N° d'ordre : 153 / 2018

Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques
Béni-Mellal

Centre d'Études Doctorales : Sciences et Techniques
Formation Doctorale : Mathématiques & Physiques Appliquées

THÈSE

Présentée par

Mohamed BOUAOUID

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : **Mathématiques**

Contribution à l'étude des équations différentielles fractionnaires à condition non locale

Soutenue publiquement le **20 janvier 2018** devant la commission d'examen composée de :

Président : Lalla Saadia CHADLI, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal.

Rapporteur : Lhoussine AZROUL, Professeur à la Faculté des Sciences de Fès.

Rapporteur : Ali BOUTOULOUT, Professeur à la Faculté des Sciences de Meknès.

Encadrant : Khalid HILAL, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal.

Co-encadrant : Said MELLIANI, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal.

Invité : Adil ABBASSI, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE

Je dédie cette thèse

A ma très chère mère et mon cher père

A mes chères Soeurs

A ma chère grande famille

A mes chers professeurs.

Mohamed Bouaouid

20 Janvier 2018

REMERCIEMENTS

C’est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près où de loin à élaborer ce travail de thèse.

Je tiens à remercier, en premier lieu, les Professeurs **K. Hilal** et **S. Melliani** qui ont encadré ce travail de thèse. Par leurs compétences et leur maturité scientifique, ils ont su me guider de façon pertinente dans mes recherches. Leur disponibilité, leur écoute et leurs qualités humaines m’ont permis d’avancer.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements aux Professeurs **L. Azroul** et **A. Boutoulout** pour avoir bien voulu juger ce travail et d’apporter des suggestions.

Je remercie les Professeurs **L.S. Chadli** et **A. Abbassi** d’avoir accepter de se joindre aux membres du jury.

Je remercie vivement **ma famille** qui m’a apporté son soutien affectueux.

Enfin, je remercie tous ceux qui m’ont encouragé de loin où de près.

LISTE DES PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS

P1) M. Bouaouid, M. Atraoui, K. Hilal and S. Melliani, Fractional differential equations with nonlocal-delay condition, J. Adv. Math. Stud, 11(2018), no. 2, 214-225.

P2) M. Atraoui, M. Bouaouid, L.S. Chadli, K. Hilal and S. Melliani, Fractional differential equations with nonlocal-fuzzy condition, J. Adv. Math. Stud, 11(2018), no. 2, 195-202.

P3) S. Melliani, L.S. Chadli, M. Atraoui and M. Bouaouid, Fuzzy initial value problem, Surveys in Mathematics and its Applications, 10 (2015), 149-157.

C1) M. Bouaouid, M. Atraoui, K. Hilal and S. Melliani, Mild solution of nonlocal fractional delay differential equation, The second international conference on modeling and scientific computing in mathematical engineering, 17-20 April, 2017, Faculty of Sciences and Technics, Marrakech, Morocco.

C2) M. Atraoui, M. Bouaouid, L.S. chadli and S. Melliani, Existence and uniqueness of the solution of nonlocal fuzzy fractional differential equation, The second international conference on modeling and scientific computing in mathematical engineering, 17-20 April, 2017, Faculty of Sciences and Technics, Marrakech, Morocco.

C3) M. Bouaouid, Equation télégraphiste fractionnaire, The 4th edition Arougou meeting of analysis and applications, 08-10 October, 2015, Arougou, Khénifra.

C4) M. Bouaouid, Les familles cosines et résolution de l'équation différentielle de second ordre à condition initiale floue, The 3th edition Arougou meeting of analysis and applications, 22-24 May, 2014, Arougou, Khénifra.

RÉSUMÉ

Le but de ce travail de thèse est de contribuer à l'étude des équations différentielles fractionnaires non locales. Ce type d'équations a un meilleur effet et avantage que les équations différentielles classiques en modélisation des propriétés et de la mémoire des phénomènes naturelles.

Tout d'abord, nous rappelons quelques ingrédients concernant le calcul fractionnaire, la théorie des semi-groupes, la théorie des familles cosines, les transformations intégrales, les fonctions spéciales, la théorie des ensembles flous et quelques résultats d'analyse fonctionnelle sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans cette thèse.

Ensuite, nous nous intéressons à l'étude d'un problème de Cauchy, pour les équations différentielles fractionnaires non locales du premier ordre avec une nouvelle dérivée fractionnaire dite "dérivée fractionnaire conforme". Les résultats d'existence, unicité, dépendance continue par rapport à la donnée initiale et régularité de la solution s'obtiennent à l'aide de la théorie des semi-groupes combiné avec la théorie des points fixes.

Puis, nous exploitons la théorie des familles cosines et la théorie des points fixes pour montrer l'existence, unicité, dépendance continue par rapport aux données initiales et régularité de la solution d'un problème de Cauchy, pour les équations différentielles fractionnaires non locales du second ordre avec la dérivée fractionnaire conforme. Nous avons aussi donné la solution fondamentale implicite dans un cas concret des équations télégraphistes fractionnaires non locales où la dérivée fractionnaire est prise au sens de Caputo.

Finalement, après avoir donné un sens à la dérivée et l'intégrale fractionnaires conformes dans un cadre flou, nous traitons les questions d'existence, unicité et dépendance continue par rapport à la donnée initiale de la solution d'un problème de Cauchy flou, pour les équations différentielles fractionnaires non locales du premier ordre à retard.

Les mots-clés : Équations différentielles fractionnaires, Conditions non locales, Familles d'opérateurs linéaires, Théorie des points fixes et Théorie des ensembles flous.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie de la dérivée fractionnaire est une théorie très ancienne, qui remonte à une conversation au 30 septembre 1695 entre L'Hôpital et Leibniz concernant la définition d'opérateur $\frac{d^n(.)}{dt^n}$ pour $n = \frac{1}{2}$. Ainsi, au fil du temps, certaines approches ont été données dans la littérature comme la définition de Riemann-Liouville et celle de Caputo. Pour $0 < \alpha < 1$, la dérivée fractionnaire d'une fonction x au sens de Riemann-Liouville est donnée par [56] :

$$^{RL}D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^\alpha}ds,$$

où Γ est la fonction Gamma d' Euler. Nous remarquons que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante n'est pas forçement nulle, mais cette propriété est vraie pour la dérivée fractionnaire au sens de Caputo définie par [56] :

$$^{C}D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{x^{'}(s)}{(t-s)^\alpha}ds.$$

Il est clair que les deux définitions précédentes ne satisfont pas certaines propriétés de la dérivée classique, comme la formule de Leibniz et la formule d'intégration par parties. Pour cette raison, Khalil *et* autres ont donné une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire appelée "dérivée fractionnaire conforme" et définie comme suit [36] :

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{x(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-x(t)}{\varepsilon}.$$

