

N° d'ordre : 199/2019



UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY
SLIMANE
Faculté des Sciences et Techniques
Béni Mellal



Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

JOHRI MUSTAPHA

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques Appliquées

**Contribution à l'étude théorique et l'approximation numérique
de quelques problèmes inverses d'identification de paramètres.**

Soutenue le 16/03/2019 devant le jury :

Pr Ahmed Zeghal,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Président(Rapporteur).
Pr François JAUBERTEAU,	Professeur à l'Université de Nantes, France,	Rapporteur.
Pr Lekbir AFRAITES,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Rapporteur.
Pr My Hicham TBER,	Professeur à la FST, Marrakech, Maroc	Examineur.
Pr Abdelkader STOUTI,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Examineur.
Pr Abdelkrim CHAKIB,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Encadrant.
Pr Mourad NACHAOUI,	Professeur à la FST, Béni Mellal, Maroc	Co-encadrant.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah de m'avoir donné le courage et la patience sans lesquels je n'aurais certainement jamais pu mener ce projet à terme.

Ensuite, je tiens à adresser plus particulièrement mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse le professeur Abdelkrim Chakib pour l'aide combien précieuse et efficace qu'il m'a apportée, pour sa patience, sa rigueur et ses encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail. Malgré ses nombreuses responsabilités, il a toujours répondu présent, me montrant ainsi la voie tout en me laissant une grande liberté de pensée et d'action. Ses discussions utiles et fructueuses ont été un atout pour moi pour mener à bien les travaux de cette thèse. J'ai eu ainsi la chance de travailler sous sa direction pendant ces années. Que soit tout aussi remercié mon co-directeur de thèse le professeur Mourad Nachaoui pour m'avoir encouragé et conseillé tout au long de ce travail. Ses discussions ont été d'intérêt considérable. Je le remercie encore une fois pour son encadrement avisé, fidèle et exigeant auquel cette thèse doit beaucoup.

Ce fut un grand honneur que les professeurs Ahmed Zeghal, Lekbir Afraites et François Jauberteau, aient accepté de rapporter sur ma thèse. Merci pour vos remarques avisées et pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail. Je remercie respectueusement le professeur Ahmed Zeghal, pour le temps qu'il a consacré à examiner cette thèse et pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury. Je tiens à remercier les professeurs Adeldkader Stouti et Moulay Hicham Tber d'avoir participé en tant qu'examineurs à mon jury de thèse, ainsi, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Mes remerciements vont à M. Abdeljalil Nachaoui qui m'a initié à la recherche et m'orienter dans la bonne voie et qui avec sa générosité et sa patience a guidé mes pas dans la recherche. Qu'il trouve dans l'aboutissement de ce travail l'expression de l'infinie reconnaissance.

Un grand merci aux membres du Laboratoire de Mathématiques et Applications, surtout le professeur Amine Laghrib et les doctants Hamid, Azzedine, Hssaine, Soufiane, Abou-bakre et Noufel, pour les bons moments que nous avons partagés.

Je tiens à remercier ma famille, en particulier mes parents pour leur soutien permanent, constant et surtout sans aucune faille. Grâce à la patience et la confiance qu'ils m'ont toujours insufflées, ils m'ont permis d'avancer en toute quiétude. J'espère qu'ils trouveront en ce modeste travail une récompense pour ce qu'ils ont fait pour moi.

Qu'un hommage soit également rendu à ma femme Zahira, ma fille Razane, mon frère Samir et son épouse Meriam pour leur soutien. Ils ont été présents tout au long de ce travail. Pour finir, Toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'élaboration/l'enrichissement et à la réalisation de cette thèse, trouveront ici l'expression de mes sincères sentiments.

Table des matières

Remerciements	2
Résumé	10
Introduction générale	11
1 Résultats préliminaires	18
1.1 Notations et définitions	18
1.2 Espaces fonctionnels	19
Les espaces $L^p(\Omega)$	19
Les espaces $C^m(\Omega)$	20
Espace de Sobolev	21
Injections de Sobolev et application trace	22
Quelques estimations et inégalités sur les espaces de Sobolev	22
1.3 Les espaces à valeurs vectorielles	23
Les espaces $L^p(I, E)$	23
Les espaces $W^{1,p}(I, E)$	24
Injection compacte dans les espaces $L^p(I, E)$	25
1.4 Outils pour l'étude des problèmes évolutifs linéaires	26
1.5 Point fixe et degrés topologiques	27
Point fixe de Schauder, 1930	27
Degré topologique de Brouwer	28
Degré topologique de Leray-Schauder	29
2 Modélisation des problèmes	30
2.1 Problème inverse d'identification de paramètre en hydrologie	30
Problème clés en hydrologie	30
Approches d'étude et d'analyse	33
Analyse statistique des données observées	33
Propriétés physiques de base du sol	35
Écoulement dans les milieux poreux	38
Hydrodynamique du milieu poreux	39

Equation des écoulements en milieu non saturé : équation de Richards . . .	41
Modèle hydraulique d'écoulement considéré	47
2.2 Problème inverse d'identification du coefficient de réaction	51
Modes de transfert de la chaleur	51
Modèle de transfert de la chaleur considéré	55
3 Étude théorique du problème inverse en hydrologie	57
3.1 Position et formulation du problème	57
3.2 Existence d'une solution optimale	60
Estimations a priori	60
Existence et unicité du problème d'état	63
Existence d'une solution optimale	68
4 Étude de l'approximation numérique du problème inverse en hydrologie	73
4.1 Approximation numérique du problème inverse avec données spatiales . . .	73
Approximation du problème d'état	75
Algorithmes Génétiques	77
Résultats numériques	83
4.2 Approximation numérique du problème inverse avec donnée en temps finale	88
4.3 Discrétisation du problème d'optimisation	92
Discrétisation du problème d'état et d'état adjoint	92
4.4 Résultats numériques	96
Approximation dans le cas polynomial	96
Méthode d'approximation paramétrique générale	103
Cas du modèle de Van-Genuchten	111
5 Identification du coefficient de réaction dans une équation parabolique non linéaire	113
5.1 Position et formulation du problème	113
5.2 Existence d'une solution optimale	115
Existence et unicité des solutions des problèmes d'état	115
Existence d'une solution optimale	119
5.3 Approximation numérique du problème d'optimisation	121
Conclusion	129

Table des figures

2.1	Représentation schématique du cycle de l'eau	31
2.2	Image de microscope d'une section mince de sol. La ligne noire sur l'image est de $50 \mu m$. Université Cranfield, 2014. Guide des sols LandIS. Disponible à http://www.landis.org.uk/services/soilsguide/	36
2.3	Modèles d'emballages réguliers de particules sphériques.	37
2.4	Photo au microscope électronique à balayage d'un échantillon de sol. Chaque coche sur l'étiquette est $1 \mu m$. Centre de microscopie, Département des sciences agricoles, Université de Bologne.	38
2.5	Section d'un échantillon de sol obtenu, par tomographie aux rayons X. La taille du cube (coin supérieur droit) est de 10 mm. Département des sciences agricoles et Matteo Bettuzzi, Département de physique et d'astronomie, Université de Bologne.	39
2.6	Allure de la conductivité K en fonction de la pression h : paramètres Grenoble Sand.	44
2.7	Allure de la teneur en eau θ en fonction de la pression h : paramètres Grenoble Sand.	44
2.8	Schéma de l'infiltromètre à disque (RA : réservoir d'alimentation en eau ; VM : vase de Mariotte ; D : disque creux ; M : membrane de nylon ; A : tube d'aération du vase de Mariotte ; B : tube d'aération du réservoir d'alimentation).	46
2.9	Colonne de sol.	48
2.10	Explication analogique des trois modes de transfert de la chaleur	51
2.11	Conduction thermique	52
2.12	Convection thermique	53
2.13	Rayonnement thermique	54
4.1	Schéma général d'un algorithme évolutionnaire.	78
4.2	Principe de croisement simple.	80
4.3	Principe de Mutation simple.	80
4.4	Principe de croisement multi-points.	81
4.5	La fonction $\Delta(t; y)$ à deux instants t_1 et t_2 (resp. (a) et (b)) avec $t_1 < t_2$	82

4.6	Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.	85
4.7	(c) : Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.	85
4.8	Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.	86
4.9	(c) : Variation du coût en fonction du nombre d'itérations	87
4.10	Variation du coût par rapport au nombre d'itérations.	88
4.11	Solution exacte et approchée du problème d'état.	97
4.12	Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.	98
4.13	Convergence de la conductivité vers l'optimum.	99
4.14	Variation du coût en fonction du nombre d'itérations pour q_2	99
4.15	Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.	101
4.16	Convergence de $K(\psi)$ et $C(\psi)$ en fonction des itérations.	102
4.17	Valeurs exactes et approchées de ψ	104
4.18	Valeurs exactes et approchées de $K(\psi)$	104
4.19	Valeurs exactes et approchées de $C(\psi)$	104
4.20	Variation de la fonctionnelle coût en fonction du nombre d'itérations. . . .	105
4.21	Variation de la fonctionnelle coût en fonction du nombre d'itérations. . . .	105
4.22	Convergence de la conductivité initiale vers la solution approchée.	106
4.23	Capacité capillaire C exacte et approchée.	106
4.24	Représentation de la solution approchée du problème d'état.	108
4.25	Conductivité hydraulique exacte et approchée.	108
4.26	Capacité capillaire exacte et approchée.	109
4.27	Représentation de la solution approchée et exacte du problème d'état. . . .	109
4.28	Variation de la fonctionnelle coût J_h en fonction du nombre d'itérations. .	109
4.29	Représentation de la conductivité approchée.	110
4.30	Représentation de la capacité approchée.	110
4.31	Représentation de la conductivité hydraulique approchée.	111
4.32	Représentation de la teneur en eau approchée.	112
5.1	Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.	122
5.2	Valeurs exactes et approchées de p	122
5.3	Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.	123
5.4	Comparaison entre p exact et approché	123
5.5	Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.	124
5.6	Comparaison entre p exact et approché	124
5.7	Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.	125
5.8	Illustration du coefficient p exact et approché	125
5.9	Distribution de l'erreur sur Ω	126

5.10	Erreur entre u_{app} et u_{ex} à chaque instant du temps.	126
5.11	Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.	127
5.12	Illustration du coefficient p exact et approché	127
5.13	Distribution de l'erreur sur Ω	127
5.14	Erreur entre u_{app} et u_{ex} à chaque instant du temps.	128

Liste des tableaux

4.1	La valeur initiale et optimale de q_0 et q_1	98
4.2	La valeur initiale et optimale de q_2	100
4.3	Les valeurs initiales et optimales de s_0 et s_1	100
4.4	Les valeurs approchées des coefficients q_i et s_i , pour $i = 0, 1, 2$	101
4.5	Les valeurs optimales de q_2 , q_1 et q_0 pour différents niveaux de bruit. . . .	102
4.6	Les valeurs optimales de s_2 , s_1 et s_0 pour différents niveaux de bruit. . . .	103

Résumé

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude théorique et l'approximation numérique de quelques problèmes inverses d'identification de paramètres. Concrètement, nous avons considéré deux problèmes inverses d'identification de paramètres gouvernés par des équations paraboliques fortement non-linéaires. Dans ce cadre nous avons proposé une approche efficace pour résoudre le premier problème inverse basée sur sa reformulation en un problème de contrôle optimal. Nous avons ainsi étudié l'existence d'une solution optimale sans imposer aucune forme fonctionnelle aux paramètres hydrauliques. Pour cela, nous avons établi un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème d'état non-linéaire en utilisant un théorème de point fixe de Schauder. Sur le plan numérique, deux stratégies d'approximations ont été utilisées. La première combine la méthode de Picard et les différences finies ainsi que les algorithmes évolutionnaires pour le processus d'optimisation. Quant à la deuxième stratégie, elle combine la méthode des éléments finis et l'itération de Newton ainsi que l'algorithme du gradient conjugué. Le deuxième problème étudié dans cette thèse consiste à identifier le coefficient de réaction intervenant dans un modèle de transfert de la chaleur régi par une équation parabolique non-linéaire. Dans ce cadre, nous avons adopté une stratégie permettant d'obtenir une solution précise et stable tout en réduisant le coût de calcul. En effet, nous avons proposé une approche variationnelle de ce problème basée sur une semi-discrétisation temporelle et une reformulation des problèmes stationnaires en des problèmes d'optimisation en contrôle optimal. Ainsi, nous avons montré l'existence d'une solution optimale en établissant un résultat d'existence du problème d'état type non-linéaire via l'utilisation du degré topologique de Leray-Schauder. Ensuite sur le plan numérique, le problème d'optimisation est approché en utilisant une méthode qui combine la discrétisation par éléments finis, l'itération de Newton et les algorithmes évolutionnaires.

Introduction générale

Les problèmes inverses sont des processus dans lesquels, à partir d'un ensemble d'observations des effets d'un phénomène, on cherche soit les facteurs de causes qui les ont produits, soit le modèle qui les décrit. La première catégorie est appelée problème inverse de détection, et la deuxième est appelée problème inverse d'identification.

Les problèmes inverses sont situés au centre des intérêts de la communauté scientifique. Ceci est dû au fait qu'ils permettent d'estimer les paramètres inconnus ou inaccessibles, qui ne peuvent pas être mesurés, dans les équations de certains modèles régissant des phénomènes naturels, industriels ou sociaux et économiques. Ainsi, de nombreuses études portant sur des problèmes inverses sont menées tant pour leur intérêt mathématique que pour leur utilité industrielle. En effet, la résolution de ce type de problèmes intervient dans des domaines variés comme en sismologie (localisation de l'origine d'un tremblement de terre à partir de mesures effectuées par des stations sismiques à la surface du globe), en imagerie médicale (échographie utilisant des ultrasons, radiographie ou scanner utilisant des rayons X), en ingénierie pétrolière (prospection par méthodes sismiques ou magnétiques), en chimie (détermination de constantes de réaction), en traitement d'images (restauration d'images floues), etc. Loin d'être exhaustifs, nous citons quelques livres abordant les problèmes inverses et leurs applications [17, 49, 48].

L'une des principales difficultés illustrées lorsqu'il s'agit d'étudier mathématiquement ces problèmes inverses réside dans leur caractère mal posé au sens de Hadamard [37]. En effet, un problème mathématique est dit bien posé s'il admet une solution, qui soit unique, et qui dépend continûment des données. C'est donc sur ces trois propriétés (existence, unicité, stabilité) qu'il faut se focaliser pour espérer résoudre correctement le problème inverse. Bien entendu, les enjeux liés à ces propriétés dépassent l'intérêt purement théorique et ils influencent les résultats de l'approximation numérique de ce problème inverse. Une autre difficulté pratique liée à l'étude des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance des problèmes directs qui y sont associés, ce qui se traduit par le recours, pour sa résolution, à des éléments spécifiques à chaque problème traité. En effet, jusqu'à présent, il n'y a pas d'études théorique et numérique qui permettent de couvrir toutes les classes de problèmes inverses, bien qu'il y ait des progrès sur l'étude de chaque problème appréhendé à part. Ceci exclu donc l'idée d'une grande méthode "miracle" valable pour l'étude de tous les problèmes inverses. Il existe toutefois quelques

techniques qui possèdent un domaine d'applicabilité étendu. La plus importante entre elle est la technique d'optimisation.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude, en utilisant les techniques d'optimisation, de certains problèmes inverses non linéaires d'identification de paramètres régis par des équations aux dérivées partielles qui ont la forme générale suivante :

$$A(u)u_t - \nabla(B(u)\nabla u) + \nabla C(u) + D(x, t)g(u) = f(x, t) \text{ dans } \Omega \times [0, T], \quad (1)$$

avec des conditions aux limites et des conditions initiales adéquates et où Ω est un ouvert borné dans \mathbb{R}^n . Plus précisément, nous étudions deux problèmes inverses gouvernés par cette équation. Le premier problème consiste à identifier les paramètres $A(u)$ et $B(u)$ en considérant que $C(u) = B(u)$ et $D(t, x) = 0$. Ce problème intervient dans la modélisation de certains phénomènes en hydrologie, par exemple dans l'étude des écoulements des fluides notamment le problème d'infiltration de l'eau dans les milieux poreux comme le sol [63]. Le deuxième problème considéré dans cette thèse est celui de l'identification du paramètre $D(t, x)$ tout en considérant que $A(u) = B(u) = 1$ et $C(u) = 0$. C'est un problème de détermination du coefficient de réaction dans une équation de la chaleur modélisant le transfert thermique au sein d'un matériau. Ce type de modèle intervient dans de nombreuses applications industrielles [58, 57].

Le premier problème auquel nous nous intéressons consiste à étudier un problème d'écoulement de l'eau dans les milieux poreux. En effet, l'étude de l'écoulement de l'eau dans les couches souterraines du sol s'est fortement développée au cours du XXe siècle et devient un thème généralisé dans le monde de l'hydrologie. Les enjeux actuels sur les ressources hydriques motivent la prédiction et le contrôle du déplacement de l'eau afin de bien gérer sa consommation. Ceci est dû au fait que le niveau des ressources naturelles en eau et leur utilisation inquiètent de plus en plus les organisations environnementales. Du point de vue mathématique, ceci se traduit par l'élaboration d'un problème mathématique modélisant ce phénomène. En effet, l'interface entre l'atmosphère et la nappe phréatique est une zone très active d'un point de vue hydrique, physico-chimique et biologique. La redistribution de l'eau dépend alors des conditions d'humidité, de la pression et de la perméabilité du substrat. Traditionnellement, les phénomènes majeurs expliquant la distribution hydrique de l'eau dans un substrat sont traduits par l'équation de Richards [75]. Cette équation combine l'équation de la conservation de masse (appelée équation de continuité) [83] et la loi de Darcy [65]. Il existe généralement trois formes principales d'équations de Richards dans la littérature, à savoir la formulation mixte, la formulation à base du potentiel de pression ψ et la formulation à base de la teneur en eau volumique θ . Cependant, les paramètres qui définissent cette équation sont en général

décrits de manière empirique. Ceci explique le nombre important des différentes expressions des modèles hydrologiques [65]. De plus, les propriétés hydrodynamiques varient d'un type de substrat à un autre voire même pour un même type de substrat suivant sa composition sédimentaire. Ceci rend aussi important que nécessaire de développer une stratégie efficace pour déterminer ces paramètres en fonction de la mesure prise sur le sol.

Dans ce cadre, nous mentionnons que le problème direct associé au problème inverse d'identification de paramètres en hydrologie est largement étudié à la fois théoriquement et numériquement (voir par exemple [4, 33, 34, 35, 64, 79, 22, 39]). En revanche, peu d'études mathématiques ont été réalisées sur ce problème inverse. En fait, le problème inverse considéré est non linéaire. De plus, il est régi par une équation parabolique fortement non linéaire. A savoir que, même en cas de dimension un, le problème reste difficile à aborder, dont l'étude nécessite un investissement considérable. Concernant la résolution numérique de ce problème, quelques techniques ont été proposées, en utilisant de nombreuses données d'observation. En particulier, Ngnepieba et al. dans [9] ont développé une méthode numérique basée sur l'assimilation variationnelle de données, qui repose sur la technique de contrôle optimal, pour résoudre le problème d'identification des paramètres hydrodynamiques intervenant dans l'équation de Richards issue du modèle Mualem-Van Genuchten [83, 82]. Cette approche combine la minimisation du taux d'infiltration, la méthode des différences finies et l'algorithme de descente de gradient. Le même problème d'identification de paramètres a été considéré par Bitterlich et al. dans [8], où ils ont utilisé une reformulation en un problème de minimisation d'une fonction de moindres carrés. La résolution numérique a été réalisée en utilisant les fonctions Splines pour approcher les propriétés hydrauliques et la méthode du gradient conjugué comme algorithme de minimisation. Cependant, dans ces travaux, le choix du modèle est empirique et sans justification, ce qui reste un défi majeur dans la résolution de ce problème inverse.

De notre part, nous proposons une nouvelle approche pour résoudre ce problème inverse en le reformulant en un problème de contrôle optimal. L'approche développée présente plusieurs avantages. En effet, contrairement aux travaux antérieurs, la formulation proposée n'impose aucune forme fonctionnelle aux paramètres hydraulique notamment la capacité $C(\psi)$ et la conductivité $K(\psi)$. Ceci nous permet d'ajuster d'une manière générale les paramètres hydrauliques à partir des mesures collectées tout en tenant compte de leur variations qui peuvent être dûes au changement de type de substrat ou de la composition sédimentaire. De plus cette approche est générale puisqu'elle permet de reconstruire les modèles classiques de l'équation de Richards contrairement aux travaux antérieurs [9, 8]. Du point de vue économique, notre approche permet de déterminer simultanément tous les paramètres tout en réduisant le nombre de points d'observation ce qui réduit considé-

ablement le coût de mesures. En plus de ces avantages du point de vue pratique, cette approche est soutenue par une étude théorique et une illustration numérique. Ainsi, deux formulations en contrôle optimal sont considérées. La première est basée sur des observations de la pression en un seul point de l'espace au cours du temps. Tandis que la deuxième formulation repose sur des observations à l'instant final. Sur le plan théorique nous avons montré que ce dernier problème admet une solution optimale. Ainsi, l'existence de la solution du problème d'état non linéaire est établie via l'utilisation du point fixe de Schauder. Sur le plan numérique deux stratégies d'approximation ont été utilisées. La première combine la méthode de Picard avec les différences finies ainsi que les algorithmes évolutionnaires pour l'optimisation. Quant à la deuxième stratégie elle combine la méthode des éléments finis et l'itération de Newton ainsi que l'algorithme du gradient conjugué.

Le deuxième apport de cette thèse est dédié à un problème inverse de transfert de la chaleur qui se trouve au coeur de l'occupation de l'industrie moderne. En effet, pratiquement toutes les caractéristiques de la vie moderne reposent sur des outils d'origine industrielle et celle-ci manipule des matériaux en tirant profit du phénomène de transfert de la chaleur. Ainsi pour une bonne maîtrise de ce phénomène et dans le but d'améliorer la productivité, de réduire le coût et de maximiser le profit, certains industriels comme ceux de l'aéronautique, du nucléaire, de l'automobile et de bâtiments s'orientent de plus en plus vers des outils de simulation numérique. En effet, l'outil de modélisation numérique est devenu un complément essentiel aux sciences expérimentales, notamment lorsqu'il s'avère difficile, voire même impossible d'effectuer certaines mesures qui ne sont pas reproductibles en laboratoire. Cependant, la simplification de la modélisation et l'incertitude des caractéristiques du modèle, telles que la géométrie ou les propriétés des matériaux, conduisent généralement à des écarts entre les prédictions du modèle et les valeurs réelles. Vu que les mesures directes ne sont pas toujours envisageables, les méthodes inverses peuvent donner accès aux grandeurs d'intérêt (propriété du matériau). Ces méthodes d'identification consistent à déterminer des paramètres inconnus à partir de leurs effets sur le phénomène observé. Afin de minimiser les écarts entre les valeurs prévisionnelles et la propagation réelle de la chaleur, il faut identifier le modèle idéal qui donne des résultats fiables.

Du point de vue mathématique, nous étudions en détails un problème inverse d'identification du paramètre de convection $D(t, x)$ dans une équation parabolique non linéaire à partir des données sur-spécifiées à l'instant final. Le coefficient inconnu $D(t, x)$ est appelé le coefficient radiatif qui dépend de la propriété du matériau utilisé dans la construction de plusieurs produits industriels [58, 57]. Cependant, lorsque la plage de la température

est très large, il convient de prendre en compte les effets non linéaires, qui peuvent être dûs à la dépendance en température des paramètres du matériau ou du rayonnement.

A ce stade, nous mentionnons que les problèmes inverses d'identification de paramètres régis par des équations paraboliques linéaires unidimensionnelles ont été largement étudiés dans la littérature. En effet, le problème inverse d'identification du coefficient de diffusion dans une équation unidimensionnelle à partir de données finales sur la température $u(x, T)$, a été étudiée avec soin par [46, 16] en utilisant les techniques d'optimisation. Ainsi, les auteurs ont prouvé l'existence et l'unicité du coefficient et ont présenté quelques résultats numériques. Dans [32] les auteurs ont obtenu un résultat de la stabilité et la convergence de la solution en se basant sur des propriétés de la correspondance paramètre-solution et en utilisant la régularisation de Tikhonov. Le problème inverse de la détermination du coefficient de diffusion avec une autre condition supplémentaire sur la température a été discuté dans [27]. Le problème inverse d'identification d'un coefficient de réaction $D(x, t) = D(x)$ dans le cas où g est linéaire a été aussi étudié par plusieurs auteurs. En effet l'existence et l'unicité de la solution ont été prouvées dans [76]. Le caractère bien posé local du problème inverse a été discuté dans [18, 19], en supposant que $D(x)$ est à priori dans un sous-ensemble de paramètres admissibles bien défini. Ensuite, motivés par des arguments heuristiques, les auteurs dans [15, 30] ont opté pour la méthode d'optimisation pour stabiliser le problème inverse et ont ainsi obtenu quelques résultats numériques en utilisant la méthode des différences finies. Aussi la reconstruction simultanée des coefficients radiatifs de la température et les données initiales a été étudiée dans [84], en utilisant une mesure de la température à un instant donné et une mesure dans une sous-région du domaine physique. D'autre part, le problème de la détermination du coefficient $D(x, t) = D(t)$, qui est purement lié au temps, dans l'équation

$$u_t - \Delta u + D(x, t)g(u) = 0, \quad (2)$$

a été largement étudié par plusieurs auteurs dans le cas linéaire où ($g(u) = u$) (voir par exemple [25, 24]). Nous renvoyons les lecteurs aux travaux [28, 45], pour l'étude des problèmes inverses d'identification de $D(x, t)$ qui dépend de l'espace et du temps. Des approches en contrôle optimal pour le problème linéaire unidimensionnel ont été proposées (voir par exemple [46, 28, 30, 26, 29]). Il convient de mentionner qu'en général, l'identification de paramètres est un problème inverse non linéaire même si l'équation sous-jacente est une équation linéaire, par exemple l'équation où $g(u) = u$. Dans le cas non linéaire et en dimension supérieur, un résultat d'existence du paramètre $D(x, t) = D(x)$ en utilisant la théorie de point fixe a été obtenu dans [85]. Cependant aucun résultat numérique n'a été réalisé. A ce stade nous signalons que, à notre connaissance, aucune

étude numérique du problème non linéaire n'a été réalisée dans le cas de dimension deux.

Dans ce travail, nous adoptons une nouvelle stratégie afin d'obtenir une solution précise et stable tout en réduisant les coûts de calcul. En effet, nous proposons une approche variationnelle de ce problème basée sur une semi-discrétisation en temps et une reformulation en un problème d'optimisation en contrôle optimal. Ainsi, sur le plan théorique, nous avons étudié l'existence du problème d'état non linéaire via l'utilisation du degré topologique de Leray Schauder [77]. Puis, nous avons établi l'existence d'une solution optimale. Ensuite sur le plan numérique, le problème d'optimisation est approché en utilisant une méthode qui combine la discrétisation par éléments finis, l'itération de Newton et les algorithmes évolutionnaires.

Dans la suite, nous allons décrire brièvement le contenu de cette thèse.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques outils de base et nous présentons ainsi quelques résultats préliminaires essentiels pour ce travail. Nous donnons quelques résultats fondamentaux, sur les espaces de Sobolev, les espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles et des injections et des inégalités sur les espaces de Sobolev. Ensuite, nous présentons quelques outils de résolution des problèmes non linéaires par la méthode de point fixe, notamment le degré topologique de Leray-Schauder.

La première partie du deuxième chapitre porte sur une description physique du modèle de l'écoulement d'un fluide (eau) dans un milieu poreux (sol). Ainsi, nous commençons, dans un premier lieu, par donner une définition et une présentation physique du sol comme étant un milieu poreux hétérogène. Dans ce cadre, nous donnons un aperçu sur l'intérêt des paramètres hydrologiques, leurs variétés à travers plusieurs modèles et leurs enjeux et défis. Ensuite, nous traitons le phénomène d'infiltration d'eau souterraine en exposant les différents modèles empiriques classiques existants, puis nous donnons la description du modèle d'écoulement d'eau considéré dans cette thèse. Finalement, nous présentons la géométrie du domaine ainsi que la formulation mathématique décrivant ce phénomène. Tandis que la deuxième partie de ce chapitre concerne une description du modèle de transfert de la chaleur. Nous commençons ainsi, par donner une définition et une présentation physique des matériaux. Dans ce cadre, nous donnons un aperçu sur l'intérêt du coefficient de réaction, leur vastes champs d'applications. Ensuite, nous traitons le phénomène de transfert de la chaleur en exposant ses trois modes classiques, puis nous donnons la description du modèle de transfert de la chaleur considéré dans cette thèse. Nous présentons finalement la formulation mathématique du modèle considéré.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une étude mathématique de ce problème, afin de fournir un moyen systématique décrivant le comportement du flux d'eau et l'évolution de la teneur en eau dans le temps et l'espace. Ainsi, nous proposons une formulation

en contrôle optimal du modèle physique considéré. Pour ce faire, nous commençons par montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème d'état en utilisant le point fixe de Schauder. Nous proposons ensuite une étude d'existence pour le problème de minimisation.

Dans le quatrième chapitre, nous proposons une étude numérique du premier problème via deux approches : la première combine la méthode de Picard avec les différences finies ainsi que les algorithmes évolutionnaires pour l'optimisation. Quant à la deuxième stratégie elle combine la méthode des éléments finis et l'itération de Newton ainsi que l'algorithme du gradient conjugué. Nous identifions ainsi les deux paramètres hydrologiques, à savoir la capacité et la conductivité hydraulique. Enfin, nous présentons une discussion numérique qui illustre, à travers plusieurs exemples, l'efficacité des stratégies proposées.

Dans le cinquième chapitre, nous proposons une méthode d'approximation numérique pour le deuxième problème basée sur la discrétisation temporelle du problème. Le problème discret ainsi obtenu est reformulé en un problème de minimisation de contrôle optimal. Une étude de l'existence et de l'unicité des solutions des problèmes d'état est établie, en utilisant la notion de degré topologique de Leray-Schauder. En outre, l'existence de la solution optimale a été prouvée en utilisant les techniques d'optimisation. Ensuite le problème d'optimisation est approché en utilisant une méthode qui combine la discrétisation par éléments finis, l'itération de Newton et les algorithmes évolutionnaires.

Enfin, nous terminons cette thèse par une conclusion et quelques perspectives.

Résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques outils de base et nous présentons quelques résultats préliminaires essentiels pour ce travail. Nous donnons, en particulier, quelques résultats fondamentaux sur les espaces de Sobolev, les espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles et des injections et des inégalités sur les espaces de Sobolev. Ensuite, nous présentons quelques outils de résolution des problèmes non linéaires par la méthode de point fixe, notamment le degré topologique de Leray Schauder.

1.1 Notations et définitions

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d pour ($d \in \mathbb{N}^*$) de frontière assez régulière $\Gamma = \partial\Omega$ et soient φ et ψ deux fonctions définies respectivement de Ω à valeurs dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^d .

- On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans \mathbb{R}^d défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (1.1)$$

dont la norme associée est définie par :

$$|x| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

- On note le gradient de φ par :

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_d} \right). \quad (1.3)$$

- Le laplacien de φ s'écrit :

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}. \quad (1.4)$$

- La divergence de ψ est notée par :

$$\nabla \cdot \psi = \sum_{i=1}^d \frac{\partial\psi_i}{\partial x_i}. \quad (1.5)$$

- On note la dérivée normale de φ par :

$$\nabla\varphi \cdot \nu = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}, \quad (1.6)$$

où ν est la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω .

- Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ un multi-indice dans \mathbb{N}^d de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, la dérivée partielle d'ordre $|\alpha|$ de φ notée $D^\alpha\varphi$, est définie par :

$$D^\alpha\varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}. \quad (1.7)$$

- On note par $|\Omega|$ la mesure de Lebesgue de Ω et par $|\Gamma|$ la mesure de Lebesgue ($d-1$) dimensionnelle de Γ .

1.2 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous rappelons des définitions et des propriétés de quelques espaces fonctionnels. Nous présentons, en particulier, quelques définitions des espaces de Sobolev, puis nous y introduisons quelques injections de Sobolev, la notion de trace et quelques inégalités de Sobolev. Pour cela, nous commençons par définir les espaces de Lebesgue. Nous renvoyons le lecteur par exemple, à [1, 20, 55, 56], pour plus de détails à propos de ces espaces fonctionnels et de leurs propriétés.

Les espaces $L^p(\Omega)$

Soit $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables dont la $p^{\text{ième}}$ puissance est intégrable, au sens de Lebesgue. L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.8)$$

est un espace de Banach.

En particulier, pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est l'espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.9)$$

associée au produit scalaire :

$$(\varphi, \psi)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} \varphi(x)\psi(x)dx. \quad (1.10)$$

$L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables φ , dont la norme :

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{\substack{M \subset \Omega \\ m \in S, M=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus M} |\varphi(x)| \equiv \text{ess sup}_{x \in \Omega} |\varphi(x)| \quad (1.11)$$

est finie. $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme (1.11) est un espace de Banach.

Avant d'introduire les espaces de Sobolev, nous donnons quelques résultats sur les espaces de fonctions de classe C^m , pour $m \in \mathbb{N}$.

Les espaces $C^m(\Omega)$

- On désigne par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω , muni de la norme suivante :

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|. \quad (1.12)$$

- $C^m(\Omega)$ est l'espace des fonctions, φ , qui ont des dérivées partielles $D^\alpha \varphi$ continues sur Ω , pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, tel que $|\alpha| \leq m$.
- On note par $C_0^m(\Omega)$ le sous-espace de $C^m(\Omega)$ des fonctions qui s'annulent à l'infini.
- $C^m(\bar{\Omega})$ est un sous-espace de $C^m(\Omega)$ des fonctions φ telles que $D^\alpha \varphi$ soit bornée et uniformément continue sur Ω , pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, tel que $|\alpha| \leq m$. Il est muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha \varphi(x)|. \quad (1.13)$$

- Pour $0 < \lambda \leq 1$, on désigne par $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ le sous-espace de $C^m(\bar{\Omega})$, des fonctions φ dont les dérivées $D^\alpha \varphi$ satisfont la condition de Hölder d'exposant λ , pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, telle que $|\alpha| = m$, i.e. il existe $c > 0$, telle que

$$|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)| \leq c|x - y|^\lambda \quad \forall x, y \in \Omega \quad (1.14)$$

$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ est muni de la norme

$$\|\varphi\|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|\varphi\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \max_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)|}{|x - y|^\lambda}. \quad (1.15)$$

- On désigne par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω , dont le dual topologique $D'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω .
- $D(\bar{\Omega})$ est l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $D(\mathbb{R}^d)$.

Nous donnons maintenant quelques définitions et propriétés sur les espaces de Sobolev.

Espace de Sobolev

Soit m un entier naturel, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par

$$H^m(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) / D^\alpha \varphi \in L^2(\Omega), \text{ pour tout } |\alpha| \leq m \right\} \quad (1.16)$$

où D^α est la dérivée au sens des distributions d'ordre $|\alpha|$ de φ .

L'espace de Hilbert $H^m(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.17)$$

Pour tout réel $s = m + \sigma$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $0 < \sigma < 1$, on définit $H^s(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $\varphi \in H^m(\Omega)$ qui vérifient :

$$\int \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)|^2}{|x - y|^{d+2\sigma}} dx dy < +\infty \text{ pour } |\alpha| = m. \quad (1.18)$$

$H^s(\Omega)$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_{s,\Omega} = \left(\|\varphi\|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=d} \int \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)|^2}{|x - y|^{d+2\sigma}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.19)$$

est un espace de Banach.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme étant l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Si la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est assez régulière, $H_0^1(\Omega)$ est défini par

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) / \gamma(\varphi) = \varphi|_\Gamma = 0 \right\} \quad (1.20)$$

où γ désigne l'opérateur trace qui est une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme :

$$|\varphi|_{1,\Omega} = \|\nabla \varphi\|_{0,\Omega} \quad (1.21)$$

est un espace de Hilbert, dont le dual topologique est $H^{-1}(\Omega)$.

On note par Γ_0 une partie de mesure non nulle de Γ , l'espace

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) / \varphi|_{\Gamma_0} = 0 \right\} \quad (1.22)$$

muni de la norme (1.21) est aussi un espace de Hilbert.

Injections de Sobolev et application trace

Nous donnons maintenant quelques injections de Sobolev et quelques résultats de continuité de l'application trace sur $H^m(\Omega)$ et $H^s(\Omega)$, qui seront utiles par la suite. Voir par exemple [54, 55], pour plus de détails.

Nous commençons par énoncer le théorème d'injection de Sobolev suivant :

Théorème 1.1 *Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d de frontière lipschitzienne.*

- i) *Si $2m < d$, alors $H^m(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^{p^*}(\Omega)$, où $p^* = \frac{2d}{d-2m}$, et l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q < p^*$.*
- ii) *L'espace $H^s(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^{p^*}(\Omega)$ pour tout p^* vérifiant $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d}$.*
- iii) *L'espace $H^1(\Omega)$ s'injecte continûment et d'une manière compacte dans $H^{1-\delta}(\Omega)$, pour tout $0 < \delta < \frac{1}{2}$.*
- iv) *Si k est un entier, tel que $0 \leq k < m - \frac{d}{2} < k+1$, alors $H^m(\Omega)$ s'injecte continûment dans $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, pour $\alpha = m - \frac{d}{2} - k$, et l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ est compacte pour tout $\beta < \alpha$.*

Nous énonçons également un résultat sur la continuité de l'opérateur trace.

Théorème 1.2 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière lipschitzienne, alors il existe une unique application γ linéaire et continue, définie de*

- i) *$H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.*
- ii) *$H^{1-\delta}(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, pour tout $0 < \delta < \frac{1}{2}$.*
- iii) *$H^{1-\delta}(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}-\delta}(\partial\Omega)$, pour tout $0 < \delta < \frac{1}{2}$.*
- iv) *$H^1(\Omega)$ dans $L^q(\partial\Omega)$, pour tout $1 \leq q < p^*$, avec $p^* = \frac{2(d-1)}{(d-2)}$ si $d \geq 3$, et $p^* = 2$ si $d = 2$.*
- v) *$H^{1-\delta}(\Omega)$ dans $L^{\frac{1}{\delta}}(\partial\Omega)$, pour tout $0 < \delta < \frac{1}{2}$ et pour $d = 2$.*

Quelques estimations et inégalités sur les espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques estimations d'interpolation sur les applications traces et quelques inégalités sur les espaces de Sobolev. Pour plus de détails voir [50, 54, 66].

Lemme 1.1 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière lipschitzienne, alors il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$\|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \text{ tel que } \int_{\Omega} u dx = 0. \quad (1.23)$$

En particulier, pour $d = 2$ et pour tout $0 < \delta < \frac{1}{2}$, il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 , telles que

$$\|\gamma(u)\|_{L^{\frac{1}{\delta}}(\partial\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{H^{1-\delta}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^\delta \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\delta}, \quad \forall u \in H^{1-\delta}(\Omega). \quad (1.24)$$

Nous énonçons ensuite un résultat sur l'inégalité de Poincaré.

