UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE

Faculté des Sciences et Techniques

Béni Mellal

Centre des Études Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Guida Karim

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques

Contribution à l'étude des équations différentielles fractionnaires quadratiques et des équations différentielles fractionnaires impulsives

Soutenue le 16/07/2019 devant le jury composé de :

Pr Hassan EL AMRI	École Normale Supérieure, Casablanca	Président
Pr Lalla Saadia CHADLI	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal	Rapporteur
Pr Elhoussine AZROUL	Faculté des Sciences Dhar El Mehrez, Fès	Rapporteur
Pr Adil ABBASSI	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal	Examinateur
Pr Larbi AFIFI	Faculté des Sciences Ain Chock, Casablanca	Examinateur
Pr Mohamed OUKESSOU	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal	Encadrant
Pr Khalid HILAL	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal	Co-encadrant
Pr M'hamed ELOMARI	École Supérieure de Technologie, Fès	Invité

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer, ici, ma plus profonde gratitude à mes directeurs de thèse, le Professeur Mohamed OUKESSOU et le Professeur Khalid HILAL, qui m'ont honoré par la confiance qu'ils m'ont accordé, par leur soutien et leurs précieuses directives durant toutes les années de thèse. Je tiens aussi à les remercier d'avantage pour leur encadrement fructueux et pour la précieuse formation qu'ils m'ont donné.

Je tiens également à adresser, du fond du cœur, mes plus sincères remerciements au Professeur Said MELLIANI, directeur du laboratoire de recherche "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique", pour son aide capitale, pour sa disponibilité, pour tout le temps qu'il a consacré à m'orienter pour faire les bons choix et pour ses conseils qui ont été particulièrement utiles.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire de "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique", qui m'ont accueilli parmi eux. Nos rencontres, nos échanges ont été d'une précieuse assistance pour mon travail de recherche.

Mes expressions de respect et d'amour les plus chaleureuses sont destinées à ma mère, mon père et mon frère, pour leurs soutiens et leurs encouragements permanents, leur patience et leur compréhension durant toutes les années consacrées à ce travail, qu'ils soient certains de toute ma reconnaissance.

Que mes amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail trouvent ici mes sincères remerciements.

Table des matières

Introduction **6**

1 Préliminaires **9**

1.1 Généralités sur le calcul fractionnaire 9

1.1.1 Fonctions spéciales utilisés dans le calcul fractionnaire 9

1.1.1.1 Fonction Gamma 9

1.1.1.2 Fonctions de Mittag-Leffler 10

1.1.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 11

1.1.3 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 12

1.1.4 Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . 13

1.1.5 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo 14

1.1.6 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo 14

1.2 Quelques résultats de la théorie du point fixe 15

1.2.1 Mesure de non-compacité au sens de Kuratowski 15

1.2.1.1 Notion de la mesure de non-compacité 15

1.2.1.2 Mesure de non-compacité de Kuratowski 15

1.2.2 Contractions strictes d'ensembles et applications condensantes 17

1.3 Théorèmes du point fixe utilisés dans la thèse 17

1.3.1 Théorème du point fixe de Dhage 18

1.3.2 Théorème du point fixe de Krasnoselskii 20

1.3.3 Théorème du point fixe de Sadovski 21

2 Existence des solutions positives d'une équation différentielle fractionnaire non-linéaire quadratique **22**

2.1 Préliminaires et notations 22

2.2 Définition de la solution inférieure 22

2.3 Construction des solutions de l'EDFQ 23

2.4 Résultats d'existence 26

3 Étude d'un problème fractionnaire impulsif avec une condition non-locale 33

3.1 Préliminaires et notations 33

3.2 Définition de la solution intégrale 34

3.3 Construction des solutions intégrales 35

3.4 Résultats d'existence 38

3.5 Exemples 49

4 Étude d'un problème fractionnaire impulsif avec un semi-groupe non-compact 51

4.1 Préliminaires et notations 51

4.2 Définition de la solution intégrale 52

4.3 Construction des solutions intégrales 52

4.4 Résultats d'existence 55

4.5 Exemple 69

Conclusion générale et perspectives 70

Bibliographie 71

Résumé

Les équations différentielles impliquant la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α avec $0 < \alpha < 1$, semblent être un outil important dans la modélisation des phénomènes dans plusieurs domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la théorie du contrôle, etc.

L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement de la théorie d'existence, voire d'unicité des solutions en étudiant une équation différentielle fractionnaire hybride quadratique dans un premier temps et des équations integro-différentielles impulsive dans un deuxième temps, tout cela à l'aide des théorèmes du point fixe. Tout d'abord on va traiter dans le deuxième chapitre l'existence des solutions positives d'une équation différentielle fractionnaire hybride quadratique, ensuite dans le troisième chapitre on va considérer une équation intégro-différentielle fractionnaire impulsive avec une condition non-locale, avec un opérateur A qui génère un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ compact. Enfin, dans le quatrième chapitre on va étudier un problème où le semi-groupe engendré $(T(t))_{t\geq 0}$ n'est pas nécessairement compact.

Introduction générale

Le calcul fractionnaire a connu un grand développement dans ces dernières années, plusieurs chercheurs se sont intéressés à cette théorie car elle généralise les opérations de dérivation et d'intégration aux ordres non-entiers. L'histoire de la dérivée d'ordre non-entier s'étale de la fin du 17ème siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand l'Hopital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \dfrac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non-entière, et écrit à l'Hopital :"...cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tirer des conséquences utiles".

Il a fallu attendre les années 1990 pour avoir apparaître les premières "conséquences utiles". la première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo (voir [45, 24]). A cette époque il n'y avait pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme une théorie abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la mécanique....

L'une des applications les plus importantes du calcul fractionnaire se trouve dans la viscoélasticité, pour un système mécanique comme une masse liée à un ressort, la force appliquée (la contrainte dans le cadre d'une description via un milieu continu) est proportionnelle au déplacement. De plus, la dissipation visqueuse classique est proportionnelle à la dérivée temporelle du déplacement. L'hypothèse de base faite pour les matériaux viscoélastiques linéaires est que la contrainte à l'instant actuel est une fonction linéaire de toute l'histoire des déformations.

Pour le cas fractionnaire, en général, les modèles rhéologiques (relatif à la rhéologie, branche de la mécanique qui étudie le comportement des matériaux du point de vue de la viscosité, la rigidité ou l'élasticité) utilisés en viscoélasticité linéaire sont constitués de ressorts et d'amortisseurs. Les lois de comportement de ces éléments rhéologiques peuvent être généralisées à partir de l'utilisation des dérivées fractionnaires.

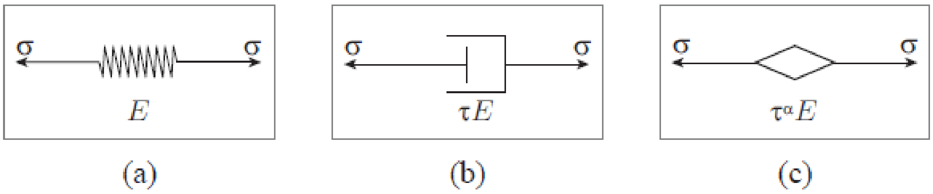

FIG. 1: Éléments rhéologiques de la viscoélasticité.

La loi du comportement associée à la réponse d'un élément élastique est décrite simplement par $\sigma = \tau^0 E D^0 \varepsilon = E\varepsilon$, où τ est le temps de relaxation, E le module élastique et D^0 l'opérateur différentiel temporel d'ordre zéro. Cela caractérise le comportement d'un ressort (voir Fig. 1(a)). La loi du comportement associée à la réponse d'un élément visqueux est donnée par $\sigma = \tau^1 E D^1 \varepsilon = \tau E \dot{\varepsilon}$, où τE correspond à la viscosité du matériau et D^1 à l'opérateur différentiel temporel d'ordre un. Cela caractérise le comportement d'un amortisseur (voir Fig. 1 (b)). Afin de généraliser les deux cas précédents, la loi du comportement linéaire peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{\sigma = \tau^\alpha E D^\alpha \varepsilon}$ $(*)$, où D^α est l'opérateur différentiel d'ordre fractionnaire, avec $0 \leq \alpha \leq 1$. L'élément rhéologique associé à l'équation $(*)$ présente des caractéristiques intermédiaires entre celles du ressort(*spring*) et de l'amortisseur(*dashpot*), d'où la désignation de *spring-pot* (voir Fig. 1(c)). Autrement dit, lorsque $\alpha = 0$, le comportement ne dépend que des caractéristiques des paramètres au temps présent tandis que pour $\alpha = 1$, il dépend des instants infiniment voisins. Pour α strictement compris entre 0 et 1, on a vu que la dérivée fractionnaire $D^\alpha \varepsilon$ d'ordre α dépend de toute l'évolution de la fonction $\varepsilon(t)$ dans le passé et on dit que dans ce cas, il y a un effet de mémoire de paramètre α.

Les modèles à dérivées fractionnaires présentent de nombreux avantages. Par exemple, l'écriture mathématique de ces modèles à base de dérivées fractionnaires est établie sur les théories moléculaires qui décrivent le comportement mécanique d'un milieu viscoélastique [43]. De plus, ces modèles vérifient le deuxième principe de la thermodynamique. Le principal atout des modèles viscoélastiques fractionnaires est certainement le nombre réduit de paramètres matériaux nécessaires à sa caractérisation. De nombreux matériaux viscoélastiques ont ainsi été caractérisés avec très peu de paramètres. Ces proporiétés caractéristiques font de l'approche par calcul fractionnaire un outil très attractif parmi les méthodes existantes.

Un autre exemple qui fait appel à la dérivation d'ordre fractionnaire est l'équation de diffusion d'ordre fractionnaire du second type introduite par R.R. Nigmatullin[36, 37], qui est donné par : $\mathbf{{}_0D_t^{\alpha}u(x,t)} = \dfrac{\mathbf{d^2u(x,t)}}{\mathbf{dx^2}}$, où $\alpha > 0$. F. Mainardi [32] a appelé cette équation par équation d'onde de diffusion fractionnaire. Pour $\alpha = 1$, c'est l'équation diff. classique et pour $\alpha = 2$, c'est l'équation des ondes. Pour $0 < \alpha < 1$ on a la diffusion ultra-faible, et pour les valeurs $1 < \alpha < 2$ on obtient ce qu'on appelle des processus intermédiaires.

En automatique, au début des années 1990 le régulateur CRONE(commande robuste d'ordre non entier) a été proposé par A. Oustaloup [39]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordres fractionnaires, ce régulateur permet d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. La réussite de cette approche a été énorme, et depuis, la commande d'ordres fractionnaires a attiré l'attention de nombreux chercheurs. En 1994, Podlubny [42] a proposé le régulateur $PI^{\alpha}D^{\beta}$ comprenant une intégration fractionnaire d'ordre α et une dérivation fractionnaire d'ordre β, élargissant ainsi le champ d'applications du calcul fractionnaire à la théorie de la commande.

D'autre part, les équations différentielles impulsives apparaissent comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel. La majorité des processus dans les sciences appliquées sont représentés par des équations différentielles. Cependant, la situation est différente dans certains phénomènes physiques subissant des changements au cours de leur évolution comme les systèmes mécaniques avec impact, les systèmes biologiques (battements du cœur, flux du sang,...), la dynamique des populations, les désastres naturels, etc. Ces changements sont souvent produits sous forme d'impulsions. La modélisation de tels phénomènes nécessite l'utilisation des formes qui font intervenir explicitement et simultanément l'évolution continue du phénomène ainsi que les changements instantanés (Par exemple en physique, mécanique, etc... [1, 2, 47, 13, 26]) ou non-instantanés (Par exemple l'équilibre hémodynamique d'une personne [17]). De tels modèles sont dits "impulsifs", ils sont évolutifs de processus continus régis par des équations différentielles combinées avec des équations représentant l'effet impulsif subi.

Motivé par toutes ces considérations, dans ma thèse, on s'est intéressé dans le deuxième chapitre, à l'étude d'une équation diff. fractionnaire à perturbation quadratique, en portant un intérêt très particulier aux récents travaux de K. Hilal et M. Kajouni [18, 19] et J.R. Wang [48].

D'autre part, on a considéré dans le chapitre 3 et 4, une classe d'équations différentielles fractionnaires avec impulsions non-instantanée impliquant deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre α et β.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit, il est subdivisé en trois parties. La première partie contient des généralités sur la théorie du calcul fractionnaire, la deuxième contient des résultats importants sur la théorie du point fixe, et la dernière partie on donne les théorèmes du point fixe utilisés dans la thèse.

1.1 Généralités sur le calcul fractionnaire

1.1.1 Fonctions spéciales utilisés dans le calcul fractionnaire

1.1.1.1 Fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexes à parties réelles positives).

Définition 1.1.1. (voir [11])

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction Gamma est donnée par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

(cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$).

Proposition 1.1.1. (voir [11])

Pour tout $x > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)...(x+n)}.$$

Cas particuliers

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = 1,$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

1.1.1.2 Fonctions de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle $exp(z)$, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 (voir [33]) et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{\Gamma(\alpha i + 1)}.$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres, joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi en 1953-1954 et elle est donnée par la définition suivante :

Définition 1.1.2. [8, 15] Soient $\alpha,\ \beta > 0$. La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres notée $E_{\alpha,\beta}(t)$ est définit par le développement en série :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{\Gamma(\alpha i + \beta)}.$$

En particulier, si $\beta = 1, E_{\alpha,1}(t)$ devient la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre $E_\alpha(t)$, i.e., $E_{\alpha,1}(t) = E_\alpha(t)$.

Lemme 1.1.1. [8]

Soit $0 < \alpha < 1$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc pour chaque $t \in [0, T]$, on a

(1)- Soit $0 < \alpha < 1$, et $K, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Alors pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-K(t-\tau)^\alpha) U (D^\alpha x)(\tau) d\tau &= Ux(t) - E_\alpha(-Kt^\alpha) Ux(0) \\ &\quad -K \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-K(t-s)^\alpha) Ux(s) ds \end{aligned}$$

(2)-

$$D_0^\alpha\left[\int_0^t f(t-s)g(s)ds\right](t)=\int_0^t D_0^\alpha[f(t)](s)g(t-s)ds+g(t)\lim_{t\to 0^+}[_tI_{0^+}^{1-\alpha}f](t).$$

Lemme 1.1.2. [23, 15]

(a)- $D_{a+}^\alpha E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha](x)=\lambda E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha],\quad (Re(\alpha)>0,\lambda\in\mathbb{C})$

(b)- $\left(I_{a+}^{\alpha'}(t-a)^{\beta-1}E_{\mu,\beta}[\lambda(t-a)^\mu]\right)(x)=(x-a)^{\alpha'+\beta-1}E_{\mu,\alpha'+\beta}[\lambda(x-a)^\mu],$

avec $\alpha'>0$, $\beta>0$ et $\mu>0$.

(c)- $\int_0^z t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)dt=z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha).$

(d) $|E_{\alpha,\beta}(z)|\leq C_1 exp(\sigma\,|z|^\rho)$, pour tout $\sigma>1$ et $\rho=\dfrac{1}{Re(\alpha)}$.

Remarque 1.1.1. D^α et I^α sont respectivement la dérivée et l'intégrale fractionnaire au sens de Caputo qu'on va définir par la suite.

1.1.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha\in\mathbb{C}(\Re(\alpha)>0)$, selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répété n-fois :

$$\begin{aligned}(I_a^n f)(x)&=\int_a^x dt_1\int_a^{t_1}dt_2...\int_a^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n\\&=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)dt,\qquad (n\in\mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

Définition 1.1.3. Soit $f\in L^1([a,b])$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha\in\mathbb{C}$ $(\Re(\alpha)>0)$ notée $I_a^\alpha f$ est définie par :

$$(I_a^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\qquad x>a$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la focntion Gamma donnée précédemment.

Théorème 1.1.1. [11, 45]

Si $f\in L^1([a,b])$, alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $x\in[a,b]$ et de plus $I_a^\alpha f\in L^1([a,b])$

Proposition 1.1.2. [11, 45]

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tels que $\Re(\alpha),\Re(\beta)>0$, pour toute fonction $f\in L^1([a,b])$, on a :

$$I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f) = I_a^{\alpha+\beta} = I_a^{\beta}(I_a^{\alpha} f)$$

pour presque tout $x \in [a,b]$. Si de plus $f \in C([a,b])$, alors cette identité est vraie pour tout $x \in [a,b]$.

1.1.3 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.1.4. [11, 45]

Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $(\Re(\alpha) > 0)$ notée $D_a^{\alpha} f$ est définie par :

$$(D_a^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt$$

où $n-1 < [\Re(\alpha)] < n$ et $x > a$.

En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on a

$$(D_a^0 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$(D_a^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right) \int_a^x f(t)dt = \frac{d^m}{dx^m} f(x)$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.1.2.

$$(D_a^{\alpha})(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha})(x)$$

tel que : $n = [\Re(\alpha)] + 1$, $x > a$.

La proposition suivante établie une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire.

Proposition 1.1.3. [11, 45]

Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a,b])$, alors la dérivée fractionnaire $D_a^{\alpha} f$ existe presque partout sur $[a,b]$ et de plus, elle est donnée par

$$D_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)} (x-a)^{j-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^n(t)dt$$

1.1.4 Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est linéaire.

Théorème 1.1.2. [11, 45]

Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe et on a :

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(D_a^\alpha f)(x) + \mu(D_a^\alpha g)(x)$$

Lemme 1.1.3. Soit $\alpha \in]n-1, n[$ et f une fonction vérifiant $D_a^\alpha f = 0$ alors :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}(x-a)^{j+\alpha-n}$$

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées dans la proposition suivante :

Proposition 1.1.4. [11, 45]

Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n$, $m-1 \leq \beta < m$.

1. Pour $f \in L^1([a,b])$, l'égalité :

   $$D_a^\alpha(I_a^\alpha f(t)) = f(t)$$

   est vraie presque partout sur $[a,b]$

2. Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a,b])$, la relation :

   $$D_a^\beta(I_a^\alpha)(x) = (I^{\alpha-\beta} f)(x)$$

   est vraie presque partout sur $[a,b]$

3. Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha}$ existe, alors on a :

   $$D_a^\beta(I_a^\alpha)(x) = (D^{\beta-\alpha} f)(x)$$

4. Si $f \in L^1([a,b])$ et $I^{n-\alpha} \in AC^n([a,b])$ avec $n = \Re(\alpha)+1$, alors :

   $$\left[I_a^\alpha(D_a^\beta f)\right](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \to a^+} \left[(\frac{d}{dx})^j I_a^{n-\alpha} f\right](x)$$

1.1.5 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) se sont rendus compte que cette définition doit être révisée, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 1.1.5. [11, 45]

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\alpha) > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \Re(\alpha) < n$ et $f \in C^n([a,b])$.

La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^cD_a^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(x) &:= I^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1} dt \end{aligned}$$

Remarque 1.1.3. La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]n-1, n[$ s'obtient par une application de la dérivée classique d'ordre n suivit par l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $n-\alpha$, alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

1.1.6 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 1.1.3. [11, 45]

Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $(n-1)$ dérivée en a et si $D_a^\alpha f$ existe, alors :

$$({}^cD_a^\alpha f)(x) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k \right]$$

presque partout sur $[a,b]$.

Remarque 1.1.4. Le résultat du théorème précédent signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire de reste dans le développement de Taylor de f.

1.2 Quelques résultats de la théorie du point fixe

1.2.1 Mesure de non-compacité au sens de Kuratowski

1.2.1.1 Notion de la mesure de non-compacité

Définition 1.2.1. [3] Soit E un espace de Banach et $\mathcal{A}$ la famille de tous les sous-ensembles bornés de E. Une fonction ϕ définie de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty[$ est appelée **mesure de non-compacité** (MNC) sur E si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\phi(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est relativement compacte,
2. $\phi(A) = \phi(\overline{A})$, $\forall A \in \mathcal{A}$,
3. $\phi(A_1 \cup A_2) = max\,\{\phi(A_1), \phi(A_2)\}$, $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.2.1.

