

Chapitre 1 : Généralités sur la reconnaissance des documents mathématiques manuscrits

1.1 Introduction

L'informatique est un domaine qui connaît aujourd'hui une dynamique impressionnante dans lequel les innovations et les améliorations, qui touchent le matériel ainsi que le logiciel, se succèdent d'une façon très accélérée. Cette dynamique a bouleversé notre vie quotidienne et nous offre de nouvelles perspectives en proposant de nouvelles réponses aux différents besoins. Ces nouvelles technologies nous permettent de produire, transformer ou échanger de l'information en quantité importante dans des délais très courts. En raison de ce progrès technologique, les documents papier imprimés ou manuscrits sont devenus de moins en moins utilisés. Ainsi, la tendance dans la communauté scientifique visant l'utilisation des actes numériques a connu une augmentation considérable. Ceci représente un danger et une menace de disparition pour un grand nombre d'ouvrages et des documents qui sont stockés depuis plusieurs années dans les archives. Aujourd'hui, l'objectif est que le traitement des données doit s'effectuer d'une manière efficace et intégrée. Les documents papier devraient être traités et interprétés par un ordinateur comme il est capable de le faire avec d'autres médias numériques. Plus précisément, il faut avoir des outils et des systèmes capables de transformer un document papier en un document numérique. Actuellement, les systèmes de reconnaissance connaissent des améliorations remarquables au niveau des performances (reconnaissance des images satellitaires, reconnaissance des images médicales, lecture automatique des chèques, lecture automatique des adresses postales, lecture automatique des plaques d'immatriculation, etc.). Ces améliorations sont dues au développement de la micro-informatique, progression des unités de calcul, disponibilité des bases de données, amélioration des architectures et algorithmes d'apprentissage, etc. Aujourd'hui, le défi que nous affrontons est de réaliser des systèmes capables de reconnaître l'écriture manuscrite tout en bénéficiant de ces améliorations et ces innovations.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques généralités : définitions, motivations, objectifs et caractéristiques des documents mathématiques manuscrits qui font l'objectif de cette thèse.

1.2 Motivations

Depuis plus de 30 ans, le domaine de la reconnaissance de l'écriture manuscrite connaît des progrès très importants. Pourtant, il reste plusieurs points qui ne sont pas abordés et aussi des difficultés qui ne sont pas surmontées. Dans cette thèse, nous avons choisi d'étudier le problème de la reconnaissance des documents mathématiques manuscrits.

Ce choix revient à :

- l'importance de la mathématique dans toutes les branches de la science
- l'importance de la mathématique dans toutes les innovations et les progrès que nous vivons actuellement
- la complexité de la structure des documents mathématiques
- la richesse de la notation mathématique comme un langage bidimensionnel
- la spécificité de l'écriture mathématique
- le grand nombre des symboles mathématiques

1.3 Nos buts initiaux

L'objectif majeur de cette thèse est l'étude, la conception et la réalisation d'un système permettant l'analyse et la reconnaissance d'un document mathématique manuscrit. Ce système doit être capable de reconnaître le maximum possible de ces documents. Une étude approfondie de la littérature nous a permis de déterminer les points essentiels et la démarche à suivre pour la réalisation d'un tel système.

Ce système doit contenir les modules suivants :

- Module permettant l'amélioration de la qualité des images acquises
- Module ayant comme objectif la segmentation de l'image du document en des parties homogènes (zones textuelles et zones graphiques)
- Module qui segmente la zone textuelle en des lignes contenant les expressions mathématiques
- Module permettant la segmentation d'une expression en des symboles
- Module capable de reconnaître les symboles mathématiques

1.4 Mots clés

1.4.1 Mathématique

L'origine des mathématiques s'étend sur plusieurs millénaires et dans plusieurs civilisations (*mésopotamienne*, *égyptienne* et *chinoise*). C'est dans ces endroits du globe qu'on trouve les premières traces des systèmes de numérotation et des méthodes de calcul.

Les mathématiques furent essentiellement créées pour répondre aux besoins de ces civilisations (collecte des impôts, gestion des calendriers, transactions commerciales, etc.). Aujourd'hui, nous

vivons dans un monde qui connaît des transformations technologiques énormes et qui traversent tous les aspects de la vie quotidienne. Ces transformations sont dues au développement de la mathématique.