Cette définition satisfait la majorité des propriétés de la dérivée classique, en citant la dérivée du produit et du quotient de deux fonctions, le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis et la formule d'intégration par parties. Notons que la dérivée fractionnaire conforme est meilleure que la dérivée classique pour les fonctions non régulières. En effet, par exemple la fonction $x(t) = \sqrt{t}$ n'est pas différentiable en 0^+, mais elle est (α)−différentiable en 0^+ pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$. De plus, $\frac{d^\alpha x(0^+)}{dt^\alpha} = 0$ pour $\alpha < \frac{1}{2}$ et $\frac{d^{\frac{1}{2}} x(0^+)}{dt^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$.
Nous notons aussi, que la transformation standard de Laplace

$$\mathscr{L}(x(t))(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}x(t)dt, \quad \lambda > 0,$$

n'est pas compatible avec la dérivée fractionnaire conforme. Pour cette raison, Abdeljawad a introduit une transformation adaptée dite "transformation fractionnaire de Laplace" comme suit [1] :

$$\mathscr{L}_\alpha(x(t))(\lambda) := \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\lambda \frac{t^\alpha}{\alpha}} x(t)dt, \quad \lambda > 0, \quad \alpha \in (0,1).$$

La dérivée fractionnaire a trouvé ces applications en divers disciplines scientifiques, en citant par exemple : hydrologie [8], diffusion anormale [14, 78], systèmes mécaniques [15, 24], tissus biologiques [40], viscoélasticité [41], électronique [42], propagation des ondes [63], processus de diffusion [65], économie [66], transport de neutron [70] et diélectriques [71]. Pour plus de détails concernant l'historique et applications du calcul fractionnaire, on se réfère aux travaux de Debnath [18], Kilbas *et* autres [37], Miller et Ross [45], Oldham et Spanier [51], Podlubny [56], Samko *et* autres [62] et Zhou [77].

D'autre part, pour des raisons physiques, Byszewski a introduit la condition [10] :

$$x(0) = x_0 + g(x),$$

appelée "condition non locale" comme une généralisation du cas classique $x(0) = x_0$.
La condition non locale signifie que la donnée initiale n'est pas explicite et dépend de quelques états futures du phénomène à étudier. La célèbre forme de la fonction g est donnée par [19] :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i x(t_i),$$

quand l'auteur a utilisé cette forme pour décrire le phénomène de diffusion d'une petite quantité de gaz dans un tube transparent. Aussi, une forme intégrale de g a été attachée à l'équation de la chaleur par Olmstead et Roberts [52].

Par ailleurs, on trouve d'une manière naturelle que la notion de retard survient dans de nombreux phénomènes non causaux, c'est-à-dire, que l'état future du phénomène dépend du passé [26].

En réalité, la nature est pleine de notions vagues, c'est pour cette raison que Zadeh a introduit une nouvelle théorie dite "théorie des ensembles flous" comme une généralisation de la théorie des ensembles classiques pour modéliser la notion de vague [72]. Considérons un exemple simple qu'on peut modéliser en utilisant la théorie des ensembles flous : si on s'intéresse aux états de la température de l'eau, en logique booléenne, on note, par exemple, la valeur 1 si l'eau est chaude et la valeur 0 si elle est froide. Mais, que peut-on dire pour l'état "tiède" ? Quel sens peut-on donner, par exemple, au terme "un peu chaude" ? Alors, dans cet exemple, l'état "tiède" et "un peu chaude" sont des états intermédiaires vagues. En théorie des ensembles flous, on peut associer, par exemple, la valeur $\frac{1}{2}$ à l'état tiède. De même, on classe les autres états intermédiaires, d'une manière graduelle, par des valeurs dans l'intervalle continu $[0,1]$. Ainsi, un ensemble flou est la donnée d'une fonction à valeur dans $[0,1]$ dite degré d'appartenance. Nous proposons aussi l'exemple des nombres réels proches de $\frac{1}{2}$

comme étant un ensemble vague, qui peut avoir un degré d'appartenance défini comme suit :

$$\mu(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \\ -2x+2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \\ 0, & alleur. \end{cases}$$

En fait, les concepts dérivée fractionnaire, condition non locale, condition retardée, condition floue ont un meilleur effet et avantage que leurs formes standards en modélisation de la mémoire des phénomènes naturelles.

En conséquence, le sujet des équations différentielles fractionnaire à condition initiale, qui prend en considération le problème de la mémoire, attire l'intérêt de plusieurs chercheurs [6, 9, 10, 49, 64]. Le problème de Cauchy, pour les équations différentielles du premier ordre, a été étudié par différentes méthodes telles que la méthode des semi-groupes fortement continus [10, 11, 44], quand les auteurs ont supposé que la partie linéaire est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu, la méthode des semi-groupes intégrés [9, 22] et la méthode des semi-groupes d'extrapolation [9, 48] ont été considérés dans le cas non dense, c'est-à-dire, que la partie linéaire est à domaine non dense et satisfait la condition de Hille-Yosida. Pour plus de détails sur les équations différentielles à domaine non dense, on se réfère aux travaux [2, 5, 16, 22, 25, 35, 48, 68].

La méthode des familles cosines [23, 27, 69] a été introduite pour étudier le problème de Cauchy pour les équations différentielles du second ordre, quand les auteurs ont supposé que la partie linéaire est le générateur infinitésimal d'une famille cosine fortement continue.

Cette thèse entre dans le cadre d'une contribution à l'étude des équations différentielles fractionnaires non locales en quatre chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons brièvement quelques ingrédients concernant le calcul fractionnaire, la théorie des semi-groupes, la théorie des familles cosines, les transformations intégrales, les fonctions spéciales, la théorie des ensembles flous et quelques résultats d'analyse fonctionnelle, qui seront nécessaires dans la suite de cette thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons le problème de Cauchy pour l'équation différentielle fractionnaire non locale du premier ordre de la forme suivante :

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 + g(x),$$

ce problème de Cauchy est considéré en trois cas, dans un premier temps, nous supposons que la partie linéaire A est un opérateur sectoriel, puis nous établissons l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport à la donnée initiale de la solution "faible". En second cas, on suppose que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu et on montre l'existence, l'unicité, la régularité et la dépendance continue par rapport à la donnée initiale de la solution faible. Dans le troisième cas, nous supposons seulement que A est un opérateur de Hille-Yosida et nous utilisons deux approches, l'approche des semi-groupes intégrés et celle des semi-groupes d'extrapolation, pour prouver l'existence et l'unicité de la solution intégrale. En fin, nous appliquons les principaux résultats au modèle fractionnaire et non local de la chaleur.

