bêta est définie par :

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \tag{2.3}$$

avec $Re(z) > 0$ et $Re(w) > 0$.

Pour établir la relation entre les deux fonctions Gamma et Bêta, on utilise la transformée de Laplace .
On pose $h_{z,w}(t) = \int_0^t s^{z-1}(1-s)^{w-1}ds$. C'est la convolution de t^{z-1} et t^{w-1}, or $h_{z,w}(1) = \beta(z,w)$ avec la transformée inverse, on obtient

$$\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

et on a donc $\beta(z,w) = \beta(w,z)$.

La Fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle e^x, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [3] et désignée par la fonction suivante [6] :

$$E_\alpha(z) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha > 0.$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwa, et elle est définie par le développement en série entière suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

- Pour $\beta = 1$, on retrouve la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.
- Pour $\alpha = \beta = 1$, on retrouve la fonction exponentielle :

$$E_{1,1}(z) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

- Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, on retrouve la fonction : $E_{1,2}(z) = \frac{exp(z)-1}{z}$

D'une façon générale $E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\big(\exp(z) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!}\big)$
On a aussi les fonctions cos et sin hyperboliques sont des cas particuliers de la fonction de Mittag-Leffler :
$E_{2,1}(z^2) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{2k!} = \cosh(z)$ car $\Gamma(2k+1) = 2k!$
et $E_{2,2}(z^2) = \frac{1}{z}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}$.
Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue un rôle important . La figure Fig.1.4 montre le comportement de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres pour différentes valeurs de α et β exponentielle.

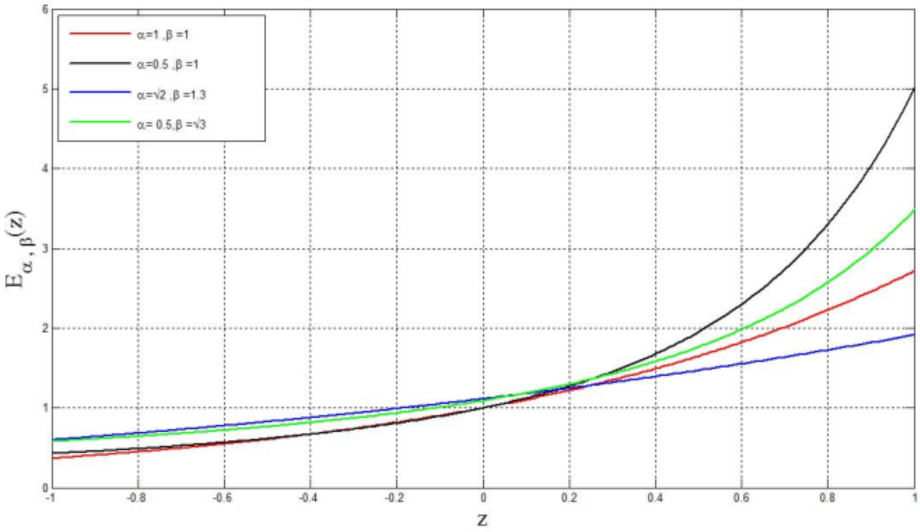


Figure 1.4 – La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres

2.1.2 Intégrale fractionnaire

Dans cette partie, on va introduire quelques propriétés et définitions qu'on va utiliser dans ce travail .

Nous commençons par donner les définitions d'intégrales fractionnaires les plus courantes. Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approche de Riemann pour proposer une première définition de l'intégrale fractionnaire.

Intégrale de Riemann-Liouville :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^N$, on note par ${}_aI_t^1$ la primitive de f qui s'annule en a est donnée par :

$$\forall t \in [a, b], \quad ({}_aI_t^1 f)(t) = \int_a^t f(s)ds.$$

Par itération, on obtient la seconde primitive de f :

$$\begin{aligned} ({}_aI_t^2 f)(t) &= ({}_aI_t^1 \circ_a I_t^1 f)(t) \\ &= \int_a^t \Big(\int_a^s f(\tau)d\tau \Big) ds, \end{aligned}$$

et par le théorème de Fubini on a :

$$\begin{aligned} ({}_aI_t^2 f)(t) &= \int_a^t \Big(\int_\tau^t ds \Big) f(\tau)d\tau \\ &= \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, par récurrence on montre que la $n^{ième}$ itération de ${}_aI_t^1$ est donnée par :

$$({}_aI_t^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds. \tag{2.4}$$

Et on a les remarques suivantes :

– La fonction ${}_aI_t^n f$ est l'unique fonction qui vérifie :

$$\begin{cases} ({}_aI_t^n f)^{(k)}(a) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1 \\ ({}_aI_t^n f)^{(n)} = f. \end{cases}$$

– La $n^{ième}$ itération de l'intégrale ${}_aI_t^1$ est appelée aussi intégrale à gauche d'ordre n de f, la dénomination "gauche" provient du fait que l'intégrale est évaluée à partir des valeurs à gauche ($s \leq t$) de f .

– Il est possible d'étendre la relation (2.4) à $n \in \mathbb{R}_+^*$ grâce à la fonction Gamma d'Euler comme suit :

Définition 2.1.3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'opérateur ${}_aI_t^\alpha$ défini sur $L_1[a,b]$ par :

$$ {}_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t \in [a,b]. \tag{2.5}$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α.

On peut écrire ${}_aI_t^\alpha$ sous la forme suivante :

$$ {}_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} f(t-s) ds, \quad t \in [a,b].$$

En écrivons l'intégrale $\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$ sous la forme :

$$\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(t-s)\phi_2(s) ds,$$

où

$$\phi_1(s) = \begin{cases} s^{\alpha-1}, & 0 < s < b-a \\ 0, & sinon \end{cases}$$

et

$$\phi_2(s) = \begin{cases} f(s), & a < s < b \\ 0, & sinon \end{cases}$$

On obtient

$$ {}_aI_t^\alpha f \in L_1[a,b],$$

en effet, ϕ_1 et ϕ_2 sont deux éléments de $L_1(\mathbb{R})$.

Théorème 2.1.2. Soit $f \in L_1[a,b]$ et $\alpha > 0$, l'intégrale ${}_aI_t^\alpha f(t)$ existe pour tout $t \in [a,b]$ et la fonction ${}_aI_t^\alpha f$ est un élément de $L_1[a,b]$.

Remarque 2.1.1.

Le tableau suivant montre pour quelles classes de fonctions cette définition a un sens et plus précisément quelles sont les images de ces ensembles par cet opérateur :

	f	${}_aI_t^\alpha f$	conditions
1.	$L^p([a,b])$	$L^q([a,b])$	$0<\alpha<1, \quad 1<p<\frac{1}{\alpha}, \quad 1\leq q\leq \frac{p}{1-\alpha p}$
2.	$L^1([a,b])$	$L^p([a,b])$	$0<\alpha<1, \quad 1\leq q\leq \frac{p}{1-\alpha}$
3.	$L^{\frac{1}{\alpha}}([a,b])$	$L^q([a,b])$	$0<\alpha<1, \quad q\geq 1$
4.	$L^p([a,b])$	$H^{\alpha-\frac{1}{p}}([a,b])$	$p>\frac{1}{\alpha}, \quad \alpha-\frac{1}{p}\in\mathbb{N}^*$
5.	$L^\infty([a,b])$	$H^\infty([a,b])$	
6.	$L^p([a,b])$	$H^p([a,b])$	$p\geq 1$
7.	$C^0([a,b])$	$C^0_+([a,b])$	
8.	$AC([a,b])$	$AC([a,b])$	

Exemple 2.1.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) \;=\; 1,$$

on a :

$$\begin{aligned} {}_aI_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[\frac{-(t-s)^\alpha}{\alpha}\Big]_a^t \\ &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$${}_aI_t^\alpha\Big(1\Big) \;=\; \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Exemple 2.1.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) \;=\; (t-a)^p,$$

on a :

$${}_aI_t^\alpha f(t) \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^p ds.$$

En posant $s=a+(t-a)u$, on obtient

$$\begin{aligned} {}_aI_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+p}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^p du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+p}B(p+1,\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}(t-a)^{\alpha+p}. \end{aligned}$$

- ***Composition des intégrales fractionnaires***

Si f est une fonction intégrable et bornée et si α et β sont deux réels strictement positifs, alors on a :

$$ {}_aI_t^\alpha\Big({}_aI_t^\beta f(t)\Big) \; = \; {}_aI_t^{\alpha+\beta} f(t) = {}_aI_t^\beta\Big({}_aI_t^\alpha f(t)\Big). \tag{2.6}$$

En effet,

on a :

$$\begin{aligned} {}_aI_t^\alpha\Big({}_aI_t^\beta f(t)\Big) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-a} s^{\alpha-1}\; {}_aI_t^\beta f(t-s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^{t-a} s^{\alpha-1}\int_0^{t-s}(t-s-u)^{\beta-1}f(u)duds. \end{aligned}$$

Comme $\begin{cases} 0\leq s\leq t-a \\ 0\leq u\leq t-s \end{cases}$, alors $\begin{cases} a\leq u\leq t \\ 0\leq s\leq t-u \end{cases}$

Par suite, on obtient

$$ {}_aI_t^\alpha\Big({}_aI_t^\beta f(t)\Big) \; = \; \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(u)du\int_0^{t-u} s^{\alpha-1}(t-u-s)^{\beta-1}ds.$$

En posant $s=\tau(t-u)$ on trouve

$$\begin{aligned} {}_aI_t^\alpha\Big({}_aI_t^\beta f(t)\Big) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(u)du\int_0^1(\tau(t-u))^{\alpha-1}(t-u-\tau(t-u))^{\beta-1}(t-u)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t(t-u)^{\alpha+\beta-1}f(u)du\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t(t-u)^{\alpha+\beta-1}f(u)duB(\alpha,\beta) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t(t-u)^{\alpha+\beta-1}f(u)du \\ &= {}_aI_t^{\alpha+\beta}f(t). \end{aligned}$$

- ***Intégrale fractionnaire à droite***

On peut remarquer que l'integrale

$$({}_bI_t^1 f)(t) \; = \; \int_b^t f(s)ds = -\int_t^b f(s)ds,$$

est aussi une primitive de f, qui s'annule en b et fait intervenir les valeurs à droite de f. A partir de la relation

$$\int_b^t (t-s)^{n-1}f(s)ds \; = \; (-1)^n\int_t^b(s-t)^{n-1}f(s)ds,$$

on pourrait définir de la même manière que précédemment l'intégrale à droite d'ordre n de f par :

$$({}_bI_t^n f)(t) \;=\; \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_t^b (s-t)^{n-1} f(s)ds.$$

Et de même que l'intégrale fractionnaire à gauche, La fonction ${}_bI_t^n f$ est l'unique fonction qui vérifie :

$$\begin{cases} ({}_bI_t^n f)^{(k)}(b) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1 \\ ({}_bI_t^n f)^{(n)} = f. \end{cases}$$

Définition 2.1.4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'opérateur ${}_bI_t^\alpha$ défini sur $L_1[a,b]$ par :

$$ {}_bI_t^\alpha f(t) \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad t \in [a,b], \tag{2.7}$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α.

On signale içi que la plupart des travaux sur cette théorie utilisent souvent les définitions "à gauche", et que les définitions "à droite" sont rarement utilisées car elles sont anti-causales (vue qu' elles dépendent du futur des fonctions car le s dépasse t).

2.1.3 Dérivée fractionnaire

L'idée principale de différentiation et d'intégration d'ordre arbitraire est la généralisation d'intégration et de différentiation itérées. Dans toutes ces approches le but général est le même : "remplacer" la valeur entière du paramètre n d'une opération notée, par exemple, par le symbole $\frac{d^n}{dt^n}$ par un paramètre n non-entier. Les autres détails varient : classes de fonctions, méthodes de "remplacement" de n par p, quelques propriétés des valeurs non-entières de p, mais il est évident que tous les efforts sont faits pour le remplacement d'un entier n par un non-entier p.

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire. Nous allons évoquer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

2.1.3.1 Dérivée fractionnaire séquentielle

Ce type de dérivée fractionnaire est moins bien connu, mais qui peut être de grande importance pour plusieurs applications. Cette approche est basée sur l'observation que, en fait, une différentiation du n- iéme ordre est tout simplement une série de différentiations de premier ordre :

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}...\frac{d}{dt}}_{n} f(t) \tag{2.8}$$

S'il y a une méthode convenable pour "le remplacement" de la dérivée du premier ordre $\frac{d}{dt}$ par la dérivée D^α d'ordre non-entier, où $0 \leq \alpha \leq 1$, alors il serait possible de considérer l'analogue de (2.8) suivant :

$$D^{n\alpha} f(t) = \underbrace{D^\alpha D^\alpha ... D^\alpha}_{n} f(t) \tag{2.9}$$

K.S. Miller et B. Ross ont appelé la différentiation généralisée définie par (2.9), où D^α est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, différentiation séquentielle et ont considéré des équations différentielles avec dérivées fractionnaires séquentielles du type (2.9) dans leur livre . Autres mutations des dérivées fractionnaires séquentielles peuvent être obtenues en interprétant D^α comme la dérivée de Grünwald-Letnikov, la dérivée de Caputo ou tout autre type de dérivée fractionnaire qui ne sont pas considérées ici. Au lieu de (2.9), il est possible de remplacer chaque dérivée de premier ordre dans (2.9) par des dérivées fractionnaires d'ordres qui ne sont pas nécessairement égaux, et de considérer l'expression la plus générale :

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} ... D^{\alpha_n} f(t), \\ \text{où} \qquad \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \end{aligned} \tag{2.10}$$

qu'on appellera aussi la dérivée fractionnaire séquentielle. Dépendant du problème, le symbole D^α dans (2.10) peut signer l'opérateur de différentiation généralisé de Riemann-Liouville, de Caputo ou tout autre mutation. De plus, de ce point de vue, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo ne sont aussi que des cas particuliers de la dérivée séquentielle (2.10).
En effet, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville peut s'écrire comme

$$D_t^p f(t) = \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}...\frac{d}{dt}}_{n} D_t^{-(n-p)} f(t), \qquad (n-1 \leq p < n), \tag{2.11}$$

quant à l'opérateur différentiel de Caputo il peut s'écrire comme

$$D_t^p f(t) = D_t^{-(n-p)} \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}...\frac{d}{dt}}_{n}, \qquad (n-1 \leq p < n), \tag{2.12}$$

Les propriétés des dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo du même ordre cumulatif p sont différentes, dûe à la différente suite d'opérateurs différentiels $\frac{d}{dt}$ et $D_t^{-(n-p)}$.
Dans le cas de l'approche de Grünwald-Letnikov et dans celle de Riemmann-Liouville on sait que, pour les intégrales fractionnaires, il est toujours vrai que

$$D_t^p f(t) D_t^q = D_t^p D_t^q f(t) = D_t^{p+q} f(t) \qquad (p < 0, q < 0). \tag{2.13}$$

A cause de ça, on ne voit pas la raison de considérer des opérateurs séquentiels d'intégrale. Toutefois, dans le cas général, la propriété (2.13) n'est pas vraie pour $p > 0$ et/ou $q > 0$ (ceci explique la différence entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo). Et donc, seulement la considération des opérateurs de dérivée fractionnaire séquentielle pourrait avoir d'intérêt et peut donner de nouveaux résultats. D'autre part, les dérivées fractionnaires séquentielles peuvent apparaître d'une manière naturelle dans la formulation de plusieurs problèmes appliqués en physique et en science appliquée.
En effet, des équations différentielles modélisant des processus ou des objets se présentent souvent comme un résultat de substitution d'une relation faisant apparaître des dérivées en une autre relation. Si les dérivées dans les deux relations sont des dérivées fractionnaires, alors l'expression résultante (équation) contiendra, dans le cas général, des dérivées fractionnaires séquentielles. Il est important de mentionner que les opérateurs intégro-différentiels fractionnaires de la forme (2.10), avec $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$,..., $\alpha_n > 0$ ont été d'abord considérés, dans différents contextes, par M. M. Dzhrbashyan Intégrales et dérivées fractionnaires et A. B. Nersesyan au moins depuis 1958. Les dérivées fractionnaires séquentielles sont appelées aussi dérivées fractionnaires de Miller-Ross parce qu'elles mettent en évidence la différence entre la différentiation de Riemann-Liouville et la différantiation fractionnaire séquentielle.

2.1.3.2 Approche de Grünwald-Letnikov :

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par des différences finies.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$. Notons T_h l'opérateur de translation à gauche défini comme suit :

$$T_h f(t) = f(t-h).$$

On a donc

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(id - T_h)f(t).$$

Ainsi $T_h^2 f(t) = f(t-2h)$, (en notant $T_h^2 = T_h \circ T_h$)
par suite,

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}(id - T_h)\right)^2 f(t) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}(id - 2T_h + T_h^2)f(t) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}(f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)). \end{aligned}$$

Et par la formule de Newton, on obtient la dérivée $n^{ième}$ de f

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}(id - T_h)^n f(t) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} id^{n-k}(-T_h)^k f(t) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} f(t-kh), \end{aligned}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Une généralisation naturelle de cette formule consiste à définir la dérivée d'ordre α non entier, (avec $0 \le n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$) par

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}f(t-kh).$$

Comme

$$(-1)^k\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1) = (-\alpha)(1-\alpha)...(k-\alpha-1),$$

et que pour $\alpha > 0$ non entier $\Gamma(-\alpha)$ est bien défini et

$$\frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(-\alpha)} = (-\alpha)(1-\alpha)...(k-\alpha-1).$$

On obtient ainsi, la formule de Grünwald-Letnikov pour $\alpha > 0$ non entier.

Définition 2.1.5. Soit $\alpha > 0$. La dérivée de Grünwald-letnikov d'ordre α est définie par :

$$D^\alpha_{GL} f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)}f(t-kh), \tag{2.14}$$

et

$$D^{-\alpha}_{GL} f(t) = \lim_{h\to 0} h^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)}f(t-kh). \tag{2.15}$$

Il est à noter que la relation (2.14), due à Liouville (1832), puis Grünwald (1863) et Letnikov (1868), est très utilisée pour calculer numériquement une dérivée fractionnaire, et que dans cette relation les nombres $\Gamma(-\alpha+k)$ ne sont pas nuls et que la dérivée fractionnaire d'ordre α pour $0 < \alpha < 1$ dépend de tout le passé, contrairement à la dérivée usuelle (d'ordre $\alpha = 1$) qui ne dépend que de ce qui se passe au voisinage immédiat du point de calcul.

Remarque 2.1.2.

Si f est de classe C^n, alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$$ {}_aD^{\alpha}_{GL}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds, \quad (2.16) $$

$$ {}_aD^{-\alpha}_{GL}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(s)ds. \quad (2.17) $$

Exemple 2.1.3. 1. Soit α non entier avec $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $f(t) = C$ une fonction constante, on a

$$ \begin{aligned} {}_aD^{\alpha}_{GL}f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds \\ &= \frac{C(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds. \end{aligned} $$

Ce qui implique que

$$ {}_aD^{\alpha}_{GL}C = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}C $$

En général, la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est nulle ni constante.

2. Calculons maintenant la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov, de la fonction $g(t) = (t-a)^p$.

Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour la convergence de l'intégrale (2.16) on a besoin à ce que $p > n-1$.

On a $g^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., n-1$ et $g^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-n}$, d'où

$$ {}_aD^{\alpha}_{GL}(t-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{p-n}ds. $$

En posant $s = a + \tau(t-a)$, on obtient

$$ \begin{aligned} {}_aD^{\alpha}_{GL}(t-a)^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha} \int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{p-n}ds \\ &= \frac{\Gamma(p+1)B(n-\alpha, p-n+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha}. \end{aligned} $$

D'où

$$ {}_{a}D^{\alpha}_{GL}(t-a)^{p} \;=\; \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha}. \tag{2.18} $$

En particulier

$$ {}_{a}D^{\alpha}_{GL}(t-a)^{\alpha} = \Gamma(\alpha+1). $$

- ***Composition avec les dérivées d'ordre entier***

Soit $m \in \mathbb{N}$ et α non entier, on a :

$$ \star \quad \frac{d^m}{dt^m}\Big({}_{a}D^{\alpha}_{GL} f(t)\Big) \;=\; {}_{a}D^{m+\alpha}_{GL} f(t). $$

$$ \star \quad {}_{a}D^{\alpha}_{GL}\Big(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\Big) \;=\; {}_{a}D^{m+\alpha}_{GL} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k-m}}{\Gamma(-\alpha+k-m+1)}. $$

En effet,

pour $m \in \mathbb{N}$ et α non entier avec $n-1<\alpha<n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$ \begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m}\Big({}_{a}D^{\alpha}_{GL} f(t)\Big) &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-(\alpha+m)+k}}{\Gamma(-(\alpha+m)+k+1)} + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(\alpha+m))}\int_a^t (t-s)^{n+m-(\alpha+m)-1} f^{(n+m)}(s)ds \\ &= {}_{a}D^{m+\alpha}_{GL} f(t). \end{aligned} $$

Pour l'autre inégalité, on a

$$ \begin{aligned} {}_{a}D^{\alpha}_{GL}\Big(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\Big) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(m+k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(m+n)}(s)ds \\ &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{(-\alpha+m)+k}}{\Gamma((-\alpha+m)+k+1)} + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(\alpha+m))}\int_a^t (t-s)^{n+m-(\alpha+m)-1} f^{(m+n)}(s)ds \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-m+k}}{\Gamma(-\alpha-m+k+1)} \\ &= {}_{a}D^{\alpha+m}_{GL} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-m+k}}{\Gamma(-\alpha-m+k+1)}. \end{aligned} $$

Cas particulier : Si $f^k(a)=0$ pour $k=0,1,...,m-1$, on a

$$ {}_{a}D^{\alpha}_{GL}\Big(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\Big) = \frac{d^m}{dt^m}\Big({}_{a}D^{\alpha}_{GL} f(t)\Big). $$

C'est à dire que la dérivation fractionnaire et la dérivation usuelle commute dans ce cas.

$\triangleright$ Dans le but de calculer ${}_aD^p_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big)$, on sépare les deux cas : $q<0$ et $q>0$ Dans le cas où $q<0$ et $p<0$, on applique l'intégration d'ordre $-p>0$ à l'intégration d'ordre $-q>0$, et dans le cas où $q<0$ et $p>0$, c'est la dérivation fractionnaire d'ordre $p>0$ qu'on applique à l'intégration d'ordre $-q>0$ et de même pour les deux autres cas.

- ***Composition avec les dérivées d'ordres fractionnaires***

$\triangleright$ Si $q<0$ et $p\in\mathbb{R}$, alors

$${}_aD^p_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big) ={}_a D^{p+q}_{GL}f(t)$$

$\triangleright$ Si $0\le m-1<q<m$ et $p<0$, alors

$${}_aD^p_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big) ={}_a D^{p+q}_{GL}f(t).$$

si et seulement si $f^k(a)=0$ pour $k=0,1,...,m-2$.

$\triangleright$ Si $0\le m-1<q<m$ et $0\le n-1<p<n$, alors

$${}_aD^p_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big) ={}_a D^q_{GL}\Big({}_aD^p_{GL}f(t)\Big) ={}_a D^{p+q}_{GL}f(t).$$

si et seulement si $f^k(a)=0$ pour $k=0,1,...,r-2$ avec $r=max(m,n)$.