1.4.1.1 Qu'est-ce que les mathématiques ?

Dans la littérature, il existe plusieurs définitions de la mathématique. Dans cette partie, nous présentons celles qui se voient intéressantes :

- Le dictionnaire *Hachette Essentiel* (dictionnaire encyclopédique illustré) définit les mathématiques (ou la mathématique) comme un ensemble de connaissances abstraites résultant de raisonnements logiques appliqués à des objets divers tels que les nombres, les formes, les structures et les transformations.
- Selon la même source, la mathématique est un domaine de recherche qui développe ces connaissances, ainsi que la discipline qui les enseigne.
- Selon le Mathématicien *Ronald Brown*, la mathématique est une science de la description, de la démonstration et du calcul [1].
- D'après le dictionnaire *LAROUSSE*, la mathématique est une science qui étudie par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés d'êtres abstraits (nombres, figures géométriques, fonctions, espaces, etc.) ainsi que les relations qui s'établissent entre eux.

1.4.1.2 Les branches de la mathématique

Les mathématiques possèdent plusieurs branches et disciplines sachant qu'aucune n'est indépendante des autres :

1.4.1.2.1 Arithmétique

- *Bossut* [2] a défini l'arithmétique par « C'est l'art de dénombrer, ou cette partie des mathématiques qui considère les propriétés des nombres. On y apprend à calculer exactement, facilement et promptement. L'arithmétique est la base de toutes les sciences mathématiques car les rapports de toutes les espèces de quantités se réduisent finalement en nombres. ».
- Pour définir l'arithmétique, *Bézout* a dit : « On appelle en général, quantité, tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, etc. sont des quantités. Tout ce qui est quantité est de l'objet des mathématiques ; mais l'arithmétique qui fait partie de ces sciences, ne considère les quantités, qu'en tant qu'elles sont exprimées en

nombres. L'arithmétique est donc la science des nombres : elle en considère la nature et les propriétés ; et son but est de donner des moyens faciles, tant pour représenter les nombres, que pour les composer et décomposer, ce qu'on appelle calculer. »

L'arithmétique est la branche la plus ancienne des mathématiques. C'est une branche consacrée à l'étude des propriétés des nombres entiers relatifs et rationnels et aux propriétés des opérations sur ces nombres.

1.4.1.2.2 Algèbre

- *D'Alembert* [3] a défini l'algèbre par : « Science du calcul des grandeurs considérées généralement. On a choisi pour représenter les grandeurs ou les quantités les lettres de l'alphabet comme étant d'un usage plus facile et plus commode qu'aucun autre signe.

L'algèbre a deux parties :

- ✓ La méthode de calculer les grandeurs, en les représentant par les lettres de l'alphabet.
- ✓ La manière de se servir de ce calcul pour la solution des problèmes (partie la plus étendue et la principale).».
- Selon le dictionnaire *LAROUSSE*, l'Algèbre dans sa partie classique est la généralisation de l'arithmétique aux nombre réels et complexes. Dans sa partie moderne, l'algèbre s'intéresse par l'étude des structures (groupes, anneaux, corps, etc.) et se prolonge par les algèbres linéaires et multi-linéaires et par l'algèbre topologique.

1.4.1.2.3 Analyse

- *D'Alembert* [3] a défini l'analyse par : « L'analyse est proprement la méthode de résoudre les problèmes mathématiques, en les réduisant à des équations.

L'analyse, pour résoudre tous les problèmes, emploie le secours de l'algèbre, ou le calcul des grandeurs en général : aussi ces deux mots, analyse, algèbre, sont souvent regardés comme synonymes.

L'analyse est divisée, par rapport à son objet, en analyse des quantités finies, et analyse des quantités infinies.

- ✓ Analyse des quantités finies, est ce que nous appelons autrement arithmétique spéculaire ou algèbre.
- ✓ Analyse des quantités infinies ou des infinis, appelée aussi la nouvelle analyse ... ».

Chapitre 1 : Généralités sur la reconnaissance des documents mathématiques manuscrits

L'analyse est la branche qui traite le calcul infinitésimal et ses applications. Elle traite les suites, les séries et les fonctions. Elle s'appuie sur le calcul différentiel et intégral et qui sont indispensables pour l'étude des fonctions.

1.4.1.2.4 Géométrie

- Pour définir la géométrie, *Montucla* [4] a dit : « L'objet principal de la géométrie est de mesurer les différentes espèces d'étendues que l'esprit considère. »
- Dans le même contexte, *Lebesgue* [5] a dit : « Dès qu'on a fait de la géométrie, comme on tendait vers des buts concrets, on a effectué des constructions ... »

La géométrie est la branche des mathématiques qui se consacre à l'étude des propriétés de l'espace (relations entre points, droites, courbes, etc.). Elle est aussi la théorie de la mesure des longueurs, aires, angles, etc.

