Equations différentielles à valeur initiale floue intuitionistique

Razika ETTOUSSI

19 juillet 2018

Table des matières

Remerciements

J'aime tout d'abord remercier très chaleureusement ma directrice de thèse, madame le Professeur **Lalla Saadia CHADLI**, qui a malgré ses nombreuses occupations, accepté de prendre la direction de cette thèse, transformant ainsi les difficultés rencontrées en une expérience enrichissante. Je lui suis également reconnaissante de m'avoir assuré un encadrement rigoureux tout au long de ces années, tout en me donnant toutefois la possibilité de trouver par moi-même mon cheminement personnel. Elle m'a toujours accordé généreusement le temps nécessaire pour partager avec moi ses idées et sa grande expérience.

Je remercie tout particulièrement mon co-directeur de thèse, monsieur le Professeur **Said MELLIANI**, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils, sa grande disponibilité et pour toutes les heures qu'il a consacrée à diriger cette recherche. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral. Généralement, les grandes leçons ne sont pas tirées d'un livre mais d'un encadrant tel que le Professeur **Said MELLIANI**.

Je souhaite exprimer ma gratitude à monsieur **Gökhan Çuvalcioğlu**, Professeur à l'université de Mersin (Turquie), et son équipe pour leur accueil chaleureux à chaque fois que j'ai assisté à leurs conférences organisées à Mersin. Sans oublier une rencontre inattendue celle du Professeur **Krassmir Todorov ATANASSOV**, le fondateur de la théorie des ensembles flous intuitionistiques. Je lui exprime ici mes remerciements pour son soutien ainsi que pour ses multiples encouragements, notamment lors de ma première communication présentée à ICIFS 2015 (International Conference on Intuitionsitic Fuzzy Sets) qui a eu lieu à Sofia

(Bulgarie) en Mai 2018.

Je tiens à remercier profondément, le Professeur **Hassan EL AMRI** pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.
Le Professeur **Khalid HILAL** et le Professeur **Elhoussine AZROUL** qui m'ont fait le très grand honneur d'avoir accepté d'évaluer et juger ce travail.

Je remercie très vivement le Professeur **Mohammed SEAID** d'avoir pris le temps et accepté d'examiner ce travail, aussi le Professeur **Adil ABBASSI** et le Professeur **Nourddin SAIDOU** d'avoir accepté de se joindre aux membres du jury.

Mes remerciements vont aussi aux doctorants et aux autres membres du **laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique**, notamment ceux avec qui j'ai eu l'occasion de travailler.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille : mes parents, mes soeurs, mes frères et tous mes proches et amis, qui m'ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de cette thèse.

Introduction générale

La logique mathématique et l'informatique théorique sont basées sur la théorie des ensembles introduite par le mathématicien allemand Georg Cantor à la fin du XIX^e siècle. Un ensemble est vu comme une collection d'objets appelés éléments. Dans cette théorie il n'y a que deux situations acceptables pour un élément : appartenir ou ne pas appartenir à un ensemble.

En 1965, Lotfi Zadeh [42] a tenté de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée qui permet des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble. Il a fondé la théorie des sous-ensembles flous (Fuzzy Sets theory) à partir de l'idée d'appartenance partielle à une classe de catégories aux limites mal définies, qui est en fait une généralisation de la théorie classique des ensembles, admettant des situations intermédiaires entre le tout et le rien. Cette théorie apparaît comme un outil bien adapté pour représenter mathématiquement l'imprécision relative à certaines classes d'objets et de modéliser la représentation humaine des connaissances imprécises et imparfaites, soit parce qu'elles sont exprimées en langage naturel par un observateur qui donne peu de précisions ou qui est peu fiable, soit parce qu'elles sont obtenues à l'aide d'instruments d'observation qui produisent des erreurs ou des incertitudes.

La théorie des ensembles flous et plus exactement, la logique floue a de nombreuses applications : en 1978, la société danoise F. L. Smith a réalisé le contrôle d'un four à ciment qui était la première véritable application industrielle de la logique floue. A la fin des années 80, plusieurs applications ont commencé à imerger au Japon. A partir des années 90, le champ d'application est devenu très vaste dans plusieurs domaines comme les appareils électroménagers (laves-linges, aspirateurs,...), les systèmes audio-visuels (appareils de photo autofocus, caméscopes à stabilisateur d'image, photocopieurs, ...), systèmes d'automobiles (suspension, climatisation, photocopieurs, ...), la robotique, l'évaluation sensorielle (industrie agroalimentaire, ...), le traitement du signal (son, image,...).

En outre, la notion de la théorie des ensembles flous est une généralisation de la théorie des ensembles classiques qui permet des gradations dans l'appartenance d'un élément x à une classe A, c'est-à-dire chaque sous ensemble flou A d'un univers X est caractérisé par une fonction notée μ_A appelée fonction d'appartenance définie de X à valeur dans $[0,1]$, tandis que dans la théorie des ensembles classiques, chaque sous ensemble A de X est caractérisé par une fonction notée χ_A appelée fonction caractéristique de A définie de X à valeur dans $\{0,1\}$.

En 1983, le professeur Krassmir T. Atanassov a introduit la théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques [2, 3] qui est en fait une extension ou généralisation de la théorie des sous-ensembles flous, dans lequel, chaque sous-ensemble flou intuitionistique A d'un univers X est caractérisé par les deux fonctions μ_A et ν_A appelées respectivement degré d'appartenance et degré de non-appartenance. La somme de ces deux degrés est un élément de l'intervalle $[0,1]$, pas nécessairement égale à 1. Le complément de la somme des degrés d'appartenance et non-appartenance à 1 constitue un troisième degré, celui de l'incertitude.

Au cours des deux dernières décennies, de nombreux auteurs ont prêté attention à la théorie des ensembles flous intuitionistiques qui a été appliquée avec succès dans différents domaines tels que : programmation logique, diagnostic médical et problèmes de prise de décision, etc. D'ailleurs, récemment, diverses applications de cette théorie à l'intelligence artificielle sont apparues, et d'autres applications comme les systèmes experts etc.

Dans notre thèse, on s'intéresse à l'étude des équations différentielles floues intuitionistiques, plus précisément un problème à valeur initiale floue intuitionistique, et pour atteindre cet objectif nous avons donné un sens à la différence de Hukuhara des nombres flous intuitionistiques, ce qui a permis de définir la notion de la différentiabilité et d'introduire quelques notions d'analyse des applications à valeurs flous intuitionistiques afin de prouver l'existence et l'unicité de la solution.
Cette thèse est divisée en quatre chapitres :
Dans le premier chapitre, on rappelle les notions de base de la théorie des ensembles flous et les outils nécessaires pour aboutir à ce travail.

Le second chapitre, est réservé à la présentation des équations différentielles floues, donnée par Kaleva [19] et d'établir quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème à valeur initiale floue selon la topologie induite par la métrique définie sur l'espace des nombres flous.

Dans le troisième chapitre, on va donner quelques définitions et caractéristiques concernant les sous ensembles flous intuitionistiques puis on va introduire l'espace métrique des nombres flous intuitionistiques et quelques propriétés topologiques ensuite, on va prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle floue intuitionistique

$$x(t) = f\Big(t, x(t)\Big), \qquad x(t_0) = x_0$$

Enfin, on va proposer une procédure pour la résolution de ce type d'équations.

Ce travail se termine par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Sous-ensembles flous

1.1 Introduction

La théorie des ensembles flous est en fait selon Zadeh, un pas vers un rapprochement entre la précision des mathématiques classiques et la subtile imprécision du monde : un rapprochement né de l'incessante quête humaine pour une meilleure compréhension des cheminements mentaux de la connaissance [6]. Elle a donc pour objet d'étude, la représentation des connaissances imprécises et le raisonnement approché.

Considérons l'exemple suivant "la classe des Grands", nous dirons qu'une personne mesurant 130 cm n'appartient pas à "la classe des Grands", par contre une autre qui mesure 185 cm appartient à cette classe et plus sa taille se rapproche des 181 cm plus l'appartenance à cette classe est forte, comme le montre le tableau suivant :

Prénom	Taille en cm	Degré d'appartenance	
		Classique	Floue
Ahmed	208	1	1.00
Kamal	205	1	1.00
Rida	198	1	0.98
Mohamed	181	1	0.82
Jamal	179	0	0.78
Ali	172	0	0.24
Anas	167	0	0.15
Badr	158	0	0.06
Hassan	155	0	0.01
Khalid	152	0	0.00

1.2 Notions fondamentales

Soit X un univers.

Dans la théorie classique des ensembles, il existe une séparation claire entre un élément qui appartient à un ensemble donné et un élément qui ne lui appartient pas. En effet, la théorie classique des ensembles suit une logique boolèenne qui n'accepte que des valeurs binaires telles que zéro et un ou vrai et faux.

L'appartenance d'un sous-ensemble A de X, peut être décrite par la fonction caractéristique suivante : $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Définition 1.1. *On définit un sous-ensemble flou A de X par la donnée d'une fonction*

$$\mu_A : X \to [0, 1]$$

Cette fonction est appelée "fonction d'appartenance" de A.

On peut aussi représenter le sous-ensemble flou A par

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$$

On note par $\mathbb{F}(X)$ la collection de tous les sous-ensembles flous de X.

Remarque 1.1. *Un ensemble classique M est un sous-ensemble flou, il suffit de considérer sa fonction d'appartenance égale à sa fonction caractéristique.*

$$\mu_M = \chi_M$$

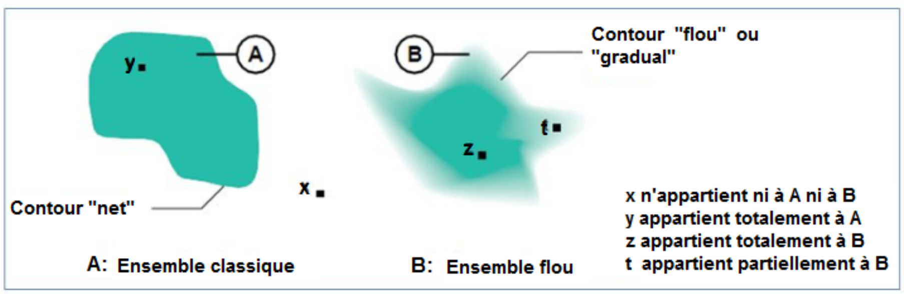

FIGURE 1.1 – Comparaison d'un ensemble classique et d'un ensemble flou

1.2.1 Caractéristiques d'un ensemble flou

Définition 1.2. *Soit A un sous-ensemble flou d'un univers X.*

- *On appelle support de A noté $S(A), (Supp(A))$, l'ensemble*

$$S(A) = Supp(A) = \{x \in X | \ \mu_A(x) > 0\}.$$

- *On appelle noyau de A noté N(A) l'ensemble*

$$N(A) = \{x \in X | \ \mu_A(x) = 1\}.$$

- *On appelle hauteur de A notée H(A) le réel*

$$H(A) = \sup\{\mu_A(x)|\ x \in X\}.$$

- *On dit que A est normal s'il existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\mu_A(x_0) = 1$$

- *Soit* $\alpha \in]0,1]$, *on appelle* α*-coupe de A noté* A^α *l'ensemble*

$$A^\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

  On le note aussi $[A]^\alpha$.

- *Pour* $\alpha = 0$, *c'est la fermeture du support noté* $[A]^0$ *ou Supp(A).*

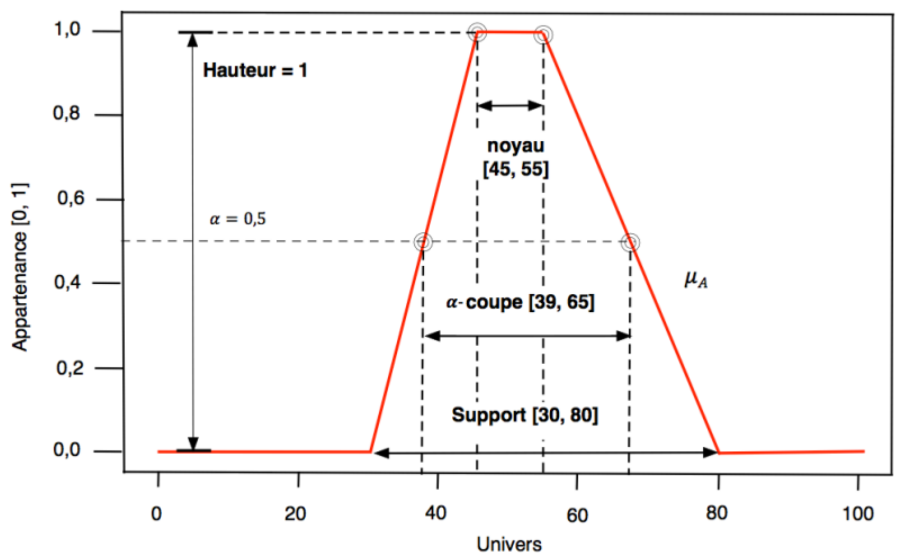

FIGURE 1.2 – Caractéristiques d'un ensemble flou

1.2.2 Opérations sur les ensembles flous

Les opérations sur les sous-ensembles flous sont généralement des extensions des opérations connues sur les ensembles classiques (égalité, réunion, intersection, complément, etc.).

Elles s'appliquent d'ailleurs aux ensembles classiques lorsque les fonctions d'appartenance se réduisent à des fonctions caractéristiques.

- **Complémentaire :** Soit $A \in \mathbb{F}(X)$ caractérisé par la fonction d'appartenance μ_A.

  Le complémentaire d'un sous-ensemble flou A de X, noté $\overline{A}$, et caractérisé par la fonction d'appartenence $\mu_{\overline{A}}$, définie par :

$$\forall x \in X,\ \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

- **Réunion :** Pour tout $A, B \in \mathbb{F}(X)$, la réunion de A et B est un sous-ensemble flou de X, noté $A \cup B$, et caractérisé par la fonction d'appartenence $\mu_{A\cup B}$, définie par :

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

- **Intersection :** Pour tout $A, B \in \mathbb{F}(X)$, l'intersection de A et B est un sous-ensemble flou de X, noté $A \cap B$, et caractérisé par la fonction d'appartenence $\mu_{A\cap B}$, définie par :

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

- **Image réciproque :** Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Considérons une partie floue de F donnée par sa fonction d'appartenance μ. On appelle image réciproque de cette partie floue par f la partie floue de E donnée par la fonction d'appartenance suivante, notée $f^{-1}(\mu)$:

$$\forall x \in E,\ f^{-1}(\mu)(x) = \mu(f(x)).$$

- **Image directe :** Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Considérons une partie floue de E donnée par sa fonction d'appartenance μ. On appelle image directe de cette partie floue par f la partie floue de F donnée par la fonction d'appartenance suivante, notée $f(\mu)$

$$\forall y \in F,\ f(\mu)(y) = \sup\{\mu(x), x \in f^{-1}(y)\}.$$

- **Convexité d'un ensemble flou :** Un ensemble flou A de X est dit convexe si

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, x_1, x_2 \in X, \ \lambda \in [0,1].$$

1.3 Principe d'extension

Le principe d'extension a été décrit par L.A.Zadeh [43]. Il nous permet de donner un sens à l'extension du domaine d'une application ou d'une relation définie sur un ensemble X aux sous ensembles flous de X. On a montré dans [29] que l'approche ensembliste (i.e. l'utilisation des α-coupes d'un ensemble flou) est très simple que l'approche fonctionnelle (i.e. l'utilisation des fonctions d'appartenances).
L'application du principe d'extension aux ensembles flous peut être regardée comme une application de ce principe aux α-coupes de l'ensemble flou en question.
En général si

$$f : X \times Y \longrightarrow Z$$

et si A et B sont des sous ensembles flous respectifs de X et Y, respectivement, on obtient

$$\Big[f(A,B)\Big]^{\alpha} = f\big([A]^{\alpha}, [B]^{\alpha}\big)$$

où $[A]^{\alpha}, [B]^{\alpha}$ et $\Big[f(A,B)\Big]^{\alpha}$ sont respectivement les α-coupes de A, B et $f(A,B)$.
On veut donner une condition nécessaire et suffisante pour obtenir cette égalité, et définir une classe de nombres flous où cette égalité est vérifiée pour toute fonction f continue.