En effet,

$\triangleright$ cas où $p<0$ et $q<0$:

$$\begin{aligned}
{}_aD^p_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big) &= \frac{1}{\Gamma(-p)}\int_a^t (t-s)^{-p-1}({}_aD^q_{GL}f(s))ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)}\frac{1}{\Gamma(-q)}\int_a^t (t-s)^{-p-1}\int_a^s (s-\tau)^{-q-1}f(\tau)d\tau ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)}\frac{1}{\Gamma(-q)}\int_a^t f(\tau)d\tau\int_a^s (s-\tau)^{-q-1}(t-s)^{-p-1}ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(-(p+q))}\int_a^t (t-\tau)^{-p-q-1}f(\tau)d\tau\\
&= {}_aD^{p+q}_{GL}f(t).
\end{aligned}$$

$\triangleright$ cas où $q<0$ et $0\le n-1<p<n$ on a $p=n+(p-n)$ avec $p-n<0$:

$$\begin{aligned}
{}_aD^p_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big) &= \frac{d^n}{dt^n}\Big({}_aD^{p-n}_{GL}({}_aD^q_{GL}f(t))\Big)\\
&= \frac{d^n}{dt^n}\Big({}_aD^{q+p-n}_{GL}f(t))\Big)\\
&= {}_aD^{p+q}_{GL}f(t).
\end{aligned}$$

$\triangleright$ cas où $0\le m-1<q<m$ et $p<0$:

$${}_aD^q_{GL}f(t) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-q+k}}{\Gamma(-q+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(m-q)}\int_a^t (t-s)^{m-q-1}f^{(m)}(s)ds,$$

et $(t-a)^{k-q}$ ont des singularités non intégrables donc ${}_aD^p_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big)$ n'existe que si $f^{(k)}(a)=0$ pour tout $k=0,1,...,m-2$ et dans ce cas on a :

$$ {}_aD^q_{GL}f(t) = \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-q-1}}{\Gamma(m-q)} + {}_aD^{q-m}_{GL}f^{(m)}(t), $$

Alors d'aprés la relation (2.18) et le premier point de cette proposition (puisque $p<0$ et aussi $q-m<0$), on a

$$ \begin{aligned} {}_aD^p_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big) &= \frac{f^{(m-1)}(a)\Gamma(m-q)(t-a)^{m-q-1-p}}{\Gamma(m-q)\Gamma(m-q-p)} + {}_aD^{p+q-m}_{GL}f^{(m)}(t) \\ &= \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-q-1-p}}{\Gamma(m-q-p)} + {}_aD^{p+q-m}_{GL}f^{(m)}(t). \end{aligned} $$

D'après la remarque 1.2.2, ona

$$ \begin{aligned} {}_aD^p_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big) &= \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{-(q+p)+m-1}}{\Gamma(-(q+p)+m)} + \\ & \quad \frac{1}{\Gamma(-(q+p)+m)}\int_a^t (t-s)^{-(q+p)+m-1}f^{(m)}(s)ds \\ &= {}_aD^{p+q}_{GL}f(t). \end{aligned} $$

▷ cas où $0\leq m-1<q<m$ et $0\leq n-1<p<n$:

D'après ce qui précède on a :

$$ {}_aD^p_{GL}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\Big({}_aD^{p-n}_{GL}f(t)\Big). $$

Par suite,

$$ {}_aD^p_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big) = \frac{d^n}{dt^n}\Big({}_aD^{p-n}_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big)\Big). $$

D'autre part, si $f^k(a)=0$ pour $k=0;1;...;m-2$, par le cas précédent, on a :

$$ {}_aD^{p-n}_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big) = {}_aD^{p+q-n}_{GL}f(t), $$

Par suite :

$$ \begin{aligned} {}_aD^p_{GL}\Big({}_aD^q_{GL}f(t)\Big) &= \frac{d^n}{dt^n}\Big({}_aD^{p+q-n}_{GL}f(t)\Big) \\ &= {}_aD^{p+q}_{GL}f(t) \end{aligned} $$

2.1.3.3 Approche de Riemann-Liouville :

Définition 2.1.6. Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1\leq p<n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$ \begin{aligned} {}^R_aD^p_tf(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-p-1}f(s)ds,, \\ &= \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-p}f(t)) \end{aligned} $$

Remarque 2.1.3. Si f est de classe C^n alors en faisant des intégrations par parties et des différentiations répétées on obtient :

$$\begin{aligned}{}_a^R D_t^p f(t) &= \sum_0^{n-1} \frac{f^{(k)}(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-s)^{n-p-1} f(s) ds \\ &= {}_a^G D_t^p f(t)\end{aligned}$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

Exemple 2.1.4. La dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville d'une constante, est non nulle. Si $f(t) = C$ et $0 < \alpha < 1$, alors

$$\begin{aligned}{}_a^R D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-p)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-p)} \frac{d}{dt} \frac{(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-p)} \frac{1}{t^\alpha} \neq 0\end{aligned}$$

$ii)$ Calculons la dérivée fractionnaire ${}_a^R D_t^p (t-a)^\nu$:
Soit $0 \leq m < p < m+1$ et $\nu > m$ on a la fonction $t \longrightarrow (t-a)^\nu$ est de classe C^m, donc,

$$ {}_a^R D_t^p (t-a)^\nu ={}_a^G D_t^p (t-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-p+1+\nu)} (t-a)^{\nu-p}$$

Composition avec les dérivées d'ordre entier :

Proposition 2.1.1. Pour m entier positif et p non entier on a :

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}({}_a^R D_t^p f(t)) &= {}_a^R D_t^{n+p} f(t) \\ {}_a^R D_t^p (\frac{d^n}{dt^n} f(t)) &= {}_a^R D_t^{n+p} f(t) - \sum_0^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}\end{aligned}$$

On déduit alors que la différentiation fractionnaire et la différentiation conventionnelle ne commutent que si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Composition avec les dérivées fractionnaires

Proposition 2.1.2. Soit $n-1 \leq p < n$ et $m-1 \leq q < m$ alors :

$$ {}_a^R D_t^p ({}_a^R D_t^q f(t)) ={}_a^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^{m} [{}_a^R D_t^{q-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(-p-k+1)}$$

et

$${}^{R}_{a}D^{q}_{t}({}^{RL}_{a}D^{p}_{t}f(t)) ={}^{RL}_{a} D^{p+q}_{t}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[{}^{R}_{a}D^{p-k}_{t}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)}$$

Par suite deux opérateurs de dérivations fractionnaires ${}^{R}_{a}D^{p}_{t}$ et ${}^{R}_{a}D^{q}_{t}$ ne commutent que si $p = q$ et $[{}^{R}_{a}D^{p-k}_{t}f(t)]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, ..., n$ et $[{}^{R}_{a}D^{q-k}_{t}f(t)]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, ..., m$.

2.1.3.4 Approche de Caputo

Dans la modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = a$. Une certaine solution de ce problème a été proposée par M.Caputo.

Définition 2.1.7. Soit $p \geq 0$ (avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$) f est une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n}f \in L_1[a, b]$. La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned} {}^{C}_{a}D^{p}_{t}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-p-1}f^{n}(s)ds, \\ &= I^{n-p}\Big(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\Big) \end{aligned}$$

Relation avec la dérivée de Riemann Liouville :

Soit $p \geq 0$ (avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$) supposons que f est une fonction telle que ${}^{R}_{a}D^{p}_{t}$ et ${}^{C}_{a}D^{p}_{t}$ existent alors :

$${}^{C}_{a}D^{p}_{t}f(t) ={}^{RL}_{a} D^{p}_{t}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on aura

$${}^{C}_{a}D^{p}_{t}f(t) ={}^{R}_{a} D^{p}_{t}f(t)$$

Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :

Si f est continue on a :

${}^{C}_{a}D^{p}_{t}(I^{p}f(t) = f(t)$ et $I^{p}({}^{C}_{a}D^{p}_{t}f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!}$

Alors l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse droite.

Exemple 2.1.5. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo.
La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$$ {}_a^C D_t^p C = 0 $$

2.1.3.5 Propriétés des dérivées fractionnaires :

On rappelle des propriétés utiles dans les applications
La linéarité :.
Similaire au dérivation ordinaire, les dérivées fractionnaires sont des opérateurs linéaires :

$$ D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t) $$

où D^p dénote toute mutation de dérivation fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann Liouville.
La régle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire :
Considérons deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, donc la dérivée du produit $f(t)g(t)$ pour n un nombre entier vaut :

$$ \frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t) $$

la généralisation de cette formule nous donne :

$$ D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t) - R_n^p(t) $$

où $n \geq p+1$ et $R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi)(\tau - \xi)^n d\xi$.
D^p est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann Liouville.

2.1.3.6 La dérivée conforme :

Définition 2.1.8. Soit $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $t > 0$. On définit la dérivée de f en t par $\frac{df}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$. Alors, on a $\frac{d}{dt} t^n = n t^{n-1}$.

La question est donc la suivante : peut-on mettre une définition similaire pour la dérivée fractionnaire d'ordre α, où $0 < \alpha \leq 1$?. Ou en général pour $\alpha \in (n, n+1]$ où $n \in \mathbb{N}$.
On note T_α pour désigner l'opérateur qui s'appelle la dérivée fractionnaire d'ordre α.

Propriétés 2.1.1. Pour $\alpha = 1$, T_1 satisfait les propriétés suivantes :

(i) $T_1(af + bg) = aT_1(g) + bT_1(f)$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définit sur $\mathbb{R}$.

(ii) $T_1(t^p) = pt^{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

(iii) $T_1(fg) = fT_1(g) + gT_1(f)$.

(iv) $T_1(\frac{f}{g}) = \frac{gT_1(f) - fT_1(g)}{g^2}$.

(v) $T_1(\lambda) = 0$, pour toutes les fonctions constantes $f(t) = \lambda$.

Maintenant, nous présentons une nouvelle définition, qui est la définition la plus simple, la plus naturelle et la plus efficace de la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in (0, 1]$. Il convient de noter que la définition peut être généralisée pour α. Alors que le cas de $\alpha \in (0, 1]$ est le plus important, et une fois qu'il est établi, les autres cas sont simples.

Définition 2.1.9. ([74]). Soit la function $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. La dérivée fractionnaire conforme de f d'ordre α est définie par :

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{2.19}$$

pour tout $t > 0, \alpha \in (0, 1)$.

Si f est α-différentiable dans $(0, a)$, $a > 0$, et $\lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ existe, on définit

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t).$$

Nous écrirons parfois $f(\alpha)(t)$ pour $T_\alpha(f)(t)$, pour désigner les dérivées fractionnaires conformes de f d'ordre α. D'autre part, si la dérivée fractionnaire conforme de f d'ordre α existe, alors nous disons simplement f est α-différentiable.

Nous remarquons que $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$. De plus, notre définition coïncide avec les définitions classiques de R-L et de Caputo sur les polynômes.

En conséquence de la définition ci-dessus, nous obtenons le théorème très utile suivant.

Théorème 2.1.3. [74]. Si la fonction $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ est α-différentiable en $t_0 > 0, \alpha \in (0, 1]$, alors f est continue en t_0.

Démonstration. Comme, étant donné que $f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \varepsilon$.

Soit $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$. Alors,

$$\lim_{h \to 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0).0,$$

ce qui implique que

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) = f(t_0).$$

Par conséquent, f est continue en t_0. $\square$

On peut facilement montrer que T_α satisfait toutes les propriétés du théorème suivant.

Théorème 2.1.4. ([74]). Soit $\alpha \in (0,1]$ et f, g deux fonctions α-différentiable en un point $t > 0$. Alors

(1) $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

(2) $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

(3) $T_\alpha(\lambda) = 0$, pour tout les fonctions constantes $f(t) = \lambda$.

(4) $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.

(5) $T_\alpha(\frac{f}{g}) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g_2}$.

(6) Si, de plus, f est différentiable, alors $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t)$.

Démonstration. Les parties (1) à (3) découlent directement de la définition. Nous choisissons de prouver (4) et (6) uniquement .

Fixons $t > 0$,

$$\begin{aligned}
T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} . g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \Big) + f(t) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= T_\alpha(f)(t) \lim_{\varepsilon \to 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha)}) + f(t)T_\alpha(g)(t).
\end{aligned}$$

Puisque g est continue en t, $\lim_{\varepsilon \to 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$. Ceci termine la preuve de (4).

On peut montrer (5) de la même manière .

Prouvons (6), soit $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ dans la définition 2.1.9, puis $\varepsilon = t^{1-\alpha}h$. Alors,

$$\begin{aligned}
T_\alpha(f)(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}} \\
&= t^{1-\alpha} \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} \\
&= t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.1.3. ([74]). (Dérivée fractionnaire conforme de quelques fonctions)

(1) $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

(2) $T_\alpha(1) = 0$.

(3) $T_\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}, c \in \mathbb{R}$.

(4) $T_\alpha(\sin bx) = bx^{1-\alpha} \cos bx, b \in \mathbb{R}$.

(5) $T_\alpha(\cos bx) = -bx^{1-\alpha} \sin bx, b \in \mathbb{R}$.

(6) $T_\alpha(\frac{1}{\alpha}t^\alpha) = \frac{1}{\alpha}t^\alpha$.

Cependant, il convient de noter les dérivées fractionnaires conformes de quelques fonctions suivantes :

(i) $T_\alpha(sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha) = cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha$.

(ii) $T_\alpha(cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha) = -sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha$.

(iii) $T_\alpha(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$.

Remarque 2.1.4. Il faut remarquer qu'une fonction pourrait être α-différentiable à un moment donné mais non différentiable, par exemple, $f(t) = 2\sqrt{t}$.
Alors $T_{\frac{1}{2}}(f)(0) = \lim_{t\to 0^+} T_{\frac{1}{2}}(f)(t) = 1$, où $T_{\frac{1}{2}}(f)(t) = 1$, pour $t > 0$. Mais $T_1(f)(0)$ n'existe pas. Ce n'est pas le cas pour les dérivées fractionnaires classiques connus.

Bien que le cas le plus important pour α soit $(0, 1)$, mais si $\alpha \in (n, n + 1]$ pour un nombre naturel n . Quelle serait la définition ?.

Définition 2.1.10. ([74]). Soit $\alpha \in (n, n + 1]$, et f n-différentiable en t, où $t > 0$. La dérivée fractionnaire conforme de f d'ordre α est définit par

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{f^{(\ulcorner\alpha\urcorner-1)}(t + \varepsilon t^{(\ulcorner\alpha\urcorner-\alpha)}) - f^{(\ulcorner\alpha\urcorner-1)}(t)}{\varepsilon}$$

où $\ulcorner\alpha\urcorner$ est le plus petit entier supérieur ou égal à α.

Remarque 2.1.5. Comme conséquence de Définition 2.1.10, on peut constater que

$$T_\alpha(f)(t) = t^{(\ulcorner\alpha\urcorner-\alpha)})) f^{\ulcorner\alpha\urcorner}(t)$$

où $\alpha \in (n, n + 1]$, et f est $(n + 1)$-différentiable en $t > 0$.

Cependant, cette définition permet de prouver des théorèmes de base de l'analyse comme le théorème de Rôlle et le théorème des valeurs intermédiaire.

Théorème 2.1.5. ([74]). (Théorème de Rôlle pour les fonctions différentiables fractionnaires conformes). Soit $a > 0$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaite :

(i) f est continue sur $[a, b]$,

(ii) f est α-différentiable pour tout $\alpha \in (0, 1)$,

(iii) $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in (a, b)$, tel que $f^{(\alpha)}(c) = 0$.

Théorème 2.1.6. ([74]). (Théorème des valeurs intermédiaire pour les fonctions différentiables fractionnaires conformes). Soit $a > 0$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaite

(i) f est continue sur $[a, b]$.

(ii) f est α-différentiable pour tout $\alpha \in (0,1)$.
Alors, il existe $c \in (a,b)$, tel que $f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}$.

Démonstration. Considérons la fonction

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}} - \big(\frac{1}{\alpha}x^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}\big).$$

Alors, la fonction g satisfait aux conditions du théorème de Rôlle. Il existe donc $c \in (a,b)$, tel que $g^{(\alpha)}(c) = 0$. En utilisant le fait que $T_{\alpha}(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}) = 1$, on obtient le résultat désiré. □

2.2 Transformée de Laplace

1. S'il existe deux constantes positives M et T telles que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pour $t > T$ (c'est à dire que f est d'ordre exponentiel α) alors la fonction F de la variable complexe s définie par :

$$F(s) = L(f(t))(s) = \int_{0}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction f.

2. A partir de la transformée F, on peut avoir f à l'aide de la transformée de Laplace inverse

$$f(t) = L^{-1}(F(s))(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)ds, \quad c = Re(s).$$

3. La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions f et g est donnée par la formule suivante :

$$L(f(t) * g(t); s) = F(s)G(s).$$

sous l'hypothèse que les fonctions $F(s)$ et $G(s)$ existent.

4. La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n d'une fonction f est :

$$L\{f^{(n)}(t); s\} \quad = \quad s^{n}F(s) - \Sigma_{k=0}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0). \tag{2.20}$$

2.3 Théorèmes de point fixe

Nous aurons besoin des théorèmes de point fixe suivants :

Définition 2.3.1. Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$, un opérateur linéaire, on dit que T est compact si pour tout B_u, on a $T(B_u)$ est relativement compacte avec

$$B_u = \{x \in X, ||x|| \leq u\}.$$

Remarque 2.3.1. L'ensemble $\{Tx/x \in X\}$, est dit relativement compacte dans X si son adhérence est compact.

Théorème 2.3.1. (Théorème d'Arzèla- Ascoli)
Soit I un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Un sous ensemble A de $C(I;X)$, est dit relativement compacte dans $C(I;X)$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :
i) A est uniformément borné, c'est-à-dire

$$\exists k > 0, \forall f \in A \quad on\ a \quad ||f||_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| \leq k.$$

ii) A est équicontinue, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon, \forall x_1, x_2 \in I, \forall f \in A \quad telle\ que \quad (|x_1 - x_2| < \delta_\epsilon) \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Théorème 2.3.2. (Théorème du point fixe de Banach)
Soit $(U;d)$ un espace métrique, complet et soit $T : U \longrightarrow U$ une application telle que

$$\forall x, y \in U, d(T(x), T(y)) \leq kd(x,y) \quad avec \quad k \in [0,1[,$$

alors l'application T admet un unique point fixe $u^* \in U$.

Théorème 2.3.3. (Alternative non linéaire de Leray-Schauder)
Soit X un espace de Banach et $\mathfrak{F} : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continu (i.e. sa restriction à tout borné de X est un compact) et soit

$$P(\mathfrak{F}) = \{x \in X : x = \lambda \mathfrak{F} x, 0 < \lambda < 1\} :$$

Alors, $P(\mathfrak{F})$ est non borné ou bien $\mathfrak{F}$ admet au moins un point fixe.

Définition 2.3.2. On dit qu'une fonction f est complètement continue si elle transforme les sous ensembles bornés en sous ensembles relativement compacts.

Chapitre 3

Résultats d'existence de la solution d'une équation intégro-différentielle fractionnaire hybride

Introduction :

Les perturbations quadratiques des équations différentielles non linéaires ont attiré l'attention de plusieurs auteurs. les équations différentielles perturbées de cette façon sont appelés équations différentielles hybrides. Cette théorie était l'objet de nombreux travaux, nous référons les lecteurs aux travaux [49, 62, 25, 46, 54, 52].
La théorie de l'existence de telles équations hybrides peut être développée en utilisant la théorie des points fixes hybrides, voir [49, 62, 25] .
Dans ce chapitre nous établissons quelques résultats d'existence de solution des équations intégro-différentielles fractionnaires hybrides.
Dans la suite de ce chapitre, nous introduisons les notations, définitions et préliminaires nécessaires pour cette étude.
Soit $J = [0, T]$, $T > 0$. On note par $X = C(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues de J vers $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|y\| = \sup\{|y(t)|, t \in J\},$$

On définit la multiplication dans X par :
$(xy)(t) = x(t)y(t)$, pour $x, y \in X$.
On note aussi par $Car(J \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ la classe des fonctions $g : J \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

(i) L'application $s \longrightarrow g(s, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ est mesurable pour chaque $x_1, x_2, \ldots, x_k \in$

$\mathbb{R}$,

(ii) L'application $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \longrightarrow g(s, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ est continue pour tout $s \in J$.

La classe $Car(J \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ est appelée la classe des fonctions Carathéodory définie sur $J \times \mathbb{R}^k$ a valeur dans $\mathbb{R}$.

De plus, si $g \in Car(J \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ et

(iii) pour tout $r > 0$, il existe une fonction $\phi_r \in L_1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que,

$$\|g(s, x_1, x_2, \ldots, x_k)\| = \sup\{|v| : v \in g(s, x_1, x_2, \ldots, x_k)\} \leq \phi_r(s) \quad p.p. \quad t \in J,$$

pour tout $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k| \leq r$ et $s \in J$.

Alors, la fonction g est dite L_1- Carathéodory. Et on munit l'espace $L_1(J; \mathbb{R})$ par la norme qu'on note $\|.\|_{L_1}$ définie par :

$$\|x\|_{L_1} = \int_0^T |x(s)| ds.$$

3.1 Équation intégro-différentielle fractionnaire hybride

Dans cette section, nous considérons d'équation intégro-différentielle fractionnaire hybride suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha \left(\frac{x(t) - I^\beta h(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t))}{f(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t))} \right) = g(t, x(t), I^{\beta_1} x(t), \ldots, I^{\beta_k} x(t)), t \in J = [0, T], 1 < \alpha \leq 2 \\ \frac{x(0)}{f(0, x(0), \underbrace{0, 0 \ldots, 0}_{n})} = x_0, \qquad \frac{x(T)}{f(T, x(T), I^{\alpha_1} x(T), \ldots, I^{\alpha_n} x(T))} = x_T, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$, $\beta_1, \ldots, \beta_n > 0$, $x \in \mathbb{R}$, D^α désigne la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α. I^β est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\beta > 0$.
$f : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $h(0, x(0), \underbrace{0, 0 \ldots, 0}_{n}) = 0$, et $g \in \mathcal{C}(J \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ est une fonction a certaines propriétés.
Le problème (3.1) considéré ici comme une généralisation des trois classes de problèmes bien connues des équations intégro-différentielles fractionnaires suivantes.
Cas I : Si $f(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t)) = 1$ et $h(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t)) = 0$, pour tout $t \in J$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, le problème (3.1) réduit au problème standard d'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha (x(t)) = g(t, x(t), I^{\beta_1} x(t), \ldots, I^{\beta_k} x(t)), \quad t \in J = [0, T], \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_T, \end{cases}$$

Cas II : Si $h(t, x(t), I^{\alpha_1}x(t), \ldots, I^{\alpha_n}x(t)) = 0$ pour tout $t \in J$ et $x \in \mathbb{R}$ dans (3.1). On obtient l'équation différentielle fractionnaire quadratique suivante,

$$\begin{cases} D^{\alpha}\Big(\frac{x(t)}{f(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))}\Big) = g(t, x(t), I^{\beta_1}x(t), \ldots, I^{\beta_k}x(t)), \quad t \in J = [0,T], \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ \frac{x(0)}{f(0,x(0),\underbrace{0,0\ldots,0}_{n})} = x_0, \qquad \frac{x(T)}{f(T,x(T),I^{\alpha_1}x(T),\ldots,I^{\alpha_n}x(T))} = x_T, \end{cases}$$

Cas III : Si $f(t, x(t), I^{\alpha_1}x(t), \ldots, I^{\alpha_n}x(t)) = 1$ pour tout $t \in J$ et $x \in \mathbb{R}$ dans (3.1). On obtient une équation différentielle fractionnaire intéressante,

$$\begin{cases} D^{\alpha}\Big(x(t) - I^{\beta}h(t, x(t), I^{\alpha_1}x(t), \ldots, I^{\alpha_n}x(t))\Big) = g(t, x(t), I^{\beta_1}x(t), \ldots, I^{\beta_k}x(t)), t \in J = [0,T], \\ 1 < \alpha \leq 2, \\ x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_T, \end{cases}$$

3.1.1 Résultat d'existence

Dans cette section, on prouve l'existence de la solution du (3.1) dans l'intervalle $J = [0, T]$ sous des conditions mixtes de Lipschitz et Carathéodory.
On définit la multiplication dans X par :

$$(xy)(t) = x(t)y(t), \quad pour \quad x, y \in X.$$

Il est clair que $X = C(J, R)$ est une algèbre de Banach par rapport à la norme et multiplication définie ci-dessus.
Nous aurons besoin du théorème de point fixe hybride de Dhage suivant :

Théorème 3.1.1. ([49]). Soit S un sous ensemble fermé, borné et convexe d'une algèbre de Banach X, et soient A, $C : X \longrightarrow X$ et $B : S \longrightarrow X$ trois opérateurs tels que :

(a_1) A et C sont Lipschitziens de constante de Lipschitz δ et ρ respectivement,

(b_1) B est complètement continue,

(c_1) $x = AxBy + Cx \Longrightarrow x \in S$ pour tout $y \in S$,

(d_1) $\delta M + \rho < 1$, avec $M = \|B(S)\|$.