1. La fonction $\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty[$ définie par :

$$\gamma(A) = inf\{\epsilon > 0 : A \text{ admet un recouvrement fini par des boules de rayon} \leq \epsilon\}$$

est appelée M.N.C de Hausdorff.

2. La fonction $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty[$ telle que :

$$\phi(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ est relativement compact} \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

est une mesure de non-compacité. En effet,

a) $\phi(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est relativement compact(évidente).

b) $\phi(A) = \phi(\overline{A})$, car A est relativement compact $\Leftrightarrow \overline{A}$ est compact.

c) $(A_1 \cup A_2)$ relativement compact $\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \text{ est relativement compact,} \\ \text{et} \\ A_2 \text{ est relativement compact.} \end{cases}$

Alors, dans tous les cas on trouve $\phi(A_1 \cup A_2) = max\{\phi(A_1), \phi(A_2)\}$.

1.2.1.2 Mesure de non-compacité de Kuratowski

Définition 1.2.2. [3](**la mesure de non-compacité de Kuratowski**) Soient E un espace de Banach, $\mathcal{A}$ la famille de tous les sous-ensembles bornés de E. **La mesure de non-compacité au sens de Kuratowski** est l'application $\beta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\beta(A) = \inf \left\{ \begin{array}{l} d > 0 \text{ tel que } A \text{ admet un recouvrement fini d'ensembles} \\ \text{de diamètre inférieur ou égal à } d \end{array} \right\},$$

c'est à dire

$$\beta(A) = \inf \{d > 0 \text{ tel que } \exists A_1, A_2, ..., A_n \subset E; A \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i, diam(A_i) \leq d; \forall i = 1, ..., n\},$$

où $diam(A_i) = \sup \parallel x - y \parallel, \forall x, y \in A_i$ et $diam(\emptyset) = 0$.

Remarque 1.2.1.
1. La définition de la mesure de non-compacité de Kuratowski est significative non seulement pour les espaces de Banach mais également pour les espaces métriques arbitraires,
2. $0 \leq \beta(A) \leq diam(A) < \infty$, $\forall A \in \mathcal{A}$,
3. A est fini $\Rightarrow \beta(A) = 0$.

Voici quelques propriétés élémentaires de la mesure de non-compacité de Kuratowski.

Proposition 1.2.1. [3] Soient E un espace de Banach et $\mathcal{A}$ la famille des ensembles bornés de E. Alors, la mesure de non-compacité de Kuratowski β a les propriétés suivantes :

1. $\beta(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{A}$ est compact,
2. $A \subset B \Rightarrow \beta(A) \leq \beta(B)$, i.e β est croissante,
3. $\beta(\overline{A}) = \beta(A)$,
4. $\beta(A \cup B) = \max\{\beta(A), \beta(B)\}$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$,
5. $\beta(A \bigcap B) \leq \min\{\beta(A), \beta(B)\}$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$,
6. $\beta(\lambda A) = |\lambda|\beta(A)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{A}$,
7. $\beta(A + B) \leq \beta(A) + \beta(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$,
8. $\beta(A + x) = \beta(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall x \in E$,
9. $\beta(convA) = \beta(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$,
10. $|\beta(A) - \beta(B)| \leq \beta(B(0, 1))H_d(A, B)$ où $H_d(A, B) = \max\left(\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right)$ est la distance de Hausdorff entre A et B.

Remarque 1.2.2.
a. La MNC de Kuratowski β est une semi-norme sur E d'après les propriétés de semi-homogénéité et semi-additivité algébrique.
b. Ce n'est pas évident de déterminer la valeur explicite de $\beta(A)$ pour un ensemble borné A d'un espace de Banach.

Définition 1.2.3. [3] Soit X un espace de Banach et Ω_X les sous-ensembles bornés de X. La mesure de non-compacité de Kuratowski est l'application $\beta : \Omega_X \longrightarrow [0, \infty)$ définie par :

$$\beta(B) = \inf \{\epsilon > 0 : B \subset \cup_{i=1}^{n} B_i \textit{ et } diam(B_i) \leq \epsilon \textit{ pour } i = 1, 2, .., n\}$$

et $diamB_i = \sup \{|x - y| : x, y \in B_i\}$ et $B \in \Omega_X$

Remarque 1.2.3. Il est clair que $\beta(B) \leq diam(B)$.

Lemme 1.2.1. [3] Soit X un espace de Banach, $W \subset X$ borné. Alors il existe un ensemble dénombrable $W_1 \subset W$ tel que

$$\beta(W) \leq 2\beta(W_1).$$

Lemme 1.2.2. [3] Soit X un espace de Banach, $W \subset C(J,X)$ borné et équicontinu. Alors $\beta(W(t))$ est continu sur J et

$$\beta(W) = \max_{t\in J} \beta(W(t)) = \beta(W(J)).$$

Lemme 1.2.3. [16] Soit X un espace de Banach, $W = \{u_n\} \in C(J,X)$ un ensemble dénombrable et borné. Alors $\beta(W(t))$ est une intégrale de Lebesgue sur J et on a :

$$\beta\left(\left\{\int_J u_n(t)dt : n \in \mathbb{N}\right\}\right) \leq 2\int_J \beta(W(t))dt.$$

1.2.2 Contractions strictes d'ensembles et applications condensantes

Définition 1.2.4. Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \longrightarrow F$ une application continue et bornée (i.e. f transforme les bornés de E en des bornés de F).

a. On dit que f est une k**-contraction d'ensemble** s'il existe $k \geq 0$, tel que

$$\beta(f(A)) \leq k\beta(A),\ \forall A \text{ borné de } E,$$

b. L'application f est appelée k**-contraction stricte d'ensembles**(ou **contraction stricte d'ensembles**) si $0 \leq k \leq 1$

c. L'application f est dite β**-condensante** si

$\beta(f(A)) < \beta(A)$, $\forall A$ borné non relativement compact ($\beta(A) > 0$).

β est la mesure de non-compacité de Kuratowski.

Remarque 1.2.4. Il est évident que toute application f complètement continue, est une k-contraction stricte d'ensembles et toute k-contraction stricte d'ensembles est condensante.

De plus on a :

1. f est k-lipschitzienne $\Rightarrow$ f est une k-contraction d'ensembles.
2. f est condensante $\Rightarrow$ f est une 1-contraction d'ensembles.
3. f est complètement continue $\Leftrightarrow$ f est une 0-contraction d'ensembles.
4. f est k-contraction et g est compact $\Rightarrow$ $f + g$ est une k-contraction d'ensembles.

1.3 Théorèmes du point fixe utilisés dans la thèse

Dans cette partie, nous allons présenter des résultats de la théorie du point fixe, notamment le théorème de point fixe de Dhage, Krasnoselskii et Sadovski.

1.3.1 Théorème du point fixe de Dhage

Les définitions suivantes sont nécessaires pour la suite. On conserve les même définition donnée dans Dhage [5]

Définition 1.3.1. Soit E un espace vectoriel. On introduit la relation d'ordre partiel $\leq$ sur E comme suit. Une relation d'ordre $\leq$ sur E est dite d'ordre partiel si elle satisfait les propriétés suivantes :

1. Réflexivité : $a \leq a$ pour tout $a \in E$,
2. Antisymétrie : $a \leq b$ et $b \leq a$ implique $a = b$,
3. Transitivité : $a \leq b$ et $b \leq c$ implique $a \leq c$, et
4. Linéarité de l'ordre : $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$;
   et $x \leq y \Rightarrow tx \leq ty$ pour $t \geq 0$.

L'espace vectoriel E muni de la relation d'ordre partiel $\leq$ devient un espace vectoriel partiellement ordonné. Deux éléments x et y d'un espace vectoriel partiellement ordonné sont comparable si on a $x \leq y$ ou bien $y \leq x$. On introduit la norme $\| \, . \, \|$ dans l'espace vectoriel E et il devient un espace vectoriel normé partiellement ordonné. Si E est complet par rapport a la métrique d définie à travers la norme ci-dessus alors l'espace est appelé un espace vectoriel normé complet partiellement ordonné.

Définition 1.3.2. [5] Une application $\mathcal{T} : E \longrightarrow E$ est dite croissante si elle préserve la relation d'ordre $\leq$, c'est-à-dire si $x \leq y$ implique $\mathcal{T}x \leq \mathcal{T}y$ pour tout $x, y \in E$.

Définition 1.3.3. [5] Une application $\mathcal{T} : E \longrightarrow E$ est dite partiellement continue en un point $a \in E$ si pour $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\| \mathcal{T}x - \mathcal{T}a \| < \varepsilon$ quand x est comparable à a et $\| x - a \| < \delta$. L'application $\mathcal{T}$ est partiellement continue sur E si elle est partiellement continue en tout point de E. Il est clair que si $\mathcal{T}$ est partiellement continue sur E, alors elle est continue sur chaque chaine C de E.

Définition 1.3.4. [5] Une application $\mathcal{T} : E \longrightarrow E$ est dite partiellement bornée si $\mathcal{T}(C)$ est borné pour chaque chaine C de E. $\mathcal{T}$ est uniformément partiellement borné si toutes les chaines $\mathcal{T}(C)$ de E sont bornées par une unique constante.
$\mathcal{T}$ est borné si $\mathcal{T}(E)$ est un sous-ensemble borné de E.

Définition 1.3.5. [5] Une application $\mathcal{T} : E \longrightarrow E$ est dite partiellement compacte si $\mathcal{T}(C)$ est un sous-ensemble relativement compact de E pour tout les ensembles totalement ordonnés ou chaines C de E. $\mathcal{T}$ est uniformément partiellement compact si $\mathcal{T}(C)$ est uniformément partiellement borné et partiellement compact sur E.$\mathcal{T}$ est dit partiellement totalement borné si pour tout sous-ensemble totalement ordonné et borné C de E, $\mathcal{T}(E)$ est un sous-ensemble relativement compacte de E. Si $\mathcal{T}$ est partiellement continu et partiellement totalement borné, alors $\mathcal{T}$ est partiellement complètement continu sur E.

Définition 1.3.6. Une application $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est dite une fonction dominante ou, en bref, $\mathcal{D}$-fonction si elle est semi-continue supérieure, croissante et elle satisfait $\psi(0) = 0$.

Définition 1.3.7. [5]

Soit $(E, \leq, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé partiellement ordonné. Une application $\mathcal{T} : E \longrightarrow E$ est partiellement non-linéaire $\mathcal{D}$-Lipschitz ou partiellement $\mathcal{D}$-Lipschitz s'il existe une $\mathcal{D}$-fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\| \mathcal{T}x - \mathcal{T}y \| \leq \psi(\| x - y \|), \tag{1.1}$$

pour tous éléments comparables $x, y \in E$. Si $\psi(r) = kr, k > 0$, alors l'application $\mathcal{T}$ est dite partiellement Lipschitz avec la constante de Lipschitz k.

Soit $(E, \leq, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé partiellement ordonné. On note

$$E^+ = \{x \in E \ \mid \ x \geq \theta, avec \ \ \theta \ \ le \ \ zero \ \ de \ \ E\},$$

$$\mathcal{K} = \{E^+ \subset E \ \mid \ uv \in E^+ \ \ pour \ \ tout \ \ u, v \in E^+\},$$

et $\mathcal{P}_{ch}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Les éléments de l'ensemble $\mathcal{K}$ sont appelés les vecteurs positifs de E. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la définition de l'ensemble $\mathcal{K}$.

Lemme 1.3.1. [5] Soient u_1,u_2,v_1,$v_2 \in \mathcal{K}$ tels que $u_1 \leq v_1$ et $u_2 \leq v_2$ alors $u_1u_2 \leq v_1v_2$.

Définition 1.3.8. [5]

Un opérateur $T : E \rightarrow E$ est dit positif si l'image $Range(T) = T(E)$ est telle que $R(T) \subseteq \mathcal{K}$.

Définition 1.3.9. La relation d'ordre $\leq$ et la métrique d dans un ensemble E non vide sont compatible s'il existe $\{x_n\}$ une suite croissante de E et si la sous-suite $\{x_{n_k}\}$ extraite de $\{x_n\}$ converge vers x^* implique que toute la suite $\{x_n\}$ converge vers x^*. De la même manière, soit $(E, \leq, \| \,.\, \|)$ un e.v.n muni d'une relation d'ordre partielle, la relation d'ordre $\leq$ et la norme $\| \,.\, \|$ sont compatibles si $\leq$ et la métrique définie à travers la norme $\| \,.\, \|$ sont compatibles.

Théorème 1.3.1. [5]

Soit $(E, \leq, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé complet partiellement ordonné et séparé telsque la relation d'ordre $\leq$ et la norme $\| \,.\, \|$ sur E sont compatibles sur chaque chaine compacte de E. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} : E \longrightarrow \mathcal{K}$ deux opérateurs croissants tel que

(a) $\mathcal{A}$ est partiellement borné et partiellement $\mathcal{D} - Lipschitz$ avec $\mathcal{D} - function\ \psi_{\mathcal{A}}$,

(b) $\mathcal{B}$ est partiellement continu et uniformément partiellement compact,

(c) $M\psi_{\mathcal{A}}(r) < r, r > 0$, où $M = \sup\{\| \mathcal{B}(C) \| : C \in \mathcal{P}_{ch}(E)\}$, et

(d) il existe un élément $x_0 \in X$ tel que $x_0 \leq \mathcal{A}x_0\mathcal{B}x_0$ ou $x_0 \geq \mathcal{A}x_0\mathcal{B}x_0$

alors l'opérateur équation

$$\mathcal{A}x\mathcal{B}x = x$$

admet au moins une solution positive x^* sur E et la suite $\{x_n\}$ d'itérations successives définie par $x_{n+1} = \mathcal{A}x_n\mathcal{B}x_n$, $n = 0, 1, ...$; converge d'une façon monotone vers x^*.

1.3.2 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Les deux principaux résultats de la théorie des points fixes sont les résultats de Schauder et le principe de contraction de Banach. Krasnoselskii les a combinés dans le résultat qu'on va énoncer dans la suite, mais avant cela on commence par rappeler le théorème du point fixe de Schauder qu'on utilise dans la démonstration du point fixe de Krasnoselskii.

Théorème 1.3.2. [24](**Schauder, 1930**)

Soit K un sous-ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach E et supposons $T : K \longrightarrow K$ une application continue. Alors T admet un point fixe dans K .

Corollaire 1.3.1. Soient K un semble non vide, compact, convexe d'un espace de Banach X et $f : K \longrightarrow K$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans K.

Corollaire 1.3.2. Soient K un ensemble non vide, fermé, convexe(non nécéssairement borné) d'un espace de Banach X et $f : K \longrightarrow K$ une application continue vérifiant

$f(K)$ est inclu dans un sous-ensemble compact de K.

Alors, f admet au moins un point fixe dans K.

Théorème 1.3.3. [27, 38](**Théorème du point fixe de Krasnoselskii, 1958**)

Soit K un sous ensemble non vide, fermé, convexe d'un espace de Banach E et $f, g : K \longrightarrow E$ deux applications telles que :

1. $\forall x, y \in K, f(x) + g(y) \in K$.
2. f est continue, compacte.

3. g est une contraction de constante $k < 1$.

   Alors, il existe un certain $x^* \in K$ tel que $(f+g)(x^*) = x^*$.

1.3.3 Théorème du point fixe de Sadovski

Dans cette partie on donne le théorème du point fixe de Darbo qui généralise celui de Shauder et ensuite on donne le théorème du point fixe de Sadovski qui généralise le théorème de Darbo pour les applications condensantes.

Proposition 1.3.1. Soit E un espace de Banach et $\{A_n\}_n$ une suite de sous-ensembles fermés bornés et non vides de E tels que :

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

Si $\alpha(A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$, alors $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n \neq 0$ et A est compact.

En 1955, Darbo a donné le théorème suivant :

Théorème 1.3.4. [3](**Darbo**) Soient E un espace de Banach, K un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe de E et $f : K \longrightarrow K$ une k-contraction stricte d'ensembles, alors f admet au moins un point fixe dans K.

Théorème 1.3.5. [3, 44](**Sadovski**) Soient K un ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E et $f : K \longrightarrow K$ une application β-condensante. (β est la mesure de non-compacité de Kuratowski).

Alors, f admet un point fixe dans K.

Chapitre 2

Existence des solutions positives d'une équation différentielle fractionnaire non-linéaire quadratique

2.1 Préliminaires et notations

Dans ce chapitre, on montre l'existence des solutions positives de l'équation différentielle fractionnaire quadratique (EDFQ) suivante :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] - \lambda\left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] &= g(t,x(t)), \quad t \in J = [0,1] && (2.1)\\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}, && (2.2)\end{aligned}$$

où D^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'orde α avec $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$, $f : J\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ est une fonction continue et $g : J\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ est une fonction $L^1-Caratheodory$.

2.2 Définition de la solution inférieure

On commence par donner une définition de la solution du problème (EDFQ).

Définition 2.2.1. Soit $x \in C^1(J,\mathbb{R})$, x est solution du problème (EDFQ) si elle satisfait les conditions :

(i) $t \longrightarrow \frac{x}{f(t,x)}$ est une fonction de classe C^1 pour tout $x \in \mathbb{R}$

(ii) x satisfait les équations $(2.1), (2.2)$ sur J.

On considère l'EDFQ sur l'espace $C(J,\mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles sur J. On définit la norme $\| \,.\, \|$ et la relation d'ordre $\leq$ sur $C(J,\mathbb{R})$ par

$$\| x \| = \sup_{t\in J} |x(t)|, \tag{2.3}$$

et

$$x \leq y \Leftrightarrow x(t) \leq y(t) \quad pour \quad tout \quad t \in J. \tag{2.4}$$

On rappelle que $C(J,\mathbb{R})$ est un espace de Banach et grâce au théorème d'Arzela-Ascoli, on a le résultat suivant :

Lemme 2.2.1. [5] Soit $(C(J,\mathbb{R}), \leq, \| \,.\, \|)$ un espace de Banach partiellement ordonné muni de la norme $\| \,.\, \|$ et de la relation d'ordre $\leq$ définies par (2.3)-(2.4). Alors, $\| \,.\, \|$ et $\leq$ sont compatibles sur chaque sous-ensemble partiellement compacte de $C(J,\mathbb{R})$.

Définition 2.2.2. Une fonction $u \in C^1(J,\mathbb{R})$ est dite solution inférieure de l'EDFQ si la fonction $t \longrightarrow \frac{u(t)}{f(t,u(t))}$ est continûment dérivable et elle satisfait

$$D^\alpha[\frac{u(t)}{f(t,u(t))}] - \lambda[\frac{u(t)}{f(t,u(t))}] \leq g(t,u(t)), \qquad t \in J$$
$$u(0) \leq x_0.$$

D'une façon similaire, une fonction $v \in C^1(J,\mathbb{R})$ est dite solution supérieure de l'EDFQ si elle satisfait l'équation ci-dessus en inversant les inégalités.

2.3 Construction des solutions de l'EDFQ

On considère les hypothèses suivantes :

(A_0) La fonction $x \longrightarrow \frac{x}{f(t,x)}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in J$.

(A_1) Il existe une constante $M_f > 0$ telle que $0 < f(t,x) \leq M_f$ pour tout $t \in J$ et $x \in \mathbb{R}$.

(A_2) Il existe une fonction dominante ou $\mathcal{D}$-fonction ψ, telle que

$$0 \leq f(t,x) - f(t,y) \leq \psi(x-y),$$

pour tout $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq y$.

(B_0) Il existe une fonction $h \in L^1(J,\mathbb{R})$ telle que $g(t,x) \leq h(t)$ pour tout $t \in J$ et $x \in \mathbb{R}$.

(B_1) $g(t,x)$ est croissante par rapport à x pour tout $t \in J$.

(B_2) L'EDFQ admet une solution inférieure $u \in C^1(J,\mathbb{R})$.

Lemme 2.3.1. On suppose que l'hypothèse A_0 est vérifiée. Alors la fonction $x \in C^1(J,\mathbb{R})$ est solution de l'EDFQ

$$\begin{cases} D^\alpha\left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] - \lambda\left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] & = & g(t) \\ x(0) & = & x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale non-linéaire suivante :

$$x(t) = f(t,x(t))\left(\frac{x_0}{f(0,x_0)}E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s)ds\right),$$

pour tout $t \in J$.