1.3.1 Résolution de l'identité

Pour $\alpha \in]0,1]$, rappellons que l'ensemble α-coupe de A est défini par

$$A^{\alpha} = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Si $A, B \in \mathbb{F}(X)$, alors par définition,

$$A = B \text{ si et seulement si } \mu_A(x) = \mu_B(x), \ \forall x \in X.$$

Si $A, B \in \mathbb{F}(X)$, alors par définition,

$$A = B \text{ si et seulement si } [A]^\alpha = [B]^\alpha,\ \forall\alpha \in]0,1].$$

Il est aussi évident que

$$Supp(A) = \bigcup_{\alpha\in]0,1]} [A]^\alpha$$

D'autre part, on a

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \big(\alpha.\chi_{[A]^\alpha}(x)\big)$$

Ainsi A peut être représenté comme suit

$$A = \int_0^1 \alpha[A]^\alpha$$

où $\int_0^1$ represente l'union sur $\alpha \in]0,1]$, et $\alpha[A]^\alpha$ est l'ensemble flou dont la fonction d'appartenance est

$$\chi_{\alpha[A]^\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & si\ x \in [A]^\alpha \\ 0, & si\ x \notin [A]^\alpha. \end{cases}$$

Proposition 1.1. *Si $\{B^\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}$ est une famille de sous-ensrmbles de X, tels que*

$$A = \int_0^1 \alpha B^\alpha$$

alors,

1. $B^\alpha \subset [A]^\alpha$
2. $\bigcup_{\alpha\in]0,1]} B^\alpha = \bigcup_{\alpha\in]0,1]} [A]^\alpha.$

Preuve. 1. *Soit $\alpha_0 \in]0,1]$, si $x \in B^{\alpha_0}$, alors $\alpha_0 B^{\alpha_0} = \alpha_0$, et ainsi*

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{A^\alpha}(x) \\ &= \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x) \\ &\geq \alpha_0. \end{aligned}$$

Par suite $x \in [A]^\alpha$.

2. *Les deux membres de l'égalité sont exactement égaux à Supp(A).*

1.3.2 Principe d'extension

Définition 1.3. *Soit $f : X \longrightarrow Y$, et $A \in \mathbb{F}(X)$, alors l'ensemble flou $f(A)$ est défini, via le principe d'extension, par*

$$f(A) \in \mathbb{F}(Y) \quad et \quad \mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \tag{1.3.1}$$

Remarque 1.2. *Dans l'ordre d'appliquer ce principe aux applications floues, on reécrit* (1.3.1) *sous la forme équivalente suivante*

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in X} \min\big(\mu_A(x), \chi_{\{f(x)\}}(y)\big) \tag{1.3.2}$$

Proposition 1.2. *Soit $A \in \mathbb{F}(X)$ et $f : X \longrightarrow Y$, alors*

$$f(A) = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha) \tag{1.3.3}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \mu_{f(A)}(y) &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \\ &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \Big[\sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha \chi_{[A]^\alpha}(x)\Big] \\ &= \sup_{\substack{x \in f^{-1}(y) \\ \alpha \in]0,1]}} \big[\alpha \chi_{[A]^\alpha}(x)\big] \end{aligned}$$

D'autre part, soit $B = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha)$. Alors

$$\begin{aligned} \mu_B(y) &= \sup_{0<\alpha\leq 1} \alpha \chi_{f([A]^\alpha)} \\ &= \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big[\alpha \sup_{x \in f^{-1}(y)} \chi_{[A]^\alpha}(x)\Big] \\ &= \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big[\sup_{x \in f^{-1}(y)} \alpha \chi_{[A]^\alpha}(x)\Big] \\ &= \sup_{\substack{x \in f^{-1}(y) \\ \alpha \in]0,1]}} \big[\alpha \chi_{[A]^\alpha}(x)\big] \end{aligned}$$

Remarque 1.3. *On a*

$$f(A) = \int_0^1 \alpha[f(A)]^\alpha = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha)$$

avec

$$f([A]^\alpha) \subset [f(A)]^\alpha, \quad \forall \alpha \in]0,1].$$

Mais en général

$$f([A]^\alpha) \neq [f(A)]^\alpha$$

Proposition 1.3. *Soient $f : X \times Y \longrightarrow Z$, $A \in \mathbb{F}(X)$ et $B \in \mathbb{F}(Y)$, alors*

$$f(A,B) = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha, [B]^\alpha)$$

$$\begin{aligned} \mu_{f(A,B)}(z) &= \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \\ &= \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} (\min(\sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y))). \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Soit $T = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha, [B]^\alpha)$

$$\begin{aligned} \mu_T(z) &= \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{f([A]^\alpha,[B]^\alpha)}(z) \\ &= \sup_{\alpha\in]0,1]} \Big[\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y)) \Big] \\ &= \sup_{\substack{\alpha\in]0,1] \\ (x,y)\in f^{-1}(z)}} \Big[\min(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y))\Big]. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Pour montrer que (1.3.4) et (1.3.5) sont équivalentes, il suffit de montrer que

$$\min(\alpha_0, \beta_0) = \sup_{\alpha\in]0,1]} (\min(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y))), \tag{1.3.6}$$

où

$$\alpha_0 = \sup_{0<\alpha\leq 1} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x)$$

$$\beta_0 = \sup_{0<\alpha\leq 1} \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y)$$

Si $\min(\alpha_0, \beta_0) = 0$, disons $\alpha_0 = 0$, alors $\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x) = 0$ pour tout $\alpha \in]0, 1]$ ainsi (1.3.6) est vérifiée.

Supposons maintenant que $\min(\alpha_0, \beta_0) > 0$, alors

$$x \in [A]^\alpha \text{ pour tout } \alpha < \alpha_0$$

$$x \notin [A]^\alpha \text{ pour tout } \alpha > \alpha_0.$$

En effet

- S'il existe $\alpha^{'}$ telle que

  $$\alpha^{'} < \alpha_0 \text{ tel que } x \notin [A]^{\alpha^{'}},$$

  alors

  $$\sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x) = \mu_A(x) < \alpha^{'} < \alpha_0 = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x).$$

  ce qui est absurde.

- S'il existe

  $$\alpha^{''} > \alpha_0 \text{ tel que } x \in [A]^\alpha,$$

  alors $\sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x) \geq \alpha_0$ qui est une contradiction.

  De la même manière, on a

  $$x \in [B]^\alpha \text{ pour tout } \alpha < \beta_0$$

  $$x \notin [B]^\alpha \text{ pour tout } \alpha > \beta_0.$$

  d'où

  $$\min(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y)) = \begin{cases} \alpha & \text{pour} \quad \alpha < min(\alpha_0, \beta_0) \\ 0 & \text{pour} \quad \alpha > min(\alpha_0, \beta_0) \end{cases}$$

  et

  $$\min(\alpha_0, \beta_0) = \sup_{\alpha \in]0,1]} (\min(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y))) \tag{1.3.7}$$

Remarque 1.4. *On a*

$$f([A]^\alpha, [B]^\beta) \subset [f(A, B)]^\alpha, \qquad \forall \in]0, 1].$$

Mais en général

$$f([A]^\alpha, [B]^\beta) \neq [f(A,B)]^\alpha.$$

Proposition 1.4. *Avec les notations de la proposition (1.3), une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité suivante* $f([A]^\alpha, [B]^\beta) = [f(A,B)]^\alpha, \quad \forall \alpha \in]0,1]$ *est*

$$\forall z \in Z, \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

est atteint.

Preuve. *(i) condition nécessaire :*

Soit $z \in Z$ *tel que* $\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) = t \in]0,1]$

$$\mu_{f(A,B)}(z) = t \Rightarrow z \in [f(A,B)]^t$$
$$\Rightarrow z \in f([A]^t, [B]^t),$$

ainsi il existe $\overline{x} \in [A]^t$ *et* $\overline{y} \in [B]^t$ *tels que* $f(\overline{x}, \overline{y}) = z$

d'où

$$\min(\mu_A(\overline{x}), \mu_B(\overline{y})) \geq t$$

mais

$$\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \geq \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

ce qui montre que

$$\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) = t.$$

(ii) Condition suffisante :

D'après la proposition (1.2) *et la proposition* (1.3), *on a*

$$f([A]^\alpha, [B]^\beta) \subset [f(A,B)]^\alpha$$

maintenant soit $z \in [f(A,B)]^\alpha$ *c-à-d*

$$\mu_{f(A,B)}(z) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \geq \alpha.$$

Si $\mu_{f(A,B)}(z) > \alpha$, *par définition du sup il existe* $(\overline{x}, \overline{y}) \in f^{-1}(z)$ *tel que*

$$\alpha < \min(\mu_A(\overline{x}), \mu_B(\overline{y})) \Rightarrow (\overline{x}, \overline{y}) \in [A]^\alpha \times [B]^\alpha$$

ainsi $z = f(\overline{x}, \overline{y}) \in f([A]^\alpha, [B]^\alpha)$.

Si $\mu_{f(A,B)}(z) = \alpha$, *alors par hypothèse, il existe* $(\overline{x}, \overline{y}) \in f^{-1}(z)$ *tel que*

$$\alpha = \min(\mu_A(\overline{x}), \mu_B(\overline{y})) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \Rightarrow (\overline{x}, \overline{y}) \in [A]^\alpha \times [B]^\alpha$$

Chapitre 2

Équation différentielle floue

2.1 Introduction

Lorsqu'un problème physique se transforme en un problème de valeur initiale déterministe

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

En général, on ne peut pas être sûr que cette modélisation soit parfaite. La valeur initiale ne peut pas être connue exactement et la fonction peut contenir des paramètres inconnus. En particulier, si elles sont connues à travers certaines mesures, elles seront nécessairement soumises à des erreurs. L'analyse de l'effet de ces erreurs conduit à l'étude de la comportement qualitatif de la solution de l'équation $(2.1.1)$.

D'ailleurs, A. Kandel et al [21] sont les premiers auteurs à avoir utilisé le terme " équations différentielles floues". Puri et Ralescu [35] ont défini la dérivée pour les fonctions floues basées sur la notion de la différence au sens du Hukuhara. Le premier théorème de l'existence a été proposé par Kaleva [19] où la condition de Lipschitz a été utilisée pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème à valeur initiale floue. Par suite, C. Wu et al [41] ont proposé un théorème d'existence et d'unicité basé sur la méthode des approximations successives. Les résultats locaux et globaux de l'existence et de l'unicité pour les équations différentielles fonctionnelles (ou retardées) ont été établis dans [25], voir aussi [23, 34].

2.2 Préliminaires

Soit $P_K(\mathbb{R})$ désigne la famille de tous les sous ensembles convexes compact non vides de $\mathbb{R}$ et on considére l'addition et la multiplication par un scalaire usuelle dans $P_K(\mathbb{R})$.
Etant donné A et B deux sous ensembles bornés non vides de $\mathbb{R}$.
La distance entre A et B est definie par la metrique de Hausdorff

$$d_H(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

où $A = [a_1, a_2]$ et $B = [b_1, b_2]$.

Théorème 2.1. *[36] $(P_K(\mathbb{R}), d_H)$ est un espace métrique complet.*

Définition 2.1. *On note par $E^1 = \{u : \mathbb{R} \to [0,1]\}$ la classe des ensembles flous de $\mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes*

(i) u est normale i.e, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $u(x_0) = 1$,

(ii) u est un convexe au sens flou i.e pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, on a

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$$

(iii) u est semi continue supérieurement i.e $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ on a $u(x_0) \geq \lim\limits_{x \to x_0^+} u(x)$.

(iv) $[u]^0 = cl\{x \in \mathbb{R} | u(x) > 0\}$ est compact.

Alors E^1 est appelé l'espace des nombres flous.

alors d'après ces propriétés, on a

$$[u]^{\alpha} \in P_K(\mathbb{R}) \text{ pour tout } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

Définition 2.2. *Un nombre flou trapézoidal (TRFN) A est un ensemble flou de* $\mathbb{R}$ *dont la fonction d'appartenance* μ_A *est définie par :*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad b \leq x \leq c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & si \quad c \leq x \leq d, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Ce nombre flou trapézoïdal est noté par $A_{TRFN} = (a, b, c, d)$

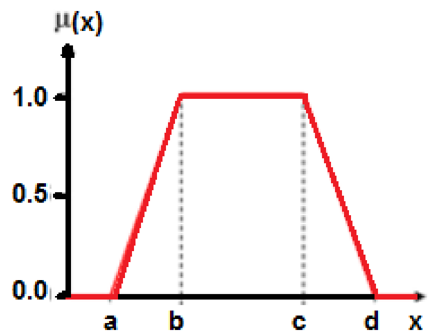

FIGURE 2.1 – Nombre flou trapézoïdal

Définition 2.3. *Un nombre flou triangulaire (TFN) A est un ensemble flou de* $\mathbb{R}$ *dont la fonction d'appartenance* μ_A *est définie par :*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ \dfrac{d-x}{d-b} & si \quad b \leq x \leq d, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Ce nombre flou triangulaire est noté par $A_{TFN} = (a, b, d)$

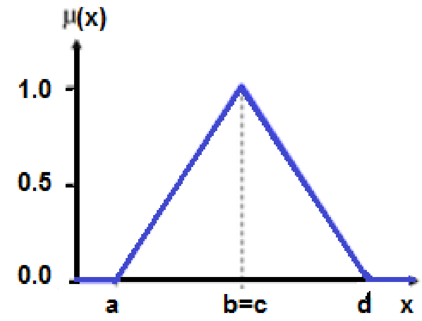

FIGURE 2.2 – Nombre flou triangulaire

Soit une fonction g continue

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

on peut l'étendre à

$$E^1 \times E^1 \to E^1$$

via le principe d'extension de Zadeh par l'équation

$$\mu_{g(u,v)}(z) = \sup_{z=g(x,y)} \min\left(\mu_u(x), \mu(y)\right)$$

où $\mu_{g(u,v)}$ est la fonction d'appartenance de l'ensemble flou $g(u,v)$, ce qui nous permet d'avoir

$$[g(u,v)]^\alpha = g\left([u]^\alpha, [v]^\alpha\right) \qquad \forall u, v \in E^1 \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

En particulier pour l'addition et la multiplication par un scalaire, on a

$$\begin{aligned}[u+v]^\alpha &= [u]^\alpha + [v]^\alpha \\ [ku]^\alpha &= k\,[u]^\alpha\end{aligned}$$

où u, $v \in E^1$, $k \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, donc E^1 muni de ces deux lois a une structure d'espace vectoriel.

On définie l'application suivante

$$d : E^1 \times E^1 \to \mathbb{R}^+$$

par

$$d(u,v) = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant1} d_H\left([u]^{\alpha}, [v]^{\alpha}\right)$$

où d_H est la metrique de Hausdorff définie dans $P_K(\mathbb{R})$.

Théorème 2.2. *[36] (E^1, d) est un espace métrique complet.*

Théorème 2.3. *Negoita & Ralescu[33] . Si $u \in E^1$, alors*

(i) $[u]^\alpha \in P_K(\mathbb{R})$ pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$,

(ii) $[u]^{\alpha_2} \subseteq [u]^{\alpha_1}$ pour tout $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$,

(iii) $\{\alpha_k\} \subseteq [0,1]$ est une suite croissante qui converge vers α, alors

$$[u]^\alpha = \bigcap_{k\geq1}[u]^{\alpha_k}$$

Inversement, si $\{A_\alpha, \alpha \in (0,1]\}$ est une famille de sous ensembles de $\mathbb{R}$ qui satisfait (i)-(iii), alors il existe un nombre flou unique $u \in E^1$ tel que $[u]^\alpha = A_\alpha$ pour tout $\alpha \in (0,1]$ et

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\leq1} A_\alpha} \subset [A]^0$$

Théorème 2.4. *([24], p.19) Pour $u, v, w, e \in E^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :*

1. $d(u+w, v+w) = d(u,v)$,
2. $d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u,v)$,
3. $d(u+v, w+e) \leq d(u,w) + d(w,e)$

Différence de Hukuhara

Considérons l'espace $X = \mathbb{R}$ et on note $P(X)$ l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{R}$. Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$, l'addition de Minkowski et la multiplication par un scalaire sont définies par

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

et

$$kA = \{ka | a \in A\},$$

il est bien connu que l'addition est associative, commutative et d'élément neutre $\{0\}$.
Si la multiplication par le scalaire $k=-1$, alors l'opposé de A est

$$-A=(-1)A=\{-a|a\in A\},$$

mais en général,

$$A+(-A)\neq\{0\},$$

i.e. l'opposé de A n'est pas le symétrique de A pour l'addition de Minkowski (sauf si $A=\{a\}$ est un singleton).
Par exemple si $A=[0,1]$ alors $(-1)A=[-1,0]$, de plus

$$A+(-A)=[0,1]+[-1,0]=[-1,1].$$

La différence de Minkowski est

$$A-B=A+(-1)B=\{a-b|a\in A,b\in B\}.$$

Une première conséquence de ce fait est que, en général, même s'il est vrai que

$$(A+C=B+C)\Longleftrightarrow A=B,$$

la simplification par l'addition/soustraction n'est pas valide, i.e

$$(A+B)-B\neq A.$$

Pour résoudre cette situation, la différence de Hukuhara [39] a été introduite comme suit

$$A\ominus B=C\Longleftrightarrow A=B+C$$

Une propriété importante de $\ominus$ est que

$$A\ominus A=\{0\},\ \forall A\in P(X)$$

et

$$(A+B)\ominus B=A,\ \forall A,B\in P(X),$$

La différence de Hukuhara est unique, mais elle n'existe pas toujours (une condition nécessaire pour que $A \ominus B$ existe est que A contient les translatés $\{c\} + B$ de B avec $c \in \mathbb{R}$. En général,

$$A - B \neq A \ominus B.$$

La différence de Hukuhara est également motivée par le problème d'inversion de l'addition : si x, y sont des nombres classiques, alors $(x + y) - y = x$ mais ceci n'est pas vrai si x, y sont flous.
D'après [19], si u et v sont des nombres flous (n'est pas en général ensemble flou), alors $(u + v) \ominus v = u$ i.e. la différence de Hukuhara inverse l'addition des nombres flous.