Alors l'équation $x = AxBx + Cx$ admet au moins une solution .

Pour simplifier les calculs posons,

$$d = \frac{I^{\beta}h(T, x(T), I^{\alpha_1}x(T), \ldots, I^{\alpha_n}x(T))}{f(T, x(T), I^{\alpha_1}x(T), \ldots, I^{\alpha_n}x(T))}$$

.

Lemme 3.1.1. Supposons que $1 < \alpha \leq 2$.
Alors, pour tout $k \in L^1(J, \mathbb{R})$, $x \in C(J, \mathbb{R})$ est une solution du

$$\begin{cases} D^\alpha \left(\frac{x(t) - I^\beta h(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t))}{f(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t))} \right) = k(t), \quad t \in J = [0, T] \\ \frac{x(0)}{f(0, x(0), \underbrace{0, 0 \ldots, 0}_{n})} = x_0, \qquad \frac{x(T)}{f(T, x(T), I^{\alpha_T} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(T))} = x_T, \end{cases} \tag{3.2}$$

si et seulement si x satisfait,

$$\begin{aligned} x(t) &= \Big(f(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t)) \Big) \Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} k(s) ds \\ &+ (1 - \frac{t}{T}) x_0 + \frac{t}{T} x_T - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} k(s) ds - \frac{td}{T} \Big) \\ &+ \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} h(s, x(s), I^{\beta_1} x(s), \ldots, I^{\alpha_n} x(s)) ds, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Démonstration. Soit $k \in L^1(J, \mathbb{R})$. Supposons que x est solution de l'équation (3.3).
Par définition, $\frac{x(t)}{f(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t))}$ est continue.
En appliquant l'opérateur de la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α, nous obtenons la première équation en (3.2). De même, en substituant $t = 0$ et $t = T$ en (3.3), nous avons

$$\frac{x(0)}{f(0, x(0), \underbrace{0, 0 \ldots, 0}_{n})} = x_0, \qquad \frac{x(T)}{f(T, x(T), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(T))} = x_T,$$

Inversement, si

$$D^\alpha \left(\frac{x(t) - I^\beta h(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t))}{f(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t))} \right) = k(t)$$

Alors,

$$\frac{x(t) - I^\beta h(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t))}{f(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t))} = I^\alpha k(t) - c_0 - c_1 t$$

$$\frac{x(t)}{f(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t))} = I^\alpha k(t) - c_0 - c_1 t + \frac{I^\beta h(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t))}{f(t, x(t), I^{\alpha_1} x(t), \ldots, I^{\alpha_n} x(t))}$$

Substituons $t = 0$ on aura

$$c_0 = -\frac{x(0)}{f(0, x(0), \underbrace{0, 0 \ldots, 0}_{n})} = -x_0$$

Et substituons $t = T$ on aura

$$\frac{x(T)}{f(T, x(T), I^{\alpha_1}x(T), \dots, I^{\alpha_n}x(T))} = I^{\alpha}k(T) + x_0 - c_1 T + d$$

Par suite,

$$c_1 = \frac{1}{T}(x_0 + I^{\alpha}k(T) - x_T + d)$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} x(t) &= \Big(f(t, x(t), I^{\alpha_1}x(t), \dots, I^{\alpha_n}x(t))\Big)\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}k(s)ds + (1-\frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}x_T \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}k(s)ds - \frac{td}{T}\Big) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}h(s, x(s), I^{\beta_1}x(s), \dots, I^{\alpha_n}x(s))ds, t \in [0,T] \end{aligned}$$

□

Dans le but d'avoir des résultats d'existence de la solution du problème (3.1), on considère les hypothèses suivantes :

(H_1) Les fonctions $f : J \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \times\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $h : J \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions Carathéodory, $h(0, x(0), \underbrace{0, 0 \dots, 0}_{n})) = 0$, de plus il existe deux fonctions positives $p, m : J \longrightarrow (0, \infty)$ avec $\|p\|$ et $\|m\|$ respectivement, telles que

$$|f(t, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) - f(t, x_1, x_2, \dots, x_{n+1})| \leq p(t)\sum_{i=1}^{n+1}|y_i - x_i|$$

et

$$|h(t, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) - h(t, x_1, x_2, \dots, x_{n+1})| \leq m(t)\sum_{i=1}^{n+1}|y_i - x_i|$$

pour $t \in J$ et $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), (y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(H_2) Il existe une fonction $v \in L^1(J, \mathbb{R})$, telle que

$$|g(t, x_1, x_2, \dots, x_k)| \leq v(t) \quad \text{pour tout} \quad (t, x_1, x_2, \dots, x_k) \in J \times \mathbb{R}^k$$

(H_3) Il existe un nombre réel $r > 0$ telle que

$$r \geq \frac{F_0\Big(\frac{2\|v\|_{L^1}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + |x_0| + |x_T| + |d|\Big) + \frac{k_0 T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}}{1 - \Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \dots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big)\Big[\|p\|\Big(\frac{2\|v\|_{L^1}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + |x_0| + |x_T| + |d|\Big) - \|m\|\frac{T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\Big]} \tag{3.4}$$

Avec $F_0 = \sup_{t \in J}|f(t, x(0), \underbrace{0, 0 \dots, 0}_{n})|$ et $K_0 = \sup_{t \in J}|h(t, x(0), \underbrace{0, 0 \dots, 0}_{n})|$

Théorème 3.1.2. Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_3)$ sont vérifiées. Alors le problème (3.1) a au moins une solution sur J si

$$\Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \dots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big)\Big[\|p\|\Big(\frac{2\|v\|_{L^1}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + |x_0| + |x_1| + |d|\Big) + \frac{\|m\|T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\Big] < 1.$$

Démonstration. Soit $E = C(J, \mathbb{R})$, et on définit le sous ensemble S de E par :

$$S = \{x \in E : \|x\| \leq r\},$$

où r satisfait l'inégalité (3.4).

Il est clair que S est un sous ensemble fermé, convexe, et borné d'espace de Banach E. Donc par application du lemme 3.1.1, l'équation (3.1) est équivalente à l'équation intégrale hybride (3.3).

Définissons les trois opérateurs,

$\mathcal{A} : E \longrightarrow E$ par

$$\mathcal{A}x(t) = f(t, x(t), I^{\alpha_1}x(t), \ldots, I^{\alpha_n}x(t)), \quad t \in J, \tag{3.5}$$

$\mathcal{B} : S \longrightarrow E$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{B}x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s, x(s), I^{\beta_1}x(s), \ldots, I^{\beta_k}x(s))ds + (1 - \frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}x_T \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s, x(s), I^{\beta_1}x(s), \ldots, I^{\beta_k}x(s))ds - \frac{t}{T}d\Big], \quad t \in J, \end{aligned}$$

et $\mathcal{C} : E \longrightarrow E$ par

$$\mathcal{C}x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} h(s, x(s), I^{\alpha_1}x(s), \ldots, I^{\alpha_n}x(s))ds, \quad t \in J.$$

Alors l'équation intégrale hybride (3.3) peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = \mathcal{A}x(t)\mathcal{B}x(t) + \mathcal{C}x(t), \quad t \in J.$$

Montrons alors que les opérateurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ vérifions les conditions du Théorème 3.1.1. La preuve sera donnée en quatre étapes :

Étape 1 : Vérifions que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ sont Lipschitziens. Soit x et $y \in X$. D'après l'hypothèse (H_1), on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| &= |f(t, x(t), I^{\alpha_1}x(t), \ldots, I^{\alpha_n}x(t)) - f(t, y(t), I^{\alpha_1}y(t), \ldots, I^{\alpha_n}y(t))| \\ &\leq \sup_{t \in J}(|p||x(t) - y(t)|)\Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big) \\ &\leq \|p\|\Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big)\|x - y\| \end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Passons au sup sur t, on obtient

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq \|p\|\Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big)\|x - y\|$$

pour tout $x, y \in E$. Donc $\mathcal{A}$ est Lipschitzien sur E avec la constante de Lipschitz est

$$\|p\|\Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big).$$

Par analogie , pour tout $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}x(t)-\mathcal{C}y(t)| &= \Big|\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}[h(s,x(s),I^{\alpha_1}x(s),\ldots,I^{\alpha_n}x(s))-h(s,y(s),I^{\alpha_1}y(s),\ldots,I^{\alpha_n}y(s))]ds\Big| \\
&\leq \sup_{t\in J}(|m||x(t)-y(t)|)\Big(1+\frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}+\ldots+\frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big)\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}ds \\
&\leq \|m\|\Big(1+\frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}+\ldots+\frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big)\frac{T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\|x-y\|
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Passons au sup sur t, on obtient

$$\|\mathcal{C}x-\mathcal{C}y\| \leq \|m\|\Big(1+\frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}+\ldots+\frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big)\frac{T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\|x-y\|$$

Donc, $\mathcal{C}$ est Lipschitzien sur E avec la constante de Lipschitz est

$$\|m\|\Big(1+\frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}+\ldots+\frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big)\frac{T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Etape 2 : Montrons que l'opérateur $\mathcal{B}$ est continu sur S. Soit $(x_n)_n$ une suite dans S convergente vers un point $x \in S$. D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, pour tout $t \in J$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g(t,x_n(s),I^{\beta_1}x_n(s),\ldots,I^{\beta_k}x_n(s))ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{n\to\infty} g(s,x_n(s),I^{\beta_1}x_n(s),\ldots,I^{\beta_k}x_n(s))ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g(s,x(s),I^{\beta_1}x(s),\ldots,I^{\beta_k}x(s))ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\Big[(1 &- \frac{t}{T})x_0+\frac{t}{T}x_T-\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,x_n(s),I^{\beta_1}x_n(s),\ldots,I^{\beta_k}x_n(s))ds-\frac{t}{T}d\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big[(1-\frac{t}{T})x_0+\frac{t}{T}x_T\Big]-\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\lim_{n\to\infty} g(t,x_n(t),I^{\beta_1}x_n(s),\ldots,I^{\beta_k}x_n(s))ds \\
&- \frac{t}{T}d \\
&= (1-\frac{t}{T})x_0+\frac{t}{T}x_T-\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,x(s),I^{\beta_1}x(s),\ldots,I^{\beta_k}x(s))ds-\frac{t}{T}d
\end{aligned}$$

Par consequence, on a

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{B}x_n=\mathcal{B}x$$

pour tout $t \in J$. Ce qui montre que $\mathcal{B}$ est un opérateur continu sur S.

Etape 3 : Maintenant montrons que $\mathcal{B}$ est un opérateur compact dans S.

Commençons par montrer que $\mathcal{B}(S)$ est un sous ensemble uniformément borné dans X. Soit $x \in S$, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}x(t)| &= \Big|\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g(s,x(s),I^{\beta_1}x(s),\ldots,I^{\beta_k}x(s))ds+(1-\frac{t}{T})x_0+\frac{t}{T}x_T \\
&- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(t,x(t),I^{\beta_1}x(t),\ldots,I^{\beta_k}x(t))ds-\frac{t}{T}d\Big| \\
&\leq \Big(2\|h\|_{L^1}\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big)+|x_0|+|x_1|+|d|=K_1
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Passons au sup sur t, l'inégalité ci-dessus devient, $\|\mathcal{B}x\| \leq K_1$ pour tout $x \in S$. Ce qui montre que $\mathcal{B}(S)$ uniformément borné sur S.
Montrons maintenant que $\mathcal{B}(S)$ est un sous ensemble équicontinu dans E.
Soit τ_1 et $\tau_2 \in J$, alors pour tout $x \in S$ on a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}x(\tau_2) - \mathcal{B}x(\tau_1)| &= \Big| \int_0^{\tau_2} \frac{(\tau_2 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s, x(s), I^{\beta_1}x(s), \ldots, I^{\beta_k}x(s))ds \\
&- \int_0^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s, x(s), I^{\beta_1}x(s), \ldots, I^{\beta_k}x(s))ds + \Big[(1 - \frac{\tau_2}{T}) - (1 - \frac{\tau_1}{T})\Big]x_0 \\
&+ (\frac{\tau_1}{T} - \frac{\tau_2}{T})\Big(\int_0^{T} \frac{(T - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(t, x(t), I^{\beta_1}x(t), \ldots, I^{\beta_k}x(t))ds - x_T + d\Big)\Big| \\
&\leq \int_0^{\tau_1} \frac{|(\tau_2 - s)^{\alpha-1} - (\tau_1 - s)^{\alpha-1}|}{\Gamma(\alpha)} |g(t, x(t), I^{\beta_1}x(t), \ldots, I^{\beta_k}x(t))|ds \\
&+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{(\tau_2 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |g(t, x(t), I^{\beta_1}x(t), \ldots, I^{\beta_k}x(t))|ds + (\frac{\tau_1 - \tau_2}{T})x_0 \\
&+ \Big(\frac{\tau_1 - \tau_2}{T}\Big)\Big(x_T + \int_0^{T} \frac{(T - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |g(t, x(t), I^{\beta_1}x(t), \ldots, I^{\beta_k}x(t))|ds + d\Big) \\
&\leq \int_0^{\tau_1} \frac{|(\tau_2 - s)^{\alpha-1} - (\tau_1 - s)^{\alpha-1}|}{\Gamma(\alpha)} \|v\|_{L^1}ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{(\tau_2 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|v\|_{L^1}ds \\
&+ (\frac{\tau_1 - \tau_2}{T})x_0 + \Big(\frac{\tau_1 - \tau_2}{T}\Big)\Big(x_T + \int_0^{T} \frac{(T - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|v\|_{L^1}ds + d\Big)
\end{aligned}$$

Alors, on a $|\mathcal{B}x(\tau_2) - \mathcal{B}x(\tau_1)| \longrightarrow 0$ pour $\tau_2 \longrightarrow \tau_1$ indépendamment de $x \in S$. Ce qui montre que $\mathcal{B}$ est équicontinu dans E. D'après le Théorème d'Arzelà-Ascoli, $\mathcal{B}$ est un opérateur continu et compact sur S.

Etape 4 . Maintenant nous vérifions que l'hypothèse (c_1) du Théorème 3.1.1 est satisfait. Soit $x \in E$ et $y \in S$ deux éléments tels que $x = \mathcal{A}x\mathcal{B}y + \mathcal{C}x$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq |\mathcal{A}x(t)||\mathcal{B}y(t)| + |\mathcal{C}x(t)| \\
&\leq |f(t, x(t), I^{\alpha_1}x(t), \ldots, I^{\alpha_n}x(t))| \Big[\int_0^{t} \frac{(t - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Big|g(s, y(s), I^{\beta_1}y(s), \ldots, I^{\beta_k}y(s))\Big|ds \\
&+ (1 - \frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}x_T + \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^{T} (T - s)^{\alpha-1} \Big|g(s, y(s), I^{\beta_1}y(s), \ldots, I^{\beta_k}y(s))\Big|ds \\
&+ \frac{t|d|}{T}\Big] + \int_0^{t} \frac{(t - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \Big|h(t, x(t), I^{\alpha_1}x(t), \ldots, I^{\alpha_n}x(t))\Big|ds \\
&\leq (|f(t, x(t), I^{\alpha_1}x(t), \ldots, I^{\alpha_n}x(t)) - f(t, 0, \ldots, 0)| + |f(t, 0, \ldots, 0)|)\Big[\int_0^{t} \frac{(t - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |v(s)|ds \\
&+ (1 - \frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}x_T + \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^{T} (T - s)^{\alpha-1} |v(s)|ds + |\frac{t}{T}||d|\Big] \\
&+ \int_0^{t} \frac{(t - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \big|(h(t, x(t), I^{\alpha_1}x(t), \ldots, I^{\alpha_n}x(t)) - h(s, 0, \ldots, 0) + |h(s, 0, \ldots, 0))\big| \\
&\leq \Big[r\|p\|\Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n + 1)}\Big) + F_0\Big]\Big(\frac{2\|v\|_{L^1}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} + |x_0| + |x_T| \\
&+ |d|\Big) + \frac{r\|m\|T^{\beta}}{\Gamma(\beta + 1)}\Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n + 1)}\Big) + \frac{T^{\beta}}{\Gamma(\beta + 1)}k_0
\end{aligned}$$

Passons au sup sur $t \in J$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|x\| &\leq \Big[r\|p\|\Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n + 1)}\Big) + F_0\Big]\Big(\frac{2\|v\|_{L^1}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} + |x_0| + |x_T| \\
&+ |d|\Big) + \frac{r\|m\|T^{\beta}}{\Gamma(\beta + 1)}\Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n + 1)}\Big) + \frac{T^{\beta}}{\Gamma(\beta + 1)}k_0
\end{aligned}$$

pour, $x \in S$.

Etape 5 . Finalement vérifions que $\delta M + \rho < 1$, c-à-d, (d_1) du Théorème 3.1.1. Alors

$$\begin{aligned} M = \|\mathcal{B}(S)\| &= \sup_{x\in S}\{\sup_{t\in J}|\mathcal{B}x(t)|\} \\ &\leq \frac{2\|v\|_{L^1}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + |x_0| + |x_T| + |d| \end{aligned}$$

d'après le Théorème 3.1.2 on a

$$\Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big)\Big(\|p\|M + \frac{\|m\|T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\Big) < 1$$

où $\delta = \Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big)\|p\|$ et $\rho = \frac{\|m\|T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big)$.

Les hypothèses du Théorème 3.1.1 étant vérifiées, alors l'équation $x = \mathcal{A}x\mathcal{B}x + \mathcal{C}x$ admet au moins une solution dans S. Il en résulte que le problème (3.1) admet au moins une solution définie sur J. $\square$

3.1.2 Exemple

Nous proposons dans cette section un exemple pour illustrer nos résultats ci-dessus. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x(t) - I^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2te^{-3t}}{15(3+t)}\left(\sin x(t) + \frac{x(t)+9I^{\sqrt{2}}|x(t)|}{I^{\sqrt{2}}|x(t)|+5}\right)\right]}{\frac{(t+1)^2}{100}\left(\sin x(t) + \frac{|I^{\sqrt{2}}x(t)|}{1+|I^{\sqrt{2}}x(t)|} + 3\right)}\right) = t^2 \sin x(t) + \cos(I^{\frac{1}{4}}x(t)) + 1, t \in J = [0,1] \\ \frac{x(0)}{f(0,x(0),0)} = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{x(1)}{f(1,x(1),I^{\alpha_1}x(1))} = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

On a,

$$\|g(t,x,y)\| \leq t^2 + 2,$$

et

$$|f(t,x,y) - f(t,x',y')| \leq \frac{(t+1)^2}{100}(|x-x'| + |y-y'|)$$

et

$$|h(t,x,y) - h(t,x',y')| \leq \Big(\frac{2t}{15(3+t)}\Big)(|x-x'| + |y-y'|)$$

Alors

$$\Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}\Big)\Big(\frac{2\|p\|\|v\|_{L^1}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + |x_0| + |x_1| + |d| + \|m\|\frac{T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\Big) \simeq 0.18957628293 < 1. \tag{3.7}$$

D'aprés le Théorème 3.1.2, le problème (3.6) admet une solution.

3.2 Équation intégrodifférentielle fractionnaire séquentielle hybride

Dans cette section, nous étudions l'existence de la solution du problème intégrodifférentielle fractionnaire séquentielle hybride suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}\Big(\frac{D^{\omega}x(t)-I^{\beta}h(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))}{f(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))}\Big) = g(t,x(t),I^{\beta_1}x(t),\ldots,I^{\beta_k}x(t)), t\in J=[0,T], 0<\alpha<1, \\ x(0)=x_0, \quad D^{\omega}x(0)=0, \end{cases} \tag{3.8}$$

où $0<\alpha,\omega\leq 1$, $1<\alpha+\omega\leq 2$, les fonctions $f\in C(J\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $h\in C(J\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et $h(0,x(0),\underbrace{0,0\ldots,0}_{n})=0$ et $g\in\mathcal{C}(J\times\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$. I^{β} est l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre β. D^{α}, D^{ω} sont les opérateurs de la dérivée fractionnaire d'ordre α, β respectivement.

Nous aurons besoin du théorème de point fixe hybride de Dhage suivant :

Théorème 3.2.1. Soit M un sous ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach X, et soient $A:X\longrightarrow X$ et $B:M\longrightarrow X$ deux opérateurs tels que :

(i) A est un opérateur contractant,

(ii) B est complètement continu,

(iii) $x=Ax+By$ pour tout $y\in M\Longrightarrow x\in M$.

Alors l'équation $Ax+Bx=x$ admet au moins une solution.