Démonstration.

On considère l'équation différentielle fractionnaire :

$$D^\alpha\left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] - \lambda\left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] \quad = \quad g(t).$$

D'après les relations (4.1.65) and (4.1.66) in [23], l'équation différentielle fractionnaire ci-dessus admet comme solution :

$$\frac{x(t)}{f(t,x(t))} = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s)ds + \frac{x(0)}{f(0,x(0))}E_\alpha(\lambda t^\alpha). \tag{2.5}$$

D'après la condition initiale (2.2), on a

$$x(t) = f(t,x(t))\left(\frac{x_0}{f(0,x_0)}E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s)ds\right).$$

Inversement, si on a :

$$x(t) = f(t,x(t))\left(\frac{x_0}{f(0,x_0)}E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s)ds\right),$$

alors

$$D^\alpha\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = D^\alpha\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s)ds\right) + D^\alpha\left(\frac{x_0}{f(0,x_0)}E_\alpha(\lambda t^\alpha)\right).$$

En remplaçant x par t et a par 0 dans la relation (a) du lemme 1.1.2, on obtient :

$D^\alpha E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)$.

Ceci implique :

$$D^\alpha(\frac{x_0}{f(0,x_0)}E_\alpha(\lambda t^\alpha)) = \frac{x_0}{f(0,x_0)}\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

Posons $F(u) := u^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda u^\alpha)$.

D'après la relation (2) du lemme 1.1.1, on a

$$D^\alpha\left[\int_0^t F(t-s)g(s)ds\right] = \int_0^t D^\alpha[s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^\alpha)]g(t-s)ds] + g(t)\lim_{t\to 0^+} I^{1-\alpha}F(t)$$

$$= \int_0^t \lambda s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^\alpha)g(t-s)ds] + g(t)\lim_{t\to 0^+} I^{1-\alpha}F(t).$$

Posons $t - s = u$, on a alors

$$D^\alpha\left[\int_0^t F(t-s)g(s)ds\right](t) = \int_0^t \lambda(t-u)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-u)^\alpha)g(u)du + g(t)\lim_{t\to 0^+} I^{1-\alpha}F(t).$$

D'une autre part, on remplace

$\alpha' = 1-\alpha$, $\mu = \beta = \alpha$, $a = 0$ et $t = x$ dans la relation (b) du lemme 1.1.2, on obtient :

$I^{1-\alpha}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda t^\alpha] = E_{\alpha,1}[\lambda t^\alpha]$, ce qui implique

$$g(t)\lim_{t\to 0^+} I^{1-\alpha}F(t) = g(t)\lim_{t\to 0^+} E_{\alpha,1}[\lambda t^\alpha] = g(t).$$

En conclusion :

$$D^\alpha\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = \frac{x_0}{f(0,x_0)}\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t \lambda(t-u)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s)ds + g(t)$$

$$D^\alpha\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) - \lambda\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t).$$

Finalement, en remplaçant t par 0 dans la relation (2.5) et en utilisant l'hypothèse (A_0) qui nous donne $x(0) = x_0$ on obtient :

$$\frac{x(0)}{f(0,x(0))} = \frac{x_0}{f(0,x_0)}$$

Ce qui achève la démonstration.

$\square$

2.4 Résultats d'existence

Théorème 2.4.1. On suppose que $(A_0)-(A_2)$ et $(B_0)-(B_2)$ sont vérifiées. De plus, on suppose que

$$\left(C_1 exp(2\lambda^\rho)\left(\| h \|_{L^1} + \left|\frac{x_0}{f(0,x_0)}\right|\right)\right)\psi(r) < r, r > 0,$$

Alors, l'EDFQ admet une solution positive x^* définie sur J et la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ des approximations successives définies par

$$x_{n+1}(t) = [f(t, x_n(t)]\left(\frac{x_0}{f(0,x_0)}E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s, x_n(s))ds\right), \quad (2.6)$$

pour $t \in \mathbb{R}$, avec $x_1 = u$, converge vers x^*.

Démonstration.

Soit $E = C(J, \mathbb{R})$, alors, d'après le lemme 2.2.1, chaque chaine compacte de E possède la propriété de compatibilité par rapport à la norme $\| \, . \, \|$ et la relation d'ordre $\leq$ sur E. Par application du lemme 2.3.1, L'EDFQ (2.1),(2.2) est équivalente à l'équation intégrale non-linéaire suivante :

$$x(t) = [f(t, x(t)]\left(\frac{x_0}{f(0,x_0)}E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s, x(s))ds\right). \quad (2.7)$$

On définit deux opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur E par :

$(\mathcal{A}x)(t) = f(t, x(t))$, $t \in J$,

et

$(\mathcal{B}x)(t) = \dfrac{x_0}{f(0,x_0)}E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s, x(s))ds$, $t \in J$

On doit montrer que les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ vérifient toutes les conditions du théorème de Dhage 1.3.1. Ceci est établi en plusieurs étapes.

Étape I : Les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont croissants sur E.

Soient x,$y \in E$ tels que $x \geq y$. Alors en utilisant l'hypothèse (A_2), on obtient

$$(\mathcal{A}x)(t) = f(t, x(t)) \geq f(t, y(t)) = (\mathcal{A}y)(t),$$

pour tout $t \in J$. Cela monte que $\mathcal{A}$ est un opérateur croissant défini de E vers E.

D'autre part, soient x,$y \in E$ tels que $x \geq y$, alors en utilisant l'hypothèse (A_0) on a :

$$\frac{x_0}{f(0, x_0)} \geq \frac{y_0}{f(0, y_0)}$$

Et en utilisant l'hypothèse (B_1) où on a supposé que $g(t, x)$ est croissante par rapport à x on obtient :

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, x(s)) ds \geq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, y(s)) ds$$

D'après les deux inégalités ci-dessus on pourra conclure que :

$$(\mathcal{B}x)(t) \geq (\mathcal{B}y)(t)$$

Donc l'opérateur $\mathcal{B}$ est aussi croissant de E vers E. Par suite, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux opérateurs croissants et positifs définis de E vers luis même.

Étape II : $\mathcal{A}$ est partiellement borné et partiellement $\mathcal{D}$-Lipschitz sur E.

Soit $x \in E$. Alors en utilisant l'hypothèse (A_1),

$$|(\mathcal{A}x)(t)| = f(t, x(t)) \leq M_f, \text{ pour tout } t \in J.$$

En passant à la borne supérieure, on obtient $\|\mathcal{A}x\| \leq M_f$ et par suite, $\mathcal{A}$ est borné. Ceci implique que A est partiellement borné sur E.

Soient $x, y \in E$ tels que $x \geq y$. Alors,

$$|(Ax)(t)-(Ay)(t)| = f(t,x(t)) - f(t,y(t)) \leq \psi(|x(t)-y(t)|) \leq \psi(\|x-y\|)$$

(la dernière inégalité est due au fait que ψ est une fonction dominante donc elle est croissante).

pour tout $t \in J$. En prenant le sup sur t, on obtient $\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq \psi(\|x-y\|)$ pour tous $x, y \in E$, $x \geq y$.

Par conséquent, $\mathcal{A}$ est partiellement $\mathcal{D}$-lipschitz sur E ce qui implique de plus que $\mathcal{A}$ est partiellement continue sur E.

Étape III : $\mathcal{B}$ est partiellement continue sur E.

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie dans une chaine C de E telle que $x_n \longrightarrow x$. Alors, par le théorème de convergence dominé de Lebesgue, pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\mathcal{B}x_n)(t) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s,x_n(s))ds + \lim_{n\to\infty}\frac{x_0}{f(0,x_0)}E_\alpha(\lambda t^\alpha) \\
&= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\lim_{n\to\infty} g(s,x_n(s))ds + \frac{x_0}{f(0,x_0)}E_\alpha(\lambda t^\alpha) \\
&= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s,x(s))ds + \frac{x_0}{f(0,x_0)}E_\alpha(\lambda t^\alpha) \\
&= (\mathcal{B}x)(t).
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathcal{B}x_n$ converge vers $\mathcal{B}x$ en tout point de J.

Dans la suite, on montre que $\{\mathcal{B}x_n\}$ est une suite de fonctions équicontinues sur E. Soient $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$.

Posons $\phi(t) = \int_0^t h(s)ds$, avec h la fonction définie dans l'hypothèse (B_0), Alors

$$
\begin{aligned}
|(\mathcal{B}x_n)(t_2)-(\mathcal{B}x_n)(t_1)| &\leq |\textstyle\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha})g(s,x_n(s))ds \\
&\quad -\textstyle\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1-s)^{\alpha})g(s,x_n(s))ds| + |E_{\alpha}(\lambda t_2^{\alpha})-E_{\alpha}(\lambda t_1^{\alpha})|\left|\dfrac{x_0}{f(0,x_0)}\right| \\
&\leq \left|\textstyle\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha})-(t_1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1-s)^{\alpha})\right]g(s,x_n(s))ds\right| \\
&\quad +\left|\textstyle\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha})g(s,x_n(s))ds\right| + |E_{\alpha}(\lambda t_2^{\alpha})-E_{\alpha}(\lambda t_1^{\alpha})|\left|\dfrac{x_0}{f(0,x_0)}\right| \\
&\leq \left|\textstyle\int_0^{t_1}\left|(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha})-(t_1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1-s)^{\alpha})\right|\left|g(s,x_n(s))\right|ds\right| \\
&\quad +\left|\textstyle\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha})\left|g(s,x_n(s))\right|ds\right| + |E_{\alpha}(\lambda t_2^{\alpha})-E_{\alpha}(\lambda t_1^{\alpha})|\left|\dfrac{x_0}{f(0,x_0)}\right| \\
&\leq \parallel h \parallel_{L^1} \textstyle\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha})-(t_1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1-s)^{\alpha})ds \\
&\quad +C_1exp(2\lambda^{\rho})\textstyle\int_{t_1}^{t_2}h(s)ds + |E_{\alpha}(\lambda t_2^{\alpha})-E_{\alpha}(\lambda t_1^{\alpha})|\left|\dfrac{x_0}{f(0,x_0)}\right|.
\end{aligned}
$$

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
\textstyle\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha})ds &= -\textstyle\int_{t_2}^{t_2-t_1}u^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(u)^{\alpha})du = \textstyle\int_{t_2-t_1}^{t_2}u^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(u)^{\alpha})du \\
&= \textstyle\int_0^{t_2}u^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(u)^{\alpha})du - \textstyle\int_0^{t_2-t_1}u^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(u)^{\alpha})du.
\end{aligned}
$$

D'après la relation (c) dans le lemme 1.1.2, en prenant $\beta=\alpha$, on obtient

$$
\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha})ds = t_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t_2^{\alpha}) - (t_2-t_1)^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda(t_2-t_1)^{\alpha}). \tag{2.8}
$$

D'une façcon similaire, on a :

$$
\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1-s)^{\alpha})ds = t_1^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t_1^{\alpha}). \tag{2.9}
$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
|(\mathcal{B}x_n)(t_2)-(\mathcal{B}x_n)(t_1)| &\leq |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha)-E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)|\left|\frac{x_0}{f(0,x_0)}\right| \\
&+ \parallel h \parallel_{L^1} [t_2^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t_2^\alpha) - t_1^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t_1^\alpha) + (t_2-t_1)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda(t_2-t_1)^\alpha)] \\
&+ C_1 exp(2\lambda^\rho)|\phi(t_2)-\phi(t_1).|
\end{aligned}
$$

Ceci implique que $|(\mathcal{B}x_n)(t_2)-(\mathcal{B}x_n)(t_1)| \to 0$ quand $t_2 - t_1 \to 0$ uniformément pour tout n $\in \mathbb{N}$. Ceci montre que la convergence $\mathcal{B}x_n \to Bx$ est uniforme et par conséquent $\mathcal{B}$ est partiellement continue sur E.

Étape IV : $\mathcal{B}$ est un opérateur uniformément partiellement compact sur E.

Soit C une chaine de E. On montre que $\mathcal{B}(C)$ est un sou-ensemble uniformément borné et équicontinu de E. Premièrement, on montre que $\mathcal{B}(C)$ est uniformément borné. Soit $y \in \mathcal{B}(C)$. Alors, il existe un élément $x \in C$, tel que $y = \mathcal{B}x$. Par l'hypothèse (B_0), pour tout $t \in J$,

$$
\begin{aligned}
|y(t)| &\leq \left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s,x(s))ds\right| + \left|\frac{x_0}{f(0,x_0)}E_\alpha(\lambda t^\alpha)\right| \\
&\leq C_1 exp(2\lambda^\rho)\int_0^1 h(s)ds + \left|\frac{x_0}{f(0,x_0)}\right| C_1 exp(2\lambda^\rho) \\
&\leq C_1 exp(2\lambda^\rho)\left(\parallel h \parallel_{L^1} + \left|\frac{x_0}{f(0,x_0)}\right|\right) = M, \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

et ceci grâce à la relation (d) du lemme 1.1.2.

En prenant le sup sur t, on obtient $\parallel y \parallel = \parallel Bx \parallel \leq M$ pour tout $y \in \mathcal{B}(C)$. Par conséquent, $\mathcal{B}(C)$ est uniformément borné de E. De plus, $\parallel \mathcal{B}(C) \parallel \leq M$ pour toute chaine C de E. par conséquent, $\mathcal{B}$ est un opérateur uniformément partiellement borné sur E.

Ensuite, on montre que $\mathcal{B}(C)$ est un sous-ensemble équicontinu de E. Soient t_1, $t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$ et $\phi(t) = \int_0^t h(s)ds$. Alors, pour tout $y \in \mathcal{B}(C)$, on a

$$
\begin{aligned}
|y(t_2)-y(t_1)| &\leq |\textstyle\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^\alpha)g(s,x(s))ds\\
&- \textstyle\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1-s)^\alpha)g(s,x(s))ds| + |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha)-E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)|\left|\dfrac{x_0}{f(0,x_0)}\right|\\
&\leq \left|\textstyle\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^\alpha)-(t_1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1-s)^\alpha)\right]g(s,x(s))ds\right|\\
&+ \left|\textstyle\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^\alpha)g(s,x(s))ds\right| + |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha)-E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)|\left|\dfrac{x_0}{f(0,x_0)}\right|\\
&\leq \left|\textstyle\int_0^{t_1}\left|(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^\alpha)-(t_1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1-s)^\alpha)\right||g(s,x(s))|\,ds\right|\\
&+ \left|\textstyle\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^\alpha)\,|g(s,x(s))|\,ds\right| + |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha)-E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)|\left|\dfrac{x_0}{f(0,x_0)}\right|\\
&\leq \parallel h \parallel_{L^1}\ \textstyle\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^\alpha)-(t_1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1-s)^\alpha)ds\\
&+ C_1 exp(2\lambda^\rho)\textstyle\int_{t_1}^{t_2}h(s)ds + |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha)-E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)|\left|\dfrac{x_0}{f(0,x_0)}\right|.
\end{aligned}
$$

Finalement, par les relations (2.8) et (2.9), on a :

$$
\begin{aligned}
|y(t_2)-y(t_1)| &\leq |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha)-E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)|\left|\dfrac{x_0}{f(0,x_0)}\right|\\
&+ \parallel h \parallel_{L^1}[t_2^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t_2^\alpha)-t_1^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t_1^\alpha)+(t_2-t_1)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda(t_2-t_1)^\alpha)]\\
&+ C_1 exp(2\lambda^\rho)|\phi(t_2)-\phi(t_1)|
\end{aligned}
$$

Ceci implique que $|y(t_2)-y(t_1)| \to 0 \ \ as \ \ t_2-t_1 \to 0$, uniformément pour tout $y \in \mathcal{B}(C)$. Donc $\mathcal{B}(C)$ est un sous-ensemble équicontinu de E.

$\mathcal{B}(C)$ est uniformément borné et équicontinu de E, donc il est compact. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est un opérateur uniformément partiellement compact définit de E vers E.

Étape V : u satisfait l'inégalité $u \leq \mathcal{A}u\mathcal{B}u$.

D'après l'hypothèse (B_2), l'EDFQ admet une solution inférieure u définie sur J. Alors, on a

$$D^\alpha\left(\frac{u(t)}{f(t,u(t)}\right)-\lambda\left(\frac{u(t)}{f(t,u(t)}\right)\leq g(t,u(t)),\text{ pour tout } t\in J,$$

et

$$u(0)\leq x_0.$$

En multipliant l'inégalité ci-dessus par $E_{\alpha,\alpha}$, on obtient pour tout $t\in J$,

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\left(D^\alpha\left(\frac{u(t)}{f(t,u(t)}\right)-\lambda\left(\frac{u(t)}{f(t,u(t)}\right)\right)ds\\ \leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s,u(s))ds\end{aligned}.$$

En utilisant la relation (1) du lemme 1.1.1, avec $n=1$, $U=1$ et $K=-\lambda$, on obtient :

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)D^\alpha u(s)ds=u(t)-E_\alpha(\lambda t^\alpha)u(0)+\lambda\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)u(s)ds.$$

Par suite :

$$\frac{u(t)}{f(t,u(t))}\leq E_\alpha(\lambda t^\alpha)\frac{u(0)}{f(0,u(0))}+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s,u(s))ds,$$

pour tout $t\in J$. Par définition des opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, il s'ensuit que $u(t)\leq(\mathcal{A}u)(t)(\mathcal{B}u)(t)$, pour tout $t\in J$. Par conséquent $u\leq\mathcal{A}u\mathcal{B}u$.

Étape VI : La fonction dominante ou D-fonction ψ satisfait la condition $M\psi_A(r)<r$, $r>0$.

La fonction dominante ψ de l'opérateur $\mathcal{A}$ satisfait l'inégalité donnée dans l'hypothèse (c) du théorème 1.3.1. D'après l'estimation (2.10), il s'ensuit que

$$M\psi_A(r)=\left(C_1exp(2|\lambda|^\rho)\left(\parallel h\parallel_{L^1}+\left|\frac{x_0}{f(0,x_0)}\right|\right)\right)\psi(r)<r,\text{ pour tout } r>0.$$

Ainsi, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont toutes les conditions du théorème de Dhage 1.3.1 et on l'applique pour conclure que l'opérateur équation $\mathcal{A}x\mathcal{B}x=x$ admet au moins une solution positive. Par conséquent, l'équation intégrale (2.7) et l'EDFQ admettent au moins une solution positive x^* définie sur J. De plus, la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ des approximations successives définie par (2.6) converge vers x^*. Ce qui achève la démonstration.

□

Chapitre 3

Étude d'un problème fractionnaire impulsif avec une condition non-locale

Dans ce chapitre, on considère une classe d'équations integro-différentielles fractionnaires impulsives de la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = Ax(t) + f(t, x(t), Bx(t)) + C(t)u(t), \quad t \in (s_i, t_{i+1}], i = 0, 1, 2, ..., m, \quad u \in U_{ad}, \\ {}^cD^\beta x(t) = g_i(t, x(t)), \quad t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, ..., m, \\ x(0) = x_0 + h(x), \end{cases}$$

où ${}^cD^\alpha$ et ${}^cD^\beta$ sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre $\alpha \in (0, 1)$ et $\beta \in (0, 1)$ respectivement, $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t)_{t\geq 0})$ sur un espace de Banach $(X, \| \,.\, \|)$, $x_0 \in X$, $0 = t_0 = s_0 < t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < ... < t_m \leq s_m < t_{m+1} = T$ sont des nombres réels fixés, $g_i \in C(J \times X, X)$, h est une fonction donnée, $B : C(J, X) \to C(J, X)$ est donnée par $Bx(t) = \int_0^t B(t, s)x(s)ds$ et $\{B(t, s); t, s \in J\}$ est un ensemble d'opérateurs linéaires bornés sur X tels que :

$$B(t, .)x \in C([0, t], X),\ B(., s) \in C([s, T], X) \text{ pour tout } t, s \in J$$
$$\text{et } B^* = \sup_{t\in J} \int_0^t \| B(t, s) \|_{L(X)}\, ds.$$

3.1 Préliminaires et notations

Posons $J = [0, T]$, $J_0 = [0, t_1]$, $J_1 = (t_1, t_2]$,..., $J_{m-1} = (t_{m-1}, t_m]$, $J_m = (t_m, t_{m+1}]$ et introduisons l'espace $PC(J, X) := \{x : J \to X : x \in C((t_i, t_{i+1}], X), i = 0, 1, ..., m$ et ils existent $x(t_i^-)$ et $x(t_i^+), i = 1, ..., m$ avec $x(t_i^-) = x(t_i^+)\}$. Il est clair que $PC(J, X)$ est un espace de Banach avec la norme $\|x\|_{PC} = sup\,\{\|x(t)\| : t \in J\}$.