Définition 2.4. *Soient u et $v \in E^1$, la différence de Hukuhara entre u et v, si elle existe, est un nombre flou $\omega \in E^1$, tel que*

$$u \ominus v = \omega \Longleftrightarrow u = v + \omega$$

1) Si $u \ominus v$ existe, et alors cette différence est unique.

2) $u \ominus u = \widetilde{0}$.

3) $[u \ominus v]^\alpha = \left[u_-^\alpha - v_-^\alpha, u_+^\alpha - v_+^\alpha\right]$
avec $[u]^\alpha = [u_-^\alpha, u_+^\alpha]$ et $[v]^\alpha = [v_-^\alpha, v_+^\alpha]$.

Les conditions d'existence de $u \ominus v = w \in E^1$ sont

$[w]^\alpha = [w_-^\alpha, w_+^\alpha] = [u]^\alpha \ominus [v]^\alpha$ et

$$\begin{cases} Si \;\; diam([u]^\alpha) \geq diam([v]^\alpha) \; \forall \; \alpha \in [0,1] \\ \qquad\qquad w_-^\alpha = u_-^\alpha - v_-^\alpha \\ \qquad\qquad w_+^\alpha = u_+^\alpha - v_+^\alpha \end{cases}$$

à condition que w_-^α est croissante par rapport à α, w_+^α est décroissante par rapport à α, et $w_-^{(1)} \leq w_+^{(1)}$.
où $diam([u]^\alpha) = u_+^\alpha - u_-^\alpha$ le diamètre de α-coupe de u (de même pour v).

Proposition 2.1. *[39] Soient $u, v \in E^1$, deux nombres flous avec $[u]^\alpha$ et $[v]^\alpha$ désignent respectivement leurs α-coupes. La H-difference $u \ominus v \in E^1$ existe si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites*

$$\begin{cases} diam([u]^\alpha) \geq diam([v]^\alpha) \quad \forall \alpha \in [0,1] \\ u_-^\alpha - v_-^\alpha \quad \nearrow \textit{par rapport à } \alpha, \\ u_+^\alpha - v_+^\alpha \quad \searrow \textit{par rapport à } \alpha. \end{cases}$$

Cependant, cette différence n'est pas définie pour des paires de nombres flous, de sorte que le support d'un nombre flou a un diamètre plus grand que celui qui est soustrait, cela suggère une généralisation de la différence de Hukuhara formulé par Luciano Stefanini [39].

Définition 2.5. *Soient $u, v \in E^1$ deux nombres flous, la différence de Hukuhara généralisée $u \ominus_g v = w$ est un nombre flou w si elle existe, tel que*

$$u \ominus_g v = w \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) u = v \oplus w \\ ou \\ (ii) v = u \oplus (-1) w \end{cases}$$

Dans le cas des intervalles fermés de $\mathbb{R}$, la différence de Hukuhara généralisée toujours existe, en effet

Soient $A = [a^-, a^+]$ et $B = [b^-, b^+]$ deux intervalles,

$$[a^-, a^+] \ominus_g [b^-, b^+] = [c^-, c^+] \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (i) \begin{cases} a^- = & b^- + c^- \\ a^+ = & b^+ + c^+ \end{cases} \\ ou \\ (ii) \begin{cases} b^- = & a^- - c^- \\ b^+ = & a^+ - c^+ \end{cases} \end{cases}$$

Alors

$$[a^-, a^+] \ominus_g [b^-, b^+] = [c^-, c^+]$$

toujours définie par :

$c^- = \min\{a^- - b^-, a^+ - b^+\}$, $c^+ = \max\{a^- - b^-, a^+ - b^+\}$ i.e

$$[a,b] \ominus_g [c,d] = [\min\{a-c, b-d\}, \max\{a-c, b-d\}]$$

Définition 2.6. *$F : [a,b] \to E^1$ est dite intégrablement bornée s'il existe une fonction intégrable $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$|y| \leq h(t) \text{ pour tout } y \in Supp(F(t)), t \in [a,b].$$

Définition 2.7. *On dit que l'application $F : [a,b] \to E^1$ est fortement mesurable si pour tout $\alpha \in [0,1]$ l'application $F^\alpha : [a,b] \to P_K(\mathbb{R})$ définie par $F^\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ est (Lebesgue) mesurable.*

Définition 2.8. *Soit $F : E^1 \to E^1$ une application floue et $u \in E^1$, F est dite continue en u si et seulement si :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall v \in E^1)\Big(d\Big(u,v\Big) < \delta\Big) \Rightarrow d\Big(F(u), F(v)\Big) < \varepsilon$$

Définition 2.9. *Soit $F : [a,b] \to E^1$ une application à valeur floue et $t_0 \in [a,b]$, F est dite continue en t_0 si et seulement si :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\Big(\forall t \in [a,b] \text{tel que} \mid t - t_0 \mid < \delta\Big) \Rightarrow d(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$$

Définition 2.10. *On dit que F est une fonction floue continue sur $[a,b]$ si et seulement si elle est continue en tout point de $[a,b]$.*

Lemme 2.1. *[19] Si $F : [a,b] \to E^1$ est continue alors elle est fortement mesurable.*

Lemme 2.2. *[19] Soit $F : [a,b] \to E^1$ une application fortement mesurable et on note*

$$F^\alpha(t) = \Big[\mu_\alpha(t), \mu^\alpha(t)\Big]$$

pour $\alpha \in [0,1]$. Alors μ_α, μ^α sont mesurables.

Définition 2.11. *Soit $A = [a, b]$, on suppose que $F : A \to E^1$ est intégrablement bornée et fortement mesurable pour chaque $\alpha \in (0, 1]$ on écrit*
$$\left[\int_A F(t)dt\right]^\alpha = \int_A [F(t)]^\alpha \, dt = \left\{\int_A f dt | f : A \to \mathbb{R} \text{ est une sélection mesurable de } F^\alpha\right\}.$$
S'il existe $u \in E^1$ tel que $[u]^\alpha = \left[\int_A F(t)dt\right]^\alpha$ pour tout $\alpha \in (0, 1]$. Alors F est dite intégrable sur A, et on écrit $u = \int_A F(t)dt$ ou $u = \int_a^b F(t)dt$.

Théorème 2.5. *[19] Si $F : [a, b] \to E^1$ est une application fortement mesurable et intégrablement bornée, alors F est intégrable.*

Corollaire 2.1. *[19] Si $F : [a, b] \to E^1$ est continue, alors elle est intégrable.*

Théorème 2.6. *[19] Soit $F : [a, b] \to E^1$ une application intégrable et $c \in [a, b]$. Alors*
$$\int_a^b F = \int_a^c F \oplus \int_c^b F.$$

Corollaire 2.2. *[19] Si $F : [a, b] \to E^1$ est continue, alors $\int_a^t F$ est lipschitzienne sur $[a, b]$.*

Théorème 2.7. *[19] Soient $F, G : [a, b] \to E^1$ deux applications intégrables et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

1. $\displaystyle\int (F(t) \oplus G(t))dt = \int F(t) \oplus \int G(t),$
2. $\displaystyle\int (\lambda F(t))dt = \lambda \int F(t)dt,$
3. $d\Big(F(t), G(t)\Big)$ *est intégrable,*
4. $\displaystyle d\Big(\int F(t)dt, \int G(t)dt\Big) \leq \int d\Big(F(t), G(t)\Big)dt.$

Définition 2.12. *Une application $F : [a, b] \to E^1$ est dite différentiable en $t_0 \in (a, b)$ s'il existe $F'(t_0) \in E^1$ tel que les deux limites :*

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{F(t_0 + \Delta t) \ominus F(t_0)}{\Delta t} \quad et \quad \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}$$

existent et qu'elles sont égales à $F'(t_0)$, appelée dérivée au sens de Hukuhara de F en t_0. Ici, la limite est prise dans l'espace métrique (E^1, d).

Définition 2.13. *Soit $F : [a, b] \to E^1$ une application floue. Soit $P : [a, b] \to E^1$ une application différentiable en tout point $t \in (a, b)$. P est dite primitive de F si sa dérivée au sens de Hukuhara est égale à F i.e*

$$\forall \ t \in (a, b) \ , \ P'(t) = F(t).$$

Théorème 2.8. *[19] Soit $F : [a, b] \to E^1$ une application continue. Alors pour $t \in [a, b]$ l'intégrale $G(t) = \displaystyle\int_a^t F$ est différentiable et $G'(t) = F(t)$.*

Théorème 2.9. *[19] Soit $F : [a, b] \to E^1$ une application différentiable et on suppose que la dérivée F' est intégrable sur $[a, b]$. Alors, pour chaque $s \in [a, b]$, on a*

$$F(s) = F(a) \oplus \int_a^s F'(t)dt.$$

Théorème 2.10. *[19] Si $F : [a, b] \to E^1$ une application différentiable.*
On note $F^\alpha(t) = [F(t)]^\alpha = [\lambda_\alpha(t), \lambda^\alpha(t)]$. Alors, $\lambda_\alpha(t)$ et $\lambda^\alpha(t)$ sont différentiables et on a $[F(t)']^\alpha = [\lambda'_\alpha(t), \lambda^{\alpha\prime}(t)]$.

Théorème 2.11. *[19] Si $F : [a, b] \to E^1$ est une application différentiable alors elle est continue.*

Théorème 2.12. *[19] Si $F, G : [a, b] \to E^1$ sont des applications différentiables et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(F \oplus G)'(t) = F'(t) \oplus G'(t)$ et $(\lambda F)'(t) = \lambda F'(t)$.*

2.3 Etude d'équation différentielle à valeur dans E^1

Nous considérons le problème à valeur initiale floue suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & t \in T \\ x(t_0) = x_0 \in E^1 \end{cases} \tag{2.3.1}$$

où la fonction $f : T \times E^1 \longrightarrow E^1$ est une fonction continue et $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.14. $x : T \to E^1$ *est une solution du problème à valeur initiale (2.3.1), si et seulement si elle est continue et satisfait l'équation intégrale*

$$x(t) = x(t_0) \oplus \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad \textit{pour tout} \;\; t \in T.$$

Théorème 2.13. *On suppose que* $f : T \times E^1 \longrightarrow E^1$ *une fonction continue et il existe* $k > 0$ *tel que*

$$d(f(t,x), f(t,y)) \leq kd(x,y)$$

pour $t \in T$, $x, y \in E^1$. *Alors le problème à valeur initiale floue* (2.3.1) *admet une solution unique sur* T.

Preuve. *On note par* $C(T, E^1)$ *l'ensemble des applications continue définie sur* T *à valeur dans* E^1, *avec* T *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.
L'ensemble $C(T, E^1)$ *est métrisable par la distance suivante :*

$$H(\xi, \psi) = \sup_{t \in T} d(\xi(t), \psi(t))$$

pour $\xi, \psi \in C(T, E^1)$.
Comme (E^1, d) *est un espace métrique complet, alors une preuve standard s'applique pour montrer également que* $\big(C(T, E^1), H\big)$ *est un espace métrique complet.*
Maintenant, soit (t_1, y) *un élément arbitraire de* $T \times E^1$ *et* $\eta > 0$ *tel que* $\eta k < 1$.
Nous allons montrer que le problème à valeur initiale floue suivant :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_1) = y \tag{2.3.2}$$

admet une solution unique sur l'intervalle $I_1 = [t_1, t_1 + \eta]$.
Pour $\xi \in C(I_1, E^1)$, *on définit* $G\xi$ *sur* I_1 *par l'équation suivante :*

$$G\xi = y + \int_{t_1}^{t} f(s, \xi(s)))ds.$$

Ensuite, d'après le corollaire (2.2)*,* $G\xi \in C(I_1, E^1)$*.*

De plus, d'après le théorème(2.7) *et la condition de Lipschitz de* f *on a :*

$$\begin{aligned} H(G\xi, G\psi) &= \sup_{t\in T} d\Big(\int_{t_1}^{t} f(s,\xi(s))ds, \int_{t_1}^{t} f(s,\psi(s))ds\Big) \\ &\leq \int_{t_1}^{t_1+\eta} d\Big(f(s,\xi(s)), f(s,\psi(s))\Big)ds \\ &\leq k\int_{t_1}^{t_1+\eta} d\Big(\xi(s),\psi(s)\Big)ds \\ &\leq \eta k H(\xi,\psi). \end{aligned}$$

pour tout $\xi, \psi \in C(I_1, E^1)$*.*

Par conséquent, d'après le principe de contraction de Banach, G *admet un point fixe unique, qui par le lemme* (2.14) *est la solution désirée au problème* (2.3.2)*.*

Par ailleurs, l'intervalle T *s'exprime comme une union d'une famille finie d'intervalles* I_k *avec la longueur de chaque intervalle inférieur à* η*. Le paragraphe précédent garantit l'existence d'une solution unique à* (2.3.2) *sur chaque intervalle* I_k*. Assemblant ces solutions nous donne la solution unique du* (2.3.1) *sur tout l'intervalle* T*.*

Chapitre 3

Sous-ensembles flous intuitionistiques

3.1 Introduction

Le concept des ensembles flous intuitionistiques développé par Atanassov est un outil puissant pour traiter le vague. Une caractéristique importante des ensembles flous intuitionistiques est qu'il attribue à chaque élément d'un degré d'appartenance et d'un degré de non-appartenance, et ainsi, cette théorie constitue une extension de la théorie des ensembles flous de Zadeh, qui attribue à chaque élément seulement un degré d'appartenance.

3.2 Notations et notions fondamentales

Définition 3.1. *On définit un sous-ensemble flou intuitionistique A d'un univers X par la donnée de deux fonctions*

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

et

$$\nu_A : X \to [0,1]$$

appelées respectivement fonction d'appartenance et fonction de non-appartenance de A, qui vérifient

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X$$

On peut représenter A sous la forme suivante :

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle\,,\ 0 \le \mu_A(x) + \nu_A(x) \le 1,\ x \in X\}$$

Pour chaque $x \in X, \pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ *est appelé l'indice d'incertitude.*

On note $\mathbb{F}(X)$ l'espace de sous-ensembles floues intuitionistiques de X.

Remarque 3.1. *Tout sous-ensemble flou est un sous-ensemble flou intuitionistique. En effet, on a*

$$0 \le \mu_A + \nu_A = 1$$

dans ce cas, on peut représenter A comme un sous-ensemble flou intuitionistique

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle\,,\ x \in X\}$$

3.2.1 Caractéristiques d'un ensemble flou intuitionistique

Définition 3.2. *Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique d'un univers X.*

- *On appelle support de A noté* $S(A), (Supp(A))$*,ou* A^0 *l'ensemble*

$$S(A) = \{x \in X | \nu_A(x) < 1\}.$$

- *On appelle noyau de A noté N(A) l'ensemble*

$$N(A) = \{x \in X|\ \mu_A(x) = 1\ ,\ \nu_A(x) = 0\}.$$

- *On appelle Hauteur de A notée H(A) le réel*

$$H(A) = \sup\{\mu_A(x)|\ x \in X\}.$$

3.2.2 Opérations sur les ensembles flous intuitionistiques

Soient $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$ et $B = \{\langle x, \mu_B(x), \nu_B(x)\rangle \mid x \in X\}$ deux ensembles flous intuitionistiques de X, alors :

1. $A \subset B \iff (\forall x \in X)$ ($\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ et $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$).

2. $A = B \iff (\forall x \in X)$ ($A \subset B$ et $B \subset A$).

3. $\overline{A} = \{\langle x, \nu_A(x), \mu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$.

4. $A \cap B = \{\langle x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(\nu_A(x), \nu_B(x))\rangle \mid x \in X\}$.

5. $A \cup B = \{\langle x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(\nu_A(x), \nu_B(x))\rangle \mid x \in X\}$.

6. $A + B = \{\langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \nu_A(x) \cdot \nu_B(x)\rangle \mid x \in X\}$.

7. $A \cdot B = \{\langle x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \nu_A(x) + \nu_B(x) - \nu_A(x) \cdot \nu_B(x)\rangle \mid x \in X\}$.