1.4.1.2.5 Logique

La logique est la branche qui traite les mathématiques comme un langage. Elle joue un rôle très important dans le fondement des mathématiques [1].

1.4.1.3 Énoncé mathématique

L'énoncé mathématique pourra être :

- **Assertion**

L'assertion est une phrase soit vraie soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemple :

« $2+2 = 4$ »

« $2*3 = 7$ »

- **Théorème**

Un théorème est un résultat important dont on démontre ou on admet qu'il est vrai et qui doit être connu par cœur.

Exemple : (Théorème des Accroissements finis)

Soit $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe c appartenant à $]a,b[$ tel que : $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

- **Corollaire**

Un corollaire à un théorème est un théorème qui est conséquence de ce théorème.

Exemple :

Théorème : l'image d'un intervalle de \mathbb{R} par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle de \mathbb{R} .

Corollaire :

Si une fonction définie et continue sur un intervalle de \mathbb{R} , à valeurs réelles, prend au moins une valeur positive et au moins une valeur négative alors cette fonction s'annule au moins une fois dans cet intervalle.

- **Lemme**

Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.

- **Conjecture**

Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer.

Exemple : (Conjecture de Fermat)

Si n est un entier supérieur ou égal à 3, il n'existe pas d'entiers naturels tous non nuls x , y et z tels que $x^n + y^n = z^n$.

1.4.2 Document

Selon le sociologue *Robert Escarpit* [6], un document est doté de deux propriétés:

- la synchronie : le document n'est pas une séquence linéaire d'événements mais une juxtaposition de traces qui a un objet.
- La stabilité : le document repose nécessairement sur un support matériel qui peut être transporté, conservé et reproductible.

Robert Escarpit voit que cinq éléments sont primordiaux et indispensables pour la définition d'un document :

- l'objet « document » contient des informations.
- les informations sont structurées de manière lisible par un homme ou une machine.
- il repose sur un support transportable, reproductible et relativement stable.
- il a une finalité.
- il est fini en termes de contenu.

Chapitre 1 : Généralités sur la reconnaissance des documents mathématiques manuscrits

Le dictionnaire *LAROUSSE* définit le document par une pièce écrite servant d'information, de preuve ou de témoignage.

- **Autre définition**

Un document est un ensemble formé par un support et une information. Il peut être explicatif, informatif, descriptif, de preuve, de témoignage ou de conviction.

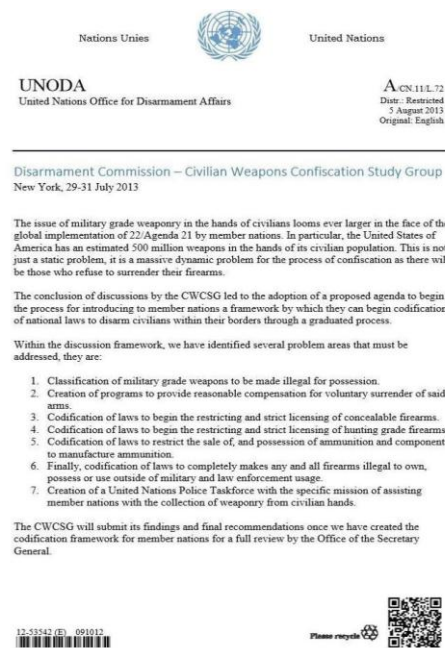


Figure 1: Image d'un document

1.4.3 Document numérique

L'Organisation Internationale de Normalisation ISO (International Organization for Standardization) définit le document numérique par un ensemble formé par un support et une information, généralement enregistré de façon permanente, et tel qu'il puisse être lu par l'homme et la machine.

- **Autre définition**

Un document numérique est un objet informatique immatériel composé d'un contenu, d'une structure logique et d'attributs de présentation et manipulable avec une machine afin de restituer une version intelligible pour l'homme. Un document numérique peut être un texte, fichier son, graphique, ensemble de données organisées en fichier, etc. Au contraire des documents papier, les

documents numériques donnent la possibilité de séparation de leurs contenus, mise en page et leurs présentations [7].

Un document numérique peut être un document papier (physique) numérisé ou un document créé informatiquement et conservé sur un support numérique.