Comme conséquence de ce résultat nous avons :

Théorème 1.3 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{i=1}^{i=d} \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega). \quad (1.25)$$

Nous énonçons également un résultat connu sous le nom du lemme de Gronwall.

Lemme 1.2 *Soit ϕ, φ deux fonctions de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues. Supposons qu'il existe $C > 0$, telle que*

$$\varphi(t) \leq C + \int_a^t \phi(s)\varphi(s)ds, \quad \forall t \in [a, b],$$

alors

$$\varphi(t) \leq C \exp\left(\int_a^t \phi(s)ds\right), \quad \forall t \in [a, b].$$

1.3 Les espaces à valeurs vectorielles

Dans cette section, nous présentons certaines propriétés des espaces de Lebesgue et des espaces de Sobolev à valeurs vectorielles. Ces derniers jouent un rôle important dans l'étude des problèmes évolutifs (voir par exemple [21, 86]).

Soient $p \in [1, +\infty[$, I un intervalle de \mathbb{R} et E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_E$.

Les espaces $L^p(I, E)$

Définition 1.1 *L'espace $L^p(I, E)$ est défini par :*

$$L^p(I, E) = \left\{ u : I \rightarrow E \text{ mesurable} / \int_I \|u(t)\|_E^p dt < \infty \right\}.$$

Il est muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(I, E)} = \left(\int_I \|u(t)\|_E^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$, l'espace $L^\infty(I, E)$ est défini par

$$L^\infty(I, E) = \{u : I \longrightarrow E \text{ mesurable} / \exists C > 0, \|u(t)\|_E \leq C \text{ pour presque tout } t\},$$

et muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(I, E)} = \inf \{C > 0 / \|u(t)\|_E \leq C \text{ pour presque tout } t\}.$$

Nous avons alors les résultats suivants (voir par exemple [21, 86]).

Proposition 1.1 Pour tout p, q et $r \in [1, +\infty[$, on a

- i) Soit u une fonction mesurable définie de I à valeurs dans E , alors $u \in L^p(I, E)$ si et seulement s'il existe une fonction $v \in L^p(I)$, telle que $\|u(t)\|_E \leq v$ pour presque tout $t \in I$.
- ii) Si E s'injecte continûment dans F , alors $L^p(I, E)$ s'injecte continûment dans $L^p(I, F)$.
- iii) Si p, q et r sont des réels tels que $p \leq r \leq q$, alors $L^p(I, E) \cap L^q(I, E) \subset L^r(I, E)$. De plus si I est borné, on a $L^p(I, E)$ s'injecte continûment dans $L^q(I, E)$ pour tout $q \leq p$.

Proposition 1.2 Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a

- i) $L^p(I, E)$ est un espace de Banach.
- ii) L'espace $\mathcal{D}(I, E)$ est dense dans $L^p(I, E)$, où $\mathcal{D}(I, E)$ est l'espace des fonctions définies sur I à valeurs dans E , de classe C^∞ et à support compact dans I .

Théorème 1.4 On suppose que l'intervalle I est ouvert, alors pour tout $p \in]1, +\infty[$, on a

- i) Si E est réflexif, alors l'espace $L^p(I, E)$ est réflexif et son dual est l'espace $L^q(I, E')$, avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ et E' est le dual de E .
- ii) Si E est séparable, alors l'espace $L^p(I, E)$ est séparable.

Dans la suite, nous allons introduire les espaces de Sobolev à valeurs vectorielles.

Les espaces $W^{1,p}(I, E)$

Définition 1.2 On définit l'espace $W^{1,p}(I, E)$ par :

$$W^{1,p}(I, E) = \{u \in L^p(I, E) / u' \in L^p(I, E)\}.$$

Il est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(I,E)} = \|u\|_{L^p(I,E)} + \|u'\|_{L^p(I,E)}$$

Remarque 1.1 *D'une manière générale, on utilise souvent pour la résolution des problèmes évolutifs, l'espace suivant*

$$W^{1,p}(I, E, F) = \{u \in L^p(I, E) / u' \in L^q(I, F)\},$$

muni de la norme $\|u\|_{W^{1,p}(I,E)} = \|u\|_{L^p(I,E)} + \|u'\|_{L^q(I,F)}$, où les espaces E et F sont des Banach. En particulier, dans la plupart des cas F est considéré comme le dual topologique de l'espace E . Plus précisément, on utilise souvent l'espace $W(0, T)$, pour $I = (0, T)$ avec $T > 0$, défini par

$$W(0, T) = \{u \in L^p(0, T, E) : u' \in L^q(0, T, E')\}.$$

Nous avons les propriétés suivantes (voir par exemple [21, 86]).

Proposition 1.3 *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a*

- i) $W^{1,p}(I, E)$ est un espace de Banach.*
- ii) Si E est séparable alors $W^{1,p}(I, E)$ est séparable.*
- iii) Si E est séparable réflexif alors $W^{1,p}(I, E)$ est réflexif.*
- iv) $C^\infty([0, T], E)$ dense dans $W^{1,p}(0, T; E)$, où $C^\infty([0, T], E)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ définies de $[0, T]$ à valeurs dans E .*

Nous avons également le résultat suivant (voir [21]).

Lemme 1.3 *Soient E un espace de Banach et F un espace de Hilbert, tels que $E \subset F$, avec injection continue, et que E dense dans F . On suppose que F' s'identifie à F (de sorte que $E \subset F = F' \subset E'$). Soit $u \in L^2(I, E)$, tel que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(I, E')$, alors $u \in C(I, F)$ et, pour tout $t_1, t_2 \in I$, on a*

$$2 \int_{t_1}^{t_2} \langle u'(t), u \rangle dt = \|u(t_2)\|_F + \|u(t_1)\|_F.$$

Injection compacte dans les espaces $L^p(I, E)$

Les résultats de compacité les plus connus sur les espaces à valeurs vectorielles sont ceux d'Aubin [5] et de Simon [78]. Le premier suppose la réflexivité des espaces, tandis que celui de Simon généralise le résultat dans le cas de non-réflexivité. Ces résultats sont

très importants, en particulier lorsqu'il s'agit d'étudier certaines équations aux dérivées partielles.

Lemme 1.4 (*Aubin-Lions*)

Soit $p \in]1, +\infty[$ et soient V, E et F des espaces de Banach tels que $V \hookrightarrow E \hookrightarrow F$ (injections continues). Si A est une partie bornée dans $W^{1,p}(0, T; F)$, alors A est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0, T]; F)$.

Dans le cas de l'espace $W = \{u \in L^p([0, T], E) : u'(t) \in L^q([0, T], F)\}$, le théorème suivant donne un résultat similaire connu sous le nom du lemme d'Aubin-Simon, dont la démonstration se trouve par exemple dans [5].

Lemme 1.5 (*Aubin-Simon*)

Soient E, V et F des espaces de Banach tels que $E \subset V \subset F$. On suppose que l'injection $E \hookrightarrow V$ est compacte et que l'injection $V \hookrightarrow F$ est continue. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty]$, alors

- i) Si $p < +\infty$, alors l'injection $W \hookrightarrow L^p([0, T], V)$ est compacte.
- ii) Si $p = +\infty$ et $1 < q$, alors l'injection $W \hookrightarrow \mathcal{C}([0, T], V)$ est compacte.

1.4 Outils pour l'étude des problèmes évolutifs linéaires

Dans cette section, nous présentons un résultat qui sert à montrer l'existence et l'unicité d'une solution des problèmes évolutifs linéaires. C'est en fait l'analogue du lemme de Lax-Milgram pour les problèmes elliptiques (voir par exemple [21]).

Soit V et H deux espaces de Hilbert, tels que $V \subset H \subset V'$, dont les normes respectives sont notées par $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_H$. Soit $T > 0$ un réel fixé, on considère la forme bilinéaire $a(t; u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie p.p. $t \in [0, T]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(H_1) Pour tout u et $v \in V$ l'application $t \rightarrow a(t; u, v)$ est mesurable.

(H_2) Il existe une constante $M > 0$, telle que

$$|a(t; u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \text{pour p.p. } t \in [0, T], \quad \forall u, v \in V.$$

(H_3) Il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $C > 0$, telles que

$$a(t; u, v) \geq \alpha \|u\|_V^2 - C \|u\|_H^2 \quad \text{pour p.p. } t \in [0, T], \quad \forall u, v \in V.$$

Nous avons alors le résultat suivant

Lemme 1.6 *Soit $f \in L^2(0, T; V')$ et $u_0 \in H$, on suppose que la forme a satisfait les hypothèses $(H_1) - (H_3)$, alors le problème variationnel suivant*

$$\begin{cases} \left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + a(t, u, v) = \langle f, v \rangle, \\ \text{et } u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.26)$$

admet une unique solution u appartenant $C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H)$ et de plus $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V')$.

Théorème 1.5 *(Convergence dominée.) Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^p_E(X; T; m)$. Si*

(a) $u_n \rightarrow u$ p.p.,

(b) $\|u_n\| \leq G$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $G \in L^p_{\mathbb{R}}(X; T; m)$, alors $u_n \rightarrow u$ dans $L^p_E(X; T; m)$.

Nous donnons également un résultat dû à G. Stampacchia [80].

Théorème 1.6 *(Stampacchia).*

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) à bord lipschitzien. Soit $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction K -lipschitzienne telle que $G(0) = 0$, et $p \in]1, \infty[$.

1. *Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $G \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

2. *Si de plus G' a un nombre fini de discontinuités, alors pour $1 \leq i \leq N$,*

$$\frac{\partial G(u)}{\partial x_i} = G'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

1.5 Point fixe et degrés topologiques

Dans cette section nous donnons quelques résultats sur la théorie de point fixe. Nous présentons en particulier quelques définitions et propriétés sur le degré topologique qui est une notion géométrique très utile en analyse fonctionnelle non linéaire. Pour plus de détails voir par exemple [52, 69]

Point fixe de Schauder, 1930

Théorème 1.7 *Soit V un convexe fermé non vide d'un espace de Banach E et $T : V \rightarrow V$ une application continue telle que $T(V)$ est relativement compacte dans E . Alors T admet un point fixe : il existe $x \in V$ tel que $T(x) = x$.*

Degré topologique de Brouwer

Soit $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$. Si f est différentiable en x_0 , on note par $J_f(x_0) = \det f'(x_0)$ le jacobien de f en x_0 .

Définition 1.3 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et $f \in C^1(\bar{\Omega})$. On désigne par

$$S := \{x \in \Omega; J_f(x) = 0\},$$

l'ensemble des points singuliers de f et on suppose que $p \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$. On définit alors le degré topologique par :

$$\deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J_f(x),$$

où $\operatorname{sgn} J_f(x)$ est le signe de $J_f(x)$; avec $\deg(f, \Omega, p) = 0$ si $f^{-1}(p) = \emptyset$.

Nous avons alors le résultat cité dans la référence suivante [69], qui rappelle quelques propriétés du degré topologique de Brouwer.

Théorème 1.8 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application continue. Si $p \notin f(\partial\Omega)$, alors il existe un entier $\deg(f, \Omega, p)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. (Normalité) $\deg(I, \Omega, p) = 1$ si, et seulement, si $p \in \Omega$, où I est l'application identité ;
2. (Solvabilité) Si $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$, alors $f(x) = p$ admet au moins une solution dans Ω ;
3. (Invariance par homotopie) $\forall t \in [0, 1]$ $f_t : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est continue et $p \notin \bigcup_{t \in [0, 1]} f_t(\partial\Omega)$, alors $\deg(f_t, \Omega, p)$ ne dépend pas de $t \in [0, 1]$;
4. (Additivité) Supposons que Ω_1 et Ω_2 sont deux sous-ensembles disjoints et ouverts de Ω et $p \notin f(\bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2)$. Alors

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p);$$

5. $\deg(f, \Omega, p)$ est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$.

En 1934, Leray et Schauder (cf. [52]) ont généralisé le degré topologique de Brouwer à des espaces de Banach de dimension infinie. Ainsi, ils ont défini ce qu'on appelle le degré topologique de Leray-Schauder. Ce résultat est devenu un outil très efficace pour montrer différents résultats d'existence pour les équations aux dérivées partielles non linéaires.

Degré topologique de Leray-Schauder

Pour introduire cette notion du degré de Leray-Schauder, nous avons besoin de quelques résultats et définitions [69].

Lemme 1.7 *Soient E un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert borné et $T : \bar{\Omega} \mapsto E$ une application continue compacte. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un espace de dimension finie noté F_ϵ et une application continue $T_\epsilon : \bar{\Omega} \mapsto F_\epsilon$ telle que*

$$\|T_\epsilon x - Tx\| < \epsilon \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

Définition 1.4 *Soient E un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert borné et $T : \bar{\Omega} \mapsto E$ une application continue compacte. Supposons maintenant que $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, le degré de Brouwer $\deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0)$ est bien défini, où T_ϵ est défini comme dans le lemme 1.7. Par conséquent, nous définissons le degré de Leray-Schauder par*

$$\deg(I - T, \Omega, 0) = \deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0).$$

Théorème 1.9 *Le degré de Leray-Schauder possède les propriétés suivantes :*

1. (Normalité) $\deg(I, \Omega, 0) = 1$ si, et seulement si, $0 \in \Omega$;
2. (Solvabilité) Si $\deg(I - T, \Omega, 0) \neq 0$ alors $Tx = x$ admet au moins une solution dans Ω ;
3. (Invariance par homotopie) Soit $T_t : [0, 1] \times \bar{\Omega} \mapsto E$ continu compact et $T_t x \neq x$ pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$. Alors $\deg(I - T_t, \Omega, 0)$ ne dépend pas de $t \in [0, 1]$;
4. (Additivité) Soit Ω_1 et Ω_2 deux sous-ensembles disjoints ouverts de Ω et

$$0 \notin (I - T)(\bar{\Omega} - \Omega_1 \cup \Omega_2).$$

Alors

$$\deg(I - T, \Omega, 0) = \deg(I - T, \Omega_1, 0) + \deg(I - T, \Omega_2, 0).$$

Modélisation des problèmes

Dans ce chapitre, nous présentons une description physique des deux modèles considérés. Ainsi, nous commençons, dans un premier lieu, par donner une définition et une présentation du sol ainsi que la hydrodynamique des fluides dans ce milieu poreux. Ensuite, nous traitons le phénomène de transfert de la chaleur en exposant ses trois modes classiques, puis nous donnons la description du modèle de transfert de la chaleur considéré dans cette thèse.

2.1 Problème inverse d'identification de paramètre en hydrologie

L'hydrologie est la science du cycle de l'eau dans les environnements continentaux. Ce cycle de l'eau, souvent appelé cycle hydrologique, implique de nombreux processus illustrés schématiquement à la figure (2.1). Comprendre et décrire ces processus figurent parmi les principaux objectifs poursuivis par les hydrologues.

L'hydrologie est cependant beaucoup plus qu'un domaine de recherche scientifique. Il vise également à fournir des méthodes et des outils permettant de résoudre des problèmes concrets liés à l'estimation des ressources en eau et à l'évaluation des risques hydrologiques.

L'objectif de ce chapitre est de fournir la base nécessaire aux analyses et à la modélisation requises pour l'estimation de quelques paramètres hydrologiques. Pour d'autres détails, le lecteur peut voir le livre [62] qui présente notamment les différentes composantes du cycle hydrologique, les bassins versants, les facteurs influant sur leur réponses hydrologiques et les différents régimes hydrologiques, ainsi que des questions liées à la mesure et au contrôle des données hydrologiques.

Problème clés en hydrologie

La gestion des ressources en eau et des risques hydrologiques associés (inondations, les glissements de terrain, les coulées de boue, l'érosion, les sécheresses) constituent une préoccupation majeure dans notre société. Ça implique nombreux de problèmes hydrologiques,

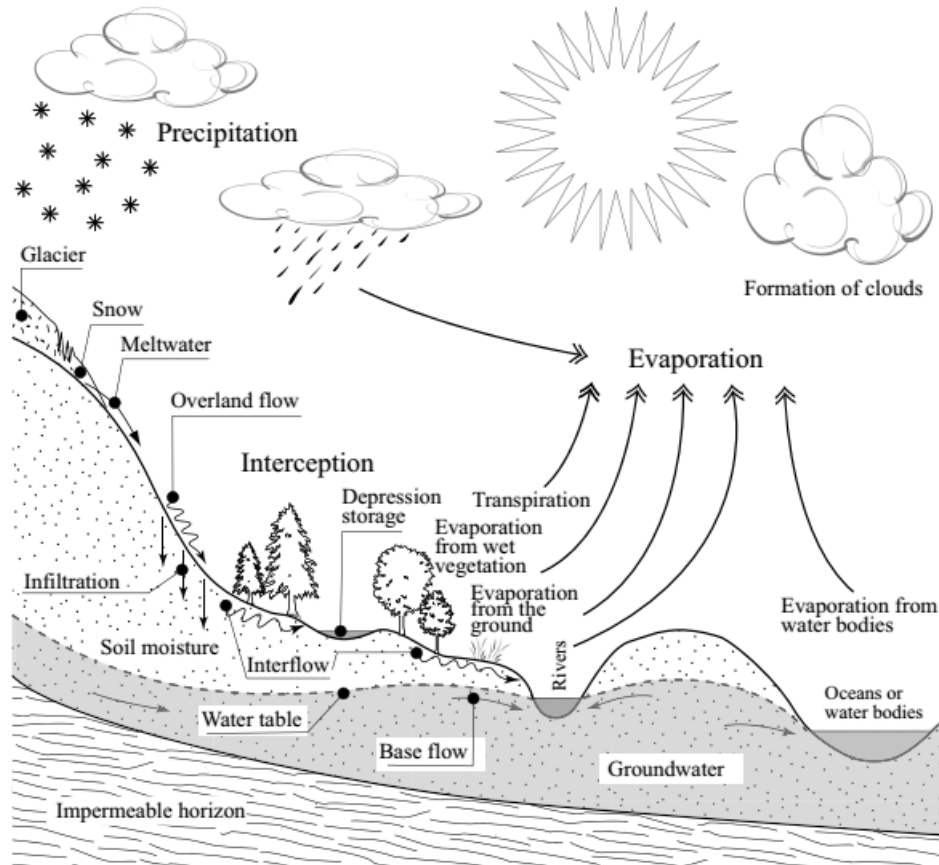


FIGURE 2.1 – Représentation schématique du cycle de l'eau

y compris les principaux présentés ci-dessous.

Prédiction des variables hydrologiques

La prévision de certaines quantités hydrologiques fait partie de la gestion à moyen terme des ressources en eau et des risques hydrologiques. Également appelée "prédétermination" dans de nombreux pays francophones, elle est généralement utilisée pour la conception d'ouvrages hydrauliques et l'application d'autres mesures, structurelles ou non, pour la gestion préventive des risques hydrologiques. La prédiction est aussi parfois utilisée pour fournir des diagnostics concernant des travaux ou des systèmes existants pour lesquels l'efficacité dépend de la variabilité des ressources en eau.

L'objectif des analyses hydrologiques menées dans ce cadre est l'estimation des valeurs de certaines grandeurs hydrologiques pouvant être observées à un endroit donné sur une période donnée. Quelle que soit la variable hydrologique concernée, l'objectif n'est jamais d'estimer la date ou l'heure de l'événement.

Prévision Hydrologique

La prévision hydrologique est utilisée dans la gestion en temps réel des ressources en eau et des risques hydrologiques associés. L'objectif de la prévision hydrologique est d'estimer les valeurs futures de diverses variables hydrologiques, leur date ou heure d'occurrence ou leur évolution sur une période donnée.

La prévision hydrologique est utile dans de nombreuses applications. Par exemple, l'utilisation de l'eau dans un réservoir de stockage peut être optimisée sur la base des débits prévus pour les n jours ou les semaines à venir. La prévision peut également être utilisée pour anticiper les risques associés aux événements hydrologiques extrêmes, en particulier les inondations et les faibles débits. Dans ce cas, l'objectif principal est de réduire les perturbations sociales et économiques potentielles, les pertes de vie ou les blessures et les dommages matériels (par exemple, via des avertissements ou le fonctionnement des ouvrages de commande hydraulique).

Impact hydrologique des activités humaines

Depuis la nuit des temps, les sociétés humaines ont adapté leur environnement naturel ont construit un large éventail de travaux de régulation pour optimiser la gestion des ressources en eau ou réduire les risques hydrologiques. Les projets comprennent, par exemple, la création de tout ou partie d'un cours d'eau pour irriguer de vastes étendues de terres ou la construction de barrages pour produire de l'énergie hydroélectrique ou réduire les pointes de crue. Ces projets et leur exploitation modifient généralement de manière significative le régime hydrologique des cours d'eau ou même, dans certains cas, le cycle hydrologique des bassins versants correspondants.

Le comportement hydrologique des hydrosystèmes peut également être modifié indirectement par les activités humaines. C'est le cas, par exemple, de la déforestation de certaines régions, souvent liée aux pratiques agricoles locales, ou de l'imperméabilisation de la surface du sol qui accompagne l'urbanisation généralisée des bassins versants. De telles modifications de l'utilisation des sols entraînent généralement des changements majeurs dans la répartition des transferts d'eau à l'interface sol-végétation, intensifiant souvent les phénomènes hydrologiques extrêmes (inondations, faibles débits, par exemple). Les voies de transport et de communication peuvent également modifier les limites naturelles des bassins de drainage et les débits correspondants.

Approches d'étude et d'analyse

Les données et les méthodes nécessaires pour résoudre ces différents problèmes sont nombreuses et variées. Plusieurs approches scientifiques différentes peuvent néanmoins être distinguées et sont présentées ci-dessous.

Analyse statistique des données observées

L'une des tâches hydrologiques les plus fréquentes consiste à estimer les quantités d'eau qui seront observées (par exemple les rejets, les volumes) à un endroit donné sur une période donnée. Si une longue série d'observations est disponible pour la variable concernée, cette estimation peut en principe être obtenue par une analyse statistique des données correspondantes.

L'analyse statistique ne nécessite pas nécessairement la connaissance des phénomènes et processus hydrologiques qui entraînent la variation d'une variable donnée dans le temps. Il nécessite toutefois un hydrosystème stationnaire, ce qui est rarement le cas compte tenu des modifications souvent majeures et répétées auxquelles il est soumis (par exemple, projets de développement ou modification naturelle de la couverture du sol). Cette limitation est bien sûr encore plus importante dans le contexte du changement climatique.

De plus, les données sont rarement disponibles aux endroits requis. En fait, pour de nombreuses régions du monde, aucune donnée hydrologique n'est disponible. L'analyse statistique traditionnelle des données observées est clairement impossible dans un tel contexte. Il est également inadapté aux problèmes nécessitant une simulation de la réponse de l'hydrosystème à un forçage météorologique donné. Dans ces différentes conditions, l'analyse hydrologique implique d'estimer les variables requises à partir d'autres variables et données. Les observations de diverses variables météorologiques sont par exemple très souvent utilisées dans ce contexte. Les méthodes associées à ces approches alternatives sont la régionalisation hydrologique et la modélisation hydrologique, dont nous allons maintenant discuter.

Régionalisation Hydrologique

Dans la plupart des cas, les hydrologues ne disposent pas de toutes les données nécessaires pour analyser et / ou modéliser la variable hydrologique d'intérêt sur un site donné. Dans ce cas, la variable doit être prédite ou prévue sur la base d'autres données informatives disponibles pour la région ou le voisinage du site cible. Ces données incluent souvent des données géographiques et géomorphologiques caractérisant le bassin étudié. Ils peuvent également inclure diverses variables hydrométéorologiques observées dans ou

près du bassin. Si l'objectif est d'estimer, par exemple, une décharge de crue caractéristique, une approche possible consiste à utiliser les débits de crue caractéristiques estimés pour les bassins calibrés de la même région.

Modélisation Hydrologique

De nombreuses méthodes ont été développées pour produire des informations hydrologiques indisponibles à partir des données hydrométéorologiques disponibles. La plupart de ces méthodes sont basées sur des modèles hydrologiques. La plupart de ces modèles ont été développés pour simuler des décharges résultant de diverses conditions météorologiques, en particulier des précipitations. Certains modèles peuvent par exemple prévoir des décharges sur la base de prévisions météorologiques, tandis que d'autres produisent des scénarios hydrologiques correspondant à des scénarios météorologiques sélectionnés ou développés ailleurs (par exemple pour des conditions climatiques actuelles ou futures).

Les modèles hydrologiques sont nombreux et variés. Ils sont souvent classés selon leurs concepts, la logique et la nature des expressions mathématiques qui définissent des relations quantitatives entre les informations d'entrée du modèle (par exemple, les précipitations) et les informations de sortie du modèle (par exemple les décharges). De ce point de vue, les approches de modélisation sont souvent divisées en trois types : physique, empirique et conceptuel.

L'approche physique utilise les lois fondamentales de la physique pour représenter et expliquer les processus hydrologiques régissant le comportement de l'hydrosystème étudié. Celles-ci comprennent les lois de conservation de la masse, de l'énergie et des moments. Ils peuvent être exprimés sous la forme d'équations aux dérivées partielles par rapport au temps et à l'espace. Si les conditions initiales et les conditions limites du système d'équations correspondant étaient parfaitement connues, un modèle physique serait capable de reproduire le changement des variables d'état de l'hydrosystème en tout point de l'espace et à tout moment.

L'approche opposée est empirique. Les modèles empiriques sont basés sur les relations observées entre les entrées et les sorties de l'hydrosystème considéré. Ils représentent la relation entre les variables d'entrée et de sortie du système (par exemple la relation pluie-débit) par un ensemble d'équations développées et ajustées sur la base des données obtenues sur le système. Dans ce type de modèle, l'hydrosystème est considéré comme une "boîte noire". La représentation qui en résulte peut prendre en compte diverses composantes du cycle hydrologique. Le fonctionnement de cette représentation est généralement très différent du fonctionnement réel de l'hydrosystème. Les approches empiriques sont généralement développées pour une utilisation facile en mode opérationnel, mais elles pré-

sentent un certain nombre de limitations. Sur la base de l'expérience de l'observateur, ils peuvent omettre un ou plusieurs facteurs importants affectant le comportement hydrologique. Bien qu'ils soient souvent capables de reproduire correctement les observations, il est difficile de les utiliser dans des contextes hydrométéorologiques différents de ceux pour lesquels ils ont été développés.

Propriétés physiques de base du sol

Le sol est un système hétérogène, dispersé, triphasé composé de solides, de liquides et de gaz. Un système à la fois hétérogène et dispersé présente plusieurs interfaces non seulement entre les phases, mais également entre les parties internes d'une même phase. Les activités interfaciales dans le sol sont à l'origine de nombreux phénomènes importants tels que la tension superficielle, la friction, l'adsorption et les changements de pression. Les difficultés rencontrées lors de la tentative de décrire des objets macroscopiques tels que le sol ou ses constituants sont illustrées en grande partie par les différences que nous éprouvons lorsque nous mesurons une propriété spécifique (densité ou composition minéralogique, par exemple) à différentes échelles spatiales. Non seulement les constituants du sol ne sont jamais les mêmes, mais ils peuvent présenter des caractéristiques différentes selon l'échelle d'observation. Par conséquent, nous devons utiliser plusieurs simplifications pour décrire ce système complexe.

La phase solide est constituée de particules minérales et de matières organiques. La phase liquide est constituée d'eau et de solutés dissous et la phase gazeuse est composée d'une combinaison de gaz. Environ 79% sont de l'azote, l'oxygène et le dioxyde de carbone constituant la majeure partie des 21% restants. Les caractéristiques géométriques des particules solides et de leur complément, l'espace des pores, sont complexes. La figure 2.2 montre une image microscopique d'une section mince du sol. La zone blanche est l'espace des pores, tandis que les zones noires et grises sont des particules solides (minéraux et matières organiques). Dans des conditions naturelles, l'espace des pores peut être rempli d'eau et de gaz dans des proportions différentes.

Géométrie de la matrice du sol

La matrice du sol est caractérisée par des géométries complexes formées de particules de tailles et de formes différentes, d'agrégats de différentes dimensions et formes, de pores interconnectés, de pores isolés, de conglomerats et d'agrégats de différentes molécules (oxydes de fer, carbonates, sels) et de matière organique. La matière organique peut être présente sous forme de matière faiblement dégradée (feuilles, petites branches, petits animaux morts, tissus végétaux de différentes formes) ou sous forme de matière organique

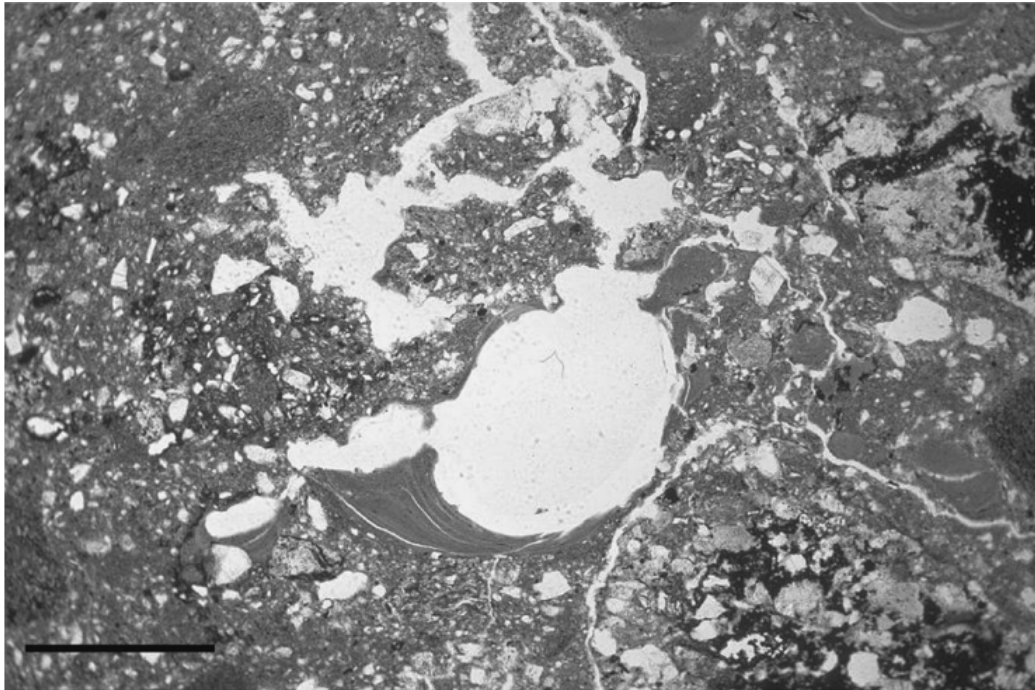


FIGURE 2.2 – Image de microscope d’une section mince de sol. La ligne noire sur l’image est de $50 \mu m$. Université Cranfield, 2014. Guide des sols LandIS. Disponible à <http://www.landis.org.uk/services/soilsguide/>.

dégradée telle que différentes formes d’humus, d’acides humiques et d’acides fulviques. Les micro-organismes tels que les bactéries, les champignons et les virus peuvent être présents sous forme de micro-organismes isolés ou de colonies de tailles et de formes différentes. Fournir une description géométrique d’un tel système est une tâche compliquée. Cependant, certains modèles géométriques ont été proposés au fil des ans et fournissent une description relativement satisfaisante, du moins pour la solution de certains problèmes auxquels nous sommes confrontés en physique des sols.

La figure (2.2) montre des zones qui ressemblent à des cercles et d’autres qui ressemblent à des canaux longs et fins. D’autres ressemblent à des triangles, des carrés, etc. Comment pouvons-nous représenter un système aussi complexe en termes de propriétés géométriques pouvant être utilisées pour calculer les propriétés nécessaires, par exemple, le mouvement de l’eau, de la chaleur ou du soluté. Une variété de théories sont utilisées pour représenter la géométrie complexe du sol. Les arrangements sont également définis comme "structure", un terme qui désigne la manière dont les particules solides sont organisées dans la matrice du sol.

Géométrie de base

Un modèle de la matrice du sol est obtenu en représentant les particules du sol sous forme de sphères, disposées selon différentes formes géométriques. La représentation idéale

et la plus facile (certes très éloignée des conditions naturelles) consiste à imaginer un milieu composé de sphères de même diamètre, en deux ou trois dimensions. En fonction des arrangements géométriques des particules sphériques, différentes géométries de tassement sont possibles, ayant des nombres de coordination différents et étant nommées selon le système de garnissage (cubique, tétraédrique, etc.). Deresiewicz (1958) [31], a effectué une analyse géométrique et mathématique détaillée qui a calculé la densité apparente et la porosité pour différentes configurations géométriques de particules sphériques (Fig. 2.3).

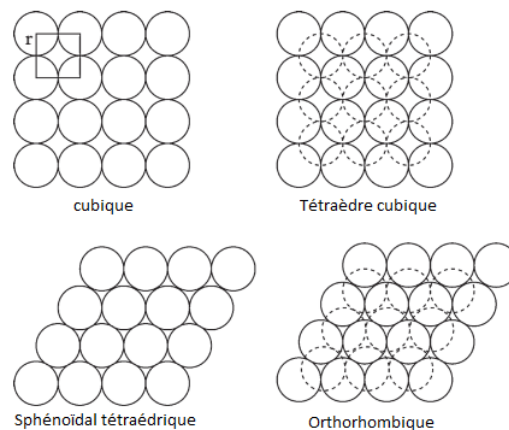


FIGURE 2.3 – Modèles d'emballages réguliers de particules sphériques.

La disposition la plus élémentaire des particules sphériques (phase solide) est la disposition cubique, pour laquelle la porosité peut être calculée en considérant une sphère de rayon r (avec le volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$) et un cube de côté $L = 2r$ (avec le volume $V = (2r)^3 = 8r^3$). Le volume dans l'espace poreux du cube unité est alors donné par

$$V_{pore} = 8r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

En divisant le volume de l'espace poreux par le volume total du cube unitaire, on obtient la porosité : porosité = $V_{pore}/8r^3$. La porosité totale pour cette configuration est de 0,4764 (ou 47,64%).

Une telle description simple ne peut toutefois pas représenter la matrice du sol, puisque le sol possède des particules de tailles et de formes différentes qui déterminent un emballage compliqué des particules. Par exemple, les sphères de particules plus petites s'inséreraient entre des sphères plus grandes et les particules de forme non sphérique (plaquettes d'argile) rempliraient également les espaces entre les plus grosses particules. Un exemple d'agencement de particules est fourni dans l'image au microscope électronique à balayage d'un échantillon de sol représenté sur la Fig. 2.4.

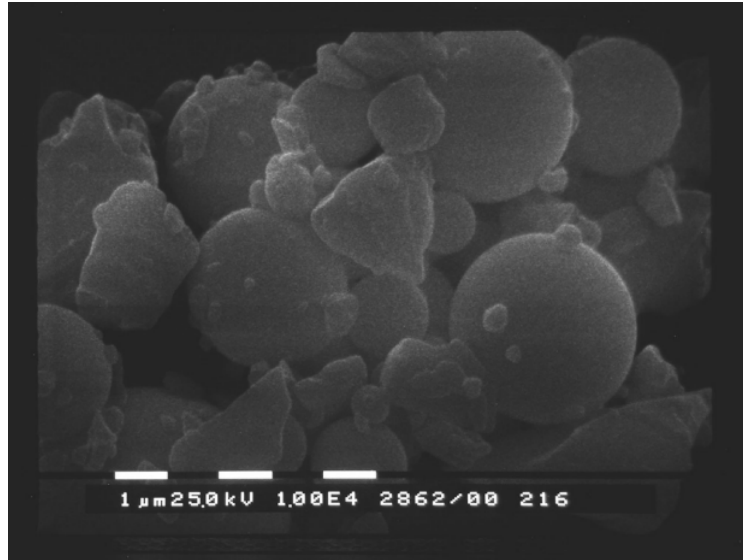


FIGURE 2.4 – Photo au microscope électronique à balayage d'un échantillon de sol. Chaque coche sur l'étiquette est $1\mu m$. Centre de microscopie, Département des sciences agricoles, Université de Bologne.

Structure du sol

Nous définissons comme "structure" la disposition et l'organisation des particules solides dans la matrice du sol. En raison de la diversité des géométries, la structure du sol est une propriété très difficile à mesurer et à classer. Il existe une variété de techniques pour mesurer la structure du sol. La tomographie par rayons X est une technique non destructive et non invasive qui peut être utilisée avec succès pour l'analyse de la structure du sol en 3D. Des mesures quantitatives des éléments de la structure du sol, en particulier des pores du sol et des caractéristiques du réseau de pores, peuvent être obtenues. La figure 2.5 montre une coupe tridimensionnelle d'un échantillon de sol, mesurée par tomographie aux rayons X. Les différents arrangements structurels entre la couche la plus superficielle et la couche inférieure sont clairement visibles. De plus, l'hétérogénéité du réseau de pores et des différents arrangements d'agrégats montre une fois de plus la géométrie compliquée de la structure du sol.

Écoulement dans les milieux poreux

Nous présentons dans cette section la physique liée à notre problématique. Cet aspect physique nous conduira à un modèle hydrodynamique régissant les écoulements en milieux poreux non-saturés. Ainsi plusieurs formulations des équations sont décrites : formulation en terme de pression en eau du sol, formulation en terme de teneur en eau du sol et formulation mixte pression-teneur en eau du sol. Toutes ces formulations sont

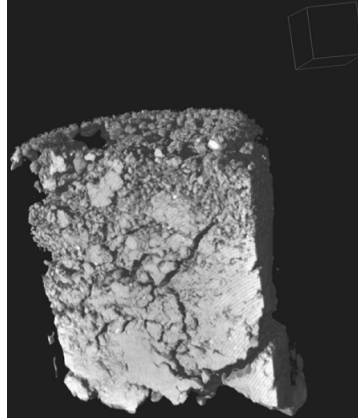


FIGURE 2.5 – Section d'un échantillon de sol obtenu, par tomographie aux rayons X. La taille du cube (coin supérieur droit) est de 10 mm. Département des sciences agricoles et Matteo Bettuzzi, Département de physique et d'astronomie, Université de Bologne.

mathématiquement équivalentes, la seule différence (pour certaines) est sur le plan de la conservation de la masse [13]. De façon générale, les équations de l'hydrodynamique caractérisant les écoulements en milieux poreux non-saturés, sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires de type parabolique.

Milieu poreux

Le sol est un système hétérogène complexe composé de trois phases : la phase liquide représentée par l'eau du sol, la phase gazeuse par l'air et la phase solide par les particules du sol [40]. L'essentiel des transferts de masses conduisant à l'évapotranspiration, à la redistribution et à l'infiltration se fait dans la zone du sol constitué des couches superficielles. Cette zone est appelée zone non-saturée. Les constituants élémentaires du sol sont des particules solides dont la répartition en différentes classes de taille (argile, sable, limon, gravier) permet de définir la texture sol et sert de base à la classification des sols.