3.3 Espace métrique flou intuitionistique

3.3.1 Distance de Melliani et Chadli

Dans la section on a présenté quelques distances donnée dans le cas où X est discrèt. Dans cette section on va présenter la distance construite par Les professeurs S.Melliani et L.S.Chadli dans [9], en utilisant la norme euclidienne et l'approche fonctionnelle.
Soit X un univers. Considèrons l'application

$$d_{\mathbb{F}} : \begin{cases} \mathbb{F}(X) \times \mathbb{F}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (A, B) \longrightarrow \|\mu_A - \mu_B\|_2 \end{cases}$$

où

$$\|\mu_A\|_2 = \sqrt{\int_X (\mu_A(x))^2 \, dx}$$

Il est clair que

Lemme 3.1. *$d_{\mathbb{F}}$ définie une distance sur $\mathbb{F}$.*

Maintenant soit

$$d_{\mathsf{F}} : \begin{cases} \mathsf{F}(X) \times \mathsf{F}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (A, B) \longrightarrow \sqrt{\|\mu_A - \mu_B\|_2^2 + \|\nu_A - \nu_B\|_2^2 + \|\pi_A - \pi_B\|_2^2} \end{cases}$$

Théorème 3.1. *$d_{\mathbb{IF}}$ définie une distance sur $I\!F(X)$.*

Preuve. *Par l'inégalité de Minkowski*

$$\|\mu_A - \mu_C\|_2^2 \leq \Big(\|\mu_A - \mu_B\|_2 + \|\mu_B - \mu_C\|_2\Big)^2 \quad \forall A, B, C \in I\!F(X)$$

puis par l'inégalité de Holder

$$\|\mu_A - \mu_C\|_2^2 \leq \|\mu_A - \mu_B\|_2^2 + \|\mu_B - \mu_C\|_2^2 \quad \forall A, B, C \in I\!F(X)$$

de même

$$\|\nu_A - \nu_C\|_2^2 \leq \|\nu_A - \nu_B\|_2^2 + \|\nu_B - \nu_C\|_2^2 \quad \forall A, B, C \in I\!F(X)$$

et

$$\|\pi_A - \pi_C\|_2^2 \leq \|\pi_A - \pi_B\|_2^2 + \|\pi_B - \pi_C\|_2^2 \quad \forall A, B, C \in I\!F(X)$$

Ce qui montre l'inégalité triangulaire.

En utilisant le lemme 3.1, on obtient le résultat.

Exemple 1. *Soient A et B deux sous-ensembles flous intuitionistiques définis par :*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 1 & \textit{pour } x \in [1, 2] \\ -x + 3 & \textit{pour } x \in [2, 3] \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

$$\nu_A(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \textit{pour } x \in [0, 2] \\ \frac{1}{2}x - 1 & \textit{pour } x \in [2, 4] \\ 0, \ \textit{ailleurs} \end{cases}$$

$$\pi_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \textit{pour } x \in [0, 1] \\ -\frac{1}{2}x + 1 & \textit{pour } x \in [0, 2] \\ \frac{1}{2}x - 1 & \textit{pour } x \in [2, 3] \\ -\frac{1}{2}x + 2 & \textit{pour } x \in [3, 4] \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} x+3 & pour\ x \in [-3,-2] \\ -x-1 & pour\ x \in [-2,-1] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$\nu_B(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x-1 & pour\ x \in [-4,-2] \\ \frac{1}{2}x+1 & pour\ x \in [-2,0] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$\pi_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+2 & pour\ x \in [-4,-3] \\ -\frac{1}{2}x-1 & pour\ x \in [-3,-2] \\ \frac{1}{2}x+1 & pour\ x \in [-2,-1] \\ -\frac{1}{2}x & pour\ x \in [-1,0] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

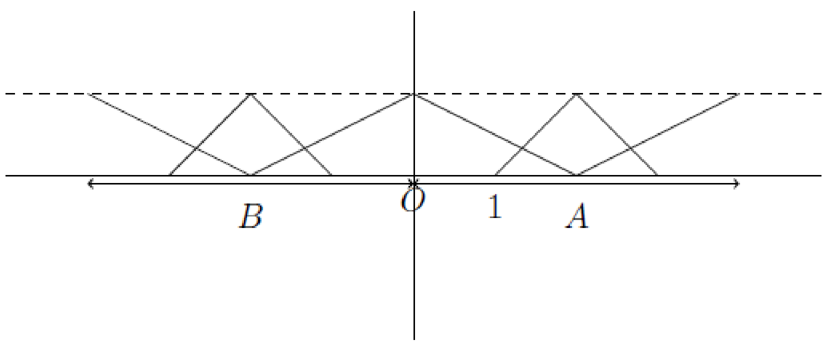

FIGURE 3.1 –

$$
\begin{aligned}
d_{\mathbb{IFS}}(A,B) &= \int_{-3}^{-1} |\mu_B(x)|^2 dx + \int_{1}^{3} |\mu_A(x)|^2 dx \\
&+ \int_{-4}^{0} |\nu_B(x)|^2 dx + \int_{0}^{4} |\nu_A(x)|^2 dx \\
&+ \int_{0}^{4} |\pi_A(x)|^2 dx + \int_{-4}^{0} |\pi_B(x)|^2 dx \\
&= \sqrt{\frac{49}{12}}
\end{aligned}
$$

3.3.2 Distance sur $\mathbb{F}_1$

Dans cette section on va construire une nouvelle métrique sur l'espace des sous-ensembles flous intuitionistiques vérifiant certaines propriétés. Le travail sur $\mathbb{F}_1$ permet de généraliser le travail de Kaleva et Seikkala [17].

Généralités

Introduisons l'ensemble $\mathbb{F}_1$ défini comme suit :

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_1(\mathbb{R}) = \left\{ \langle u, v \rangle : \mathbb{R} \to [0,1]^2 \mid 0 \leq u + v \leq 1 \right\}$$

Vérifiant les conditions suivantes :

1. $\langle u, v \rangle$ est normale i.e il existe $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = 1$ et $v(x_1) = 1$.
2. $\langle u, v \rangle$ est convexe intuitionistique, i.e, u est convexe au sens flou et v concave au sens flou.

   Autrement dit $\quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad$ et $\quad \forall t \in [0,1]$

$$u(tx + (1-t)y) \geq \min\left(u(x), u(y)\right)$$
$$v(tx + (1-t)y) \leq \max\left(v(x), v(y)\right)$$

3. u est semi-continue supérieurement et v est semi-continue inférieurement.
4. $Supp(\langle u, v \rangle) = cl(\{x \in \mathbb{R} : v(x) < 1\})$ est borné.

Chaque élément de $\mathbb{F}_1$ est un nombre flou intuitionistique.

Remarque 3.2. *Lorsque $u + v = 1$, on trouve les mêmes propriétés de la définition d'un élément de E^1.*

Définition 3.3. *Un nombre flou intuitionistique triangulaire (TIFN) A est un ensemble flou intuitionistique de $\mathbb{R}$ dont la fonction d'appartenance est μ_A et la fonction de non appartenance est ν_A :*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & si \quad a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & si \quad a_2 \leq x \leq a_3, \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

$$\nu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a'_1} & si \quad a'_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{x - a_2}{a'_3 - a_2} & si \quad a_2 \leq x \leq a'_3, \\ 1 & ailleurs. \end{cases}$$

où $a'_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a'_3$ *et* $\mu_A(x)$, $\nu_A(x) \leq 0.5$ *pour* $\mu_A(x) = \nu_A(x)$,$\forall x \in \mathbb{R}$

ce nombre est noté

$$A_{TIFN} = \langle a_1, a_2, a_3; a'_1, a_2, a'_3 \rangle$$

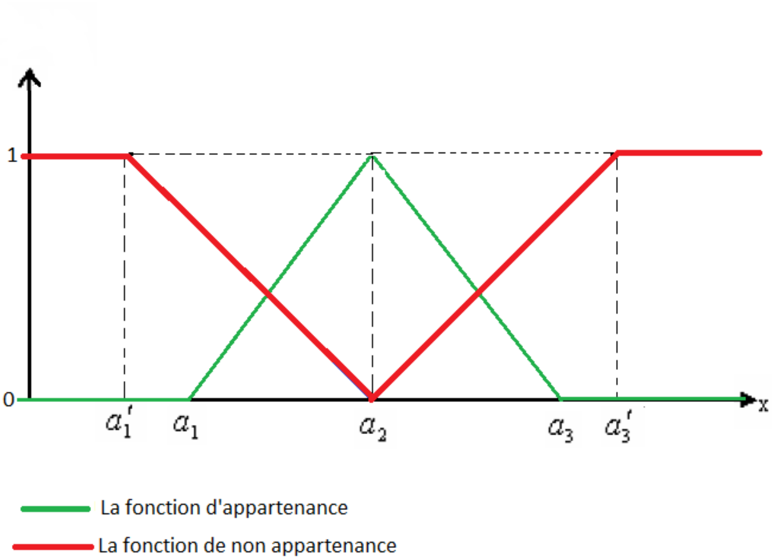

FIGURE 3.2 – Nombre flou intuitionistique triangulaire

Définition 3.4. *Un nombre flou intuitionistique trapézoïdal (TRIFN) A est un ensemble flou intuitionistique de $\mathbb{R}$ avec la fonction d'appartenance est μ_A et la fonction de non-appartenance est ν_A :*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & si \quad a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & si \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3} & si \quad a_3 \leq x \leq a_4, \\ 0 & \quad sinon. \end{cases}$$

$$\nu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{a_2-x}{a_2-a_1'} & si \quad a_1' \leq x \leq a_2 \\ 0 & si \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{x-a_3}{a_4'-a_3} & si \quad a_3 \leq x \leq a_4', \\ 1 & \quad sinon. \end{cases}$$

Avec $a_1' \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_4'$.

Ce nombre flou intuitionistique trapézoidal est noté par

$$A_{TRIFN} = \left\langle a_1, a_2, a_3, a_4; a_1', a_2, a_3, a_4' \right\rangle$$

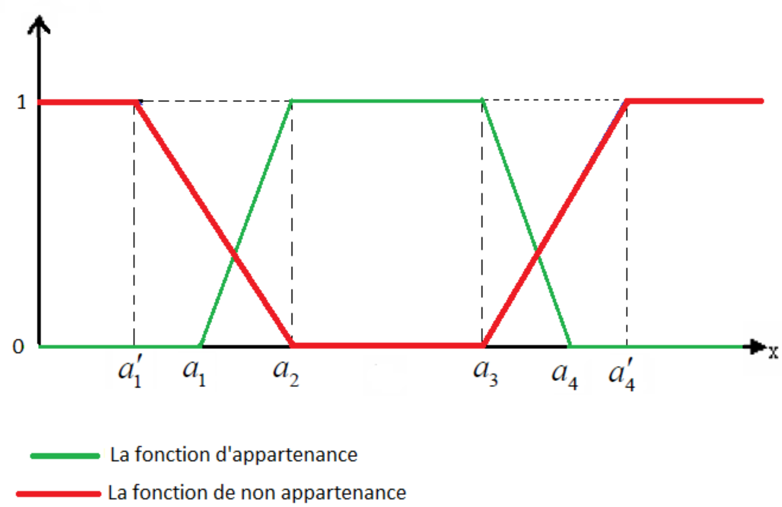

FIGURE 3.3 – Nombre flou intuitionistique trapézoïdal

Définition 3.5. *On définit l'élément neutre pour l'addition comme suit :*

$$0_{\langle 1,0\rangle}(t) = \begin{cases} \langle 1,0\rangle & si\ t=0 \\ \langle 0,1\rangle & si\ \neq 0 \end{cases}$$

Définition 3.6. *Pour $\alpha \in [0,1]$ et $\langle u,v\rangle \in I\!F_1$, on définit les coupes supérieures et inférieures de $\langle u,v\rangle$ comme suit :*

$$\Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha} = \Big\{x \in \mathbb{R} : v(x) \leq 1-\alpha\Big\}$$

et

$$\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha} = \Big\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\Big\}$$

On note

$$\begin{array}{rcl} \Big[\langle u,v\rangle\Big]_l^+(\alpha) & = & \inf\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \geq \alpha\}, \\ \Big[\langle u,v\rangle\Big]_r^+(\alpha) & = & \sup\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \geq \alpha\}, \\ \Big[\langle u,v\rangle\Big]_l^-(\alpha) & = & \inf\{x \in \mathbb{R} \mid v(x) \leq 1-\alpha\}, \\ \Big[\langle u,v\rangle\Big]_r^-(\alpha) & = & \sup\{x \in \mathbb{R} \mid v(x) \leq 1-\alpha\} \end{array}$$

Remarque 3.3.

1. *Les α-coupes supérieures et inférieures d'un nombre flou intuitionistique sont des intervalles fermé de $\mathbb{R}$ c-à-d*

$$\Big[\langle u,v\rangle\Big]_\alpha = \Big[\Big[\langle u,v\rangle\Big]_l^+(\alpha), \Big[\langle u,v\rangle\Big]_r^+(\alpha)\Big],$$
$$\Big[\langle u,v\rangle\Big]^\alpha = \Big[\Big[\langle u,v\rangle\Big]_l^-(\alpha), \Big[\langle u,v\rangle\Big]_r^-(\alpha)\Big]$$

2. *On peut considérer $[\langle u,v\rangle]_\alpha$ comme $[u]^\alpha$ et $[\langle u,v\rangle]^\alpha$ comme $[1-v]^\alpha$ dans le cas floue.*

D'après les propriétés vérifiant par un élément de $\mathbb{F}_1$, on a

Proposition 3.1. *Pour tout $\langle u,v\rangle, \langle u',v'\rangle \in I\!F_1$, on a*

$$\langle u,v\rangle = \langle u',v'\rangle \Longleftrightarrow \begin{cases} [\langle u,v\rangle]_\alpha = [\langle u',v'\rangle]_\alpha \\ [\langle u,v\rangle]^\alpha = [\langle u',v'\rangle]^\alpha \end{cases} ,\forall\alpha\in[0,1]$$

Dans l'espace $\mathbb{F}_1$, on définit l'addition et la multiplication par un scalaire par :

$$\langle u,v\rangle \oplus \langle u',v'\rangle = \langle u\vee u', v\wedge v'\rangle, \forall \langle u,v\rangle, \langle u',v'\rangle \in \mathbb{F}_1$$

avec

$$(u\vee u')(z) = \sup_{z=x+y} \min(u(x), u'(y))$$
$$(v\wedge v')(z) = \inf_{z=x+y} \max(v(x), v'(y))$$
$$\lambda\langle u,v\rangle = \langle \lambda u, \lambda v\rangle,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall\langle u,v\rangle, \langle u',v'\rangle \in \mathbb{F}_1$$

souvent on note $+$ à la place de $\oplus$.

Par l'extension de Zadeh on a

$$\begin{aligned} \Big[\langle u,v\rangle \oplus \langle u',v'\rangle\Big]^{\alpha} &= \Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha} + \Big[\langle u',v'\rangle\Big]^{\alpha}, \\ \Big[\lambda\,\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha} &= \lambda\Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha} \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned} \Big[\langle u,v\rangle \oplus \langle u',v'\rangle\Big]_{\alpha} &= \Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha} + \Big[\langle u',v'\rangle\Big]_{\alpha}, \\ \Big[\lambda\,\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha} &= \lambda\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha} \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Proposition 3.2. *Pour tout $\alpha,\ \beta \in [0,1]$ et $\langle u,v\rangle \in I\!\!F_1$*

(i) $\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha} \subseteq \Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha}$

(ii) $\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha}$ *et* $\Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha}$ *sont des ensembles convexes compacts non vides de* $\mathbb{R}$

(iii) si $\alpha \leq \beta$ alors $\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\beta} \subseteq \Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha}$ *et* $\Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\beta} \subseteq \Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha}$

(iv) Si $\alpha_n \nearrow \alpha$ alors $\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha} = \bigcap_n \Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha_n}$ *et* $\Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha} = \bigcap_n \Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha_n}$

Soit $\alpha \in [0,1]$ on note par

$$M_{\alpha} = \{x \in \mathbb{R}\ :\ u(x) \geq \alpha\} \quad \text{et} \quad M^{\alpha} = \{x \in \mathbb{R}\ :\ v(x) \leq 1-\alpha\}$$

Lemme 3.2. *[30] Soit $\Big\{M_{\alpha},\ \alpha \in [0,1]\Big\}$ et $\Big\{M^{\alpha},\ \alpha \in [0,1]\Big\}$ deux familles de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ satisfont(i)–(iv) dans la proposition 3.2, si u et v définit par*

$$u(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin M_0 \\ \sup\{\alpha \in [0,1]\ :\ x \in M_{\alpha}\} & si\ x \in M_0 \end{cases}$$
$$v(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \notin M^0 \\ 1 - \sup\{\alpha \in [0,1]\ :\ x \in M^{\alpha}\} & si\ x \in M^0 \end{cases}$$

Alors il existe $\langle u,v\rangle \in I\!\!F_1$ tel que

$$[\langle u,v\rangle]_{\alpha} = M_{\alpha}\ et\ [\langle u,v\rangle]^{\alpha} = M^{\alpha}$$

Métrique sur $\mathbb{F}_1$

Commençons par un lemme utilisable dans ce qui suit

Lemme 3.3. *Soient* $\langle u,v\rangle, \langle u',v'\rangle \in \mathbb{F}_1$.
Si I est une partie dense dans $[0,1]$, alors si $[\langle u,v\rangle]^\alpha = [\langle u',v'\rangle]^\alpha$ et $[\langle u,v\rangle]_\alpha = [\langle u',v'\rangle]_\alpha$, pour tout $\alpha \in I$, alors $\langle u,v\rangle = \langle u',v'\rangle$.