1.4.4 Image numérique

Dans le sens général, une image numérique est toute image (dessin, icône, photographie, etc.) acquise (scanners, appareils photo, etc.), créée (programmes informatiques), traitée (transformée, modifiée, application des filtres par des programmes informatiques, etc.) et sauvegardée (stockée sur des supports informatiques par exemple : disque dur, USB, etc.) sous une forme codée représentable par des valeurs numériques [8].

1.4.5 Expression mathématique

Une expression mathématique est une combinaison finie de symboles mathématiques arrangés dans un espace bidimensionnel conformément à un ensemble de règles en fonction du contexte. Par exemple, une équation mathématique représente une égalité entre deux ou plusieurs sous-expressions (partie de l'expression ayant une interprétation sémantiquement complète) [9].

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\sqrt{x^n + 1}}{\alpha + \beta^\gamma}} dx$$

Figure 2: Expression mathématique

1.4.6 Symbole mathématique

Un symbole mathématique est l'unité de base d'une expression mathématique. Il peut avoir plusieurs sens selon sa classe et sa position dans l'expression mathématique.

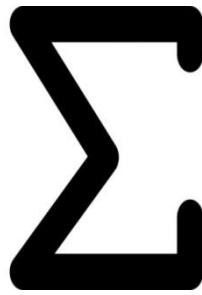
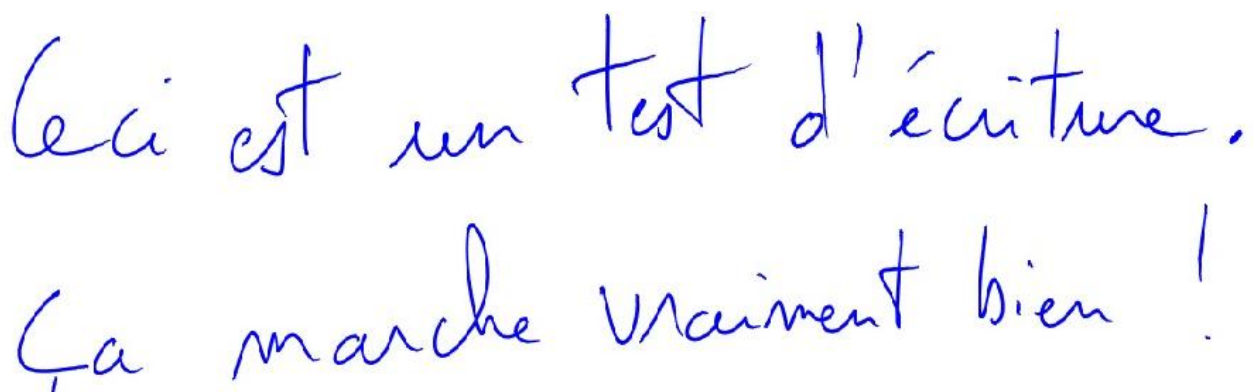


Figure 3: Symbole mathématique

1.5 Caractéristiques de l'écriture manuscrite

La reconnaissance de l'écriture manuscrite rassemble toutes les techniques permettant de transformer sous forme numérique des caractères, des mots et plus généralement tous les symboles écrits manuellement. Ce domaine d'étude peut être divisé en deux sous-domaines selon la source numérique du signal de l'écriture: La reconnaissance hors-ligne et la reconnaissance en-ligne.

Dans le premier domaine, la reconnaissance se fait sur une image numérisée d'une écriture manuscrite présentée sur un papier par un appareil photo, scanner, etc. Par contre, un signal d'écriture en-ligne s'obtient grâce aux technologies permettant la numérisation de l'écriture au moment de sa production. Par exemple les tablettes graphiques et les stylos numériques enregistrent le tracé au fur et à mesure de son exécution. Dans ce cas, l'écriture est caractérisée par des coordonnées de points correspondant à la position du stylo à intervalles réguliers de temps.

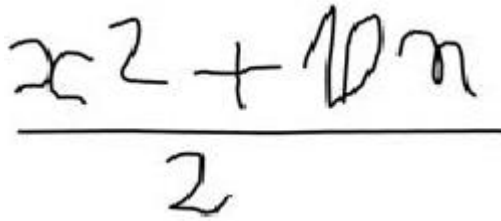


Ceci est un test d'écriture.
Ça marche vraiment bien !

Figure 4: Ecriture manuscrite

1.6 Spécificité de l'écriture mathématique manuscrite

L'écriture mathématique manuscrite se caractérise par ce qu'elle hérite de l'écriture manuscrite générale. Mais aussi elle a ses propres spécificités, qui la rendent plus difficile à étudier et à reconnaître, à savoir le grand nombre des symboles mathématiques, la similarité entre les symboles, la disposition des symboles dans les expressions mathématiques, etc.