Hydrodynamique du milieu poreux

Loi de Darcy empirique

La loi de Darcy permet de décrire les écoulements dans un milieu poreux saturé : elle exprime la proportionnalité entre le flux d'eau, ou vitesse de filtration q traversant une colonne et le gradient de charge hydraulique (cf. [51])

$$q = -K \frac{\rho g}{\mu} \nabla \left(\frac{P}{\rho g} - z \right), \quad (2.1)$$

avec

q est la densité de flux volumique (LT^{-1}),

K est la perméabilité du milieu poreux, indépendant du fluide (L^2),

P est la pression de l'eau dans le sol ($ML^{-1}T^{-2}$),

μ est la viscosité dynamique de l'eau (MLT^{-1}),

ρ est la masse volumique de l'eau (ML^{-3}),

g est l'accélération de la pesanteur (LT^{-2}),

z est la profondeur (orientée vers le bas) (L).

La loi de Darcy, bien que conçue à l'origine pour les écoulements en milieu saturé, fut étendue par Richards en 1931 (cf. [74]) à l'écoulement en sol non saturé en stipulant que la constante de proportionnalité K appelée conductivité hydraulique est fonction de la teneur en eau du sol :

$$q = -K(\theta) \cdot \nabla(h - z), \quad (2.2)$$

où

$\theta = \frac{V_w}{V_t}$: la teneur en eau volumique du sol (L^3L^{-3}), avec V_w est le volume d'eau dans le sol et V_t est le volume total du sol considéré,

$K(\theta) = K \cdot K_r w(\theta) \frac{\rho g}{\mu}$: la conductivité hydraulique (LT^{-1}) et $K_r w(\theta)$ est la perméabilité relative,

$h = \frac{P}{\rho g}$: la pression effective de l'eau (L).

On peut également l'exprimer sous forme de la pression en eau du sol sous la forme :

$$q = K(h) \cdot \nabla(H), \quad (2.3)$$

où $H = h - z$, est la charge piézométrique, z représente la cote considérée.

L'expression de la conductivité hydraulique en fonction de la teneur en eau θ ou en terme de pression h est complexe et dépend du type de sol considéré suivant ses caractéristiques structurales et texturales [40].

Equation de continuité

La loi de Darcy, à elle seule, ne suffit pas à décrire l'équation générale de l'écoulement. Il faut pour cela, utiliser l'équation dite de continuité qui exprime la conservation de masse d'eau dans un volume élémentaire représentatif du sol et qui s'écrit en supposant l'indéformabilité du milieu (masse volumique constante) et la masse volumique de l'eau,

également constante sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot q. \quad (2.4)$$

Cette équation exprime la correspondance entre la variabilité spatiale du flux et la variabilité temporelle de la teneur en eau.

Equation des écoulements en milieu non saturé : équation de Richards

L'équation générale des écoulements en milieux poreux non saturé résulte de la combinaison de la loi de Darcy généralisée en milieu non saturé et de l'équation dite de continuité. Diverses formulations de cette équation sont possibles selon la variable d'état considérée à savoir, la pression $h(L)$ ou la teneur en eau $\theta(L^3.L^{-3})$.

Cette équation plus connue sous le nom d'équation de Richards depuis 1931, s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla [K(\theta) \nabla H], \quad (2.5)$$

où θ est la teneur en eau du sol ($L^3.L^{-3}$), H est la charge piézométrique ($H = h - z$)(L) avec h la pression effective de l'eau du sol, et $K(\theta)$ est la conductivité hydraulique ($L.T^{-1}$).

L'équation aux dérivées partielles (2.5) est associée aux conditions suivantes :

- Des conditions aux limites du domaine d'étude de type Dirichlet (pression imposée, teneur imposée), de type de Neumann (flux imposées) ou de type Fourier (conditions mixtes) ;
- Des conditions initiales en pression h ou en teneur en eau θ .

A cause de la non-linéarité de ces équations, il est pratiquement impossible d'avoir une solution analytique (sauf à des cas particuliers). Par conséquent, les méthodes numériques sont largement utilisées pour résoudre l'équation de l'écoulement en milieu poreux non saturé.

Modèles hydrodynamiques empiriques

Pour résoudre l'équation (2.5), il est nécessaire de connaître la relation entre θ et h appelée courbe de rétention. Cette fonction relie la teneur en eau du sol $\theta(h)$ et la pression h . Il faut aussi définir l'expression de la conductivité hydraulique K en fonction de la teneur en eau $\theta(h)$.

Ces relations caractérisant le milieu poreux sont très difficiles d'accès. De plus, la relation entre la teneur en eau et la pression ne peut être unique en raison de l'effet de l'hystérèse,

dont une description plus détaillée est donnée par Hillel [40], Philip [71].

Plusieurs relations ont été proposées pour décrire la courbe de rétention des sols. Parmi ces relations, les plus utilisées sont celle de Brooks et Corey 1994 [11] et celle de Van Genuchten 1980 [82]. La formulation de Brooks et Corey donne la relation entre la teneur en eau et la pression à travers l'expression suivante :

$$\theta = \begin{cases} \theta_r + (\theta_s - \theta_r)(\alpha h)^{-\lambda}, & \text{si } \alpha h > 1, \\ \theta_s, & \text{si } \alpha h \leq 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

où θ_r et θ_s représentent, respectivement, la teneur en eau résiduelle et la teneur en eau à saturation naturelle, α est paramètre empirique. En utilisant la teneur en eau réduite S_e , ou encore le taux de saturation donné par l'expression suivante :

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}, \quad (2.7)$$

alors l'équation (2.6) devient

$$S_e = \begin{cases} (\alpha h)^{-\lambda}, & \text{si } \alpha h > 1, \\ 1, & \text{si } \alpha h \leq 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

La relation de Van Genuchten [82] permet de mieux décrire la courbe de rétention pour des valeurs de la teneur en eau proche de la saturation et de bien reproduire les formes de courbes que sont susceptibles de restituer les autres méthodes.

L'équation est donnée en considérant le taux de saturation (2.7) par la relation suivante :

$$S_e = \frac{1}{[1 + (\alpha h)^{-\lambda}]^m}, \quad (2.9)$$

m , λ et α sont des constantes empiriques qui déterminent la forme de la courbe de rétention. Avec la simplification proposée par Van Genuchten $m = 1 - \frac{1}{n}$, cette équation est utilisée dans le modèle de Mualem (1976)[61] donnant la conductivité hydraulique.

La fonction $K(\theta)$

Etant donné qu'une estimation de la courbe de conductivité hydraulique $K(\theta)$ est plus difficile à obtenir expérimentalement que celle de la courbe de rétention $h(\theta)$ (c.f. [51]), différents auteurs ont proposé des formulations mathématiques pour obtenir des conductivités à partir de la courbe de rétention. Parmi celle-ci, nous présentons le modèle de Mualem 1976. Il donne la conductivité hydraulique à partir du taux de saturation par la relation suivante :

$$K(S_e) = k_s S_e^l \left[\frac{f(S_e)}{f(1)} \right]^2, \quad (2.10)$$

avec

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{h(x)} dx, \quad (2.11)$$

l représente la conductivité des pores. l a été estimé par Mualem à $\frac{1}{2}$ après moyenne faite sur plusieurs échantillons de sols.

Après intégration et en supposant que $l = 1 - \frac{1}{n}$ (Van Genuchten 1980), la conductivité hydraulique est donnée par la relation suivante :

$$K(S_e) = k_s S_e^l [1 - (1 - S_e^{\frac{1}{m}})^m]^2. \quad (2.12)$$

En terme de pression cette équation s'écrit :

$$K(h) = k_s \frac{[1 - (\alpha h)^{m \cdot n} [1 + (\alpha h)^n]^{-m}]^2}{[1 + (\alpha h)^n]^{ml}}, \quad (2.13)$$

En utilisant les relations de Brooks et Corey [11], l'expression de la conductivité hydraulique est donnée par

$$K(S_e) = k_s S_e^{l+2+\frac{2}{\lambda}}, \quad (2.14)$$

ou en terme de pression avec $\alpha h > 1$:

$$K(h) = \frac{k_s}{(\alpha h)^{\lambda(l+2)+2}}. \quad (2.15)$$

Les courbes de conductivités hydrauliques $K(\theta)$ reposent sur l'ajustement des valeurs expérimentales et sur les lois mathématiques empiriques. Ceci concerne également la fonction $h(\theta)$.

Différentes modèles ont été déjà décrites plus haut, nous présentons aussi le modèle de Mualem-Van Genuchten :

– Courbe de rétention :

$$\theta(h) = \begin{cases} \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left(1 + \left(\frac{h}{h_g}\right)^n\right)^{1-\frac{1}{n}}, & \text{si } h < 0, \\ \theta_s, & \text{si } h \geq 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

– Conductivité hydraulique :

$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_s}{\theta_s - \theta_r}\right)^\eta. \quad (2.17)$$

Nous en déduisons l'expression de la capacité capillaire $C(h) = \frac{\partial \theta(h)}{\partial h}$ donnée par la

relation suivante :

$$C(h) = \begin{cases} \frac{(\theta_s - \theta_r)}{h_g} \left(\frac{h}{h_g}\right)^{n-1} \left(1 + \left(\frac{h}{h_g}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}-1}, & \text{si } h < 0, \\ 0, & \text{si } h \geq 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Dans ces relations, $h_g(L^{-1})$ est le paramètre d'échelle de Van Genuchten 1980 [82], et η et n sont des paramètres de forme dimensionnels.

D'après Haverkamp et al. [3], les paramètres de forme η et n sont fortement liés à la texture du sol alors que les paramètres hydrodynamiques K_s , θ_s, θ_r , et h_g sont eux fortement liés à la texture du sol.

Ce type de modèle a été utilisé par Haverkamp et al [81] pour comparer différentes techniques de résolution numériques de l'équation de Richards et par Hills et al [41] pour étudier l'écoulement de l'eau dans des sols très secs.

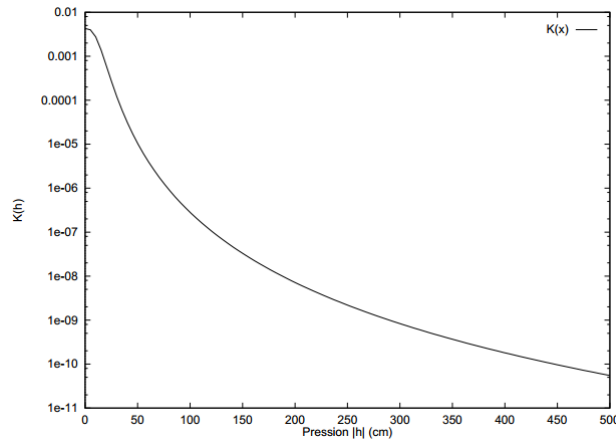


FIGURE 2.6 – Allure de la conductivité K en fonction de la pression h : paramètres Grenoble Sand.

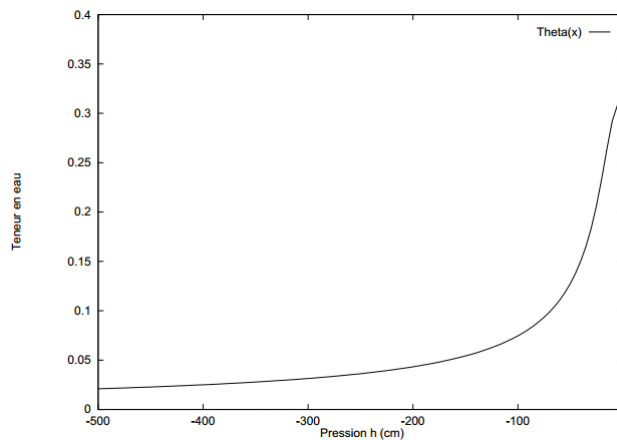


FIGURE 2.7 – Allure de la teneur en eau θ en fonction de la pression h : paramètres Grenoble Sand.

Un exemple d'outil de mesure des propriétés hydrodynamiques du sol : l'infiltromètre à disque

L'infiltromètre à disque permet de réaliser des essais d'infiltration sous charge négative maintenue constante (Perroux et White, 1988 ; Ankeny et al., 1991 ; Reynolds et Elrick, 1991). Cet appareil est conçu pour mesurer le flux d'infiltration axisymétrique de l'eau dans le sol à travers un disque.

Principe

Les aspects théoriques et pratiques de son utilisation, en vue d'une caractérisation hydrodynamique des sols, ont été synthétisés par Coquet et al. (2000). Le principe repose sur la mesure du flux d'infiltration de l'eau dans des conditions de non-saturation. Les moteurs de l'infiltration sont la succion exercée sur l'eau par les capillaires du sol, et la gravité. Le potentiel de l'eau à l'interface disque/sol est déterminé par l'utilisateur. La gamme de potentiel qui peut être explorée se situe entre -25 et 0 *cm* de hauteur de colonne d'eau, soit entre $-2,5$ et 0 *kPa*. Il est donc possible d'établir une relation expérimentale entre la conductivité hydraulique du sol et le potentiel de l'eau dans une gamme proche de la saturation. En faisant référence à la théorie capillaire, on peut relier, via la loi de *Jurin*, le potentiel de l'eau h à un diamètre maximal équivalent de pore $d_{\text{éq}}$ [L] pouvant être mis en jeu à un potentiel de l'eau donné. On parle de diamètre équivalent car on assimile les pores à des capillaires parfaitement cylindriques. Si h et $d_{\text{éq}}$ sont exprimés en *cm*, la loi de *Jurin* s'écrit :

$$d_{\text{éq}} = \frac{0.3}{h}.$$

Par exemple, pour un potentiel de -1 *cm* de hauteur de colonne d'eau, le diamètre maximal des pores mis en jeu est de $0,3$ *cm*. L'utilisation d'une gamme de potentiels de l'eau entre -25 et 0 *cm* correspond à un spectre de pores de diamètre équivalent supérieur ou égal à $0,12$ *mm*.

Description de l'appareil

L'appareil (Figure 2.8) est constitué d'un disque creux (D) muni d'une membrane (M) à sa base en contact avec le sol. Le disque est alimenté en eau par un réservoir (RA) gradué, amovible et fermé à sa partie supérieure par une pince de Mohr. L'entrée de l'air dans le réservoir d'alimentation se fait par un tube (B) relié à un vase de Mariotte (VM) permettant de régler le potentiel de l'eau au niveau de la surface du sol. Pour que l'eau quitte l'infiltromètre et s'infiltrer dans le sol, elle doit être remplacée dans le réservoir d'alimentation par un volume identique d'air. Cet air transite à travers le vase

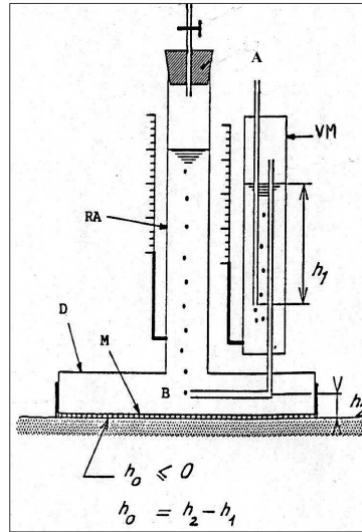


FIGURE 2.8 – Schéma de l'infiltromètre à disque (RA : réservoir d'alimentation en eau ; VM : vase de Mariotte ; D : disque creux ; M : membrane de nylon ; A : tube d'aération du vase de Mariotte ; B : tube d'aération du réservoir d'alimentation).

de Mariotte par le tube A à la pression atmosphérique. Les bulles d'air ainsi formées à la base du tube A remontent dans le vase de Mariotte et rejoignent le volume d'air contenu dans celui-ci. Compte tenu de la charge hydrostatique h_1 (en cm) existant entre la base du tube (A) et la surface de l'eau contenue dans le vase de Mariotte, le volume d'air du vase de Mariotte est à une pression p_{airVM} [$ML^{-1}T^{-2}$] inférieure à la pression atmosphérique p_{atm} [$ML^{-1}T^{-2}$] :

$$p_{airVM} = p_{atm} - \rho_w h_1 g$$

où ρ_w est la masse volumique de l'eau [ML^{-3}] et g l'accélération de la pesanteur [LT^{-2}]. Lors de l'infiltration de l'eau, l'air quitte le vase de Mariotte par le tube (B) à la pression p_{airVM} pour rejoindre le réservoir d'alimentation. L'eau située juste à la sortie du tube (B) a donc une pression égale à celle de l'air qui sort du tube. On en déduit la pression de l'eau p_0 à la sortie du disque de l'infiltromètre :

$$p_0 = p_{airVM} + \rho_w h_2 g = p_{atm} + \rho_w (h_2 - h_1) g.$$

Soit, si l'on exprime les pressions en unité de hauteur de colonne d'eau, un potentiel de l'eau h_0 à la sortie de l'infiltromètre :

$$h_0 = h_2 - h_1$$

La hauteur h_2 est déterminée en remontant le tube (A) jusqu'à ce que l'eau coule à travers la membrane. On a alors $h_0 = 0$ et $h_1 = h_2$. Le tube est alors rabaisé de la

distance correspondant au potentiel h_0 désiré.

La membrane du disque doit avoir un potentiel d'entrée d'air bien inférieur à -25 cm tout en ayant une résistance hydraulique négligeable devant celle du sol. Pour assurer un parfait contact entre la membrane et le sol, on dispose une mince couche de sable fin entre les deux. La taille des grains est choisie de telle sorte que la sorptivité du sable soit importante (ainsi le sable se sature rapidement), sans toutefois que les grains soient trop grossiers, auquel cas le sable ne serait pas saturé aux faibles potentiels.

Usages

L'infiltromètre à disque est très couramment utilisé pour quantifier les effets des macropores et les chemins d'infiltration préférentiels sur le terrain. Les données d'infiltromètre à disque sont utilisées depuis déjà deux décennies pour estimer la caractéristique de conductivité hydraulique K proche de la saturation et à saturation, l'estimation de K à partir des données d'infiltrométrie étant réalisée le plus souvent grâce à la solution analytique de Wooding (1968). L'analyse des régimes transitoire et stationnaire de l'infiltration permet de déduire des informations sur les caractéristiques hydrodynamiques, notamment la conductivité hydraulique et la sorptivité du sol (White et Perroux, 1987 ; Warrick, 1992 ; Vandervaere, 1995 ; Vandervaere et al., 2000). Il est connu que la présence de macropores dans le sol peut contribuer à des mouvements rapides de l'eau et de solutés vers la profondeur (Watson et Luxmoore, 1986), et que, à saturation, l'essentiel des flux prend place dans les macropores (Nachabe, 1995). C'est en raison principalement de son adaptation à l'étude de la macroporosité du sol que l'infiltromètre à disque connaît une large popularité (Coquet et al., 2005a). En raison de la rapidité des mesures, l'infiltromètre à disque a aussi été utilisé pour appréhender la variabilité spatiale des propriétés hydrauliques du sol (Mohanty et al., 1994). Son usage pour une estimation inverse des paramètres hydrodynamiques du sol connaît lui aussi un intérêt important (Simunek et van Genuchten, 1996 ; Simunek et al., 1999 ; Simunek et al., 1998 ; Ramos et al., 2006).

Modèle hydraulique d'écoulement considéré

Nous nous sommes intéressés à un problème inverse d'identification des paramètres régi par une équation parabolique doublement non-linéaire décrivant l'écoulement des eaux souterraines dans les milieux poreux Ω qui est un sous ensemble ouvert et borné de \mathbb{R} .

$$\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R} \quad \text{avec } L > 0.$$

Nous supposons que la conductivité hydraulique K et la diffusivité D sont deux fonctions réelles non linéaires et dépendent de la teneur en eau θ

$$K = K(\theta) = K(\theta(z, t)) \quad \text{et} \quad D = D(\theta) = D(\theta(z, t)).$$

Remarquons que K et D dépendent implicitement de z et de t , où z est la coordonnée verticale orientée positivement vers le bas (voir figure 2.9), L la profondeur de sol considérée et t le temps.

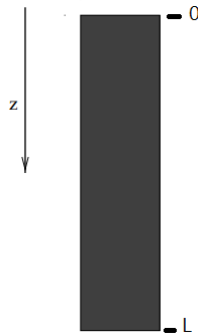


FIGURE 2.9 – Colonne de sol.

Par conséquent, la teneur en eau inconnue θ peut être exprimée suivant Richards (sous θ -form) comme suit

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} = 0, \quad (z, t) \in (0, L) \times (0, T); \quad (2.19)$$

Le but de ce problème est de trouver la teneur en eau θ , la conductivité hydraulique $K(\theta)$ et la diffusivité hydraulique $D(\theta)$ à partir des observations supplémentaires suivantes sur la teneur en eau prise à l'instant final T :

$$\theta(z, T) = g(z), \quad z \in (0, L), \quad (2.20)$$

Remarque 2.1 *L'équation de Richards (teneur-pression) est une EDP conservative, en effet elle peut s'écrire sous la forme*

$$\partial_t U + \partial_z F = 0$$

où U est la variable conservée et F le flux. Ici, nous avons donc $U = \theta(h)$ et $F = -K(h)(\partial_z h - 1)$ et la variable conservée est en réalité $h(z, t)$.

Explicitons à présent, les conditions aux limites. Prenons le cas de la frontière située en

0. Nous pouvons imposer à l'état du système, c'est à dire la valeur de la variable d'état θ une condition de Dirichlet $\theta(0, t) = \theta_{min}(t)$ où $\theta_{min}(t)$ décrit l'évolution temporelle de θ à la frontière située en 0 sur toute la durée d'observation.

La même explication peut être apportée à la frontière en L avec une condition de Dirichlet $\theta_{max}(t)$ fixée.

Remarque 2.2 *Nous pouvons aussi imposer sur l'état du système une condition de Neumann, cette condition revient à imposer sur un flux d'eau en certains points de la frontière. c'est donc une condition qui demande de prendre certaines précautions pour ne pas "violier" la physique du phénomène. Il faudra entre autre être capable en un même point de passer d'une condition à l'autre pour simuler la formation d'eau ou la disparition d'une lame d'eau.*

Dans l'étude mathématique, que nous allons proposer, une attention particulière sera donnée à ces paramètres hydrauliques et plus précisément au terme de conductivité. Par conséquent, notre étude théorique et numérique sera consacrée au deux types d'équation de Richards qui correspondent à des situations physiques associées à l'écoulement d'un fluide en milieu poreux. Notamment, les cas où :

$$K(\theta), C(\theta), D(\theta) \in C(\mathbb{R}), \quad \text{borné et uniformément Lipschitz continue.}$$

Par conséquent, la teneur inconnue θ est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} = 0, & (z, t) \in (0, L) \times (0, T); \\ \theta(0, t) = \theta_{min}(t), & \forall t \in (0, T); \\ \theta(L, t) = \theta_{max}(t), & \forall t \in (0, T); \\ \theta(z, 0) = \theta_0(z), & \forall z \in (0, L), \end{cases} \quad (2.21)$$

où θ_0 est la fonction donnée décrivant la donnée initiale.

Dans la suite, nous allons proposer une étude mathématique d'un problème inverse issu de ce modèle (2.21). Tandis que pour l'approximation numérique du problème inverse nous considérons la formulation mixte équivalente au modèle (2.21) qui consiste à déterminer la pression ψ donnée par le problème suivant :

$$\begin{cases} C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right) = f(z, t), & (z, t) \in]0, L[\times (0, T), \\ \psi(0, t) = \psi_{min}, & t \in (0, T), \\ \psi(L, t) = \psi_{max}, & t \in (0, T), \\ \psi(z, 0) = \psi_0(z), & z \in]0, L[. \end{cases} \quad (2.22)$$

Puisque ce modèle fait intervenir la capacité capillaire $C(\psi)$ et la conductivité hydraulique $K(\psi)$ qui sont les paramètres les plus significatifs de point de vue pratique [12] et qu'il faudra mieux caractériser.

2.2 Problème inverse d'identification du coefficient de réaction de réaction

Dans cette section, on présente une description physique du modèle de transfert de la chaleur. Ainsi, nous commençons, dans un premier lieu, par donner une définition et une présentation physique du phénomène de transfert de la chaleur en exposant ses trois modes classiques, puis nous donnons la description du modèle de transfert de la chaleur considéré.

Modes de transfert de la chaleur

Il existe trois modes classiques de transfert de la chaleur à savoir : le transfert de la chaleur dans les matériaux (conduction : gérée par la loi de Fourier), le transfert de la chaleur dans un fluide (convection : gérée par la loi de refroidissement de Newton) et le transfert de la chaleur dans l'espace vide (rayonnement : géré par la loi de Stefan-Boltzmann sur le refroidissement d'un corps dans un grand environnement). Ainsi, la chaleur ne peut être transférée que par trois concepts : conduction, convection et rayonnement. La figure 2.10 montre une analogie qui pourrait être utile pour mieux comprendre ces concepts [53].

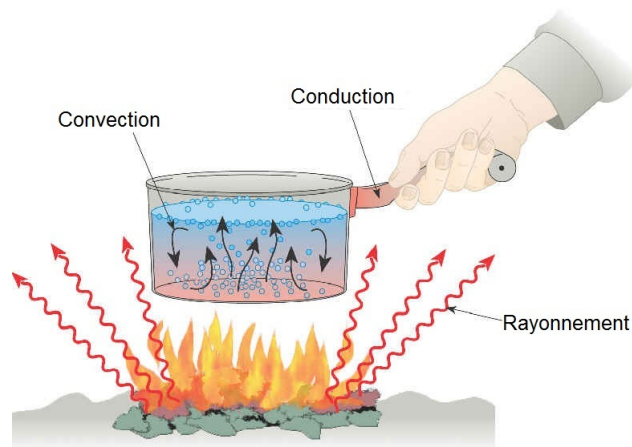


FIGURE 2.10 – Explication analogique des trois modes de transfert de la chaleur

Conduction thermique

C'est le transfert de chaleur par contact physique. Elle se produit, par exemple, lorsque vous appuyez avec votre main sur un volet de fenêtre, lorsque vous placez un pot d'eau sur un élément actif ou lorsque vous placez un fer dans le feu. En bref, la conduction se produit dès qu'il y a une différence de chaleur entre deux milieux ou entre deux points distincts

dans le même milieu (voir Fig 2.11). On peut également définir la conduction comme

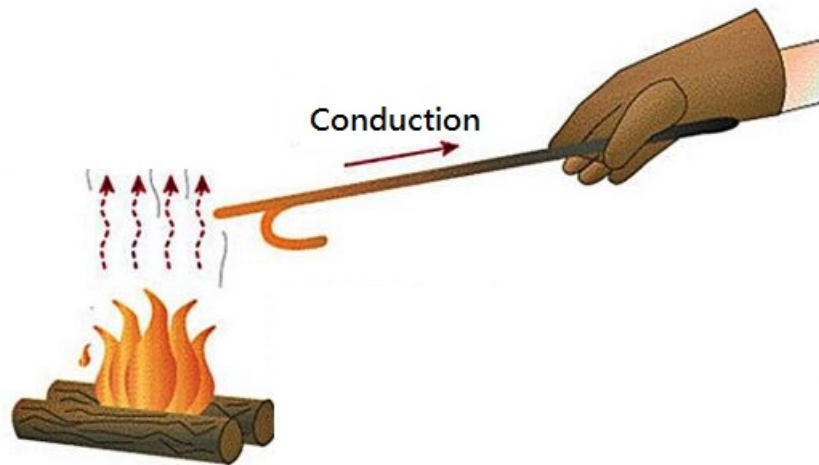


FIGURE 2.11 – Conduction thermique

étant un transfert de la chaleur qui se produit au moyen d'une agitation moléculaire dans un matériau sans aucun mouvement de la matière dans son ensemble [70].

On considère l'exemple d'une tige de métal d'extrémité soumise à une température plus élevée, L'énergie sera transférée par la tige vers l'extrémité la plus froide, car les particules de vitesse plus élevées entrèrent en collision avec les plus lentes avec un transfert net d'énergie. Ainsi, le flux q qui en résulte est régi par la loi de la conduction de la chaleur, également connue sous le nom la loi de Fourier donnée par

$$q = -K\nabla T,$$

où T est la température et K est le tenseur de conductivité thermique.

Convection thermique

La convection est un transfert de chaleur par un mouvement de masse d'un fluide tel que de l'air ou de l'eau ou encore du gaz [7]. En effet, l'énergie thermique est transférée des lieux chauds aux endroits froids par convection. La convection se produit alors, lorsque les zones plus chaudes d'un liquide ou d'un gaz se déplacent dans les zones froides. Le liquide ou le gaz le plus frais prend alors la place des zones les plus chaudes qui se sont déplacées. Il en résulte un modèle de circulation continue. L'eau bouillante dans une bouilloire est un bon exemple de ces courants de convection (voir fig 2.12).

La convection peut se produire naturellement : convection naturelle ou à cause d'un

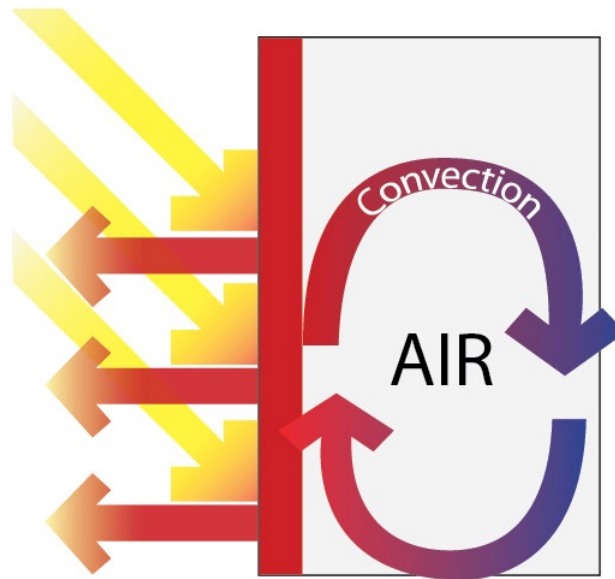


FIGURE 2.12 – Convection thermique

dispositif de déplacement : convection forcée. Un exemple simple de la convection naturelle se produit dans l'atmosphère, lorsque la surface de la terre est chauffée par le soleil, l'air chaud monte et l'air frais se déplace pour remplir la place libérée.

Un exemple de la convection forcée est celui du ventilateur qui est un dispositif qui produit artificiellement le mouvement de l'air. L'air dans ce cas se déplace en raison de la rotation du ventilateur.

La loi de la convection thermique est connue sous le nom la loi de Newton. Dans ce cas le flux d'énergie q , produit par l'échange de chaleur entre un fluide en mouvement de température T_f et une surface de température T_s , est donné par :

$$q = h(T_s - T_f),$$

où h est le coefficient d'échange. Pour plus d'informations sur ce mode de transfert d'énergie, on renvoie le lecteur à [7, 44, 47].

Rayonnement thermique

Le rayonnement est un phénomène de transfert de la chaleur qui n'exige pas de contact entre la source de chaleur et l'objet chauffé comme c'est le cas avec la conduction et la convection. La chaleur peut donc être transmise dans l'espace vide par rayonnement thermique. Il s'agit d'un rayonnement de type électromagnétique. Dans le processus de rayonnement, aucune masse n'est échangée et aucun milieu n'est requis. En effet, le transfert

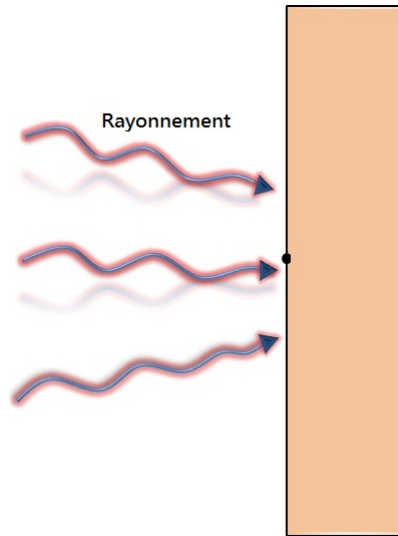


FIGURE 2.13 – Rayonnement thermique

d'énergie est réalisé par des ondes. Tous les matériaux émettent et absorbent de manière continue des ondes électromagnétiques ou des photons. Ils augmentent ou ils diminuent ainsi leurs niveaux d'énergie moléculaire. Ainsi, le rayonnement se transmet d'un milieu à un autre par le déplacement des ondes électromagnétiques ou des photons qui peuvent parcourir de longues distances sans la moindre interaction avec un milieu [43, 72]. L'exemple le plus simple de transfert de la chaleur par rayonnement est celui de la chaleur qui se dégage à partir du soleil (voir Fig 2.13). L'échange thermique par rayonnement se fait suivant un processus général qui dépend de trois éléments :

- L'émission qui se traduit par la conversion de l'énergie fournie à la source en énergie électromagnétique
- La transmission de cette énergie électromagnétique se fait par propagation des ondes avec éventuellement absorption par le milieu traversé.
- La réception qui se traduit par la conversion du rayonnement électromagnétique incident en énergie thermique (absorption).

Par conséquent, le rayonnement subit une variation quantitative et qualitative au cours de sa propagation. De plus, le rayonnement a une influence sur la matière traversée (chauffage, donc modification de la structure) qui influe rétroactivement sur le rayonnement (émission). Il s'en suit que le rayonnement apparaît souvent comme une fonction de la température non linéaire, non locale, décrite par des équations différentielles (intégrodifférentielles). En plus de la température, le transfert radiatif dépend de l'émissivité du milieu, de la longueur d'onde et de la direction du rayonnement. Cette multiplicité de dépendance de paramètres rend difficile la résolution générale du transfert du rayonnement

tant d'un point de vue théorique que numérique.

Le flux de rayonnement par unité de temps émis d'une surface est proportionnel à la quatrième puissance de la température absolue et peut être exprimé avec la loi Stefan-Boltzmann comme suit

$$q = e\sigma T^4$$

où T est la température absolue de la surface, e est le coefficient d'émissivité de la surface et σ est la constante de Stefan-Boltzmann. Lorsque $e = 1$, une paroi émettant un tel flux est dite corps noir ou radiateur parfait. Un corps noir est défini comme étant un corps hypothétique qui absorbe complètement toutes les longueurs d'ondes des rayonnements thermiques qui s'y rattachent. De tels corps ne reflètent pas la lumière et apparaissent donc noirs si leurs températures sont suffisamment faibles pour ne pas être auto-lumineuses. Tous les corps noirs chauffés à une température donnée émettent des rayonnements thermiques. Le spectre d'émission de tels corps a été décrit par Max Planck [72].

En pratique l'émissivité e est inférieure à 1. Elle varie avec la longueur d'onde, la direction d'émission et la température de surface. Ainsi, un corps est dit :

- gris si son émissivité est indépendante de la longueur d'onde,
- à émission diffuse si son émissivité est indépendante de la direction d'émission,
- gris et diffusant si son émissivité est indépendante de la longueur d'onde et de la direction d'émission.

Après avoir présenté un aperçu sur les matériaux composites et les modes de transfert de la chaleur, nous allons décrire, dans la section suivante, le modèle mathématique de transfert de la chaleur entre deux phases d'une pièce composite, que nous allons étudier dans cette thèse. Comme nous allons le voir ce modèle fait intervenir les trois modes de transfert présentés précédemment.

Modèle de transfert de la chaleur considéré

Nous nous sommes intéressés à un problème de transfert de la chaleur dans un milieu poreux périodique Ω , qui est un sous ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3) de frontière lipschitzienne.

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega,$$

Nous supposons que la conductivité thermique du milieu est K .

Le mode de transfert de la chaleur dans le domaine Ω est la conduction thermique qui est modélisée par une loi de Fourier. Grâce à cette loi, nous pouvons modéliser les échanges de la chaleur par conduction au sein d'un solide en utilisant le vecteur densité de

courant thermique J , qui représente la chaleur transmise à travers une surface par unité du temps. La loi de Fourier donne une expression du vecteur courant de densité thermique en fonction de la variation de la température u .

Le vecteur J est proportionnel au taux de variation de la température dans la direction de la conductivité thermique K qui est caractéristique du matériau et qui dépend de la température du matériau.

Donc J s'écrit sous la forme

$$J = -K\nabla u.$$

A partir du premier principe de la thermodynamique, nous obtenons l'équation mathématique qui modélise le transfert d'énergie par conduction thermique; c'est-à-dire que l'enthalpie du système est égale à l'échange de la chaleur avec l'extérieur plus les sources internes.

Grâce à la loi de Fourier, cette équation s'écrit :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial u}{\partial t} + p(x)f(u) \right) = \nabla \cdot (K\nabla u) + G,$$

où ρ est la masse volumique du matériau Ω , C_p sa capacité calorifique, G est la puissance correspondant aux sources internes et p est le coefficient de réaction. $\frac{\partial}{\partial t}$ est la dérivée par rapport au temps.

Nous prenons en compte le transfert de la chaleur par conduction en plus de la convection thermique, dûe à la différence de température entre les deux milieux. Ceci se traduit par un déplacement macroscopique de particules par le terme $p(x)f(u)$.

L'échange thermique entre les deux milieux Ω et l'extérieure produit par le rayonnement thermique est décrit par un terme linéaire. Ainsi la continuité de la température sur l'interface $\partial\Omega$ s'exprime comme suit :

$$u(t, \cdot)|_{\partial\Omega} = 0$$

$$u(0, x) = u_0(x).$$

Étude théorique du problème inverse en hydrologie

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème inverse de l'identification de paramètres régi par une équation parabolique fortement non linéaire décrivant l'écoulement des eaux souterraines dans les milieux poreux. L'objectif principal de ce problème inverse est la détermination des propriétés hydrauliques dans les milieux poreux à partir d'observations supplémentaires. Ainsi, afin d'étudier ce problème inverse, nous proposons tout d'abord sa reformulation en un problème de contrôle optimal. Ensuite, dans le but de montrer que ce problème est bien posé, nous prouvons l'existence de la solution du problème d'état en utilisant le théorème de point fixe de Schauder [77] ainsi que son unicité. Nous montrons enfin l'existence de la solution optimale du problème de contrôle en utilisant quelques outils d'optimisation.

3.1 Position et formulation du problème

Dans cette section, nous présentons la formulation mathématique décrivant le modèle d'évolution de la teneur en eau. Ensuite, nous donnons quelques hypothèses sur les données de ce modèle qui seront utiles pour la suite de ce travail. Nous terminons par proposer une reformulation en un problème de contrôle optimal équivalente au problème inverse sous certaines hypothèses de régularités sur la solution.

Nous commençons tout d'abord par rappeler les équations associées au modèle d'infiltration d'eau dans un milieu poreux. Ces équations décrivent le comportement de la teneur en eau et du charge hydraulique dans un domaine Ω . La teneur en eau θ s'écrit

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} = 0, \quad (z, t) \in (0, 1) \times (0, T).$$

Ainsi le modèle décrivant le problème d'infiltration d'eau dans le sol est donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} = 0, & (z, t) \in (0, 1) \times (0, T); \\ \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, & \forall t \in (0, T); \\ \theta(z, 0) = \theta_0(z), & \forall z \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans le but d'identifier les paramètres $D(\theta)$ et $K(\theta)$ dans le modèle (3.1), nous devons compléter le problème inverse par des données supplémentaires appelées observations. Dans notre cas, nous supposons que la teneur en eau est connue à l'instant finale, ce qui s'exprime par :

$$\theta(z, T) = g(z), \quad z \in (0, 1), \quad (3.2)$$

où θ_0 et g sont des fonctions données décrivant respectivement les données initiale et finale.

Avant de proposer une formulation en contrôle optimal de ce problème inverse, nous commençons par introduire quelques hypothèses sur les données et les paramètres du modèle.