Dans le troisième chapitre, sous la condition que la partie linéaire A est le générateur infinitésimal d'une famille cosine, nous montrons les résultats d'existence, d'unicité et de la dépendance continue par rapport aux données initiales de la solution faible du problème de Cauchy pour l'équation différentielle fractionnaire non locale du second ordre de la forme suivante :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = Ax(t) + F(t, x(t), \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}),$$
$$x(0) = x_0 + G(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}), \quad \frac{d^\alpha x(0)}{dt^\alpha} = x_1 + H(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}).$$

Nous allons aussi donner la solution fondamentale implicite pour les deux équations aux dérivées partielles fractionnaires de formes suivantes :

$$au(t,\ell) + b\frac{\partial^\alpha u(t,\ell)}{\partial t^\alpha} + c\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}}}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t,\ell)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}} = \frac{\partial^2 u(t,\ell)}{\partial \ell^2},$$

$$au(t,\ell) + b\frac{\partial^\alpha u(t,\ell)}{\partial t^\alpha} + c\frac{\partial^\beta u(t,\ell)}{\partial t^\beta} = \frac{\partial^2 u(t,\ell)}{\partial \ell^2},$$

avec les conditions initiales du type non locales suivantes respectivement

$$u(0,\ell) = \sum_{i=1}^{p}[a_i u(t_i,\ell) + b_i\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t_i,\ell)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}], \quad \frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(0,\ell)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}} = \sum_{i=1}^{p}[c_i u(t_i,\ell) + d_i\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t_i,\ell)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}],$$

$$u(0,\ell) = \sum_{i=1}^{p}[a_i u(t_i,\ell) + b_i\frac{du(t_i,\ell)}{dt}], \quad \frac{\partial u(0,\ell)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{p}[c_i u(t_i,\ell) + d_i\frac{du(t_i,\ell)}{dt}],$$

nous introduisons également, les conditions aux limites du type non locales suivantes respectivement

$$u(t,0) = \sum_{i=1}^{p}[r_i u(t,\ell_i) + s_i\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t,\ell_i)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}], \quad u(t,1) = \sum_{i=1}^{p}[\eta_i u(t,\ell_i) + \mu_i\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t,\ell_i)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}],$$

$$u(t,0) = \sum_{i=1}^{p}[r_i u(t,\ell_i) + s_i\frac{du(t,\ell_i)}{dt}], \quad u(t,1) = \sum_{i=1}^{p}[\eta_i u(t,\ell_i) + \mu_i\frac{du(t,\ell_i)}{dt}],$$

notons que les deux formes précédentes ne sont pas équivalentes. De plus, nous signalons qu'elles sont motivées par une célèbre équation hyperbolique du second ordre dite "équation des télégraphistes", qui a un meilleur effet que l'équation de la chaleur en modélisation des phénomènes naturelles d'aspect parabolique [20]. En effet, pour $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $a = RG$, $b = RC + LG$ et $c = LC$, avec R et G sont respectivement la résistance et la conductance de la résistance, C est la capacité du condensateur et L est l'inductance de la bobine, on retrouve l'équation des télégraphistes suivante :

$$RGu(t,\ell)+(RC+LG)\frac{\partial u(t,\ell)}{\partial t}+LC\frac{\partial^2 u(t,\ell)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(t,\ell)}{\partial \ell^2}.$$

L'équation des télégraphistes fractionnaire trouve ces applications en stochastique universelle [30], électromagnétisme [58], théorie de la marche aléatoire [7], théorie des contraintes thermiques [57], points quantiques de nanotube de carbone semi-conducteur [29], structure de l'image qui préserve le débruitage [74], la cinétique de réacteur [4] et les réactions de diffusion [20]. L'équation des télégraphiques fractionnaire au sens de Caputo dans un cas particulier ($\beta = 2\alpha$) a été résolu par plusieurs méthodes, en citant, par exemple, la méthode de la transformation de Laplace [12], la méthode de décomposition d'Adomian [47], la méthode de séparation des variables [13], la méthode d'homotopie [17, 38], la méthode de la transformation différentielle réduite [67] et la méthode des fonctions de la base radiale [28]. Comme applications des résultats de ce chapitre, on propose les modèles fondamentaux fractionnaires et non locaux pour l'équation des ondes et celle des télégraphistes.

Dans le quatrième chapitre, après avoir donné la définition et certains résultats concernant les deux concepts de la dérivée et l'intégrale fractionnaires conformes dans le cadre flou, nous allons exploiter la notion de semi-groupe flou fortement continu pour établir l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport à la donnée initiale de la solution faible pour le problème de Cauchy fractionnaire avec une condition non locale-floue à retard de la forme suivante :

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}=Ax(t)+f(t,x_t),\quad x(\sigma)=\varphi(\sigma)+g(x_{t_1},...,x_{t_p})(\sigma).$$

Pour plus de détails concernant le problème de Cauchy pour les équations différentielles floues, on peut voir, par exemple, les travaux [3, 31, 32, 33, 44, 53, 54].

Nous terminons par quelques précisions sur les paramètres indiqués dans cette introduction comme suit :

$0<\tau$, $0<t\le\tau$, $0<\ell<1$, $0<r$, $-r\le\sigma\le 0$, $0<\alpha<1$, $1<\beta<2$, $0<a$, $0<b$, $0<c$, $p\in\mathbb{N}$, $0<t_1<t_2<...<t_p<\tau$, $0<\ell_1<\ell_2<...<\ell_p<1$, a_i, b_i, c_i, d_i, r_i, s_i, μ_i, η_i, $i=1,...,p$ sont des constantes réelles, A est un opérateur linéaire, x_0, x_1 sont deux éléments d'un espace de Banach $(X,\|\,.\,\|)$, x_t est une fonction-mémoire donnée par la formule $x_t(\sigma)=x(t+\sigma)$, f, g, h, φ, F, G, H sont des fonctions satisfaisant certaines hypothèses, $\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}$ représente la dérivée fractionnaire conforme d'ordre α, $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$, $\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}$ et $\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}$ sont des dérivées partielles fractionnaires prises au sens de Caputo.

CHAPITRE

1

PRÉLIMINAIRE

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement quelques ingrédients concernant le calcul fractionnaire, les transformations intégrales, les fonctions spéciales, la théorie des semi-groupes, la théorie des familles cosines, la théorie des ensembles flous et quelques résultats d'analyse fonctionnelle, qui seront nécessaires dans la suite de cette thèse.

1.1 Dérivées et intégrales fractionnaires

Définition 1.1. *[56] L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (0,1)$ d'une fonction x est définie par*

$$^{RL}I^{\alpha}(x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Définition 1.2. *[56] La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (0,1)$ d'une fonction x est définie par*

$$^{RL}D^{\alpha}(x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds.$$

Définition 1.3. *[56] La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction x est définie par*

$$^{C}D^{\alpha}(x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds, \quad \alpha \in (0,1),$$

$$^{C}D^{\beta}(x)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(s)}{(t-s)^{\beta-1}} ds, \quad \beta \in (1,2).$$

Remarque 1.1. *Lorsque la limite $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} {}^{C}D^{\alpha}(x)(t)$ existe, alors on note*

$$^{C}D^{\alpha}(x)(0) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} {}^{C}D^{\alpha}(x)(t).$$

Remarque 1.2. *[56] La relation entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo est donnée par*

$$^{C}D^{\alpha}(x)(t) =^{RL} D^{\alpha}[x(t) - x(0)].$$

Le théorème suivant nous donne le lien entre l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de Caputo [37].