Soit Y un espace de Banach réflexif et séparable où les contrôles u prennent valeurs, et $P_f(Y)$ la classe des sous-ensembles non vides, fermés et convexes de Y. On suppose que la fonction $w : [0,a] \longrightarrow P_f(Y)$ est mesurable, $w(.) \subset E$, où E est un ensemble borné de Y, et l'ensemble des contrôles admissibles est donné par

$U_{ad} = \Big\{u \in L^p(E) : u(t) \in w(t), a.e\Big\}, \quad p > \frac{1}{\tau}$, $(\tau \in (0,\alpha)$), pour plus de détails sur les ensembles des controles admissibles, on donne comme référence [12].

Lemme 3.1.1. [50] On suppose $W \subseteq PC(J,X)$. Si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) W est un sous-ensemble uniformément borné de PC(J,X),
(2) W est équicontinue sur $(t_i, t_{i+1}), i = 0,1,2,..,m$, où $t_0 = 0, t_{m+1} = T$,
(3) $W(t) = \{x(t) : x \in W, t \in J \setminus \{t_1, t_2, ..., t_m\}\}$, $W(t_i^+) = \big\{x(t_i^+) : x \in W\big\}$ et $W(t_i^-) = \big\{x(t_i^-) : x \in W\big\}$, $i = 1,2,..,m$, sont des sous-ensembles relativement compact de X.

Alors W est un sous-ensemble relativement compact de $PC(J,X)$.

3.2 Définition de la solution intégrale

Définition 3.2.1. [53, 54] Une fonction $x \in C(J,X)$ est dite solution intégrale du problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = Ax(t) + y(t), \quad t \in (0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

si elle satisfait l'équation intégrale

$x(t) = P_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)y(s)ds.$

où, $P_\alpha(t) = \int_0^\infty \xi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)d\theta, \quad Q_\alpha(t) = \alpha\int_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)d\theta,$

$\xi_\alpha(\theta) = \dfrac{1}{\alpha}\theta^{-1-\frac{1}{\alpha}}\overline{\omega}_\alpha(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}) \geq 0,$

$\overline{\omega_\alpha}(\theta) = \dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\theta^{-n\alpha-1}\dfrac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!} sin(n\pi\alpha), \; \theta \in (0,\infty),$

et $\int_0^\infty \xi_\alpha(\theta)d\theta = 1$.

A partir des relations vérifiée par ξ_i, on montre que $\displaystyle\int_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$.

On donne l'hypothèse suivante sur l'opérateur A qui sera valable dans toute la suite de ce chapitre.

(H_1) L'opérateur A génère un C_0-semi-groupe compact $\{T(t) : t \geq 0\}$ sur X, et il existe une constante $M_A \geq 1$ telle que $\sup\limits_{t\in[0,\infty)} \| T(t) \|_{L(X)} \leq M_A$.

Lemme 3.2.1. [53, 54] On suppose que (H_1) est vérifiée, alors l'opérateur P_α et Q_α ont les propriétés suivantes :

(1) Pour $t \geq 0$ fixé, $P_\alpha(t)$ et $Q_\alpha(t)$ sont des opérateurs linéaires et bornés, et pour tout $x \in X$,
$\| P_\alpha(t)x \| \leq M_A \| x \|, \quad \| Q_\alpha(t)x \| \leq \dfrac{\alpha M_A}{\Gamma(1+\alpha)} \| x \|,$

(2) $\{P_\alpha(t), t \geq 0\}$ et $\{Q_\alpha(t), t \geq 0\}$ sont fortement continus,

(3) Pour tout $t > 0$, $P_\alpha(t)$ et $Q_\alpha(t)$ sont des opérateurs compacts.

3.3 Construction des solutions intégrales

On considère dans l'espace $PC(J, X)$ le problème fractionnaire impulsif suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = Ax(t) + f(t, x(t), Bx(t)) + C(t)u(t), \quad t \in (s_i, t_{i+1}], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 0, 1, 2, ..., m, \quad u \in U_{ad}, \\ {}^cD^\beta x(t) = g_i(t, x(t)), \quad t \in (t_i, s_i], \quad i = 1, 2, ..., m, \\ x(0) = x_0 + h(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

D'après les propriétés de la dérivée de Caputo, une solution intégrale peut être écrite de la manière suivante :

$$x(t)=\begin{cases} x_0+h(x)+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[Ax(s)+f(s,x(s),Bx(s))+C(s)u(s)\right]ds, & t\in(0,t_1],\\ d_{1x}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}g_1(s,x(s))ds, & t\in(t_1,s_1],\\ K_{1x}+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[Ax(s)+f(s,x(s),Bx(s))+C(s)u(s)\right]ds, & t\in(s_1,t_2],\\ . \\ . \\ . \\ d_{ix}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, & t\in(t_i,s_i],\\ K_{ix}+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[Ax(s)+f(s,x(s),Bx(s))+C(s)u(s)\right]ds, & t\in(s_i,t_{i+1}], \end{cases}$$

où d_{ix} et K_{ix}, $i=1,2,...,m$, sont des éléments de X.

En utilisant les méthodes utilisées dans [14], on obtient :

$$x(t)=\begin{cases} d_{ix}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, \quad t\in(t_i,s_i], 1\le i\le m,\\ P_\alpha(t-s_i)K_{ix}+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Bx(s))+C(s)u(s)\right]ds,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad t\in(s_i,t_{i+1}], 0\le i\le m,\\ K_{0x}=x(0)+h(x). \end{cases}$$

Et en utilisant la continuité de x aux points t_i, on obtient :

$$\begin{aligned} x(t_i) &= P_\alpha(t_i-s_{i-1})K_{(i-1)x}+\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i-s)\left[f(s,x(s),Bx(s))+C(s)u(s)\right]ds\\ &= d_{ix}+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} d_{ix} &= P_\alpha(t_i-s_{i-1})K_{(i-1)x}+\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i-s)\left[f(s,x(s),Bx(s))+C(s)u(s)\right]ds\\ &\quad -\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

En utilisant la continuité de x aux points s_i, on obtient :

$$\begin{aligned}
x(s_i) &= d_{ix} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\beta-1} g_i(s, x(s)) ds \\
&= K_{ix} + \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) \left[f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s) \right] ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
K_{ix} &= d_{ix} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\beta-1} g_i(s, x(s)) ds \\
&\quad - \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) \left[f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s) \right] ds.
\end{aligned}$$

Par suite, une solution intégrale du problème (3.1) est donnée par

$$x(t) = \begin{cases}
P_\alpha(t)(x_0 + h(x)) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) \left[f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s) \right] ds, \quad t \in (0, t_1], \\
d_{1x} + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_1(s, x(s)) ds, \quad t \in (t_1, s_1], \\
P_\alpha(t - s_1) K_{1x} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) \left[f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s) \right] ds, \quad t \in (s_1, t_2], \\
. \\
. \\
. \\
d_{ix} + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_i(s, x(s)) ds, \quad t \in (t_i, s_i], 1 \leq i \leq m, \\
P_\alpha(t - s_i) K_{ix} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) \left[f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s) \right] ds, \\
\hfill t \in (s_i, t_{i+1}], 1 \leq i \leq m,
\end{cases}$$

où $K_{0x} = x_0 + h(x)$,

$$\begin{aligned}
d_{ix} &= P_\alpha(t_i - s_{i-1}) K_{(i-1)x} + \int_0^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t_i - s) \left[f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s) \right] ds \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_i} (t_i - s)^{\beta-1} g_i(s, x(s)) ds. \\
K_{ix} &= d_{ix} - \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) \left[f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s) \right] ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\beta-1} g_i(s, x(s)) ds.
\end{aligned}$$

Définition 3.3.1. Une fonction $x \in PC(J, X)$ est dite solution intégrale du problème (3.1) si elle satisfait la relation suivante :

$$x(t)=\begin{cases} P_\alpha(t)K_{0x}+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Bx(s))+C(s)u(s)\right]ds, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t\in(0,t_1],u\in U_{ad}, \\ d_{ix}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, \quad t\in(t_i,s_i],1\leq i\leq m, \\ P_\alpha(t-s_i)K_{ix}+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Bx(s))+C(s)u(s)\right]ds, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t\in(s_i,t_{i+1}],1\leq i\leq m. \end{cases}$$

Où $K_{0x}=x_0+h(x)$,

$$\begin{aligned} d_{ix} &= P_\alpha(t_i-s_{i-1})K_{(i-1)x}+\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i-s)\left[f(s,x(s),Bx(s))+C(s)u(s)\right]ds \\ &\quad -\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds. \\ K_{ix} &= d_{ix}-\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)\left[f(s,x(s),Bx(s))+C(s)u(s)\right]ds \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

3.4 Résultats d'existence

Dans cette section, on établit des résultats d'existence et d'unicité pour le problème (3.1).

A partir de la définition (3.3.1), On définit l'opérateur $P:PC(J,X)\to PC(J,X)$ par :

$$Px(t)=\begin{cases} P_\alpha(t)(x_0+h(x))+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Bx(s))+C(s)u(s)\right]ds, \quad t\in[0,t_1], \\ d_{ix}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, \quad t\in(t_i,s_i], \\ P_\alpha(t-s_i)K_{ix}+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Bx(s))+C(s)u(s)\right]ds, \quad t\in(s_i,t_{i+1}]. \end{cases}$$

Où d_{ix} et K_{ix}, $i=1,2,...,m$ sont définis précédemment.

Avant de présenter nos résultats, nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H_2) $C:[0,T]\longrightarrow L(Y,X)$ est essentiellement bornée, ie $C\in L^\infty([0,T],L(Y,X))$,

(H_3) La fonction f est continue, ie $f \in C(J \times X \times X, X)$,

(H_4) Ils existent deux constantes C_f et $L_f > 0$ telles que

$\| f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2) \| \leq L_f \| x_1 - x_2 \| + C_f \| y_1 - y_2 \|$,

pour tout $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$, et $t \in J$,

(H_5) Il existe une constante $D > 0$ telle que

$\| f(t, x, y) \| \leq D\,(1 + \| x \|^{\mu} + \| y \|^{\nu})$ pour tout $t \in J$ et $x, y \in X$, $\mu, \nu \in [0, 1]$,

(H_6) Pour $i = 1, 2, ..., m$, $g_i \in C(J \times X, X)$, et il existe une constante $L_g > 0$ telle que

$\| g_i(t, x) - g_i(t, y) \| \leq L_g \| x - y \|$, pour tout $x, y \in X$,

(H_7) Ils existent des fonctions $t \longrightarrow \varphi_i(t), i = 1, 2, ..., m$ telles que :
$\| g_i(t, x(t)) \| \leq \varphi_i(t)$ pour tout $t \in J$, $x \in X$,
$L_{g_i} = \sup\limits_{t \in J} \varphi_i(t)$ et $L'_g = \underset{1 \leq i \leq m}{max} L_{g_i}$,
(H_8) L'opérateur $B : C(J, X) \to C(J, X)$ est donné par $Bx(t) = \int_0^t B(t, s)x(s)ds$ et $\{B(t, s), t, s \in J\}$ est l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur X tels que :

$B(t, .)x \in C([0, t], X)$, $B(., s) \in C([s, T], X)$ pour tout $t, s \in J$
et $B^* = \sup\limits_{t \in J} \int_0^t \| B(t, s) \|_{L(X)}\, ds$,

(H_9) $h : PC(J, X) \to X$ et il existe une constante $L_h > 0$ et une fonction φ_h telles que pour tout $x, y \in PC(J, X)$,
$\| h(x) - h(y) \| \leq L_h \| x - y \|_{PC}$, $\| h(x) \| \leq \varphi_h(t)$ et $L'_h = \sup\limits_{t \in J} \varphi_h(t)$.

Théorème 3.4.1. Supposons que $(H_1) - (H_4)$,(H_6) et $(H_8) - (H_9)$ sont satisfaites et que

$$U + V < 1$$

avec $U = M_A^{m+1}L_h + \dfrac{M_A T^\alpha + M_A^2(t_m^\alpha + s_m^\alpha) + .. + M_A^{m+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f + B^* C_f)$

et $V = \dfrac{M_A L_g(t_m^\beta + s_m^\beta) + .. + M_A^m L_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}$

Alors il existe une unique solution du problème (3.1).

Démonstration.

D'après les hypothèses, on montre aisément que l'opérateur P est bien défini sur $PC(J,X)$.

Soient $x, y \in PC(J,X)$.

Premier cas . Pour $t \in [0, t_1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\|(Px)(t) - (Py)(t)\| &\leq \|P_\alpha(t)\,(x_0 + h(x) - x_0 - h(y))\,\| \\
&+ \|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s) \\
&- f(s,y(s),By(s)) - C(s)u(s)]ds\| \\
&\leq M_A\|h(x) - h(y)\| \\
&+ \frac{\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \textstyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \parallel f(s,x(s),Bx(s)) - f(s,y(s),By(s)) \parallel) ds \\
&\leq M_A L_h \parallel x - y \parallel_{PC} + \frac{\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \textstyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(L_f \parallel x(s) - y(s) \parallel \\
&+ C_f \parallel Bx(s) - By(s) \parallel) ds \\
&\leq M_A L_h \parallel x - y \parallel_{PC} + \frac{\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \textstyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(L_f \parallel x(s) - y(s) \parallel \\
&+ C_f \parallel \textstyle\int_0^s B(s,\tau)(x(\tau) - y(\tau))d\tau \parallel) ds \\
&\leq M_A L_h \parallel x - y \parallel_{PC} + \frac{\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \textstyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(L_f \parallel x(s) - y(s) \parallel \\
&+ C_f \textstyle\int_0^s \parallel B(s,\tau) \parallel_{L(X)} \parallel (x(\tau) - y(\tau)) \parallel d\tau) ds \\
&\leq M_A L_h \parallel x - y \parallel_{PC} + \frac{\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \textstyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(L_f \parallel x - y \parallel_{PC} \\
&+ C_f \textstyle\int_0^s \parallel B(s,\tau) \parallel_{L(X)} \parallel x - y \parallel_{PC} d\tau) ds \\
&\leq M_A L_h \parallel x - y \parallel_{PC} + \frac{M_A t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (L_f + C_f B^*) \parallel x - y \parallel_{PC} \\
&\leq [M_A L_h + \frac{M_A t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (L_f + C_f B^*)] \parallel x - y \parallel_{PC}
\end{aligned}$$

Deuxième cas . Pour $t \in (t_i, s_i] \cup (s_i, t_{i+1}]$.

On montre que pour $t \in (t_i, s_i],\ i = 1, 2, ..., m$:

$$\begin{aligned}
\| (Px)(t)-(Py)(t) \| &\leq [M_A^i L_h + \frac{M_A t_i^\alpha + M_A^2(t_{i-1}^\alpha + s_{i-1}^\alpha) + ... + M_A^i(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f + C_f B^*) \\
&+ \frac{L_g(t_i^\beta + s_i^\beta) + M_A L_g(t_{i-1}^\beta + s_{i-1}^\beta) + ... + M_A^{i-1} L_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}] \| x-y \|_{PC},
\end{aligned}$$

• Pour $t \in [s_i, t_{i+1}],\ i = 1, 2, ..., m,$

$$\begin{aligned}
\| (Px)(t)-(Py)(t) \| &\leq [M_A^{i+1} L_h + \frac{M_A t_{i+1}^\alpha + M_A^2(t_i^\alpha + s_i^\alpha) + ... + M_A^{i+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f + C_f B^*) \\
&+ \frac{M_A L_g(t_i^\beta + s_i^\beta) + ... + M_A^i L_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}] \| x-y \|_{PC} .
\end{aligned}$$

• Pour $t \in (t_1, s_1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\| (Px)(t)-(Py)(t) \| &\leq \| d_1 x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_1(s, x(s)) ds - d_1 y - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_1(s, y(s)) ds \| \\
&\leq \| d_1 x - d_1 y \| + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \| g_1(s, x(s)) - g_1(s, y(s)) \| ds \\
&\leq \| P_\alpha(t_1)(h(x)-h(y)) \| + \| \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t_1-s)[f(s, x(s), Bx(s)) - \\
&\quad -f(s, y(s), By(s)) \\
&\quad + \| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} (t-s)^{\beta-1} (g_1(s, x(s)) - g_1(s, y(s))) ds \| + \\
&\quad + \| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (g_1(s, x(s)) - g_1(s, y(s))) ds \| \\
&\leq M_A L_h \| x-y \|_{PC} + \frac{M_A t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f + C_f B^*) \| x-y \|_{PC} + \frac{(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} L_g \| x-y \|_{PC} \\
&\leq \left[M_A L_h + \frac{M_A t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f + C_f B^*) + \frac{(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} L_g \right] \| x-y \|_{PC} .
\end{aligned}$$

• Pour $t \in (s_1, t_2]$

$$\begin{aligned}
\| (Px)(t)-(Py)(t) \| &\leq \| P_\alpha(t-s_1) K_{1x} - P_\alpha(t-s_1) K_{1y} \| \\
&\quad + \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)[f(s, x(s), Bx(s)) - f(s, y(s), By(s))] ds \| \\
&\leq M_A \| d_{1x} - d_{1y} \| + M_A \| \int_0^{s_1} (s_1-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_1-s)[f(s, x(s), Bx(s)) - \\
&\quad -f(s, y(s), By(s)) ds \| + M_A \| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s_1} (s_1-s)^{\beta-1} [g_1(s, x(s)) - g_1(s, y(s))] ds \| \\
&\quad + \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)[f(s, x(s), Bx(s)) - f(s, y(s), By(s))] ds \| \\
&\leq \left[M_A^2 L_h + \frac{M_A^2 t_1^\alpha + M_A^2 s_1^\alpha + M_A t_2^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f + C_f B^*) + \frac{M_A L_g(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \right] \| x-y \|_{PC} .
\end{aligned}$$

On suppose que pour $1 \leq j \leq i$ on a :

• Pour $t \in (t_j, s_j]$

$$\begin{aligned}
\| (Px)(t)-(Py)(t) \| &\leq [M_A^j L_h + \frac{M_A t_j^\alpha + M_A^2(t_{j-1}^\alpha + s_{j-1}^\alpha) + ... + M_A^j(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f + C_f B^*) \\
&+ \frac{L_g(t_j^\beta + s_j^\beta) + M_A L_g(t_{j-1}^\beta + s_{j-1}^\beta) + ... + M_A^{j-1} L_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}] \| x-y \|_{PC},
\end{aligned}$$

et pour $t \in (s_j, t_{j+1}]$,

$$\begin{aligned}
\| (Px)(t)-(Py)(t) \| &\leq [M_A^{j+1} L_h + \frac{M_A t_{j+1}^\alpha + M_A^2(t_j^\alpha + s_j^\alpha) + ... + M_A^{j+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f + C_f B^*) \\
&+ \frac{M_A L_g(t_j^\beta + s_j^\beta) + .. + M_A^j L_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}] \| x-y \|_{PC} .
\end{aligned}$$

On montre les relations pour $j = i + 1$.