H1 - $D(\theta), K(\theta) \in C(\mathbb{R})$, bornées et uniformément lipschitziennes.

H2 - La fonction $g \in L^2(0, 1)$.

H3 - La donnée initiale θ_0 est dans $L^\infty(0, 1)$.

Dans le but d'étudier le problème inverse (3.1) – (3.2), nous le reformulons en un problème de contrôle optimal donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } P^* \in \mathcal{U}_{ad} \text{ solution de} \\ J(P^*) = \inf_{P \in \mathcal{U}_{ad}} J(P) \\ \text{avec } J(P) = j(P, \theta_P) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_P(z, T) - g(z)|^2 dz, \\ \text{et } \theta_P \text{ la solution de :} \\ (PE) \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} = 0, & (z, t) \in (0, 1) \times (0, T); \\ \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, & \forall t \in (0, T); \\ \theta(\cdot, 0) = \theta_0, & \forall z \in (0, 1), \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

où $P = (D(\theta), K(\theta))$ est le paramètre à estimer dans (3.3) et \mathcal{U}_{ad} est l'ensemble des contrôles admissibles définis par :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{P = (D, K) \in C([a, b])^2 / 0 < d_0 \leq D(s) \leq d_1 \text{ et } 0 < \lambda_0 \leq K(s) \leq \lambda_1 \forall s \in [a, b] \text{ et}$$

$$|D(s_1) - D(s_2)| \leq L_0 |s_1 - s_2| \text{ et } |K(s_1) - K(s_2)| \leq L_1 |s_1 - s_2|, \forall s_1, s_2 \in [a, b]\},$$

où $a, b, d_0, d_1, \lambda_0, \lambda_1, L_0$ et L_1 sont des constantes positives, telles que $a < b$.

Nous avons alors le résultat d'équivalence suivant :

Lemme 3.1 *Supposons que le problème inverse (3.1)-(3.2) admet une solution (P_0, θ_0) , telle que $P_0 = (D_0, K_0) \in \mathcal{U}_{ad}$, alors le problème inverse (3.1)-(3.2) est équivalent au problème d'optimisation (3.3).*

Démonstration

Il est facile de voir que si (P_0, θ_0) est solution du problème inverse (3.1)-(3.2), alors θ_0 est solution de (3.1) associée à $P_0 = (D_0, K_0)$ et

$$J(P_0) = 0 \leq J(P), \quad \forall P \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Donc (P_0, θ_0) est solution de (3.3).

Inversement, soit (P^*, θ^*) une solution du problème (3.3) avec $P^* = (D^*, K^*)$, alors θ^* est solution de (3.1) et

$$J(P^*) \leq J(P), \quad \forall P \in \mathcal{U}_{ad}.$$

En particulier, pour $P = P_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ on aura

$$0 \leq J(P^*) \leq J(P_0) = 0.$$

Donc $J(P^*) = 0$, et par suite (P^*, θ^*) est une solution du problème inverse (3.1)-(3.2).

Remarque 3.1 *Dans le cas échéant où on n'a pas l'équivalence entre le problème inverse (3.1)-(3.2) et le problème de contrôle optimal (3.3), cette dernière présente d'un point de vue pratique, un moyen précis pour résoudre le problème inverse (3.1) - (3.2).*

Dans la suite, nous aurons besoin des notations suivantes :

$$\Omega = (0, 1) \text{ et } Q_T = \Omega \times (0, T).$$

Nous aurons également besoin de la formulation faible du problème (3.1) énoncée dans la définition suivante.

Définition 3.1 *On dit que θ est la solution faible de (3.1), si elle satisfait*

$$\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \quad \text{tel que}$$

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial t}, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_{Q_T} D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt + \int_{Q_T} \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} v dz dt = 0, \quad \forall v \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)). \quad (3.4)$$

3.2 Existence d'une solution optimale

Afin de montrer que le problème de contrôle optimal est bien posé, nous allons montrer que le problème variationnel d'état (3.4) admet une solution en utilisant le théorème de point fixe de Schauder [77]. Pour cela, nous établissons quelques estimations a priori sur la solution. Ensuite nous prouvons l'unicité de cette solution. Enfin, en utilisant des outils d'optimisation [28] nous montrons l'existence d'une solution optimale du problème de contrôle.

Estimations a priori

Nous avons les résultats d'estimations de la solution données dans les lemmes suivants.

Lemme 3.2 *On suppose que les hypothèses (H1) – (H3) sont satisfaites, alors il existe une constante C , indépendante de K et D dans \mathcal{U}_{ad} , telle que la solution faible du problème (3.4) satisfait les estimations à priori suivantes*

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_1, \quad (3.5)$$

$$\|\theta\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C_2. \quad (3.6)$$

Démonstration

En prenant $v = \theta$ dans la formulation variationnelle (3.4), en intégrant par rapport à $t \in (0, \tau)$ avec $\tau \in (0, T]$ et en utilisant le fait que $d_0 \leq D(\theta) \leq d_1$, $\lambda_0 \leq K(\theta) \leq \lambda_1$, nous aurons

$$\frac{1}{2} \|\theta(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_0 \int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 dz dt \leq \lambda_1 \int_0^\tau \int_\Omega \left|\frac{\partial \theta}{\partial z}\right| dz dt + \frac{1}{2} \|\theta(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Young, on obtient

$$\frac{1}{2} \|\theta(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_0 \left\| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{\lambda_1 \epsilon}{2} \left\| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{\lambda_1 \text{mes}(\Omega)}{2\epsilon} + \frac{1}{2} \|\theta(0)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

par suite

$$\frac{1}{2} \|\theta\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 + (d_0 - \frac{\lambda_1 \epsilon}{2}) \left\| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{\lambda_1 \text{mes}(\Omega)}{2\epsilon} + \frac{1}{2} \|\theta(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ainsi en choisissant $\epsilon < \frac{2d_0}{\lambda_1}$, nous aurons

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_1,$$

et

$$\|\theta\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq C_2,$$

avec

$$C_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 \text{mes}(\Omega)}{\epsilon} + \|\theta(0)\|_{L^2(\Omega)}^2},$$

et

$$C_2 = \sqrt{\frac{1}{2d_0 - \lambda_1 \epsilon}} C_1.$$

Dans le Lemme suivant, nous montrons que $\partial_t \theta$ est bornée.

Lemme 3.3 *Supposons que les hypothèses (H1) – (H3) sont satisfaites, alors il existe une constante $C_3 > 0$, indépendante de K et D dans \mathcal{U}_{ad} , telle que la solution faible du problème (3.4) satisfait l'estimation à priori suivante*

$$\|\partial_t \theta\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \leq C_3. \quad (3.7)$$

Démonstration

En utilisant la formulation faible (3.4) pour tout $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, on aura

$$|\langle \partial_t \theta, v \rangle| \leq \int_{\Omega} |D(\theta)| \left| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| dz + \int_{\Omega} |K(\theta)| \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| dz.$$

Or, puisque $d_0 \leq D(\theta) \leq d_1$ et $\lambda_0 \leq K(\theta) \leq \lambda_1$, alors

$$|\langle \partial_t \theta, v \rangle| \leq d_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| dz + \lambda_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| dz.$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Poincaré, on obtient

$$|\langle \partial_t \theta, v \rangle| \leq d_1 \|\theta\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \lambda_1 \|v\|_{H_0^1(\Omega)} (\text{mes}(\Omega))^{1/2},$$

et par suite

$$\int_0^T \sup_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{|\langle \partial_t \theta, v \rangle|}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}} dt \leq \int_0^T (d_1 \|\theta\|_{H_0^1(\Omega)} + \lambda_1 (\text{mes}(\Omega))^{1/2}) dt.$$

Ainsi en utilisant l'estimation (3.6), on obtient

$$\|\partial_t \theta\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C_3.$$

Nous aurons également besoin d'une estimation de la solution dans $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$.

Lemme 3.4 *On suppose que les hypothèses (H1) – (H3) sont satisfaites, alors il existe une constante C , indépendante de K et D dans \mathcal{U}_{ad} , telle que la solution faible du problème (3.4) satisfait l'estimation a priori suivante*

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq C. \quad (3.8)$$

Démonstration

En prenant $v = (\theta - M)^+$ dans la formulation variationnelle (3.4), avec $M = \|\theta\|_{L^\infty(0,1)}$, en intégrant par rapport à $t \in (0, \tau)$ avec $\tau \in (0, T]$ et en utilisant le fait que $d_0 \leq D(\theta) \leq d_1$ et que $|K'(\theta)| \leq L$, nous aurons

$$\frac{1d}{2dt} \|(\theta - M)^+(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_0 \int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial(\theta - M)^+}{\partial z} \right)^2 dz dt \leq L \int_0^\tau \int_\Omega |(\theta - M)^+| \left| \frac{\partial(\theta - M)^+}{\partial z} \right| dz dt.$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Young, on obtient

$$\frac{1d}{2dt} \|(\theta - M)^+(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (d_0 - \frac{\epsilon}{2}) \left\| \frac{\partial(\theta - M)^+}{\partial z} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \frac{L^2}{2\epsilon} \|(\theta - M)^+\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Ainsi en choisissant ϵ tel que $\epsilon < d_0$ et en utilisant l'inégalité de Gronwall, nous aurons

$$\|(\theta - M)^+\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq 0.$$

Par suite

$$\theta(t, x) \leq M, \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times \Omega.$$

Ensuite, en prenant $v = -(\theta)^-$ dans la formulation faible (3.4) et en utilisant la même démarche que précédemment, on trouve que

$$0 \leq \theta(t, x), \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times \Omega.$$

Ce qui nous permet de conclure.

Dans la suite en se basant sur ces estimations à priori nous allons établir un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème d'état.

Existence et unicité du problème d'état

Dans cette section, nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel d'état (3.4). Ainsi dans le but de remédier aux difficultés qui résident en fait dans la double non-linéarité forte du modèle, nous optons pour le théorème de point fixe de Schauder [77], qui est un outil puissant, plus général et souvent plus facile à utiliser.

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (H1) – (H3), le problème (3.4) admet une solution unique dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.*

Démonstration

Avant de commencer à montrer l'existence d'une solution du problème (3.4), notons d'abord que pour tout $\bar{\theta} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ fixé, le problème variationnel

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial t}, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_{Q_T} D(\bar{\theta}) \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \int_{Q_T} \frac{\partial K(\bar{\theta})}{\partial z} v = 0, \quad \forall v \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)), \quad (3.9)$$

avec $\frac{\partial \theta}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, admet une solution unique dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, ceci grâce à [10].

Définissons maintenant l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} Z : V &\longrightarrow V \\ \bar{\theta} &\longmapsto \theta, \end{aligned}$$

où θ est la solution du problème (3.9) et

$$V = \left\{ \theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) / \|\theta\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C_1, \quad \|\theta\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C_2, \quad \text{et} \quad \|\partial_t \theta\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C_3 \right\}.$$

Nous devons alors prouver que Z admet un unique point fixe θ , qui est la solution de (3.4). Pour ce faire, il suffit de montrer que Z est continu et compact. Montrons tout d'abord que l'opérateur Z est continu.

Considérons ainsi la suite $(\bar{\theta}_n)_n$ dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ telle que

$$\bar{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \bar{\theta} \quad \text{dans} \quad L^2(0, T, L^2(\Omega)),$$

et montrons que

$$\theta_n = Z(\bar{\theta}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta = Z(\bar{\theta}) \quad \text{dans} \quad L^2(0, T, L^2(\Omega)).$$

Ceci revient en fait à montrer les convergences suivantes, pour tout $v \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$,

$$\int_0^T \langle \partial_t \theta_n, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \partial_t \theta, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt, \quad (3.10)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} D(\bar{\theta}_n) \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} D(\bar{\theta}) \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt, \quad (3.11)$$

et

$$\int_0^T \int_{\Omega} K(\bar{\theta}_n) \frac{\partial v}{\partial z} dz dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} K(\bar{\theta}) \frac{\partial v}{\partial z} dz dt. \quad (3.12)$$

En effet, en prenant $v = \theta_n$ dans la formulation faible (3.9) associée à θ_n et en utilisant les mêmes techniques que dans les démonstrations des deux lemmes 3.2 et lemme 3.3, nous obtenons

$$\|\theta_n\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C_1, \quad \|\theta_n\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C_2 \quad \text{et} \quad \|\partial_t \theta_n\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C_3.$$

Ce qui entraîne que

$$\theta_n \rightharpoonup \theta \text{ dans } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)), \quad (3.13)$$

et

$$\partial_t \theta_n \rightharpoonup w \text{ dans } L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) \quad \text{et} \quad w = \partial_t \theta. \quad (3.14)$$

Ainsi en utilisant le théorème d'Aubin-Lions [10], nous aurons

$$\theta_n \rightarrow \theta \text{ dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)). \quad (3.15)$$

Dans un premier lieu, il est facile de voir que la convergence (3.10) découle de la convergence (3.14).

Montrons maintenant la convergence (3.11), pour cela notons par

$$I = \int_0^T \int_{\Omega} D(\bar{\theta}_n) \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} D(\bar{\theta}) \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt,$$

que nous décomposons sous la forme $I = I_1 + I_2$, avec

$$I_1 = \int_0^T \int_{\Omega} D(\bar{\theta}) \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} D(\bar{\theta}) \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt,$$

et

$$I_2 = \int_0^T \int_{\Omega} D(\bar{\theta}_n) \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} D(\bar{\theta}_n) \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt.$$

En utilisant la convergence (3.13) et le fait que D est bornée, on aura la convergence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = 0.$$

Il reste alors à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = 0.$$

Pour cela, on a

$$|I_2| \leq \int_{Q_T} |D(\bar{\theta}_n) - D(\bar{\theta})| |\partial_z \theta_n| |\partial_z v| dz dt,$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|I_2|^2 \leq \int_{Q_T} |D(\bar{\theta}_n) - D(\bar{\theta})|^2 |\partial_z v|^2 dz dt \int_{\Omega} |\partial_z \theta_n|^2 dz dt.$$

Or, puisqu'on a

$$(D(\bar{\theta}_n) - D(\bar{\theta}))^2 (\partial_z v)^2 \rightarrow 0 \text{ p.p. dans } Q_T \quad \text{et} \quad \forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

et

$$(D(\bar{\theta}_n) - D(\bar{\theta}))^2 (\partial_z v)^2 \leq 4d_1^2 (\partial_z v)^2 \in L^1(Q_T),$$

en appliquant alors le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et en utilisant le fait que θ_n est borné dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, nous aurons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = 0.$$

Ce qui prouve la convergence (3.11).

Montrons maintenant la convergence (3.12), pour cela on a :

$$\left| \int_{Q_T} K(\bar{\theta}_n) \partial_z v dz dt - \int_{Q_T} K(\bar{\theta}) \partial_z v dz dt \right| \leq \int_{Q_T} |K(\bar{\theta}_n) - K(\bar{\theta})| |\partial_z v| dz dt.$$

En utilisant le fait que K est lipschitzienne de constante L_0 , on aura

$$\left| \int_{Q_T} K(\bar{\theta}_n) \partial_z v dz dt - \int_{Q_T} K(\bar{\theta}) \partial_z v dz dt \right| \leq L_0 \int_{Q_T} |\bar{\theta}_n - \bar{\theta}| |\partial_z v| dz dt.$$

Ainsi en utilisant l'inégalité de Hölder, nous aurons

$$\left| \int_{Q_T} K(\bar{\theta}_n) \partial_z v - \int_{Q_T} K(\bar{\theta}) \partial_z v dz dt \right| \leq L_0 \|\bar{\theta}_n - \bar{\theta}\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))} \|v\|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))}.$$

Par suite la convergence (3.12) découle de la convergence (3.15). Ce qui montre que Z est continu.

Montrons maintenant que Z est compact, soit alors $(\bar{\theta}_n)_n$ une suite bornée dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et soit $\theta_n = Z(\bar{\theta}_n)$ la solution unique de (3.9) associée à $\bar{\theta}_n$, qui vérifie

$$\|\partial_z \theta_n\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C_2, \quad (3.16)$$

et

$$\|\partial_t \theta_n\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \leq C_3. \quad (3.17)$$

Grâce à l'injection compacte de l'espace $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et l'injection continue de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, en utilisant le lemme d'Aubin-Lions [10], on peut extraire une sous-suite notée encore θ_n qui converge fortement dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Ce qui signifie que Z est compact.

Puisque nous avons que Z est continu et compact dans V , en utilisant le théorème de point fixe de Schauder [77], nous obtenons l'existence de la solution dans V .

Nous prouvons maintenant l'unicité de la solution, pour cela nous supposons que θ_1 et θ_2 sont deux solutions distinctes du problème (3.4). Ainsi on a $\theta_1 < \theta_2$ ou bien $\theta_2 < \theta_1$, nous supposons sans faire aucune restriction à notre preuve que $\theta_1 < \theta_2$. En soustrayant les formulations faibles associées aux solutions θ_1 et θ_2 , on obtient que $w = \theta_1 - \theta_2$ est solution du problème

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + (D(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - D(\theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}) + \left(\frac{\partial K(\theta_1)}{\partial z} - \frac{\partial K(\theta_2)}{\partial z}, v \right) = 0, \\ w(z, 0) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (3.18)$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Définissons maintenant les fonctions suivantes

$$\beta_1(\xi) = \int_0^\xi D(s) ds, \quad \beta_2(\xi) = \int_0^\xi K(s) ds.$$

Ces fonctions β_1 et β_2 représentent respectivement les primitives de D et K qui sont nulles en 0, qui sont lipschitziennes et qui satisfont, grâce au théorème de Stampacchia [80] que $\beta_1(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et que $\beta_2(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, pour tout θ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. De plus, pour tout θ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, nous avons les estimations suivantes

$$\begin{cases} \|\beta_1(\theta)\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C, \\ \|\beta_2(\theta)\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C, \end{cases}$$

d'autre part en utilisant la formule de Green, on aura

$$\int_{\Omega} D(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz = \int_{\Omega} \frac{\partial \beta_1(\xi)}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz = - \int_{\Omega} \beta_1(\xi) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dz,$$

ainsi en définissant l'isomorphisme suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : H_0^1(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u &\rightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

nous aurons

$$\left\langle -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz = (u, v)_{H_0^1(\Omega)},$$

ensuite, en rappelant que le produit scalaire dans $H^{-1}(\Omega)$ peut s'écrire

$$(u, v)_{H^{-1}(\Omega)} := (\mathcal{I}^{-1}u, \mathcal{I}^{-1}v)_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^{-1}(\Omega),$$

prenant $v = \mathcal{I}^{-1}w$ dans la formulation faible (3.18), on obtient

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, \mathcal{I}^{-1}w \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} (\beta_1(\theta_1) - \beta_1(\theta_2))w dz - \int_{\Omega} (K_1(\theta_1) - K_2(\theta_2)) \frac{\partial v}{\partial z} dz = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w, w)_{H^{-1}(\Omega)} + \int_{\Omega} (\beta_1(\theta_1) - \beta_1(\theta_2))w dz = \int_{\Omega} (K_1(\theta_1) - K_2(\theta_2)) \frac{\partial v}{\partial z} dz.$$

En utilisant le fait que K est uniformément lipschitzienne de constante L_1 et le fait que

$$d_1(\theta_1 - \theta_2) \leq \beta_1(\theta_1) - \beta_1(\theta_2),$$

nous aurons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w, w)_{H^{-1}(\Omega)} + d_1 \int_{\Omega} |\theta_1 - \theta_2|^2 dz \leq L_1 \int_{\Omega} |\theta_1 - \theta_2| \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| dz,$$

ainsi d'après l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w, w)_{H^{-1}(\Omega)} + d_1 \int_{\Omega} |\theta_1 - \theta_2|^2 dz \leq L_1 \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

l'inégalité de Young nous permet d'avoir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w, w)_{H^{-1}(\Omega)} + d_0 \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{d_0}{2} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{L_1^2}{2d_0} \|\mathcal{I}^{-1}w\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w, w)_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{d_0}{2} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{L_1^2}{2d_0} ((w, w))_{H^{-1}(\Omega)},$$

en utilisant le lemme de Gronwall, nous obtenons

$$((w, w))_{H^{-1}(\Omega)} = 0,$$

par suite

$$w = 0, \quad p.p. \text{ dans } \Omega,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que θ_1 et θ_2 sont distincts. D'où l'unicité de la solution.

Existence d'une solution optimale

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'existence d'une solution du problème de contrôle optimal (3.3). Ce résultat est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses (H1) – (H3), le problème de contrôle optimal (3.3) admet au moins une solution dans \mathcal{U}_{ad} .*

Démonstration

Il suffit de prouver que \mathcal{U}_{ad} est compact pour la topologie $C([a, b])$ et que la fonctionnelle J est semi-continue inférieurement pour une topologie adéquate. En effet, soit $(P_n)_n = ((D_n, K_n))_n$ une suite de \mathcal{U}_{ad} , d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà (voir [10]), on peut en extraire une sous-suite notée encore $(P_n)_n$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = P^* = (D^*, K^*) \quad \text{uniformément.} \quad (3.19)$$

Il est facile de voir que \mathcal{U}_{ad} est fermé pour la topologie de $C([a, b])$, et donc $P^* \in \mathcal{U}_{ad}$.

Nous allons montrer maintenant la semi-continuité inférieure de J , pour cela nous commençons tout d'abord par montrer la continuité du problème d'état. Ce qui revient à montrer que si $(\theta_n)_n$ est une suite telle que, pour tout n , θ_n est la solution du problème (5.9) associée à P_n , il existe une sous-suite notée encore $(\theta_n)_n$ qui converge vers θ^* , la solution associée à P^* , pour une topologie adéquate. En effet, en utilisant les mêmes techniques que dans le lemme (3.2) et le lemme (3.3), il existe une constante $C > 0$

indépendante de n , telle que

$$\|\theta_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\theta_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C, \quad (3.20)$$

$$\|\partial_t \theta_n\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C, \quad (3.21)$$

et

$$\|\theta_n\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq C. \quad (3.22)$$

Nous aurons ainsi :

$$\theta_n \rightharpoonup \xi \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \text{ quand } n \rightarrow \infty, \quad (3.23)$$

$$\partial_t \theta_n \rightharpoonup \partial_t \xi \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

$$\theta_n \rightharpoonup \xi \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)), \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.25)$$

D'après les convergences (3.23) et (3.24), en utilisant le lemme 1.4 d'Aubin-Lions, on aura

$$\theta_n \longrightarrow \xi \text{ fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

En utilisant aussi la convergence (3.24), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \partial_t \theta_n, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = \int_0^T \langle \partial_t \xi, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt.$$

Montrons maintenant la convergence suivante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^T \int_\Omega D_n(\theta_n) \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt - \int_0^T \int_\Omega D^*(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt \right) = 0,$$

pour cela, on utilise la décomposition $I = I_1 + I_2 + I_3$, avec

$$I_1 = \int_0^T \int_\Omega D_n(\theta_n) \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt - \int_0^T \int_\Omega D_n(\xi) \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt,$$

$$I_2 = \int_0^T \int_\Omega D_n(\xi) \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt - \int_0^T \int_\Omega D^*(\xi) \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt$$

et

$$I_3 = \int_0^T \int_\Omega D^*(\xi) \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt - \int_0^T \int_\Omega D^*(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt.$$

Montrons ainsi que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_i = 0$, pour $i = 1, 2, 3$. On a

$$|I_1| \leq \int_0^T \int_{\Omega} |D_n(\theta_n) - D_n(\xi)| |\partial_z v| |\partial_z \theta_n| dz dt,$$

en utilisant le fait que D_n est uniformément lipschitzienne de constante L et l'inégalité de Hölder, nous aurons

$$|I_1|^2 \leq L \|\partial_z \theta_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \int_0^T \int_{\Omega} ((\theta_n - \xi) \partial_z v)^2 dz dt.$$

La convergence (3.26) entraîne qu'on peut extraire de la suite $(\theta_n)_n$ une sous-suite notée encore $(\theta_n)_n$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_n - \xi)^2 (\partial_z v)^2 = 0, \text{ p.p. dans } \Omega \quad \forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Or, puisque θ_n est bornée dans $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$, en utilisant le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki (voir [10]), nous obtenons

$$(\theta_n - \xi)^2 (\partial_z v)^2 \leq C (\partial_z v)^2 \in L^1(0, T, \mathbb{R}).$$

Par suite en appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et en utilisant le fait que θ_n est borné dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, nous aurons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = 0.$$

D'autre part, on a

$$|I_2| \leq \int_{Q_T} |D_n(\xi) - D^*(\xi)| |\partial_z \theta_n| |\partial_z v| dz dt,$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, nous aurons

$$|I_2| \leq \|D_n(\xi) - D^*(\xi)\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \|\partial_z v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|\partial_z \theta_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

En utilisant la convergence uniforme de D_n vers D^* et le fait que θ_n est bornée dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, nous aurons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = 0.$$

Ensuite, en utilisant la convergence (3.23) et le fait que D^* est borné, nous aurons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_3 = 0.$$

Posons maintenant

$$I' = \int_0^T \int_{\Omega} K_n(\theta_n) \partial_z v \, dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} K^*(\xi) \partial_z v \, dz dt,$$

et montrons la convergence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I' = 0.$$

Pour cela, nous décomposons $I' = I'_1 + I'_2$ avec

$$I'_1 = \int_0^T \int_{\Omega} K_n(\theta_n) \partial_z v \, dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} K_n(\xi) \partial_z v \, dz dt$$

et

$$I'_2 = \int_0^T \int_{\Omega} K_n(\xi) \partial_z v \, dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} K^*(\xi) \partial_z v \, dz dt.$$

D'une part, on a

$$|I'_1| = \left| \int_0^T \int_{\Omega} K_n(\theta_n) \partial_z v \, dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} K_n(\xi) \partial_z v \, dz dt \right| \leq \int_0^T \int_{\Omega} |K_n(\theta_n) - K_n(\xi)| |\partial_z v| \, dz dt,$$

et puisque K_n est uniformément lipschitzienne de constante L_1 , nous aurons

$$|I'_1| \leq L_1 \int_0^T \int_{\Omega} |\theta_n - \xi| |\partial_z v| \, dz dt.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$|I'_1| \leq L_1 \|\theta_n - \xi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|\partial_z v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

ainsi la convergence (3.26) entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I'_1 = 0.$$

D'autre part en appliquant l'inégalité de Hölder à I'_2 , nous aurons

$$|I'_2| = \left| \int_0^T \int_{\Omega} K_n(\xi) \partial_z v \, dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} K^*(\xi) \partial_z v \, dz dt \right| \leq \|K_n(\xi) - K^*(\xi)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|\partial_z v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Donc la convergence $\lim_{n \rightarrow \infty} I'_2 = 0$ découle de la convergence uniforme de K_n vers K^* . Par conséquent, nous avons que θ_n la solution du problème variationnel (3.9) associé à P_n converge faiblement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ vers la solution θ du problème variationnel (3.9) associé à P^* , quand n tend vers ∞ .

Maintenant, à partir des convergences (3.23), (3.24), en utilisant le lemme 1.4 d'Aubin-Lions, nous aurons

$$\theta_n \rightharpoonup_{n \rightarrow \infty} \theta \text{ faiblement dans } C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

En particulier on a

$$\theta_n(\cdot, T) \rightharpoonup_{n \rightarrow \infty} \theta(\cdot, T) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega).$$

Ainsi grâce à la semi-continuité inférieure de la norme dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\inf_{P \in \mathcal{U}_{ad}} J(P) = \liminf_{n \rightarrow \infty} J(P) \geq J(P^*).$$

Par conséquent, le problème (3.3) admet au moins une solution.

Étude de l'approximation numérique du problème inverse en hydrologie

Dans ce chapitre, nous proposons quelques méthodes d'approximation numérique pour la résolution du problème inverse d'infiltration de l'eau dans le sol en utilisant une formulation à base de la pression, équivalente à celle étudiée dans le chapitre précédent. Dans ce cadre, nous allons considérer deux problèmes inverses associés à cette formulation en utilisant deux types d'observations. Ainsi, afin de valider l'approche numérique proposée dans cette thèse, nous considérons dans un premier lieu un modèle simple basé sur des mesures de la pression en quelques points de l'espace, avant de nous attaquer au modèle étudié dans le chapitre précédent utilisant des mesures de la pression à l'instant finale.

Nous proposons ainsi deux techniques d'approximation de ces problèmes basées sur leur reformulation en des problèmes de contrôle optimal et une semi-discrétisation temporelle du problème d'état. Plus précisément, nous optons pour une technique d'approximation du premier problème, qui consiste à approcher le problème d'état non linéaire discret par la méthode des différences finies combinée à la méthode de Picard. Ensuite, nous utilisons un algorithme évolutionnaire pour la résolution du problème d'optimisation discret associé. Tandis que la technique d'approximation appliquée au deuxième problème, repose sur une discrétisation du problème d'état non linéaire par un schéma en éléments finis combiné à la méthode de Newton. Nous optons ensuite pour un algorithme de type gradient, lorsqu'il s'agit de résoudre le problème d'optimisation discret associé. Finalement, nous donnons quelques résultats numériques montrant l'efficacité des deux approches proposées.

4.1 Approximation numérique du problème inverse avec données spatiales

Dans cette section, nous nous intéressons dans un premier lieu à la résolution numérique d'un modèle simple issue du problème inverse qui consiste à déterminer la pression

ψ , la conductivité hydraulique $K(\psi)$ et la capacité capillaire $C(\psi)$ solution de :

$$(P) \begin{cases} C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (k(\psi) (\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1)) = f(z, t), & (z, t) \in Q_T, \\ \psi(0, t) = \psi_{min}, & t \in (0, T), \\ \psi(1, t) = \psi_{max}, & t \in (0, T), \\ \psi(z, 0) = \psi_0(z), & z \in]0, 1[, \end{cases} \quad (4.1)$$

à partir des observations supplémentaires sur la pression mesurée en N_{obs} points du sol :

$$\psi(t, z_i) = \psi_{obs}(t, z_i) \quad \forall t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N_{obs} \quad (4.2)$$

où ψ_{min} , ψ_{max} , et ψ_0 sont des fonctions données.

Afin de résoudre numériquement le problème inverse (4.1)-(4.2), nous proposons tout d'abord sa reformulation en un problème de contrôle optimal. Ensuite, nous procédons par une discrétisation temporelle du problème d'état associé. Le problème discret non linéaire ainsi obtenu est approché par la méthode des différences finies et résolu par la méthode de Picard. Puis, nous optons pour un algorithme évolutionnaire pour résoudre le problème d'optimisation discret non linéaire. Cela nous permet d'identifier facilement tous les paramètres inconnus simultanément et d'éviter la résolution du problème d'état, le problème d'état adjoint et le calcul du gradient [14]. Enfin, nous donnons quelques résultats numériques montrant l'efficacité de l'approche proposée.

Afin de reformuler le problème (4.1) - (4.2) en un problème de contrôle optimal, nous considérons la fonctionnelle coût J définie par :

$$J(\psi(P)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{obs}} \int_0^T |\psi(z_i, t; P) - \delta(z, z_i) \psi_{obs}(t, z)|^2 dt, \quad (4.3)$$

où $\psi(z, t; P)$ est la solution de (4.1) associée à $P = (C, K)$ et $\delta(z, z_i)$ est la masse de Dirac au point z_i . Ainsi le problème de contrôle optimal considéré, consiste à trouver $P^* = (C^*, K^*)$ solution de :

$$J(\psi(P^*)) = \inf_{P \in U_{ad}} J(\psi(P))$$

où U_{ad} est l'ensemble des paramètres admissibles, défini comme suit :

$$U_{ad} = \{P = (C, K) \text{ fonction continue sur } [a, b], \text{ telle que} \\ c_0 \leq C \leq c_1, \quad k_0 \leq K \leq k_1 \text{ dans } [a, b]\},$$

où c_0, c_1, k_0, k_1 sont des réels strictement positifs.

Nous notons que, pour le choix de U_{ad} , nous supposons que $C(\psi)$ et $K(\psi)$ sont des fonctions continues et bornées. Cette hypothèse n'est pas restrictive. En effet, la capacité capillaire et la conductivité hydraulique sont continues et bornées par rapport à ψ , et indépendantes de la caractéristique du sol [9].

Par conséquent, notre problème de contrôle optimal est résumé comme suit :

$$(PO) \begin{cases} \inf_{P \in U_{ad}} J(\psi(P); P(\psi)) \\ \text{où } \psi(P) \text{ est solution de (4.1).} \end{cases} \quad (4.4)$$

Approximation du problème d'état

Nous proposons tout d'abord une discrétisation temporelle et spatiale de l'équation (4.1). La discrétisation temporelle est effectuée en utilisant un schéma d'Euler implicite, tandis que la discrétisation d'espace est effectuée en utilisant un schéma progressif en différence finie. Notons par i (respectivement j) l'indice de la discrétisation en espace (respectivement l'indice de la discrétisation temporelle), h (respectivement Δt) le pas de la discrétisation en espace (respectivement le pas de la discrétisation temporelle).

Considérons les répartitions uniformes suivantes :

$$z_i = ih, \text{ pour } i = 0, \dots, N + 1 \text{ et } t_j = j\Delta t, \text{ pour } j = 0, \dots, M.$$

Nous suggérons alors une approximation du problème (4.1) par le problème discret (Pd) suivant :

$$(Pd) \begin{cases} C_i^{j+1} \frac{\psi_i^{j+1} - \psi_i^j}{\Delta t} - \frac{1}{h} (k_{i+1}^{j+1} (\frac{\psi_{i+1}^{j+1} - \psi_i^{j+1}}{h} - 1) - k_i^{j+1} (\frac{\psi_i^{j+1} - \psi_{i-1}^{j+1}}{h} - 1)) = f_i^{j+1}, \\ \psi_0^{j+1} = \psi_{min}, \\ \psi_{N+1}^{j+1} = \psi_{max}, \\ \psi_i^0 = \psi_0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \text{ et } j = 1, \dots, M, \end{cases} \quad (4.5)$$

où C_i^j, K_i^j, ψ_i^j et f_i^j sont respectivement les fonctions approchées de $C(\psi)$, $K(\psi)$, ψ et f au point (z_i, t_j) . Par conséquent, la forme matricielle de ce problème s'écrit

$$A(\psi^{j+1})\psi^{j+1} = B(\psi^j),$$

où ψ^{j+1} est le vecteur de pression de l'eau à l'instant $j + 1$, $A(\psi^{j+1})$ est la matrice

symétrique tridiagonale dont les coefficients sont donnés par :

$$A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -K_{i+1}^{j+1},$$

$$A_{i,i} = K_i^{j+1} + K_{i+1}^{j+1} + \frac{h^2}{\Delta t} C_i^{j+1},$$

et $B(\psi^{j+1})$ est le vecteur second membre dont les composants sont des fonctions de la conductivité hydraulique et de la capacité capillaire :

$$B(i) = \frac{h^2}{\Delta t} C_i^{j+1} \psi_i^j + (K_i^{j+1} - K_{i+1}^{j+1})h + h^2 f_i^{j+1}.$$

Dans la suite, nous proposons une méthode de résolution numérique de (4.5) basée sur l'itération successive de Picard ([2]).

L'itération successive de Picard est une méthode de linéarisation largement utilisée par plusieurs auteurs (voir par exemple [2]). C'est un processus qui génère une suite de fonctions, qui converge asymptotiquement vers la solution. Cette méthode consiste à construire, à chaque pas de temps $j + 1$, une suite $(\psi^{j+1,m})_m$, à partir d'un itéré initial $\psi^{j+1,0}$ de la manière suivante

$$A(\psi^{j+1,m})\psi^{j+1,m+1} = B(\psi^{j,m}).$$

Ainsi, en introduisant le vecteur $\Delta\psi^{j+1,m+1} = \psi^{j+1,m+1} - \psi^{j+1,m}$, le système précédent s'écrit :

$$A(\psi^{j+1,m})\Delta\psi^{j+1,m+1} = B(\psi^{j,m}) - A(\psi^{j+1,m})\psi^{j+1,m}. \quad (4.6)$$

Par suite, l'algorithme de Picard considéré se résume comme suit :

Algorithm 1 Méthode de Picard

- (1) Choisir une précision désirée $\varepsilon > 0$,
 - (2) Choisir $\psi^{j+1,0} = \psi^j$ où ψ^j est la pression à l'instant t_j .
 - (3) Ensuite : pour $m = 0, 1, 2, \dots, N$, faire
 - Construire le système (4.6).
 - Résoudre le système (4.6) pour $\Delta\psi^{j+1,m+1}$.
 - Calculer la nouvelle solution $\psi^{j+1,m+1} = \Delta\psi^{j+1,m+1} + \psi^{j+1,m}$.
 - Si $|\Delta\psi^{j+1,m}| < \varepsilon$, alors $\psi^{j+1,m+1}$ est la solution approchée au pas de temps $j + 1$, sinon $m = m + 1$ et allez à (3).
-

Approximation du problème d'optimisation

Pour la discrétisation du problème de contrôle optimal, nous considérons la famille de contrôles admissibles discrets

$$U_{ad}^h = \{(C_h, K_h) \in C([0, 1])^2 / C_h|_{[z_m, z_{m+1}]} \text{ and } K_h|_{[z_m, z_{m+1}]} \in \mathbb{P}_1([z_m, z_{m+1}]), \forall m = 1, \dots, N\} \cap U_{ad},$$

et nous approchons la fonctionnelle coût par

$$J_h(\psi_h(P_h)) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N_{obs}} \sum_{j=0}^M \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\psi_m^h(t) - \psi_{obs,m}(t))^2 dt,$$

où $\psi_m^h(t)$ est la solution de (4.5) en tout temps au point z_m . Par suite, notre problème de contrôle optimal discret s'écrit

$$(PO) \begin{cases} \inf_{P_h \in U_{ad}^h} J_h(\psi_h(P_h); P_h) \\ \text{où } \psi_h(P_h) \text{ est la solution (4.5), avec } \psi_h = (\psi_i^j)_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Pour résoudre ce problème optimal discret (4.7), nous allons proposer une méthode d'approximation numérique basée sur une procédure d'algorithme génétique [59, 36, 23].

Algorithmes Génétiques

Le but d'un algorithme évolutionnaire est d'optimiser une fonction f dite fonction objectif sur un espace de recherche. Pour cela, une population d'individus, typiquement un P – *uplet* de points de l'espace de recherche, évolue selon un darwinisme artificiel (reproduction, mutation, sélection naturelle) basé sur la fitness F de chaque individu. La fitness est directement liée à la valeur de la fonction objectif f de cet individu (exemple, la fonction f elle-même). Des opérateurs appliqués à la population permettent de créer de nouveaux individus (croisement et mutation) et de sélectionner les individus de la population qui vont survivre (sélection et remplacement). Les opérateurs appliqués à un individu ne sont pas en général définis sur le même espace que celui sur lequel est définie la fonction fitness, appelé espace des phénotypes, mais sur un espace de représentation appelé l'espace des génotypes. Par exemple, pour un codage binaire les algorithmes génétiques simples utilisent un espace de génotypes de la forme $\{0; 1\}^n$ (n est la dimension de l'espace de recherche).