Théorème 1.1. *1. Si x est continue dans le domaine de $^{RL}I^{\alpha}$. Alors, nous avons*

$$^{C}D^{\alpha}(^{RL}I^{\alpha}(x(t)) = x(t), \quad \alpha \in (0,1).$$

2. Si x est continûment différentiable dans le domaine de $^{C}D^{\alpha}$. Alors, nous avons

$$^{RL}I^{\alpha}(^{C}D^{\alpha}(x(t)) = x(t) - x(0), \quad \alpha \in (0,1).$$

Définition 1.4. *[36] La dérivée fractionnaire conforme d'ordre $\alpha \in (0,1)$ d'une fonction x à $t > 0$ est définie par*

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{x(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - x(t)}{\varepsilon}.$$

Remarque 1.3. *[36] Lorsque la limite précédente existe, on dira que x est (α)-différentiable au point t.*
De plus, si x est (α)-différentiable sur chaque intervalle du type $(0,\tau)$ et $\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}}$ existe, alors on note

$$\frac{d^{\alpha}x(0)}{dt^{\alpha}} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}}.$$

Remarque 1.4. *[36] En conséquence de la définition (1.4), si x est différentiable pour $t > 0$, alors on aura*

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}} = t^{1-\alpha}\frac{dx(t)}{dt}.$$

Définition 1.5. *[36] L'intégrale fractionnaire conforme d'ordre $\alpha \in (0,1)$ d'une fonction x est définie par*

$$I^{\alpha}(x)(t) = \int_0^t s^{\alpha-1}x(s)ds,$$

où l'intégrale est l'intégrale impropre habituelle de Riemann.

Théorème 1.2. *[36] Si x est continue dans le domaine de I^{α}. Alors, nous avons*

$$\frac{d^{\alpha}I^{\alpha}(x)(t)}{dt^{\alpha}} = x(t).$$

Lemme 1.1. *[1] Si x est différentiable. Alors, nous avons*

$$I^{\alpha}(\frac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}})(t) = x(t) - x(0).$$

Pour plus de détails concernant le calcul fractionnaire conforme, on se réfère à la référence de base [36].

1.2 Transformations intégrales et fonctions spéciales

Définition 1.6. *[56] Soit $x(t)$ une fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty)$, la fonction $\mathcal{L}(x(t))(\lambda)$ de la variable λ définie par*

$$\mathcal{L}(x(t))(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} x(t)dt, \quad \lambda > 0,$$

s'appelle transformation de Laplace de $x(t)$.

Proposition 1.1. *[56] La transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par*

$$\mathcal{L}({}^C D^\alpha(x)(t))(\lambda) = \lambda^\alpha \mathcal{L}(x(t))(\lambda) - \lambda^{\alpha-1}x(0), \quad \alpha \in (0,1),$$

$$\mathcal{L}({}^C D^\beta(x)(t))(\lambda) = \lambda^\beta \mathcal{L}(x(t))(\lambda) - \lambda^{\beta-2}\dot{x}(0) - \lambda^{\beta-1}x(0), \quad \beta \in (1,2).$$

Nous remarquons que la transformation de Laplace n'est pas compatible avec la dérivée fractionnaire conforme. C'est pour cette raison, Abdeljawad a introduit la définition suivante [1] :

Définition 1.7. *La transformation fractionnaire de Laplace d'ordre $\alpha \in (0,1)$ d'une fonction x est définie par*

$$\mathcal{L}_\alpha(x(t))(\lambda) := \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\lambda \frac{t^\alpha}{\alpha}} x(t)dt, \quad \lambda > 0.$$

Proposition 1.2. *[1] Soit $x(t)$ une fonction différentiable. Alors, la transformation fractionnaire de Laplace de la dérivée fractionnaire conforme de x est donnée par*

$$\mathcal{L}_\alpha(\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha})(\lambda) = \lambda \mathcal{L}_\alpha(x(t))(\lambda) - x(0), \quad \alpha \in (0,1).$$

Proposition 1.3. *[56] La transformation de Laplace du produit de convolution*

$$(x * y)(t) = \int_0^t x(t-s)y(s)ds,$$

de deux fonctions causales $x(t)$ et $y(t)$ est égale au produit de leurs transformations de Laplace

$$\mathcal{L}((x*y)(t))(\lambda) = \mathcal{L}(x(t))(\lambda)\mathcal{L}(y(t))(\lambda).$$

Remarque 1.5. *Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions définies sur l'intervalle $[0,+\infty)$, on a*

$$\mathcal{L}_\alpha(x(\frac{t^\alpha}{\alpha}))(\lambda) = \mathcal{L}(x(t))(\lambda),$$

$$\mathcal{L}_\alpha(\int_0^t s^{\alpha-1} x(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})y(s)ds)(\lambda) = \mathcal{L}(x(t))(\lambda)\mathcal{L}_\alpha(y(t))(\lambda).$$

Définition 1.8. *[37] Les deux fonctions de Mittag-Leffler de paramètres un et deux sont définies respectivement comme suit*

$$E_{(\alpha)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \qquad (\alpha, z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}(\alpha) > 0),$$

$$E_{(\alpha,\beta)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \qquad (\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}(\alpha) > 0).$$

Remarque 1.6. *[37] Nous avons les cas spéciaux suivants :*
$E_{(1)}(z) = e^z$, $E_{(\alpha,1)}(z) = E_{(\alpha)}(z)$, $E_{(2,1)}(z) = \cosh(\sqrt{z})$ *et* $E_{(2,2)}(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$.

Définition 1.9. *[37] Nous définissons la fonction de densité* $W_{(\alpha,\beta)}(z)$ *par*

$$W_{(\alpha,\beta)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\alpha n + \beta)}, \ (z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}),$$

si $\alpha > -1$, *alors* $W_{(\alpha,\beta)}(z)$ *est une série entière en* z.