• Pour $t \in (t_{i+1}, s_{i+1}]$, on a :

$$\begin{aligned}
\| (Px)(t) - (Py)(t) \| &\leq \| d_{i+1}x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_{i+1}(s, x(s))ds - d_{i+1}y \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_{i+1}(s, y(s))ds \| \\
&\leq \| d_{i+1}x - d_{i+1}y \| + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \| g_{i+1}(s, x(s)) - g_{i+1}(s, y(s)) \| ds \\
&\leq \| P_\alpha(t_{i+1} - s_i)(K_{ix} - K_{iy}) \| \\
&\quad + \| \int_0^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t_{i+1} - s)[f(s, x(s), Bx(s)) - f(s, y(s), By(s))]ds \| \\
&\quad + \| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)^{\beta-1} (g_{i+1}(s, x(s)) - g_{i+1}(s, y(s))ds \| \\
&\quad + \| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (g_{i+1}(s, x(s)) - g_{i+1}(s, y(s)))ds \| \\
&\leq [M_A^{i+1} L_h + \frac{M_A t_{i+1}^\alpha + M_A^2(t_i^\alpha + s_i^\alpha) + ... + M_A^{i+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} (L_f + C_f B^*) \\
&\quad + \frac{L_g(t_{i+1}^\beta + s_{i+1}^\beta) + M_A^i L_g(t_1^\beta + s_1^\beta) + ... + M_A L_g(t_i^\beta + s_i^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}] \| x - y \|_{PC} .
\end{aligned}$$

• Pour $t \in (s_{i+1}, t_{i+2}]$, on a :

$$\begin{aligned}
\| (Px)(t) - (Py)(t) \| &\leq \| P_\alpha(t - s_{i+1})K_{(i+1)x} - P_\alpha(t - s_{i+1})K_{(i+1)y} \| \\
&\quad + \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)[f(s, x(s), Bx(s)) - f(s, y(s), By(s))]ds \| \\
&\leq M_A \Bigg[\| d_{(i+1)x} - d_{(i+1)y} \| + \frac{s_{i+1}^\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)} (L_f + C_f B^*) \| x - y \|_{PC} \\
&\quad + \frac{s_{i+1}^\beta}{\Gamma(\beta+1)} L_g \| x - y \|_{PC} \Bigg] + \frac{t_{i+2}^\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)} (L_f + C_f B^*) \| x - y \|_{PC} \\
&\leq \Bigg[M_A \Bigg[M_A^{i+1} L_h + \frac{t_{i+2}^\alpha + M_A^{i+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha) + ... + M_A(t_{i+1}^\alpha + s_{i+1}^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} (L_f + C_f B^*) \Bigg] \\
&\quad + \frac{M_A L_g(s_{i+1}^\beta + t_{i+1}^\beta) + M_A^2 L_g(s_i^\beta + t_i^\beta) + ... + M_A^{i+1} L_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \Bigg] \| x - y \|_{PC} .
\end{aligned}$$

Donc on a montré que P est une contraction sur l'espace $PC(J, X)$. Par conséquent, d'après le principe de contractions de Banach, l'opérateur P admet un unique point fixe $x \in PC(J, X)$ qui est l'unique solution intégrale du problème (3.1).

□

Le résultat qu'on va donner dans la suite, se base sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Théorème 3.4.2. On suppose que $(H_1) - (H_3)$, et $(H_5) - (H_9)$ sont vérifiées. De plus, on suppose que la condition suivante est vérifiée :

$$max \Bigg\{ M_A^{m+1} L_h + \frac{M_A L_g(s_m^\beta + t_m^\beta) + M_A^2 L_g(s_{m-1}^\beta + t_{m-1}^\beta) + ... + M_A^m L_g(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} ;$$

$$\frac{M_A T^\alpha + M_A^2(t_m^\alpha + s_m^\alpha) + ... + M_A^{m+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} D(1 + B^*) \Bigg\} < 1.$$

Alors le problème (3.1) admet au moins une solution intégrale.

Démonstration.

On introduit l'opérateur Q tel que $Q = Q_1 + Q_2$ avec :

$$Q_1x(t) = \begin{cases} P_\alpha(t)(x_0 + h(x)) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)C(s)u(s)ds, \quad t \in [0, t_1], \\ d_{i1x} + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_i(s, x(s))ds, \quad t \in (t_i, s_i], \ i = 1, 2, .., m, \\ P_\alpha(t - s_i)K_{i1x} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)C(s)u(s)ds, \quad t \in (s_i, t_{i+1}], \ i = 1, 2, .., m, \end{cases}$$

et

$$Q_2x(t) = \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s, x(s), Bx(s))ds, \quad t \in [0, t_1], \\ d_{i2x}, \quad t \in (t_i, s_i], \quad i = 1, 2, .., m, \\ P_\alpha(t - s_i)K_{i2x} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s, x(s), Bx(s))ds, \\ \quad t \in (s_i, t_{i+1}], \ i = 1, 2, .., m, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} d_{i1x} = P_\alpha(t_i - s_{i-1})K_{(i-1)1x} + \int_0^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t_i - s)C(s)u(s)ds \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_i} (t_i - s)^{\beta-1} g_i(s, x(s))ds, \qquad i = 1, 2, .., m, \\ K_{i1x} = d_{i1x} + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\beta-1} g_i(s, x(s))ds - \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s)C(s)u(s)ds, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, .., m, \\ K_{01x} = x_0 + h(x), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d_{i2x} = P_\alpha(t_i - s_{i-1})K_{(i-1)2x} + \int_0^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t_i - s) f(s, x(s), Bx(s))ds, \ i = 1, 2, .., m, \\ K_{i2x} = d_{i2x} - \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) f(s, x(s), Bx(s))ds, \ i = 1, 2, .., m, \\ K_{02x} = 0. \end{cases}$$

Notre preuve va être établie en plusieurs étapes.

Étape 1. On montre que $QB_r(J) \subset B_r(J)$

avec $B_r = \{x \in PC(J, X); \| x \| \leq r\}$ la boule de rayon $r > 0$,

et $K_{\alpha,\tau} = \alpha \left(\dfrac{1-\tau}{\alpha - \tau} \right)^{1-\tau} \| Cu \|_{L^{1/\tau}}$,

$$\gamma_1 = M_A^{m+1}\,[\parallel x_0 \parallel + L'_h] + \frac{M_A[DT^\alpha + K_{\alpha,\tau}T^{\alpha-\tau}]}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$\gamma_2 = \frac{M_A^2[D(t_m^\alpha + s_m^\alpha) + K_{\alpha,\tau}(t_m^{\alpha-\tau} + s_m^{\alpha-\tau})] + ... + M_A^{m+1}[D(t_1^\alpha + s_1^\alpha) + K_{\alpha,\tau}(t_1^{\alpha-\tau} + s_1^{\alpha-\tau})]}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$\gamma_3 = \frac{M_A L'_g(t_i^\beta + s_m^\beta) + M_A^2 L'_g(t_{m-1}^\beta + s_{m-1}^\beta) + ... + M_A^m L'_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)},$$

$$\gamma_4 = \frac{[M_A T^\alpha + M_A^2(t_m^\alpha + s_m^\alpha) + ... + M_A^{m+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)]}{\Gamma(\alpha+1)} D(1+B^*).$$

Ici $\quad \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{1 - \gamma_4} < r.$

Pour tout $x \in B_r$, on a :

- Premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{aligned}
\parallel Qx(t) \parallel &\leq M_A\,[\parallel x_0 \parallel + L'_h] + \frac{M_A t_1^\alpha D}{\Gamma(\alpha+1)}(1 + r(1+B^*)) + \frac{K_{\alpha,\tau} t_1^{\alpha-\tau}}{\Gamma(\alpha+1)} M_A \\
&\leq M_A\left[\parallel x_0 \parallel + L'_h + \frac{D t_1^\alpha + K_{\alpha,\tau} t_1^{\alpha-\tau}}{\Gamma(\alpha+1)}\right] + M_A \frac{D(1+B^*)t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} r \leq r.
\end{aligned}$$

D'une façon similaire à la preuve du théorème (2.4.1), on montre que :

- Deuxième cas. Pour $t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, ..., m$,

$$\begin{aligned}
\parallel Qx(t) \parallel \leq\; & M_A^i\,[\parallel x_0 \parallel + L'_h] + \frac{M_A[D t_i^\alpha + K_{\alpha,\tau} t_i^{\alpha-\tau}]}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \frac{M_A^2[D(t_{i-1}^\alpha + s_{i-1}^\alpha) + K_{\alpha,\tau}(t_{i-1}^{\alpha-\tau} + s_{i-1}^{\alpha-\tau})] + ... + M_A^i[D(t_1^\alpha + s_1^\alpha) + K_{\alpha,\tau}(t_1^{\alpha-\tau} + s_1^{\alpha-\tau})]}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \frac{L'_g(t_i^\beta + s_i^\beta) + M_A L'_g(t_{i-1}^\beta + s_{i-1}^\beta) + ... + M_A^{i-1} L'_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \\
&+ \frac{[M_A t_i^\alpha + M_A^2(t_{i-1}^\alpha + s_{i-1}^\alpha) + M_A^3(t_{i-1}^\alpha + s_{i-1}^\alpha) + ... + M_A^i(t_1^\alpha + s_1^\alpha)]}{\Gamma(\alpha+1)} D(1+B^*) r \leq r.
\end{aligned}$$

- Troisième cas. Pour $t \in (s_i, t_{i+1}]$,

$$\begin{aligned}
\parallel Qx(t) \parallel \leq\; & M_A^{i+1}\,[\parallel x_0 \parallel + L'_h] + \frac{M_A[D t_{i+1}^\alpha + K_{\alpha,\tau} t_{i+1}^{\alpha-\tau}]}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \frac{M_A^2[D(t_i^\alpha + s_i^\alpha) + K_{\alpha,\tau}(t_i^{\alpha-\tau} + s_i^{\alpha-\tau})] + ... + M_A^{i+1}[D(t_1^\alpha + s_1^\alpha) + K_{\alpha,\tau}(t_1^{\alpha-\tau} + s_1^{\alpha-\tau})]}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \frac{M_A L'_g(t_i^\beta + s_i^\beta) + M_A^2 L'_g(t_{i-1}^\beta + s_{i-1}^\beta) + ... + M_A^i L'_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \\
&+ \frac{[M_A t_{i+1}^\alpha + M_A^2(t_i^\alpha + s_i^\alpha) + ... + M_A^{i+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)]}{\Gamma(\alpha+1)} D(1+B^*) r \leq r.
\end{aligned}$$

Étape 2. Q_1 est une contraction sur B_r.

Soient $x, y \in B_r$

• Premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$, on a :

$$\| Q_1 x(t) - Q_1 y(t) \| \leq M_A L_h \| x - y \|_{PC}.$$

D'une façon similaire à la preuve du théorème (2.4.1), on montre que :

• Deuxième cas. Pour $t \in [t_i, s_i],\ 1 \leq i \leq m,$

$$\| Q_1 x(t) - Q_1 y(t) \| \leq \left[M_A^i L_h + \frac{L_g(s_i^\beta + t_i^\beta) + ... + M_A^{i-1} L_g(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \right] \| x - y \|_{PC}.$$

• Troisième cas. Pour $t \in (s_i, t_{i+1}], 1 \leq i \leq m,$

$$\| Q_1 x(t) - Q_1 y(t) \| \leq \left[M_A^{i+1} L_h + \frac{M_A L_g(s_i^\beta + t_i^\beta) + ... + M_A^i L_g(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \right] \| x - y \|_{PC}.$$

Ceci implique que Q_1 est une contraction.

Étape 3. Q_2 est continu.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $\lim\limits_{x \to \infty} \| x_n - x \|_{PC} = 0$, on a :

• Premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} \| Q_2 x_n(t) - Q_2 x(t) \| &\leq \| \textstyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)(f(s, x_n(s), Bx_n(s)) - f(s, x(s), Bx(s))ds \| \\ &\leq \frac{M_A t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \| f(., x_n(.), Bx_n(.)) - f(., x(.), Bx(.)) \|_{PC} . \end{aligned}$$

D'une façon similaire à la preuve du théorème (2.4.1), on montre que :

• Deuxième cas. Pour $t \in (t_i, s_i],\ i = 1, 2, ..., m,$

$$\begin{aligned} \| Q_2 x_n(t) - Q_2 x(t) \| &\leq \left[\frac{M_A t_i^\alpha + M_A^2(t_{i-1}^\alpha + s_{i-1}^\alpha) + ... + M_A^i(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \\ &\quad \times \| f(., x_n(.), Bx_n(.)) - f(., x(.), Bx(.)) \|_{PC} . \end{aligned}$$

• Troisième cas. Pour $t \in (s_i, t_{i+1}],$

$$\begin{aligned} \| Q_2 x_n(t) - Q_2 x(t) \| &\leq \left[\frac{M_A t_{i+1}^\alpha + M_A^2(t_i^\alpha + s_i^\alpha) + ... + M_A^{i+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \\ &\quad \times \| f(., x_n(.), Bx_n(.)) - f(., x(.), Bx(.)) \|_{PC} . \end{aligned}$$

Étape 4. Q_2 est compacte.

1. On a $Q_2B_r \subseteq B_r$, alors Q_2 est uniformément borné sur B_r,

2. Pour $x \in B_r$ et $0 \leq t' < t'' \leq t_1$, on a :

$$\begin{aligned} \| Q_2x(t'') - Q_2x(t') \| &\leq \| \int_0^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t''-s) f(s,x(s),Bx(s))ds \\ &\quad - \int_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t'-s) f(s,x(s),Bx(s))ds \| \\ &\leq I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \| \int_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t''-s) f(s,x(s),Bx(s))ds \|, \\ I_2 &= \| \int_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} \left[Q_\alpha(t''-s) - Q_\alpha(t'-s)\right] f(s,x(s),Bx(s))ds \|, \\ I_3 &= \| \int_0^{t'} \left[(t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}\right] Q_\alpha(t''-s) f(s,x(s),Bx(s))ds \| . \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{\alpha M_A D\left(1+r(1+B^*)\right)}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{M_A D\left(1+r(1+B^*)\right)}{\Gamma(\alpha+1)} (t''-t')^\alpha \longrightarrow 0,\ t''-t' \longrightarrow 0. \\ I_2 &\leq D\left(1+r(1+B^*)\right) \int_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} \| Q_\alpha(t''-s)^{\alpha-1} - Q_\alpha(t'-s)^{\alpha-1} \| ds \longrightarrow 0, t'' \longrightarrow t'. \\ I_3 &\leq \frac{M_A D\left(1+r(1+B^*)\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t'} \left((t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}\right) ds \\ &\leq \frac{M_A D\left(1+r(1+B^*)\right)}{\Gamma(\alpha+1)} (t''-t')^\alpha \longrightarrow 0, t''-t' \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Sur les intervalles $[t_i, s_i]$ et $[s_i, t_{i+1}]$, on a :

• Premier cas. Pour $t_i \leq t' < t'' \leq s_i$,

$$\| Q_2x(t'') - Q_2x(t') \| = 0.$$

• Deuxième cas. Pour $s_i \leq t' < t'' \leq t_{i+1}$,

$$\| Q_2x(t'') - Q_2x(t') \| \leq I_1 + I_2 + I_3 + \| \left(P_\alpha(t''-s_i) - P_\alpha(t'-s_i)\right) K_{i2x} \| . \tag{3.2}$$

D'après l'hypothèse (H_1) et la preuve du lemme 3.4 dans [54], on peut déduire que (3.2) tend vers 0 indépendamment de $x \in B_r$ quand $t" \to t'$.

• Troisième cas. Pour $t_i \leq t' < s_i < t'' \leq t_{i+1}$, on a :

$$\| Q_2x(t'') - Q_2x(t') \| \leq \| P_\alpha(t''-s_i)K_{i2x} + \int_0^{t''}(t''-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t''-s)f(s,x(s),Bx(s))ds - d_{i2x} \| \longrightarrow 0$$

indépendamment de $x \in B_r$, quand $t'' \longrightarrow t'$.

Pour conclure, $\| Q_2x(t'') - Q_2x(t') \| \longrightarrow 0$, quand $t'' - t' \longrightarrow 0$, ce qui implique que $Q_2(B_r(J))$ est équicontinu.

On a $Q_2B_r \subseteq B_r$, avec $Q_2B_r(t) = \{Q_2x(t); x \in B_r\}$ pour $t \in J$.

3. On montre que $Q_2B_r(t)$ est relativement compact.

$Q_2B_r(0) = \{0\}$ est compact.

• Premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$ fixé et pour $\epsilon \in (0,t)$ et $\delta > 0$, on définit l'ensemble :

$$Q_2^{\epsilon,\delta}(B_r)(t) = \left\{Q_2^{\epsilon,\delta}x(t); x \in B_r\right\},$$

avec

$$\begin{aligned} Q_2^{\epsilon,\delta}x(t) &= \alpha\int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)f(s,x(s),Bx(s))d\theta ds \\ &= \alpha\int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)\left[T(\epsilon^\alpha\delta)T((t-s)^\alpha\theta-\epsilon^\alpha\delta)\right]f(s,x(s),Bx(s))d\theta ds. \\ &= \alpha T(\epsilon^\alpha\delta)\int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta-\epsilon^\alpha\delta)f(s,x(s),Bx(s))d\theta ds. \end{aligned}$$

(Observons que $\theta \geq \delta$ et $t-\epsilon \geq s$, par conséquent $(t-s)^\alpha\theta - \epsilon^\alpha\delta \geq 0$, puisque l'opérateur $T(\epsilon^\alpha\delta)$ ($\epsilon^\alpha\delta > 0$) est compact, on peut conclure que $Q_2^{\epsilon,\delta}B_r(t)$ est relativement compact de X. De plus, pour tout $x \in B_r$ on a :

$$\begin{aligned} \| Q_2x(t) - Q_2^{\epsilon,\delta}x(t) \| &\leq \alpha \| \int_0^t\int_0^\delta \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)f(s,x(s),Bx(s))d\theta ds \\ &+ \int_0^t\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)f(s,x(s),Bx(s))d\theta ds \\ &- \int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)f(s,x(s),Bx(s))d\theta ds \| \\ &\leq G_1 + G_2. \end{aligned}$$

Où

$$G_1 = \alpha \| \int_0^t\int_0^\delta \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)f(s,x(s),Bx(s))d\theta ds \|$$

et

$$G_2 = \alpha \parallel \int_{t-\epsilon}^{t} \int_{\delta}^{\infty} \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)f(s,x(s),Bx(s))d\theta ds \parallel .$$

De plus on a :

$$\begin{array}{lcl} G_1 & \leq & \alpha M_A \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \parallel f(s,x(s),Bx(s)) \parallel ds \int_0^\delta \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta \\ & \leq & M_A t_1^\alpha D\left(1+r(1+B^*)\right) \int_0^\delta \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lcl} G_2 & \leq & \alpha M_A \int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{\alpha-1} \parallel f(s,x(s),Bx(s)) \parallel ds \int_\delta^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta \\ & \leq & M_A \epsilon^\alpha D\left(1+r(1+B^*)\right) \int_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta \\ & \leq & \dfrac{M_A D\left(1+r(1+B^*)\right)}{\Gamma(\alpha+1)}\epsilon^\alpha. \end{array}$$

Par suite, $\parallel (Q_2x(t) - Q_2^{\epsilon,\delta}x(t) \parallel \longrightarrow 0$, quand $\epsilon \longrightarrow 0$ et $\delta \longrightarrow 0$

On en déduit que $Q_2B_r(t)$ est un ensemble relativement compact de X.

• Deuxième cas. Pour $t_i < t \leq s_i$, $i = 1, 2, ..., m$, dans ce cas :

$Q_2B_r(t) = \{d_{i2x}, x \in B_r\}$ est compacte.

• Troisième cas. Pour $s_i < t \leq t_{i+1}$, $i = 1, 2, ..., m$:

$$Q_2B_r(t) = \left\{P_\alpha(t-s_i)K_{i2x} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)f(s,x(s),Bx(s))ds, x \in B_r\right\}.$$

Sachant que $P_\alpha(t-s_i)$ est un opérateur compact, et en utilisant le même raisonnement que dans le premier cas, on peut conclure que $Q_2B_r(t)$ est relativement compact.