Théorème 3.2.2. Supposons que $0<\alpha,\omega\leq 1$, $0<\alpha+\omega\leq 1$, et les fonctions f, g et h vérifiées le problème (3.8). La fonction $x\in C(J,\mathbb{R})$ est solution du problème (3.8) si et seulement si x satisfait :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \Big(\frac{(t-s)^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)} f(s,x(s),I^{\alpha_1}x(s),\ldots,I^{\alpha_n}x(s)) \\ &\quad \int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(\tau,x(\tau),I^{\beta_1}x(\tau),\ldots,I^{\beta_k}x(\tau))d\tau\Big)ds \\ &+ \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta+\omega-1}}{\Gamma(\beta+\omega)} h(s,x(s),I^{\alpha_1}x(s),\ldots,I^{\alpha_n}x(s))ds + x_0, \quad t\in[0,T] \end{aligned} \tag{3.9}$$

Démonstration. Supposons que x est solution du problème (3.9). Par définition, $\frac{x(t)}{f(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))}$ est continue, alors par dérivation, nous obtenons la première équation dans (3.8) . Substituons $t=0$ dans (3.9), on obtient

$x(0)=x_0, \qquad D^{\omega}x(0)=0$

Par définition on a :

$$\frac{D^{\omega}x(t)-I^{\beta}h(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))}{f(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))} = I^{\alpha}g(t,x(t),I^{\beta_1}x(t),\ldots,I^{\beta_k}x(t))) - c_0$$

Puisque $\qquad D^{\beta}x(0)=0$, alors $\qquad c_0=0$

Appliquons la propriété de l'opérateur I^{α}, $I^{\omega}I^{\beta}h=I^{\omega+\beta}h$ on obtient,

$$\begin{aligned} x(t) &= I^{\omega}\Big[f(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))I^{\alpha}g(t,x(t),I^{\beta_1}x(t),\ldots,I^{\beta_k}x(t))\Big] \\ &+ I^{\omega+\beta}h(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))-c_1 \end{aligned}$$

Puisque $x(0)=x_0$, ce qui implique $\qquad c_1=-x_0$
Alors,

$$\begin{aligned}x(t) &= I^{\omega}\Big[f(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))I^{\alpha}g(t,x(t),I^{\beta_1}x(t),\ldots,I^{\beta_k}x(t))\Big]\\ &+ I^{\omega+\beta}h(t,x(t),I^{\alpha_1}x(t),\ldots,I^{\alpha_n}x(t))+x_0\end{aligned}$$

Par conséquence,

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t \Big[\frac{(t-s)^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)}f(s,x(s),I^{\alpha_1}x(s),\ldots,I^{\alpha_n}x(s))\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g(\tau,x(\tau),I^{\beta_1}x(\tau),\ldots,I^{\beta_k}x(\tau)))d\tau\Big]ds\\ &+ \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta+\omega-1}}{\Gamma(\beta+\omega)}h(s,x(s),I^{\alpha_1}x(s),\ldots,I^{\alpha_n}x(s))ds+x_0, \quad t\in[0,T]\end{aligned}$$

□

3.2.1 Résultat d'existence

Dans le but d'avoir des résultats d'existence concernant le problème (3.8), on considère les hypothèses suivantes :

(A_1) Les fonctions $f: J\times\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $g: J\times\mathbb{R}^{k+1}\longrightarrow\mathbb{R}$, sont continues. De plus, il existe deux fonctions positives ϕ et χ avec $\|\phi\|$ et $\|\chi\|$, respectivement, telles que :

$$|f(t,y_1,y_2,\ldots,y_{n+1})-f(t,x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})|\le\phi(t)\sum_{i=1}^{n+1}|y_i-x_i|$$

pour $t\in J$ et $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}),(y_1,y_2,\ldots,y_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$.
Et

$$|g(t,y_1,y_2,\ldots,y_{k+1})-g(t,x_1,x_2,\ldots,x_{k+1})|\le\chi(t)\sum_{i=1}^{k+1}|y_i-x_i|$$

pour $t\in J$ et $(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}),(y_1,y_2,\ldots,y_{k+1})\in\mathbb{R}^{k+1}$.

(A_2) Il existe trois fonctions positives μ, ν, et θ, telles que :

$$|f(t,x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})|\le\mu(t),$$

$\forall(t,x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in J\times\mathbb{R}^{n+1}$, $\mu\in C(J,\mathbb{R}^+)$,

$$|g(t,x_1,x_2,\ldots,x_{k+1})|\le\nu(t),$$

$\forall(t,x_1,x_2,\ldots,x_{k+1})\in J\times\mathbb{R}^{k+1}$, $\nu\in C(J,\mathbb{R}^+)$ et

$$|h(t,x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})|\le\theta(t),$$

$\forall(t,x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in J\times\mathbb{R}^{n+1}$, $\theta\in C(J,\mathbb{R}^+)$.

Théorème 3.2.3. Supposons que $(A_1)-(A_2)$ sont vérifiées. Alors le problème (3.8) admet une solution définie sur J si

$$\frac{T^{\alpha+\omega}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\omega+1)}\Big\{\Big(1+\frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}+\ldots+\frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\Big)\|\nu\|\|\phi\| + \|\mu\|\|\chi\|\Big(1+\frac{T^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)}+\ldots+\frac{T^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}\Big)\Big\}<1 \quad (3.10)$$

Démonstration. On pose $\sup_{t\in J}|\mu(t)|=\|\mu\|$, $\sup_{t\in J}|\nu(t)|=\|\nu\|$, $\sup_{t\in J}|\theta(t)|=\|\theta\|$, et choisissons

$$R\geq\frac{T^{\omega+\beta}}{\Gamma(\omega+\beta+1)}\|\theta\|+\frac{T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\|\mu\|\|\ \nu\|+|x_0|$$

On considère $B_R=\{x\in C(J,\mathbb{R}):\|x\|\leq R\}$. Définissons les opérateurs :
$\mathcal{A}:E\longrightarrow E$ par (3.5), et $\mathcal{D}:B_R\longrightarrow E$ par

$$\mathcal{D}x(t) \;=\; \int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g(s,x(s),I^{\beta_1}x(s),\ldots,I^{\beta_k}x(s))ds,\quad t\in J$$

et

$$\mathcal{Q}x(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta+\omega-1}}{\Gamma(\beta+\omega)}h(s,x(s),I^{\alpha_1}x(s),\ldots,I^{\alpha_n}x(s))ds,\quad t\in J$$

et

$$\mathcal{T}x(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)}\mathcal{A}x(t)\mathcal{D}x(s)ds+x_0,\quad t\in J$$

La preuve sera donnée en trois étapes :
Etape 1 : Montrons que la condition (iii) du Théorème 3.2.1 est satisfaite. Pour tout $y\in B_R$, on a

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= |\mathcal{Q}x(t)+\mathcal{T}y(t)|\\
&\leq \int_0^t\frac{(t-s)^{\omega+\beta-1}}{\Gamma(\omega+\beta)}|h(s,x(s),I^{\alpha_1}x(s),\ldots,I^{\alpha_n}x(s))|ds+\int_0^t\frac{(t-s)^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)}|\mathcal{A}y(s)||\mathcal{D}y(s)|ds+|x_0|\\
&\leq \int_0^t\frac{(t-s)^{\omega+\beta-1}}{\Gamma(\omega+\beta)}|\theta(s)|ds+\int_0^t\frac{(t-s)^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)}|\mu(t)|\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|\nu(s)|ds+|x_0|\\
&\leq \frac{T^{\omega+\beta}}{\Gamma(\omega+\beta+1)}\|\theta\|+\frac{T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\|\mu\|\|\ \nu\|+|x_0|
\end{aligned}$$

Passant au sup sur $t\in J$, on obtient $\|x\|\leq R$, où $x\in B_R$.
Donc, la condition (iii) du Théorème 3.2.1 est satisfaite.
Etape 2 : Maintenant montrons que $\mathcal{Q}$ vérifié l'hypothèse (ii) du Théorème 3.2.1. L'opérateur $\mathcal{Q}$ est continu. Alors, $\mathcal{Q}$ est uniformément borné sur B_R car

$$\|\mathcal{Q}x\|\leq\frac{T^{\omega+\beta}}{\Gamma(\omega+\beta+1)}\|\theta\|$$

Soit $\tau_1, \tau_2 \in J$ où $\tau_1 < \tau_2$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in B_R^{n+1}$. On définit

$$\sup_{(t,x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in J\times B_R^{n+1}} |h(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})| = \bar{h} < \infty.$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Q}x(\tau_2) - \mathcal{Q}x(\tau_1)| &= \Big| \int_0^{\tau_2} \frac{(\tau_2 - s)^{\omega+\beta-1}}{\Gamma(\omega+\beta)} h(s, x(s), I^{\alpha_1}x(s), \ldots, I^{\alpha_n}x(s))ds \\
&- \int_0^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - s)^{\omega+\beta-1}}{\Gamma(\omega+\beta)} h(s, x(s), I^{\alpha_1}x(s), \ldots, I^{\alpha_n}x(s))ds \Big| \\
&\leq \frac{\bar{h}}{\Gamma(\omega+\beta)} \Big| \int_0^{\tau_1} [(\tau_2 - s)^{\omega+\beta-1} - (\tau_1 - s)^{\omega+\beta-1}]ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\omega+\beta-1} ds \Big| \\
&\leq \frac{\bar{h}}{\Gamma(\omega+\beta+1)} |\tau_2^{\omega+\beta} - \tau_1^{\omega+\beta}|
\end{aligned}$$

Ainsi, $|\mathcal{Q}x(\tau_2) - \mathcal{Q}x(\tau_1)| \longrightarrow 0$ pour $\tau_2 \longrightarrow \tau_1$ et ceci indépendamment de $x \in S$. Ce qui implique que l'opérateur, $\mathcal{Q}$ est équicontinu. Donc $\mathcal{Q}$ est complètement continu sur B_R. D'après le Théorème d'Arzelá-Ascoli, $\mathcal{Q}$ est compact sur B_R.

Etape 3 : Dans cette étape, on va établir que $\mathcal{T}$ est un opérateur contractant.

Soit $x, y \in B_R$, pour tout $t \in J$ on aura

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{T}x(t) - \mathcal{T}y(t)| \\
&= \Big| \int_0^t \frac{(t-s)^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)} [\mathcal{A}x(s)\mathcal{D}x(s)ds - \mathcal{A}y(s)\mathcal{D}y(s)]ds \Big| \\
&= \Big| \int_0^t \frac{(t-s)^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)} [\mathcal{A}x(s)\mathcal{D}x(s) - \mathcal{A}y(s)\mathcal{D}x(s) + \mathcal{A}y(s)\mathcal{D}x(s) - \mathcal{A}y(s)\mathcal{D}y(s)]ds \Big| \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)} \Big\{ |\mathcal{D}x(s)||\mathcal{A}x(s) - \mathcal{A}y(s)| + |\mathcal{A}y(s)||\mathcal{D}x(s) - \mathcal{D}y(s)] \Big\} ds \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)} \Big\{ \Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)} \Big) \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|\nu\|\|\phi\|\|x-y\| \\
&+ \|\mu\|\|\chi\| \Big(1 + \frac{T^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_k}}{\Gamma(\beta_k+1)} \Big) \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\| \Big\} ds \\
&\leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{T^{\omega}}{\Gamma(\omega+1)} \Big\{ \Big(1 + \frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)} \Big) \|\nu\|\|\phi\| \\
&+ \|\mu\|\|\chi\| \Big(1 + \frac{T^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)} + \ldots + \frac{T^{\alpha_k}}{\Gamma(\beta_k+1)} \Big) \Big\} \|x-y\|
\end{aligned}$$

Par conséquence $\mathcal{T}$ est un opérateur contractant, alors l'hypothèse (i) du Théorème 3.2.1 est satisfait. Ce qui implique que les hypothèses du Théorème 3.2.1 sont satisfaits. Alors le problème (3.8) admet ou moins une solution dans J. $\square$

Chapitre 4

Existence de solutions d'un système d'équations différentielles fractionnaires hybrides impulsives à condition non locale

Dans ce chapitre et vu que la condition non locale joue un rôle remarquable dans la modélisation de plusieurs phénomènes physiques comme en électronique, en mécanique des matériaux, ou en boimathématiques. On considère le problème formé par un couple d'équations différentielles fractionnaires hybrides impulsives suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}\Big(\frac{u(t)}{f_1(t,u(t),v(t))}\Big) = g_1(t,u(t),v(t)), \quad t\in[0,1], t\neq t_i \quad i=1,2,\dots,n, \quad 0<\alpha<1 \\ u(t_i^+) = u(t_i^-) + I_i(u(t_i^-)), \quad t_i\in(0,1), \quad i=1,2,\dots,n \\ D^{\beta}\Big(\frac{v(t)}{f_2(t,u(t),v(t))}\Big) = g_2(t,u(t),v(t)), \quad t\in[0,1], t\neq t_j, \quad j=1,2,\dots,m, \quad 0<\beta<1 \\ v(t_j^+) = v(t_j^-) + I_j(v(t_j^-)), \quad t_j\in(0,1), \quad j=1,2,\dots,m \\ \frac{u(0)}{f_1(0,u(0),v(0))} = \phi(u), \quad \frac{v(0)}{f_2(0,u(0),v(0))} = \psi(v), \end{cases} \tag{4.1}$$

où D^{α}, D^{β} sont des dérivées factionnaires au sens de Caputo d'ordre α et β respectivement . Les fonctions $f_i \in C([0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\{0\})$, $g_i\in C([0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, $(i=1,2)$ et ϕ, $\psi : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues définie par $\phi(u)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u(\xi_i)$, $\psi(v)=\sum_{j=1}^{m}\delta_j v(\eta_j)$, avec ξ_i, $\eta_j\in(0,1)$ pour $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,m$, et $I_k:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $u(t_k^+)=\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} u(t_k+\varepsilon)$ et $u(t_k^-)=\lim\limits_{\epsilon\to 0^-} u(t_k+\varepsilon)$ représentent les limites à droite et à gauche de $u(t)$ en $t=t_k$, $(k=i,j)$. Nous supposons que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u(\xi_i)^{\alpha-1}<1$, $\sum_{j=1}^{m}\delta_j v(\eta_j)^{\beta-1}<1$.

Nous signalons aussi que la condition non locale signifie que la condition initiale dépend de $u(0)$, $v(0)$ et des valeurs de la solution. Cela montre que la condition initiale n'est pas définie et n'est pas connue, la seule information qu'on a sur $u(0)$, $v(0)$ est qu'elles dépend de la solution dans certains instants futurs .

4.1 Résultat d'existence

Dans cette section, nous allons prouver l'existence de solutions de problème (4.1) sur l'intervalle borné $J = [0, 1]$.

4.1.1 Notations

Notons $J_0 = [0, t_1]$, $J_1 = (t_1, t_2]$, $\ldots$, $J_{p-1} = (t_{p-1}, t_p]$, $J_p = (t_p, 1]$, et pour $t_i \in (0, 1)$ tel que $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, et $I' = I \setminus \{t_1, t_2, ..., t_n\}$, on définit l'espace

$$\begin{aligned} X \;=\; & \Big\{u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : u \in C(I') \text{ la limite à droite } u(t_i^+),\ \text{ la limite à gauche } u(t_i^-) \text{ existe} \\ & \textit{et} \quad u(t_i^-) = u(t_i),\, 1 \le i \le n\Big\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach muni de la norme $u = \max\limits_{t\in[0,1]} |u(t)|$.
De même pour $t_j \in (0, 1)$ tel que $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$, et $J' = J \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$, on définit l'espace

$$\begin{aligned} Y \;=\; & \Big\{v : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : v \in C(J') \text{ la limite à droite } v(t_j^+),\ \text{ la limite à gauche } v(t_j^-)) \text{ existe} \\ & \textit{et} \quad v(t_j^-) = v(t_j),\, 1 \le j \le m\Big\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $(Y, \|.\|)$ est un espace de Banach muni de la norme $v = \max\limits_{t\in[0,1]} |v(t)|$. Par conséquence, le produit $X \times Y$ est un espace de Banach muni de la norme $\|(u, v)\| = \|u\| + \|v\|$ ou $\|(u, v)\| = max\{\|u\|, \|v\|\}$.

4.1.2 Premier résultat

Notre but dans cette section est d'obtenir des résultats d'existence, on se basant sur le théorème de point fixe de Banach, pour le système (4.1) .
Pour l'obtention de l'existence d'une solution intégrale du problème (4.1), nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

(H_1) La fonction $u \longrightarrow \frac{u}{f_1(t,u,v)}$ est croissante dans $\mathbb{R}$ presque pour tout $t \in [0, 1[$.

(H_2) La fonction $v \longrightarrow \frac{v}{f_2(t,u,v)}$ est croissante dans $\mathbb{R}$ presque pour tout $t \in [0, 1[$.

(H_3) Les fonctions f_i sont continues et bornées, et il existe un nombre positif $L_i > 0$ tel que $|f_i(t, u, v)| \le L_i$ pour tout $(t, u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$.

(H_4) Pour tout $u, \bar{u}, v, \bar{v} \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [0, 1]$, il existe un nombre positif $M_{g_i} > 0$, tel que

$$|g_i(t, u, v) - g_i(t, \bar{u}, \bar{v})| \le M_{g_i}[|u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|] \quad (i = 1, 2).$$

(H_5) Il existe deux constantes $A, B > 0$ telles que, pour tout $u, \bar{u}, v, \bar{v} \in \mathbb{R}$,

$$|I_i(u) - |I_i(\bar{u})| \leq A|u - \bar{u}|, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$|I_j(v) - |I_j(\bar{v})| \leq B|v - \bar{v}|, \qquad j = 1, 2, ..., m$$

(H_6) Pour tout $u, v \in C([0,1], R)$, Il existe deux constantes $K_\phi, K_\psi > 0$, telles que

$$\|\phi(u) - \phi(v)\| \leq K_\phi \|u - v\|,$$

$$\|\psi(u) - \psi(v)\| \leq K_\psi \|u - v\|,$$

(H_7) Pour tout $u, v \in C([0,1], R)$, Il existe deux constantes M_ϕ, $M_\psi > 0$, et N_u, $N_v > 0$, telles que

$$\|\phi(u)\| \leq M_\phi \|u - v\|,$$

$$\|\psi(v)\| \leq M_\psi \|u - v\|,$$

$$\|I_i(u)\| \leq N_u \|u\|, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$\|I_j(v)\| \leq N_v \|v\|, \qquad j = 1, 2, ..., m$$

(H_8) Il existe deux constantes C, $D > 0$ telles que

$|I_i(u_i)| \leq C, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad$ et $|I_j(v_j)| \leq D, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$

(H_9) Il existe deux constantes ρ, $\mu > 0$ telles que

$|\phi(u)| \leq \rho, \quad \forall u \in X, \quad |\psi(v)| \leq \mu \quad \forall v \in Y,$

(H_{10}) Il existe deux constantes ρ_0, $\delta_0 > 0$ et ρ_i, $\delta_i > 0$ $(i = 1, 2)$ telles que

$$|g_1(t, u, v)| \leq \rho_0 + \rho_1 \|u\| + \rho_2 \|v\|$$

et

$$|g_2(t, u, v)| \leq \delta_0 + \delta_1 \|u\| + \delta_2 \|v\|$$

pour tout $(u, v) \in X \times Y$.

Pour simplifier les calculs, on pose

$$\Delta_1 = L_1 \big[K_\phi + nA + \frac{M_{g_1}}{\Gamma(\alpha + 1)}\big], \qquad \Delta_2 = L_2 \big[K_\psi + mB + \frac{M_{g_2}}{\Gamma(\beta + 1)}\big] \tag{4.2}$$

Lemme 4.1.1. : Soit $\alpha \in (0, 1)$ et $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $u \in C([0,1], \mathbb{R})$ est solution de l'équation intégrale fractionnaire :

$$u(t) = u_0 - \int_0^a \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds,$$

si, et seulement si u est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = h(t) \quad a.e. \quad t \in [0, 1] \\ u(a) = u_0, \quad a > 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

Lemme 4.1.2. Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_3) sont vérifiées. Soit $\alpha \in (0,1)$ et $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction u est solution de l'équation intégrale fractionnaire :

$$u(t) = f_1(t,u(t),v(t))\Big[\phi(u) + \theta(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{I_i(u(t_i^-))}{f_1(t,u(t_i),v(t_i))} + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\Big], t \in [t_i,t_{i+1}] \tag{4.4}$$

où

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0,t_1] \\ 1, & t \bar{\in} [t_0,t_1[\end{cases} \tag{4.5}$$

si, et seulement si, u est solution du problème impulsif suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha\Big(\frac{u(t)}{f_1(t,u(t),v(t))}\Big) = h(t),\ t \in [0,1],\ t \neq t_i\, i = 1,2,\dots,n,\ 0 < \alpha < 1 \\ u(t_i^+) = u(t_i^-) + I_i(u(t_i^-)), \qquad t_i \in (0,1),\ i = 1,2,\dots,n \\ \frac{u(0)}{f_1(0,u(0),v(0))} = \phi(u), \end{cases} \tag{4.6}$$

Démonstration. Supposons que u satisfait (4.6) . Si $t \in [t_0,t_1[$, alors

$$D^\alpha\Big(\frac{u(t)}{f_1(t,u(t),v(t))}\Big) = h(t), \quad t \in [t_0,t_1[\tag{4.7}$$

$$\frac{u(0)}{f_1(0,u(0),v(0))} = \phi(u), \tag{4.8}$$

Appliquons l'opérateur d'intégration fractionnaire I^α des deux côtés de (4.7), on peut obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{u(t)}{f_1(t,u(t),v(t))} &= \frac{u(0)}{f_1(0,u(0),v(0))} + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds \\ &= \phi(u) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds, \end{aligned}$$

Alors

$$u(t) \quad = f_1(t,u(t),v(t))\big[\phi(u) + \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\big]$$

Si $t \in [t_1,t_2[$, alors

$$D^\alpha\Big(\frac{u(t)}{f_1(t,u(t),v(t))}\Big) = h(t), \quad t \in [t_1,t_2[\tag{4.9}$$

$$u(t_1^+) = u(t_1^-) + I_1(u(t_1^-)), \tag{4.10}$$

D'après le Lemme 4.1.1 et la continuité de $f_1(t,u(t),v(t))$, on a

$$\begin{aligned} \frac{u(t)}{f_1(t,u(t),v(t))} &= \frac{u(t_1^+)}{f_1(t_1,u(t_1),v(t_1))} - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds \\ &= \frac{(u(t_1^-) + I_1(u(t_1^-)))}{f_1(t_1,u(t_1),v(t_1))} - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds, \end{aligned}$$

puisque

$$u(t_1^-) \quad = f_1(t_1,u(t_1),v(t_1))\big[\phi(u) + \int_0^{t_1} \tfrac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\big]$$

alors,

$$\begin{aligned}\frac{u(t)}{f_1(t,u(t),v(t))} &= \Big(\phi(u)+\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\Big)+\frac{I_1(u(t_1^-))}{f_1(t_1,u(t_1),v(t_1))}\\ &- \int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds+\int_0^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\\ &= \phi(u)+\frac{I_1(u(t_1^-))}{f_1(t_1,u(t_1),v(t_1))}+\int_0^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\end{aligned}$$

alors,

$$u(t) = f_1(t,u(t),v(t))\big[\phi(u)+\tfrac{I_1(u(t_1^-))}{f_1(t_1,u(t_1),v(t_1))}+\textstyle\int_0^t\tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\big]$$

Si $t\in[t_2,t_3[$, ensuite nous avons

$$\begin{aligned}\frac{u(t)}{f_1(t,u(t),v(t))} &= \frac{u(t_2^+)}{f_1(t_2,u(t_2),v(t_2))}-\int_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds+\int_0^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\\ &= \frac{(u(t_2^-)+I_2(u(t_2^-)))}{f_1(t_2,u(t_2),v(t_2))}-\int_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds+\int_0^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds,\end{aligned}$$

Pour

$$u(t_2^-) = f_1(t_2,u(t_2),v(t_2))\big[\phi(u)+\tfrac{[u(t_1^-)+I_1(u(t_1^-))]}{f_1(t_1,u(t_1),v(t_1))}+\textstyle\int_0^{t_2}\tfrac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\big]$$

on aura

$$\begin{aligned}\frac{u(t)}{f_1(t,u(t),v(t))} &= \phi(u)+\frac{(u(t_1^-)+I_1(u(t_1^-)))}{f_1(t_1,u(t_1),v(t_1))}+\int_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\\ &+ \frac{I_2(u(t_2^-))}{f_1(t_2,u(t_2),v(t_2))}-\int_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds+\int_0^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\\ &= \phi(u)+\frac{I_1(u(t_1^-))}{f_1(t_1,u(t_1),v(t_1))}+\frac{I_2(u(t_2^-))}{f_1(t_2,u(t_2),v(t_2))}+\int_0^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\end{aligned}$$

Alors,

$$u(t) = f_1(t,u(t),v(t))\Big(\phi(u)+\textstyle\sum_{i=1}^2\tfrac{I_i(u(t_i^-))}{f_i(t_i,u(t_i),v(t_i))}+\int_0^t\tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\Big)$$

Si $t\in[t_i,t_{i+1}[(i=3,4,...,n)$, en utilisant la même méthode, nous obtenons

$$u(t) = f_1(t,u(t),v(t))\Big(\phi(u)+\textstyle\sum_{i=1}^n\tfrac{I_i(u(t_i^-))}{f_i(t_i,u(t_i),v(t_i))}+\int_0^t\tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\Big)$$

Inversement, supposons que u vérifie (4.4).