La Figure (4.1) illustre le schéma général d'un algorithme évolutionnaire : après l'initialisation de la population (généralement d'une façon aléatoire) l'algorithme évalue la

fitness de chaque individu. La boucle de l'algorithme suit les étapes suivantes :

- **Critère d'arrêt** : un des critères simples souvent utilisé est lorsque le nombre maximum de générations, fixé par l'utilisateur, est atteint.
- **Sélection** : cet opérateur sélectionne parmi les parents ceux qui vont générer des enfants. Plusieurs opérateurs sont possibles qui peuvent être soit déterministes soit stochastiques. La sélection est basée sur la fitness des individus.
- **Création** de nouveaux individus : la création de nouveaux individus se fait essentiellement à l'aide des opérateurs de croisement et de mutation. L'opérateur de croisement est un opérateur stochastique qui combine k parents pour créer un ou plusieurs enfants. L'opérateur de mutation est un opérateur stochastique qui modifie un individu pour en créer un autre qui lui est généralement proche (ce qui dépend énormément de la représentation choisie).
- **Évaluation** : calcul de la fitness de chaque enfant. C'est l'étape la plus coûteuse en temps de calcul.
- **Remplacement** : on détermine qui, parmi la population courante, fera partie des parents de la génération suivante. Cet opérateur est basé, comme l'opérateur de sélection, sur la fitness des individus.

Tous ces algorithmes ont en commun le fait de faire évoluer des populations d'individus. La différence entre eux est principalement d'ordre historique. On peut classer ces algorithmes en 4 grandes familles. Pour une description plus détaillée de ces algorithmes, nous renvoyons à [59].

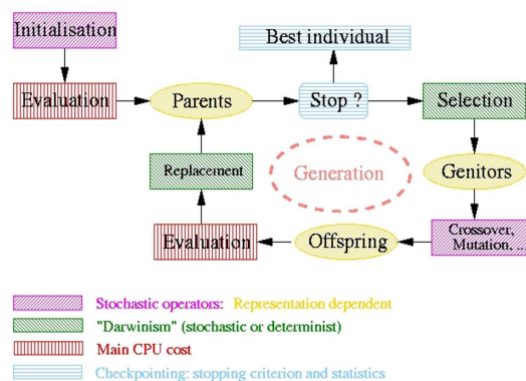


FIGURE 4.1 – Schéma général d'un algorithme évolutionnaire.

- **Algorithmes Génétiques (GA)** : [36, 42]. Les plus connus et les plus populaires des algorithmes évolutionnaires. Ils ont été développés pour modéliser l'adaptation des populations en biologie.
- **Stratégies d'Evolution (ES)** : [73, 38, 6]. Développés par des ingénieurs pour résoudre des problèmes d'optimisation paramétriques. Ces algorithmes sont les plus

efficaces pour ce type de problèmes.

- **Programmation Evolutionnaire (EP)** : L. J. Fogel (1966). Développée à l'origine pour la découverte d'automates à états finis.
- **Programmation Génétique (GP)** : J. Koza (1990). Apparue initialement comme un sous domaine des (GAs), la programmation génétique est devenue une branche à part entière. La spécificité de ces algorithmes est de représenter des individus par des arbres.

Dans la section suivante, nous donnons d'abord l'exemple d'un Algorithme Génétique Simple (GAs) utilisant des opérateurs basiques pour le croisement, la mutation et la sélection. Ensuite nous présentons un algorithme génétique (GA), développé dans le cadre de cette thèse.

Algorithmes génétiques simples (GAs)

Les (GAs) standards utilisent un codage binaire avec un espace de génotype de la forme $\{0; 1\}^n$. Plusieurs opérateurs de sélection ont été développés par différents auteurs. Nous citons ici :

- la sélection à roulette.
- la sélection stochastique universelle.

Nous notons par P_{X_p} la probabilité de sélectionner un individu X_p .

Pour la roulette, P_{X_p} est donnée par :

$$P_{X_p} = \frac{F(X_p)}{\sum_{i \in Population} F(X_i)}$$

Pour la sélection stochastique universelle, la probabilité P_{X_p} est proportionnelle à sa fitness $F(X_p)$.

Le mécanisme de croisement le plus simple consiste à échanger les gènes de chaque parent entre le site sélectionné et la position finale n des deux chaînes, comme le montre la figure (4.2). Par exemple, deux parents

$$X_1 = (x_1^1; x_2^1; \dots; x_n^1) \text{ et } X_2 = (x_1^2; x_2^2; \dots; x_n^2);$$

permettent de générer deux enfants

$$Y_1 = (x_1^1; x_1^2; \dots; x_1^q; x_2^{q+1}; \dots; x_2^n) \text{ et } Y_2 = (x_2^1; x_2^2; \dots; x_2^q; x_1^{q+1}; \dots; x_1^n);$$

où l'entier q est choisi aléatoirement dans $[1; n]$.

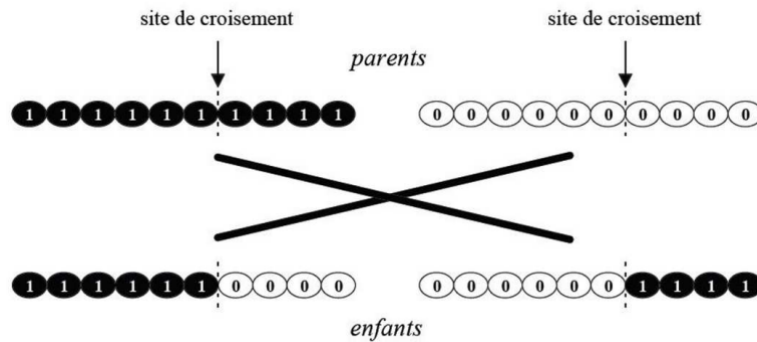


FIGURE 4.2 – Principe de croisement simple.

L'un des points faibles du codage binaire est qu'un tel croisement peut "mélanger" des variables de types différents. La mutation dans le cas d'un codage binaire consiste à changer un 0 par 1, ou inversement (voir Figure (4.3)). Dans le cas d'un codage réel, la mutation peut se faire en remplaçant une variable x_i par $x_i + \delta x_i$ où δx_i est une "petite" variation de la variable x_i .

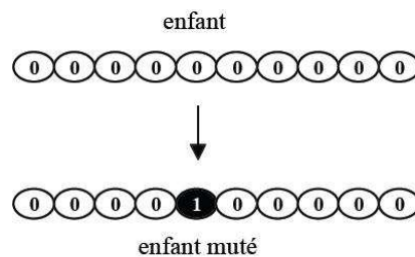


FIGURE 4.3 – Principe de Mutation simple.

Algorithme Génétique utilisé (GA)

Pour résoudre le problème d'optimisation, nous avons développé un algorithme qui utilise un codage réel, écrit en Matlab. Pour la sélection, après un certain nombre d'essais, nous avons choisi de nous restreindre aux trois types qui sont connus pour leurs succès : la sélection à roulette, la sélection à roulette par reste stochastique et la sélection par tournoi. Les croisements employés sont le croisement multi-points et le croisement barycentrique.

Dans le cas d'un croisement multi-points avec deux points (voir figure (4.4)), le croisement se fait de la manière suivante : deux parents

$$X_1 = (x_1^1; x_1^2; \dots; x_1^n) \text{ et } X_2 = (x_2^1; x_2^2; \dots; x_2^n)$$

génèrent deux enfants

$$Y_1 = (x_1^1; x_1^2; \dots; x_1^{q_1}; x_2^{q_1+1}; \dots; x_2^{q_2}; x_1^{q_2+1}; \dots; x_1^n)$$

et

$$Y_2 = (x_2^1; x_2^2; \dots; x_2^{q_1}; x_1^{q_1+1}; \dots; x_1^{q_2}; x_2^{q_2+1}; \dots; x_2^n),$$

où les entiers q_1 et q_2 sont choisis aléatoirement dans $[1; n]$.

Avec un croisement barycentrique, les enfants créés sont donnés par $Y_1 = (y_1^1; \dots; y_1^n)$ et $Y_2 = (y_2^1; \dots; y_2^n)$ avec pour tout i , $y_1^i = \alpha x_1^i + (1 - \alpha)x_2^i$ et $y_2^i = \alpha x_2^i + (1 - \alpha)x_1^i$ où α est un réel dans $[0, 1]$. Ce nombre α est soit choisi par l'utilisateur, soit choisi aléatoirement dans le cas d'un croisement barycentrique aléatoire.

Deux types de mutations sont possibles. La mutation gaussienne avec une variance constante ou une variance décroissante au cours des itérations, et la mutation non-uniforme [60] où une variable $x^i \in [x_{mini}; x_{maxi}]$ prend la nouvelle valeur x'_i

$$\begin{cases} x_i + \Delta(t, x_{maxi} - x_i), & \text{si } s \leq 0.5, \\ x_i - \Delta(t, x_i - x_{mini}), & \text{si } s \geq 0.5, \end{cases} \quad (4.8)$$

où t désigne le nombre de générations, s un nombre aléatoire dans $[0; 1]$ et où la fonction

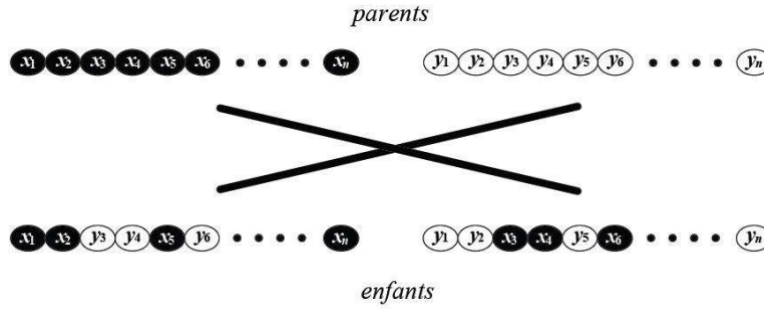


FIGURE 4.4 – Principe de croisement multi-points.

$\Delta(t; x)$ est définie de la manière suivante :

$$\Delta(t; x) = x.r.(1 - \frac{t}{T})^b$$

telle que r est un nombre aléatoire dans $[0; 1]$, T le nombre maximal de générations et b un paramètre de raffinement. Le graphe de la fonction $\Delta(t; x)$ est représenté sur la figure (4.5). Ainsi, nous remarquons qu'au début l'amplitude maximale de la mutation est grande, tandis que qu'elle très petite vers la fin de l'algorithme : nous passons alors d'une recherche globale à une recherche locale au cours de l'algorithme. Pour déterminer la stratégie de compromis entre l'exploration et l'exploitation, nous nous servons du paramètre b , qui permet d'ajuster l'amplitude de la mutation. En fait, pour une grande valeur de b (Figure (4.5) (a)), c'est l'exploration de l'espace qui est favorisée, alors que pour une petite valeur de b (Figure (4.5) (b)), c'est la phase d'exploitation et de recherche locale. L'un des points

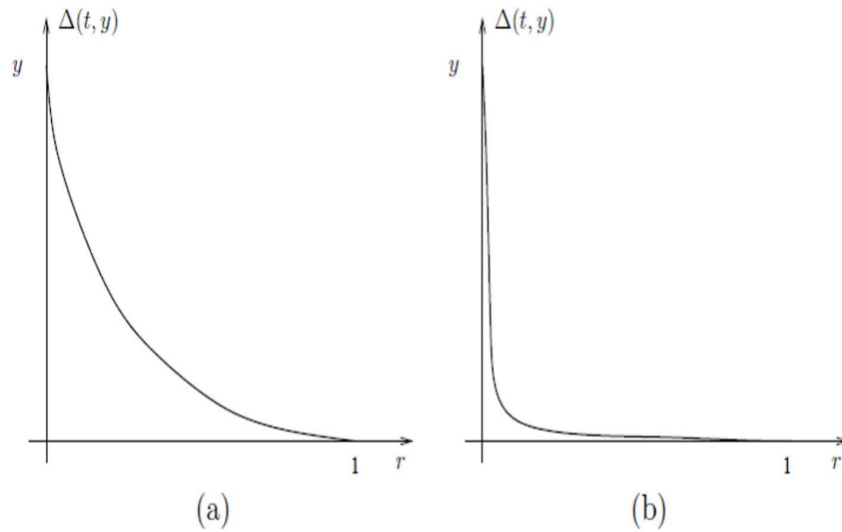


FIGURE 4.5 – La fonction $\Delta(t; y)$ à deux instants t_1 et t_2 (resp. (a) et (b)) avec $t_1 < t_2$.

fondamentaux du processus des algorithmes génétiques est la diversité. Grâce à elle, ces algorithmes réussissent à échapper à des minima locaux. Pour assurer la décroissance de la fonction à minimiser, génération après génération, on tient toujours à sélectionner l'individu (soit un enfant, soit un parent) qui lui donne une valeur minimale. C'est ce qu'on appelle l'élitisme.

Pour le bon fonctionnement de l'algorithme, nous utilisons ce qu'on appelle la mise en échelle de la fitness (scaling). Cette technique est imposée par le choix de la méthode de sélection basée sur la méthode de la roulette. Pour cette méthode, la probabilité P_{X_p} de sélectionner un individu X_p est proportionnelle à sa fitness $F(X_p)$:

$$P_{X_p} = \frac{F(X_p)}{\sum_{i \in \text{Population}} F(X_i)}.$$

Cette formule oblige à avoir une fitness positive pour tous les individus. Ce qui suggère d'utiliser un scaling qui consiste à prendre pour fitness

$$F(X_p) = f(X_p) - \min_{i \in \text{Population}} f(X_i) :$$

Cependant, ce choix reste insuffisant. En effet, si on considère la fonction $g = f + C$ où C est une constante plus grande que les valeurs de f , alors les individus ne sont plus réellement différents au vu de leur fitness donnée avec la fonction g . Dans ce cas la sélection se fait différemment pour les fonctions f et g , et devient sensible aux translations. Pour éviter ce problème une autre condition est imposée pour le choix du scaling. Cette condition consiste à empêcher que la sélection pour la génération suivante soit restreinte au super-individu (celui qui donne la meilleure valeur dans une génération). Plusieurs

stratégies de scaling satisfaisant à ces exigences ont été testées. La meilleure pour nos tests est le sigma scaling tronqué :

$$F(X_p) = f(X_p) + (\bar{f} - c\sigma);$$

où \bar{f} et σ représentent respectivement la moyenne et la variance de la fonction f sur la population, et où c est une constante généralement prise entre 1 et 5. Les valeurs négatives éventuelles de $F(X_p)$ sont tronquées et ramenées à zéro.

Les techniques discutées ci-dessus ont permis d'accroître les performances de l'algorithme développé. L'inconvénient est que le nombre de paramètres à ajuster a augmenté, ce qui induit un réglage plus lent. Le temps de calcul requis par l'algorithme est essentiellement dû au temps d'évaluation d'une fonction (voir Figure 4.1). Pour le problème étudié (problème d'optimisation), ce temps est assez important. En effet, chaque évaluation de la fonction f correspond à la résolution d'un système linéaire. L'étape de l'évaluation de la fonction se fait indépendamment pour les différents individus de la population, ce qui la rend facilement parallélisable.

Ainsi, l'algorithme développé est résumé comme suit :

Algorithm 2 Algorithme génétique

- (1) Itération $k = 0$, génère aléatoirement une population admissible.
 - (2) Résoudre (4.1) pour chaque individu de la population.
 - (3) Évaluer (4.3) pour chaque individu de la population.
 - (4) Si le critère de terminaison est maintenu $\|J\| < \epsilon$, alors arrêter.
Sinon, poser $k = k + 1$ et passer à l'étape (5).
 - (5) Appliquer aux individus sélectionnés la procédure de la roulette
 - (6) Appliqué aux individus sélectionnés, la procédure de croisement du barycentre.
 - (7) Sélectionnez au hasard un individu et lui appliquez la mutation.
 - (8) Aller à l'étape (2).
-

Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques pour lesquels les fonctions exactes $C(\psi)$ et $K(\psi)$ sont connues. Il est alors demandé de reconstruire ces fonctions exactes en utilisant la reformulation en contrôle optimale (4.7), pour différentes configurations. Dans tous les exemples numériques suivants, nous résolvons le problème d'identification sur le domaine $\Omega = [0, 1]$.

Validation de la méthode vis à vis d'une solution exacte

Nous considérons un exemple pour lequel la solution exacte est connue analytiquement. Ainsi, étant donnée les fonctions suivantes

$$\psi_0 = z, \quad \psi_{min}(t) = t, \quad \psi_{max}(t) = 1 + t \quad \text{et} \quad f = 0,$$

$$C(\psi) = 2\psi \quad K(\psi) = \psi^2,$$

la solution exacte associée est :

$$\psi_{exacte} = z + t.$$

Pour tous les exemples numériques suivants, nous prenons ces données numériques

$$N = 11, \quad M = 10, \quad \epsilon = 10^{-5}, \quad N_{obs} = 1, \quad z_{obs} = 0.5$$

Notons que, pour l'algorithme évolutionnaire, après plusieurs tests numériques, les données numériques optimales permettant d'obtenir une meilleure solution avec un coût de calcul raisonnable sont :

$$\text{taille de la population} = 10, \quad \text{probabilité de croisement} = 0.6,$$

$$\text{probabilité de mutation} = 5\%.$$

Afin d'étudier le comportement numérique et de montrer l'efficacité de notre approche, différentes configurations sont étudiées. Ainsi, à travers quelques exemples numériques, nous montrons la convergence et la performance de notre approche.

Première configuration :

(a) Dans ce premier cas, nous supposons que la conductivité hydraulique $K(\psi)$ est connue, et que la capacité capillaire $C(\psi)$ est une fonction linéaire.

$$C(\psi) = \alpha\psi \quad \text{et} \quad K(\psi) = \psi^2$$

Le problème d'identification dans ce cas se réduit à trouver le paramètre α .

(b) Dans le deuxième cas, nous supposons que la conductivité hydraulique est la même que dans le cas (a), mais la capacité capillaire est censée être une fonction affine.

$$C(\psi) = 2\psi + \beta \quad \text{and} \quad K(\psi) = \psi^2,$$

nous cherchons alors à identifier le paramètre β . Dans la figure (4.6), nous illustrons

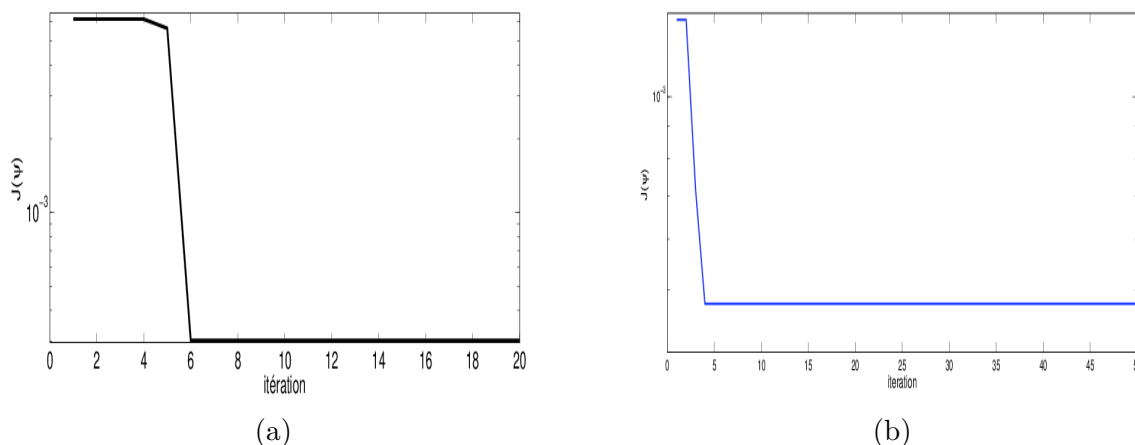


FIGURE 4.6 – Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.

la variations de la fonctionnelle coût J_h en fonction du nombres d'itérations. Nous notons que, pour ces deux cas, la fonctionnelle coût décroît rapidement, d'environ quatre ordres de grandeur, au bout de 5 ou 6 itérations. Les valeurs approchées de α et β sont :

$$\alpha_{app} = 2.01973 \quad \text{and} \quad \beta_{app} = 0.03122;$$

On peut bien voir que nous avons obtenu une bonne approximation des paramètres α et β .

- (c) Nous préservons les mêmes données que dans le cas (b), et nous cherchons à identifier simultanément les deux paramètres α et β

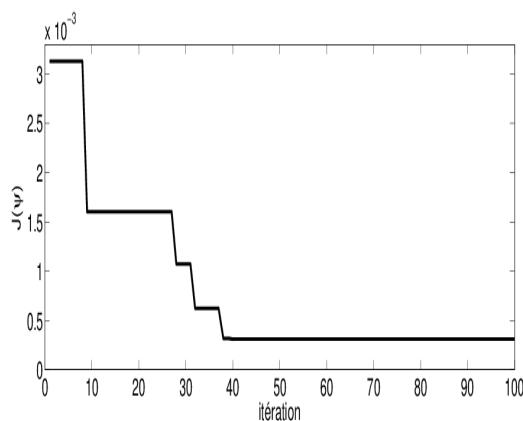


FIGURE 4.7 – (c) : Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.

Dans la figure (4.7), nous présentons la variation de la fonctionnelle coût par rapport au nombre d'itérations. Dans ce cas, nous notons qu'aux cinq premières itérations, la fonctionnelle coût décroît rapidement pour atteindre une précision de 1.5×10^{-2} , alors qu'elle continue à diminuer jusqu'à atteindre une précision inférieure à 5.10^{-3}

au bout de 40 itérations. Les valeurs approchées de α et β sont :

$$\alpha_{app} = 2.197 \quad \text{et} \quad \beta_{app} = 0.0223;$$

Nous notons que dans ce cas la précision n'est pas meilleure que dans les cas précédents, en fait, cela est dû à la difficulté liée au fait qu'il faudra identifier simultanément les deux paramètres.

Deuxième configuration :

- (a) Dans ce cas, nous supposons que la capacité capillaire $C(\psi)$ est connue, et la conductivité hydraulique $K(\psi)$ est une fonction quadratique de ψ .

$$C(\psi) = 2\psi \quad \text{and} \quad K(\psi) = \lambda\psi^2.$$

Le problème d'identification, dans ce cas, se réduit à trouver le paramètre λ .

- (b) Dans ce deuxième cas, nous considérons la même fonction $C(\psi)$ que dans le cas précédent, et nous introduisons un autre paramètre σ dans l'expression de la conductivité hydraulique $K(\psi)$.

$$C(\psi) = 2\psi \quad \text{et} \quad K(\psi) = \psi^2 + \sigma,$$

et nous cherchons ainsi à identifier le paramètre σ .

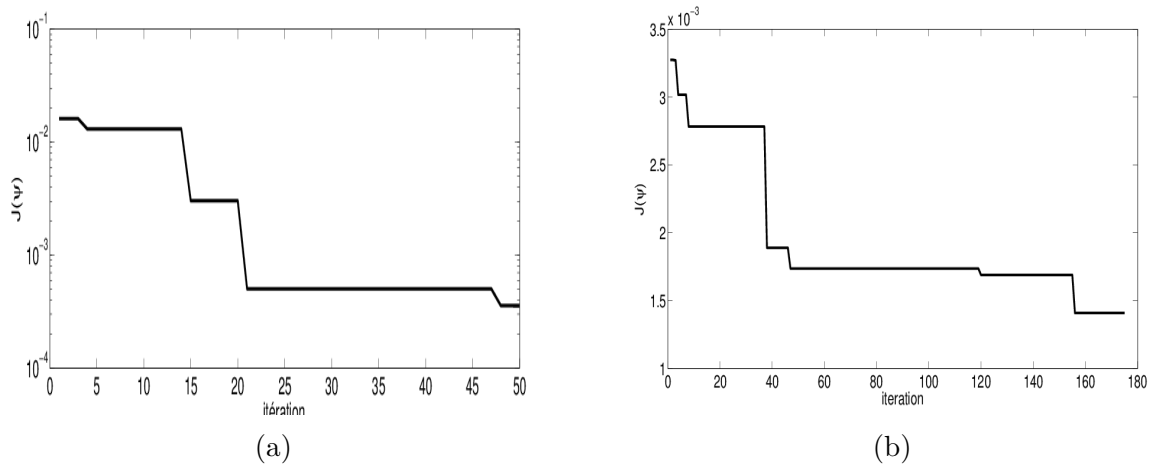


FIGURE 4.8 – Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.

Dans la figure (4.8), nous illustrons la variation du coût J_h en fonction du nombre d'itérations. On note que dans ces deux cas, la fonctionnelle J_h ne décroît pas rapidement comme dans la première configuration, ce qui justifie la difficulté liée à la détermination de la conductivité hydraulique qui à une forme non linéaire. Les

valeurs approchées de λ et σ sont données par :

$$\lambda_{app} = 0.9873 \quad \text{et} \quad \sigma_{app} = 0.03.$$

On remarque que dans ce cas, nous obtenons aussi une bonne approximation des valeurs approchées.

- (c) Dans ce cas nous cherchons à identifier les paramètres λ et σ simultanément dans la fonctions $K(\psi)$, tout comme le troisième cas de la première configuration.

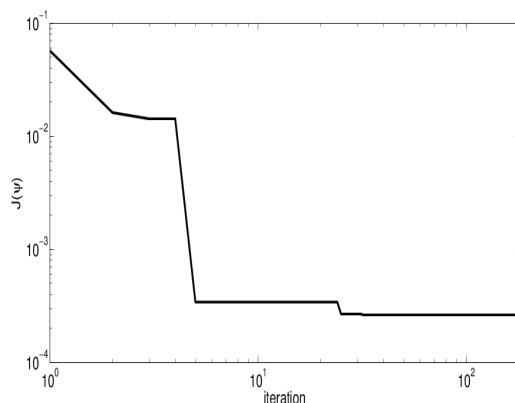


FIGURE 4.9 – (c) : Variation du coût en fonction du nombre d'itérations

La figure (4.9) montre la variation de la fonctionnelle coût par rapport au nombre d'itérations, qui décroît lentement comparé au troisième cas de la première configuration. Ensuite, la fonctionnelle continue à décroître jusqu'à atteindre la précision de $2 \cdot 10^{-3}$ au bout de 50 itérations. Ainsi, les valeurs approchées de λ et σ sont données par :

$$\lambda_{app} = 0.9642 \quad \text{et} \quad \sigma_{app} = 0.0324.$$

On remarque que dans ce cas l'erreur est grande, ceci est dû à la nature complexe du paramètre $K(\psi)$ à identifier.

Troisième configuration : Dans ce cas, nous allons combiner les configurations précédentes dans le sens où nous allons supposer que la capacité capillaire est linéaire et la conductivité hydraulique est quadratique.

$$C(\psi) = \alpha\psi + \beta \quad \text{and} \quad K(\psi) = \lambda\psi^2 + \sigma,$$

Nous recherchons ainsi à identifier ces quatre paramètres α , β , λ et σ simultanément. Dans la figure (4.10), nous donnons la variation du fonctionnelle coût par rapport au

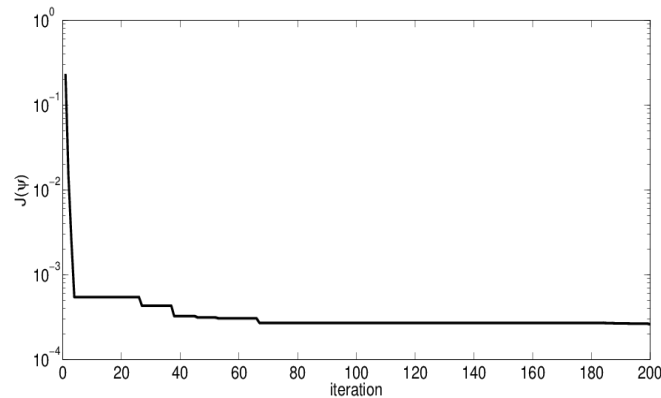


FIGURE 4.10 – Variation du coût par rapport au nombre d'itérations.

nombre d'itérations, nous notons que pour cette configuration, le coût décroît lentement par rapport aux configurations précédentes. Nous notons que dans ce cas, malgré la nature compliquée du problème dû au fait que nous devons identifier quatre paramètres à partir d'une seule observation, les résultats numériques restent acceptables. Les valeurs approchées dans ce cas sont :

$$\alpha_{app} = 2.134, \quad \beta_{app} = 0.052, \quad \lambda_{app} = 0.9342 \quad \text{et} \quad \sigma_{app} = 0.042.$$

En conclusion, nous avons proposé une méthode efficace pour l'approximation du problème inverse basée sur la discrétisation du problème d'état par la méthode des différences finies combinée avec la méthode de Picard. Ainsi, le problème d'optimisation discret associé est résolu par un algorithme évolutionnaire. Cette méthode a l'avantage d'identifier tous les paramètres simultanément avec un coût de calcul raisonnable, même si nous ne prenons qu'une seule donnée d'observation ($N_{obs} = 1$).

4.2 Approximation numérique du problème inverse avec donnée en temps finale

Dans cette section, nous cherchons à approcher notre problème inverse d'identification en utilisant des mesures sur la pression à l'instant finale. Nous considérons cette fois-ci le problème d'identification de paramètres régi par l'équation de Richards suivante :

$$\begin{cases} C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} = f(z, t), & (z, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0, & \forall t \in (0, T), \\ \psi(z, 0) = \psi_0, & \forall z \in \Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

en se basant sur des observations supplémentaires sur la pression à l'instant final

$$\psi(z, T) = g(z), \quad z \in \Omega = (0, 1). \quad (4.10)$$

Le problème inverse ci-dessus est reformulé en un problème de contrôle optimal comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } P^* \in U_{ad} \text{ solution de} \\ J(P^*) = \inf_{P \in U_{ad}} J(P), \\ \text{avec } J(P) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\psi(z, T; P) - g(z)|^2 dz, \\ \text{et } \psi \text{ est la solution de :} \\ (PE) \left\{ \begin{array}{l} C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z}) + \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} = f, \quad (z, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0, \quad \forall t \in (0, T), \\ \psi(z, 0) = \psi_0, \quad \forall z \in \Omega, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

où $P = (C, K)$ est le paramètre à estimer dans (4.11) et U_{ad} est l'ensemble des contrôles admissibles défini par :

$$U_{ad} = \{P = (C, K) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) / d_0 \leq C \leq d_1 \text{ et } \lambda_0 \leq K \leq \lambda_1 \text{ dans } \Omega \text{ et}$$

$$|C(s_1) - C(s_2)| \leq L_0 |s_1 - s_2| \text{ et } |K(s_1) - K(s_2)| \leq L_1 |s_1 - s_2|, \forall s_1, s_2 \in \Omega\}.$$

Notons que dans ce cas, la formulation variationnelle associée au problème d'état (PE) s'écrit : trouver $\psi \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ et $\partial_t \psi \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ telle que

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t}, v \rangle_{(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))} dt + \int_0^T \int_0^1 K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt \\ + \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} v dz dt = \int_0^T \int_0^1 f v dz dt, \quad \forall v \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \end{aligned}$$

et

$$\psi(z, 0) = \psi_0(z), \quad z \in (0, 1).$$

Dans la suite, nous désignons par $\psi(P)$ la solution du problème d'état (PE). Ainsi, dans le but d'utiliser une méthode de type gradient pour l'approximation du problème d'optimisation (4.11), nous allons supposer que les paramètres hydrauliques C et K s'écrivent comme combinaisons paramétriques dans une base. En fait, cette approche, va nous permettre de réduire l'estimation des fonctions à identifier (en dimension infinie) à une estimation des paramètres (en dimension finie) et vise également à améliorer l'efficacité de

l'approximation numérique [67]. On peut ainsi écrire

$$K(\psi) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i w_i(\psi) \quad (4.12)$$

et

$$C(\psi) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i w_i(\psi). \quad (4.13)$$

où les w_i sont des fonctions de base continues. En utilisant une troncature, on peut alors considérer l'approximation suivante

$$K(\psi) = \sum_{i=0}^p q_i w_i(\psi) \quad (4.14)$$

et

$$C(\psi) = \sum_{i=0}^r s_i w_i(\psi), \quad (4.15)$$

ce qui revient à chercher $(q_0, q_1, \dots, q_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $(s_0, s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ pour chaque paramètre hydrologique.

Ainsi, les valeurs des $(n+1)^{\text{ème}}$ itérés q_i^{n+1} et s_i^{n+1} au cours des itérations de l'algorithme du gradient sont définies par

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \rho \frac{\partial J}{\partial q_i}(q_i^n)$$

et

$$s_i^{n+1} = s_i^n - \rho \frac{\partial J}{\partial s_i}(s_i^n),$$

dont les formes vectorielles s'écrivent :

$$K^{n+1}(\psi) = K^n(\psi) - \rho \sum_{i=0}^p \frac{\partial J}{\partial q_i}(q_i^n) w_i(\psi)$$

et

$$C^{n+1}(\psi) = C^n(\psi) - \rho \sum_{i=0}^r \frac{\partial J}{\partial s_i}(s_i^n) w_i(\psi).$$

Ceci nous amène à calculer le gradient de J par rapport aux paramètres hydraulique, comme suit

Théorème 4.1 *La fonctionnelle J est Gâteaux différentiable et son gradient s'écrit sous la forme :*

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = \int_0^T \int_0^1 \left(- \frac{\partial K(q_i)}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial K(q_i)}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz dt, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial J}{\partial s_i} = \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial C(s_i)}{\partial s_i} \frac{\partial \psi}{\partial t} v \right) dz dt \quad (4.17)$$

où ψ est la solution du problème d'état et v est la solution du problème d'état adjoint suivant :

$$\begin{cases} C(\psi_P) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (K(\psi_P) \frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} (K(\psi_P)) \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial K(\psi_P)}{\partial \psi_P} \frac{\partial v}{\partial z} = \psi_P(z, T) - g(z), \quad \forall (z, t) \in Q_T, \\ v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad \forall t \in (0, T), \\ v(z, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1). \end{cases} \quad (4.18)$$

Démonstration

Pour tout $(\psi_P, v, P) \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \times L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \times C(\bar{\Omega})^2$, on introduit le lagrangien du problème de minimisation

$$L(\psi_P, v, P) = J(\psi_P) + \int_0^T \int_0^1 v \left(-C(\psi_P) \frac{\partial \psi_P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (K(\psi_P) \frac{\partial \psi_P}{\partial z}) - \frac{\partial K(\psi_P)}{\partial z} + f \right) dz dt,$$

où v est le multiplicateur de Lagrange pour la contrainte qui relie les deux variables P et ψ_P . En utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned} L(\psi_P, v, P) = J(\psi_P) + \int_0^T \int_0^1 -C(\psi_P) \frac{\partial \psi_P}{\partial t} v dz dt - \int_0^T \int_0^1 K(\psi_P) \frac{\partial \psi_P}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt \\ + \int_0^T \int_0^1 K(\psi_P) \frac{\partial v}{\partial z} dz dt + \int_0^T \int_0^1 f v dz dt. \end{aligned}$$

Nous rappelons que $\partial_v L = 0$, nous permet de trouver l'équation d'état vérifiée par ψ_P , tandis que $\partial_{\psi_P} L = 0$ nous permet d'obtenir l'équation l'état adjoint vérifiée par v . En effet,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(\psi_P + sw) - L(\psi_P)}{s} = \left\langle \frac{\partial L}{\partial \psi_P}, w \right\rangle,$$

ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} L(\psi_P + sw) = J(\psi_P + sw) + \int_0^T \int_0^1 -C(\psi_P + sw) \frac{\partial \psi_P}{\partial t} v dz dt - s \int_0^T \int_0^1 C(\psi_P + sw) \frac{\partial w}{\partial t} v dz dt \\ - \int_0^T \int_0^1 K(\psi_P + sw) \frac{\partial \psi_P}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt - s \int_0^T \int_0^1 K(\psi_P + sw) \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt \\ + \int_0^T \int_0^1 K(\psi_P + sw) \frac{\partial v}{\partial z} dz dt + \int_0^T \int_0^1 f v dz dt, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial L}{\partial \psi_P}, w \right\rangle = \left\langle \frac{\partial J}{\partial \psi_P}, w \right\rangle + \int_0^T \int_0^1 -\frac{\partial C(\psi_P)}{\partial \psi_P} \frac{\partial \psi_P}{\partial t} v w dz dt - \int_0^T \int_0^1 C(\psi_P) \frac{\partial w}{\partial t} v dz dt \\ - \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial K(\psi_P)}{\partial \psi_P} \frac{\partial \psi_P}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} w dz dt - \int_0^T \int_0^1 K(\psi_P) \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dt \\ + \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial K(\psi_P)}{\partial \psi_P} \frac{\partial v}{\partial z} v w dz dt, \end{aligned}$$

ainsi, nous avons

$$\left\langle \frac{\partial J}{\partial \psi_P}, w \right\rangle = \int_0^1 (\psi_P(z, T) - g(z)) w(z, T) dz.$$

Ce qui nous permet d'avoir l'équation d'état adjoint suivante

$$\begin{cases} C(\psi_P) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (K(\psi_P) \frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} (K(\psi_P)) \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial K(\psi_P)}{\partial \psi_P} \frac{\partial v}{\partial z} = \psi_P(z, T) - g(z), \quad \forall (z, t) \in Q_T, \\ v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad \forall t \in (0, T), \\ v(z, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1). \end{cases} \quad (4.19)$$

De plus, l'équation $\partial_P L = 0$ qui nous permet de calculer le gradient de J en P est équivalente à

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(q_i + \varepsilon \tau) - L(q_i)}{\varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tau = 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(s_i + \varepsilon \tau) - L(s_i)}{\varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial s_i} \tau = 0.$$

Ainsi, en procédant de la même manière que pour le calcul de l'équation d'état adjoint, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial q_i} &= \int_0^T \int_0^1 \left(- \frac{\partial K(q_i)}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial K(q_i)}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz dt, \\ \frac{\partial J}{\partial s_i} &= \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial C(s_i)}{\partial s_i} \frac{\partial \psi}{\partial t} v \right) dz dt. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

4.3 Discrétisation du problème d'optimisation

Dans le paragraphe, nous allons proposer une discrétisation basée sur une semi-discrétisation temporelle du problème d'état et d'état adjoint et une approximation des problèmes stationnaires associés par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 . Ensuite, nous allons discrétiser l'espace des paramètres admissibles et la fonctionnelle coût.

Discrétisation du problème d'état et d'état adjoint

Nous allons tout d'abord proposer une approximation du problème d'état et d'état adjoint en utilisant une semi discrétisation par schéma d'Euler implicite. Pour cela, considérons une partition uniforme de l'intervalle de temps $(0; T]$ en M éléments de de la

manière suivante :

$$(0, T] = \cup_{j=1}^{j=M} (t_{j-1}, t_j], \quad \text{avec } \Delta t = t_j - t_{j-1}.$$

Notons ainsi qu'à chaque itération du processus de résolution du problème inverse, nous devons résoudre le problème non linéaire (4.9). Nous pouvons alors utiliser une technique de linéarisation qui réduit la complexité du calcul. En effet, nous proposons une semi-linéarisation par rapport à la capacité hydraulique dans l'équation (4.9). Le reste de la discrétisation est effectuée en utilisant un schéma d'Euler implicite :

$$(Pd) \begin{cases} C(\psi^j(z)) \frac{\psi^{j+1}(z) - \psi^j(z)}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial z} [k(\psi^{j+1}(z)) \frac{\partial \psi^{j+1}(z)}{\partial z}] + \frac{\partial K(\psi^{j+1}(z))}{\partial z} = f^{j+1}(z), \\ \psi_0^{j+1} = 0, \\ \psi_d^{j+1} = 0, \\ \psi^0(z) = \psi_0, \quad \text{pour } j = 1, \dots, M, \end{cases} \quad (4.20)$$

où $C(\psi^j(z))$, $K(\psi^j(z))$ et $f^{j+1}(z)$ sont respectivement les fonctions approximatives de $C(\psi)$, $K(\psi)$, et f à l'instant t_j .