□

Par conséquent, d'après le théorème du point fixe de Krasnoselkii, l'opérateur Q admet au moins un point fixe, et par suite le problème (3.1) admet au moins une solution intégrale dans B_r.

3.5 Exemples

Dans cette partie, on donne deux exemples pour illustrer nos résultats.

Dans toute la suite, on pose $X = L^2(0,1)$, $J = [0,1]$, $t_0 = s_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{3}$, $s_1 = \frac{2}{3}$, $T = 1$.

On définit $Ax = \dfrac{\partial^2 x}{\partial^2 v}$ pour $x \in D(A) = \left\{ x \in X : \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial^2 x}{\partial^2 v} \in X, x(0) = x(1) = 0 \right\}$.

L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$ sur X. De plus, $(T(t))_{t\geq 0}$ est compact et $\| T(t) \| \leq 1 = M_A$, pour tout $t \geq 0$. Pour plus de détails, on se réfère à [40].

Exemple 3.5.1. On considère

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} y(t,v) = \dfrac{\partial^2}{\partial v^2} y(t,v) + \dfrac{1}{24} sin\left[y(t,v) + \int_0^t \dfrac{e^{-2(s-t)}}{160} y(s,v) ds \right] + C(t,v), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v \in (0,1), t \in [0, \dfrac{1}{3}] \cup (\dfrac{2}{3}, 1], \\ \dfrac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} y(t,v) = \dfrac{1}{8e^t} cos(y(t,v)), t \in (\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}], \\ y(t,v) = y_0 + \dfrac{1}{8e^t} \left(y(s_1, v) + y(t_1, v) \right). \end{cases} \tag{3.3}$$

Notons $x(t)(v) = y(t,v)$ et $C(t,v) = C(t)u(t)(v)$. Alors le problème (3.3) devient :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t)(v) = Ax(t)(v) + f(t, x(t), Bx(t))(v) + C(t)u(t)(v), \quad t \in [0, \dfrac{1}{3}] \cup (\dfrac{2}{3}, 1], u \in U_{ad}, \\ {}^cD^\beta x(t) = g_1(t, x(t)), \quad t \in (t_i, s_i], t \in (\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}], \\ x(0) = x_0 + h(x). \end{cases} \tag{3.4}$$

Où $Bx(t)(v) = \displaystyle\int_0^t \frac{e^{-2(s-t)}}{160} y(s,v) ds$, $\quad f(t, x(t), Bx(t))(v) = \dfrac{1}{24} sin[x(t,v) + \displaystyle\int_0^t \frac{e^{-2(s-t)}}{160} y(s,v) ds]$,

$g_1(t, x(t))(v) = \dfrac{1}{8} cos(x(t)(v))$, $\quad h(t, x(t))(v) = \dfrac{1}{8} \left(x(s_1)(v) + x(t_1)(v) \right)$ and $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.9$.
Dans ce cas, on a : $L_f = C_f = \dfrac{1}{24}$, $L_h = \dfrac{1}{8}$, $L_g = \dfrac{1}{8}$ et $B^* = \dfrac{1}{40}$.

On vérifie alors que :

$$\left[L_h + \frac{1+(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f + B^*C_f) + \frac{L_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\right] \approx 0.3616 < 1.$$

Toutes les hypothèses du théorème (3.4.1) sont vérifiées. Par conséquent, il existe une unique solution intégrale du problème (3.3).

Exemple 3.5.2. On considère

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} y(t,v) = \frac{\partial^2}{\partial v^2} y(t,v) + \frac{1}{24e^t} \frac{|y(t,v) + By(t,v)|}{1+|y(t,v)+By(t,v)|} + c(t,v), v \in (0,1), t \in [0,\frac{1}{3}] \cup (\frac{2}{3}, 1] \\ \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} y(t,v) = \frac{1}{8e^t} \frac{|y(t,v)|}{1+|y(t,v)|}, t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ y(t,v) = y_0 + \frac{1}{8e^t}\left(y(s_1,v) + y(t_1,v)\right). \end{cases} \tag{3.5}$$

On note $x(t)(v) = y(t,v)$ et $C(t,v) = C(t)u(t)(v)$. Alors le problème (3.5) peut être transformé en (3.4),

où : $Bx(t)(v) = \int_0^t \frac{e^{-2(s-t)}}{160} y(s,v)ds, \quad f(t,x(t),Bx(t))(v) = \frac{1}{24e^t} \frac{|x(t)(v) + Bx(t)(v)|}{1+|x(t)(v)+Bx(t)(v)|},$

$g_1(t,x(t))(v) = \frac{1}{8e^t} \frac{|y(t,v)|}{1+|y(t,v)|}, \quad h(t,x(t))(v) = \frac{1}{8e^t}\left(x(s_1)(v) + x(t_1)(v)\right)$ et $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.6$.

Dans ce cas on a : $L_h = L_g = \frac{1}{8}$, $D = \frac{1}{24}$, et $B^* = \frac{1}{40}$,$L_h + L_g \frac{(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \approx 0.30705$,

et $\frac{1+(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} D(1+B^*) \approx 0.1041.$

On a $\max\{0.30705, 0.1041\} < 1$.

Toutes les hypothèses du théorème (3.4.2) sont vérifiées. Alors, le problème (3.5) admet au moins une solution intégrale.

Chapitre 4

Étude d'un problème fractionnaire impulsif avec un semi-groupe non-compact

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier une équation différentielle fractionnaire impulsive où on va considérer que le semi-groupe engendré par l'opérateur A est non-compact.

4.1 Préliminaires et notations

On considère l'équation integro-différentielle fractionnaire impulsive suivante :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f(t, x(t), Bx(t)) + C(t)u(t), \quad t \in (s_i, t_{i+1}], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 0, 1, 2, ..., m, \quad u \in U_{ad}, \\ {}^cD^{\beta}x(t) = g_i(t, x(t)), \quad t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, ..., m, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

avec ${}^cD^{\alpha}$ et ${}^cD^{\beta}$ sont les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordre $\alpha \in (0,1)$ et $\beta \in (0,1)$ respectivement, $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe d'opérateurs bornés non-compact $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach $(X, \| \, . \, \|)$, $x_0 \in X$, $0 = t_0 = s_0 < t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < ... < t_m \leq s_m < t_{m+1} = T$ des réels fixés, $g_i \in C(J \times X, X)$, et $Bx(t) = \int_0^t B(t,s)x(s)ds$, $B \in C(D_1, \mathbb{R}^+)$, avec $D_1 = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq \omega\}$, $K_0 = \max\limits_{(t,s)\in D_1} B(t,s)$ et U_{ad} l'ensemble qu'on a définit dans le chapitre précédent.

On pose $J = [0, T], J_0 = [0, t_1], J_1 = (t_1, t_2], ..., J_{m-1} = (t_{m-1}, t_m], J_m = (t_m, t_{m+1}]$ et on introduit l'espace

$PC(J,X) := \{x : J \to X : x \in C((t_i,t_{i+1}],X), i = 0,1,...,m$ et ils existent $x(t_i^-)$ et $x(t_i^+), i = 1,...,m$ avec $x(t_i^-) = x(t_i^+)\}$.
Il est clair que $PC(J,X)$ est un espace de Banach avec la norme $\|x\|_{PC} = \sup\{\|x(t)\| : t \in J\}$.

4.2 Définition de la solution intégrale

Définition 4.2.1. [14] Une fonction $x \in C(J,X)$ est dite solution intégrale du problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = Ax(t) + y(t), & t \in (0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

si elle satisfait l'équation intégrale
$x(t) = P_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)y(s)ds,$

Avec
$P_\alpha(t) = \int_0^\infty \xi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)d\theta, \quad Q_\alpha(t) = \alpha\int_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)d\theta,$

$\xi_\alpha(\theta) = \dfrac{1}{\alpha}\theta^{-1-\frac{1}{\alpha}}\overline{\omega}_\alpha(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}) \geq 0,$
$\overline{\omega_\alpha}(\theta) = \dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\theta^{-n\alpha-1}\dfrac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}sin(n\pi\alpha), \theta \in (0,\infty)$, et $\int_0^\infty \xi_\alpha(\theta)d\theta = 1.$

On peut vérifier que $\displaystyle\int_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$.

Lemme 4.2.1. [9, 10, 49] Les opérateurs P_α et Q_α ont les propriétés suivantes :

(1) Pour $t \geq 0$ fixé, $P_\alpha(t)$ et $Q_\alpha(t)$ sont des opérateurs linéaires et bornés, et pour tout $x \in X$,
$\| P_\alpha(t)x \| \leq M_A \| x \|, \quad \| Q_\alpha(t)x \| \leq \dfrac{\alpha M_A}{\Gamma(1+\alpha)} \| x \|,$

(2) $\{P_\alpha(t), t \geq 0\}$ et $\{Q_\alpha(t), t \geq 0\}$ sont fortement continus,

(3) si $(T(t))_{t\geq 0}$ est équicontinu, alors $P_\alpha(t)$ et $Q_\alpha(t)$ sont continus sur $(0,\infty)$, ce qui veut dire que pour $0 < t' < t'' < T$ on a :
$\| P_\alpha(t'') - P_\alpha(t') \| \longrightarrow 0$ et $\| Q_\alpha(t'') - Q_\alpha(t') \| \longrightarrow 0$ quand $t'' \longrightarrow t'$.

4.3 Construction des solutions intégrales

On considère d'abord dans $PC(J,X)$ le problème fractionnaire impulsif suivant :

$$
\begin{cases}
{}^{c}D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f(t, x(t), Bx(t)) + C(t)u(t), \quad t \in (s_i, t_{i+1}], i = 0, 1, 2, ..., m, u \in U_{ad}, \\
{}^{c}D^{\beta}x(t) = g_i(t, x(t)), \quad t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, ..., m, \\
x(0) = x_0.
\end{cases}
$$

D'après les propriétés de la dérivée de Caputo, une solution intégrale peut être écrite de la manière suivante :

$$
x(t) = \begin{cases}
x_0 + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[Ax(s) + f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds, \quad t \in (0, t_1], \\
d_{1x} + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_1(s, x(s)) ds, \quad t \in (t_1, s_1], \\
K_{1x} + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[Ax(s) + f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds, \quad t \in (s_1, t_2], \\
. \\
. \\
. \\
d_{ix} + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_i(s, x(s)) ds, \quad t \in (t_i, s_i], \\
K_{ix} + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[Ax(s) + f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds, \quad t \in (s_i, t_{i+1}],
\end{cases}
$$

où d_{ix} et K_{ix}, $i = 1, 2, ..., m$, sont des éléments de X.
On obtient

$$
x(t) = \begin{cases}
d_{ix} + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_i(s, x(s)) ds, \quad t \in (t_i, s_i], 1 \leq i \leq m, \\
P_{\alpha}(t - s_i) K_{ix} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_{\alpha}(t-s) \left[f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in (s_i, t_{i+1}], 0 \leq i \leq m, \\
K_{0x} = x_0.
\end{cases}
$$

En utilisant la continuité de x aux points t_i, on obtient :

$$
\begin{aligned}
x(t_i) &= P_{\alpha}(t_i - s_{i-1}) K_{(i-1)x} + \int_0^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} Q_{\alpha}(t_i - s) \left[f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds \\
&= d_{ix} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_i} (t_i - s)^{\beta-1} g_i(s, x(s)) ds.
\end{aligned}
$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} d_{ix} &= P_\alpha(t_i - s_{i-1})K_{(i-1)x} + \int_0^{t_i}(t_i - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i - s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right]ds \\ &\quad -\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_i}(t_i - s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds. \end{aligned} .$$

Et en utilisant la continuité de x aux points s_i, on obtient :

$$\begin{aligned} x(s_i) &= d_{ix} + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{s_i}(s_i - s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds \\ &= K_{ix} + \int_0^{s_i}(s_i - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i - s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right]ds. \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} K_{ix} &= d_{ix} + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{s_i}(s_i - s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds \\ &\quad -\int_0^{s_i}(s_i - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i - s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right]ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, une solution intégrale du problème (4.1) est donnée par :

$$x(t) = \begin{cases} P_\alpha(t)x_0 + \int_0^{t}(t - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t - s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right]ds, \quad t \in (0,t_1], \\ d_1 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t}(t - s)^{\beta-1}g_1(s,x(s))ds, \quad t \in (t_1,s_1], \\ P_\alpha(t - s_1)K_1 + \int_0^{t}(t - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t - s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right]ds, \quad t \in (s_1,t_2], \\ . \\ . \\ . \\ d_{ix} + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t}(t - s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, \quad t \in (t_i,s_i], 1 \leq i \leq m, \\ P_\alpha(t - s_i)K_{ix} + \int_0^{t}(t - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t - s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right]ds, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t \in (s_i,t_{i+1}], 1 \leq i \leq m, \end{cases}$$

où

$K_{0x} = x_0,$

$$\begin{aligned} d_{ix} &= P_\alpha(t_i - s_{i-1})K_{(i-1)x} + \int_0^{t_i}(t_i - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i - s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right]ds \\ &\quad -\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_i}(t_i - s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, \\ K_{ix} &= d_{ix} - \int_0^{s_i}(s_i - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i - s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right]ds \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{s_i}(s_i - s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds. \end{aligned} .$$

Définition 4.3.1. Une fonction $x \in PC(J,X)$ est dite solution intégrale du problème (4.1) si elle satisfait la relation suivante :

$$x(t) = \begin{cases} P_\alpha(t)K_{0x} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in (0,t_1], u \in U_{ad}, \\ d_{ix} + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_i(s,x(s))ds, \quad t \in (t_i,s_i], 1 \leq i \leq m, \\ P_\alpha(t-s_i)K_{ix} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in (s_i,t_{i+1}], 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Où

$K_{0x} = x_0,$

$$\begin{aligned} d_{ix} &= P_\alpha(t_i - s_{i-1})K_{(i-1)x} + \int_0^{t_i} (t_i-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t_i-s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_i} (t_i-s)^{\beta-1} g_i(s,x(s))ds, \\ K_{ix} &= d_{ix} - \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i-s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\beta-1} g_i(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

4.4 Résultats d'existence

On traite dans cette partie les résultats d'existence du problème (4.1).

Pour montrer notre premier résultat on introduit les hypothèses suivantes :

(H_1) A génère un C_0-semi-groupe uniformément borné et équicontinu $T(t)_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X tel que $\| T(t) \| \leq M_A$ pour tout $t \in J$,

(H_2) $C : [0,T] \longrightarrow L(Y,X)$ est essentiellement borné, ie $C \in L^\infty([0,T], L(Y,X))$,

(H_3) La fonction f est continue, ie $f \in C(J \times X \times X, X)$,
(H_4) Ils existent $\tau \in (0,\alpha)$ et une fonction positive $m \in L^{\frac{1}{\tau}}(J,\mathbb{R})$ tels que

$\| f(t,u,v) \| \leq m(t)$, pour $u,v \in X$ et $t \in J$,

(H_5) Pour $i = 1,2,...,m$, la fonction $g_i \in C([t_i,s_i] \times X; X)$ et il existe des constantes $K_i > 0$

telles que :

$\| g_i(t,u) - g_i(t,v) \| \leq K_i \| u - v \|$ pour tout $u, v \in X$, et $K = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \{K_i\}$

(H_5') Pour $i = 1, 2, ..., m$, $g_i \in C(J \times X; X)$ est complètement continue, et il existe $b, d > 0$ tels que :

$\| g_i(t,u) \| \leq b_i \| u \| + d_i$, pour tout $u \in B_r$. B_r est un ensemble qu'on va définir dans la suite, et $b = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \{b_i\}$, $d = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \{d_i\}$,

(H_6) Il existe des constantes $L_1, L_2 > 0$ telles que :

$\beta(f(t, D_1, D_2) \leq L_1 \beta(D_1) + L_2 \beta(D_2)$ pour tout $t \in J$ et D_1, D_2 des ensembles dénombrables et bornés de X.

Théorème 4.4.1. Supposons que $(H_1) - (H_6)$ sont vérifiées. De plus, on suppose que la propriété suivante est vérifiée :

$$max\{A, B\} < 1,$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{(s_m^\beta + t_m^\beta) + M_A(s_{m-1}^\beta + t_{m-1}^\beta) + ... + M_A^{m-1}(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \right] K \\ &\quad + 4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0) \left[\frac{t_m^\alpha + M_A(t_{m-1}^\alpha + s_{m-1}^\alpha) + ... + M_A^{m-1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B &= \left[\frac{M_A(s_m^\beta + t_m^\beta) + M_A^2(s_{m-1}^\beta + t_{m-1}^\beta) + ... + M_A^m(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \right] K \\ &\quad + 4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0) \left[\frac{t_{m+1}^\alpha + M_A(t_m^\alpha + s_m^\alpha) + ... + M_A^m(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \end{aligned}$$

Alors le problème (4.1) admet au moins une solution intégrale.

Démonstration.

On introduit l'opérateur $Q = Q_1 + Q_2$ où :

$$Q_1x(t) = \begin{cases} P_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)C(s)u(s)ds, \quad t \in [0, t_1], \\ d_{i1x} + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_i(s, x(s))ds, \quad t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, .., m, \\ P_\alpha(t-s_i)K_{i1x} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)C(s)u(s)ds, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in (s_i, t_{i+1}], i = 1, 2, .., m, \end{cases}$$

$$Q_2x(t) = \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)f(s, x(s), Bx(s))ds, \quad t \in [0, t_1], \\ d_{i2x}, \quad t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, .., m, \\ P_\alpha(t-s_i)K_{i2x} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)f(s, x(s), Bx(s))ds, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in (s_i, t_{i+1}], i = 1, 2, .., m, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} d_{i1x} = P_\alpha(t_i - s_{i-1})K_{(i-1)1x} + \int_0^{t_i} (t_i-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t_i-s)C(s)u(s)ds \\ \qquad -\dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_i} (t_i-s)^{\beta-1} g_i(s, x(s))ds, \qquad i = 1, 2, .., m, \\ K_{i1x} = d_{i1x} + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\beta-1} g_i(s, x(s))ds \\ \qquad - \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i-s)C(s)u(s)ds, i = 1, 2, .., m, \\ K_{01x} = x_0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d_{i2x} = P_\alpha(t_i - s_{i-1})K_{(i-1)2x} + \int_0^{t_i} (t_i-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t_i-s)f(s, x(s), Bx(s))ds, i = 1, 2, .., m, \\ K_{i2x} = d_{i2x} - \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i-s)f(s, x(x), Bx(s))ds, i = 1, 2, .., m, \\ K_{02x} = 0. \end{cases}$$

Notre preuve va être faite en plusieurs étapes.

Étape 1 : On montre que $QB_r(J) \subset B_r(J)$

où $B_r = \{x \in PC(J, X); \parallel x \parallel \leq r\}$ est la boule de rayon $r > 0$;

$K_{\alpha,\tau} = \left(\dfrac{1-\tau}{\alpha-\tau}\right)^{1-\tau} \parallel Cu \parallel_{L^{1/\tau}}$ et $S_{\alpha,\tau} = \left(\dfrac{1-\tau}{\alpha-\tau}\right)^{1-\tau} \parallel m \parallel_{L^{1/\tau}}$,

$$\gamma_1 = M_A^{m+1} \parallel x_0 \parallel \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1) - M_A K(t_1^\beta + s_1^\beta)},$$

$$\gamma_2 = \frac{(M_A t_{m+1}^{\alpha-\tau} + M_A^2(t_m^{\alpha-\tau} + s_m^{\alpha-\tau}) + ... + M_A^{m+1}(t_1^{\alpha-\tau} + s_1^{\alpha-\tau}))\Gamma(\beta+1)}{(\Gamma(\beta+1) - M_A K(t_1^\beta + s_1^\beta))\Gamma(\alpha)}(K_{\alpha,\tau} + S_{\alpha,\tau}),$$

$$\gamma_3 = \frac{M_A^2(t_{m-1}^\beta + s_{m-1}^\beta) + ... + M_A^m(t_1^\beta + s_1^\beta)}{(\Gamma(\beta+1) - M_A K(t_1^\beta + s_1^\beta))} \parallel g_m(t,0) \parallel,$$

ici $\gamma_1 + \gamma_1 + \gamma_1 \leq r$.