1.3 Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés

Définition 1.10. *[55] Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire.*

1. *On appelle spectre de* A *l'ensemble* $\sigma(A)$ *défini par*

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda I - A \ \text{ n'est pas bijectif}\},$$

2. *le complémentaire de* $\sigma(A)$ *dans* $\mathbb{C}$, *noté* $\rho(A)$ *s'appelle ensemble résolvant de* A,
3. *l'opérateur* $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho$, *est appelé la résolvante de* A,
4. A *est dit fermé si son graphe* $G(A) := \{(x, Ax),\ x \in D(A)\}$ *est fermé.*

1.3.1 Famille-résolvante d'un opérateur sectoriel

Définition 1.11. *[64] Un opérateur* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *est dit sectoriel du type* (M, ω, θ) *s'il existe* $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ *et* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ *tels que*

1. A *est linéaire, fermé et à domaine dense,*
2. $\forall \lambda \notin \omega + S_\theta$, *la résolvante* $(\lambda I - A)^{-1}$ *de* A *existe,*
3. $\forall \lambda \notin \omega + S_\theta$, $|(\lambda I - A)^{-1}| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|}$,

avec

$$\omega + S_\theta := \{\omega + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{C} \ \text{ et } \ |Arg(-\lambda)| < \theta\}.$$

Théorème 1.3. *[64] Tout opérateur sectoriel du type* (M, ω, θ) *génère une famille-résolvante* $(R(t))_{t\geq 0}$ *donnée par*

$$R(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda t} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

avec γ *est un chemin quelconque choisit dans le complémentaire de* $\omega + S_\theta$.

1.3.2 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.12. *[55] Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *une famille d'opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Banach* $(X, \|.\|)$. *On dit que* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continu, si*

1. $T(0) = I$,

2. $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall\ t,s \geq 0$,

3. $\forall x \in X$, $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \| T(t)x - x \| = 0$.

Définition 1.13. *[55]*

1. *Si* $T(t+s) = T(t)(T(s))$, $\forall t,s \in \mathbb{R}$, *alors on dira que* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un groupe.*

2. *Si* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} | T(t) - I | = 0$, *alors* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est dit uniformément continu.*

Théorème 1.4. *[55] Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu sur* X*. Alors,*

1. $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(| T(t) |) = \omega_0$ *existe* ($-\infty \leq \omega_0 < +\infty$),

2. *pour tout* $\omega > \omega_0$ *il existe une constante* $M > 0$ *telle que* $| T(t) | \leq M \exp(\omega t)$, $\forall t \geq 0$.

Définition 1.14. *[55] Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu sur* X*.*

On appelle générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$ *l'opérateur linéaire* A *défini par*

$$D(A) = \{x \in X,\ \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe}\},$$

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},\ \ \forall x \in D(A).$$

Théorème 1.5. *[55] Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu sur* X *et* $(A, D(A))$ *son générateur infinitésimal, alors*

1. $D(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* X,

2. $\forall x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$,

3. $\forall x \in X$, $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$,

4. $\forall x \in X$, $\forall t > 0$, $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$,

5. *pour tout* $x \in D(A)$ *l'application* $t \longmapsto T(t)x$ *est différentiable et* $\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax$,

6. *pour tout* $x \in D(A)$, $T(t_2)x - T(t_1)x = \int_{t_1}^{t_2} T(s)Ax ds = \int_{t_1}^{t_2} AT(s)x ds$,

7. $D(A)$ *est dense dans* X,

8. A *est un opérateur fermé.*

Proposition 1.4. *[55] Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *et* $(S(t))_{t\geq 0}$ *deux semi-groupes fortement continus sur* X *de générateurs infinitésimaux* A *et* B *respectivement. Si* $A = B$, *alors* $T(t) = S(t), \forall t \geq 0$.

Théorème 1.6 (Hille-Yosida, [55])**.** *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire sur* X, A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu* $(T(t))_{t\geq 0}$ *vérifiant* $| T(t) | \leq M \exp(\omega t)$, $\forall t \geq 0$ *si et seulement si*

1. $D(A)$ *est dense dans* X *et* A *est un opérateur fermé.*

2. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathcal{R}(\lambda) > \omega$,

   i) $\lambda \in \rho$,

   ii) $| R^n(\lambda, A) | \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.3.3 Semi-groupes intégrés

Un opérateur linéaire A sur X s'appelle opérateur de Hille-Yosida s' il existe deux constantes $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telles que,

1. $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\forall \lambda > \omega)$, $| R(\lambda, A)^n | \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$.

On définit la part A_0 de A par

$$D(A_0) = \{x \in D(A), \quad Ax \in X_0 := \overline{D(A)}\}, \quad A_0 x = Ax, \; \forall\, x \in D(A_0).$$

Définition 1.15. *[5, 35] On appelle semi-groupe intégré toute famille $(S(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$S(0) = 0$,*
2. *$t \longmapsto S(t)$ est fortement continu,*
3. *$S(s)S(t) = \int_0^s (S(t+\tau) - S(\tau))d\tau$, pour tout $t, s \geq 0$.*

Définition 1.16. *[35] Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré.*

1. *On dit que $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement borné, s'il existe deux constantes $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telle que $| S(t) | \leq M e^{\omega t}$ pour tout $t \geq 0$.*
2. *$(S(t))_{t\geq 0}$ est dit non dégénéré, si pour tout $t \geq 0$, $S(t)x = 0$ implique $x = 0$.*
3. *$(S(t))_{t\geq 0}$ est dit localement Lipschitzien continu si pour tout $b > 0$ il existe une constante $L \geq 0$ telle que $| S(t) - S(s) | \leq L | t - s |$, pour tous $s, t \in [0, b]$.*

Définition 1.17. *[35] Un opérateur A s'appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe intégré s'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et une famille $(S(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs exponentiellement bornés telles que*

1. *$]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$,*
2. *$S(0) = 0$,*
3. *$(\lambda I - A)^{-1} = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) dt$ pour tout $\lambda > \omega$.*

Proposition 1.5. *[5] Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$. Alors, pour tous $x \in X$, $y \in D(A)$ et $t > 0$, nous avons*

1. *$\int_0^t S(s)x ds \in D(A)$, $S(t)y \in D(A)$,*
2. *$S(t)x = A\int_0^t S(s)x ds + tx$, $AS(t)y = S(t)Ay$ et $S(t)y = \int_0^t S(s)Ay ds + ty$.*

Si $x \in \overline{D(A)}$, alors la fonction $t \longmapsto S(t)x$ est continûment différentiable et $\dot{S}(t)$ devient un semi-groupe fortement continu dans $\overline{D(A)}$.