D'autre part, comme le problème d'état adjoint est linéaire, nous proposons également un schéma d'Euler implicite pour sa discrétisation, nous obtenons alors

$$(PAd) \begin{cases} C(\psi)^{j+1} \frac{v^{j+1} - v^j}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial z} (K(\psi)^{j+1} \frac{\partial v^{j+1}}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} (K(\psi)^{j+1}) \frac{\partial v^{j+1}}{\partial z} \\ \quad + \left(\frac{\partial K(\psi)}{\partial \psi} \right)^{j+1} \frac{\partial v^{j+1}}{\partial z} = \psi^M(z) - g(z), \\ v^{j+1}(0) = v^{j+1}(1) = 0, \\ v^M(z) = 0, \quad \forall z \in (0, 1), \quad \text{pour } j = 1, \dots, M, \end{cases} \quad (4.21)$$

Dans la suite, afin d'approcher les deux problèmes (4.20) et (4.21) à chaque itération par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 , considérons une partition uniforme $(z_n)_{n=0}^d$ de $[0; 1]$, telle que $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_d = 1$, $z_n = n * h$, $h = 1/d$, $n = 0, \dots, d$. Dans ce cadre, pour écrire les formulations variationnelles des deux problèmes, nous devons d'abord définir les espaces approchés des espaces de Sobolev. Notons ainsi par

$$H_h([z_n, z_{n+1}]) = \{v_h \in C([0, 1]) \mid v_h|_{[z_n, z_{n+1}]} \in \mathbb{P}_1([z_n, z_{n+1}])\},$$

$$H_0^h([z_n, z_{n+1}]) = \{v_h \in H_h([z_n, z_{n+1}]) \mid v_h|_{z_n} = v_h|_{z_{n+1}} = 0\},$$

qui sont les espaces approchés de dimensions finies associés respectivement à $H^1(0, 1)$ et

$H_0^1(0, 1)$.

Notons également par $\{\varphi_n\}_{n=1}^d$ une base de H_0^h où d est le nombre de noeuds de la discrétisation. Donc on peut écrire $\psi_h \in H_0^h$ et $v_h \in H_0^h$ sous la forme

$$\psi_h = \sum_{n=0}^d \psi_h(z_n) \varphi_n \quad \text{et} \quad v_h = \sum_{n=0}^d v_h(z_n) \varphi_n.$$

A la base de ces notations, les formulations variationnelles des deux problèmes discrets d'état et d'état adjoint s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v_h \in H_0^h, \text{ tel que} \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{z_n}^{z_{n+1}} C(\psi)^{j+1} v_h^{j+1} \varphi dz - \int_{z_n}^{z_{n+1}} (K(\psi)^{j+1} \frac{\partial v_h^{j+1}}{\partial z}) \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{\partial}{\partial z} (K(\psi)^{j+1}) \frac{\partial v_h^{j+1}}{\partial z} \varphi dz \\ + \int_{z_n}^{z_{n+1}} \left(\frac{\partial K(\psi)}{\partial \psi} \right)^{j+1} \frac{\partial v_h^{j+1}}{\partial z} \varphi dz = \int_{z_n}^{z_{n+1}} (\psi^M(z) - g(z)) \varphi dz \\ + \frac{1}{\Delta t} \int_{z_n}^{z_{n+1}} C(\psi)^{j+1} v_h^j \varphi dz, \quad \forall \varphi \in H_0^h \end{array} \right. \quad (4.22)$$

où v_h^j est une approximation de v à l'instant $t = t_j$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \psi_h \in H_0^h, \text{ tel que} \\ \int_{z_n}^{z_{n+1}} k(\psi_h^{j+1}) \frac{\partial \psi_h^{j+1}}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{\partial k(\psi_h^{j+1})}{\partial z} \varphi dz, \\ + \frac{1}{\Delta t} \int_{z_n}^{z_{n+1}} C(\psi_h^j) \psi_h^{j+1} \varphi dz = \frac{1}{\Delta t} \int_{z_n}^{z_{n+1}} C(\psi_h^j) \psi_h^j \varphi dz + \int_{z_n}^{z_{n+1}} f^{j+1} \varphi dz, \quad \forall \varphi \in H_0^h \end{array} \right. \quad (4.23)$$

où ψ_h^j est une approximation de ψ à l'instant $t = t_j$.

Même avec la semi-linéarisation utilisée pour le problème d'état, ce dernier reste non linéaire, c'est pour cette raison que nous utiliserons la méthode de Newton pour sa résolution. Ainsi, si on note par

$$G_h(\psi_h^{j+1}) = \left\{ \begin{array}{l} \int_{z_n}^{z_{n+1}} k(\psi_h^{j+1}) \frac{\partial \psi_h^{j+1}}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{\partial k(\psi_h^{j+1})}{\partial z} \varphi dz \\ + \frac{1}{\Delta t} \int_{z_n}^{z_{n+1}} C(\psi_h^j) \psi_h^{j+1} \varphi dz - \frac{1}{\Delta t} \int_{z_n}^{z_{n+1}} C(\psi_h^j) \psi_h^j \varphi dz - \int_{z_n}^{z_{n+1}} f^{j+1} \varphi dz, \end{array} \right. \quad (4.24)$$

l'équation (4.23) s'écrit :

$$G_h(\psi_h^{j+1}) = 0. \quad (4.25)$$

Notons que la méthode de Newton-Raphson [2] est l'une des méthodes standard utilisée pour résoudre les équations non linéaires. Il consiste à approcher G_h par $G_h(\psi_h^{j+1} + w) = G_h(\psi_h^{j+1}) + G'_h(\psi_h^{j+1})w$. Ce qui permet de suggérer l'algorithme suivant, comme moyen de résolution de (4.25)

Algorithm 3 Méthode de Newton

- (1) Choisir une précision désirée $\varepsilon > 0$,
- (2) Pour $k = 0$, choisir un itéré initial $(\psi_h^{j+1})^0$,
- (3) Calculer w^k la solution de $G'((\psi_h^{j+1})^k)w^k = -G((\psi_h^{j+1})^k)$,
- (4) Tant que $\|w^k\| > \varepsilon$ faire

$$(\psi_h^{j+1})^{k+1} = (\psi_h^{j+1})^k + w^k \quad \text{et aller à (3).}$$

Discrétisation de la formulation en contrôle optimal

Pour la discrétisation du problème de contrôle optimal, nous définissons la famille des paramètres admissibles discrets :

$$\mathcal{U}_{ad}^h = \{(C_h, K_h) \in C([0, 1])^2 / C_h|_{[z_n, z_{n+1}]} \text{ et } K_h|_{[z_n, z_{n+1}]} \in \mathbb{P}_1([z_n, z_{n+1}]), \forall n = 1, \dots, d\} \cap \mathcal{U}_{ad},$$

et nous approchons la fonctionnelle coût discrète par

$$J_h(P_h(\psi_h)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\psi_k^h(T) - g_k)^2 dz,$$

où $\psi_k^h(T)$ est la solution de (4.23) au point z_k . Nous énonçons ainsi le problème de contrôle optimal discret comme suit

$$(PO) \begin{cases} \inf_{P_h \in \mathcal{U}_{ad}^h} J_h(\psi_h(P_h); P_h(\psi_h)) \\ \text{where } \psi_h(P_h) \text{ is the solution of (4.23),} \end{cases} \quad (4.26)$$

où $\psi_h = (\psi_n^j)_{\substack{1 \leq j \leq M \\ 1 \leq n \leq d}}$.

Afin de déterminer une solution pour le problème de minimisation (4.26), nous utilisons la méthode du gradient (GM) [2] présentée dans l'algorithme suivant :

Algorithm 4 Méthode du gradient

- (0) Choisir une précision désirée $\epsilon > 0$.
- (1) Pour $k = 0$, choisir un itéré initial P_0 .
- (2) Résoudre le problème d'état (4.23).
- (3) Résoudre le problème d'état adjoint (4.22).
- (4) Calculer $\nabla J(P_k)$.
- (5) Tant que $\|\nabla J(P_k)\| < \epsilon$, faire

$$P_{k+1} = P_k - \rho \nabla J(P_k) \quad \text{aller à (2).}$$

4.4 Résultats numériques

Afin de montrer la performance de l'approche proposée, nous allons commencer par traiter la cas simple où les paramètres hydrauliques K et C ont une forme polynômiale tout comme dans le cas du problème inverse avec donnée spatiales. Ensuite, nous considérons le cas où ces paramètres ont la forme paramétrique générale utilisée dans le calcul du gradient du J . Nous allons ainsi, traiter différentes formes fonctionnelles de K et C à savoir la forme rationnelle, irrationnelle, trigonométrique et exponentielle. Nous terminons ce paragraphe par traiter un problème inverse issu du modèle concret empirique de Van-Genuchten [82].

Notons que pour tous les exemples numériques que nous allons traiter par la suite, nous prenons les données numériques suivantes :

$$T = 60, \quad N = 30, \quad M = 11.$$

Approximation dans le cas polynomial

Dans cette section, nous allons valider nos tests numériques vis à vis un modèle ayant une solution exacte. Pour cela, nous considérons les données suivantes

$$K(\psi) = \psi^2 + \psi + 1, \quad C(\psi) = \psi^2 + \psi + 1,$$

et

$$f = 0, \quad \psi_0 = 0, \quad g(z) = 60(z - z^2),$$

pour lesquelles la solution exacte est donnée par :

$$\psi = t(z - z^2).$$

Nous commençons par présenter la solution approchée du problème d'état et la solution exacte. Ceci est illustré dans la figure (4.11). Nous remarquons que la méthode d'approximation du problème d'état nous permet d'avoir une bonne approximation de la solution.

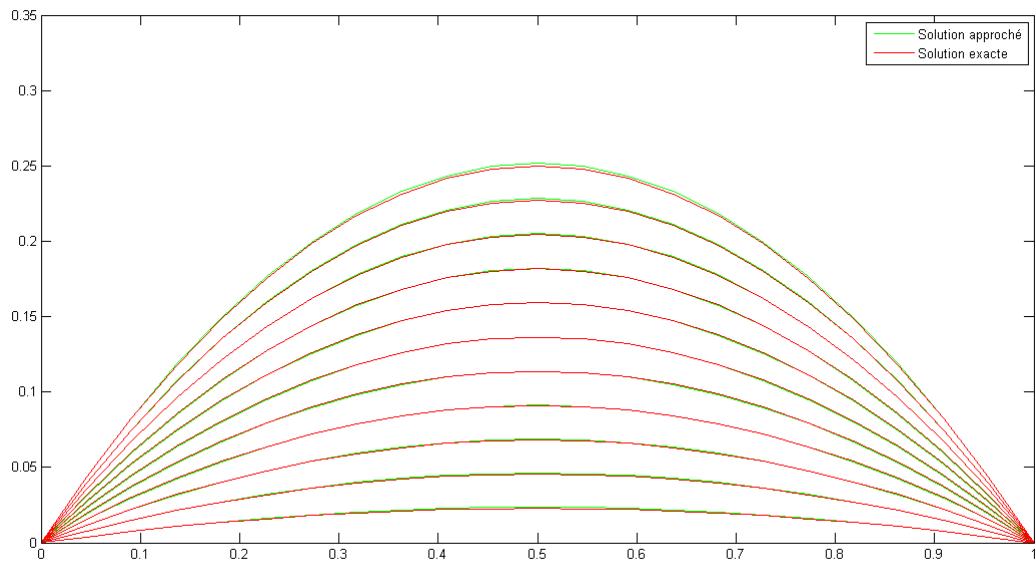


FIGURE 4.11 – Solution exacte et approchée du problème d'état.

En raison de la complexité du problème d'identification considéré, nous étudierons différentes configurations.

Première configuration

Nous cherchons à identifier les coefficients q_0 et q_1 dans l'expression de la conductivité hydraulique, alors que nous préservons la même expression de la capacité capillaire. Nous considérons ainsi les deux cas suivants :

$$\text{cas 1 : } \begin{cases} K(\psi) = \psi^2 + \psi + q_0, \\ C(\psi) = \psi + 1, \end{cases} \quad \text{cas 2 : } \begin{cases} K(\psi) = \psi^2 + q_1\psi + q_0, \\ C(\psi) = \psi + 1. \end{cases}$$

Ainsi, le problème d'identification dans ces situations, est réduit à trouver les paramètres q_0 et q_1 .

Dans la figure (4.12), nous présentons la variation de la fonctionnelle coût J_h en fonction du nombre d'itérations pour le premier cas (voir figure (4.12) (a)) aussi bien que pour le deuxième cas (voir figure (4.12) (b)). Nous notons que, pour ces deux cas, la fonctionnelle coût décroît rapidement pour atteindre un ordre de grandeur de l'ordre de 10^{-7} pour le premier cas et de l'ordre de 10^{-11} pour le deuxième cas. Les valeurs approchées de q_0 et q_1 sont données dans le tableau (4.1) :

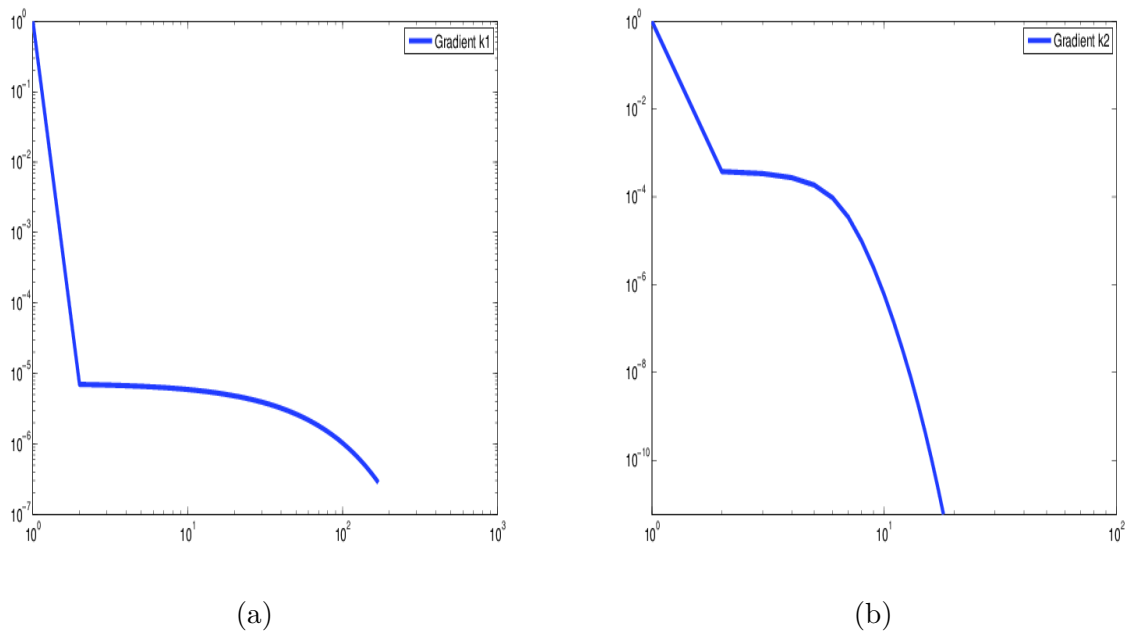


FIGURE 4.12 – Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.

cas 1 (q_0)		cas 2 (q_0, q_1)	
q_0 initiale	5.00	(q_0, q_1) initiales	(3.00, 5.00)
q_0 exacte	1.00	(q_0, q_1) exactes	(1.00, 1.00)
q_0 optimale	1.0051	(q_0, q_1) optimales	(1.0447, 1.0006)
itération	45	itération	300
$\ \nabla J(P_k)\ $	6.8110e-012	$\ \nabla J(P_k)\ $	1.01e-06

TABLE 4.1 – La valeur initiale et optimale de q_0 et q_1 .

Dans la figure (4.13), nous avons représenté la conductivité initiale, la conductivité approchée à la 10^{ème} et à la 20^{ème} itération ainsi que la conductivité optimale. Une grande variation de la conductivité initiale a été observée au bout de 10 itérations. On remarque que la conductivité obtenue est très proche de la conductivité optimale.

Maintenant, nous cherchons à identifier le coefficient le plus influent dans l'expression de la conductivité hydraulique, à savoir le coefficient q_2 , alors que nous préservons la même expression de la capacité capillaire. Nous considérons ainsi la situation suivante :

$$\text{cas 3 : } \begin{cases} K(\psi) = q_2 \psi^2 + \psi + 1, \\ C(\psi) = \psi + 1, \end{cases}$$

Dans la figure (4.14), nous présentons la variation de la fonctionnelle coût J_h en fonc-

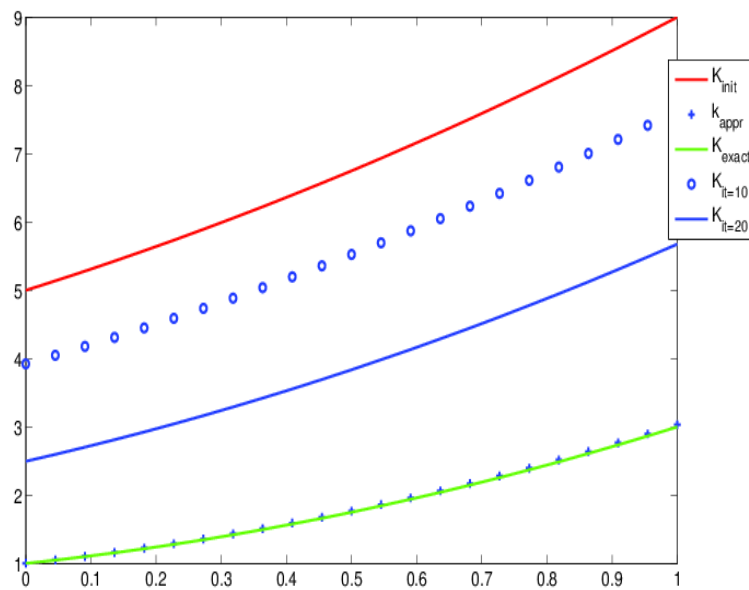
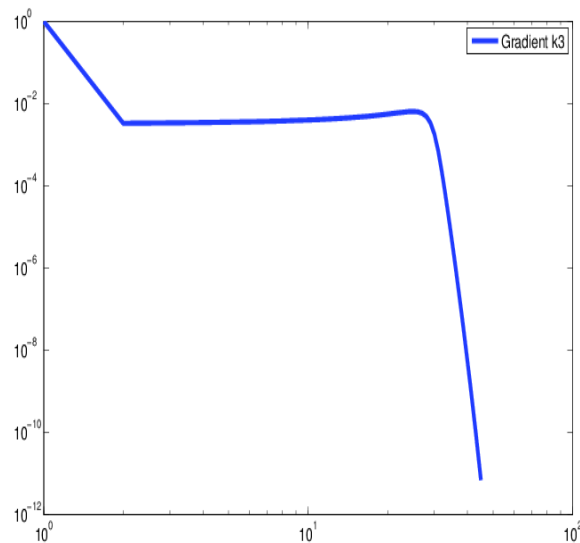


FIGURE 4.13 – Convergence de la conductivité vers l'optimum.

FIGURE 4.14 – Variation du coût en fonction du nombre d'itérations pour q_2 .

tion du nombre d'itérations pour l'identification du coefficient q_2 . Nous notons que dans ce cas l'algorithme nécessite un peu plus d'itération que dans les deux cas précédents. Ceci est dû au fait que le coefficient q_2 est le plus sensible vu qu'il est associé au terme non linéaire dans l'expression de K . Ceci est illustré dans la figure (4.14) et le tableau (4.2). En effet, on constate que l'algorithme nécessite à peu près 290 itérations pour atteindre la valeur optimale de q_2 avec une erreur de l'ordre de 10^{-7} .

cas 3 (q_2)	
q_2 initiale	2.00
q_2 exacte	1.00
q_2 optimale	1.2264
itération	300
$\ \nabla J(P_k)\ $	2.8343e-007

TABLE 4.2 – La valeur initiale et optimale de q_2

Deuxième configuration

Dans cet exemple, nous cherchons à identifier les coefficients s_0 et s_1 dans l'expression de la capacité hydraulique, alors que nous préservons la même expression de la conductivité. Nous considérons ainsi les deux cas suivants

$$\text{cas 1 : } \begin{cases} K(\psi) = \psi^2 + \psi + 1, \\ C(\psi) = \psi + s_0, \end{cases} \quad \text{cas 2 : } \begin{cases} K(\psi) = \psi^2 + \psi + 1, \\ C(\psi) = s_1\psi + s_0. \end{cases}$$

Dans la figure (4.15), nous présentons la variation du coût en fonction du nombre d'itérations pour le premier cas (voir figure (4.15) (a)) aussi bien que pour le deuxième cas (voir figure (4.15) (b)). Nous notons que, pour ces deux cas, la fonctionnelle coût décroît rapidement pour atteindre un ordre de grandeur de l'ordre de 10^{-10} pour le premier cas et de l'ordre de 10^{-7} pour le deuxième cas. Les valeurs initiales et optimales de s_0 et s_1 sont données dans le tableau (4.3).

cas 1 (s_0)		cas 2 (s_1, s_0)	
s_0 initiale	3.00	(s_1, s_0) initiales	(3.00,5.00)
s_0 exacte	1.00	(s_1, s_0) exactes	(1.00,1.00)
s_0 optimale	1.0443	(s_1, s_0) optimales	(1.10 1.045)
itération	150	itération	300
$\ \nabla J(P_k)\ $	1.1961e-011	$\ \nabla J(P_k)\ $	1.621e-06

TABLE 4.3 – Les valeurs initiales et optimales de s_0 et s_1

Troisième configuration

Dans cette configuration, nous supposons que la capacité capillaire et la conductivité hydraulique ont des expressions quadratiques et que toutes les deux sont inconnues. Nous cherchons ensuite à identifier simultanément les coefficients q_0, q_1, q_2 et s_0, s_1, s_2 dans les

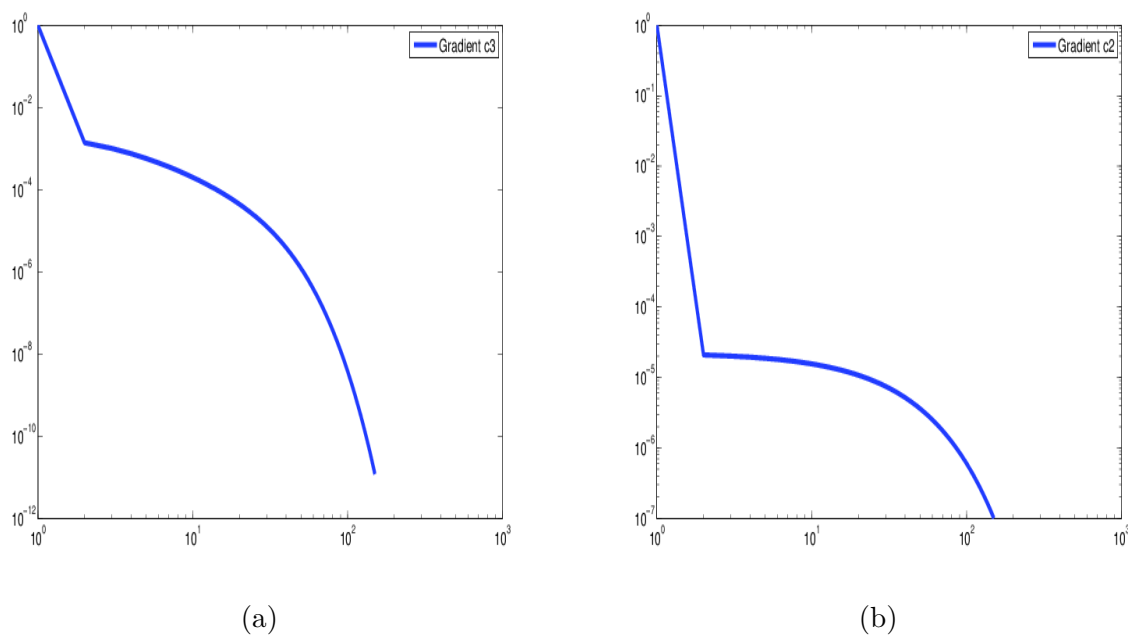


FIGURE 4.15 – Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.

expressions respective de K et C . Nous considérons alors le cas suivant :

$$\begin{cases} K(\psi) = q_2\psi^2 + q_1\psi + q_0, \\ C(\psi) = s_2\psi^2 + s_1\psi + s_0. \end{cases}$$

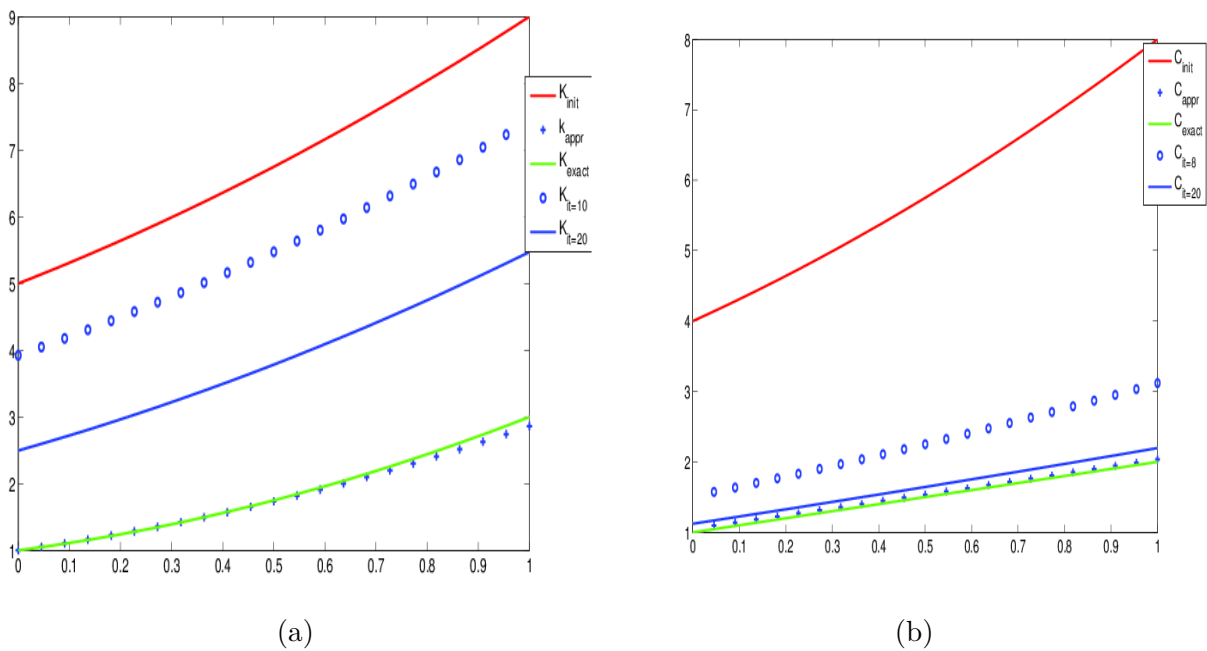
Dans la figure (4.16), nous présentons la convergence pour chaque paramètre hydraulique en partant de la valeur initiale jusqu'à atteindre la valeurs optimale. Ceci est illustré dans la figure (4.16) (a) pour la conductivité et dans la figure (4.16) (b) pour la capacité. Nous présentons dans la table (4.4), les différentes valeurs approchées des coefficients q_i et s_i :

(q_2, q_1, q_0)		(s_2, s_1, s_0)	
(q_2, q_1, q_0) initial	(2.00, 3.00, 5.00)	(s_2, s_1, s_0) initiale	(1.00,3.00,4.00)
(q_2, q_1, q_0) exacte	(1.00, 1.00, 1.00)	(s_2, s_1, s_0) exacte	(0.00, 1.00, 1.00)
(q_2, q_1, q_0) optimal	(0.7753,1.0768,1.0006)	(s_2, s_1, s_0) optimale	(0.0291,0.9551,1.0513)
itération	300	itération	300
$\ \nabla J(P_k)\ $	1.0e-006	$\ \nabla J(P_k)\ $	1,78e-004

TABLE 4.4 – Les valeurs approchées des coefficients q_i et s_i , pour $i = 0, 1, 2$

Dans ce dernier cas, qui regroupe toutes les difficultés précédentes, on constate que les résultats obtenus sont en bon accord avec les solutions exactes.

Nous concluons que, malgré la complexité du problème qui réside dans sa forte non-

FIGURE 4.16 – Convergence de $K(\psi)$ et $C(\psi)$ en fonction des itérations.

linéarité, les résultats numériques restent bons.

Stabilité numérique vis à vis des données bruitées

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la stabilité numérique de l'algorithme proposé. Il s'agit en fait d'étudier la sensibilité des solutions approchées vis à vis des données perturbées. Nous allons, ainsi supposer que les données d'entrée sont perturbées par un niveau de bruit aléatoire, puis nous cherchons à calculer les valeurs approchées de $K(\psi)$ et $C(\psi)$. En effet, les résultats obtenus sont présentés dans les deux tableaux (4.5) et (4.6) qui montrent une variation substantielle des coefficients par rapport au niveau de bruit.

Les valeurs approchées des coefficients de la conductivité K pour différents niveaux de bruit %				
niveau de bruit	0.01	0.1	0.15	0.2
q_0	1.0185	1.0187	1.0189	1.0190
(q_1, q_0)	(0.8576, 1.0326)	(0.9893, 1.0198)	(0.8582, 1.0330)	(0.8585, 1.0331)
(q_2, q_1, q_0)	(1.14, 0.83, 1.03)	(1.17, 0.95, 1.02)	(1.18, 0.98, 1.14)	(1.18, 0.98, 1.17)

TABLE 4.5 – Les valeurs optimales de q_2 , q_1 et q_0 pour différents niveaux de bruit.

Les valeurs approchées des coefficients de la capacité C pour différents niveaux de bruit %				
niveau de bruit	0.01	0.1	0.15	0.2
s_0	1.0225	1.0273	1.0314	1.0825
(s_1, s_0)	(0.976, 1.026)	(0.963, 1.038)	(0.9352, 1.0430)	(0.955, 1.0451)
(s_2, s_1, s_0)	(0.002, 0.975, 1.006)	(0.017, 0.951, 1.032)	(0.08, 0.965, 1.11)	(0.013, 0.972, 1.13)

TABLE 4.6 – Les valeurs optimales de s_2 , s_1 et s_0 pour différents niveaux de bruit.

Méthode d'approximation paramétrique générale

Dans cette section, nous considérons le cas où les paramètres hydraulique ont la forme paramétrique générale utilisée dans le calcul du gradient de J . Nous allons ainsi traiter différentes formes fonctionnelles de K et C à savoir la forme rationnelle, irrationnelle, trigonométrique et exponentielle.

Cas d'une forme rationnelle

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas où la conductivité hydraulique et la capacité capillaire ont une forme rationnelle en fonction de la pression :

$$K(x) = \frac{R(x)}{S(x)} \quad \text{et} \quad C(x) = \frac{M(x)}{N(x)},$$

où R , S , M et N sont des polynômes en x tels que $S(x) \neq 0$ et $N(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Plus précisément, nous considérons les expressions suivantes

$$K(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad C(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$$

Dans les figures (4.17)-(4.18)-(4.19), nous présentons respectivement les valeurs exactes et approchées de la solution du problème d'état ψ , de la conductivité K et de la capacité C . On remarque que nous obtenons des bonnes approximations. Dans la figure (4.20), nous présentons la variation de la fonctionnelle coût J_h en fonction du nombre d'itérations.

Cas d'une forme irrationnelle

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas où la conductivité hydraulique et la capacité capillaire ont une forme irrationnelle en fonction de la pression :

$$K(x) = \sqrt{R(x)} \quad \text{et} \quad C(x) = \sqrt{M(x)},$$

où R et M sont des polynômes en x tels que $R(x) \geq 0$ et $M(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

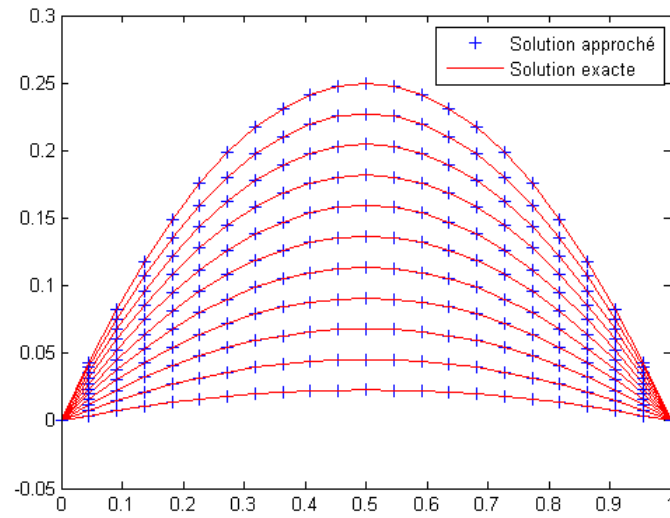


FIGURE 4.17 – Valeurs exactes et approchées de ψ .

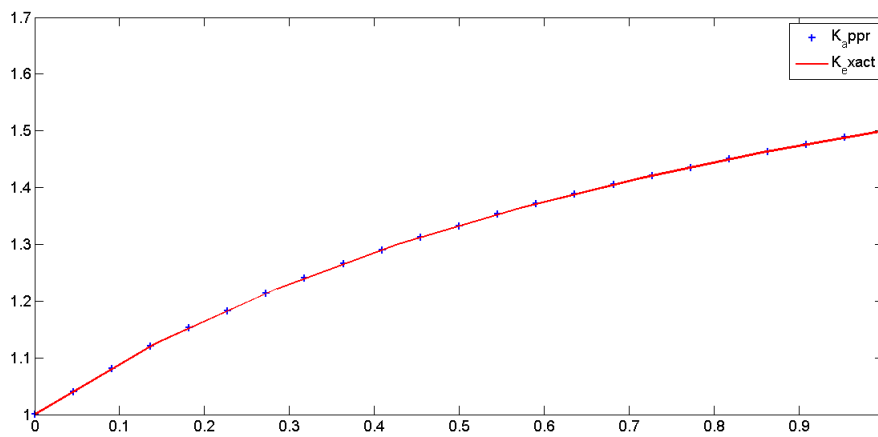


FIGURE 4.18 – Valeurs exactes et approchées de $K(\psi)$.

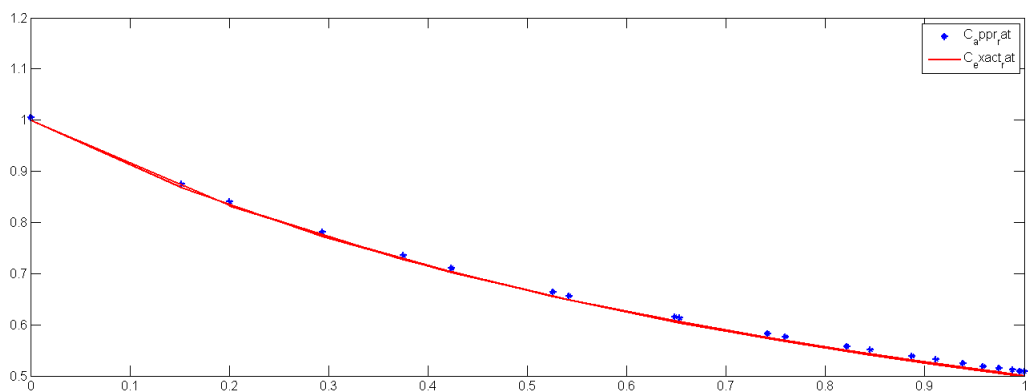


FIGURE 4.19 – Valeurs exactes et approchées de $C(\psi)$.

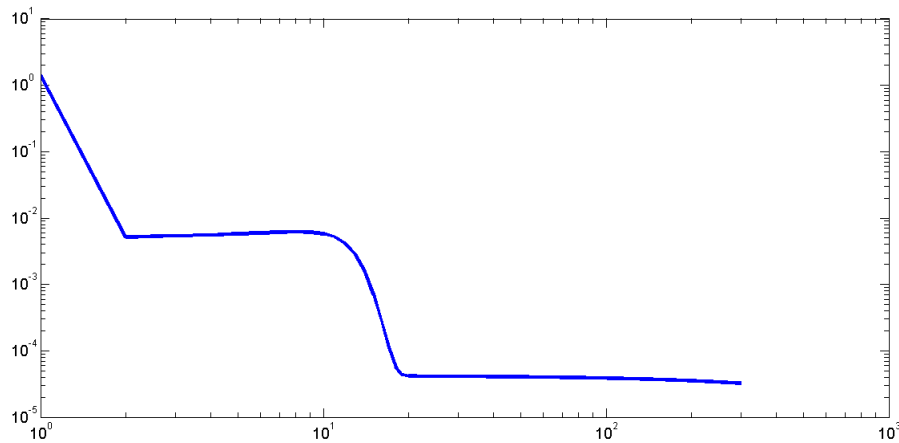


FIGURE 4.20 – Variation de la fonctionnelle coût en fonction du nombre d'itérations.

Plus précisément, nous considérons les expressions suivantes

$$K(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \quad \text{et} \quad C(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Dans la figure (4.21), nous présentons la variation de la fonctionnelle coût en fonction du nombre d'itérations. Nous présentons aussi respectivement dans les figures (4.22)-(4.23), les valeurs exactes et approchées de la conductivité K et de la capacité C . Nous signalons que dans ce cas, nous obtenus des bons résultats numériques.

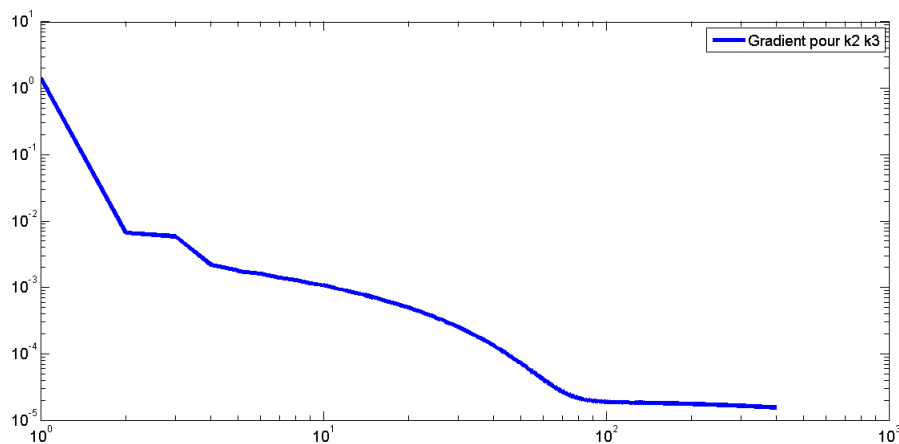


FIGURE 4.21 – Variation de la fonctionnelle coût en fonction du nombre d'itérations.