Pour tout $x \in B_r$, on a :

• Premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$

$$\begin{array}{rcl} \parallel Qx(t) \parallel & \leq & \parallel P_\alpha(t)K_{0x} \parallel + \parallel \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds \parallel \\ & \leq & M_A \parallel x_0 \parallel + \dfrac{M_A t_1^{\alpha-\tau}}{\Gamma(\alpha)} \left(K_{\alpha,\tau} + S_{\alpha,\tau}\right). \end{array}$$

• Deuxième cas. Pour $t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, ..., m$.

Pour $t \in (t_1, s_1]$

$$\begin{array}{rcl} \parallel Qx(t) \parallel & \leq & \parallel d_{1x} \parallel + \parallel \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_1(s,x(s))ds \parallel \\ & \leq & \parallel P_\alpha(t_1)K_{0x} \\ & & + \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t_1-s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds \parallel \\ & & + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \parallel \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\beta-1} g_1(s,x(s))ds \parallel + \parallel \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_1(s,x(s)ds \parallel \\ & \leq & M_A \parallel x_0 \parallel + \dfrac{M_A t_1^{\alpha-\tau}}{\Gamma(\alpha)} \left(K_{\alpha,\tau} + S_{\alpha,\tau}\right) + \dfrac{t_1^\beta + s_1^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \left(K \parallel x \parallel + \parallel g_1(t,0) \parallel\right) \\ & \leq & r. \end{array}$$

Pour $t \in (s_1, t_2]$

$$\begin{array}{rcl} \parallel Qx(t) \parallel & \leq & \parallel P_\alpha(t-s_1)K_{1x} \parallel + \parallel \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds \parallel \\ & \leq & \parallel P_\alpha(t-s_1)d_{1x} \parallel \\ & & + \parallel P_\alpha(t-s_1)(\int_0^{s_1} (s_1-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds \\ & & + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s_1} (s_1-s)^{\beta-1} g_1(s,x(s))ds) \parallel \\ & & + \parallel \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds \parallel \\ & \leq & M_A^2 \parallel x_0 \parallel \\ & & + \dfrac{M_A^2(t_1^{\alpha-\tau} + s_1^{\alpha-\tau}) + M_A t_2^{\alpha-\tau}}{\Gamma(\alpha)} (K_{\alpha,\tau} + S_{\alpha,\tau}) \\ & & + \dfrac{M_A(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \left(K \parallel x \parallel + \parallel g_1(t,0) \parallel\right) \\ & \leq & r. \end{array}$$

Par récurrence on suppose que : pour $t \in (t_j, s_j]$, $1 \leq j \leq i$

$$\begin{aligned}
\| Qx(t) \| &\leq M_A^j \| x_0 \| \\
&+ \frac{M_A t_j^{\alpha-\tau} + M_A^2(t_{j-1}^{\alpha-\tau} + s_{j-1}^{\alpha-\tau}) + ... + M_A^j(t_1^{\alpha-\tau} + s_1^{\alpha-\tau})}{\Gamma(\alpha)}(K_{\alpha,\tau} + S_{\alpha,\tau}) \\
&+ \frac{(t_j^{\beta} + s_j^{\beta}) + M_A(t_{j-1}^{\beta} + s_{j-1}^{\beta}) + ... + M_A^{j-1}(t_1^{\beta} + s_1^{\beta})}{\Gamma(\beta+1)}(K \| x \| + \| g_j(t,0) \|) \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Pour $t \in (s_j, t_{j+1}]$

$$\begin{aligned}
\| Qx(t) \| &\leq M_A^{j+1} \| x_0 \| \\
&+ \frac{M_A t_{j+1}^{\alpha-\tau} + M_A^2(t_j^{\alpha-\tau} + s_j^{\alpha-\tau}) + ... + M_A^{j+1}(t_1^{\alpha-\tau} + s_1^{\alpha-\tau})}{\Gamma(\alpha)}(K_{\alpha,\tau} + S_{\alpha,\tau}) \\
&+ \frac{M_A(t_j^{\beta} + s_j^{\beta}) + M_A^2(t_{j-1}^{\beta} + s_{j-1}^{\beta}) + ... + M_A^{j}(t_1^{\beta} + s_1^{\beta})}{\Gamma(\beta+1)}(K \| x \| + \| g_j(t,0) \|) \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Et on montre les relations pour $j = i + 1$.

Pour $t \in (t_{i+1}, s_{i+1}]$

$$\begin{aligned}
\| Qx(t) \| &\leq \| d_{(i+1)x} \| + \| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_{i+1}(s, x(s)ds \| \\
&\leq \| P_\alpha(t_{i+1} - s_i))K_{ix} + \int_0^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t_{i+1} - s)\left[f(s, x(s), Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds \| \\
&+ \| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)^{\beta-1} g_{i+1}(s, x(s))ds \\
&+ \| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_{i+1}(s, x(s)ds \| \\
&\leq M_A^{i+1} \| x_0 \| + \frac{M_A t_{i+1}^{\alpha-\tau} + M_A^2(t_i^{\alpha-\tau} + s_i^{\alpha-\tau}) + ... + M_A^{i+1}(t_1^{\alpha-\tau} + s_1^{\alpha-\tau})}{\Gamma(\alpha)}(K_{\alpha,\tau} + S_{\alpha,\tau}) \\
&+ \frac{(t_{i+1}^{\beta} + s_{i+1}^{\beta}) + M_A(t_i^{\beta} + s_i^{\beta}) + ... + M_A^{i}(t_1^{\beta} + s_1^{\beta})}{\Gamma(\beta+1)}(K \| x \| + \| g_{i+1}(t,0) \|) \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Pour $t \in (s_{i+1}, t_{i+2}]$

$$\begin{aligned}
\| Qx(t) \| &\leq M_A^{i+2} \| x_0 \| + \frac{M_A t_{i+2}^{\alpha-\tau} + M_A^2(t_{i+1}^{\alpha-\tau} + s_{i+1}^{\alpha-\tau}) + ... + M_A^{i+2}(t_1^{\alpha-\tau} + s_1^{\alpha-\tau})}{\Gamma(\alpha)}(K_{\alpha,\tau} + S_{\alpha,\tau}) \\
&+ \frac{M_A(t_{i+1}^{\beta} + s_{i+1}^{\beta}) + M_A^2(t_i^{\beta} + s_i^{\beta}) + ... + M_A^{i+1}(t_1^{\beta} + s_1^{\beta})}{\Gamma(\beta+1)}(K \| x \| + \| g_{i+1}(t,0) \|) \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $QB_r(J) \subset B_r(J)$.

Étape 2 : Q_1 est lipschitzien.

Soient $x, y \in PC(J, X)$,

- Premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$, on a :

$\| Q_1x(t) - Q_1y(t) \|= 0.$

D'une façon similaire à ce qu'on a fait dans la première étape, on montre que :

• Deuxième cas. Pour $t \in [t_i, s_i], 1 \leq i \leq m,$

$$\| Q_1x(t) - Q_1y(t) \| \leq \left[\frac{(s_i^\beta + t_i^\beta) + M_A(s_{i-1}^\beta + t_{i-1}^\beta) + ... + M_A^{i-1}(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta + 1)} \right] K \| x - y \|_{PC} .$$

Pour $t \in [s_i, t_{i+1}], 1 \leq i \leq m,$

$$\| Q_1x(t) - Q_1y(t) \| \leq \left[\frac{M_A(s_i^\beta + t_i^\beta) + M_A^2(s_{i-1}^\beta + t_{i-1}^\beta) + ... + M_A^{i}(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta + 1)} \right] K \| x - y \|_{PC} .$$

Ce qui implique que Q_1 est lipschitzien.

Étape 3 : Q_2 est continu.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $\lim_{x\to\infty} \| x_n - x \|_{PC}= 0$. Alors, on a :

• Premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} \| Q_2x_n(t) - Q_2x(t) \| &\leq \| \textstyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) \left(f(s, x_n(s), Bx_n(s)) - f(s, x(s), Bx(s)) \right) ds \| \\ &\leq \frac{M_A t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \| f(., x_n(.), Bx_n(.)) - f(., x(.), Bx(.)) \|_{PC} . \end{aligned}$$

D'une façon similaire à l'étape 1, on montre que :

• Deuxième cas. pour $t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, ..., m,$

$$\| Q_2x_n(t) - Q_2x(t) \| \leq \left[\frac{M_A t_i^\alpha + M_A^2(t_{i-1}^\alpha + s_{i-1}^\alpha) + ... + M_A^i(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \| f(., x_n(.), Bx_n(.)) - f(., x(.), Bx(.)) \|_{PC}$$
.

• Troisième cas. pour $t \in (s_i, t_{i+1}), i = 1, 2, ..., m,$

$$\| Q_2x_n(t) - Q_2x(t) \| \leq \left[\frac{M_A t_{i+1}^\alpha + M_A^2 (t_i^\alpha + s_i^\alpha) + ... + M_A^{i+1} (t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \| f(.,x_n(.),Bx_n(.)) - f(.,x(.),Bx(.)) \|_{PC}$$
.

Étape 4 : Q_2 est équicontinu, ie. $\| Q_2x(t_2) - Q_2x(t_1) \| \rightarrow 0$ quand $t_2 \rightarrow t_1$.

- Pour $0 \leq t' < t'' \leq t_1$, on a :

$$\begin{aligned} \| Q_2x(t'') - Q_2x(t') \| &\leq \| \textstyle\int_0^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t''-s) f(s,x(s),Bx(s)) ds \\ &\quad - \textstyle\int_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t''-s) f(s,x(s),Bx(s)) ds \| \\ &\leq I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

où $I_1 = \| \int_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t''-s) f(s,x(s),Bx(s)) ds \|$,

$I_2 = \| \int_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} \left[Q_\alpha(t''-s) - Q_\alpha(t'-s) \right] f(s,x(s),Bx(s)) ds \|$,

$I_3 = \| \int_0^{t'} \left[(t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1} \right] Q_\alpha(t''-s) f(s,x(s),Bx(s)) ds \|$,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{t'}^{t''} \| (t''-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),Bx(s)) \| ds \\ &\leq \frac{M_A S_{\alpha,\tau}}{\Gamma(\alpha)} (t''-t')^{\alpha-\tau} \longrightarrow 0 \text{ as } t''-t' \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

$I_1 \longrightarrow 0$ as $t'' - t' \longrightarrow 0$.

- Pour $t' = 0$, $0 < t'' < t_1$, il est facile de conclure que $I_2 = 0$.

- Pour $t' > 0$ et $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on a :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \| \textstyle\int_0^{t'-\epsilon} (t'-s)^{\alpha-1} \left[Q_\alpha(t''-s) - Q_\alpha(t'-s) \right] f(s,x(s),Bx(s)) ds \| \\ &\quad + \| \textstyle\int_{t'-\epsilon}^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} \left[Q_\alpha(t''-s) - Q_\alpha(t'-s) \right] f(s,x(s),Bx(s)) ds \| \\ &\leq \sup_{s \in [0,t'-\epsilon]} \| Q_\alpha(t''-s) - Q_\alpha(t'-s) \| \textstyle\int_0^{t'-\epsilon} \| (t'-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),Bx(s)) \| ds \\ &\quad + \frac{2M_A}{\Gamma(\alpha)} \textstyle\int_{t'-\epsilon}^{t'} \| (t'-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),Bx(s)) \| ds \\ &\leq S_{\alpha,\tau} \left(t'^{\frac{\alpha-\tau}{1-\tau}} - \epsilon^{\frac{\alpha-\tau}{1-\tau}} \right)^{1-\tau} \sup_{s \in [0,t'-\epsilon]} \| Q_\alpha(t''-s) - Q_\alpha(t'-s) \| + \frac{2M_A}{\Gamma(\alpha)} S_{\alpha,\tau} \epsilon^{\alpha-\tau} \end{aligned}$$

$I_2 \longrightarrow 0$ quand $t'' - t' \longrightarrow 0$ et $\epsilon \longrightarrow 0$.

$$
\begin{aligned}
I_3 &\leq \int_0^{t'} \parallel [(t''-s)^{\alpha-1}-(t'-s)^{\alpha-1}]\, Q_\alpha(t''-s) f(s,x(s),Bx(s)) \parallel ds \\
&\leq \frac{M_A S_{\alpha,\tau}}{\Gamma(\alpha)} \left((t''-t')^{\frac{\alpha-\tau}{1-\tau}} + t'^{\frac{\alpha-\tau}{1-\tau}} + t''^{\frac{\alpha-\tau}{1-\tau}}\right)^{1-\tau} \\
&\leq \frac{M_A S_{\alpha,\tau}}{\Gamma(\alpha)} (t''-t')^{\alpha-\tau} \longrightarrow 0; t''-t' \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

$I_3 \longrightarrow 0$ as $t''-t' \longrightarrow 0.$

Sur les intervalles $[t_i, s_i]$ et $[s_i, t_{i+1}]$, on distingue les trois cas suivants :

• Premier cas. Pour $t_i \leq t' < t'' \leq s_i$,

$\parallel Q_2x(t'') - Q_2x(t') \parallel = 0.$

• Deuxième cas. Pour $s_i \leq t' < t'' \leq t_{i+1}$,

$$
\parallel Q_2x(t'') - Q_2x(t') \parallel \leq I_1 + I_2 + I_3 + \parallel (P_\alpha(t''-s_i) - P_\alpha(t'-s_i))\, K_{i2x} \parallel . \tag{4.2}
$$

(4.2) tend vers 0 indépendamment de $x \in B_r$ quand $t'' \to t'$.

• Troisième cas. Pour $t_i \leq t' < s_i < t'' \leq t_{i+1}$,

$\parallel Q_2x(t'') - Q_2x(t') \parallel \leq \parallel P_\alpha(t''-s_i)K_{i2x} + \int_0^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t''-s) f(s,x(s),Bx(s))ds - d_{i2x} \parallel \longrightarrow 0$

indépendamment de $x \in B_r$, quand $t'' \longrightarrow t'$.

$\parallel Q_2x(t'') - Q_2x(t') \parallel \longrightarrow 0$, quand $t''-t' \longrightarrow 0$, ce qui implique que $Q_2(B_r(J))$ est équicontinu.

On a $Q_2B_r \subseteq B_r$, où $Q_2B_r(t) = \{Q_2x(t); x \in B_r\}$ pour $t \in J$.

Étape 5 : Q est β- condensant sur B_r.

Pour tout $W \subset B_r$, $Q_2(W)$ est borné et équicontinu. Par conséquent, par le lemme (1.2.2), il existe un ensemble dénombrable $W_1 = \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W$ tel que

$\beta(Q_2(W)) \leq 2\beta(Q_2(W_1)).$

Puisque $Q_2(W_1) \subset B_r$ est équicontinu, et d'après le lemme (1.2.3), on en déduit que

$Q_2(W_1) = \max \beta Q_2(W_1(t)).$

En plus : $\beta\left(\left\{\int_0^t B(t,s)u(s)ds \Big/ u \in B_r, t \in J\right\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq \omega K_0 \beta\left(\{u(t)/u \in B_r, t \in J\}_{n=1}^{\infty}\right).$

• Premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\beta(Q_2(W_1(t))) & = & \beta\left(\left\{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s, u_n(s), Bu_n(s)) ds\right\}_{n=1}^{\infty}\right) \\
& \leq & \dfrac{2M_A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \beta\left(\{f(s, u_n(s), Bu_n(s))\}_{n=1}^{\infty}\right) ds \\
& \leq & \dfrac{2M_A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(L_1 \beta(W_1(s)) + L_2 \beta(B(W_1)(s))\right) ds \\
& \leq & \dfrac{2M_A L_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \beta(W_1(s)) ds + \dfrac{2M_A L_2 \omega K_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \beta(W_1(s)) ds \\
& \leq & \dfrac{2M_A(L_1 + \omega L_2 K_0) t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \beta(W).
\end{array}$$

Puisque $Q_2(W_1)$ est borné et équicontinu, par le lemme (1.2.3) on a :

$$\begin{array}{rcl}
\beta(Q_2(W)) & \leq & 2\beta(Q_2(W_1)) = 2 \max\limits_{t \in J} \beta(Q_2(W_1(t))) \\
& \leq & \dfrac{4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0) t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \beta(W) \\
& < & \beta(W).
\end{array}$$

D'une autre part, on a :

$\| Q_1x(t) - Q_1y(t) \| = 0$ ce qui implique que $\beta(Q_1(W)) = 0.$

Par suite,

$$\begin{array}{rcl}
\beta(Q(W)) & \leq & \beta(Q_1(W)) + \beta(Q_2(W)) \\
& \leq & \dfrac{4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0) t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \beta(W) < \beta(W).
\end{array}$$

• Deuxième cas. Pour $t \in (t_i, s_i]$,$i = 1, 2, ..., m$, on a :

$$\| Q_1x(t) - Q_1y(t) \| \leq \left[\frac{(s_i^\beta + t_i^\beta) + M_A(s_{i-1}^\beta + t_{i-1}^\beta) + ... + M_A^{i-1}(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\right] K \| x - y \|_{PC}.$$

Par suite, par la définition (1.2.19) on obtient :

$$\beta(Q_1(W)) \leq \left[\frac{(s_i^\beta + t_i^\beta) + M_A(s_{i-1}^\beta + t_{i-1}^\beta) + ... + M_A^{i-1}(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\right] K\beta(W).$$

D'autre part :

$$\beta(Q_2(W)) \leq 4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0)\left[\frac{t_i^\alpha + M_A(t_{i-1}^\alpha + s_{i-1}^\alpha + ... + M_A^{i-1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\beta(W).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\beta(Q(W)) &\leq \beta(Q_1(W)) + \beta(Q_2(W)) \\
&\leq \left[\frac{(s_i^\beta + t_i^\beta) + M_A(s_{i-1}^\beta + t_{i-1}^\beta) + ... + M_A^{i-1}(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\right] K\beta(W) \\
&\quad +4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0)\left[\frac{t_i^\alpha + M_A(t_{i-1}^\alpha + s_{i-1}^\alpha) + ... + M_A^{i-1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\beta(W) \\
&< \beta(W).
\end{aligned}$$

• Troisième cas. Pour $t \in [s_i, t_{i+1}]$,$i = 1, 2, ..., m$ on a :

$$\| Q_1x(t) - Q_1y(t) \| \leq \left[\frac{M_A(s_i^\beta + t_i^\beta) + M_A^2(s_{i-1}^\beta + t_{i-1}^\beta) + ... + M_A^i(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\right] K \| x - y \|_{PC}.$$

Par suite, par la définition (1.2.3) on obtient :

$$\beta(Q_1(W)) \leq \left[\frac{M_A(s_i^\beta + t_i^\beta) + M_A^2(s_{i-1}^\beta + t_{i-1}^\beta) + ... + M_A^i(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\right] K\beta(W).$$

D'autre part, on a :

$$\beta(Q_2(W)) \leq 4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0)\left[\frac{t_{i+1}^\alpha + M_A(t_i^\alpha + s_i^\alpha) + ... + M_A^i(t_1^\alpha + s_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\beta(W).$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
\beta(Q(W)) &\leq \beta(Q_1(W)) + \beta(Q_2(W)) \\
&\leq \left[\frac{M_A(s_i^\beta + t_i^\beta) + M_A^2(s_{i-1}^\beta + t_{i-1}^\beta) + ... + M_A^i(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\right] K\beta(W) \\
&\quad +4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0)\left[\frac{t_{i+1}^\alpha + M_A(t_i^\alpha + s_i^\alpha + ... + M_A^i(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\beta(W) \\
&< \beta(W).
\end{aligned}
$$

Conclusion : Dans tout les cas on a :

$$\beta(Q(W)) \leq \beta(Q_1(W)) + \beta(Q_2(W)) \leq C\beta(W) < \beta(W) \text{ avec } C > 0.$$

Puisque l'opérateur Q est continu et β-condensant. D'après le théorème du point fixe de Sadovski, Q admet au moins un point fixe sur B_r. Par suite, le problème (4.1) admet au moins une solution intégrale sur B_r. Ce qui achève la démonstration.