Si $t\in[t_0,t_1[$, nous avons

$$u(t) = f_1(t,u(t),v(t))\Big[\phi(u)+\textstyle\int_0^t\tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\Big] \tag{4.11}$$

Puis, divisons par $f_1(t,u(t),v(t))$ et appliquons D^α des deux côtés de (4.11), alors (4.7) est vérifie. D'autre part, substituons $t=0$ dans (4.11), on a $\frac{u(0)}{f_1(0,u(0)v(0))}=\phi(u)$. Puisque $u\longrightarrow\frac{u}{f_1(t,u,v)}$ est croissante dans $\mathbb{R}$ pour $t\in[t_0,t_1[$, la fonction $u\longrightarrow\frac{u}{f_1(t,u,v)}$ est injective dans $\mathbb{R}$. Nous obtenons (4.8).

Si $t\in[t_1,t_2[$, on aura

$$u(t) = f_1(t,u(t),v(t))\big[\phi(u)+\tfrac{I_1(u(t_1^-))}{f_1(t_1,u(t_1),v(t_1))}+\textstyle\int_0^t\tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\big] \tag{4.12}$$

Puis, divisons par $f_1(t,u(t),v(t))$ et appliquons D^α des deux côtés de (4.12), alors (4.9) est vérifie. D'autre part, par (H_3), substitution $t=t_1$ dans (4.11) est par la limite de (4.12), alors (4.12) et (4.11) donne (4.10).
Si $t\in[t_i,t_{i+1}[$ $(i=2,3,...,n)$, de la même méthode on montre que :

$$\begin{cases} D^\alpha\left(\frac{u(t)}{f_1(t,u(t),v(t))}\right)=h(t), \quad t\in[t_k,t_{k+1}[\\ u(t_i^+)=u(t_i^-)+I_i(u(t_i^-)), \end{cases} \tag{4.13}$$

□

Ce qui complète la preuve.

Lemme 4.1.3. Soit g_1, g_2 deux fonctions continues, alors $(u,v)\in X\times Y$ est solution de (4.1) si, et seulement si, (u,v) est solution des équations intégrales :

$$u(t)=f_1(t,u(t),v(t))\big[\phi(u)+\theta(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{I_i(u(t_i^-))}{f_1(t,u(t_i),v(t_i))}+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g_1(t,u(t),v(t))ds\big],t\in[t_i,t_{i+1}]$$

$$v(t)=f_2(t,u(t),v(t))\big[\psi(v)+\omega(t)\sum_{j=1}^{m}\frac{I_j(v(t_j^-))}{f_2(t,u(t_j),v(t_j))}+\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}g_2(t,u(t),v(t))ds\big],t\in[t_j,t_{j+1}],$$

Où

$$\theta(t)=\begin{cases}0, & t\in[t_0,t_1]\\ 1, & t\bar{\in}[t_0,t_1[\end{cases}$$

et

$$\omega(t)=\begin{cases}0, & t\in[t_0,t_1]\\ 1, & t\bar{\in}[t_0,t_1[\end{cases}$$

Nous définissons l'opérateur $\Phi : X\times Y\longrightarrow X\times Y$ par :

$$\Phi(u,v)(t)=(\Phi_1(u,v)(t),\Phi_2(u,v)(t)) \tag{4.14}$$

où

$$\Phi_1(u,v)(t)=f_1(t,u(t),v(t))\Big[\phi(u)+\theta(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{I_i(u(t_i^-))}{f_1(t,u(t_i),v(t_i))}+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g_1(s,u(s),v(s))ds\Big] \tag{4.15}$$

et

$$\Phi_2(u,v)(t)=f_2(t,u(t),v(t))\Big[\psi(v)+\omega(t)\sum_{j=1}^{m}\frac{I_j(v(t_j^-))}{f_2(t,u(t_j),v(t_j))}+\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}g_2(s,u(s),v(s))ds\Big] \tag{4.16}$$

Présentons maintenant un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (4.1). Ce résultat est basé sur le théorème de point fixe de Banach.

Théorème 4.1.1. Supposons que les conditions $(H_1)-(H_7)$ sont vérifiées et g_1, g_2 : $[0,1]\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ sont continues et qu'il existe des constantes positives λ_i, ζ_i, $i=1,2$ telles que

$$|g_1(t,u,v)-g_1(t,\bar{u},\bar{v})|\leq\lambda_1|u-\bar{u}|+\zeta_1|v-\bar{v}|,$$

$$|g_2(t,u,v)-g_2(t,\bar{u},\bar{v})| \le \lambda_2|u-\bar{u}|+\zeta_2|v-\bar{v}|,$$

Si $\max(\Delta_1,\Delta_2) < 1$, Δ_1 et Δ_2 donné par (4.2), alors, le problème (4.1) admet une solution unique.

Démonstration. On pose $\sup_{t\in J}|g_1(t,0,0) = \kappa_1 < \infty$ et $\sup_{t\in J}|g_2(t,0,0)| = \kappa_1 < \infty$ et on définit la boule fermé $\bar{B} = \{(u,v) \in X \times Y : \|(u,v)\| \le r\}$, où

$$r \ge \max\{\frac{L_1\kappa_1}{1-L_1(M_\phi+nN_u+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(\lambda_1+\lambda_2))}, \frac{L_2\kappa_2}{1-L_2(M_\psi+nN_v+\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(\zeta_1+\zeta_2))}\} \tag{4.17}$$

La preuve sera donnée en deux étapes :

Etape 1 : Montrons que $\Phi\bar{B} \subset \bar{B}$. Soit $(u,v)\in\bar{B}$, on a :

$$\begin{aligned}
|\Phi_1(u,v)(t)| &\le L_1\Big|\phi(u)+\theta(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{I_i(u(t_i^-))}{f_1(t,u(t_i),v(t_i))}+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g_1(s,u(s),v(s))ds\Big| \\
&\le L_1\Big[M_\phi\|u\|+nN_u\|u\|+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(|g_1(s,u(s),v(s))-g_1(s,0,0)|+|g_1(s,0,0)|)ds\Big] \\
&\le L_1\Big[M_\phi\|u\|+nN_u\|u\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\big((\lambda_1+\lambda_2)\|u\|+\kappa_1\big)\Big] \\
&\le L_1\Big[(M_\phi+nN_u)r+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\big((\lambda_1+\lambda_2)r+\kappa_1\big)\Big]
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|\Phi_1(u,v)\| \le L_1\Big[(M_\phi+nN_u)r+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\big((\lambda_1+\lambda_2)r+\kappa_1\big)\Big] \tag{4.18}$$

De la même manière, on peut constater que

$$\|\Phi_2(u,v)\| \le L_2\Big[(M_\psi+nN_v)r+\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\big((\zeta_1+\zeta_2)r+\kappa_2\big)\Big] \tag{4.19}$$

De (4.18) et (4.19), il en résultent que : $\|\Phi(u,v)\| \le r$.

Etape 2 : Pour $(u,v),(\bar{u},\bar{v}) \in X\times Y$ et pour tout $t\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
|\Phi_1(u,v)(t)-\Phi_1(\bar{u},\bar{v})(t)| &= \Big|f_1(t,u(t),v(t))[\phi(u)+\theta(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{I_i(u(t_i^-))}{f_1(t,u(t_i),v(t_i))}+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g_1(s,u(s),v(s))ds] \\
&- f_1(t,\bar{u}(t),\bar{v}(t))[\phi(\bar{u})+\theta(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{I_i(\bar{u}(t_i^-))}{f_1(t,\bar{u}(t_i),\bar{v}(t_i))}+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g_1(s,\bar{u}(s),\bar{v}(s))ds]\Big| \\
&\le L_1\Big[K_\phi|u-\bar{u}|+nA|u-\bar{u}|+\frac{M_{g_1}}{\Gamma(\alpha+1)}(|u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|)\Big] \\
&\le L_1\Big[K_\phi\|u-\bar{u}\|+nA\|u-\bar{u}\|+\frac{M_{g_1}}{\Gamma(\alpha+1)}(\|u-\bar{u}\|+\|v-\bar{v}\|)\Big]
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1(u,v)-\Phi_1(\bar{u},\bar{v})\| &\le L_1\Big(K_\phi+nA+\frac{M_{g_1}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big)(\|u-\bar{u}\|+\|v-\bar{v}\|) \\
&= \Delta_1(\|u-\bar{u}\|+\|v-\bar{v}\|)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Par la même manière, on montre que

$$\|\Phi_2(u,v)-\Phi_2(\bar{u},\bar{v})\| \le \Delta_2(\|u-\bar{u}\|+\|v-\bar{v}\|) \tag{4.21}$$

De (4.20) et (4.21), on en déduit

$$\|\Phi(u,v)-\Phi(\bar{u},\bar{v})\| \le \max(\Delta_1,\Delta_2)(\|u-\bar{u}\|+\|v-\bar{v}\|)$$

□

D'après la condition $\max(\Delta_1,\Delta_2) < 1$, il en résultent que Φ est une contraction. Donc Φ admet un point fixe unique . Ce qui implique que le problème (4.1) admet une solution unique dans $[0,1]$.

4.1.3 Deuxième résultat

Dans le résultat suivant, on traite l'existence de la solution du problème (4.1) on se basant sur le Théorème de point fixe 2.3.3 :
Pour simplifier les calculs, on pose

$$\mu_1 = \frac{L_1}{\Gamma(\alpha+1)}, \qquad \mu_2 = \frac{L_2}{\Gamma(\beta+1)} \tag{4.22}$$

$$\mu_0 = \min\{1-(\mu_1\rho_1+\mu_2\delta_1), 1-(\mu_1\rho_2+\mu_2\delta_2)\}. \tag{4.23}$$

A l'aide de ce Théorème on a le résultat suivant :

Théorème 4.1.2. On suppose que les hypothèses $(H_1)-(H_3)$ et $(H_8)-(H_{10})$ sont vérifiées . De plus, on suppose que $\mu_1\rho_1+\mu_2\delta_1 < 1$ et $\mu_1\rho_2+\mu_2\delta_2 < 1$, où μ_1 et μ_2 sont donnés par (4.22). Alors, le problème (4.1) admet au moins une solution.

Démonstration. Nous allons montrer que l'opérateur $\Phi : X\times Y \longrightarrow X\times Y$ satisfait les hypothèses du Théorème 2.3.3. La preuve sera donnée en trois étapes :
Etape 1 : Dans cette étape, on prouve que l'opérateur Φ est complètement continu.
Il est clair d'après la continuité des fonctions f_1, f_2, g_1, et g_2 que l'opérateur Φ est continu.
Soit $S \subset X\times Y$ un sous ensemble borné . Il existe donc deux constantes H_1 et H_2 telles que $|g_1(t,u,v)| \le H_1$ et $|g_2(t,u,v)| \le H_2$, $\quad \forall (u,v)\in S$. Ainsi pour tous u, $v \in S$ on a

$$\begin{aligned}
|\Phi_1(u,v)(t)| &\le L_1\Big[\rho + \sum_{i=1}^{n} C + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} H_1 ds\Big] \\
&\le L_1\Big[\rho + nC + \frac{H_1}{\Gamma(\alpha+1)}\Big]
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\|\Phi_1(u,v)\| \le L_1\Big[\rho + nC + \frac{H_1}{\Gamma(\alpha+1)}\Big] \tag{4.24}$$

De la même manière, on a

$$\|\Phi_2(u,v)\| \;\; \leq \;\; L_2\Big[\sigma + mD + \frac{H_2}{\Gamma(\beta+1)}\Big] \tag{4.25}$$

D'où l'opérateur Φ est uniformément borné.
Etape 2 : Maintenant, montrons que l'opérateur Φ est équicontinu.
Soient $\tau_1, \tau_2 \in J$ avec $\tau_1 < \tau_2$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|\Phi_1(u(\tau_2), v(\tau_2)) \;\; &- \;\; \Phi_1(u(\tau_1), v(\tau_1))| \\
&\leq \;\; L_1\Big|\Big(\phi(u) + \theta(\tau_2)\sum_{i=1}^{n}\frac{I_i(u(t_i^-))}{f_1(t,u(t_i),v(t_i))} + H_1\int_0^{\tau_2}\frac{(\tau_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds\Big) \\
&- \;\; \Big(\phi(u) + \theta(\tau_1)\sum_{i=1}^{n}\frac{I_i(u(t_i^-))}{f_1(t,u(t_i),v(t_i))} + H_1\int_0^{\tau_1}\frac{(\tau_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds\Big)\Big| \\
&\leq \;\; L_1\Big(\big|(\theta(\tau_2)-\theta(\tau_1))\sum_{i=1}^{n}\frac{I_i(u(t_i^-))}{f_1(t,u(t_i),v(t_i))}\big| + H_1\Big|\int_0^{\tau_2}\frac{(\tau_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - \int_0^{\tau_1}\frac{(\tau_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds\Big|\Big) \\
&\leq \;\; L_1\Big(\big|(\theta(\tau_2)-\theta(\tau_1))\sum_{i=1}^{n}\frac{I_i(u(t_i^-))}{f_1(t,u(t_i),v(t_i))}\big| + H_1\Big|\int_0^{\tau_1}\frac{(\tau_1-s)^{\alpha-1}-(\tau_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \\
&- \;\; \int_{\tau_2}^{\tau_2}\frac{(\tau_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds\Big|\Big)
\end{aligned}$$

Aussi, on a

$$\begin{aligned}
|\Phi_2(u(\tau_2), v(\tau_2)) \;\; &- \;\; \Phi_2(u(\tau_1), v(\tau_1))| \\
&\leq \;\; L_2\Big(\big|(\omega(\tau_2)-\omega(\tau_1))\sum_{j=1}^{m}\frac{I_j(u(t_j^-))}{f_2(t,u(t_j),v(t_j))}\big| + H_2\Big|\int_0^{\tau_1}\frac{(\tau_1-s)^{\alpha-1}-(\tau_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \\
&- \;\; \int_{\tau_2}^{\tau_2}\frac{(\tau_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds\Big|\Big)
\end{aligned}$$

et donc lorsque $\tau_1 \longrightarrow \tau_1$, on a

$$|\Phi_1(u(\tau_2), v(\tau_2)) - \Phi_1(u(\tau_1), v(\tau_1))| \longrightarrow 0$$

$$|\Phi_2(u(\tau_2), v(\tau_2)) - \Phi_2(u(\tau_1), v(\tau_1))| \longrightarrow 0$$

et ceci indépendamment de (u, v). Ce qui implique que l'opérateur Φ est équicontinu et donc complètement continu.

Étape 3 : Dans cette étape, on va établir que l'ensemble

$$P = \{(u,v) \in X \times Y/(u,v) = \lambda\Phi(u,v), 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Soit $(u, v) \in P$ alors, $(u, v) = \lambda\Phi(u, v)$. Par conséquent, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$u(t) = \lambda\Phi_1(u,v)(t),$$

$$v(t) = \lambda\Phi_2(u,v)(t),$$

Alors

$$\begin{aligned}\|u\| &\leq L_1\Big[\rho + nC + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(\rho_0 + \rho_1\|u\| + \rho_2\|v\|)\Big] \\ &\leq L_1(\rho + nC) + \mu_1(\rho_0 + \rho_1\|u\| + \rho_2\|v\|)\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\|v\| &\leq L_2\Big[\sigma + mD + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(\delta_0 + \delta_1\|u\| + \delta_2\|v\|)\Big] \\ &\leq L_2(\sigma + mD) + \mu_2(\delta_0 + \delta_1\|u\| + \delta_2\|v\|)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|u\| + \|(v)\| \leq \big(L_1(\rho + nC) + L_2(\sigma + mD) + \mu_1\rho_0 + \mu_2\delta_0\big) + (\mu_1\rho_1 + \mu_2\delta_1)\|u\| + (\mu_1\rho_2 + \mu_2\delta_2)\|v\|$$

et donc par la relation (4.23), on a

$$\|(u,v)\| \leq \frac{L_1(\rho + nC) + L_2(\sigma + mD) + \mu_1\rho_0 + \mu_2\delta_0}{\mu_0}$$

Donc toutes les hypothèses du Théorème 2.3.3 sont vérifiées et par conséquent l'opérateur Φ admet au moins un point fixe, et qui est bien une solution du problème (4.1). Ce qui complète la preuve. □

4.2 Exemple d'application

Pour illustrer les résultats obtenus ci-dessus, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u(t)}{\frac{t+\sqrt{u(t)+v(t)}}{40+t^2}}\right) = \frac{e^{-t}+|\sin u(t)|+|\cos v(t)|}{20}, \quad t \in [0,1] \setminus \{t_1\}, \\ u(t_1^+) = u(t_1^-) + (-2u(t_1^-)), t_1 \neq 0, 1 \\ {}^{C}D^{\frac{1}{2}}\left(\frac{v(t)}{\frac{t^2+\sqrt{u(t)-v(t)}}{32+t}}\right) = \frac{e^{-2t}+|\sin(2u(t))|+|\cos^2(v(t))|}{20}, \quad t \in [0,1] \setminus \{t_1\}, \\ v(t_1^+) = v(t_1^-) + (-2v(t_1^-)), t_1 \neq 0, 1 \\ \frac{u(0)}{f_1(0,u(0),v(0))} = \sum_{i=1}^{n} c_i u(t_i), \quad \frac{v(0)}{f_2(0,u(0),v(0))} = \sum_{j=1}^{m} d_j u(t_j)), \end{cases} \tag{4.26}$$

où,

$f_1(t,u,v) = \frac{t+\sqrt{u(t)+v(t)}}{40+t^2}$, $\quad f_2(t,u,v) = \frac{t^2+\sqrt{u(t)-v(t)}}{32+t}$

$g_1(t,u,v) = \frac{e^{-t}+|\sin u(t)|+|\cos v(t)|}{40}$, et $\quad g_2(t,u,v) = \frac{e^{-2t}+|\sin(2u(t))|+|\cos^2(v(t))|}{20}$.

Alors,

$$|g_1(t,u_1,v_1) - g_1(t,u_2,v_2)| \leq \frac{1}{40} \mid u_2 - u_1 \mid + \frac{1}{40} \mid v_2 - v_1 \mid$$
$$|g_2(t,u_1,v_1) - g_2(t,u_2,v_2)| \leq \frac{1}{20} \mid u_2 - u_1 \mid + \frac{1}{20} \mid v_2 - v_1 \mid$$
$$\forall t \in [0.1], u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_1 = L_1\big[K_\phi + nA + \frac{M_{g_1}}{\Gamma(\alpha+1)}\big] \simeq 0.3354687 < 1, \quad \Delta_2 = L_2\big[K_\psi + mB + \frac{M_{g_2}}{\Gamma(\beta+1)}\big] \simeq 0.2548789 < 1$$

Ainsi, toutes les hypothèses du Théorème 4.1.2 sont vérifiées. Alors le problème (4.26) admet au moins une solution .

Chapitre 5

Équations différentielles fractionnaires conformes à condition non locale dans un espace de Banach

De nombreux processus dynamiques en physique, biologie, économie et autres domaines d'application peuvent être modéliser par des équations d'évolution différentielle ordinaires abstraites de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t)). \tag{5.1}$$

Malheureusement, la dérivée classique $\dot{x}(t)$ apparaissant dans l'équation (5.1) est locale et ne peut pas modéliser les processus dynamiques avec mémoire. Par conséquent, afin d'éviter cette lacune de la dérivée classique, de nombreux auteurs tentent de remplacer la dérivée classique par une dérivée fractionnaire . Parce que les dérivées fractionnaires ont été prouvés qu'ils sont un très bon moyen de modéliser de nombreux phénomènes avec mémoire dans divers domaines de la science et de l'ingénierie . En conséquence, de nombreux chercheurs font attention à former la meilleure définition de la dérivée fractionnaire. Récemment, une nouvelle définition nommée dérivée fractionnaire conforme est introduite dans [74]. Cette nouvelle dérivée fractionnaire devient rapidement l'objet de nombreuses contributions dans plusieurs domaines scientifiques. Motivons par le meilleur effet de la dérivée fractionnaire et les propriétés simples de la dérivée fractionnaire conforme, nous considérons le modèle (5.1) dans le cadre de calcul fractionnaire conforme. Précisément, nous étudions le problème de Cauchy suivant :

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 + g(x), \quad t \in [0, \tau], \tag{5.2}$$

où $\frac{d^\alpha(.)}{dt^\alpha}$ représente la dérivée fractionnaire conforme d'ordre $\alpha \in]0, 1[$. La partie linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $T(t))_{t\geq 0}$ sur un

espace de Banach $(X, \|.\|)$. La partie non linéaire $f : [0, \tau] \times X \longrightarrow X$, est une fonction donnée. La condition initiale $x(0) = x_0 + g(x)$ signifie la condition non locale [21]. Le vecteur x_0 est un élément de X et $g : \mathcal{C} \longrightarrow X$ est une fonction, avec $\mathcal{C}$ est l'espace des fonctions continues $x(.)$ définies de $[0, \tau]$ dans X. Tout au long de cet chapitre, nous considérons l'espace $\mathcal{C}$ menu de la norme $|x|_{\mathcal{C}} = sup_{t\in[0;\tau]}\|x(t)\|$. L'espace $(\mathcal{C}, |x|_{\mathcal{C}})$ est un espace de Banach. On note également par $|.|$ la norme dans l'espace $L(X)$ des opérateurs bornés définissent de X en elle-même.
Notre objectif dans ce chapitre est de prouver l'existence de solutions intégrales du problème de Cauchy (5.2) en se basant sur le Théorème du point fixe de Darbo-Sadovskii sans supposer la compacité du famille $T(t))_{t\geq 0}$ et la condition de Lipschitz sur la partie non locale g.

5.1 Notions de base

Dans cette section nous rappelons quelques préliminaires du calcul fractionnaire conforme et quelques notions de base de la mesure de non-compacité de Hausdorff.

Définition 5.1.1. ([74]) Soit $\alpha \in]0, 1]$. La dérivée fractionnaire conforme d'ordre α d'une fonction $x(.)$ pour $t > 0$ est définie par

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{x(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - x(t)}{\varepsilon}.$$

Pour $t = 0$, nous adaptons la définition suivante.

$$\frac{d^\alpha x(0)}{dt^\alpha} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}.$$

L'intégrale fractionnelle $I^\alpha(.)$ associée à la dérivée fractionnaire conforme est définie par

$$I^\alpha(x)(t) = \int_0^t s^{\alpha-1} x(s) ds.$$

Théorème 5.1.1. ([74]) Si $x(.)$ est une fonction continue dans le domaine de $I^\alpha(.)$, alors nous avons

$$\frac{d^\alpha (I^\alpha(x)(t))}{dt^\alpha} = x(t).$$

Définition 5.1.2. ([34]) La transformée de Laplace d'une fonction $x(.)$ est définie par

$$\mathcal{L}(x(t))(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} x(t) dt, \quad \lambda > 0.$$

Il est remarquable que la transformation ci-dessus ne soit pas compatible avec la dérivée fractionnaire conforme. Pour cela, la transformation adaptée est donnée par la définition suivante.

Définition 5.1.3. ([76]) La transformée de Laplace fractionnelle d'ordre $\alpha \in]0,1]$ d'une fonction $x(.)$ est défini par

$$\mathcal{L}_\alpha(x(t))(\lambda) := \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha}} x(t)dt, \quad \lambda > 0.$$

La proposition suivante nous donne les effets de l'intégrale fractionnaire et de la transformée de Laplace fractionnelle sur la dérivée fractionnaire conforme, respectivement.