Théorème 1.7. *[35] Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe intégré Lipschitzien continu $(S(t))_{t\geq 0}$.*
2. *A est un opérateur de Hille-Yosida.*

1.3.4 Semi-groupes d'extrapolation

Lemme 1.2. *[2] Soit A un opérateur de Hille-Yosida, alors*

1. *A_0 génère un semi-groupe fortement continu $(T_0(t))_{t\geq 0}$ dans X_0,*
2. *$\mid T_0(t) \mid\leq M\exp(\omega t)$ pour tout $t \geq 0$,*
3. *$\rho(A) \subset \rho(A_0)$,*
4. *$R(\lambda, A_0) = R(\lambda, A)|_{X_0}$, pour tout $\lambda \in \rho(A)$ où $R(\lambda, A)|_{X_0}$ est la restriction de $R(\lambda, A)$ à X_0.*

Pour $\lambda_0 \in \rho(A)$ fixé, nous définissons une nouvelle norme $|.|_{-1}$ sur X_0 par $|x|_{-1} =\| R(\lambda_0, A_0)x \|$. D'après [68] les normes $|.|_{-1}$ sont équivalentes pour tout $\lambda \in \rho(A)$.
Soit X_{-1} le complété de $(X_0, |.|_{-1})$. L'opérateur $(T_0(t))_{t\geq 0}$ a une unique extension à un opérateur linéaire borné $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ à l'espace de Banach X_{-1} et $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu dans X_{-1}, dont le générateur infinitésimal est noté par $(A_{-1}, D(A_{-1}))$.

Définition 1.18.
1. *On appelle $(X_{-1}, |.|_{-1})$ espace d'extrapolation.*
2. *Le semi-groupe $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ est appelé semi-groupe d'extrapolation.*

Lemme 1.3. *[2] Nous avons les propriétés suivantes :*

1. *$\mid T_{-1}(t) \mid_{\mathrm{L}(X_{-1})} = \mid T_0(t) \mid_{\mathrm{L}(X_0)}$,*
2. *$D(A_{-1}) = X_0$,*
3. *$A_{-1} : X_0 \longrightarrow X_{-1}$ est l'unique extension continue de $A_0 : D(A_0) \subset (X_0, \| . \|) \longrightarrow (X_{-1}, | . |_{-1})$ et $(\lambda_0 I - A_{-1})$ est une isométrie de $(X_0, \| . \|)$ à $(X_{-1}, | . |_{-1})$,*
4. *si $\lambda \in \rho(A)$, alors $(\lambda I - A_{-1})$ est inversible et $(\lambda I - A_{-1})^{-1} \in L(X_{-1})$. En particulier, nous avons $\lambda \in \rho(A_{-1})$ et $R(\lambda, A_{-1})|_{X_0} = R(\lambda, A_0)$,*
5. *l'espace X_0 est dense dans $(X_{-1}, | . |_{-1})$, d'où l'espace d'extrapolation X_{-1} est aussi le complété de $(X, | . |_{-1})$ et nous avons $X \hookrightarrow X_{-1}$,*
6. *l'opérateur A_{-1} est une extension de A. En particulier, si $\lambda \in \rho(A)$, alors $R(\lambda, A_{-1})|_{X_0} = R(\lambda, A)$ et $R(\lambda, A_{-1})(X) = D(A)$.*

Nous terminons cette sous-section par la remarque suivante :

Remarque 1.7. *[22] Pour tout $x \in \overline{D(A)}$, nous avons $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x$.*

1.4 Familles cosines d'opérateurs linéaires bornés

Définition 1.19. *[69] Une famille $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ d'opérateurs linéaires et bornés sur X s'appelle famille cosine fortement continue si et seulement si*

1. *$C(0) = I$,*
2. *$C(s + t) + C(s - t) = 2C(s)C(t)$, pour tous $t, s \in \mathbb{R}$,*

3. *$t \longmapsto C(t)x$ est continue pour chaque x fixé dans X.*

Nous définissons aussi la famille sinus par

$$S(t)x := \int_0^t C(s)xds.$$

Proposition 1.6. *[69] Soit $((C(t))_{t\in\mathbb{R}}, (S(t))_{t\in\mathbb{R}})$ une famille cosine fortement continue sur X. Alors, nous avons les résultats suivants :*

1. *$C(t) = C(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,*
2. *$C(s)$, $S(s)$, $C(t)$ et $S(t)$ commutent pour tous $t, s \in \mathbb{R}$,*
3. *$t \longmapsto C(t)x$ est continue pour chaque x fixé dans X,*
4. *$S(s+t) + S(s-t) = 2S(s)C(t)$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}$,*
5. *$S(s+t) = S(s)C(t) + S(t)C(s)$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}$,*
6. *$S(t) = -S(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,*
7. *il existe deux constantes $K \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telle que $\mid C(t) \mid \leq K \exp(\omega \mid t \mid)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,*
8. *$\mid S(t) - S(s) \mid \leq K \mid \int_s^t \exp(\omega \mid r \mid) \mid dr$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.20. *[69] On appelle générateur infinitésimal d'une famille cosine fortement continue $((C(t))_{t\in\mathbb{R}}, (S(t))_{t\in\mathbb{R}})$ l'opérateur $A : X \longrightarrow X$ défini par*

$$D(A) = \{x \in X,\ t \longmapsto C(t)x \text{ est continûment deux fois différentiable}\},$$

$$Ax = \frac{d^2C(0)x}{dt^2}.$$

Nous introduisons l'ensemble E défini par

$$E = \{x \in X,\ t \longmapsto C(t)x \text{ est une fonction continûment différentiable}\}.$$

Proposition 1.7. *[69] Soit $((C(t))_{t\in\mathbb{R}}, (S(t))_{t\in\mathbb{R}})$ une famille cosine sur X et $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal, alors nous avons les résultats suivants :*

1. *$D(A)$ est dense dans X et A est un opérateur fermé,*
2. *si $x \in X$ et $t, s \in \mathbb{R}$, alors $\int_s^t S(r)xdr \in D(A)$ et $A\int_s^t S(r)xdr = C(t)x - C(s)x$,*
3. *si $x \in X$ et $t, s \in \mathbb{R}$, alors $\int_0^t \int_0^s C(r)C(\sigma)xdrd\sigma \in D(A)$ et*

$$A\int_0^t \int_0^s C(r)C(\sigma)xdrd\sigma = \frac{1}{2}[C(t+s)x - C(t-s)x],$$

4. *si $x \in X$, alors $S(t)x \in E$,*
5. *si $x \in E$, alors $S(t)x \in D(A)$ et $\frac{dC(t)}{dt}x = AS(t)x$,*
6. *si $x \in D(A)$, alors $C(t)x \in D(A)$ et $\frac{d^2C(t)}{dt^2}x = AC(t)x = C(t)Ax$,*
7. *si $x \in E$, alors $\lim_{t\longrightarrow 0} AS(t)x = 0$,*

8. *si $x \in E$, alors $S(t)x \in D(A)$ et $\frac{d^2S(t)}{dt^2}x = AS(t)x$,*

9. *si $x \in D(A)$, alors $S(t)x \in D(A)$ et $AS(t)x = S(t)Ax$,*

10. *$C(t+s) - C(t-s) = 2AS(t)S(s)$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}$.*

Proposition 1.8. *[69] Soit $((C(t))_{t\in\mathbb{R}}, (S(t))_{t\in\mathbb{R}})$ une famille cosine de générateur infinitésimal $(A, D(A))$ dans X et w la fonction donnée par*

$$w(t) = C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)g(s)ds,\ t \in \mathbb{R},$$

avec $g : \mathbb{R} \longrightarrow X$ est une fonction continûment différentiable.
Si $x \in D(A)$ et $y \in E$, alors nous avons les résultats suivants :