Preuve. *Soit $\alpha \in [0,1]$, puisque I est dense dans $[0,1]$, il existe $(\alpha_i)_i$ croissante dans I, tend vers α, mais*

$$[\langle u,v\rangle]^\alpha = \bigcap_i [\langle u,v\rangle]^{\alpha_i} = \bigcap_i [\langle u',v'\rangle]^{\alpha_i} = [\langle u',v'\rangle]^\alpha$$

et

$$[\langle u,v\rangle]_\alpha = \bigcap_i [\langle u,v\rangle]_{\alpha_i} = \bigcap_i [\langle u',v'\rangle]_{\alpha_i} = [\langle u',v'\rangle]_\alpha$$

Maintenant, soient $\langle u,v\rangle, \langle u',v'\rangle \in \mathbb{F}_1$, et $p \in [1,\infty]$
Considérons l'application

$$\begin{aligned} d_p\Big(\langle u,v\rangle, \langle z,w\rangle\Big) = & \Big(\frac{1}{4}\int_0^1 \Big|\Big[\langle u,v\rangle\Big]_r^+(\alpha) - \Big[\langle z,w\rangle\Big]_r^+(\alpha)\Big|^p d\alpha \\ & + \frac{1}{4}\int_0^1 \Big|\Big[\langle u,v\rangle\Big]_l^+(\alpha) - \Big[\langle z,w\rangle\Big]_l^+(\alpha)\Big|^p d\alpha \\ & + \frac{1}{4}\int_0^1 \Big|\Big[\langle u,v\rangle\Big]_r^-(\alpha) - \Big[\langle z,w\rangle\Big]_r^-(\alpha)\Big|^p d\alpha \\ & + \frac{1}{4}\int_0^1 \Big|\Big[\langle u,v\rangle\Big]_l^-(\alpha) - \Big[\langle z,w\rangle\Big]_l^-(\alpha)\Big|^p d\alpha\Big)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Si $p \in [1,\infty[$,

et

$$\begin{aligned} d_\infty\Big(\langle u,v\rangle, \langle z,w\rangle\Big) = & \frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1} \Big|\Big[\langle u,v\rangle\Big]_r^+(\alpha) - \Big[\langle z,w\rangle\Big]_r^+(\alpha)\Big| \\ & + \frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1} \Big|\Big[\langle u,v\rangle\Big]_l^+(\alpha) - \Big[\langle z,w\rangle\Big]_l^+(\alpha)\Big| \\ & + \frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1} \Big|\Big[\langle u,v\rangle\Big]_r^-(\alpha) - \Big[\langle z,w\rangle\Big]_r^-(\alpha)\Big| \\ & + \frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1} \Big|\Big[\langle u,v\rangle\Big]_l^-(\alpha) - \Big[\langle z,w\rangle\Big]_l^-(\alpha)\Big| \end{aligned}$$

Si $p = \infty$.

Lemme 3.4. *Pour tout $p \in [1,\infty]$, l'application d_p est bien définie.*

Preuve. *Le point essentiel de la démonstration est que $[\langle u,v\rangle]^{\alpha}$ et $[\langle u,v\rangle]_{\alpha}$ sont des fonctions mesurables. Pour cela soit $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_i < ..$ une suite d'éléments de $[0,1]$, telle que $\alpha_i \longrightarrow \alpha \in [0,1]$, d'où $[\langle u,v\rangle]^{\alpha} = \bigcap_i [\langle u,v\rangle]^{\alpha_i}$ et $[\langle u,v\rangle]_{\alpha} = \bigcap_i [\langle u,v\rangle]_{\alpha_i}$, ce qui montre bien la mésurabilité de ces deux fonctions.*

Théorème 3.2. *Pour tout $p \in [1,\infty]$, $(\mathbb{F}_1, d_p)$ est un espace métrique.*

Preuve. *La symétrie et la transitivité sont des conséquences de celles de la distance de Hausdorff et quelques propriétés de l'intégrale.*
Il reste à démontrer que $d_p(\langle u,v\rangle, \langle u',v'\rangle) = 0$, alors $\langle u,v\rangle = \langle u',v'\rangle$.
Alors, si $d_p(\langle u,v\rangle, \langle u',v'\rangle) = 0$, pour $p \neq \infty$, il vient que $[\langle u,v\rangle]^{\alpha} = [\langle u',v'\rangle]^{\alpha}$ et $[\langle u,v\rangle]_{\alpha} = [\langle u',v'\rangle]_{\alpha}$, presque partout, la densité de la partie où cette égalité est réalisée, montre l'égalité partout.
L'égalité assez claire dans le cas de $p = \infty$.

Exemple 2.

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & si \;\; a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & si \;\; a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & si \;\; a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

et

$$v(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a'_1} & si \;\; a'_1 \leq x \leq a_2 \\ 0 & si \;\; a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{x-a_3}{a'_4-a_3} & si \;\; a_3 \leq x \leq a'_4 \\ 1 & ailleurs \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Les coupes supérieures et inférieures du $\langle u,v\rangle = \langle a_1,a_2,a_3;a'_1,a_2,a'_3\rangle$ sont données par les formules suivantes

$$\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha} = \Big[a_1 + \alpha(a_2-a_1), a_3 - \alpha(a_3-a_2)\Big]$$

$$\Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha}=\Big[a_1'+\alpha(a_2-a_1'),a_3'-\alpha(a_3'-a_2)\Big]$$

$$u(x)=\begin{cases}\frac{x-b_1}{b_2-b_1} & si\;\; a_1\le x\le a_2\\ 1 & si\; a_2\le x\le a_3\\ \frac{b_4-x}{b_4-b_3} & si\;\; b_3\le x\le a_4\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

et

$$v(x)=\begin{cases}\frac{b_2-x}{b_2-b_1'} & si\;\; b_1'\le x\le a_2\\ 0 & si\;\; b_2\le x\le b_3\\ \frac{x-b_3}{b_4'-b_3} & si\;\; b_3\le x\le b_4'\\ 1 & ailleurs\end{cases}$$

Les coupes supérieures et inférieures du $\langle u',v'\rangle=\langle b_1,b_2,b_3;b_1',b_2,b_3'\rangle$ *sont données par les formules suivantes :*

$$\Big[\langle u',v'\rangle\Big]_{\alpha}=\Big[b_1+\alpha(b_2-b_1),b_3-\alpha(b_3-b_2)\Big]$$
$$\Big[\langle u',v'\rangle\Big]^{\alpha}=\Big[b_2-(1-\alpha)(b_2-b_1'),b_2+(1-\alpha)(b_3'-b_2)\Big]$$

Pour $a_1=-1,a_2=0,a_3=1,\ a_1'=-2,a_2=0,a_3'=2,\ b_1=0,b_2=1,b_3=2$ *et* $b_1'=1,b_2=1,b_3'=4$*, on obtient, si* $p\in[1,\infty)$

$$d_p\left(\langle u,v\rangle,\langle u',v'\rangle\right)=\left(1+\frac{2\times 5^{p+1}-2\times 4^{p+1}+3^{p+2}-3}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$d_\infty\left(\langle u,v\rangle,\langle u',v'\rangle\right)=\frac{5}{2}$$

Topologie induite

Définition 3.7. *Soit* $\langle u,v\rangle\in I\!F_1$ *et* $r>0$*. On appelle boule ouverte de centre* $\langle u,v\rangle$ *et de rayon* r*, l'ensemble noté* $B(\langle u,v\rangle,r)$*, des éléments* $\langle u',v'\rangle\in I\!F_1$*, tels que* $d_p\left(\langle u,v\rangle,\langle u',v'\rangle\right)<r$*. Si* $d_p\left(\langle u,v\rangle,\langle u',v'\rangle\right)\le r$*, il s'agit d'une boule fermée.*

Définition 3.8. *Une suite* $(\langle u_n, v_n \rangle)_n$ *d'éléments de* $I\!F_1$*, est dite convergente vers* $\langle u, v\rangle \in I\!F_1$*, si*

$$\lim_{n\to\infty} d_p\left(\langle u, v\rangle, \langle u_n, v_n\rangle\right) = 0$$

Définition 3.9. *Une suite* $(\langle u_n, v_n \rangle)_n$ *d'éléments de* $I\!F_1$*, est dite de Cauchy, si*

$$\lim_{n,m\to\infty} d_p\left(\langle u_m, v_m\rangle, \langle u_n, v_n\rangle\right) = 0$$

Théorème 3.3. *Pour tout* $p \in [1, \infty]$*,* $(I\!F_1, d_p)$ *est un espace métrique complet.*

Preuve. *Pour montrer la complétude, soient,* $\epsilon > 0$ *et* $(\langle u_n, v_n\rangle)_n$*, une suite de Cauchy dans* $I\!F_1$*.*

- *(i) Cas* $p = \infty$*, on a*

$$\sup_{\alpha\in(0,1]} \left|[\langle u_n, v_n\rangle]_l^+(\alpha) - [\langle u'_m, v'_m\rangle]_l^+(\alpha)\right| \le \epsilon$$

et

$$\sup_{\alpha\in(0,1]} \left|[\langle u_n, v_n\rangle]_r^+(\alpha) - [\langle u'_m, v'_m\rangle]_r^+(\alpha)\right| \le \epsilon$$

dès que n, m *assez grands. La complétude de* $\mathbb{R}$*, assure que* $[\langle u_n, v_n\rangle]_l^+(\alpha) \longrightarrow \phi_l(\alpha)$ *et* $[\langle u_n, v_n\rangle]_r^+(\alpha) \longrightarrow \phi_r(\alpha)$ *et par application du lemme 3.2, on a* $([\phi_l(\alpha), \phi_r(\alpha)])_{\alpha\in(0,1]}$*, définie un nombre flou, de même* $\left([\phi^l(\alpha), \phi^r(\alpha)]\right)_{\alpha\in(0,1]}$*, définie un nombre flou, où* $\phi^l(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} [\langle u_n, v_n\rangle]_l^-(\alpha)$ *et* $\phi^r(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} [\langle u_n, v_n\rangle]_r^-(\alpha)$*.*
D'autre part ce qui précede, montre que $\left\{\left([\phi_l(\alpha), \phi_r(\alpha)]\right),\ \left([\phi^l(\alpha), \phi^r(\alpha)]\right),\ \alpha \in [0,1]\right\}$*, définie un élément de* $I\!F_1$*.*

- *(ii) Cas* $p \neq \infty$*, dans ce cas*

$$\int_0^1 \left|[\langle u_n, v_n\rangle]_l^+(\alpha) - [\langle u'_m, v'_m\rangle]_l^+(\alpha)\right|^p d\alpha \le \epsilon$$

et

$$\int_0^1 \left|[\langle u_n, v_n\rangle]_r^+(\alpha) - [\langle u'_m, v'_m\rangle]_r^+(\alpha)\right|^p d\alpha \le \epsilon$$

Par théorème de Frechet-Reisz dans voir [7], page 94*.*

$$[\langle u_n, v_n\rangle]_l^+(\alpha) \longrightarrow \phi_l(\alpha)$$

et

$$[\langle u_n, v_n\rangle]_r^+(\alpha) \longrightarrow \phi_r(\alpha)$$

dans $L^p((0,1])$.

Et il existe une sous-suite $(\langle u_{n_k}, v_{n_k}\rangle)_k$ *telle que*

$$[\langle u_{n_k}, v_{n_k}\rangle]_l^+(\alpha) \longrightarrow \phi_l(\alpha)$$

et

$$[\langle u_{n_k}, v_{n_k}\rangle]_r^+(\alpha) \longrightarrow \phi_r(\alpha)$$

presque partout.

Par application du lemme3.2 et lemme 3.3.4, il existe $\langle u, v\rangle \in I\!F_1$ *tel que*

$$[\langle u, v\rangle]^\alpha = [\phi_l^-(\alpha), \phi_r^-(\alpha)]$$

et

$$[\langle u, v\rangle]_\alpha = [\phi_l^+(\alpha), \phi_r^+(\alpha)]$$

3.3.3 Différence de Hukuhara

Définition 3.10. *[32] Soient* $\langle u, v\rangle$ *et* $\langle u', v'\rangle \in I\!F_1$*, la différence de Hukuhara entre* $\langle u, v\rangle$ *et* $\langle u', v'\rangle$ *est le nombre* $\langle z, w\rangle$ *(s'il existe)* $\in I\!F_1$*, tel que*

$$\langle u, v\rangle \ominus \langle u', v'\rangle = \langle z, w\rangle \Longleftrightarrow \langle u, v\rangle = \langle u', v'\rangle \oplus \langle z, w\rangle$$

Les conditions d'existence de la différence $\langle u, v\rangle \ominus \langle z, w\rangle = \langle k, l\rangle$ sont

1. $\Big[\langle k, l\rangle\Big]_\alpha = \Big[\langle u, v\rangle\Big]_\alpha \ominus \Big[\langle z, w\rangle\Big]_\alpha$ et

$$\begin{cases} \quad Si \ \ diam\Big(\Big[\langle u, v\rangle\Big]_\alpha\Big) \geq diam\Big(\Big[\langle z, w\rangle\Big]_\alpha\Big) \text{ pour tout } \ \alpha \in [0,1] \\ \Big[\langle k, l\rangle\Big]_l^+(\alpha) = \Big[\langle u, v\rangle\Big]_l^+(\alpha) - \Big[\langle z, w\rangle\Big]_l^+(\alpha) \\ \Big[\langle k, l\rangle\Big]_r^+(\alpha) = \Big[\langle u, v\rangle\Big]_r^+(\alpha) - \Big[\langle z, w\rangle\Big]_r^+(\alpha) \end{cases} \tag{3.3.4}$$

à condition que $\Big[\langle k, l\rangle\Big]_l^+(\alpha)$ est croissante par rapport à α, $\Big[\langle k, l\rangle\Big]_r^+(\alpha)$ est décroissante par rapport à α et $\Big[\langle k, l\rangle\Big]_l^+(1) \leq \Big[\langle k, l\rangle\Big]_r^+(1)$.

2. $\Big[\langle k,l\rangle\Big]^{\alpha} = \Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha} \ominus \Big[\langle z,w\rangle\Big]^{\alpha}$ et

$$\begin{cases} \quad Si \;\; diam\Big(\Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha}\Big) \geq diam\Big(\Big[\langle z,w\rangle\Big]^{\alpha}\Big) \text{ pour tout } \;\alpha \in [0,1] \\ \Big[\langle k,l\rangle\Big]^{-}_{l}(\alpha) = \Big[\langle u,v\rangle\Big]^{-}_{l}(\alpha) - \Big[\langle z,w\rangle\Big]^{-}_{l}(\alpha) \\ \Big[\langle k,l\rangle\Big]^{-}_{r}(\alpha) = \Big[\langle u,v\rangle\Big]^{-}_{r}(\alpha) - \Big[\langle z,w\rangle\Big]^{-}_{r}(\alpha) \end{cases} \tag{3.3.5}$$

à condition que $\Big[\langle k,l\rangle\Big]^{-}_{l}(\alpha)$ est croissante par rapport à α, $\Big[\langle k,l\rangle\Big]^{-}_{r}(\alpha)$ est décroissante par rapport à α et $\Big[\langle k,l\rangle\Big]^{-}_{l}(1) \leq \Big[\langle k,l\rangle\Big]^{-}_{r}(1)$.