Cas d'une forme trigonométrique

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas où la conductivité hydraulique et la capacité capillaire ont une forme trigonométrique en fonction de la pression, à savoir les

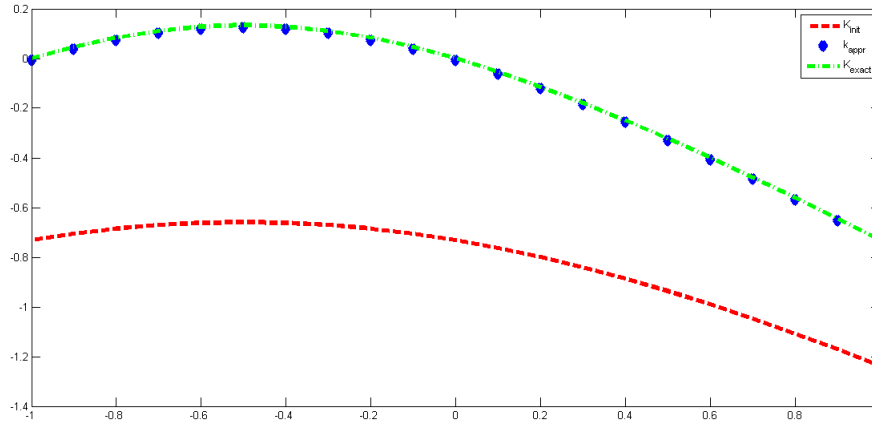


FIGURE 4.22 – Convergence de la conductivité initiale vers la solution approchée.

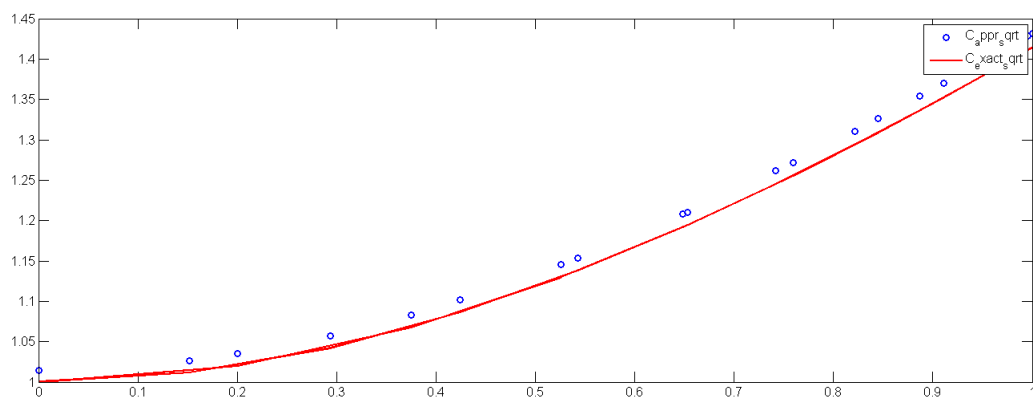


FIGURE 4.23 – Capacité capillaire C exacte et approchée.

expressions suivantes :

$$K(x) = \sum_{r=1}^I (q_{1,r} \cos(q_{2,r}\pi x) + q_{3,r} \sin(q_{4,r}\pi x))$$

et

$$C(x) = \sum_{r=1}^J (s_{1,r} \cos(s_{2,r}\pi x) + s_{3,r} \sin(s_{4,r}\pi x)),$$

où $(q_{i,r})_r$ et $(s_{i,r})_r$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ sont des réels donnés.

Plus précisément, nous considérons les expressions suivantes

$$K(x) = 2\cos(\pi x) \quad \text{et} \quad C(x) = \cos(2\pi x) - \sin(2\pi x).$$

Dans la figure (4.24), nous présentons les valeurs exactes et approchées de la solution du problème d'état ψ . Nous présentons également respectivement les valeurs exactes et approchées de la conductivité K et de la capacité C dans les figures (4.25)-(4.26). Nous remarquons que dans ce cas aussi nous obtenons des bonnes approximations.

Cas d'une forme exponentielle

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas où la conductivité hydraulique et la capacité capillaire ont une forme exponentielle en fonction de la pression, à savoir les deux expressions suivantes :

$$K(x) = A \exp(q(x))$$

et

$$C(x) = B \exp(s(x)),$$

où A et B sont des réels, et $q(x)$ et $s(x)$ sont des polynômes en ψ .

Plus précisément, nous considérons les expressions suivantes

$$K(x) = \exp(x^2 + x + 1) \quad \text{et} \quad C(x) = \exp(x^2 + 1).$$

Dans les figures (4.27)-(4.29)-(4.30), nous présentons respectivement les valeurs exactes et approchées de la solution du problème d'état ψ , de la conductivité K et de la capacité C . Ainsi, nous présentons dans la figure (4.28) la variation de la fonctionnelle coût J_h en fonction du nombre d'itérations.

Remarque 4.1 – *On remarque que pour les différents tests numériques, l'approche proposée nous fournit des bonnes approximations de la conductivité hydraulique et la capacité capillaire qui sont les paramètres les plus significatifs du modèle.*

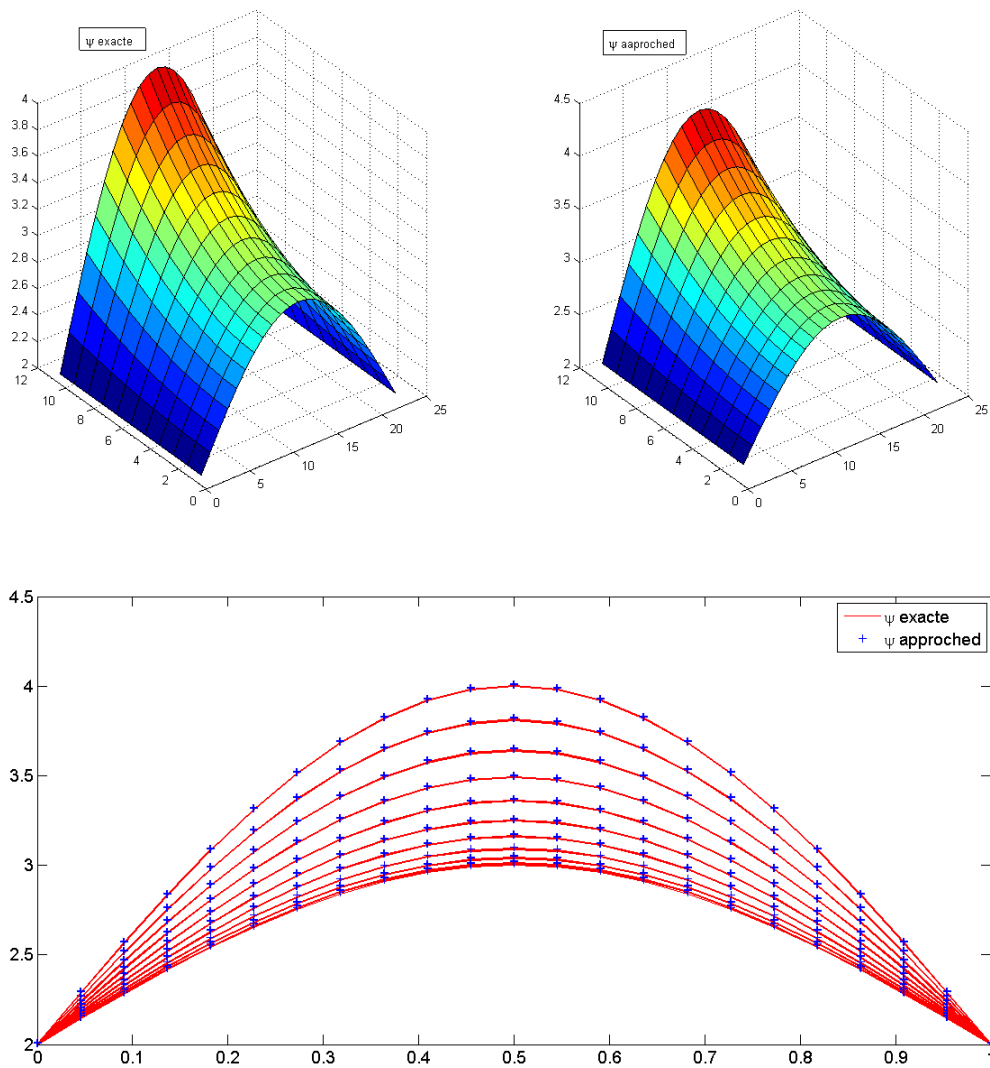


FIGURE 4.24 – Représentation de la solution approchée du problème d'état.

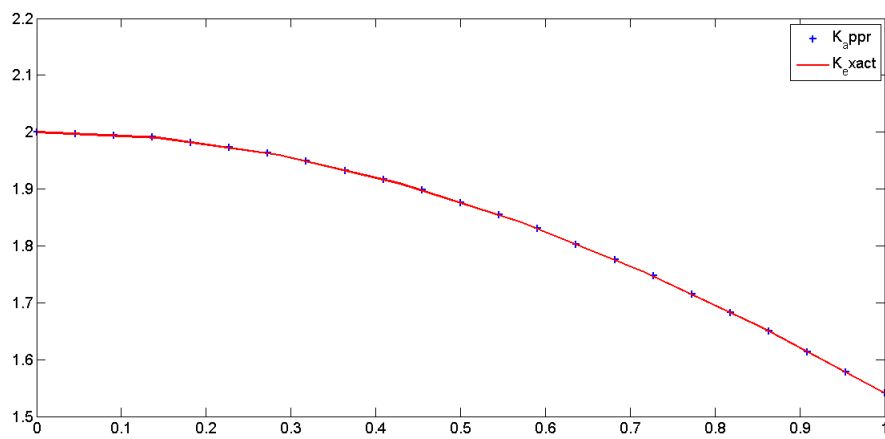


FIGURE 4.25 – Conductivité hydraulique exacte et approchée.

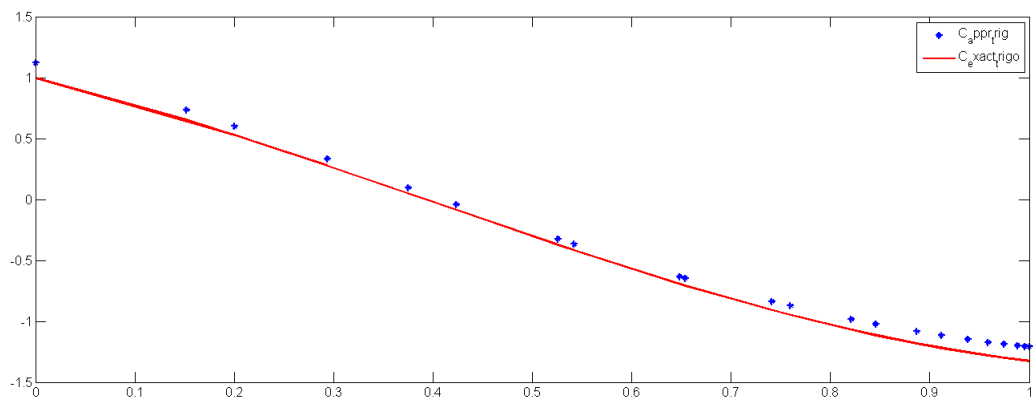


FIGURE 4.26 – Capacité capillaire exacte et approchée.

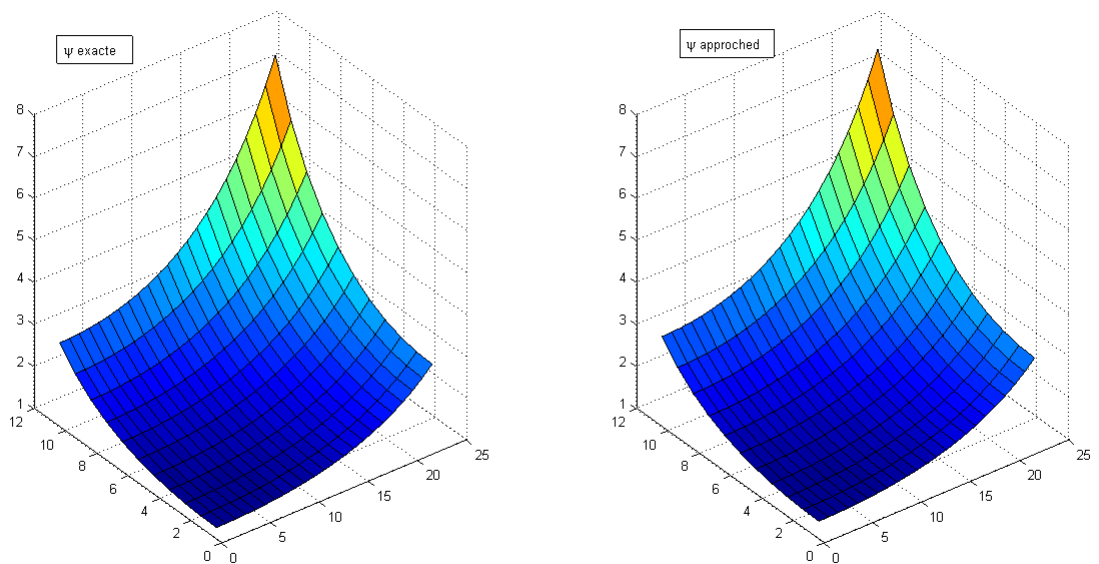
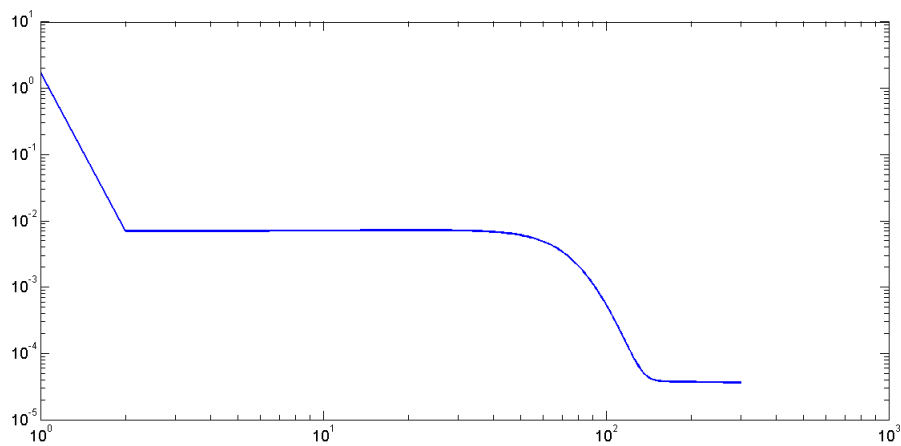


FIGURE 4.27 – Représentation de la solution approchée et exacte du problème d'état.

FIGURE 4.28 – Variation de la fonctionnelle coût J_h en fonction du nombre d'itérations.

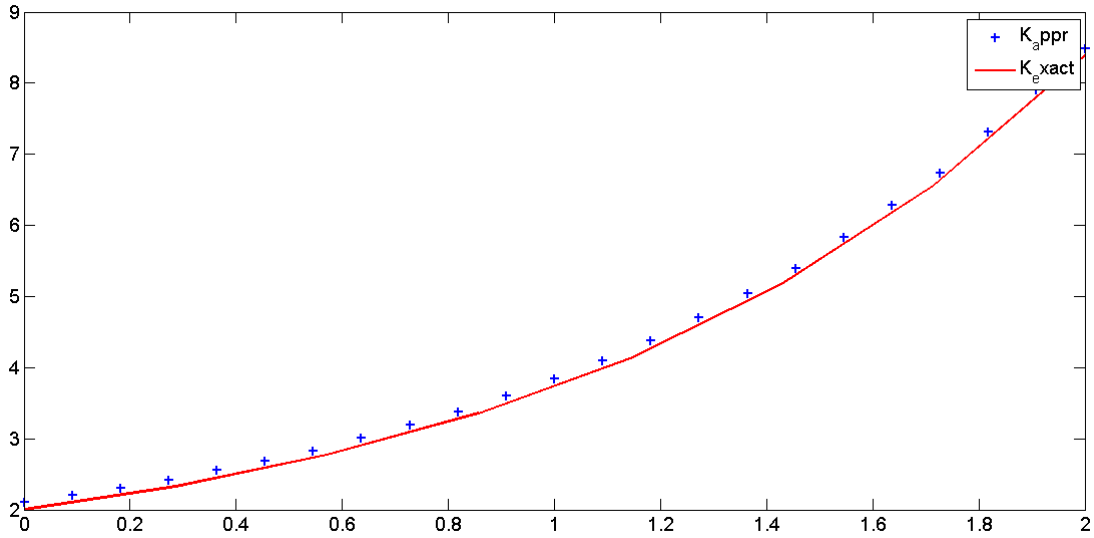


FIGURE 4.29 – Représentation de la conductivité approchée.

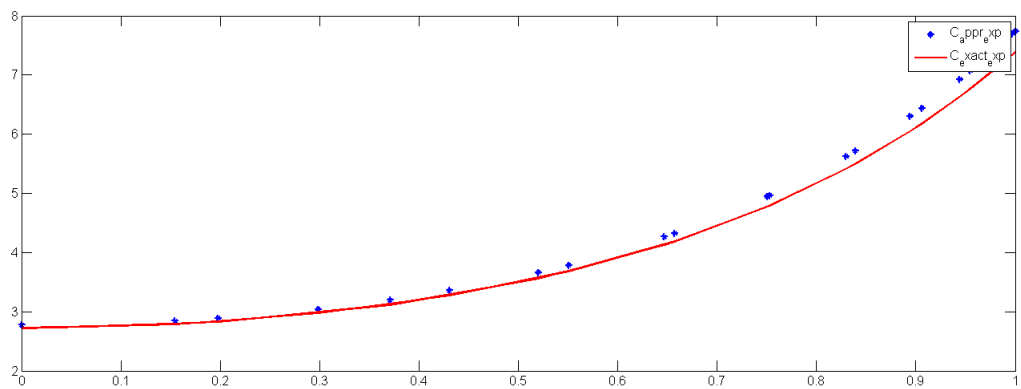


FIGURE 4.30 – Représentation de la capacité approchée.

- Notons également que dans ce paragraphe, nous avons considéré, pour les différents tests numériques, les cas où les paramètres hydrauliques ont la même forme fonctionnelle. Mais bien évidemment notre approche reste valide même si nous combinons entre les différentes formes fonctionnelles pour les expressions de K et C .

Cas du modèle de Van-Genuchten

L'une des apports les plus significatifs dans cette thèse est que notre approche nous permet de reconstruire les paramètres du modèle classique pour l'équation de Richards, qui est à savoir le modèle de Van-Genuchten qui fait intervenir la conductivité hydraulique K et la teneur en eau θ . En effet, nous considérons les expressions de θ et K suivantes :

$$\theta(\psi) = [1 + (\alpha\psi)^n]^{-m}$$

et

$$K(\psi) = k_s [1 + (\frac{\psi}{\psi_g})^n]^{\eta m},$$

où $\alpha = 0.001975$, $n = 1.163$, $m = 0.149$, $k_s = 0.125$, $\psi_g = 0.365$ et $\eta = 1.163$. Nous présentons dans les figure (4.31)-(4.32) respectivement les valeurs exactes et approchées de la conductivité hydraulique K et de la teneur en eau θ . Nous remarquons que, malgré la forme compliqué des expressions pour ces deux paramètres, les résultats numériques obtenus sont bons.

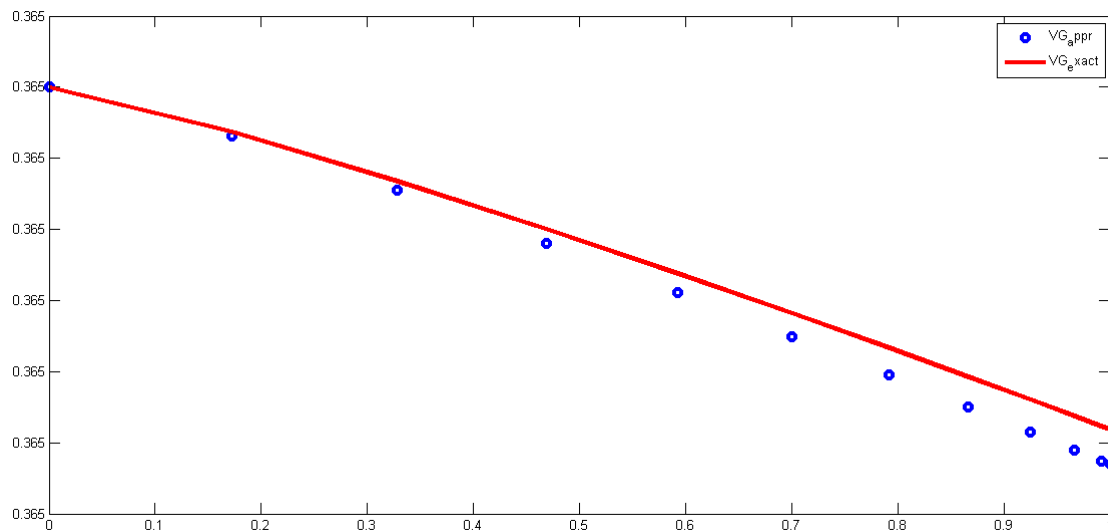


FIGURE 4.31 – Représentation de la conductivité hydraulique approchée.

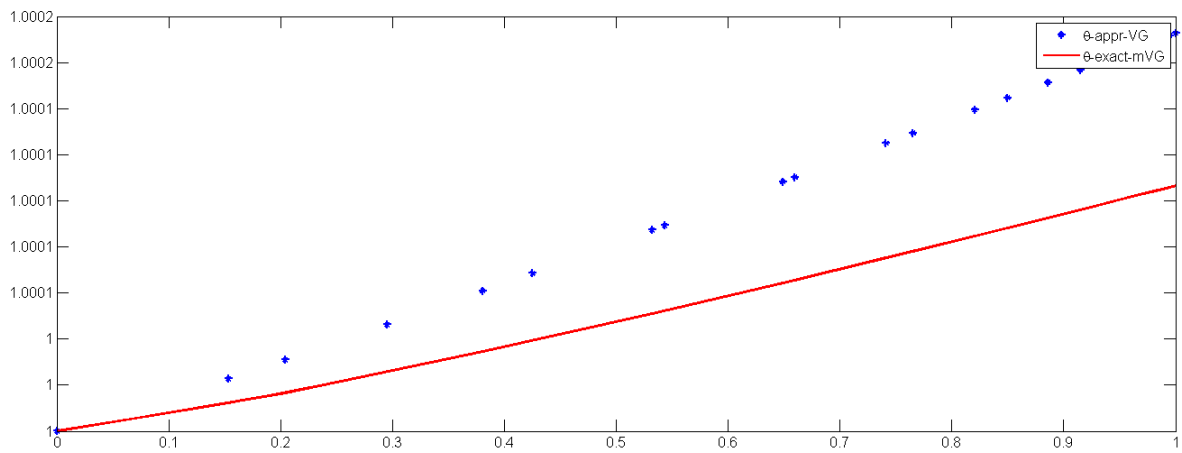


FIGURE 4.32 – Représentation de la teneur en eau approchée.

Identification du coefficient de réaction dans une équation parabolique non linéaire

Ce chapitre est dédié à un problème inverse de transfert de la chaleur qui se trouve au coeur de l'occupation de l'industrie moderne. En effet, nous étudions en détails un problème inverse d'identification du paramètre de convection dans une équation parabolique non linéaire à partir des données sur-spécifiées à l'instant final. Cependant, nous adoptons une nouvelle stratégie afin d'obtenir une solution précise et stable tout en réduisant les coûts de calcul. En effet, nous proposons une approche variationnelle de ce problème basée sur une semi-discrétisation en temps et une reformulation en un problème d'optimisation en contrôle optimal. Ainsi, sur le plan théorique, nous avons étudié l'existence du problème d'état non linéaire via l'utilisation du degré topologique de Leray Schauder [77]. Puis, nous avons établie l'existence d'une solution optimale. Ensuite sur le plan numérique, le problème d'optimisation est approché en utilisant une méthode qui combine la discrétisation par un schéma en éléments finis, l'itération de Newton et les algorithmes évolutionnaires.

5.1 Position et formulation du problème

Nous nous intéressons à l'étude numérique du problème inverse du transfert de chaleur pour déterminer le coefficient de réaction dans une équation parabolique non linéaire, à partir de mesures observées sur la température finale. Ce problème inverse d'identification des paramètres consiste à déterminer la température u et le coefficient de réaction p , solution du problème suivant

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + p(x) f(u) = \psi(t, x) & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \forall x \in \Omega \\ u(t, \cdot)|_{\partial\Omega} = 0 & \forall t \in]0, T[, \end{cases} \quad (5.1)$$

à partir de l'observation supplémentaire

$$u(T, x) = g(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (5.2)$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$, $\psi \in L^2(]0, T[\times \Omega)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$ et la fonction f est continue et satisfait les hypothèses suivantes :

$$f(0) = 0, \quad (5.3)$$

$$\text{il existe } M > 0, \text{ tel que } |f(s)| \leq Ms, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.4)$$

et

$$(f(s) - f(t))(s - t) \geq 0, \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Dans la suite, nous allons proposer une méthode d'approximation de ce problème basée sur une semi-discrétisation temporelle du problème (P) et une reformulation en un problème de contrôle optimal. Pour cela, nous utilisons une discrétisation temporelle du problème (5.1), en nous basons sur un schéma d'Euler implicite (connu pour sa stabilité inconditionnelle). Nous sommes amenés ainsi à résoudre une succession de problème stationnaire à chaque instant que nous reformulons en des problèmes d'optimisation en contrôle optimal. Considérons $(t_m)_m$ une partition uniforme de l'intervalle $[0, T]$ telle que $t_m = m\tau$, pour $m = 0, \dots, M$, avec $\tau = \frac{T}{M}$. Le problème d'état discret s'écrit : Étant donné $u^0 = u_0$, nous cherchons à déterminer u^{m+1} , la solution du problème à l'instant t_{m+1} :

$$\begin{cases} u^{m+1} - \tau \Delta u^{m+1} + \tau p f(u^{m+1}) = \tau \psi^{m+1} + u^m & \text{dans } \Omega \\ u^{m+1}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

où

$$\psi^{m+1}(x) = \psi(t_{m+1}, x).$$

Pour l'approximation du problème inverse (5.1) - (5.2), nous proposons sa reformulation en un problème de contrôle optimal en optimisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{p \in \mathcal{U}_{ad}} J(p) \\ \text{où } J(p) = j(u^M(p)) = \int_{\Omega} |u^M(p) - g|^2 dx, \\ \text{sujet à } u^0 = u_0 \text{ et } u^m, \text{ pour } m = 1, \dots, M, \text{ solution du problème} \\ (PE_m) \left\{ \begin{array}{l} u^m - \tau \Delta u^m + \tau p f(u^m) = \tau \psi^m + u^{m-1} \quad \text{dans } \Omega, \\ u^m = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.7)$$

où l'espace des contrôles admissibles est défini comme suit :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{p \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega) / 0 < \alpha \leq p \leq \beta \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } \|\nabla p\|_{0,\Omega} \leq C_0\}.$$

avec α , β et C_0 sont des constantes strictement positives données.

Remarque 5.1 *Si le problème (5.1) – (5.2) admet une solution $(u, p(x))$ avec $p \in \mathcal{U}_{ad}$, nous prouvons que, le problème (5.1) – (5.2) est équivalent au problème (5.7), la démonstration se fait de la même manière que dans le chapitre 3 (voir le lemme 3.1). Dans, le cas contraire, la formulation de contrôle optimal proposée présente d'un point de vue pratique, un moyen précis pour résoudre le problème inverse (5.1) – (5.2).*

5.2 Existence d'une solution optimale

Afin de montrer que le problème de contrôle optimal est bien posé, nous devons montrer que pour tout $p \in \mathcal{U}_{ad}$, la suite des problèmes d'état (PE_m) , pour tout $m = 1, \dots, M$, admet une solution unique.

Dans toute la suite, nous notons par C une constante générique strictement positive.

Existence et unicité des solutions des problèmes d'état

Dans ce qui suit, nous omettons l'indice m et nous considérons le problème d'état typique suivant : étant donné $\Phi \in L^2(\Omega)$, nous cherchons à déterminer la solution du problème :

$$(PE) \left\{ \begin{array}{l} -\tau \Delta u + u + \tau p f(u) = \Phi, \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de sa solution, nous utiliserons l'outil du degré topologique de Leray-Schauder, ce qui est plus puissant et plus général et souvent plus

facile à utiliser que les théorèmes de points fixes classiques [68]. Pour cela, nous avons besoin d'une définition de la formulation faible de (PE) et d'une estimation à priori de la solution, basée sur les hypothèses (5.3) - (5.5).

Définition 5.1 *Sous les hypothèses (5.3) - (5.5), on dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est la solution faible de (PE), si elle satisfait*

$$\tau \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx + \tau \int_{\Omega} p(x) f(u) v dx = \int_{\Omega} \Phi v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.9)$$

Nous avons l'estimation à priori donnée par le lemme suivant.

Lemme 5.1 *Etant donné $p \in \mathcal{U}_{ad}$, si u est la solution de (5.9), alors il existe $C_1 > 0$, tel que :*

$$|u|_{1,\Omega} \leq C_1,$$

où $|u|_{1,\Omega} = \|\nabla u\|_{0,\Omega}$.

Démonstration

En prenons $v = u$, dans la formulation variationnelle (5.9) nous obtenons

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \tau \int_{\Omega} p(x) f(u) u dx \leq \int_{\Omega} |\Phi| |u| dx.$$

En utilisant le fait que $\alpha \leq p \leq \beta$, et d'après les hypothèses (5.3) - (5.5), nous aurons

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx \leq \int_{\Omega} |\Phi| |u| dx.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, nous obtenons

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\Phi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

par suite

$$|u|_{1,\Omega} \leq C_1,$$

où $C_1 = \frac{C \|\Phi\|_{L^2(\Omega)}}{\tau}$.

Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 5.1 *Pour tout $p \in \mathcal{U}_{ad}$, le problème d'état (5.9) admet une solution unique.*

Démonstration

Considérons l'opérateur G_s , pour $s \in [0, 1]$, défini par :

$$\begin{aligned} G_s : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ \bar{u} &\longrightarrow u \end{aligned}$$

où u est la solution unique du problème :

$$\tau \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} u v \, dx = \int_{\Omega} \Phi v \, dx - s\tau \int_{\Omega} p f(\bar{u}) v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (5.10)$$

obtenue grâce au lemme de Lax-Milgram [54].

Montrons que G_1 admet un point fixe. Pour cela, nous montrons tout d'abord que G_s est continu et compact.

Nous commençons par montrer que G_s est continu, ce qui revient à montrer que si $(\bar{u}_n)_n$ est une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\bar{u}_n \longrightarrow \bar{u} \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty,$$

alors

$$u_n = G_s(\bar{u}_n) \longrightarrow u = G_s(\bar{u}) \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

Notons par u_n (respectivement u) la solution unique de problème (5.10) associée à \bar{u}_n (respectivement à \bar{u}), en soustrayant ces deux formulations et en prenant $v = u_n - u$, nous obtenons :

$$\tau \int_{\Omega} |\nabla(u_n - u)|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u_n - u|^2 \, dx = -s\tau \int_{\Omega} p(f(\bar{u}_n) - f(\bar{u}))(u_n - u) \, dx. \quad (5.11)$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Poincaré et le fait que p est borné, nous aurons

$$\|\nabla(u_n - u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|f(\bar{u}) - f(\bar{u}_n)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u_n - u)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.12)$$

Ce qui signifie que

$$|u_n - u|_{1,\Omega} \leq C \|f(\bar{u}) - f(\bar{u}_n)\|_{0,\Omega}.$$

Ainsi, la continuité de G_s découle de celle de f .

Afin de montrer la compacité de G_s , nous considérons une suite bornée $(\bar{u}_n)_n$ dans $H_0^1(\Omega)$, pour laquelle on associe la suite $(u_n)_n$, telle que $u_n = G_s(\bar{u}_n)$ est l'unique solution de (5.10) associée à \bar{u}_n . Il suffit alors de montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ qui est de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, en prenant $v = u_n$ dans la formulation (5.10) associée à \bar{u}_n , on obtient

$$|u_n|_{1,\Omega} \leq \|\Phi\|_{0,\Omega} + \tau\beta \|f(\bar{u}_n)\|_{0,\Omega}.$$

D'après l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite notée encore $(u_n)_n$ qui converge dans $L^2(\Omega)$.

Soit u_p (respectivement u_q) la solution unique de la formulation (5.10) associée à \bar{u}_p

(respectivement à \bar{u}_q), en soustrayant ces deux formulations, nous obtenons

$$\|u_p - u_q\|_{1,\Omega}^2 \leq 2C \sup_k \|f(\bar{u}_k)\| \|u_p - u_q\|_{0,\Omega},$$

ce qui nous permet de conclure que (u_n) est une suite de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$. D'où G_s est compacte.

Puisque G_s est un opérateur continu compact, pour montrer qu'il admet un point fixe, on considère la boule ouverte B , définie par :

$$B = \{u \in H_0^1(\Omega), |u|_{1,\Omega} < R\}$$

où $R = C_1 + 1$. Il est clair que l'opérateur G_s n'admet aucun point fixe sur ∂B . Par conséquent, la fonction $\text{deg}[I - G_s, B, 0]$ est définie et indépendante de s . De plus, elle vérifie les propriétés du théorème du degré topologique de Leray-Schauder (1.9).

Or, puisque G_0 correspond au problème :

$$\int_{\Omega} uv + \tau \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (5.13)$$

qui admet évidemment une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$, alors

$$\text{deg}[I - G_0, B, 0] = +1.$$

Ainsi

$$\text{deg}[I - G_1, B, 0] = +1.$$

Par conséquent, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $G_1(u) = u$.

Montrons maintenant l'unicité du point fixe, pour cela, nous supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (5.9), en soustrayant leurs formulations associées, on trouve

$$\tau \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx + \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx = -\tau \int_{\Omega} p(f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2) dx. \quad (5.14)$$

En utilisant l'hypothèse (5.5) et le fait que p est positif, nous obtenons :

$$|u_1 - u_2|_{1,\Omega} \leq 0.$$

D'où le résultat.

Existence d'une solution optimale

Nous prouvons maintenant l'existence d'une solution du problème de contrôle optimal (5.7), qui est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 5.1 *Le problème de contrôle optimal (5.7) admet au moins une solution dans \mathcal{U}_{ad} .*

Démonstration

Soit $(p_n)_n$ une suite minimisante de J dans U_{ad} telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(p_n) = \inf_{p \in U_{ad}} J(p).$$

Il est facile de voir que

$$\|p_n\|_{1,\Omega} \leq C, \quad \forall n,$$

donc on peut extraire une sous-suite notée encore $(p_n)_n$ telle que

$$p_n \rightarrow p^* \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faiblement quand } n \rightarrow \infty.$$

D'après l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite notée encore $(p_n)_n$ telle que

$$p_n \rightarrow p^* \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fortement quand } n \rightarrow \infty, \quad (5.15)$$

de plus

$$\nabla p_n \rightarrow \nabla p^* \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faiblement quand } n \rightarrow \infty,$$

par suite, comme $\|\nabla p_n\|_{0,\Omega} \leq C_0 \quad \forall n$, alors $\|\nabla p^*\|_{0,\Omega} \leq C_0$. D'autre part, on a $\alpha \leq p_n \leq \beta$ p.p. dans Ω , donc

$$\alpha \leq p_n(x) \leq \beta, \quad \forall x \in \Omega \setminus M_n, \quad \text{avec} \quad \mu(M_n) = 0,$$

d'où

$$\alpha \leq p_n(x) \leq \beta, \quad \forall x \in \Omega \setminus M, \quad \text{où} \quad M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n.$$

D'après la convergence (5.15), on peut extraire une sous-suite notée encore $(p_n)_n$ telle que

$$p_n \rightarrow p \text{ p.p. dans } \Omega \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

donc

$$p_n(x) \rightarrow p(x) \quad \forall x \in \Omega \setminus N, \quad \text{avec} \quad \mu(N) = 0,$$

on peut alors conclure que

$$\alpha \leq p^*(x) \leq \beta, \quad \forall x \in \Omega \setminus (M \cup N),$$

d'où $\alpha \leq p^* \leq \beta$ p.p. dans Ω , par suite $p^* \in U_{ad}$.

Ce qui nous permet de conclure que U_{ad} est compacte pour la topologie faible de $H^1(\Omega)$ et forte dans $L^2(\Omega)$.

Montrons maintenant que la fonctionnelle J est continue sur U_{ad} , pour cela montrons tout d'abord la continuité du problème d'état, ce qui revient à montrer que pour chaque itération de temps $k \in \{1, \dots, M\}$, la solution u_n^k du problème variationnel (PE_k) associée à p_n converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers la solution w^k du problème variationnel de (PE_k) associée à p^* , quand n tend vers ∞ . Ainsi, en prenant $v = u_n^k$ dans la formulation variationnelle de (PE_k) associée à p_n , et en utilisant les mêmes techniques que dans le lemme (5.1), nous montrons que

$$|u_n^k|_{1,\Omega} \leq C_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On peut alors extraire une sous-suite notée encore $(u_n^k)_n$ telle que

$$u_n^k \rightharpoonup w^k \text{ dans } H_0^1(\Omega), \forall k \in \{1, \dots, M\}$$

et

$$u_n^k \rightarrow w^k \text{ dans } L^2(\Omega), \forall k \in \{1, \dots, M\},$$

en utilisant l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, nous obtenons les convergences suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_n^k \nabla v dx &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla w^k \nabla v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} u_n^k v dx &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} w^k v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Il reste alors à montrer que

$$\int_{\Omega} p_n f(u_n^k) v dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} p^* f(w^k) v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Notons par

$$I = \int_{\Omega} p_n f(u_n^k) v dx - \int_{\Omega} p^* f(w^k) v dx,$$

et utilisons la décomposition

$$I = I_1 + I_2$$

où $I_1 = \int_{\Omega} (p_n - p^*) f(u_n^k) v \, dx$ et $I_2 = \int_{\Omega} p^* (f(u_n^k) - f(w^k)) v \, dx$.

En utilisant l'hypothèse (5.4) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous montrons que $I_1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Nous avons également que la convergence $I_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, découle de la continuité de f , le fait que p^* est borné et la convergence $u_n^k \rightarrow w^k$ dans $L^2(\Omega)$, $\forall k \in \{1, \dots, M\}$. Donc, $w^k = u^k$ est la solution de la formulation variationnelle (PE_k) associée à p^* .

Montrons maintenant la continuité de J , nous avons Nous avons

$$|J(p_n) - J(p^*)| \leq \frac{1}{2} \|u_n^M - u^M\|_{L^2(\Omega)} (\|u_n^M\|_{L^2(\Omega)} + \|u^M\|_{L^2(\Omega)} + 2\|g\|_{L^2(\Omega)}).$$

Puisque u_n^M est la solution du problème variationnel de (PE_M) associée à p_n converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers u^M la solution du problème variationnel (PE_M) associée à p^* , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(p_n) = J(p^*) = \inf_{p \in \mathcal{U}_{ad}} J(p).$$

Cela nous permet de conclure que (5.7) admet au moins une solution dans \mathcal{U}_{ad} .