1. *$w(t) \in D(A)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et w est deux fois différentiable,*

2. *$\frac{d^2w(t)}{dt^2} = Aw(t) + g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $w(0) = x$ et $\frac{dw(0)}{dt} = y$.*

Proposition 1.9. *[69] Soit $((C(t))_{t\in\mathbb{R}}, (S(t))_{t\in\mathbb{R}})$ une famille cosine de générateur infinitésimal $(A, D(A))$ dans X telle que $| C(t) | \leq K \exp(\omega | t |)$, $t \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $Re(\lambda) > \omega$, nous avons*

$$\lambda^2 \in \rho(A),$$

$$\mathcal{L}(C(t))(\lambda)x = \lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}x,\ x \in X,$$

$$\mathcal{L}(S(t))(\lambda)x = (\lambda^2 I - A)^{-1}x,\ x \in X.$$

Théorème 1.8. *[69] Soit A un opérateur sur X tel que $\sqrt{A}$ existe et inversible. Alors, A est le générateur infinitésimal d'une famille cosine $((C(t))_{t\in\mathbb{R}}, (S(t))_{t\in\mathbb{R}})$, si et seulement si*

1. *$D(\sqrt{A})$ est dense dans X,*

2. *il existe $M > 0$ et $\omega \geq 0$ tels que*

   (a) *pour tout $\lambda > \omega$, $\lambda^2 \in \rho(A)$,*

   (b) *$\lambda \longmapsto \lambda(\lambda^2 - A)^{-1}$ et $\lambda \longmapsto \sqrt{A}(\lambda^2 - A)^{-1}$ sont infiniment dérivables sur $(\omega, +\infty)$,*

   (c) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $| \frac{(\lambda-\omega)^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n}[\lambda(\lambda^2 - A)^{-1}] | \leq M$, pour $\lambda > \omega$,*

   (d) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $| \frac{(\lambda-\omega)^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n}[\sqrt{A}(\lambda^2 - A)^{-1}] | \leq M$, pour $\lambda > \omega$.*

1.5 Théorie des ensembles flous

1.5.1 Notion d'ensemble flou

On appelle ensemble flou de $\mathbb{R}^n$ et on note A, la donnée d'une application $\mu_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ dite degré d'appartenance graduelle à A.
Soit $a \in \mathbb{R}^n$, si $\mu_A(a) = 1$ on dira que a appartient totalement à A et on dira que a n'appartient pas à A si $\mu_A(a) = 0$. Si $0 < \mu_A(a) < 1$ on dira que a a une appartenance partielle à A avec un degré $\mu_A(a)$.

Exemple 1.1. *Soit μ_A l'application définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1, \\ \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Nous avons 0 appartient totalement à A, 2 n'appartient pas à A et $\frac{1}{4}$ a une appartenance partielle à A avec un degré $\frac{3}{4}$.

Exemple 1.2. *Soit B un sous ensemble de $\mathbb{R}$.*
On sait que B est caractérisé par sa fonction caractéristique donnée par

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ \\ 0, & x \notin B. \end{cases}$$

Ainsi, on peut considérer B comme un ensemble flou.
On notera par $F(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des sous-ensembles flous de $\mathbb{R}^n$.

1.5.2 Principe d'extension

Le principe d'extension est un outil permettant d'étendre à $F(\mathbb{R}^n) \times F(\mathbb{R}^m)$ une relation définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. En effet, si $x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une relation, on définit l'extension de Zadeh de x par

$$\hat{x} : F(\mathbb{R}^n) \times F(\mathbb{R}^m) \longrightarrow F(\mathbb{R}^p)$$

avec

$$\mu_{\hat{x}(A,B)}(c) = \begin{cases} \sup\limits_{(a,b)\in x^{-1}(\{c\})} \min(\mu_A(a), \mu_B(b)), & si \;\; x^{-1}(\{c\}) \neq \emptyset, \\ \\ 0, & si \;\; x^{-1}(\{c\}) = \emptyset. \end{cases}$$

Pour plus de détails concernant le principe d'extension de Zadeh, nous nous référons aux travaux [50, 61, 73].

Exemple 1.3. *Soit $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x + y$. L'extension de Zadeh $\oplus$ de $+$ est donnée par*

$$\oplus : F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R}) \longrightarrow F(\mathbb{R}),$$

$$\mu_{A\oplus B}(z) = \sup_{x+y=z} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)).$$

1.5.3 Coupe d'un ensemble flou

Soit A un ensemble flou de $\mathbb{R}^n$. Pour $\gamma \in]0,1]$, la γ-coupe de A est définie par

$$[A]^\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n, \;\; \mu_A(x) \geq \gamma\}.$$

De plus, nous définissons l'exception suivante :

$$[A]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, \;\; \mu_A(x) > 0\}}.$$

Ainsi, la notion de la coupe est un outil permettant de construire d'un ensemble flou un ensemble classique.

Exemple 1.4. *Soit A l'ensemble flou défini par*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Nous avons $[A]^1 = \{0\}$, $[A]^{\frac{1}{2}} = [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ *et* $[A]^0 = [-1, 1]$.

1.5.4 Opérations sur les ensembles flous

Soient A et B deux ensembles flous de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Grâce au principe d'extension, on peut définir quelques opérations sur les ensembles flous comme suit :

$$A \oplus B = \sup_{x+y=z} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)),$$

$$A \ominus B = \sup_{x-y=z} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)),$$

$$A \otimes B = \sup_{x\times y=z} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)),$$

$$\lambda \odot A = \sup_{x\times y=z} \min(\chi_{\{\lambda\}}(x), \mu_A(y)).$$

En se basant sur la notion de la coupe, on peut aussi définir les opérations suivantes :

$$[A \dot{\oplus} B]^\gamma = [A]^\gamma + [B]^\gamma,$$

$$[A \dot{\ominus} B]^\gamma = [A]^\gamma - [B]^\gamma,$$

$$[A \dot{\otimes} B]^\gamma = [A]^\gamma \times [B]^\gamma,$$

$$[\lambda \dot{\odot} A]^\gamma = \lambda [A]^\gamma.$$

1.5.5 Espace métrique flou

On désigne par $P(\mathbb{R}^n)$ la famille de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ et par $P_k(\mathbb{R}^n)$ la famille de tous les sous-ensembles non vides, convexes et compacts de $\mathbb{R}^n$. On définit l'addition et la multiplication par un scalaire au sens de Minkowski dans $P(\mathbb{R}^n)$ comme suit :

$$A + B = \{a + b, \;\; (a, b) \in A \times B\},$$

$$\lambda A = \{\lambda a, \;\; a \in A\}.$$

La métrique de Hausdorff d_H dans $P_k(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$d_H(B,A) = \max[\sup_{b\in B}\inf_{a\in A} \mid b-a \mid, \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} \mid b-a \mid],$$

avec $|\,.\,|$ désigne la norme euclidienne habituelle dans $\mathbb{R}^n$. Ensuite, il est clair que $(P_k(\mathbb{R}^n), d_H)$ devient un espace métrique complet et séparable [60].