Exemple 3. *Soient* $A = (3,5,7.5;1.5,5,8)$ $\;B = (2,3,4;1,3,4)$

$$[A]_{\alpha} = [3+2\alpha; 7.5-2.5\alpha] \qquad [B]_{\alpha} = [2+\alpha; 4-\alpha]$$

$$[A]^{\alpha} = [1.5+3.5\alpha; 8-3\alpha] \qquad [B]^{\alpha} = [1+2\alpha; 4-\alpha]$$

$$diam([A]_{\alpha}) = 4.5(1-\alpha) \geq diam([B]_{\alpha}) = 2(1-\alpha)$$

$$diam([A]^{\alpha}) = 6.5(1-\alpha) \geq diam([B]^{\alpha}) = 3(1-\alpha)$$

$$[C]_{\alpha} = [1+\alpha; 3.5-1.5\alpha]$$

$$[C]^{\alpha} = [0.5+1.5\alpha; 4-2\alpha]$$

les conditions (3.3.4) et (3.3.5) sont satisfaites alors $A \ominus B = C$

Théorème 3.4. *Soient* $\langle u,v\rangle$, $\langle z,w\rangle \in I\!F_1$ *deux NFI avec les* α *coupes sont données respectivement par* $\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha}, \Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha}$ *et* $\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{\alpha}, \Big[\langle z,w\rangle\Big]^{\alpha}$ *la H-difference* $\langle u,v\rangle \ominus \langle z,w\rangle \in I\!F_1$ *existe si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$(a)\begin{cases} diam\Big(\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha}\Big) \geq diam\Big(\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{\alpha}\Big) & \forall\; \alpha \in [0,1] \\ \Big[\langle u,v\rangle\Big]^{+}_{l}(\alpha) - \Big[\langle z,w\rangle\Big]^{+}_{l}(\alpha) & \textit{est croissante par rapport à } \alpha \\ \Big[\langle u,v\rangle\Big]^{+}_{r}(\alpha) - \Big[\langle z,w\rangle\Big]^{+}_{r}(\alpha) & \textit{est décroissante par rapport à } \alpha \end{cases}$$

et

$$(b)\begin{cases} diam\Big(\Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha}\Big) \geq diam\Big(\Big[\langle z,w\rangle\Big]^{\alpha}\Big) & \forall\ \alpha\in[0,1] \\ \Big[\langle u,v\rangle\Big]_{l}^{-}(\alpha)-\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{l}^{-}(\alpha) & \textit{est croissante par rapport à } \alpha \\ \Big[\langle u,v\rangle\Big]_{r}^{-}(\alpha)-\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{r}^{-}(\alpha) & \textit{est décroissante par rapport à } \alpha \end{cases}$$

Preuve. *On suppose que (a) et (b) sont satisfaites, alors*

$$\begin{cases} diam\Big(\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha}\Big) \geq diam\Big(\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{\alpha}\Big) & \forall\ \alpha\in[0,1] \\ \Big[\langle u,v\rangle\Big]_{l}^{+}(\alpha)-\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{l}^{+}(\alpha) & \nearrow \\ \Big[\langle u,v\rangle\Big]_{r}^{+}(\alpha)-\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{r}^{+}(\alpha) & \searrow \end{cases}$$

avec

$$\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha}=\Big[\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{l}^{+}(\alpha),\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{r}^{+}(\alpha)\Big]$$

$$\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{\alpha}=\Big[\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{l}^{+}(\alpha),\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{r}^{+}(\alpha)\Big]$$

d'après ***Proposition 1.3.1.****, on en déduit que* $\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha}\ominus\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{\alpha}$ *existe dans* E^1.

D'autre part, on a

$$\begin{cases} diam\Big(\Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha}\Big) \geq diam\Big(\Big[\langle z,w\rangle\Big]^{\alpha}\Big) & \forall\ \alpha\in[0,1] \\ \Big[\langle u,v\rangle\Big]_{l}^{-}(\alpha)-\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{l}^{-}(\alpha) & \nearrow \\ \Big[\langle u,v\rangle\Big]_{r}^{-}(\alpha)-\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{r}^{-}(\alpha) & \searrow \end{cases}$$

avec

$$\Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha}=\Big[\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{l}^{-}(\alpha),\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{r}^{-}(\alpha)\Big]$$

$$\Big[\langle z,w\rangle\Big]^{\alpha}=\Big[\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{l}^{-}(\alpha),\Big[\langle z,w\rangle\Big]_{r}^{-}(\alpha)\Big]$$

d'après ***Proposition 1.3.1.****, on en déduit que* $\Big[\langle z,w\rangle\Big]^{\alpha}\ominus\Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha}$ *existe dans* E^1*. De plus, les conditions (3.3.4) et (3.3.5) sont satisfaites alors* $\langle u,v\rangle\ominus\langle z,w\rangle\in I\!\!F_1$ *existe.*

Proposition 3.3. *Si la différence de Hukuhara existe, alors elle est unique.*

3.4 Équation différentielle floue intuitionistique

3.4.1 Introduction

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution des équations différentielles floues intuitionistiques qui ne sont qu'une généralisation des équations différentielles floues formulées par Kalva([19]). Et pour atteindre cet objectif, on se base essentiellement sur les deux travaux [30] et [32], dans lesquels la distance $d_p, p\geq 1$ définie sur $\mathbb{F}_1$ a une grande importance dans la déduction des résultats importants concernant la complétude de l'espace métrique flou intuitionistique $(\mathbb{F}_1, d_p)$. Ainsi on introduit quelques notions d'analyse comme la continuité, la différentiabilité, la mesurabilité et l'intégrabilité des fonctions à valeur floue intuitionistique et de réaliser quelques propriétés concernant ces notions. Alors, tous ces concepts nous donnent des hypothèses adéquates pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle floue intuitionistique $x'(t)=f(t,x(t))\ x(t_0)=x_0$. Finalement, on va proposer une procédure pour la résolution des équations différentielles floues intuitionistiques par la méthode des α-coupes.

3.4.2 Préliminaires

Définition 3.11. *Soit* $F: I\!\!F_1\to I\!\!F_1$ *une application floue intuitionistique et* $\langle u,v\rangle\in I\!\!F_1$*.* F *est dite continue en* $\langle u,v\rangle$ *si et seulement si :*

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\langle z,w\rangle\in I\!\!F_1)\Big(d_\infty\Big(\langle u,v\rangle,\langle z,w\rangle\Big)<\delta\Big)\Rightarrow d_\infty\Big(F(\langle u,v\rangle),F(\langle z,w\rangle)\Big)<\varepsilon$$

Définition 3.12. *Soit $F : [a,b] \to \mathbb{F}_1$ une application à valeur floue intuitionistique et $t_0 \in [a,b]$. F est dite continue en t_0 si et seulement si :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\Big(\forall t \in [a,b] tel\ que \mid t - t_0 \mid < \delta\Big) \Rightarrow d_\infty(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$$

Définition 3.13. *On dit que F est une fonction floue intuitionistique continue sur $[a,b]$ si et seulement si elle est continue en tout point de $[a,b]$.*

Définition 3.14. *Une application $F : [a,b] \to \mathbb{F}_1$ est dite différentiable en $t_0 \in (a,b)$ s'il existe $F'(t_0) \in \mathbb{F}_1$ tel que les deux limites :*

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{F(t_0 + \Delta t) \ominus F(t_0)}{\Delta t} \quad et \quad \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}$$

existent et qu'elles sont égales à $F'(t_0)$, appelée dérivée au sens de Hukuhara de F en t_0. Ici, la limite est prise dans l'espace métrique $(\mathbb{F}_1, d_\infty)$.

Définition 3.15. *Soit $F : [a,b] \to \mathbb{F}_1$ application floue intuitionistique.*
Soit $P : [a,b] \to \mathbb{F}_1$ une application différentiable en tout point $t \in (a,b)$. P est dite primitive de F si sa dérivée au sens de Hukuhara est égale à F i.e

$$\forall\ t \in (a,b)\ ,\ P'(t) = F(t).$$

Théorème 3.5. *Soit $F : [a,b] \to \mathbb{F}_1$ une application différentiable.*
On note

$$F^\alpha(t) = [F(t)]^\alpha = [\lambda_\alpha(t), \lambda^\alpha(t)],$$

$$F_\alpha(t) = [F(t)]_\alpha = [\mu_\alpha(t), \mu^\alpha(t)].$$

Alors, $\lambda_\alpha(t), \lambda^\alpha(t), \mu_\alpha(t)$ et $\mu^\alpha(t)$ sont différentiables et on a

$$[F(t)']^\alpha = [\lambda'_\alpha(t), \lambda^{\alpha\prime}(t)]$$

et

$$[F(t)']_\alpha = [\mu'_\alpha(t), \mu^{\alpha\prime}(t)].$$

Preuve. *Montrons que l'application* F_α *est différentiable.*

On a

$$[F(t+h) \ominus F(t)]^\alpha = [\lambda_\alpha(t+h) - \lambda_\alpha(t), \lambda^\alpha(t+h) - \lambda^\alpha(t)],$$

et

$$[F(t) \ominus F(t-h)]^\alpha = [\lambda_\alpha(t) - \lambda_\alpha(t-h), \lambda^\alpha(t) - \lambda^\alpha(t-h)].$$

En divisant par h *et passant à la limite, alors* $\lambda_\alpha(t), \lambda^\alpha(t)$ *sont différentiables.*

De la même façon on montre que $\mu_\alpha(t)$ *et* $\mu^\alpha(t)$ *sont différentiables.*

Proposition 3.4. *Soient* $F : [a,b] \to I\!F_1$ *et* $G : [a,b] \to I\!F_1$ *deux applications différentiables. Si* F *et* G *sont les deux primitives de la même application et il existe* $F(t) \ominus G(t)$ *pour tout* $t \in (a,b)$*, alors* $F(t) = G(t) \oplus C$*, avec* $C \in I\!F_1$ *une constante.*

Preuve. *Soit* $F(t) = G(t) \oplus C(t)$*, en dérivant les deux côtés, nous avons que* $F'(t) = G'(t) \oplus C'(t)$*, donc* $C'(t) = 0_{\langle 1,0\rangle}$ *pour chaque* $t \in (a,b)$ *ce qui implique que* C *est une constante.*

Théorème 3.6. *Si* $F : [a,b] \to I\!F_1$ *est différentiable, alors elle est continue.*

Preuve. *Soit* $t, t+h \in [a,b]$ *avec* $h > 0$.

On a

$$\begin{aligned} d_\infty\big(F(t+h), F(t)\big) &= d_\infty\big(F(t+h) \ominus F(t), 0_{\langle 1,0\rangle}\big) \\ &\le hd_\infty\Big(\frac{F(t+h) \ominus F(t)}{h}, F'(t)) + hd_\infty(F'(t), 0_{\langle 1,0\rangle})\Big) \end{aligned}$$

où h *est assez petit de telle sorte que la H-différence* $F(t+h) \ominus F(t)$ *existe.*

Lorsque $h \to 0$ *le terme du côté droit tend vers* $0_{\langle 1,0\rangle}$ *donc* F *est continue à droite.*

De la même manière on montre que F *est continue à gauche.*

Définition 3.16. $F : [a,b] \to I\!F_1$ *est dite intégrablement bornée s'il existe une fonction intégrable* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\mid y \mid \le h(t) \text{ pour tout } y \in Supp(F(t)), t \in [a,b].$$

Définition 3.17. *On dit que l'application* $F : [a,b] \to I\!F_1$ *est fortement mesurable si pour tout* $\alpha \in [0,1]$, *les applications* $F_\alpha : [a,b] \to P_k(\mathbb{R})$ *définie par* $F_\alpha(t) = [F(t)]_\alpha$ *et* $F^\alpha : [a,b] \to P_k(\mathbb{R})$ *définie par* $F^\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ *sont (Lebesgue) mesurables, où* $P_K(\mathbb{R})$ *est muni de la topologie issue de la métrique de Hausdorff* d_H.

Lemme 3.5. *Si* $F : [a,b] \to I\!F_1$ *est continue, alors elle est fortement mesurable.*

Preuve. *Soient* $\varepsilon > 0$ *et* $t_0 \in [a,b]$, *par la continuité de* F *il existe un* $\delta > 0$ *tel que*

$$d_\infty(F(t), F(t_0)) < \varepsilon \text{ quand } \mid t - t_0 \mid < \delta$$

on a $d_\infty(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$ *donc*

$$\left|[(F(t))]_r^+(\alpha) - [F(t_0)]_r^+(\alpha)\right| < \varepsilon \text{ et } \left|[F(t)]_l^+(\alpha) - [F(t_0)]_l^+(\alpha)\right| < \varepsilon$$

Par suite
$\max\left\{\left|[(F(t))]_r^+(\alpha) - [F(t_0)]_r^+(\alpha)\right|; \left|[F(t)]_l^+(\alpha) - [F(t_0)]_l^+(\alpha)\right|\right\} = d_H\Big(F_\alpha(t), F_\alpha(t_0)\Big) < \varepsilon$ *quand* $\mid t - t_0 \mid < \delta$. *Par conséquent* F_α *est continue par rapport à la métrique de Hausdorff. D'où* $F_\alpha^{-1}(U)$ *est ouvert, pour chaque ouvert* U *de* $P_k(\mathbb{R})$.
De la même manière, on montre que F^α *est mesurable.*

Lemme 3.6. *Soit* $F : [a,b] \to I\!F_1$ *une application fortement mesurable et on note* $F_\alpha(t) = \Big[\lambda_\alpha(t), \lambda^\alpha(t)\Big]$, $F^\alpha(t) = \Big[\mu_\alpha(t), \mu^\alpha(t)\Big]$ *pour* $\alpha \in [0,1]$. *Alors* $\lambda_\alpha, \lambda^\alpha, \mu_\alpha, \mu^\alpha$ *sont mesurables.*

Preuve. *Soit* $\alpha \in [0,1]$ *fixé, donc* F_α *et* F^α *sont des applications mesurables et à valeur dans un ensemble fermé.*
Par conséquent, F_α *a une représentation de Castaing ([8])i.e., il existe une séquence* g_k^α *des sélections mesurables telles que pour tout* $t \in [a,b]$,

$$F_\alpha(t) = \overline{\{g_k^\alpha, |k = 1, 2, ...\}}$$

Mais à partir de la définition de $F_\alpha(t)$, *il en résulte que* $\lambda_\alpha = \inf g_k^\alpha$ *et* $\lambda^\alpha = \sup g_k^\alpha$.
De la même manière, on montre que μ^α *et* μ_α *sont mesurables, ce qui prouve le lemme.*

Définition 3.18. *Soit* $A = [a, b]$*, on suppose que* $F : A \to I\!F_1$ *est intégralement bornée et fortement mesurable pour chaque* $\alpha \in (0, 1]$*, on écrit*

$$\left[\int_A F(t)dt\right]_\alpha = \int_A [F(t)]_\alpha \, dt = \left\{\int_A f dt | f : A \to \mathbb{R} \text{ est une sélection mesurable de } F_\alpha\right\}.$$

$$\left[\int_A F(t)dt\right]^\alpha = \int_A [F(t)]^\alpha \, dt = \left\{\int_A f dt | f : A \to \mathbb{R} \text{ est une sélection mesurable de } F^\alpha\right\}.$$

S'il existe $\langle u, v\rangle \in I\!F_1$ *tel que* $\Big[\langle u, v\rangle\Big]^\alpha = \Big[\int_A F(t)dt\Big]^\alpha$ *et* $\Big[\langle u, v\rangle\Big]_\alpha = \Big[\int_A F(t)dt\Big]_\alpha$ *pour tout* $\alpha \in (0, 1]$*. Alors* F *est dite intégrable sur* A*, et on écrit* $\langle u, v\rangle = \int_A F(t)dt$ *ou* $\langle u, v\rangle = \int_a^b F(t)dt$*.*

Remarque 3.4.
- *Si* $F(t) = \langle u_t, v_t\rangle$ *est intégrable, alors* $\int \langle u_t, v_t\rangle = \big\langle \int u_t, \int v_t\big\rangle$*,*
- *Si* $F : [a, b] \to I\!F_1$ *est intégrable alors en vue du lemme (3.6)* $\int F$ *est obtenue en intégrant les* α*-coupes :*

$$\left[\int F\right]_\alpha = \left[\int \lambda_\alpha, \int \lambda^\alpha\right] \text{ et } \left[\int F\right]^\alpha = \left[\int \mu_\alpha, \int \mu^\alpha\right], \alpha \in [0, 1]$$

$F_\alpha(t) = [F(t)]_\alpha = \Big[\lambda_\alpha(t), \lambda^\alpha(t)\Big], F^\alpha(t) = [F(t)]^\alpha = \Big[\mu_\alpha(t), \mu^\alpha(t)\Big]$ *pour tout* $\alpha \in [0, 1]$.

Théorème 3.7. *Si* $F : [a, b] \to I\!F_1$ *est une application fortement mesurable et intégralement bornée, alors* F *est intégrable.*

Preuve. *On note* $\mathcal{M}_\alpha = \int F_\alpha$ *et* $\mathcal{M}^\alpha = \int F^\alpha$*, comme* F *est fortement mesurable et intégralement bornée, alors d'après [6], il existe deux nombres flous* u *et* $1 - v$ *tel que*

$$\mathcal{M}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \ : \ u(x) \geq \alpha\} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^\alpha = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 - v(x) \geq \alpha\}$$

Par conséquent, les propriétés (i)-(iii) du lemme (3.2) sont vérifiées.
De plus, comme $F_\alpha \subset F^\alpha \Rightarrow \int F_\alpha \subset \int F^\alpha$ *pour tout* $\alpha \in [0, 1]$*, par le lemme (3.2), il existe unique* $\langle u, v\rangle \in I\!F_1$ *tel que* $\Big[\langle u, v\rangle\Big]^\alpha = \int F^\alpha$ *et* $\Big[\langle u, v\rangle\Big]_\alpha = \int F_\alpha$*, qui complète la preuve.*

Corollaire 3.1. *Si* $F : [a, b] \to I\!F_1$ *est continue, alors elle est intégrable.*

Preuve. *On a F est continue, donc F est fortement mesurable.*

Comme Supp(F) est continue, $Supp(F(t)) \in P_k(\mathbb{R})$ pour tout $t \in [a,b]$ et $[a,b]$ est compact, alors $\bigcup\limits_{t\in[a,b]} Supp(F(t))$ est compact. Par suite, F est intégralement bornée, qui complète la preuve.