Proposition 5.1.1. ([76]) Si $x(.)$ est une fonction différentiable, alors nous avons les résultats suivants

$$\mathcal{L}_\alpha(x(t))(\lambda) := \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha}} x(t)dt, \quad \lambda > 0.$$

D'après [80], nous avons la remarque suivante.

Remarque 5.1.1. . Pour deux fonctions $x(.)$ et $y(.)$, nous avons

$$\mathcal{L}_\alpha(x(\frac{t^\alpha}{\alpha}))(\lambda) = \mathcal{L}(x(t))(\lambda),$$

$$\mathcal{L}_\alpha\Big(\int_0^t s^{\alpha-1} x(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) y(s)ds\Big)(\lambda) = \mathcal{L}(x(t))(\lambda)\mathcal{L}_\alpha(y(t))(\lambda).$$

Maintenant, nous rappelons quelques concepts sur la mesure de non-compacité de Hausdorff. Avant de donner la définition de cette mesure , rappelons d'abord la notion de ϵ-filet dans le cas où $(X, \|.\|)$ est un espace normé. Ici, on note par $B_X = B(0,1)$.

Définition 5.1.4. Soit X un espace normé. Un ensemble $S \subset X$ est appelé un ϵ-filet de Ω si

$$\Omega \subset S + \epsilon\bar{B}_X = \{s + \epsilon b, s \in S, b \in \bar{B}_X\}$$

Définition 5.1.5. La mesure de non compacité de Hausdorff de l'ensemble Ω, notée $\sigma(\Omega)$ est l'inf des nombres ϵ tels que Ω a un ϵ-filet fini dans X.

$$\sigma(\Omega) = \inf\{\epsilon > 0, \Omega \text{ a un } \epsilon - \text{filet fini dans } X\}. \tag{5.3}$$

Le lemme suivant présente quelques propriétés de base de la mesure de non-compacité de Hausdorff.

Lemme 5.1.1. ([2, 18]) Soit X un espace de Banach et B, $C \subseteq X$ bornés. On a les propriétés suivantes :

(1) B est pré-compact si et seulement si $\sigma(B) = 0$.

(2) $\sigma(B) = \sigma(\overline{B}) = \sigma(conv(B))$, où $\overline{B}$ et $conv(B)$ signifient la fermeture et l'enveloppe convexe de B, respectivement.

(3) $\sigma(B) \leq \sigma(C)$, où $B \subseteq C$.

(4) $\sigma(B+C) \leq \sigma(B) + \sigma(C)$, où $B + C = \{x + y : x \in B, y \in C\}$.

(5) $\sigma(B \cup C) \leq \max\{\sigma(B), \sigma(C)\}$.

(6) $\sigma(\lambda B) = |\lambda|\sigma(B)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, avec X est un espace de Banach.

(7) Pour tout opérateur $Q : D(Q) \subseteq X \longrightarrow Y$ Lipschitz avec $k \geq 0$, alors nous avons $\sigma(Q(B)) \leq k\sigma(B)$ pour tout sous-ensemble borné $B \subseteq D(Q)$, où Y est un espace de Banach et σ représente la mesure de non-compacité de Hausdorff sur Y.

Définition 5.1.6. ([18]). On dit que l'opérateur $Q : D(Q) \subseteq X \longrightarrow X$ est une σ-contraction s'il existe une constante positive $k < 1$ telle que $\sigma(Q(B)) \leq k\sigma(B)$ pour tout sous-ensemble fermé borné $B \subseteq D(Q)$.

Lemme 5.1.2. ([2, 18]). (Théorème de Darbo-Sadovskii) Soit $B \subseteq D(Q)$ un ensemble borné, fermé et convexe . Si $Q : B \longrightarrow B$ est un opérateur de σ-contraction et continue . Alors, Q a au moins un point fixe en B.

Lemme 5.1.3. ([69, 50]). Soit $D \subset X$ un ensemble borné, alors il existe un ensemble dénombrable $D_0 \subset D$ tel que $\sigma(D) \leq 2\sigma(D_0)$.

On note par σ_c la mesure de non-compacité de Hausdorff dans l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues $x(.)$ définies de $[0, \tau]$ a valeur dans X.

Lemme 5.1.4. ([17]). Soit $D_0 := \{x_n\} \subset \mathcal{C}$ un ensemble dénombrable, on a

1. $\sigma(D_0(t)) := \sigma(\{x_n(t)\})$ est Lebesgue intégrable sur $[0, \tau]$,
2. $\sigma(\int_0^\tau D_0(s)ds) \leq 2\int_0^\tau \sigma(D_0(s))ds$, où $\sigma(\int_0^\tau D_0(s)ds) := \sigma(\{\int_0^\tau x_n(s)ds\})$.

Lemme 5.1.5. ([2]). Soit $D \subset \mathcal{C}$ borné et équicontinu, alors

1. $\sigma(D(t))$ est continu sur $[0, \tau]$,
2. $\sigma_c(D) = \max\limits_{t\in[0,\tau]}(\sigma(D(t)))$.

5.2 Résultat principal

Nous donnons d'abord la définition de solutions intégrales du problème de Cauchy (5.2). Pour cela, en appliquant la transformée de Laplace fractionnaire dans l'équation (5.2), on obtient

$$\lambda\mathcal{L}_\alpha(x(t))(\lambda) = x_0 + g(x) + A\mathcal{L}_\alpha(x(t))(\lambda) + \mathcal{L}_\alpha(f(t, x(t)))(\lambda).$$

Ensuite, on a

$$\mathcal{L}_\alpha(x(t))(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}(x_0 + g(x)) + (\lambda - A)^{-1}\mathcal{L}_\alpha(f(t, x(t)))(\lambda).$$

Par l'utilisation de la transformée de Laplace fractionnaire inverse combinée à la remarque 5.1.1, on a

$$x(t) = T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s, x(s))ds.$$

Motivons par le calcul ci-dessus, nous pouvons introduire la définition suivante.

Définition 5.2.1. la fonction $x \in \mathcal{C}$ est appelée une solution intégrale du problème de Cauchy (5.2) si

$$x(t) = T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s, x(s))ds.$$

Pour obtenir l'existence des solutions intégrales du problème (5.2), nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

(H_1) La fonction $f(t, .) : X \longrightarrow X$ est continue et pour tous $r > 0$ il existe une fonction $\mu_r \in L^\infty([0, \tau], \mathbb{R}^+)$ tel que $\sup_{\|x\| \leq r} \| f(t, x) \| \leq \mu_r(t)$, pour tout $t \in [0, \tau]$.

(H_2) La fonction $f(., x) : [0, \tau] \longrightarrow X$ est continue, pour tout $x \in X$.

(H_3) La fonction $g : \mathcal{C} \longrightarrow X$ est continue et compacte.

(H_4) Il existe deux constantes positives a et b telles que $\| g(x) \| \leq a \mid x \mid_c +b$, pour tout $x \in \mathcal{C}$.

(H_5) Il existe une constante positive L telle que $\sigma(f(t, D_0)) \leq L\sigma(D_0)$, pour tout ensemble dénombrable $D_0 \subset X$ et $t \in [0, \tau]$.

Théorème 5.2.1. Supposons que $(H_1)-(H_5)$ vérifiés, alors le problème de Cauchy (5.2) admet au moins une solution intégrale si

$$\sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \max(a, \frac{4L\tau^\alpha}{\alpha}) < 1.$$

Démonstration. Pour utiliser le théorème du point fixe de Darbo-Sadovskii, nous considérons $B_r := \{x \in \mathcal{C}, \ \mid x \mid_c \leq r\}$ pour $r > 0$ et définissons l'opérateur $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ par :

$$\Gamma(x)(t) = T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s, x(s))ds.$$

La preuve sera donnée en quatre étapes :

Étape 1 : Prouvons qu'il existe un rayon $\delta > 0$ tel que $\Gamma : B_\delta \longrightarrow B_\delta$.

Soit $x \in \mathcal{C}$, on a

$$\| \Gamma(x)(t) \| \leq \| T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] \| + \int_0^t s^{\alpha-1} \| T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, x(s)) \| ds.$$

Passant au sup, nous obtenons

$$| \Gamma(x) |_c \leq \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| [\| x_0 \| + \| g(x) \| + \int_0^\tau s^{\alpha-1} \| f(s, x(s)) \| ds].$$

D'après l'hypothèse (H_4), on en déduit

$$| \Gamma(x) |_c \leq \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| [\| x_0 \| + a \mid x |_c + b + \int_0^\tau s^{\alpha-1} \| f(s, x(s)) \| ds].$$

Donc il suffit de considérer δ comme solution de l'inégalité suivante

$$\sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| [\| x_0 \| + ar + b + \frac{\tau^\alpha}{\alpha} \mid \mu_r |_{L^\infty([0,\tau],\mathbb{R}^+)}] \leq r.$$

Précisément, nous pouvons choisir δ tel que

$$\delta \geq \frac{\sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|}{1 - a \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|} [\| x_0 \| + b + \frac{\tau^\alpha}{\alpha} \mid \mu_\delta |_{L^\infty([0,\tau],\mathbb{R}^+)}].$$

Étape 2 : Montrons que $\Gamma : B_\delta \longrightarrow B_\delta$ est continu.

Soit $(x_n) \subset B_\delta$ tel que $x_n \longrightarrow x$ dans B_δ. On a

$$\Gamma(x_n)(t) - \Gamma(x)(t) = T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[g(x_n) - g(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))] ds.$$

Par conséquence on a

$$| \Gamma(x_n) - \Gamma(x) |_c \leq \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| [\| g(x_n) - g(x) \| + \int_0^\tau s^{\alpha-1} \| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \| ds].$$

D'après l'hypothèse (H_1), on a $\| s^{\alpha-1}[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))] \| \leq 2\mu_\delta(s) s^{\alpha-1}$ et $f(s, x_n(s)) \longrightarrow f(s, x(s))$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

D'après le théorème de convergence dominé de Lebesgue on prouve que $\int_0^\tau s^{\alpha-1} \| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \| ds \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Puisque g est continue, on en déduit que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \| g(x_n) - g(x) \| = 0$. Alors, Γ est continu.

Étape 3 : Montons que $\Gamma(B_\delta)$ est équicontinu.

Pour $x \in B_\delta$ et $t_1,\ t_2 \in [0, \tau]$ tel que $t_1 < t_2$. On a

$$\Gamma(x)(t_2) - \Gamma(x)(t_1) = [T(\frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha}) - I][T(\frac{t_1^\alpha}{\alpha})(x_0 + g(x)) + \int_0^{t_1} s^{\alpha-1} T(\frac{t_1^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, x(s)) ds] + \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1} T(\frac{t_2^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, x(s)) ds.$$

D'après les hypothèses (H_1) et (H_4), on obtient

$$\| \Gamma(x)(t_2) - \Gamma(x)(t_1) \| \leq (\| x_0 \| + a\delta + b + \frac{\tau^\alpha}{\alpha} \mid \mu_\delta \mid_{L^\infty([0,\tau],\mathbb{R}^+)}) \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| [\| T(\frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha}) - I \|]$$
$$+ \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \mid \mu_\delta \mid_{L^\infty([0,\tau],\mathbb{R}^+)} [\frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha}].$$

L'inégalité ci-dessus combinée à la continuité uniforme de la famille $(T(t))_{t\geq 0}$ ce qui montre que $\Gamma(B_\delta)$ est équicontinu sur $[0,\tau]$.

Étape 4 : Prouvons que $\Gamma : B_\delta \longrightarrow B_\delta$ est un opérateur σ_c contraction .

Soit $D \subset B_\delta$, d'après le Lemme 5.1.3 il existe un ensemble dénombrable D_0 tel que $D_0 = \{x_n\} \subset D$. Par conséquent, $\Gamma(D_0)$ est un sous-ensemble dénombrable de $\Gamma(D)$. Ainsi, le Lemme 5.1.3 montre que $\sigma_c(\Gamma(D)) \leq 2\sigma_c(\Gamma(D_0))$. Puisque $\Gamma(D_0)$ est borné et équicontinu, puis en utilisant le Lemme 5.1.5, on a

$$\sigma_c(\Gamma(D_0)) = \max_{t\in[0,\tau]}(\sigma(\Gamma(D_0)(t))).$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\sigma_c(\Gamma(D)) &\leq 2\sigma_c(\Gamma(D_0))\\ &= 2\max_{t\in[0,\tau]}(\sigma(\Gamma(D_0)(t)))\\ &= 2\max_{t\in[0,\tau]}\Bigg(\sigma(T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0+g(D_0)] + \int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s,D_0(s))ds\Bigg).\end{aligned}$$

En utilisant le point (4) du Lemme 5.1.1, on en déduit que

$$\sigma_c(\Gamma(D)) \leq 2\max_{t\in[0,\tau]}\Bigg(\sigma(T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0+g(D_0)]) + \sigma(\int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s,D_0(s))ds)\Bigg).$$

Puisque g est compact, alors $T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0+g(D_0)]$ est relativement compact. Par conséquent, en utilisant le point (1) du Lemme 5.1.1 dans l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$\sigma_c(\Gamma(D)) \leq 2\max_{t\in[0,\tau]}\Bigg(\sigma(\int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s,D_0(s))ds)\Bigg).$$

D'après le Lemme 5.1.4, on a

$$\sigma_c(\Gamma(D)) \leq 4\max_{t\in[0,\tau]}\Bigg(\int_0^t s^{\alpha-1}\sigma(T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s,D_0(s))ds)\Bigg).$$

Ensuite, le point (7) du Lemme 5.1.1 montre que

$$\sigma_c(\Gamma(D)) \leq 4\sup_{t\in[0,\tau]}|T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \max_{t\in[0,\tau]}\Bigg(\int_0^t s^{\alpha-1}\sigma(f(s,D_0(s)))ds\Bigg).$$

En utilisant l'hypothèse (H_5), on a

$$\sigma_c(\Gamma(D)) \leq 4L \sup_{t\in[0,\tau]} (|T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|) \max_{t\in[0,\tau]} \left(\int_0^t s^{\alpha-1}\sigma(D_0(s)))ds \right).$$

Par conséquent, en utilisant un calcul combiné avec le point (2) du Lemme 5.1.5, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sigma_c(\Gamma(D)) &\leq 4L \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|\sigma_c(D) \int_0^\tau s^{\alpha-1}ds \\ &= \frac{4L\tau^\alpha}{\alpha} \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|\sigma_c(D).\end{aligned}$$

Par conséquence, nous avons

$$\sigma_c(\Gamma(D)) \leq \frac{4L\tau^\alpha}{\alpha} \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|\sigma_c(D).$$

Puisque $\frac{4L\tau^\alpha}{\alpha} \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| < 1$, alors Γ est un opérateur σ_c-contraction.
Comme conclusion, le Lemme 5.1.2 montre que Γ a au moins un point fixe, ce qui est une solution intégrale du problème de Cauchy (5.2). □

Remarque 5.2.1. Nous notons que le Théorème 5.2.1 améliore le théorème 3 dans [81]. Parce que, dans le Théorème 5.2.1 nous n'avons pas imposé la compacité de la famille $(T(t))_{t>0}$ et la condition de Lipschitz sur la partie non locale g.

5.3 Conclusion

Sans la supposition de la compacité de la famille des semi-groupes et la condition de Lipschitz de la condition non locale, nous avons prouvé l'existence de solutions intégrales pour une classe d'équations différentielles fractionnaires conformes avec des conditions non locales dans un espace de Banach. Le résultat principal est obtenu on se basant sur la théorie des semi-groupes combinée au théorème du point fixe de Darbo-Sadovskii.

Chapitre 6

Existence de solutions des équations intégrodifférentielles fractionnaires impulsives

Introduction :

Les effets impulsifs résultent de phénomènes et utilisés pour décrire des phénomènes soudains, discontinus. saute. L'équation différentielle à impulsions non instantanées est une généralisation de la théorie classique des équations différentielles impulsives. Pour quelques travaux généraux et récents nous renvoyons les lecteurs à la théorie des équations différentielles impulsives . L'existence de solution de problème impulsif non instantané a été étudiée via certaines approches, telles que la théorie des points fixes et la théorie du semi-groupe analytique.
La théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés est étroitement liée à la solution des équations différentielles et intégrodifférentielles dans les espaces de Banach. Ces dernières années, cette théorie a été appliquée à une grande classe d'équations différentielles non linéaires dans les espaces de Banach.
La méthode du semi-groupe, l'existence et l'unicité de solution intégral d'équations d'évolution semi-linéaires ont été discutées par Pazy [15].
Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions du problème des équations intégrodifférentielles fractionnaires impulsives suivantes :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = Au(t) + f(t, u(t), \int_0^t \rho(t,s)h(t,s,u(s))ds) + B(t)c(t),\ t \in (s_i, t_{i+1}],\ i = 0, 1, \ldots, n,\ c \in \mathcal{U}_{ad} \\ u(t) = I_i(u(t_i)) + g_i(t, u(t)),\ t \in (t_i, s_i],\ i = 1, 2, \ldots, n \\ u(0) = u_0 + k(u), \end{cases} \tag{6.1}$$

où ${}^{C}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in (0, 1)$. A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique d'opérateurs linéaires $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach $(X, \|.\|)$. $u_0 \in X$, $0 = t_0 = s_0 < t_1 \leq s_1 \leq t_2 <, \ldots, < t_n \leq s_n \leq t_{n+1} = b$, sont des nombres pré-fixes, $k : X \longrightarrow X$, et $g_i \in \mathcal{C}((t_i, s_i] \times X, X)$ et $I_i : X \longrightarrow X$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, $f : [0, b] \times X \times X \longrightarrow X$ et $h \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^+)$, $D = \{(t, s)|t, s \in [0, b], t \geq s\}$. Les impulsions dans le problème (6.1) commencer brusquement aux points t_i et leur action continue sur l'intervalle $[t_i, s_i]$. Pour être précis, la fonction u prend une impulsion brusque à t_i et suit des règles différentes dans les deux sous-intervalles $(t_i, s_i]$ et $(s_i, t_{i+1}]$ de l'intervalle $(t_i, t_{i+1}]$.

À ce point s_i, la fonction u est continue. Le terme $I_i(u(t_i))$ signifie que les impulsions sont également liées à la valeur de $u(t_i) = u(t_i^-)$.

Nous remarquons que si $t_i = s_i$ et la deuxième équation de (6.1) prend la forme de $\triangle u(t_i) = I_i(u(t_i)) = u(t_i^+) - u(t_i^-)$ où $u(t_i^+) = \lim_{\epsilon \to 0^+} u(t_i + \epsilon), u(t_i^-) = \lim_{\epsilon \to 0^-} u(t_i + \epsilon)$ représentant la limite droite et gauche de $u(t)$ à $t = t_i$.

En utilisant la théorie des opérateurs de semi-groupes, fonctions de densité de probabilité, le théorème du point fixe de Mönch, nous établissons quelques résultats d'existence de solution pour ces types de problèmes en se basant sur la mesure de non-compacité de Hausdorff.

Soit Y un espace de Banach réflexif et séparable où les contrôles c prendre ces valeurs. On note par $P_f(Y)$ une classe de sous-ensembles fermés et convexes non vides de Y. Nous supposons que l'application $w : [0, b] \longrightarrow P_f(Y)$ est mesurable, $w(.) \subset E$, où E est un ensemble borné de Y, et l'ensemble de contrôle admissible :

$$U_{ad} = \{c \in L^p(E) : c(t) \in w(t), a.e., p > 1\}.$$

Alors $U_{ad} \neq \emptyset$, qui se trouve dans [20].

6.1 Notions de base

Dans cette section, nous présentons les notions de base qu'on aura besoin par la suite.

Théorème 6.1.1. ([39]). (Théorème du point fixe de Mönch) Soit D un sous-ensemble borné, fermé et convexe d'un espace de Banach tel que $0 \in D$, et soit N une application continue de D dans lui même. Si l'implication

$$V = \overline{conv} N(V) \quad ou \quad V = N(V) \cup \{0\} \Longrightarrow \alpha(V) = 0$$

est vérifiée pour chaque sous-ensemble V de D, alors N admet un point fixe.

Théorème 6.1.2. ([12]). Soit D un sous-ensemble convexe fermé d'un espace de Banach X et $0 \in D$. On suppose que $F : D \longrightarrow X$ est une application continue qui satisfaite la condition de Mönch qui est ($M \subseteq D$ est dénombrable, $M \subseteq \overline{co}(\{0\} \cup F(M) \longrightarrow \overline{M}$ est compacte). Alors F a un point fixe dans D.

Nous rappelons la définition suivante consacrée à des solutions intégrales pour les équations d'évolution fractionnaires de dérivée fractionnaire de Caputo.

Définition 6.1.1. ([64]). Une fonction $x \in \mathcal{C}([0,b], X)$ est dite une solution intégrale du problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = Au(t) + y(t), t \in (0,b], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{6.2}$$

s'il satisfait l'équation intégrale

$$u(t) = \mathcal{P}_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(t-s)y(s)ds.$$

Où

$$\mathcal{P}_\alpha(t) = \int_0^\infty \xi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)d\theta, \qquad \mathcal{Q}_\alpha(t) = \alpha\int_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)d\theta, \tag{6.3}$$

$$\xi_\alpha(\theta) = \frac{1}{\alpha}\theta^{-1-\frac{1}{\alpha}}\overline{\omega}_\alpha(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}) \geq 0,$$

$$\overline{\omega}_\alpha(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\theta^{-n\alpha-1}\frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\sin(n\pi\alpha), \qquad \theta \in (0,\infty), \tag{6.4}$$

avec ξ_α la fonction de densité de probabilité définie sur $(0,\infty)$ [38] c'est

$$\xi_\alpha(\theta) \geq 0, \theta \in (0,\infty), \qquad \int_0^\infty \xi_\alpha(\theta)d\theta = 1.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que

$$\int_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Remarque 6.1.1. En appliquant la transformée de Laplace et la fonction de densité de probabilité, Zhou et Jiao [64] introduit la définition ci-dessus des solutions intégrales des équations d'évolution fractionnelles. Pour les travaux pionniers sur les équations d'évolution fractionnaires de Caputo, nous renvoyons les lecteurs à [41], [45].

Lemme 6.1.1. (voir [64]). Les opérateurs $\mathcal{P}_\alpha$ et $\mathcal{Q}_\alpha$ ont les propriétés suivantes :

(1) Pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{P}_\alpha(t)$ et $\mathcal{Q}_\alpha(t)$ sont des opérateurs linéaires bornés, et pour tout $u \in X$,

$$\|\mathcal{P}_\alpha(t)u\| \leq M_A\|u\|, \qquad \|\mathcal{Q}_\alpha(t)u\| \leq \frac{\alpha M_A}{\Gamma(1+\alpha)}\|u\|,$$

(2) $\{\mathcal{P}_\alpha(t), t \geq 0\}$ et $\{\mathcal{Q}_\alpha(t)), t \geq 0\}$ sont uniformément continus ;

(3) Pour tout $t > 0$, $\mathcal{P}_\alpha(t)$ et $\mathcal{Q}_\alpha(t))$ sont des opérateurs compacts.

Lemme 6.1.2. Si $W \subseteq \mathcal{PC}([0,b],X)$ est borné, alors $\mu(W(t)) \leq \mu_{\mathcal{PC}}(W)$ pour tout $t \in [0,b]$, où $W(t) = \{u(t) : u \in W\} \subseteq X$. De plus, si W est équicontinu sur $[0,b]$, alors $\mu(W(t))$ est continue sur $[0,b]$, et $\mu_{\mathcal{PC}}(W) = \sup\{\mu(W(t)) : t \in [0,b]\}$.