A handwritten mathematical expression showing the fraction $\frac{x^2 + 10x}{2}$. The numerator consists of x^2 followed by a plus sign and $10x$. A horizontal line is drawn below the numerator, and the denominator 2 is written below the line.

Figure 5: Ecriture mathématique manuscrite

1.6.1 Nombre des symboles

Le nombre des symboles mathématiques est très élevé par rapport au nombre des lettres qui composent l'alphabet de n'importe quelle langue. Une analyse sommaire, nous a permis de recenser près de 250 symboles mathématiques.

Ces symboles peuvent être divisés en plusieurs groupes selon leurs natures :

- Lettres de l'alphabet Arabe.
- Lettres de l'alphabet Latin (majuscule et minuscule).
- Lettres Grecques
- Chiffres Arabes (٠, ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩).
- Chiffres Latins (0, 1, 2, ..., 9).
- Chiffres Romains (I, II, ..., X).
- Opérateurs arithmétiques

Opérateur	Signification
+	Addition
-	Soustraction
*	Multiplication
/	Division

Tableau 1: Opérateurs arithmétiques et leurs significations

- Opérateurs ensemblistes

Opérateur	Signification
$A \cup B$	Union
$A \cap B$	Intersection
$A \setminus B$	A moins B
$A \subset B$	A inclue dans B
\emptyset	L'ensemble vide
$x \notin A$	x n'appartient pas à A
$x \in A$	X appartient à A

Tableau 2: Opérateurs ensemblistes et leurs significations

- Opérateurs de comparaison

Opérateur	Signification
$a > b$	a est supérieur à b
$a < b$	a est inférieur à b
$x = y$	x est égal à y
$x \neq y$	x est différent de y

Tableau 3: Opérateurs de comparaison et leurs significations

- Opérateurs logique

Opérateur	Signification
\Rightarrow	Implication
\Leftrightarrow	Equivalence
\sim	Négation
\wedge	Conjonction
\vee	Disjonction
\forall	Pour tout
\exists	Il existe

Tableau 4: Opérateurs logiques et leurs significations

- Autres symboles

Symbole	Signification
$\sqrt{\quad}$	Racine
\int	Intégral
Σ	Sigma (Somme)
Π	Produit
∞	Infini

Tableau 5: Symboles et leurs significations

- Signes de ponctuation (.,/,'/:)
- Délimiteurs ({,},(,),[,],...)

1.6.2 Ressemblance des symboles

La ressemblance des symboles est l'une des caractéristiques principales des symboles mathématiques. Dans certains cas, il s'avère très difficile de faire la différence entre quelques symboles sans avoir des informations a priori.

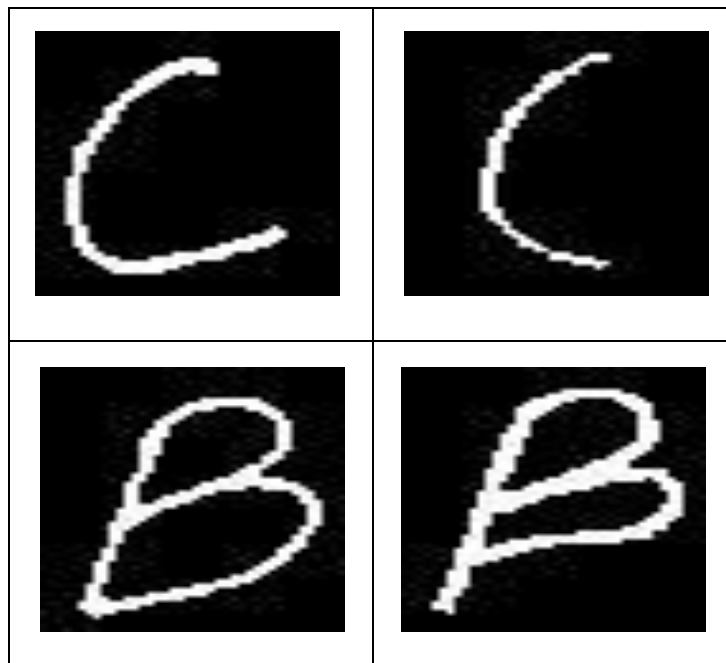


Tableau 6: Exemple de similarité des symboles mathématiques manuscrits

1.6.3 Emplacement des symboles

L'agencement des symboles dans une expression représente le facteur le plus important pour la détermination des relations entre les symboles. Seule la disposition des symboles qui indique le sens de la notation mathématique. Ceci devient critique dans le cas des notations implicites (notations n'ayant pas un symbole qui unifie leurs opérandes) par exemple : indice, exposant, multiplication implicite, etc.