Théorème 3.8. *Soit $F : [a,b] \to I\!\!F_1$ une application intégrable et $c \in [a,b]$. Alors,*

$$\int_a^b F = \int_a^c F \oplus \int_c^b F.$$

Preuve. *Soient $\alpha \in [0,1]$ et f est une sélection mesurable de F_α.*

Comme $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, alors on obtient

$$\left[\int_a^b F\right]_\alpha \subset \left[\int_a^c F\right]_\alpha + \left[\int_c^b F\right]_\alpha.$$

D'autre part, on pose $z = \int_a^c g_1 + \int_c^b g_2$ où g_1 sélection mesurable de F_α sur $[a,c]$ et g_2 sélection mesurable de F_α sur $[c,b]$. alors f défini par

$$f(t) = \begin{cases} g_1(t) & if \quad t \in [a,c] \\ g_2(t) & if \quad t \in [c,b]. \end{cases}$$

est une sélection mesurable de F_α sur $[a,b]$ et $\int_a^b f = \int_a^c g_1 + \int_c^b g_2 = z$ Par conséquent,

$$\left[\int_a^c F\right]_\alpha + \left[\int_c^b F\right]_\alpha \subset \left[\int_a^b F\right]_\alpha.$$

De la même manière on montre que

$$\left[\int_a^c F\right]^\alpha + \left[\int_c^b F\right]^\alpha = \left[\int_a^b F\right]^\alpha.$$

Théorème 3.9. *Soient $F, G : [a,b] \to I\!\!F_1$ deux applications intégrables et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

1. $\displaystyle\int (F(t) \oplus G(t))dt = \int F(t) \oplus \int G(t),$
2. $\displaystyle\int (\lambda F(t))dt = \lambda \int F(t)dt,$
3. $d_\infty\Big(F(t), G(t)\Big)$ *est intégrable,*
4. $\displaystyle d_\infty\left(\int F(t)dt, \int G(t)dt\right) \leq \int d_\infty\Big(F(t), G(t)\Big)dt.$

Preuve. *Soit* $\alpha \in [0,1]$*, les* α*-coupes supérieures et inférieures de* $F(t)$ *et* $G(t)$ *respectivement données par* $F_\alpha(t), F^\alpha(t)$*,* $G_\alpha(t), G^\alpha(t)$ *sont des ensembles compacts et convexes de* $\mathbb{R}$*. Alors d'après Debreu[10] les intégrales suivantes* $\int F_\alpha(t)$*,* $\int F^\alpha(t)$ *,*$\int G_\alpha(t)$ *et* $\int G^\alpha(t)$ *sont additives, donc, on utilise les propriétés* (3.3.1) *et* (3.3.2)*, on obtient*

$$\int [F(t) \oplus G(t)]_\alpha = \int F_\alpha(t) + \int G_\alpha(t)$$

$$\int [F(t) \oplus G(t)]^\alpha = \int F^\alpha(t) + \int G^\alpha(t)$$

Ce qui prouve la propriété 1.

Un raisonnement similaire donne 2.

Maintenant pour 3.*, on remarque que*

$$d_\infty\Big(F(t), G(t)\Big) \leq \frac{1}{2} \sup_{0<\alpha\leq 1} d_H\Big(\Big[F(t)\Big]_\alpha, \Big[G(t)\Big]_\alpha\Big) + \frac{1}{2} \sup_{0<\alpha\leq 1} d_H\Big(\Big[F(t)\Big]^\alpha, \Big[G(t)\Big]^\alpha\Big)$$

Comme, $\sup\limits_{0<\alpha\leq 1} d_H\Big(\Big[F(t)\Big]_\alpha, \Big[G(t)\Big]_\alpha\Big)$ *et* $\sup\limits_{0<\alpha\leq 1} d_H\Big(\Big[F(t)\Big]^\alpha, \Big[G(t)\Big]^\alpha\Big)$ *sont intégrables voir [Théorème 4.3,(iii) [19]], donc,* $d_\infty\Big(F(t), G(t)\Big)$ *est intégrable.*

Finalement, par la définition de la métrique d_∞ *on a*

$$\begin{aligned}
d_\infty\Big(\int F(t), \int G(t)\Big) &= \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| \int [(F(t))]_l^+(\alpha) - \int [G(t)]_l^+(\alpha) \Big| + \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| \int [(F(t))]_r^+(\alpha) - \int [G(t)]_r^+(\alpha) \Big| \\
&\quad + \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| \int [(F(t))]_l^-(\alpha) - \int [G(t)]_l^-(\alpha) \Big| + \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| \int [(F(t))]_r^-(\alpha) - \int [G(t)]_r^-(\alpha) \Big| \\
&\leq \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \int \Big| [(F(t))]_l^+(\alpha) - [G(t)]_l^+(\alpha) \Big| + \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \int \Big| [(F(t))]_r^+(\alpha) - [G(t)]_r^+(\alpha) \Big| \\
&\quad + \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \int \Big| [(F(t))]_l^-(\alpha) - [G(t)]_l^-(\alpha) \Big| + \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \int \Big| [(F(t))]_r^-(\alpha) - [G(t)]_r^-(\alpha) \Big| \\
&\leq \int \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| [(F(t))]_l^+(\alpha) - [G(t)]_l^+(\alpha) \Big| + \int \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| [(F(t))]_r^+(\alpha) - [G(t)]_r^+(\alpha) \Big| \\
&\quad + \int \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| [(F(t))]_l^-(\alpha) - [G(t)]_l^-(\alpha) \Big| + \int \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| [(F(t))]_r^-(\alpha) - [G(t)]_r^-(\alpha) \Big|
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$d_\infty\left(\int F(t), \int G(t)\right) \leq \int d_\infty\left(F(t), G(t)\right)$$

Lemme 3.7. *Soient $A \in I\!F_1$ et $F : [a,b] \to I\!F_1$ une application définie par $F(s) = A$ pour tout $s \in [a,b]$. Alors $\int_a^b F = (b-a)A$*

Preuve.

$$\begin{aligned} \text{On a } \left[\int_a^b F(s)ds\right]_\alpha &= \int_a^b [F(s)]_\alpha ds = \int_a^b [A]_\alpha ds = (b-a)[A]_\alpha \\ \left[\int_a^b F(s)ds\right]^\alpha &= \int_a^b [F(s)]^\alpha ds = \int_a^b [A]^\alpha ds = (b-a)[A]^\alpha \end{aligned}$$

d'où

$$\int_a^b F(s)ds = (b-a)A.$$

Corollaire 3.2. *Si $F : [a,b] \to I\!F_1$ est continue, alors $\int_a^t F$ est lipschitzienne sur $[a,b]$.*

Preuve. *Soient $s, t \in [a,b]$ et on suppose que $t < s$. Donc,*

$$\begin{aligned} d_\infty\left(\int_a^s F(\tau)d\tau, \int_a^t F(\tau)d\tau\right) &= d_\infty\left(\int_a^t F(\tau)d\tau + \int_t^s F(\tau)d\tau, \int_a^t F(\tau)d\tau\right) \\ &\leq d_\infty\left(\int_t^s F(\tau)d\tau, 0_{\langle 1,0\rangle}(\tau)\right) \\ &\leq \int_t^s d_\infty\left(F(\tau), 0_{\langle 1,0\rangle}(\tau)\right)d\tau \end{aligned}$$

puisque, $\bigcup_{t\in[a,b]} Supp(F(t))$ est compact, alors il existe $M > 0$ tel que $|x| \leq M$ pour tout $x \in Supp(F(t))$ et $t \in [a,b]$, ceci implique que $d_\infty\left(F(\tau), 0_{\langle 1,0\rangle}(\tau)\right) \leq M$, d'après le lemme 3.7

Ainsi,

$$d_\infty\left(\int_a^s F, \int_a^t F\right) \leq M(s-t)$$

Théorème 3.10. *Soit $F : [a,b] \to I\!F_1$ une application continue. Alors pour $t \in [a,b]$, l'intégrale $G(t) = \int_a^t F$ est différentiable et $G'(t) = F(t)$.*

Preuve. *On a F continue, donc F est intégrable.*

Soit $\varepsilon > 0$, pour $h > 0$, on a

$$G(t+h) \ominus G(t) = \int_t^{t+h} F$$

alors,

$$\begin{aligned} d_\infty\Big(\frac{1}{h}\big(G(t+h)\ominus G(t)\big),F(t)\Big) &= \frac{1}{h}d_\infty\Big(\int_t^{t+h}F(s)ds, hF(t)\Big)\\ &= \frac{1}{h}d_\infty\Big(\int_t^{t+h}F(s)ds, \int_t^{t+h}F(t)ds\Big)\\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}d_\infty\Big(F(s),F(t)\Big) \end{aligned}$$

Comme F est continue, donc

$$d_\infty\Big(\frac{1}{h}\big(G(t+h)\ominus G(t)\big),F(t)\Big) < \varepsilon$$

Par conséquent,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(G(t+h)\ominus G(t)\big) = F(t)$$

et de même

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(G(t)\ominus G(t-h)\big) = F(t),$$

ce qui prouve le théorème.

Théorème 3.11. *[15] Soit $F : [a,b] \to I\!F_1$ une application différentiable et on suppose que la dérivée F' est intégrable sur $[a,b]$. Alors, pour chaque $s \in [a,b]$, on a*

$$F(s) = F(a) \oplus \int_a^s F'(t)dt.$$

3.4.3 Etude d'une équation différentièlle à valeur initiale dans $I\!F_1$

Existence et unicité de la solution

On considère l'équation différentielle à valeur initiale floue intuitionistique

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = \langle u_{t_0}, v_{t_0}\rangle \end{cases} \tag{3.4.1}$$

avec $x(t) \in \mathbb{F}_1$ est inconnu, $t_0 \in I = [0, T]$ et $f : I \times \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_1$.
$x(t_0)$ est un nombre flou intuitionistique.
Notons $C(I, \mathbb{F}_1)$ l'ensemble des applications continues définies de I à valeurs dans $\mathbb{F}_1$ et définissons une métrique sur $C(I, \mathbb{F}_1)$ par :

$$D\left(f, g\right) = \sup_{t \in I} d_\infty \Big(f(t), g(t) \Big)$$

avec $f, g \in C(I, \mathbb{F}_1)$.

Théorème 3.12. *$(C(I, \mathbb{F}_1), D)$ est un espace métrique complet.*

Preuve. *Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(C(I, \mathbb{F}_1), D)$ donc, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, q \in \mathbb{N}$, on a $n, q \geq N \Rightarrow D(f_n, f_q) \leq \varepsilon$*
c-à-d

$$\forall n, q \in \mathbb{N}\ ,\ n, q \geq N \Rightarrow \sup_{t \in I} d_\infty(f_n(t), f_q(t)) \leq \varepsilon$$

Ce qui implique que

$$\exists N \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n, q \in \mathbb{N}\ ,\ \forall t \in I\ ,\ n, q \geq N \Rightarrow d_\infty(f_n(t), f_q(t)) \leq \varepsilon.$$

Comme $(\mathbb{F}_1, d_\infty)$ est un espace métrique complet voir [30] alors, il existe $f(t) \in \mathbb{F}_1$, pour tout $t \in I$ tel que $d_\infty(f_n(t), f(t)) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Ainsi, $D(f_n, f) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Il reste à montrer que $f \in C(I, \mathbb{F}_1)$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t, t_0 \in I$, on a

$$\begin{aligned} d_\infty(f(t), f(t_0)) &\leq d_\infty(f(t), f_n(t)) + d_\infty(f_n(t), f_n(t_0)) + d_\infty(f_n(t_0), f(t_0)) \\ &\leq D(f, f_n) + d_\infty(f_n(t), f_n(t_0)) + d_\infty(f_n(t_0), f(t_0)) \end{aligned}$$

Pour n suffisamment grand et t appartenant au voisinage de t_0, on obtient $f \in C(I, \mathbb{F}_1)$.

Définition 3.19. *$x : I \to \mathbb{F}_1$ est une solution du problème à valeur initiale (3.4.1), si et seulement si elle est continue et satisfait l'équation intégrale*

$$x(t) = x(t_0) \oplus \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds, \quad \textit{pour tout}\ \ t \in I.$$

Théorème 3.13. *On suppose que $f : I \times \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{F}_1$ est une application continue et il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\begin{aligned}
|[f(s,x(s))]_r^+(\alpha) - [f(s,y(s))]_r^+(\alpha)| &\leq k|[x(s)]_r^+(\alpha) - [y(s)]_r^+(\alpha)| \\
|[f(s,x(s))]_l^+(\alpha) - [f(s,y(s))]_l^+(\alpha)| &\leq k|[x(s)]_l^+(\alpha) - [y(s)]_l^+(\alpha)| \\
|[f(s,x(s))]_r^-(\alpha) - [f(s,y(s))]_r^-(\alpha)| &\leq k|[x(s)]_r^-(\alpha) - [y(s)]_r^-(\alpha)| \\
|[f(s,x(s))]_l^-(\alpha) - [f(s,y(s))]_l^-(\alpha)| &\leq k|[x(s)]_l^-(\alpha) - [y(s)]_l^-(\alpha)|
\end{aligned}$$

avec $k(T-t_0) < 1$, pour tout $s \in I, x, y \in \mathbb{F}_1$. Alors le problème à valeur initiale (3.4.1) admet une solution unique sur I.

Preuve. *Pour $x \in C(I, \mathbb{F}_1)$, on définit Px sur I par*

$$Px(t) = x(t_0) \oplus \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

Posons $\varphi(t) = Px(t)$ et $\psi(t) = Px(t+h)$.

On a

$$\begin{aligned}
D(\varphi,\psi) &= D\left(x(t_0) \oplus \int_{t_0}^{t+h} f(s,x(s))ds, x(t_0) \oplus \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds\right) \\
&= D\left(\int_{t_0}^{t+h} f(s,x(s))ds, \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds\right) \\
&= \sup_{t\in I} d_\infty\left(\int_{t_0}^{t+h} f(s,x(s))ds, \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds\right)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
D(\varphi,\psi) = \sup_{t\in I}\Bigg\{ &\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\left|\int_{t_0}^{t+h}[f(s,x(s))]_r^+(\alpha)ds - \int_{t_0}^{t}[f(s,x(s))]_r^+(\alpha)ds\right| \\
&+\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\left|\int_{t_0}^{t+h}[f(s,x(s))]_l^+(\alpha)ds - \int_{t_0}^{t}[f(s,x(s))]_l^+(\alpha)ds\right| \\
&+\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\left|\int_{t_0}^{t+h}[f(s,x(s))]_r^-(\alpha)ds - \int_{t_0}^{t}[f(s,x(s))]_r^-(\alpha)ds\right|
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| \int_{t_0}^{t+h} [f(s,x(s))]_l^-(\alpha) ds - \int_{t_0}^{t} [f(s,x(s))]_l^-(\alpha) ds \Big| \Big\}$$

Ainsi

$$D(\varphi,\psi) = \sup_{t\in I} \Big\{ \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| \int_{t}^{t+h} [f(s,x(s))]_r^+(\alpha) ds \Big| + \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| \int_{t}^{t+h} [f(s,x(s))]_l^+(\alpha) ds \Big|$$
$$+ \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| \int_{t}^{t+h} [f(s,x(s))]_r^-(\alpha) ds \Big| + \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| \int_{t}^{t+h} [f(s,x(s))]_l^-(\alpha) ds \Big| \Big\}$$

quand $h \to 0$, $D(\varphi,\psi) \to 0$. *donc* $Px \in C(I, I\!F_1)$.