Lemme 6.1.3. Si $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(0,b,X)$ est uniformément intégrable, alors $\mu(\{u_n\}_{n=1}^{\infty})$ est mesurable et

$$\mu\Big(\{\int_0^t u_n(s)ds\}_{n=1}^{\infty}\Big) \leq 2\int_0^t \mu\{u_n(s)\}_{n=1}^{\infty}ds$$

Lemme 6.1.4. Si le semi groupe $T(t)$ est équicontinu et $\eta \in L^1(0,b,\mathbb{R}^+)$, alors l'ensemble $\{t \longrightarrow \int_0^t T(t-s)u(s)ds, u \in L^1(0,b,\mathbb{R}^+), \|u(s)\| \leq \eta(s),\ \text{pour } s \in [0,b]\}$

Lemme 6.1.5. Si W est borné, alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une suite $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W$ tel que

$$\mu(W) \leq 2\mu(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}) + \varepsilon.$$

6.2 Résultat d'existence

Dans cette section, nous montrons l'existence de solutions du problème (6.1) on se basant sur le Théorème 6.1.2 . Pour r, un nombre réel positif, on définit

$$W = \{u \in \mathcal{PC}([0,b],X), \|u\|_{\mathcal{PC}} \leq r, \text{pour tout } \ t \in [0,b]\} \tag{6.5}$$

Dans le but d'avoir des résultats d'existence de solution concernant le problème (6.1), on considère les hypothèses suivantes :

(H_1) (i) Le C_0-semi-groupe $T(t)$ généré par A et equicontinu et

$$M_A = \sup\{|T(t)| : t \in [0,b]\}$$

(ii) $B : [0,b] \longrightarrow \mathcal{L}(Y,X)$ est essentiellement borné, cela signifie que $B \in \mathcal{L}^\infty([0,b],\mathcal{L}(Y,X))$.

(H_2) (i) Les fonctions g_i sont continues et pour tout constante positive L_{g_i} telles que

$$\|g_i(t,u) - g_i(t,v)\| \leq L_{g_i}\|u - v\|,$$

pour tout $u, v \in X$, $t \in (t_i, s_i]$ et $i = 0, 1, 2 \ldots, n$.

(ii) Pour tout constante positive $M_i > 0$ telle que

$$\|g_i(t,u)\| \leq M_i\|u\|$$

pour tout $u \in X$, $t \in (t_i, s_i]$ et $i = 0, 1, \ldots, n$.

(iii) Pour tout sous ensemble $B \subset X$, on a

$$\mu(g_i(t,B)) \leq M_i(\sup_{-\infty < s_i \leq 0} \mu(B(s_i))), i = 0, 1, \ldots, n.$$

(H_3) (i) Il existe une fonction $m_f \in \mathcal{C}([0,b], X)$ et une fonction continue croissante $\Omega_f : X \longrightarrow X$ telles que

$$\|f(t,u,v)\| \leq m_f(t)\Omega_f(\|u\| + \|v\|)$$

pour tout, $u \in X$ et $t \in [0,b]$.

(ii) Il existe une fonction intégrable $\eta : [0,b] \longrightarrow [0,+\infty]$ tel que

$$\mu(f(t,D_1,D_2) \leq \eta(t)[\sup_{-\infty < \theta \leq 0} \mu(D_1(\theta) + \mu(D_2)]$$

pour tout $t \in [0,b]$, et tous les sous-ensembles liés D_1, $D_2 \subset X$ et μ est la mesure de non-compacité de Hausdorff . Soit $\int_0^t \eta(s)ds \leq \zeta^*$.

(H_4) $k : X \longrightarrow X$ est continue. Il existe deux constantes positives c et d telles que $\|k(u) - k(v)\| \leq c\|u - v\|$ et $\|k(u)\| \leq c\|u\| + d$, pour tout $u \in \mathcal{PC}(X)$.

(H_5) $f : [0,b] \times X \times X \longrightarrow X$ une fonction Carathèodory, i.e $f(.,u,Gu)$ est mesurable pour tout $u \in X$ et $f(t,.,.)$ est continue pour tout $t \in [0,b]$.

(H_6) (i) La fonction $h(t,s,.) : X \longrightarrow X$ est continue pour tout, $(t,s) \in D$, et pour tout $u \in X$, la fonction $h(.,.,u) : D \longrightarrow X$ est mesurable. De plus, il existe une fonction $\nu : D \longrightarrow \mathbb{R}^+$ où $\sup_{t\in[0,b]} \int_0^t \nu(t,s)ds := \nu^* < \infty$ telles que

$$||h(t,s,u)\| \leq \nu(t,s)\|u\|, u \in X$$

(ii) Pour toute sous ensemble bornée $D_1 \subset X$ et $0 \leq s \leq t \leq b$, il existe une fonction $\psi : D \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que

$$\mu(h(t,s,D_1)) \leq \psi(t,s)\mu(D_1),$$

où $\sup_{t\in[0,b]} \int_0^t \psi(t,s)ds := \psi^* < \infty$

(H_7) Pour tout $t \in [0,b]$, $\rho(t,.)$ est mesurable sur $[0,t]$ et $l(t) = \sup\{|\rho(t,s)|, 0 \leq s \leq s \leq t\}$ est bornée sur $[0,b]$. L'application $t \longrightarrow \rho_t$ est continue de $[0,b]$ a $\mathcal{L}^\infty([0,b],X)$, ici $\rho_t(s) = \rho(t,s)$.

(H_8) (i) Pour $i = 0,1,\ldots,n$, $I_i \in \mathcal{C}(X,X)$ et il existe une constante $L_I > 0$ tel que

$$\|I_i(u) - I_i(v)\| \leq L_I\|u - v\|$$

pour tout $u, v \in X$.

(ii) Il existe $\phi_I > 0$ tel que pour tout $u \in X$, $i = 0,1,\ldots,n$,

$$\|I_i(u)\| \leq \phi_I\|u\|.$$

(iii) Pour toute sous ensemble bornée $G \subset X$, on a

$$\mu(I_i(G)) \leq \phi_I(\sup_{-\infty<s_i\leq 0} \mu(G(s_i))), i = 0,1,\ldots,n.$$

Définition 6.2.1. ([75]). On dit que la fonction $u \in \mathcal{PC}([0,b],X)$ est une solution intégrale du problème

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = Au(t) + f(t,u(t),\int_0^t \rho(t,s)h(t,s,u(s))ds) + B(t)c(t),\ t \in (s_i,t_{i+1}],\ i = 0,1,\ldots,n,\ c \in \mathcal{U}_{ad}, \\ u(t) = I_i(u(t_i)) + g_i(t,u(t)),\ t \in (t_i,s_i],\ i = 1,2,\ldots,n \\ u(0) = u_0 + k(u), \end{cases} \tag{6.6}$$

si u satisfait

$$u(t) = \begin{cases} \mathcal{P}_\alpha(t)(u_0 + k(u)) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(t-s)[f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds, \\ t \in [0,t_1], \\ I_i(u(t_i)) + g_i(t,u(t)), \quad t \in (t_i,s_i], i = 1,2,\ldots,n \\ \mathcal{P}_\alpha(t-s_i)d_i + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(t-s)[f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds, \\ t \in [s_i,t_{i+1}], \end{cases} \tag{6.7}$$

avec, pour $i = 1,2,\ldots,n$,

$$\begin{aligned} d_i &= I_i(u(t_i)) + g_i(s_i,u(s_i)) \\ &- \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i - s)[f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) \\ &+ B(s)c(s)]ds \end{aligned} \tag{6.8}$$

Remarque 6.2.1. Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_3)$ et la définition de $\mathcal{U}_{ad}$, il est également facile de vérifier que $Bc \in \mathcal{L}^p([0,b],X)$ où $p > 1$ pour tout $c \in \mathcal{U}_{ad}$.
De plus, $Bc \in \mathcal{L}^1([0,b],X)$ et $\|Bc\|_{\mathcal{L}^1} < \infty$.

Pour la simplification, posons :

$$\begin{aligned}
\gamma &= M_A[c + \frac{t_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} m_f(s)\Omega_f(1+l\nu^*)] \\
\delta &= M_A[\|u_0\| + d + \frac{t_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \|Bc\|_{\mathcal{L}^1}] < 1 \\
\sigma &= M_A[\phi_I + M_i + \frac{M_A}{\Gamma(\alpha+1)} s_i^{\alpha}([m_f(s)\Omega_f(1+l\nu^*)(M_A s_i^{\alpha} + t_{i+1}^{\alpha})] < 1 \\
\rho &= \frac{M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \|Bc\|_{\mathcal{L}^1}(M_A s_i^{\alpha} + t_{i+1}^{\alpha})
\end{aligned}$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 6.2.1. Supposons que les hypothèses (H_1) - (H_8) sont vérifiées, alors, le problème (6.1) admet au moins une solution telle que
Pour tout $r > 0$,

$$r \geq \max\left\{\frac{\gamma}{1-\delta}, \frac{\rho}{1-\sigma}\right\}, (\phi_I + M_i) < 1, \tag{6.9}$$

et

$$\begin{aligned}
\lambda^* = \max\Big\{ & M_A[c + \frac{2t_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\zeta^*(1+2l\psi^*)], \\
& M_A[L_I + L_{g_i} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\zeta^*(1+2l\psi^*)(t_{i+1}^{\alpha} + M_A s_i^{\alpha})]\Big\} < 1
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Démonstration. Définissons l'application $\Gamma : \mathcal{PC}([0,b],X) \longrightarrow \mathcal{PC}([0,b],X)$ par :

$$\Gamma u(t) = \begin{cases} P_{\alpha}(t)(u_0 + k(u)) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_{\alpha}(t-s)[f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds, \\ t \in [0,t_1] \\ I_i(u(t_i)) + g_i(t,u(t)), \quad t \in (t_i,s_i],\ i = 1,2,\ldots,n \\ P_{\alpha}(t-s_i)d_i + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_{\alpha}(t-s)[f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds, \\ t \in [s_i,t_{i+1}],\ i = 1,2,\ldots,n \end{cases} \tag{6.11}$$

où d_i, $i = 1,2,\ldots,n$, définie par (6.8).
Pour tout $u \in \mathcal{PC}([0,b],X)$, montrons que l'opérateur Γ satisfait l'hypothèse du Théorème 6.1.2. La preuve consiste en plusieurs étapes.
Étape 1 : Nous montrons que l'opérateur Γ est continu.
Soit $(u_k)_k$ une suite telle que $u_k \longrightarrow u$ dans $\mathcal{PC}([0,b],X)$. Puis par (H_5), nous aurons $f(s,u_k(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u_k(\tau))d\tau) \longrightarrow f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau), k \longrightarrow \infty$, pour tout $s \in [0,b]$.

Cas 1 : Pour $t \in [0, t_1]$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u_k(t) - \Gamma u(t)\| &\leq \|\mathcal{P}_\alpha(t)(k(u_k) - k(u))\| \\
&+ \Big\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(t-s)[f(s,u_k(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u_k(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds \\
&- \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(t-s)[f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds\Big\| \\
&\leq M_A c\|u_k - u\|_{\mathcal{PC}} + \frac{\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s,u_k(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u_k(\tau))d\tau) \\
&- f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau)\|_{\mathcal{PC}}ds \\
&\leq M_A c\|u_k - u\|_{\mathcal{PC}} + \frac{M_A}{\Gamma(\alpha+1)}t_1^\alpha\|f(s,u_k(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u_k(\tau))d\tau) \\
&- f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau)\|_{\mathcal{PC}}
\end{aligned}$$

Cas 2 : Pour $t \in (t_i, s_i]$, $i = 1, \ldots, n$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u_k(t) - \Gamma u(t)\| &= \|I_i(u_k(t_i)) + g_i(t,u_k(t))) - I_i(u(t_i)) - g_i(t,u(t)))\| \\
&\leq L_I\|u_k - u\| + L_{g_i}\|u_k - u\| \\
&\leq (L_I + L_{g_i})\|u_k - u\|_{\mathcal{PC}}
\end{aligned}$$

Cas 3 : Pour $t \in (s_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u_k(t) - \Gamma u(t)\| &\leq \|\mathcal{P}_\alpha(t-s_i)[I_i(u_k(t_i)) - I_i(u(t_i)) + g_i(s,u_k((s_i))) - g_i(s,u(s_i)))]\| \\
&+ \|\mathcal{P}_\alpha(t-s_i)\|\Big\|\int_0^{s_i}(t-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(s_i-s)\Big(f(s,u_k(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u_k(\tau))d\tau) \\
&- f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau)\Big)ds\Big\| \\
&+ \Big\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(t-s)[f(s,u_k(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u_k(\tau))d\tau) \\
&- f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau)]ds\Big\| \\
&\leq M_A\Big[(L_I + L_{g_i})\|u_k - u\|_{\mathcal{PC}} + \frac{M_A}{\Gamma(\alpha+1)}s_i^\alpha\|(f(s,u_k(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u_k(\tau))d\tau) \\
&- f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau))\|_{\mathcal{PC}}\Big] \\
&+ \frac{M_A}{\Gamma(\alpha+1)}t_{i+1}^\alpha\|[f(s,u_k(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u_k(\tau))d\tau) \\
&- f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau)]\|_{\mathcal{PC}},
\end{aligned}$$

par suite $\|\Gamma u_k - \Gamma u\|_{\mathcal{PC}}$ pour $k \longrightarrow \infty$.
Ce qui implique que Γ est continu sur $\mathcal{PC}([0,b],X)$.
Étape 2 : Montrons que l'opérateur Γ est borné .
Il suffit de prouver que $\Gamma W \subseteq W$, pour toute $u \in W \subseteq \mathcal{PC}([0,b],X)$, par $(H_3)(i)$, on a
Cas 1 : Maintenant, pour chaque $t \in [0, t_1]$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t)\| &\leq M_A(\|u_0\| + c\|u\| + d) + \frac{\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)}\|\int_0^t [f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau)) + B(s)c(s)]ds\| \\
&\leq M_A(\|u_0\| + cr + d) + \frac{M_A}{\Gamma(\alpha+1)}t_1^\alpha[m_f(s)\Omega_f(\|u\| + l\int_0^s \nu(s,\tau)d\tau\|u\|) + \|Bc\|_{\mathcal{L}^1}] \\
&\leq M_A(\|u_0\| + cr + d) + \frac{M_A}{\Gamma(\alpha+1)}t_1^\alpha[m_f(s)\Omega_f r(1 + l\nu^*) + \|Bc\|_{\mathcal{L}^1}] \leq r
\end{aligned}$$

Cas 2 : Maintenant, pour chaque $t \in (t_i, s_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t)\| &\leq \|I_i(u(t_i))\| + \|g_i(s_i, u(s_i)\| \leq \phi_I \|u\| + M_i \|u\| \\
&\leq (\phi_I + M_i)\|u\| \leq r
\end{aligned}$$

Cas 3 : Maintenant, pour chaque $t \in (s_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t)\| &\leq \Big\| \mathcal{P}_\alpha(t - s_i)\Big[I_i(u(t_i)) + g_i(s_i, u(s_i)) \\
&+ \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} \mathcal{Q}_\alpha(s_i - s)[f(s, u(s), \int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau)) \\
&+ Bc(s))ds\Big]\Big\| + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\mathcal{Q}_\alpha(t-s)(f(s,u(s), \int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau)) + B(s)c(s)]\|ds \\
&\leq M_A[\phi_I r + M_i r + \frac{M_A}{\Gamma(\alpha+1)} s_i^\alpha([m_f(s)\Omega_f r(1 + l\nu^*) + \|Bc\|_{\mathcal{L}^1}])] \\
&+ \frac{M_A}{\Gamma(\alpha+1)} t_{i+1}^\alpha([m_f(s)\Omega_f r(1 + l\nu^*) + \|Bc\|_{\mathcal{L}^1}]) \leq r
\end{aligned}$$

Alors, $\Gamma u \in W$, ce qui implique que $\Gamma W \subset W$.
Étape 3 : Prouvons que Γ est equicontinu.
Cas 1 : Pour l'intervalle $[0, t_1]$, $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t_1$ et pour chacun $\Gamma \in W(u)$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(\tau_2) - \Gamma u(\tau_1)\| &\leq \|\mathcal{P}_\alpha(\tau_2) - \mathcal{P}_\alpha(\tau_1)\|(\|u_0\| + c\|u\| + d) \\
&+ \Big\| \int_0^{\tau_2} \mathcal{Q}_\alpha(\tau_2 - s)[f(s,u(s), \int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau)) + B(s)c(s)]ds \\
&- \int_0^{\tau_1} \mathcal{Q}_\alpha(\tau_1 - s)[f(s,u(s), \int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau)) + B(s)c(s)]ds\Big\| \\
&\leq \|\mathcal{P}_\alpha(\tau_2) - \mathcal{P}_\alpha(\tau_1)\|(\|u_0\| + cr + d) \\
&+ \int_0^{\tau_1} \|\mathcal{Q}_\alpha(\tau_2 - s) - \mathcal{Q}_\alpha(\tau_1 - s)\|[m_f(s)\Omega_f r(1 + l\nu^*) + \|Bc\|_{\mathcal{L}^1}]ds \\
&- \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{Q}_\alpha(\tau_2 - s)[m_f(s)\Omega_f r(1 + l\nu^*) + \|Bc\|_{\mathcal{L}^1}]ds
\end{aligned}$$

Cas 2 : Pour l'intervalle $(t_i, s_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $t_i \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq s_i$ on a

$$\|\Gamma u(\tau_2) - \Gamma u(\tau_1)\| \leq L_{g_i}\|u(\tau_2) - u(\tau_1)\|$$

Cas 3 : Pour l'intervalle $(s_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $s_i \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t_{i+1}$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(\tau_2) - \Gamma u(\tau_1)\| &\leq \|\mathcal{P}_\alpha(\tau_2 - s_i) - \mathcal{P}_\alpha(\tau_1 - s_i)\|(\phi_I\|u\| + L_{g_i}\|u(\tau_2) - u(\tau_1)\|) \\
&+ \Big\| \int_0^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(\tau_2 - s)(f(s,u(s), \int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau)) + B(s)c(s))ds \\
&- \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(\tau_1 - s)(f(s,u(s), \int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau)) + B(s)c(s))ds\Big\| \\
&\leq \|\mathcal{P}_\alpha(\tau_2 - s_i) - \mathcal{P}_\alpha(\tau_1 - s_i)\|(\phi_I\|u\| + L_{g_i}\|u(\tau_2) - u(\tau_1)\|) \\
&+ \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{\alpha-1}\|\mathcal{Q}_\alpha(\tau_2 - s) - \mathcal{Q}_\alpha(\tau_1 - s)\|[m_f(s)\Omega_f r(1 + l\nu^*) + \|Bc\|_{\mathcal{L}^1}]ds \\
&- \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1}\|\mathcal{Q}_\alpha(\tau_2 - s)\|[m_f(s)\Omega_f r(1 + l\nu^*) + \|Bc\|_{\mathcal{L}^1}]ds
\end{aligned}$$

Par suite, nous obtenons $\|\Gamma u(\tau_2) - \Gamma u(\tau_1)\| \longrightarrow 0$ quand $\tau_2 \longrightarrow \tau_1$. Alors Γ est équicontinu.

Étape 4 : Vérifiant la condition de Mönch .
Nous supposons que $V \subseteq W$ est dénombrable et $V \subseteq \overline{conv}(\{0\} \cup \Gamma(V))$. Nous montrons que $\mu(V) = 0$ où μ est la mesure de non-compacité de Hausdorff.
Supposons que $V = \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, on peut facilement vérifier que $\Gamma(V)$ est borné et équicontinu.
Cas 1 : Pour chaque $t \in [0, t_1]$ on a

$$(\Gamma u)(t) = \mathcal{P}_\alpha(t)[u_0 + k(u)] + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(t-s)[f(s, u(s), \int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds$$

$$(\Gamma u)(t) = (\Gamma_1 u)(t) + (\Gamma_2 u)(t)$$

où

$$(\Gamma_1 u)(t) = \mathcal{P}_\alpha(t)[u_0 + k(u)]$$

$(\Gamma_2 u)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(t-s)[f(s, u(s), \int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds$ D'autre, $\Gamma_1 : V \longrightarrow \mathcal{PC}([0,b], X)$ est Lipschitz avec constante de Lipschitz $M_A c$ en raison des conditions (H_1) et (H_4).
Supposons que $u, v \in V$, on a,

$$\|(\Gamma_1 u)(t) - (\Gamma_1 v)(t)\| \leq \sup_{t\in[0,t_1]} \|\mathcal{P}_\alpha(t)[k(u) - k(v)]\| \leq M_A c\|u - v\|_{\mathcal{PC}}$$

Donc, de Lemme 5.1.1 , 6.1.2, 6.1.3 et les hypothèses $(H_3)(ii)$, $((H_6)(ii)$, on a

$$\begin{aligned}
\mu(\{\Gamma u_k\}_{k=1}^{\infty}) &\leq \mu(\{\Gamma_1 u_k\}_{k=1}^{\infty}) + \mu(\{\Gamma_2 u_k\}_{k=1}^{\infty}) \\
&\leq M_A c\mu(\{u_k\}_{k=1}^{\infty}) \\
&+ \mu\Big(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(t-s)[f(s, u(s), \int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds\Big) \\
&\leq M_A c\mu(\{u_k\}_{k=1}^{\infty}) \\
&+ \frac{2\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t \mu\Big((t-s)^{\alpha-1}[f(s, u(s), \int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds\Big) \\
&\leq M_A c\mu(\{u_k\}_{k=1}^{\infty}) \\
&+ \frac{2\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\eta(t)\Big[\sup_{0\leq s\leq t_1} \mu(\{u_k(s)\}_{k=1}^{\infty}) + \mu(\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,\{u_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty})d\tau))\Big]ds \\
&\leq M_A c\mu(\{u_k\}_{k=1}^{\infty}) \\
&+ \frac{2\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\eta(t)[\sup_{0\leq s\leq t_1} \mu(\{u_k(s)\}_{k=1}^{\infty}) + 2l\int_0^s \psi(s,\tau)d\tau\mu(\{u_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty})]ds \\
&\leq M_A c\mu(\{u_k\}_{k=1}^{\infty}) \\
&+ \frac{2\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\eta(t)[\sup_{0\leq s\leq t_1} \mu(\{u_k(s)\}_{k=1}^{\infty}) + 2l\psi^*\mu(\{u_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty})]ds \\
&\leq M_A c\mu(\{u_k\}_{k=1}^{\infty}) + \frac{2M_A t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\zeta^*(1+2l\psi^*)(\sup_{0\leq s\leq t_1} \mu_{\mathcal{PC}}(V(s))) \\
&\leq M_A[c + \frac{2t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\zeta^*(1+2l\psi^*)](\sup_{0\leq s\leq t_1} \mu_{\mathcal{PC}}(V(s)))
\end{aligned}$$

Cas 2 : Pour chaque $t \in (t_i, s_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, on a

$$\begin{aligned}
\mu(\{\Gamma u_k\}_{k=1}^{\infty}) &\leq \mu(I_i(u_k(s_i))) + \mu(g_i(s_i, u_k(s_i))) \\
&\leq (\phi_I + M_i)(\sup_{t_i\leq s\leq s_i} \mu_{\mathcal{PC}}(V(s)))
\end{aligned}$$

Cas 3 : Pour chaque $t \in (s_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, on a

$$\begin{aligned}
(\Gamma u)(t) &= \mathcal{P}_\alpha(t-s_i)\Big[I_i(u(t_i)) + g_i(s_i, u(s_i)) \\
&- \int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(s_i-s)[f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]\Big] \\
&+ \int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(t-s)[f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds
\end{aligned}$$