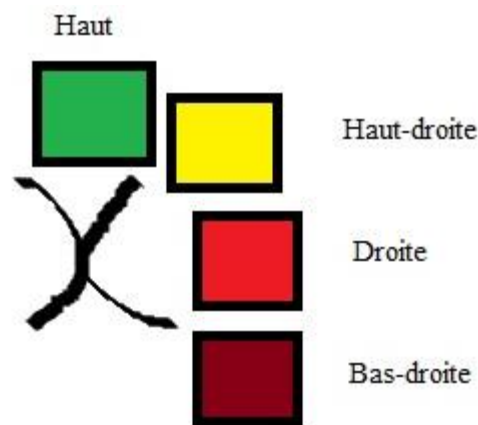


Figure 6: Zones valides des relations spatiales

Pour bien comprendre l'influence de la disposition des symboles sur la détermination des relations et sur la lecture du sens de la notation, nous prenons par exemple deux symboles différents (x et i). Le positionnement de chaque symbole par rapport à l'autre, nous donne plusieurs significations différentes :

- $x i$: les deux symboles sont dans l'axe principal, ce qui représente une relation de multiplication
- x^i : i est en position d'exposant par rapport à x
- x_i : i est en position d'indice par rapport à x

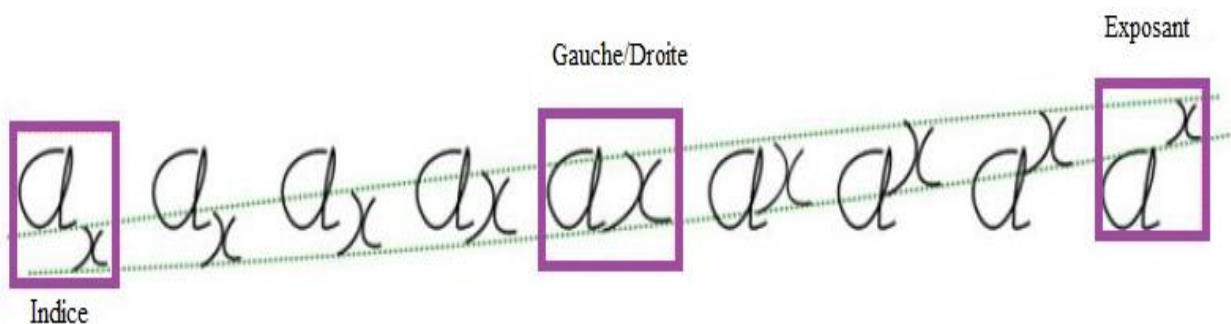


Figure 7: Relations spatiales possibles entre deux symboles

La détermination de la relation entre les symboles devient de plus en plus compliquée en fonction du nombre des symboles.



Figure 8: Expression mathématique formée de trois symboles

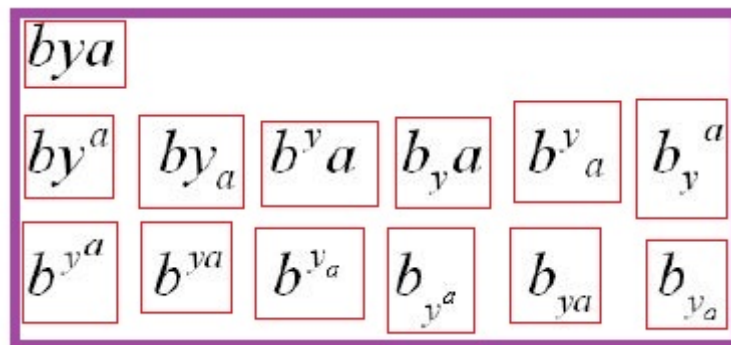


Figure 9: Relations spatiales entre les symboles de l'expression (Figure 8)

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons éclairci le contexte et le cadre général de notre sujet, l'objectif de cette thèse, les motivations qui nous ont conduits à consacrer ce doctorat à la question de la reconnaissance des documents mathématiques manuscrits. Aussi, nous avons proposé quelques définitions des mots clés du sujet, les difficultés et les problèmes liés aux documents mathématiques manuscrits, les caractéristiques et la spécificité de l'écriture manuscrite, etc.