5.3 Approximation numérique du problème d'optimisation

Dans cette section, nous nous intéressons à l'approximation du problème en contrôle optimal (5.7). Ainsi, le problème d'optimisation est résolu en utilisant une approche évolutionnaire présentée dans l'algorithme (5), et la suite des problèmes d'état auxiliaires est approchée par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 combinée à l'itération de Newton.

Afin de tester la fiabilité de l'algorithme, nous avons traité plusieurs exemples. Dans ce cadre, nous allons présenter pour chacun des exemples traités, dans un ordre de difficulté croissant, des résultats numériques montrant l'évolution de la fonctionnelle de coût J en fonction du nombre d'itérations, la solution approchée u ainsi qu'une comparaison entre les valeurs exactes et approchées de p .

Dans tous les exemples suivants, Ω sera pris le carré unité.

Exemple 1

Dans cet exemple, nous commençons par un cas simple où le coefficient de réaction $p(x, y)$ est constant. Les données physiques et géométriques sont : $p_{ex}(x, y) = 3$, $f(u) = 1 - \exp(-u)$, $\phi(x) = 0$, $T = 10$ et $\Delta t = 0.1$.

Algorithm 5 : Algorithme génétique

1. Choisissez une précision souhaitée ϵ .
2. Choisir x_i et x_f .
3. $t = 0$, générer au hasard une population $P(t)$ in $[x_i, x_f]$.
4. $t = t + 1$, pour chaque élément P_i de la population $P(t)$ avec $i = 1, \dots, N$ faire
 - (a) Résoudre le problème de l'état correspond à P_i .
 - (b) Calculer $J(P_i)$.
5. Opération génétique.
 - (a) Sélection.
 - (b) Croisement.
 - (c) Mutation.
6. Si $|J(P_i)| < \epsilon$, aller à l'étape 7. Sinon, aller à l'étape 4.
7. Fin.

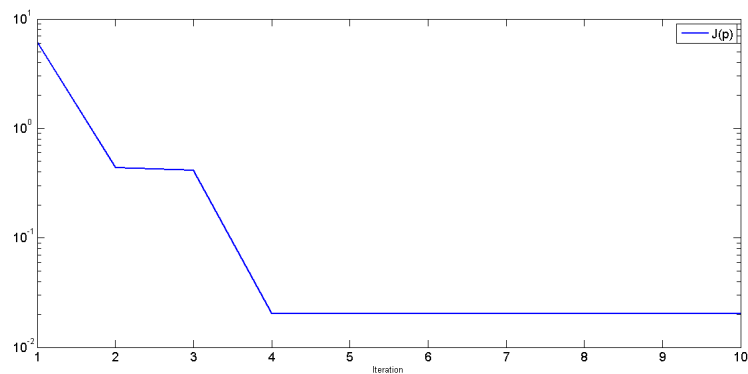
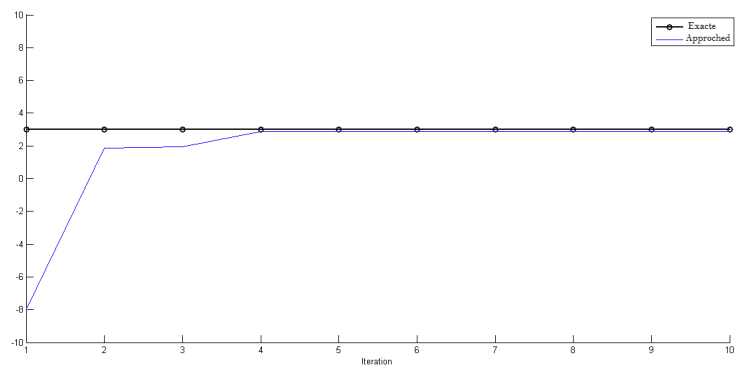


FIGURE 5.1 – Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.

FIGURE 5.2 – Valeurs exactes et approchées de p .

Dans la figure (5.1), on constate que le coût atteint une erreur d'ordre 10^{-2} après

seulement quatre itérations.

Exemple 2

Dans cet exemple, nous considérons le cas où le coefficient de réaction $p(x, y)$ est une fonction affine en fonction de x . Les données physiques et géométriques sont :

$$p_{ex}(x, y) = 3x + 5, f(u) = 1 - \exp(-u), \phi(x) = 0, T = 10 \text{ et } \Delta t = 0.1.$$

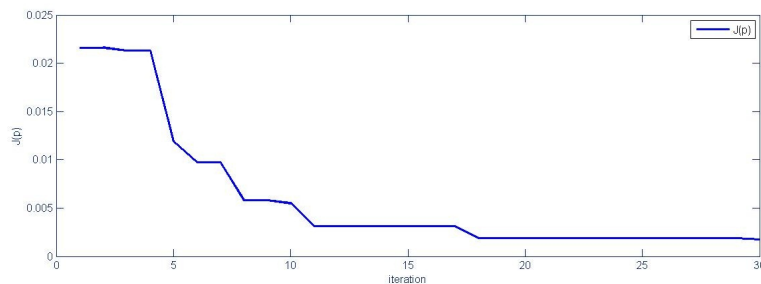


FIGURE 5.3 – Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.

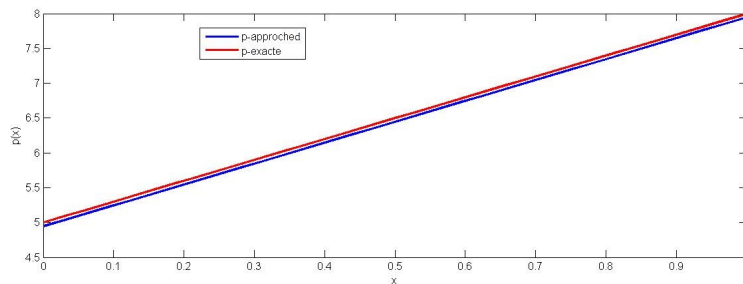


FIGURE 5.4 – Comparaison entre p exact et approché

Dans la figure (5.3), on constate que le coût atteint une erreur d'ordre 2.10^{-3} après 18 itérations.

Exemple 3

Contrairement aux exemples précédent, dans cet exemple, nous considérons le cas où le coefficient de réaction $p(x, y)$ est une fonction exponentielle en fonction de x . Les données physiques et géométriques dans ce cas sont :

$$p_{ex}(x, y) = \exp(x), f(u) = 1 - \exp(-u), \phi(x) = 0, T = 10 \text{ et } \Delta t = 0.1.$$

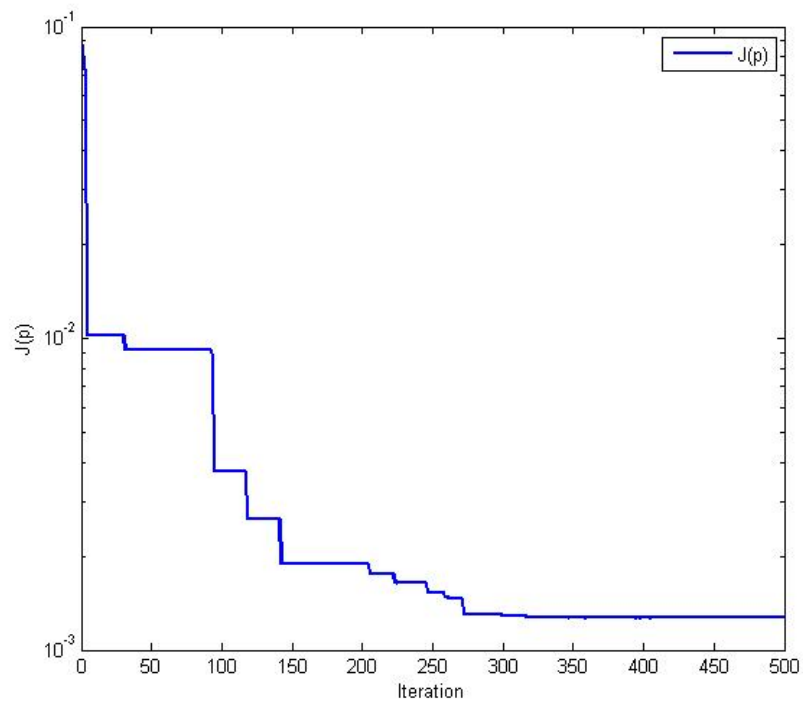
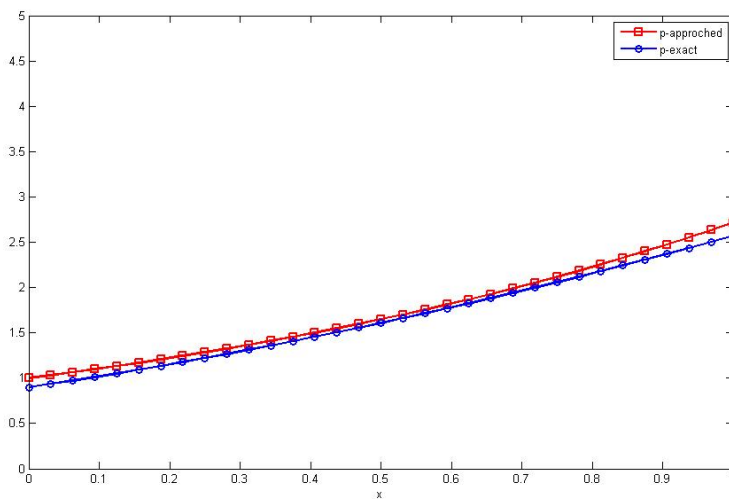


FIGURE 5.5 – Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.

FIGURE 5.6 – Comparaison entre p exact et approché

Dans la figure (5.5), nous constatons que le coût atteint une erreur d'ordre 2.10^{-3} après 250 itérations.

Dans la suite nous présentons des exemples d'approximation du coefficient de réaction dans le cas où p dépend des deux variables d'espace.

Exemple 4

Dans ce paragraphe et contrairement aux exemples précédents, le coefficient de réaction est une fonction de x et y . Dans un premier temps, nous considérons la configuration associée aux données suivantes :

$$p_{ex}(x, y) = x + y + 1, f(u) = 1 - \exp(-u), \phi(x) = 0, T = 10 \text{ et } \Delta t = 0.1.$$

La figure (5.7) montre la décroissance de la fonctionnelle coût J par rapport au nombre d'itérations. On constate que le coût atteint une erreur d'ordre 10^{-2} après 100 itérations.

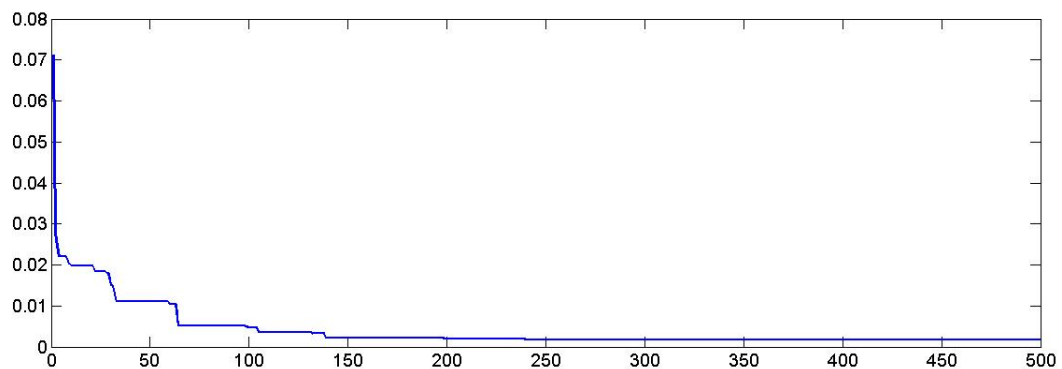


FIGURE 5.7 – Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.

La figure (5.8) présente l'allure du coefficient de réaction exacte p_{ex} et approché p_{app} , on remarque qu'ils ont la même allure.

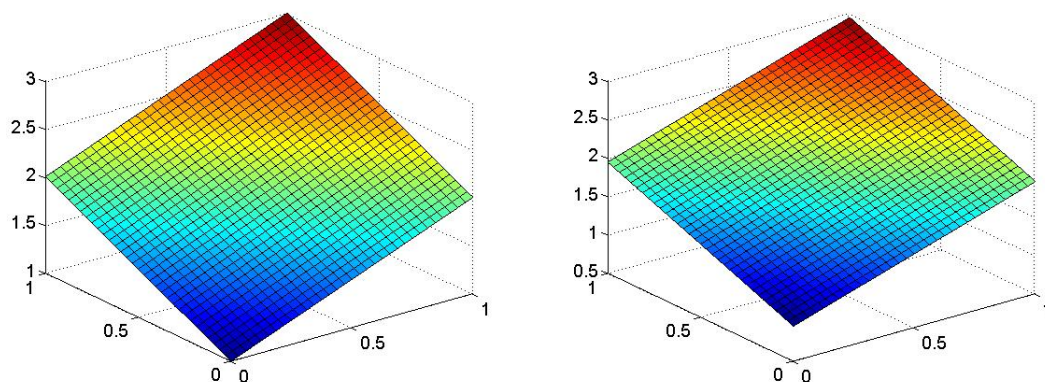
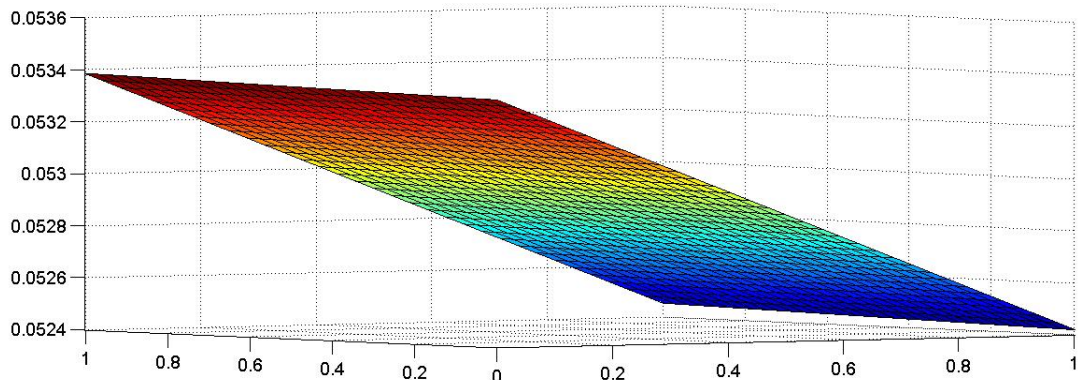
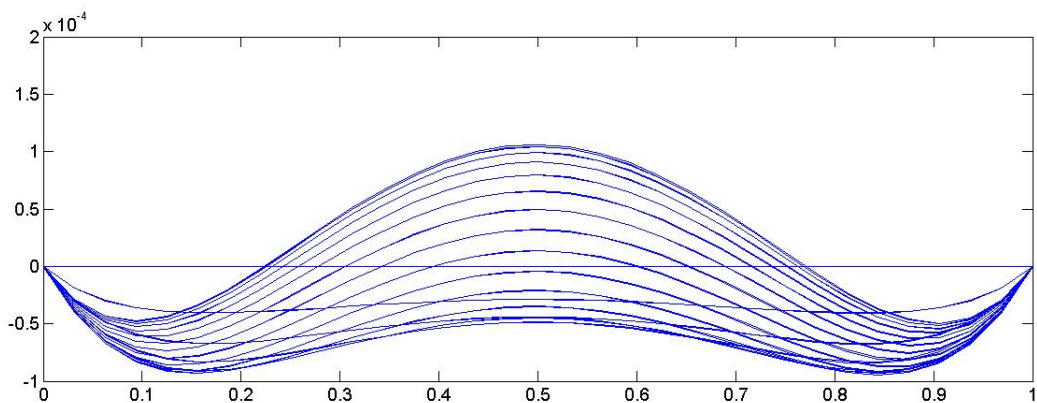


FIGURE 5.8 – Illustration du coefficient p exact et approché

Dans la figure (5.9), on présente la distribution de l'erreur sur tout le domaine Ω , c'est à dire, la différence en norme entre p_{ex} et p_{app} en chaque point du maillage.

FIGURE 5.9 – Distribution de l'erreur sur Ω .

Finalement, dans la figure (5.10), on présente l'erreur entre la solution approchée du problème d'état u_{app} et la solution exacte u_{ex} à chaque instant du temps.

FIGURE 5.10 – Erreur entre u_{app} et u_{ex} à chaque instant du temps.

Exemple 5

Dans ce paragraphe le coefficient de réaction est considéré comme un polynôme de degré deux :

$$p_{ex}(x, y) = x^2 + y^2 + 1, f(u) = 1 - \exp(-u), \phi(x) = 0, T = 10 \text{ et } \Delta t = 0.1.$$

Dans la figure (5.11), on montre la variation de la fonctionnelle coût J en fonction du nombre d'itérations. On constate qu'on a une décroissance rapide au bout des 100 premières itérations.

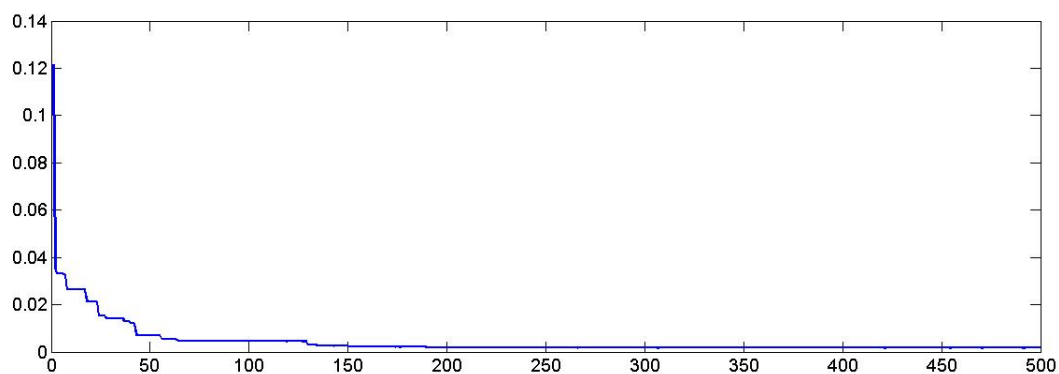
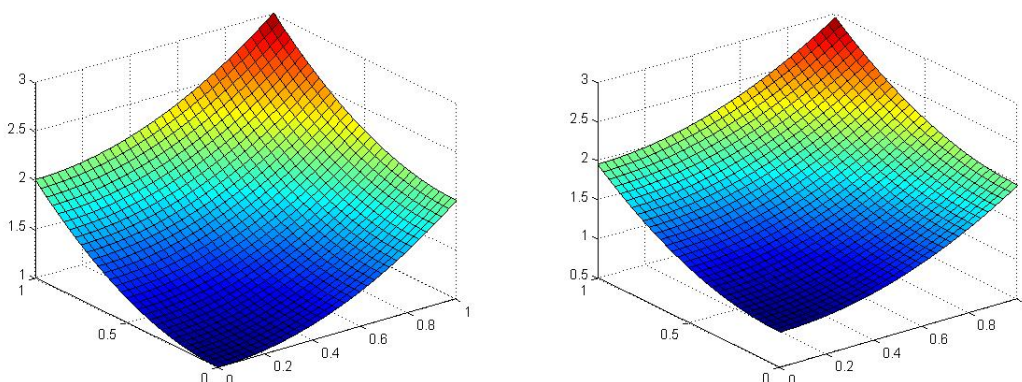
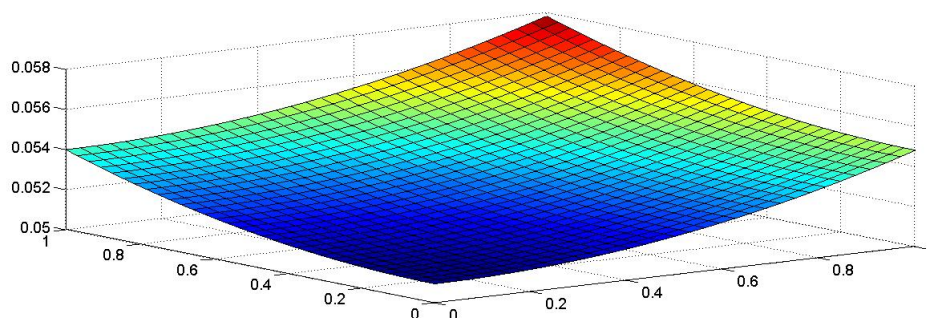


FIGURE 5.11 – Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.

Dans la figure (5.12), on présente l'allure du coefficient de réaction exact p_{ex} et approché p_{app} , on remarque qu'ils ont la même allure.

FIGURE 5.12 – Illustration du coefficient p exact et approché

Dans la figure (5.13), on présente la distribution de l'erreur sur le domaine Ω , c'est à dire la différence en norme entre p_{ex} et p_{app} en chaque point du maillage.

FIGURE 5.13 – Distribution de l'erreur sur Ω .

Finalement, dans la figure (5.14), on présente l'erreur entre la solution approchée du problème d'état u_{app} et la solution exacte u_{ex} à chaque instant du temps.

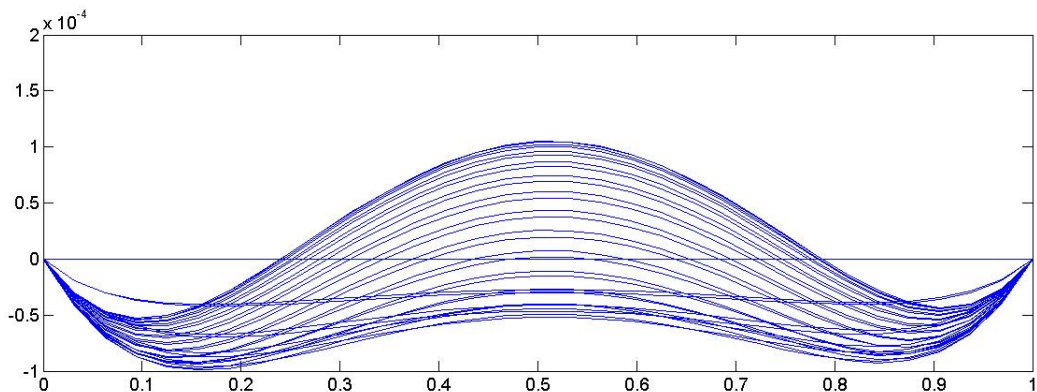


FIGURE 5.14 – Erreur entre u_{app} et u_{ex} à chaque instant du temps.

En conclusion, dans ce chapitre, nous avons adopté une nouvelle stratégie afin d'obtenir une solution précise et stable tout en réduisant les coûts de calcul. En effet, nous avons proposé une approche variationnelle de ce problème basée sur une semi-discrétisation en temps et une reformulation en un problème d'optimisation en contrôle optimal. Ainsi, sur le plan théorique, nous avons surmonté la difficulté liée à la non linéarité du problème d'état par l'utilisation du degré topologique de Leray Schauder [68]. Puis, nous avons établi l'existence d'une solution optimale. Ensuite sur le plan numérique, le problème d'optimisation est approché en utilisant une méthode qui combine la discrétisation par éléments finis, l'itération de Newton et les algorithmes évolutionnaires. La méthode d'approximation numérique proposée présente d'un point de vue pratique un moyen très simple, précis et efficace pour résoudre ce problème inverse d'identification de paramètres. Les résultats numériques obtenus confirment l'efficacité de l'approche proposée.

Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude théorique et l'approximation numérique de quelques problèmes inverses d'identification de paramètres. Concrètement, nous avons considéré deux problèmes inverses d'identification de paramètres gouvernés par des équations paraboliques fortement non-linéaires. Le premier problème intervient dans la modélisation de certains phénomènes en hydrologie, par exemple dans l'étude des écoulements des fluides notamment le problème d'infiltration de l'eau dans les milieux poreux comme le sol. Tandis que le deuxième problème intervient dans de nombreuses applications industrielles, comme la modélisation du transfert de la chaleur au sein d'un matériau. Dans ce cadre nous avons proposé une approche efficace pour résoudre le premier problème inverse basée sur sa reformulation en un problème de contrôle optimal. Nous avons ainsi étudié l'existence d'une solution optimale sans imposer aucune forme fonctionnelle aux paramètres hydrauliques. Pour cela, nous avons établi un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème d'état non-linéaire en utilisant un théorème de point fixe de Schauder. Sur le plan numérique, deux stratégies d'approximations ont été utilisées. La première combine la méthode de Picard et les différences finies ainsi que les algorithmes évolutionnaires pour le processus d'optimisation. Quant à la deuxième stratégie, elle combine la méthode des éléments finis et l'itération de Newton ainsi que l'algorithme du gradient conjugué. Ces approches présentent, en fait, plusieurs avantages. En effet, elles permettent d'une part d'ajuster d'une manière générale les paramètres hydrauliques à partir des mesures collectées tout en tenant en compte de leur variations, ce qui nous permet aussi de reconstruire les paramètres de la plupart des modèles classiques de l'équation de Richards. D'autre part, ces approches nous ont permis de déterminer simultanément tous les paramètres tout en réduisant le nombre de points d'observation, ce qui réduit considérablement le coût de mesures.

Le deuxième problème étudié dans cette thèse consiste à identifier le coefficient de réaction intervenant dans un modèle de transfert de la chaleur régi par une équation parabolique non-linéaire. Dans ce cadre, nous avons adopté une stratégie permettant d'obtenir une solution précise et stable tout en réduisant le coût de calcul. En effet, nous avons proposé une approche variationnelle de ce problème basée sur une semi-discrétisation temporelle et une reformulation des problèmes stationnaires en des problèmes d'optimisation en contrôle optimal. Ainsi, nous avons montré l'existence d'une solution optimale en éta-

blissant un résultat d'existence du problème d'état type non-linéaire via l'utilisation du degré topologique de Leray-Schauder. Ensuite sur le plan numérique, le problème d'optimisation est approché en utilisant une méthode qui combine la discrétisation par éléments finis, l'itération de Newton et les algorithmes évolutionnaires. Les résultats numériques ainsi obtenus montrent l'efficacité de l'approche proposée.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams and J. J. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140. Academic press, 2003. [19](#)
- [2] R. Agarwal and D. O'Regan. *Picard's Method of Successive Approximations*, volume 1. Springer, 2008. [76](#), [94](#), [95](#)
- [3] R. Angulo-Jaramili, F. Bouraoui, R. Haverkamp, and C. Zammit. *Soil properties and moisture movement in the unsaturated zone*, volume chapter 5. the Handbook of Groundwater Engineering, 1998. [44](#)
- [4] D. G. Aronson. *Regularity of flows in porous media : a survey*, in *Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states*, volume 12. Springer, 1988. [13](#)
- [5] J. P. Aubin. Un théorème de compacité. *C.R. Acad. Sci. Paris 256*, 5042-, 5044, 1963. [25](#), [26](#)
- [6] A. Auger and N. Hansen. *Theory of evolution strategies : a new perspective*. World Scientific Publishing, 2011. [78](#)
- [7] A. Bejan. *Convection heat transfer*. John wiley & sons, 2013. [52](#), [53](#)
- [8] S. Bitterlich and P. Knabner. An efficient method for solving an inverse problem for the richards equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 147 :153–173, 2002. [13](#)
- [9] A. Boukong, F. Le Dimet, P. Ngnepieba, and G. Nguetseng. Identification de paramètres : une application à l'équation de richards. *ARIMA*, 1 :127–157, 2002. [13](#), [75](#)
- [10] H. Brezis and J. Lions. *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*. Longoman Group Limited, 1994. [63](#), [64](#), [66](#), [68](#), [70](#)
- [11] R. Brooks and A. Corey. *Hydraulic properties of porous media*, volume 3. Technical report, Hydrol, 1964. [42](#), [43](#)
- [12] R. Calvet. *Le sol : propriétés et fonctions*. Number vol. 2 in *Le sol : propriétés et fonctions*. Editions France Agricole, 2003. [50](#)
- [13] M. A. Celia, T. Bouloutas, and R. L. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water resources Research*, 26(7) :1483–1496, 1990. [39](#)

- [14] A. Chakib, M. Johri, A. Nachaoui, and M. Nachaoui. On a numerical approximation of a highly nonlinear parabolic inverse problem in hydrology. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 42(1) :192–201, 2015. [74](#)
- [15] Q. Chen and J. J. Liu. Solving an inverse parabolic problem by optimization from final measurement data. *J. Comput. Appl. Math*, 193 :183–203, 2006. [15](#)
- [16] Q. H. Chen, L. S. Jiang, L. J. Wang, and J. E. Zhang. A new well-posed algorithm to recover implied local volatility. *Quant. Finance*, 3 :451–457, 2003. [15](#)
- [17] M. Choulli. *Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques*. Mathématiques et Applications. Springer Berlin Heidelberg, 2009. [11](#)
- [18] M. Choulli and M. Yamamoto. Generic well-posedness of an inverse parabolic problem - the hölder space approach. *Inverse Problems*, 12 :195–205, 1996. [15](#)
- [19] M. Choulli and M. Yamamoto. An inverse parabolic problem with non-zero initial condition. *Inverse Problems*, 13 :19–27, 1997. [15](#)
- [20] R. Dautray and J. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Volume 3*. Masson, 1985. [19](#)
- [21] R. Dautray and J. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology : Evolution problems I*. Springer, 1992. [23](#), [24](#), [25](#), [26](#)
- [22] C. Dawson, M. Farthing, and C. Kees. Locally conservative, stabilized finite element methods for variably saturated flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197 :4610–4625, 2008. [13](#)
- [23] K. Deep and M. Thakur. A new mutation operator for real coded genetic algorithms. *Appl. Math. Comput.*, 193(1) :211–230, 2007. [77](#)
- [24] M. Dehghan. Determination of a control parameter in the two-dimensional diffusion equation. *Appl. Numer. Math*, 37 :489–502, 2001. [15](#)
- [25] M. Dehghan and M. Tatari. Determination of a control parameter in a one-dimensional parabolic equation using the method of radial basis functions. *Math. Comput. Modelling*, 44 :1160–1168, 2006. [15](#)
- [26] Z. Deng, L. Yang, and J. N. Yu. Identifying the coefficient of first-order in parabolic equation from final measurement data. *Math. Comput. Simul.*, 77 :421–435, 2008. [15](#)
- [27] Z. Deng, L. Yang, and J. N. Yu. An inverse problem of determining the implied volatility in option pricing. *J. Math. Anal. Appl*, 340 :16–31, 2008. [15](#)
- [28] Z. Deng, L. Yang, and J. N. Yu. Optimization method for an evolutionary type inverse heat conduction problem. *J. Phys. A*, 41, 2008. [15](#), [60](#)

- [29] Z. Deng, L. Yang, and J. N. Yu. Identifying the radiative coefficient of heat conduction equations from discrete measurement data. *Appl. Math. Lett.*, 22 :495–500, 2009. [15](#)
- [30] Z. C. Deng, L. Yang, and J. N. Yu. An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation. *Appl. Math. Modelling*, 32 :1984–1995, 2008. [15](#)
- [31] H. Deresiewicz. *Elements of Engineering Statics*. Columbia University Press (1958), 1958. [37](#)
- [32] H. Egger and H. W. Engl. Tikhonov regularization applied to the inverse problem of option pricing : Convergence analysis and rates. *Inverse Problems*, 21 :1027–1045, 2005. [15](#)
- [33] W. R. Gardner. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *J. Soil Science*, 85 :228–232, 1958. [13](#)
- [34] B. Gilding and L. A. Peletier. The Cauchy problem for an equation in the theory of infiltration. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 61 :127–140, 1976. [13](#)
- [35] B. H. Gilding. Properties of solutions of an equation in the theory of infiltration. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 65 :203–225, 1977. [13](#)
- [36] D. E. Goldberg. Genetic algorithms and walsh functions. I.A gentle introduction. *Complex Systems*, 3(2) :129–152, 1989. [77](#), [78](#)
- [37] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Dover Publications, 2014. [11](#)
- [38] Hans-Paul and P. Schwefel. *Evolution and Optimum Seeking : The Sixth Generation*. John Wiley and Sons, Inc., New York, NY, USA, 1993. [78](#)
- [39] V. Havlicek, M. Kuraz, P. Mayer, J. Pavlasek, and P. Pech. Dual permeability variably saturated flow and contaminant transport modeling of a nuclear waste repository with capillary barrier protection. *Appl. Math. Comput.*, 219 :7127–7138, 2013. [13](#)
- [40] D. Hillel. *L'eau et le sol : principes et processus physiques.*, volume Pédasup 5. Louvain-la-Neuve : Academia, 1988. [39](#), [40](#), [42](#)
- [41] R. Hills, B. Hudson, I. Porro, and P. Wierenga. Modeling one-dimensional infiltration into very dry soils. *Model development and evaluation water resources research.*, 25 :285–294, 1989. [44](#)
- [42] J. H. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems*. University of Michigan Press, 1975. [78](#)
- [43] J. R. Howell, M. P. Menguc, and S. R. *Thermal radiation heat transfer*. CRC press, 2010. [54](#)

- [44] W. S. Janna. *Engineering heat transfer*. CRC Press, 1999. 53
- [45] L. Jiang and B. J. Bian. Identifying the principal coefficient of parabolic equations with non-divergent form. *J. Phys. : Conf. Ser.*, 12 :58–65, 2005. 15
- [46] L. Jiang and Y. S. Tao. Identifying the volatility of underlying assets from option prices. *Inverse Problems*, 17 :137–155, 2001. 15
- [47] W. M. Kays, M. E. Crawford, and B. Weigand. *Convective heat and mass transfer*. Tata McGraw-Hill Education, 2012. 53
- [48] M. Kern. *Problèmes inverses*. Stic et Environnement., 2011. 11
- [49] M. Kern. *Méthodes numériques pour les problèmes inverses*. Collection mathématiques et statistiques. ISTE/Hermes Science Publishing, 2016. 11
- [50] O. A. Ladyzenskaja and N. N. Ural’ceva. *Équations aux dérivées partielles de type elliptique*. Traduit par G. Roos. Monographies Universitaires de Mathématiques, No. 31. Dunod, Paris, 1968. 22
- [51] F. Lehmann. *Hydrodynamique en milieux poreux heterogenes non satures : identification des parametres par approche inverse.*, volume thèse de doctorat. Université Louis Pasteur de Strasbourg, 1996. 39, 42
- [52] J. Leray and J. Schauder. Topologie et équations fonctionnelles. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 51 :45–78, 1934. 27, 28
- [53] J. H. Lienhard. *A heat transfer textbook*. Courier Corporation, 2013. 51
- [54] J. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires*. Dunod Paris, 1969. 22, 117
- [55] J. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications III*. Dunod, 1968. 19, 22
- [56] J. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968. 19
- [57] S. Melka. *Etude théorique et expérimentale des transferts thermiques dans les milieux poreux granulaires pour l’isolation thermique*. 1996. 12, 14
- [58] B. Merckx. *Transferts hydriques et thermiques au sein des matériaux poreux : Application aux matériaux du Patrimoine Bâti Ancien*. Éditions universitaires européennes, 2017. 12, 14
- [59] Z. Michalewicz. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. 77, 78
- [60] Z. Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996. 81

- [61] Y. Mualem. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water resources Research*, 12(3) :513–522, 1976. [42](#)
- [62] A. Musy and C. Higy. *Hydrologie : Une science de la nature*. Collection Gérer l’environnement. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004. [30](#)
- [63] A. Musy and M. Soutter. *Physique du sol*. Collection Gérer l’environnement. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1991. [12](#)
- [64] Y. Nakano. Application of recent results in functional analysis to the problem of wetting fronts. *Water Resources Research*, 16 :314–325, 1980. [13](#)
- [65] T. N. Narasimhan. Darcy’s law and unsaturated flow. *Vadose Zone Journal.*, 3 :1052–1059, 2004. [12](#), [13](#)
- [66] J. Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967. [22](#)
- [67] T. Onyango and al. Reconstruction of boundary condition laws in heat conduction using the boundary element method. *Computers and Mathematics with Applications*, 57(1) :153–168, 2009. [90](#)
- [68] D. O’Regan, Y. Chen, and Y. Cho. *Topological degree theory and applications.*, volume 10. Raton, 2006. [116](#), [128](#)
- [69] D. O’Regan, Y. J. Cho, and Y. Q. Chen. *Topological degree theory and applications*. Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group, 2006. [27](#), [28](#), [29](#)
- [70] M. N. Ozisik. *Heat conduction*. John Wiley & Sons, 1993. [52](#)
- [71] J. Philip. Similarity hypothesis for capillary hysteresis in porous materials. *J. Geophys. Res*, 69 :1553–1562, 1946. [42](#)
- [72] M. Planck. *The theory of heat radiation*. Courier Corporation, 2013. [54](#), [55](#)
- [73] I. Rechenberg. *Evolutionstrategie : Optimierung technischer systeme nach prinzipien der biologischen evolution*. Ieice Transactions, 1994. [78](#)
- [74] L. Richards. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *J. Physics*, 1 :318–333, 1931. [40](#)
- [75] L. A. Richards. Capillary conduction of liquids through porous media. *Physics I.*, 1 :318–333, 1936. [12](#)
- [76] W. Rundell. The determination of a parabolic equation from initial and final data. *Proc. Amer. Math. Soc*, 99 :637–642, 1987. [15](#)
- [77] E. Shamash. *Fixed Point Theory : Banach, Brouwer and Schauder Theorems*. LAP Lambert Acad. Publ., 2010. [16](#), [57](#), [60](#), [63](#), [66](#), [113](#)

- [78] J. Simon. Compact sets in the space $l^p(0, t; b)$. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 146 :65–96, 1987. [25](#)
- [79] R. Srivastava and T. Jim Yeh. Analytical solutions for one-dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils. *Water Resources Research*, 27 :753–762, 1991. [13](#)
- [80] G. Stampacchia. *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. Séminaires de mathématiques supérieures. Les Presses de l'Université de Montréal, 1971. [27](#), [66](#)
- [81] J. Touma, R. Haverkamp, G. Vachaud, M. Vauclin, and P. Wierenga. A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration. *Soil Science of America Journal*, 41 :285–294, 1997. [44](#)
- [82] M. Van Genuchten. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science of America Journal*, 44 :892–898, 1980. [13](#), [42](#), [44](#), [96](#)
- [83] T. Vogel, M. V. Genuchten, and M. Cislerova. Effect of the shape of the soil hydraulic functions near saturation on variably-saturated flow predictions. *Advances in Water Resources.*, 24 :133–144, 2001. [12](#), [13](#)
- [84] M. Yamamoto and J. Zou. Simultaneous reconstruction of the initial temperature and heat radiative coefficient. *Inverse Problems*, 17 :1181–1202, 2001. [15](#)
- [85] A. Zeghal. Existence results for inverse problems associated with a nonlinear parabolic equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 272 :240–248, 2002. [15](#)
- [86] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications : III : Variational Methods and Optimization*. Springer Science & Business Media, 2013. [23](#), [24](#), [25](#)