$(\Gamma u)(t) = (\Gamma_1 u)(t) + (\Gamma_2 u)(t)$
où $(\Gamma_1 u)(t) = \mathcal{P}_\alpha(t-s_i)(I_i(u(t_i)) + g_i(s_i, u(s_i))$

$$\begin{aligned}
(\Gamma_2 u)(t) &= \int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(t-s)[f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds \\
&- \mathcal{P}_\alpha(t-s_i)\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}\mathcal{Q}_\alpha(s_i-s)[f(s,u(s),\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds
\end{aligned}$$

D'autre part, $\Gamma_1 : V \longrightarrow \mathcal{PC}([0,b], X$ est Lipschitz avec constante de Lipschitz $M_A(L_I + L_{g_i})$ en raison des conditions (H_1) and $(H_2)(i)$.
Supposons que $u, v \in V$, on a,

$$\begin{aligned}
\|(\Gamma_1 u)(t) - (\Gamma_1 v)(t)\| &= \|\mathcal{P}_\alpha(t-s_i)\|(\|I_i(u(t_i)) - I_i(u(t_i))\| + \|g_i(s_i, u(s_i) - g_i(s_i, v(s_i)\|) \\
&\leq M_A(L_I + L_{g_i})\|u - v\|_{\mathcal{PC}}
\end{aligned}$$

Donc, de Lemme 5.1.1 , 6.1.2, 6.1.3 et les hypothèses $(H_3)(ii)$, $(H_6)(ii)$, on a

$$\begin{array}{rcl}
\mu(\{\Gamma u_k\}_{k=1}^{\infty}) & \leq & \mu(\{\Gamma_1 u_k\}_{k=1}^{\infty}) + \mu(\{\Gamma_2 u_k\}_{k=1}^{\infty}) \\
& \leq & M_A(L_I + L_{g_i})\mu(\{u_k\}_{k=1}^{\infty}) \\
& + & \frac{2\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu([f(s,u(s), \int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds) \\
& + & \frac{2\alpha M_A^2}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\alpha-1} \mu([f(s,u(s), \int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,u(\tau))d\tau) + B(s)c(s)]ds) \\
& \leq & M_A(L_I + L_{g_i})\mu(\{u_k\}_{k=1}^{\infty}) + \frac{2\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\eta(s)[\sup\limits_{s_i \leq s \leq t_{i+1}} \mu(\{u_k(s)\}_{k=1}^{\infty}) \\
& + & \mu(\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,\{u_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty})d\tau))]ds \\
& + & \frac{2\alpha M_A^2}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\alpha-1}\eta(s)[\sup\limits_{s_i \leq s \leq t_{i+1}} \mu(\{u_k(s)\}_{k=1}^{\infty}) \\
& + & \mu(\int_0^s \rho(s,\tau)h(s,\tau,\{u_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty})d\tau))]ds \\
& \leq & M_A(L_I + L_{g_i})\mu(\{u_k\}_{k=1}^{\infty}) + \frac{2\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[\eta(s)[\sup\limits_{s_i \leq s \leq t_{i+1}} \mu(\{u_k(s)\}_{k=1}^{\infty}) \\
& + & 2l\int_0^s \psi(s,\tau)d\tau\mu(\{u_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty})]ds \\
& + & \frac{2\alpha M_A^2}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\alpha-1}\eta(s)[\sup\limits_{s_i \leq s \leq t_{i+1}} \mu(\{u_k(s)\}_{k=1}^{\infty}) + 2l\int_0^s \psi(s,\tau)d\tau\mu(\{u_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty})]ds \\
& \leq & M_A(L_I + L_{g_i})\mu(\{u_k\}_{k=1}^{\infty}) \\
& + & \frac{2\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\eta(s)[\sup\limits_{s_i \leq s \leq t_{i+1}} \mu(\{u_k(s)\}_{k=1}^{\infty}) + 2l\psi^*\mu(\{u_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty})]ds \\
& + & \frac{2\alpha M_A^2}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\alpha-1}\eta(s)[\sup\limits_{s_i \leq s \leq t_{i+1}} \mu(\{u_k(s)\}_{k=1}^{\infty}) + 2l\psi^*\mu(\{u_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty})] \\
& \leq & M_A(L_I + L_{g_i})\mu(\{u_k\}_{k=1}^{\infty}) + \frac{2M_A t_{i+1}^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\zeta^*[\sup\limits_{s_i \leq s \leq t_{i+1}} \mu(\{u_k(s)\}_{k=1}^{\infty}) \\
& + & 2l\psi^*\mu(\{u_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty})] \\
& + & \frac{2M_A^2 s_i^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\zeta^*[\sup\limits_{s_i \leq s \leq t_{i+1}} \mu(\{u_k(s)\}_{k=1}^{\infty}) + 2l\psi^*\mu(\{u_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty})] \\
& \leq & M_A[L_I + L_{g_i} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\zeta^*(1+2l\psi^*)(t_{i+1}^{\alpha} + M_A s_i^{\alpha})] \sup\limits_{s_i \leq s \leq t_{i+1}} \mu_{\mathcal{PC}}(V(s))
\end{array}$$

D'où, nous avons

$$\begin{array}{rcl}
\mu_{\mathcal{PC}}(\Gamma(V)) & \leq & M_A[L_I + L_{g_i} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\zeta^*(1+2l\psi^*)(t_{i+1}^{\alpha} + M_A s_i^{\alpha})] \sup\limits_{s_i \leq s \leq t_{i+1}} \mu_{\mathcal{PC}}(V) \\
& \leq & \lambda^* \mu_{\mathcal{PC}}(V)
\end{array}$$

Ainsi, à partir de la condition de Mönch nous obtenons,

$$\mu_{\mathcal{PC}}(V) \leq \mu_{\mathcal{PC}}((\overline{conv}\{0\}) \cup \Gamma(V)) = \mu_{\mathcal{PC}}(\Gamma(V)) \leq \lambda^* \mu_{\mathcal{PC}}(V)$$

Ce qui implique que $\mu_{\mathcal{PC}}(V) = 0$. D'après le Théorème 6.1.2, Γ admet un point fixe W. Il en résulte que le problème (6.1) admet au moins une solution définie sur J. Ce qui complète la preuve. □

6.3 Exemple

Dans cette section, $X = L^2([0,\pi],\mathbb{R})$ et définissons l'opérateur A par $Ax = x''$ avec le domaine

$$D(A) = \{x \in X : x'' \in X, x(0) = x(\pi) = 0\}.$$

Il est bien connu que A est l'opérateur linéaire borné d'un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X et que $\|T(t)\| \leq e^{-t}$ pour tout $t \geq 0$.
Nous considérons un problème non local d'équations intégrodifférentielles impulsives donné par,

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{2}}u(t,w) = \frac{\partial^2}{\partial w^2}u(t,w) + f(t,u(t,w)) + c(t,w), w \in [0,\pi], t \in [0,1) \cup (2,3], \\ u(t,w) = I(u(t_1,w)) + g(t,u(t,w)), t \in (1,2], w \in [0,\pi], \\ u(t,w) = u_0(w), w \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u_0(w) + \sum_{i=1}^{n} a_i u(t_i,w), \quad w \in [0,\pi], t \in [0,3]. \end{cases} \tag{6.12}$$

où

$$f(t,u(t,w) = \frac{cost}{(t+6)^2}(u(t,w) + \arctan(u(t,w))),$$

$I(u(t,w)) = \frac{|u(t,w)|}{4+u(t,w)}$, $\qquad g(t,u(t,w)) = \frac{1}{3}\sin(u(t,w)) + e^t$,

$k(u)(w) = \sum_{i=1}^{n} a_i u(t_i,w)$, $\qquad$ et $\qquad B(t)c(t)(w) = c(t,w)$.

Alors, on a

$$M_A(a + \frac{2t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\zeta^*) = 0.5426789555,$$

$$M_A[L_I + L_{g_i} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\zeta^*(t_{i+1}^\alpha + M_A s_i^\alpha)] = 0.12348879 \tag{6.13}$$

Ainsi, toutes les hypothèses du Théorème 6.1.2 sont vérifiées. Alors le problème (6.12) admet au moins une solution .

Conclusions et Perspectives

Nous rappelons les points principaux de ce travail et nous signalons quelques directions pour des recherches futures. De façon générale, dans cette thèse, nous avons abordé quelques résultats d'existence des solutions de quelques équations différentielles d'ordre fractionnaire particulières à savoir, la première s'appelle équation intégro-différentielle hybride. Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe. En particulier, on a utilisé deux Théorèmes de point fixe de Dhage. La deuxième nommée équation intégro-différentielle fractionnaire impulsive .Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe. En particulier, l'emploi de Théorème de point fixe de Mönch .De plus nous avons traité l'existence de solutions faibles d 'une équations différentielles non locales a dérivé fractionnaires conformes avec la mesure de non-compacité dans les espaces de Banach .

Au première chapitre nous citons quelques principales étapes historiques de l'élaboration du calcul fractionnaire.

Le deuxième chapitre nous a permis de nous familiariser avec l'outil fractionnaire et nous a fournit quelques résultats élémentaires utiles pour l'étude de ces équations.

Nous avons commencé par un rappel historique du calcul fractionnaire, puis nous avons exposé la théorie de la dérivation fractionnaire : différents types de dérivation fractionnaire (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo et conforme) et quelques exemples et propriétés.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour une équation intégro-différentielle hybride du premier ordre. Sous des conditions mixtes de Lipschitz et Carathéodory on a montré des résultats d'existence de ce problème.

Au quatrième chapitre de ce travail on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un couple d'équations différentielles fractionnaires hybrides à conditions non locales en utilisant des différents théorèmes de la théorie de point fixe.

Le cinquième chapitre a était priver pour traiter l'existence de solutions faibles d 'une équations différentielles non locales a dérivé fractionnaires conformes avec la mesure de non-compacité dans les espaces de Banach en se basant sur le Théorème de point fixe de Darbo-Sadovskii.

Dans le sixième chapitre, on a travaillé cette fois-ci sur un problème aux limites pour une équation intégro-différentielle fractionnaire impulsive en utilisant la théorie des opérateurs de semi-groupes , fonctions de densité de probabilité,le Théorème du point fixe de Mönch et nous établissons quelques résultats d'existence de solution pour ces types de problèmes en se basant sur la mesure de non-compacité de Hausdorff.

- Dans les problèmes d'équations différentielles fractionnaires hybrides, la diversité du nombre fini ou infini de moments d'impulsion, fixes ou variables, nous incite à l'étude d'une classe d'équations différentielles d'ordres fractionnaires hybrides soumises à des conditions impulsives de type intégral. Ensuite nous prévoyons, l'établissement de conditions nécessaires et suffisantes d'admissibilité (régularité, stabilité...) pour ces équations.

Dans les inclusions différentielles, nous avons l'intention d'étudier ultérieurement des inclusions différentielles hybrides d'ordre fractionnaire ? avec $0 < \alpha < 1$ ou $1 < \alpha < 2$ et à divers conditions aux limites.

Bibliographie

[1] L. Euler. " De progressionibus transcentibus, sev quarum termini algebraice dari nequeunt". Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae 5, 36-57 (1738).

[2] J. Bana $\grave{s}$ and K. Goebel, Measures of Noncompactness in Banach Spaces, In Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, (1980).

[3] G.M. Mittag-Leffler." Sur la nouvelle fonction $e_{(x)}$". CR Acad. Sci. Paris Ser, $2(137) : 554 - 558, (1903)$.

[4] G.M." Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène ". Acta Mathematica,$2(29) : 101 - 182, (1905)$.

[5] E. Artin." Einfuhrung in die theorie der gammafunktion". Holt, Rinehart and Winston, New York, (1931).

[6] A. Erdèlyi." Higher transcendental functions ". McGraw-Hill New York,$1, 1955$

[7] K.B. Oldham and J. Spanier." The replacement of fick's laws by a formulation involving semidifferentiation". J. Electroanal. Chem. $26, 331 - 341(1970)$.

[8] V. H. Schmidt and J. E. Drumheller." Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate ". Physical Review B $4, 4582 - 4597(1971)$.

[9] K.B. Oldham and J. Spanier. " The Fractional Calculus". Academic Press, York and London (1974).

[10] B. Ross, "Fractional Calculus and its Applications ", Springer-Verlag, Berlin, (1975).

[11] J. Banas and K. Goebel," Measure of Noncompactness in Banach Spaces, in : Lecture Notes in Pure and Appl ". Math.,60, Marcel Dekker, New York,(1980).

[12] Mönch., H. :" Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces". Nonlinear Anal.$4, 985 - 999(1980)$.

[13] S. A. G. R. Karunthilaka, N. A. Hampson, R. Leek, and T. J. Sinclair." The impedance of the alkaline zinc-manganese dioxide cell. i. variation with state of charge". Journal of Applied Electrochemistry $11, 365 - 372(1981)$.

[14] R. L. Bagley, P. J. Torvik," A theoritical basis for the application of fractional calculus in viscoelasticity", Journal of Rheology 27, $201 - 210$ (1983).

[15] A. Pazy," Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations ", Springer-Verlag, (1983).

[16] R. L. Bagley and P. J. Torvik. "On the appearence of the fractional derivatives in the behaviour of real materials". J. Applied Mechanics $41, 294 - 298(1984)$.

[17] H.P. Heinz, On the behaviour of measure of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector-valued functions, Nonlinear Analalysis, 7(1983).

[18] K. Deimling, Nonlinear functional fnalysis, Springer-Verlag, New York, (1985).

[19] R. L. Bagley, P. J. Torvik,“ On the fractional calculus model of viscoelasticity behavior”, Journal of Rheology 30, $133 - 155$ (1986).

[20] Lakshmikantham, V, Bainov, DD, Simeonov, PS : ”Theory of Impulsive Differential Equations ”. World Scientific, Singapore (1989).

[21] L. Byszewski, Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 162(1991), 494-505.

[22] L. Gaul, P. Klein, S. Kempfle,“ Damping description involving fractional operators”, Mech. Syst. Signal Process.5(1991)$81 - 88$.

[23] S. Samko, A. Kilbas, and O. Marichev,“ Fractional integrals and derivatives : Theory and Applications”, Gordon and Breach, London,(1993).

[24] K.S. Miller and B. Ross. ” An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations”, Wiley, New York (1993).

[25] B.C. Dhage.” On a α-condensing mappings in banach algebras ”. Math. Student, 63(1) : $146152, 1994$..

[26] I. Podlubny. ”Fractional-order system and fractional-order controllers. Technical report uef $-03-94$ ” Institut of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovakia (1994).

[27] A. Oustaloup,“ La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications”, Hermès, Paris,(1995).

[28] A. Oustaloup, X. Moreau, and M. Nouillant.” The crone suspension”. Control Eng. Practice 4(8),$1101 - 1108$(1996).

[29] F. Mainardi,“ Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in : A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics”, Springer-Verlag, Wien, Austria,(1997).

[30] Ntouyas, S.K., and Tsamatos,P., Ch. :” Global existence for second order semilinear ordinary and delay integro differential with nonlocal conditions”, Applicable Anal.Vol.67, no.$3 - 4, pp.245 - 257,$ (1997).

[31] Yu. Rossikhin, M.V. Shitikova,” Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids”, Appl. Mech. Rev. 50(1)(1997)$15 - 67$.

[32] R. Hotzel.” Contribution á Théorie Structurelle et á la commande des Systèmes Linéaires Fractionnaires”. Thèse de Doctorat, Université de PARIS XI, Orsay, France (1998).

[33] Bothe., D. :” Multivalued perturbation of m-accretive differential inclusions lsr ”. J Math.108.$109 - 138$(1998).

[34] I. Podlubny.” Fractional Differential Equations ”. Academic Press, New York (1999).

[35] A. Lasia.” Modern Aspects of Electrochemistry ”. Kluwer Academic/Plenum, New York (1999).

[36] K. Diethelm, A. D. Freed,“ On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoelasticity, in : F. Keil, W. Mackens, H. Voss, J. Werther (Eds.), Scientific computing in chemical engineering II-Computational fluid dynamics, reaction engineering and molecular properties”, Springer-Verlag, Heidelberg, (1999), pp. $217 - 307$.

[37] R. Hilfer, " Applications of Fractional Calculus in Physics", World Scientific,(2000).

[38] Mainardi, F, Paradisi, P, Gorenflo, R :" Probability distributions generated by fractional diffusion equations". In : Kertesz, J,Kondor, I (eds.) Econophysics : An Emerging Science. Kluwer Academic, Dordrecht (2000).

[39] Agarwal, R. P., Meehan, M., O'Regan, D. :" Fixed Point Theory and Applications". Cambridge University Press, Cambridge,(2001).

[40] C. C. Tseng," Design of fractional order digital FIR differentiators ", IEEE Signal Processing Letters,(2001), $3, (8), pp77-79$.

[41] El-Borai, MM : "Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolution equations". Chaos Solitons Fractals $14, 433-440(2002)$.

[42] L. Debanth," Recent applications of fractional calculus to science and engineering", Int.J. Math. Appl. Sci. 54(2003), $3413-3442$.

[43] N. Mrani." Contribution á l'étude des Systèmes Fractionnaires : Théorie et Applications. Thèse de Doctorat ", Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat, Maroc (2004).

[44] T. Pfitzenreiter." A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations".Z. Angew. Math. Mech. $84(4), 284-287(2004)$.

[45] El-Borai, MM :" The fundamental solutions for fractional evolution equations of parabolic type ". J. Appl. Math. Stoch.Anal. $3, 197-211(2004)$.

[46] B.C. Dhage." A nonlinear alternative in banach algebras with applications to functional differential equations, nonlinear funct ". Anal. Appl.,8(40) : $563575, (2004)$.

[47] Liang, J., Liu, J.H., Xiao, T.J. :" Nonlocal Cauchy problems governed by compact operator families ", Nonlinear Anal.$57(2004)183-189$.

[48] A.V. Chechkin, R. Gorenflo, I. M. Sokolov, "Fractional diffusion in inhomogeneous media". J. Phys. A, Math. Gen. 38, (2005),$679-684$.

[49] B.C. Dhage. " On a fixed point theorem in banach algebras with applications". Appl. Math. Lett., 18(3) : $273280, (2005)$.

[50] Y. Li, Existence of solutions of initial value problems for abstract semilinear evolution equations, Acta mathematica sinica-Chinese edition, 48(2005), 1089-1094.

[51] R. L. Magin, "Fractional calculus in bioengineering", Begell House, Redding, CT, USA, (2006).

[52] S. Zhang." Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations". Electronic J. Diff. Eq., $36 : 112, (2006)$.

[53] T. Hélie and D. Matignon." Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses". Math. Mod. and Meth. in Appl. Sc. pages 503-536 (2006).

[54] Kilbas, AA, Srivastava, HM, Trujillo, JJ : "Theory and Applications of Fractional Differential Equations". North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Elsevier, Amsterdam (2006).

[55] J. Sabatier, O.P. Agrawal, J.A. Tenreiro Machado." Advances in fractional calculus". Springer (2007).

[56] S. Das," Functional fractional calculus for system identification and controls", Springer,New York, (2008).

[57] R. Hilfer. " Threefold introduction to fractional derivatives". In G. Radons R. Klages and I. M. Sokolov, editors, Anomalous Transport : Foundations and Applications. Wiley-VCH (2008).

[58] Dong, Q., Li, G. :" Existence of solutions for semilinear differential equations with nonlocal conditions in Banach spaces ",Electron.J.Qual.Theory Differ. Equ.47.(2009).

[59] V. Lakshmikantham, S. Leela and J. Devi Vasundhara," Theory of fractional dynamic systems ", Cambridge ScientificPublishers ; (2009).

[60] C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu,“ Fractional-order systems and controls fundamentals and applications ", Springer-Verlag, England, UK, (2010) .

[61] F. Dubois, A. C. Galucio, and N. Point." Introduction á la dérivation fractionnaire, théorie et applications". Techniques de l'Ingénieur AF510(2010).

[62] B.C. Dhage and V. Lakshmikantham." Basic results on hybrid differential equations ". Nonlinear Anal. Hybrid,4(3) : 414424, (2010).

[63] Wang, JR, Feckan, M, Zhou, Y :" On the new concept of solutions and existence results for impulsive fractional evolution equations ". Dyn. Partial Differ. Equ. 8(4), $345-361$(2011).

[64] Wang, JR, Zhou, Y :" Existence and controllability results for fractional semilinear differential inclusions". Nonlinear Anal.12(6), $3642-3653$(2011).

[65] Mallika Arjunan,.M,Kavitha,.V.,Selvi,.S. : " Existence results for impulsive differential equations with nonlocal conditions via measures of noncompactness", J.Nonlinear Sci.Appl., Vol.5(2012), $195-205$.

[66] M. Pierri, D. O'Regan, V. Rolnik," Existence of solutions for semi-linear abstract differential equations with not instantaneous impulses ", Appl. Math. Comput.,219(2013), $6743-6749$.

[67] E. Hernàndez, D. O'Regan," On a new class of abstract impulsive differential equations ", Proc. Amer. Math. Soc., 141(2013), $1641-1649$.

[68] M. Pierri, D. O'Regan, V. Rolnik," Existence of solutions for semi-linear abstract differential equations with not instantaneous impulses ", Appl. Math. Comput.,219(2013), $6743-6749$.

[69] P. Chen and Y. Li, Monotone iterative technique for a class of semilinear evolution equations with nonlocal conditions, Results in Mathematics, 63(2013), 731-744.

[70] G. Bonanno, R. Rodriguez-Lopez, S. Tersian, " Existence of solutions to boundary value problem for impulsive fractional differential equations ", Fract. Calc. Appl. Anal.,17(2014), $717-744$.

[71] P. Kumar, D. N. Pandey, D. Bahuguna,"On a new class of abstract impulsive functional differential equations of fractional order ",J. Nonlinear Sci. Appl. 7(2014), $102-114$.

[72] R. Rodriguez-Lopez, S. Tersian, " Multiple solutions to boundary value problem for impulsive fractional differential equations ", Fract. Calc. Appl. Anal.,17(2014), $1016-1038$.

[73] G. A. Afrouzi, A. Hadjian, V. D. Radulescu, " Variational approach to fourth-order impulsive differential equations with two control parameters ", Results Math., 65(2014), $371-384$.

[74] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef and M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, 264(2014), 65-70.

[75] G. A. Afrouzi, A. Hadjian, S. Shokooh," Infinitely many solutions for a Dirichlet boundary value problem with impulsive condition ", Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys., 77(2015), $9-22$.

[76] T. Abdeljawad, On conformable fractional calculus, Journal of Computational and Applied Mathematics, 279(2015), 57-66.

[77] K. Malar.A. Anguraj ,"Existence Results of Abstract Impulsive Integrodifferential Systems with Measure of Non-compactness ",Journal of Statistical Science and Application, April (2016), Vol. 4, No. $03 - 04, 108 - 117$.

[78] M. Pierri, H. R. Henriquez, A. Prokopczyk," Global solutions for abstract differential equations with non-instantaneous impulses ", Mediterr. J. Math., $13(2016), 1685 - 1708$.

[79] S. Melliani, A. El Allaoui and L. S. Chadli ",A general class of periodic boundary value problems for controlled nonlinear impulsive evolution equations on Banach spaces ", Advances in Difference Equations (2016).

[80] M. Bouaouid, M. Atraoui, K. Hilal and S. Melliani, Fractional differential equations with nonlocal-delay condition, Journal of Advanced Mathematical Studies, $11(2018), 214 - 225$.

[81] M. Bouaouid, K. Hilal and S. Melliani, Nonlocal conformable fractional Cauchy problem with sectorial operator, Indian journal of pure and applied mathematics, 50(2019), 999-1010.