□

On donne le résultat suivant en remplaçant l'hypothèse (H_5) par (H_5').

Théorème 4.4.2. On suppose que $(H_1) - (H_4)$ et $(H_5') - (H_6)$ sont vérifiées. De plus, on suppose que la propriété suivante est vérifiée :

$$max\{C, D\} < 1$$

Où, $C = 4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0)\left[\frac{t_m^\alpha + M_A(t_{m-1}^\alpha + s_{m-1}^\alpha) + ... + M_A^{m-1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]$,

et $D = 4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0)\left[\frac{t_{m+1}^\alpha + M_A(t_m^\alpha + s_m^\alpha) + ... + M_A^m(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]$.

Alors le problème (4.1) admet au moins une solution intégrale.

Démonstration.

On introduit l'opérateur $Q = Q_1 + Q_2$ où :

$$
Q_1x(t) = \begin{cases}
P_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)C(s)u(s)ds, t \in [0, t_1], \\
d_{i1x} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_i(s, x(s))ds, \quad t \in (t_i, s_i], \quad i = 1, 2, .., m, \\
P_\alpha(t-s_i)K_{i1x} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)C(s)u(s)ds, \\
\qquad\qquad t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 1, 2, .., m,
\end{cases}
$$

et

$$
Q_2x(t) = \begin{cases}
\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s, x(s), Bx(s))ds, \quad t \in [0, t_1], \\
d_{i2x}, \quad t \in (t_i, s_i], \quad i = 1, 2, .., m, \\
P_\alpha(t-s_i)K_{i2x} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s, x(s), Bx(s))ds, \\
\qquad\qquad t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 1, 2, .., m,
\end{cases}
$$

avec :

$$\begin{cases} d_{i1x} = P_\alpha(t_i - s_{i-1})K_{(i-1)1x} + \int_0^{t_i}(t_i - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i - s)C(s)u(s)ds \\ \qquad -\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_i}(t_i - s)^{\beta-1}g_i(s, x(s))ds, i = 1, 2, .., m, \\ K_{i1x} = d_{i1x} + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{s_i}(s_i - s)^{\beta-1}g_i(s, x(s))ds \\ \qquad - \int_0^{s_i}(s_i - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i - s)C(s)u(s)ds, i = 1, 2, .., m, \\ K_{01x} = x_0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d_{i2x} = P_\alpha(t_i - s_{i-1})K_{(i-1)2x} + \int_0^{t_i}(t_i - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i - s)f(s, x(s), Bx(s))ds, i = 1, 2, .., m, \\ K_{i2x} = d_{i2x} - \int_0^{s_i}(s_i - s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i - s)f(s, x(x), Bx(s))ds, i = 1, 2, .., m, \\ K_{02x} = 0. \end{cases}$$

Notre démonstration va être établie en plusieurs étapes.

Première étape On montre que $QB_r(J) \subset B_r(J)$,

où $B_r = \{x \in PC(J, X); \| x \| \leq r\}$ est la boule de rayon $r > 0$;

$$K_{\alpha,\tau} = \alpha\left(\frac{1-\tau}{\alpha-\tau}\right)^{1-\tau} \| Cu \|_{L^{1/\tau}} \text{ et } S_{\alpha,\tau} = \alpha\left(\frac{1-\tau}{\alpha-\tau}\right)^{1-\tau} \| m \|_{L^{1/\tau}},$$

$$\gamma_1 = M_A^{m+1} \| x_0 \| \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1) - M_A K(t_1^\beta + s_1^\beta)},$$

$$\gamma_2 = \frac{(M_A t_{m+1}^{\alpha-\tau} + M_A^2(t_m^{\alpha-\tau} + s_m^{\alpha-\tau}) + ... + M_A^{m+1}(t_1^{\alpha-\tau} + s_1^{\alpha-\tau}))\Gamma(\beta+1)}{(\Gamma(\beta+1) - M_A K(t_1^\beta + s_1^\beta))\Gamma(\alpha)}(K_{\alpha,\tau} + S_{\alpha,\tau}),$$

$$\gamma_3 = \frac{M_A^2(t_{m-1}^\beta + s_{m-1}^\beta) + ... + M_A^m(t_1^\beta + s_1^\beta)}{(\Gamma(\beta+1) - M_A K(t_1^\beta + s_1^\beta))}d.$$

Ici $\gamma_1 + \gamma_1 + \gamma_1 \leq r$.

Pour tout $x \in B_r$, on a :

- Premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned}
\| Qx(t) \| &\leq \| P_\alpha(t)K_{0x} \| + \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Bx(s)) + C(s)u(s)\right] ds \| \\
&\leq M_A \| x_0 \| + \frac{M_A t_1^{\alpha-\tau}}{\Gamma(\alpha)} \left(K_{\alpha,\tau} + S_{\alpha,\tau}\right).
\end{aligned}$$

De la même manière que dans la preuve du théorème précédent, on montre que :

- Deuxième cas. Pour $t \in (t_i, s_i]$

$$\begin{aligned}
\| Qx(t) \| &\leq M_A^i \| x_0 \| + \frac{M_A t_i^{\alpha-\tau} + M_A^2(t_{i-1}^{\alpha-\tau} + s_{i-1}^{\alpha-\tau}) + ... + M_A^i(t_1^{\alpha-\tau} + s_1^{\alpha-\tau})}{\Gamma(\alpha)}(K_{\alpha,\tau} + S_{\alpha,\tau}) \\
&+ \frac{(t_i^\beta + s_i^\beta) + M_A(t_{i-1}^\beta + s_{i-1}^\beta) + ... + M_A^{i-1}(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}(b \| x \| + d) \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

- Troisième cas. Pour $t \in (s_i, t_{i+1}]$

$$\begin{aligned}
\| Qx(t) \| &\leq M_A^{i+1} \| x_0 \| + \frac{M_A t_{i+1}^{\alpha-\tau} + M_A^2(t_i^{\alpha-\tau} + s_i^{\alpha-\tau}) + ... + M_A^{i+1}(t_1^{\alpha-\tau} + s_1^{\alpha-\tau})}{\Gamma(\alpha)}(K_{\alpha,\tau} + S_{\alpha,\tau}) \\
&+ \frac{M_A(t_i^\beta + s_i^\beta) + M_A^2(t_{i-1}^\beta + s_{i-1}^\beta) + ... + M_A^i(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}(b \| x \| + d) \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Donc on a montré que $QB_r(J) \subset B_r(J)$.

Deuxième étape : Q_2 est un opérateur continu.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \|_{PC} = 0$, on a d'après l'hypothèse (H_5') : $g_i(t, x_n(t)) \longrightarrow g_i(t, x(t))$.

- Premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$, we have :

$$\| Q_1 x_n(t) - Q_1 x(t) \| = 0$$

- Deuxième cas. Pour $t \in [t_i, s_i], 1 \leq i \leq m$,

$$\| Q_1 x(t) - Q_1 y(t) \| \leq \left[\frac{(s_i^\beta + t_i^\beta) + M_A(s_{i-1}^\beta + t_{i-1}^\beta) + ... + M_A^{i-1}(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\right] \| g_i(t, x_n(t)) - g_i(t, x(t)) \|_{PC}.$$

- Troisième cas. Pour $t \in [s_i, t_{i+1}], 1 \leq i \leq m$,

$$\| Q_1 x(t) - Q_1 y(t) \| \leq \left[\frac{M_A(s_i^\beta + t_i^\beta) + M_A^2(s_{i-1}^\beta + t_{i-1}^\beta) + ... + M_A^i(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\right] \| g_i(t, x_n(t)) - g_i(t, x(t)) \|_{PC}.$$

Par suite, on obtient $\| Q_1 x_n(t) - Q_1 x(t) \|_{PC} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.
Alors on peut conclure que Q_1 est continu.

On a déjà établi que Q_2 est continu. Finalement l'opérateur Q est continu.

Troisième étape : Q est un opérateur β- condensant sur B_r.

- Premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$, on a :

En considérant l'hypothèse (H_5') et en utilisant la même méthode que dans le théorème précédent on obtient :

$$\begin{aligned} \beta(Q(W)) &\leq \beta(Q_2(W)) \\ &\leq \frac{4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0)t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\beta(W) \\ &< \beta(W). \end{aligned}$$

- Deuxième cas. Pour $t \in (t_i, s_i]$,$i = 1, 2, ..., m$, on a :

$$\begin{aligned} \beta(Q(W)) &\leq \beta(Q_2(W)) \\ &\leq 4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0)\left[\frac{t_i^\alpha + M_A(t_{i-1}^\alpha + s_{i-1}^\alpha) + ... + M_A^{i-1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\beta(W). \end{aligned}$$

- Troisième cas : Pour $t \in [s_i, t_{i+1}]$,$i = 1, 2, ..., m$, on a :

$$\begin{aligned} \beta(Q(W)) &\leq \beta(Q_2(W)) \\ &\leq 4M_A(L_1 + \omega L_2 K_0)\left[\frac{t_{i+1}^\alpha + M_A(t_i^\alpha + s_i^\alpha) + ... + M_A^{i}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\beta(W). \end{aligned}$$

Conclusion : dans tous les cas on a :

$\beta(Q(W)) \leq \beta(Q_2(W)) \leq C\beta(W) < \beta(W)$ avec $C > 0$.

Puisque l'opérateur Q est continu et β-condensant. D'après le théorème du point fixe de Sadovski, Q admet au moins un point fixe sur B_r. Par suite, le problème (4.1) admet au moins une solution intégrale sur B_r. Ce qui achève la démonstration.

□

4.5 Exemple

Exemple 4.5.1. Puisqu'il est difficile de déterminer si un opérateur A est compact (voir Pazy [40]), nous ne supposons pas que A génère un C_0-semi-groupe compact. Cela nous permet de discuter certaines équations différentielles qui contiennent un opérateur qui génère un C_0-semi-groupe non compact. Nous donnons ici un simple exemple.

Soit $X = L^2(-\infty, +\infty)$. L'opérateur différentiel ordinaire $A = \dfrac{d}{dx}$ avec $D(A) = H^1(-\infty, +\infty)$, génère un C_0-semi-groupe $T(t)$ défini par $T(t)u(s) = u(t + s)$ pour chaque $u \in X$. Le C_0-semi-groupe $T(t)$ n'est pas compact sur X.

Conclusion générale et perspectives

Nous rappelons les points principaux de ce travail et nous signalons quelques directions pour des recherches futures. De façon générale, dans cette thèse, nous avons abordé quelques résultats d'existence des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire plus particulièrement celles qui sont nommées hybrides, et ensuite nous nous sommes intéressés aux équations différentielles d'ordre fractionnaire avec impulsions non-instantanées. Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie du point fixe.

Le premier chapitre nous a permis de nous familiariser avec les outils du calcul fractionnaire et nous a fourni quelques résultats élémentaires utiles pour l'étude de ces équations. Nous avons commencé par un rappel historique du calcul fractionnaire, puis nous avons donnée des généralités sur le calcul fractionnaire suivit par les différents théorème du point fixe que nous avons utilisé le long de ce travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'une équation différentielle fractionnaire hybride, on a prouvé l'existence des solutions positives à l'aide du théorème du point fixe de Dhage.

Le troisième et quatrième chapitre sont consacrés à l'étude de quelques équations différentielles fractionnaires impulsives, on suppose dans un premier cas que l'opérateur semi-groupe engendré est compact et on prend une condition initiale non-locale, et on montre l'existence voire l'unicité des solutions à l'aide du théorème du point fixe de Krasnoselkii, dans un deuxième cas on suppose que l'opérateur semi-groupe engendré est non-compact, et on montre l'existence des solutions à l'aide du théorème du point fixe de Sadovski.

Pour conclure, ce domaine est très riche en questions ouvertes, par conséquent différentes perspectives peuvent être lancées à la suite de ce travail, ces perspectives qui vont constituer des orientations possibles pour des travaux futurs que l'on peut considérer, nous pouvons citer :

- Dans les problèmes d'équations différentielles fractionnaires hybrides, la diversité de la nature des conditions impulsives qui peuvent être de type intégral ou multi-points, en nombre fini ou infini de moments d'impulsions, fixes ou variables, nous incite à l'étude d'une classe d'équations différentielles d'ordres fractionnaires hybrides soumises à des conditions impulsives.

Nous prévoyons ensuite, l'établissement de conditions nécessaires et suffisantes d'admissibilité (régularité, stabilité...) pour ces equations.

- Dans les inclusions différentielles, nous avons l'intention d'étudier ultérieurement des inclusions différentielles hybrides d'ordre fractionnaire α avec $0 < \alpha < 1$ ou $1 < \alpha < 2$ et à divers conditions aux limites.

Bibliographie

[1] B. Ahmad, S. Sivasundaram, *Existence results for nonlinear impulsive hybrid boundary value problems involving fractional differential equations, Nonlinear Anal. :HS 3 (2009) 251–258.*

[2] K. Balachandran, S. Kiruthika, *Existence of solutions of abstract fractional impulsive semilinear evolution equations, Electron. J. Qual. Theory Diff. Equ. 2010 (4) (2010) 1–12.*

[3] J. Banas, K. Goebel, *Measure of noncompactness in banach space Lecture notes in Pure and Applied Mathematics, Vol60, Marcel Dekker, New york (1980).*

[4] R.M. Christensen, *Theory of viscoelasticity. Dover Publications, 1982.*

[5] B.C. Dhage and S.B. Dhage, *Approximating positive solutions of nonlinear first order ordinary quadratic differential equations : Applied and Interdisciplinary Mathematics, Cogent Mathematics, 2, 1023671(2015).*

[6] B.C. Dhage, V. Lakshmikantham, *Basic results on hybrid differential equations. Nonlinear Anal. Hybrid Syst.4, 414-424(2010).*

[7] B.C. Dhage, V. Lakshmikantham, *Quadratic perturbations of periodic boundary value problems of second order ordinary differential equations. Differ. Equ. Appl.2, 465-486 (2010).*

[8] X.L. Ding1, Y.L Jiang, *waveform relaxation method for fractional differential-algebraic equations,Fractional calculus and applied analysis, vol 17, 3 (2014).*

[9] M.M. El-Borai,*Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolution equations, Chaos solitons fractals 14(2002)433-440.*

[10] M.M. El-Borai,*Semigroups and some nonlinear fractional differential equations, Appl.Math ; Comput. 149(2004)823-831.*

[11] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi, *Higher Transcendental Functions, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).*

[12] P.L. Falb, *Infinite Dimensional Control Problems : On the Closure of the Set of Attainable States for Linear Systems, Mathematical Analysis and Application 9,12-22(1964).*

[13] M. Feckan, Y. Zhou, J. Wang, *On the concept and existence of solution for impulsive fractional differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 17 (2012) 3050–3060.*

[14] X. Fu, X. Liu and B. Lu, *On a new class of impulsive fractional evolution equations, Advances in difference equations (2015) 2015 :227.*

[15] R. Gorenflo , A.A. Kilbas, F. Mainardi , S.V. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.*

[16] H.P Heinz, *On the behaviour of measure of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector-valued functions, Nonlinear Anal. 7(1983)1351-1371.*

[17] E. Hernández, D. O'Regan : *On a new class of abstract impulsive differential equations. Proc. Am. Math. Soc. 141, 1641-1649 (2013).*

[18] K. Hilal, A. Kajouni, *Boundary value problems for hybrid differential equations. Mathematical Theory and Modeling. 2224-5804 (2015).*

[19] K. Hilal, A. Kajouni, *Boundary value problems for hybrid differential equations with fractional order. Advances in Difference Equations. 183,2015 DOI 10.1186/s13662-015-0530-7.*

[20] R. Hilfer, *Apllications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore(2000).*

[21] H. Jiang, *Existence results for fractional order functional differential equations with impulse, Computers and Mathematics with Applications 64 3477–3483 (2012).*

[22] C.D. JOHNSON and D.A. KIENHOLZ, *Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers. AIAA Journal, 20(9) :1284–1290, 1982.*

[23] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations, in North-Holland Mathematics Studies, vol.* 204, *Elsevier, Amsterdam,* 2006.

[24] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed VanMill , Amsterdam, (2006).*

[25] N. Kosmatov, *Integral equations and initial value problems for nonlinear differential equations of fractional order, Nonlinear Anal. TMA* (70) 2521–2529 (2009).

[26] N. Kosmatov, *Initial value problems of fractional order with fractional impulsive conditions, Results Math. 63 (2013) 1289–1310.*

[27] M.A. Krasnoselskii *Amer. Math. Soc. Transl., 10 (2) (1958), pp. 345-409.*

[28] P. Kumar, D. Pandey, D. bahuguna.*On a new class of abstract impulsive functional differential equations of fractional order, J. Nonlinear Sci. Appl. 7(2014). 102-114.*

[29] V. Lakshmikantham, *Theory of fractional functional differential equations, Nonlinear Anal.* (2007)*, doi :10.1016/j.na.2007.09.025.*

[30] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala, *Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Anal.* (2007)*, doi :10.1016/j.na.2007.08.042.*

[31] G.A. Lesieutre and E. Biqnchini, *Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement field. Journal of Vibration and Acoustics, 117(4) :424–430, 1995.*

[32] F. Mainardi, *Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena, Chaos, Solitons and Fractals 7 (9), 1461-1477, 1996.'*

[33] R. Magin,*Fractional Calculus in Bioengineering, Begell House Publishers, 2004.*

[34] D.J. Mctavish and P.C. Hughes,*Modeling of linear viscoelastic space structures. Journal of Vibration and Acoustics, 115 :103–110, 1993.*

[35] K.S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York,* 1993.

[36] R.R. Nigmatullin, *On the theory of relaxation with "remnant" memory, Phys. Status Solidi B, 124(1), (1984) 389-393.*

[37] R.R. Nigmatullin, *TO the theoretical explanation of the "universal" response, Phys. Status Solidi B, 123(2), (1984) 739-745.*

[38] D. O'regan *Fixed-point theory for the sum of two operators Appl. Math. Lett., 9 (1) (1996), pp. 1-8.*

[39] A. Oustaloup, *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications, Hermès, Paris, 1995.*

[40] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, Berlin,1983.*

[41] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations, Academic Press, New York,* 1993.

[42] I. Podlubny,*Fractional-order system and fractional-order controllers, Technical report uef-03-94 Institut of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovakia (1994).*

[43] P.E. Rouse, *The theory of the linear viscoleastic properties of dilute solutions of coiling polymers. The Journal of Chemical Physics, 21 :1272–1280, 1953.*

[44] B.N. Sadovskii *A fixed-point principle Func. Anal. and Applications, 1 (1967), pp. 151-153.*

[45] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York, 1993.*

[46] J.C. Simo and T.J.R. Hughes, *Computational inelasticity. Springer, 1998.*

[47] G. Wang, L. Zhang, G. Song, *Systems of first order impulsive functional differential equations with deviating arguments and nonlinear boundary conditions, Nonlinear Anal. :TMA 74 (2011) 974–982.*

[48] J. Wang, Y. Zhou, Z. Lin, *On a new class of impulsive fractional differential equations, Applied Mathematics and Computation 242 (2014) 649–657.*

[49] J. Wang, Y. Zhou,*A class of fractional evolution equations and optimal controls, Nonlinear Anal. RWA 12(2011)262-272.*

[50] W. Wei, X. Xiang, Y. Peng : *Nonlinear impulsive integro-differential equation of mixed type and optimal controls. Optimization 55, 141-156(2006).*

[51] Y. Zhou, F. Jiao, J. Li, *Existence and uniqueness for fractional neutral differential equations with infinite delay, Nonlinear Anal. TMA* 71 3249–3256 (2009).

[52] Y. Zhou, *Basic theory of fractional differential equations, Xiangtan University, China,* 2014.

[53] Y. Zhou, F. Jiao :*Nonlocal Cauchy problem for fractional evolution equations. Nonlinear Anal, Real World Appl. 11, 4465-4475(2010).*

[54] Y. Zhou, F. Jiao :*Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations. Comput. Math. Appl. 59, 1063-1077(2010).*