Maintenant, soient $x, y \in C(I, I\!F_1)$, *on a*

$$\begin{aligned} D(Px,Py) &= D\Big(x(t_0) \oplus \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds, x(t_0) \oplus \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds\Big) \\ &= D\Big(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds, \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds\Big) \\ &= \sup_{t\in I} d_\infty\Big(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds, \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds\Big) \\ &\leq \sup_{t\in I} \int_{t_0}^{t} d_\infty\Big(f(s,x(s)), f(s,y(s))\Big) ds \end{aligned}$$

on obtient

$$D(Px,Py) \leq \sup_{t\in I} \int_{t_0}^{t} \Big\{ \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| [f(s,x(s))]_r^+(\alpha) - [f(s,y(s))]_r^+(\alpha) \Big|$$
$$+ \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| [f(s,x(s))]_l^+(\alpha) - [f(s,y(s))]_l^+(\alpha) \Big|$$
$$+ \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| [f(s,x(s))]_r^-(\alpha) - [f(s,y(s))]_r^-(\alpha) \Big|$$
$$+ \frac{1}{4} \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big| [f(s,x(s))]_l^-(\alpha) - [f(s,y(s))]_l^-(\alpha) \Big| \Big\} ds$$

Alors

$$D(Px,Py) \leq \sup_{t\in I}(t-t_0)\left\{\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\sup_{t_0\leq s\leq t}\Big|[f(s,x(s))]_r^+(\alpha)-[f(s,y(s))]_r^+(\alpha)\Big|\right.$$
$$+\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\sup_{t_0\leq s\leq t}\Big|[f(s,x(s))]_l^+(\alpha)-[f(s,y(s))]_l^+(\alpha)\Big|$$
$$+\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\sup_{t_0\leq s\leq t}\Big|[f(s,x(s))]_r^-(\alpha)-[f(s,y(s))]_r^-(\alpha)\Big|$$
$$\left.+\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\sup_{t_0\leq s\leq t}\Big|[f(s,x(s))]_l^-(\alpha)-[f(s,y(s))]_l^-(\alpha)\Big|\right\}$$

$$D(Px,Py) \leq (T-t_0)\sup_{s\in I}\left\{\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\Big|[f(s,x(s))]_r^+(\alpha)-[f(s,y(s))]_r^+(\alpha)\Big|\right.$$
$$+\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\Big|[f(s,x(s))]_l^+(\alpha)-[f(s,y(s))]_l^+(\alpha)\Big|$$
$$+\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\Big|[f(s,x(s))]_r^-(\alpha)-[f(s,y(s))]_r^-(\alpha)\Big|$$
$$\left.+\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\Big|[f(s,x(s))]_l^-(\alpha)-[f(s,y(s))]_l^-(\alpha)\Big|\right\}$$

$$D(Px,Py) \leq k(T-t_0)\sup_{s\in I}\left\{\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\Big|[x(s)]_r^+(\alpha)-[y(s)]_r^+(\alpha)\Big|+\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\Big|[x(s)]_l^+(\alpha)-[y(s)]_l^+(\alpha)\Big|\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\Big|[x(s)]_r^-(\alpha)-[y(s)]_r^-(\alpha)\Big|+\frac{1}{4}\sup_{0<\alpha\leq 1}\Big|[x(s)]_l^-(\alpha)-[y(s)]_l^-(\alpha)\Big|\right\}$$

Par conséquent $D(Px,Py) \leq k(T-t_0)D(x,y)$.

Comme $k(T-t_0)<1$ *donc* P *est une contraction et d'après le principe de contraction de Banach, l'application* P *admet un point fixe unique.*

Résolution d'une équation différentielle floue intuitionistique

Dans cette section, nous donnons une procédure pour résoudre l'équation différentielle floue intuitionistique

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \langle u_{t_0}, v_{t_0} \rangle \end{cases} \tag{3.4.2}$$

On note les coupes supérieures et inférieures respectivement de $x(t)$, $x(t_0)$ et $f(t, x(t))$.

$$\Big[x(t)\Big]_{\alpha} = \Big[[x(t)]_l^+(\alpha), [x(t)]_r^+(\alpha)\Big], \quad \Big[x(t)\Big]^{\alpha} = \Big[[x(t)]_l^-(\alpha), [x(t)]_r^-(\alpha)\Big]$$

$$\Big[x(t_0)\Big]_{\alpha} = \Big[[x(t_0)]_l^+(\alpha), [x(t_0)]_r^+(\alpha)\Big], \quad \Big[x(t_0)\Big]^{\alpha} = \Big[[x(t_0)]_l^-(\alpha), [x(t_0)]_r^-(\alpha)\Big]$$

$$\Big[f(t, x(t))\Big]_{\alpha} = \Big[g\Big(t, [x(t)]_l^+(\alpha), [x(t)]_r^+(\alpha)\Big),\ h\Big(t, [x(t)]_l^+(\alpha), [x(t)]_r^+(\alpha)\Big)\Big]$$
$$\Big[f(t, x(t))\Big]^{\alpha} = \Big[l\Big(t, [x(t)]_l^-(\alpha), [x(t)]_r^-(\alpha)\Big),\ k\Big(t, [x(t)]_l^-(\alpha), [x(t)]_r^-(\alpha)\Big)\Big]$$

et on suit les étapes suivantes :

1. Résoudre le système

$$\begin{cases} [x'(t)]_l^+(\alpha) = g\Big(t, [x(t)]_l^+(\alpha), [x(t)]_r^+(\alpha)\Big) & ; \quad [x(t_0)]_l^+(\alpha) \\ [x'(t)]_r^+(\alpha) = h\Big(t, [x(t)]_l^+(\alpha), [x(t)]_r^+(\alpha)\Big) & ; \quad [x(t_0)]_r^+(\alpha) \\ [x'(t)]_l^-(\alpha) = l\Big(t, [x(t)]_l^-(\alpha), [x(t)]_r^-(\alpha)\Big) & ; \quad [x(t_0)]_l^-(\alpha) \\ [x'(t)]_r^-(\alpha) = k\Big(t, [x(t)]_l^-(\alpha), [x(t)]_r^-(\alpha)\Big) & ; \quad [x(t_0)]_r^-(\alpha) \end{cases}$$

2. On note

$$\Big[[x(t)]_l^+(\alpha),[x(t)]_r^+(\alpha)\Big]=M_\alpha\ ,\ \Big[[x(t)]_l^-(\alpha),[x(t)]_r^-(\alpha)\Big]=M^\alpha$$

et

$$\Big[[x'(t)]_l^+(\alpha),[x'(t)]_r^+(\alpha)\Big]=M'_\alpha\ ,\ \Big[[x'(t)]_l^-(\alpha),[x'(t)]_r^-(\alpha)\Big]=M'^\alpha.$$

Vérifier que $\big(\ M_\alpha,M^\alpha\ \big)$ et $\big(M'_\alpha,M'^\alpha\ \big)$ sont les coupes supérieures et inférieures respectivement de $x(t)$ et de $x'(t)$.

3. Utiliser le lemme (3.2), qui assure l'existence d'un nombre flou intuitionistique $\langle u,v\rangle\in\mathbb{F}_1$ tel que $\langle u,v\rangle=x(t)$ est la solution floue intuitionistique avec

$$\Big[\ \langle u,v\rangle\ \Big]^\alpha=\Big[[x(t)]_l^-(\alpha),[x(t)]_r^-(\alpha)\Big]$$

et

$$\Big[\ \langle u,v\rangle\ \Big]_\alpha=\Big[[x(t)]_l^+(\alpha),[x(t)]_r^+(\alpha)\Big].$$

Exemple

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} x^{'}(t)+x(t)=2\exp(-t)x_0 & ,\ t\geq 0 \\ x(0)=x_0 \end{cases} \tag{3.4.3}$$

avec $x_0=\left\langle -1,0,1;-\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right\rangle$ est un nombre flou intuitionistique triangulaire.
En appliquant la méthode de la résolution proposée précédemment, nous obtenons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} [x^{'}(t)]_l^+(\alpha)+[x(t)]_l^+(\alpha)=2(\alpha-1)\exp(-t) & ,\quad [x(0)]_l^+(\alpha)=\alpha-1 \\ [x^{'}(t)]_r^+(\alpha)+[x(t)]_r^+(\alpha)=2(1-\alpha)\exp(-t) & ,\quad [x(0)]_r^+(\alpha)=1-\alpha \\ [x^{'}(t)]_l^-(\alpha)+[x(t)]_l^-(\alpha)=3(\alpha-1)\exp(-t) & ,\quad [x(0)]_l^-(\alpha)=\frac{3}{2}(\alpha-1) \\ [x^{'}(t)]_r^-(\alpha)+[x(t)]_r^-(\alpha)=3(1-\alpha)\exp(-t) & ,\quad [x(0)]_r^-(\alpha)=\frac{3}{2}(1-\alpha) \end{cases}$$

on trouve

$$[x(t)]^+_l(\alpha) = (\alpha-1)(1+2t)\exp(-t)$$

$$[x(t)]^+_r(\alpha) = (1-\alpha)(1+2t)\exp(-t)$$

$$[x(t)]^-_l(\alpha) = (\alpha-1)(3t+\frac{3}{2})\exp(-t)$$

$$[x(t)]^-_r(\alpha) = (1-\alpha)(3t+\frac{3}{2})\exp(-t)$$

Par conséquent

$$\Big[x(t)\Big]_\alpha = \Big[(\alpha-1)(1+2t)\exp(-t), (1-\alpha)(1+2t)\exp(-t)\Big]$$
$$\Big[x(t)\Big]^\alpha = \Big[(\alpha-1)(3t+\frac{3}{2})\exp(-t), (1-\alpha)(3t+\frac{3}{2})\exp(-t)]$$

On remarque que $[x(t)]^+_l(\alpha) \leq [x(t)]^+_r(\alpha)$ et $[x(t)]^-_l(\alpha) \leq [x(t)]^-_r(\alpha)$ seulement si $t \geq -\frac{1}{2}$ aussi,

$$[x^{'}(t)]^+_l(\alpha) = (\alpha-1)(1-2t)\exp(-t) \leq [x^{'}(t)]^+_r(\alpha) = (1-\alpha)(1-2t)\exp(-t)$$

et

$$[x^{'}(t)]^-_l(\alpha) = (\alpha-1)(\frac{3}{2}-3t)\exp(-t) \leq [x^{'}(t)]^-_r(\alpha) = (1-\alpha)(\frac{3}{2}-3t)\exp(-t)$$

seulement si $t \leq \frac{1}{2}$.
De plus, on a $\Big[x(t)\Big]_\alpha \subseteq \Big[x(t)\Big]^\alpha$ pour tout $\alpha \in [0,1]$.
D'où, $x(t)$ définit la solution floue intuitionistique du problème $(3.4.3)$ sur l'intervalle $\Big[0, \frac{1}{2}\Big]$.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous sommes parvenus à la différence de Hukuhara des nombres flous intuitionistiques [32] à introduire la notion de différentiabilité dans l'espace des nombres flous intuitionistiques $\mathbb{F}_1$, et à établir plusieurs résultats importants concernant cette nouvelle notion. Ensuite, nous avons établi plusieurs résultats très importants permettant d'assurer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle floue intuitionistique sous certaines conditions, enfin nous avons proposé une procédure pour la résolution de ce type d'équations EDFI.
Comme l'étude des équations différentielles à valeur initiale floue intuitionistique reste encore un domaine moins développé, alors nous avons s'intéresser prochainement aux :

- Étude des problèmes d'évolutions en utilisant la notion du semi-groupe flou intuitionistique,

- Étude des équations différentielles fractionnaires à valeur initiale floue intuitionistique,

- Résolution numérique des équations différentielles floues intuitionistiques.

Bibliographie

[1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy relations. Third Int. Symp. "Automation and Sci. Instrumentation", Varna, Proc. part II, Oct. (1984), pp. 56-57.

[2] Atanassov K., Conditions in Generalized nets, Proc. of the XIII Spring Conf. of the Union of Bulg. Math., Sunny Beach, April (1984), pp. 219-226.

[3] Atanassov K., Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* **20** (1986) pp. 87-96.

[4] Atanassov K., Intuitionistic fuzzy Sets, Springer Physica-Verlag, Berlin (1999).

[5] Atanassov K., Intuitionistic fuzzy Sets Past, Present and future. CLBME-Bulgariean Academy of Sciences.

[6] AUMANN, R. J., Integrals of set-valued functions, J. Math. Anal. Appl. 12(1965), pp. 1-12.

[7] Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer(2010).

[8] Castaing, C. and Valadier, M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Springer, Berlin,(1977).

[9] Chadli, L. S. and Melliani, S. On distance between intuitionistic fuzzy sets. Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 8 (3) (2002), pp. 34-36.

[10] Debreu,G. , Integration of correspondences, in : Proc. Fifth Berkeley Syrup. Math. Statist. Probab., Part 1 (Univ. California Press, Berkeley, CA, **2**(1967), pp. 351-372.

[11] Diamond, P., Kloeden, P. : Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis. In : Dubois, D., Prade, H., et al. (eds.) Handbook Fuzzy Sets Ser.,Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,7(2000), pp. 583-641.

[12] Erceg, M.A. : Metric Spaces in Fuzzy Set Theory. Journal of Mathematical Analysis and its Applications 69(1979), pp. 205-230.

[13] Ettoussi, R., Melliani, S., and Chadli,L. S., Differential equation with intuitionistic fuzzy parameters,Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets,23(4)(2017), pp. 46-61.

[14] Ettoussi, R. and Chadli,L. S., Fractional differential equations with intuitionistic fuzzy data, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets,22(4)(2016), pp.64-74.

[15] Ettoussi, R., Melliani, S., Elomari, M. and Chadli, L. S.,Solution of intuitionistic fuzzy differential equations by successive approximations method , *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*,**21**(2) (2015), pp. 51-62.

[16] Gradi Kamingu, Théorie des ensembles flous Caractérisation, propriétés et opérations, LAREQ ONE PAGER11-001 FEVRIER 16,11(1)(2016), pp.37-45.

[17] Kaleva, O. and Seikkala, S. On The Convergence of Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems, North-Holland, 17 (1985), pp. 53-65.

[18] Hukuhara,M., Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe, Funkciala Ekvacioj 10 (1967), pp. 205-223.

[19] Kaleva, O., Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems **24**(1987), pp. 301-317.

[20] Kaleva, O., The cauchy problem for fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems, **35**(1990), pp. 389-396.

[21] Kandel, A., Byatt, W.J., Fuzzy processes. Fuzzy Sets Syst. 4(1980), pp. 117-152.

[22] Kaufmann, A. Introduction à la théorie des sous-ensembles flous. Masson, Paris, (1977).

[23] Laksmikantham V., R.N. Mohapatra., Theory of fuzzy differential equations and enclusions, Taylor and Francis, New York (2003).

[24] Lakshmikantham, V., Gnana Bhaskar,T., Vasundhara Devi,J., Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces, Cambridge Scientific Publishers,(2006).

[25] Lupulescu, V., On a class of fuzzy functional differential equations. Fuzzy Sets Syst. 160(2009), pp. 1547-1562.

[26] Mahapatra G.S., T.K. Roy, Intuitionistic Fuzzy Number and Its Arithmetic Operation with Application on System Failure, Journal of Uncertain Systems 7(2)2013, pp. 92-107.

[27] Melliani, S., Elomari, M., Chadli, L. S. and Ettoussi,R., Resolution of a system of the max-min product intuitionistic fuzzy relation equations using LU-factorization, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 20(5)(2014), pp. 36-49.

[28] Melliani,S., Elomari, M. , Ettoussi, R. and Chadli,L. S., Intuitionistic fuzzy semigroup, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 21(2)2015, pp. 43-50.

[29] Melliani,S., Ettoussi,R., Elomari, M. and Chadli,L. S., Characterization of Compact Subset of Intuitionistic Fuzzy sets, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 22(2)(2016), pp. 13-21.

[30] Melliani, S., Elomari, M., Chadli, L. S. and Ettoussi R., Intuitionistic fuzzy metric space, *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, **21**(1)(2015), pp. 43-53.

[31] Melliani, S., Elomari,M. , Chadli, L. S. and Ettoussi,R., Intuitionistic fuzzy fractional equation, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 21(4)(2015), pp. 76-89.

[32] Melliani S., Elomari M. Chadli L. S. and Ettoussi R. Extension of hukuhara difference in intuitionistic fuzzy theory, *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets* **21**(4) (2015), pp. 34-47.

[33] Negoita, C.V. and D.A. Ralescu, Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis (Wiley, New York, 1975).

[34] Nieto,J.J., The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations. Fuzzy Sets Syst.102(1999), pp. 259-262.

[35] Puri, L.M., Ralescu, D. : Differentials of fuzzy functions. J. Math. Anal. Appl. 91(1983), pp. 552-558.

[36] Puri, M. L. and D. A. Ralescu, Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl. 114(1986),pp. 409-422.

[37] Rolland-May Christiane, la théorie des ensembles flous et son intérêt en géographie. In : Espace géographique. 16(1)(1987), pp. 42-50.

[38] Seikkala, S., On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets and Systems* **24**(1987), pp. 319-330.

[39] Stefanini L., A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic, *Fuzzy Sets and Systems*, 161(2010), pp. 1564-1584.

[40] Samuel Ambapour, Théorie des ensembles flous : application à la mesure de la pauvreté au Congo, DT 16/2009, Bureau d'application des méthodes statistiques et informatiques Brazzaville, 38 pages.

[41] Wu,C., Song, S. and Lee,,S. Approximate solutions, existence and uniqueness of the Cauchy problem of fuzzy differential equations. J. Math. Anal. Appl. 202(1996), pp. 629-644.

[42] Zadeh L. A. , Fuzzy sets, *Information and Control* **8**(1965), pp. 338-353.