On pose $E^n := \{A \in F(\mathbb{R}^n),\ \mu_A$ satisfait (1-4) ci-dessous$\}$,

1. μ_A est normal, c'est-à-dire, il existe un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mu_A(x_0) = 1$,
2. μ_A est convexe au sens flou, c'est-à-dire, $\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0,1]$,
3. μ_A est semi-continu supérieurement,
4. $\overline{\{x \in \mathbb{R}^n,\ \ \mu_A(x) > 0\}}$ est compact dans $\mathbb{R}^n$.

Notons que les éléments de E^1 sont appelés nombres flous [39].

Soient $A, B \in E^n$. Alors, d'après $(1-4)$, on aura

$$[A]^\gamma \in P_k(\mathbb{R}^n),$$

$$A \oplus B = A \dot{\oplus} B,$$

$$\lambda \odot A = \lambda \dot{\odot} A.$$

Ainsi, on peut définir une métrique d sur E^n comme suit :

$$d(u,v) := \sup_{0\leq\gamma\leq 1} d_H([u]^\gamma, [v]^\gamma).$$

Pour tous $u, v, w \in E^n$, nous avons $d(u+w, v+w) = d(u,v)$, de plus (E^n, d) est un espace métrique complet [59].

1.5.6 Continuité d'une fonction à valeur floue

Définition 1.21. *[53] Une fonction $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ est dite continue en $t_0 \in [0,\tau]$ si elle est continue à $t = t_0$ dans l'espace métrique (E^n, d), c'est-à-dire,*
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall t \in [0,\tau]$ tel que $\mid t - t_0 \mid < \eta$, alors $d(x(t), x(t_0)) < \varepsilon$.

Théorème 1.9. *[61] Si x est continue, alors l'extension de Zadeh $\hat{x}$ de x est aussi continue et*

$$[\hat{x}(A)]^\gamma = x([A]^\gamma),\ \ \forall \gamma \in [0,1],\ \ \forall A \in F(\mathbb{R}^n).$$

1.5.7 Dérivée et intégrale d'une fonction à valeur floue

Tout d'abord, notons que l'espace E^n n'est pas stable par la loi $\ominus$. Ainsi, nous allons introduire une nouvelle loi de composition interne dite différence de Hukuhara et définie comme suit [39] : pour $u, v \in E^n$, s'il existe $w \in E^n$ tel que $v = u + w$, alors on note $w = v \ominus_H u$ et on appellera w différence de Hukuhara de v et u.

Définition 1.22. *[31, 39] Une fonction $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ est dite Hukuhara différentiable à $t \in [0,\tau]$ s'il existe un élément $\frac{dx(t)}{dt} \in E^n$ telles que les deux limites*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon}(x(t+\varepsilon) \ominus_H x(t)) \text{ et } \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon}(x(t) \ominus_H x(t-\varepsilon))$$

existent et sont égales à $\frac{dx(t)}{dt}$ dans l'espace métrique (E^n, d).

Définition 1.23. *[31, 39] Une fonction $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ est dite fortement mesurable, si la fonction multivoque $x^\gamma : [0,\tau] \longrightarrow P_k(\mathbb{R}^n)$, $t \longmapsto [x(t)]^\gamma$ est Lebesgue mesurable, avec $P_k(\mathbb{R}^n)$ est muni de la topologie générée par la métrique d_H de Hausdorff.*

On dira que x est intégrablement bornée, s'il existe une fonction intégrable h telle que $\mid s \mid \leq h(t)$ pour chaque $s \in [x(t)]^0$.

Définition 1.24. *[31, 39] Soit $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ une fonction.*
On définit et on note $\int_0^\tau x(t)dt$, l'intégrale de x sur $[0,\tau]$ par

$$\begin{aligned} \left[\int_0^\tau x(t)dt\right]^\gamma &= \int_0^\tau [x(t)]^\gamma dt \\ &= \left\{ \int_0^\tau s(t)dt \mid s : [0,\tau] \longmapsto \mathbb{R}^n \text{ est une sélection mesurable de } [x(t)]^\gamma \right\}. \end{aligned}$$

Une fonction fortement mesurable et intégrablement bornée $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ est dite intégrable sur $[0,\tau]$ si $\int_0^\tau x(t)dt \in E^n$.

Proposition 1.10. *[31, 39] Soit $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ une fonction intégrable et $c \in [0,\tau]$. Alors, nous avons*

$$\int_0^\tau x(t)dt = \int_0^c x(t)dt + \int_c^\tau x(t)dt.$$

Proposition 1.11. *[31, 39] Soient $x, y : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ deux fonctions intégrables, $A \in E^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, nous avons les propriétés suivantes :*

1. $\int_0^\tau (x+y)(t)dt = \int_0^\tau x(t)dt + \int_0^\tau y(t)dt,$
2. $\int_0^\tau (\lambda x)(t)dt = \lambda \int_0^\tau x(t)dt,$
3. $t \longmapsto d(y(t), x(t))$ *est intégrable,*
4. $d(\int_0^\tau y(t)dt, \int_0^\tau x(t)dt) \leq \int_0^\tau d(y(t), x(t))dt,$
5. $\int_0^\tau (A)(t)dt = tA.$

Théorème 1.10. *[31, 39] Si $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ est continue, alors elle est intégrable sur $[0,\tau]$.*

Théorème 1.11. *[31, 39] Soit $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ une fonction Hukuhara différentiable telle que $\frac{dx(t)}{dt}$ est intégrable sur $[0,\tau]$. Alors, pour tout $t \in [0,\tau]$, nous avons*

$$x(\tau) = x(t) + \int_t^\tau (\frac{dx(s)}{ds})ds.$$

1.5.8 Semi-groupes flous fortement continus

Définition 1.25. *[44] Une famille* $(T(t))_{t\geq 0}$ *d'opérateurs linéaires et bornés sur* (E^n, d) *est appelée semi-groupe flou fortement continu, si*

1. $T(0) = I$,
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$ *pour tous* $t, s \geq 0$,
3. $\lim_{t\longrightarrow 0^+} d(T(t)u, u) = 0$, *pour tout* $u \in E^n$,
4. *il existe deux constantes* $M > 0$ *et* ω *telle que,*

$$d(T(t)v, T(t)u) \leq M \exp(\omega t) d(u, v), \; pour\ tous\ u, v \in E^n.$$

Définition 1.26. *[44] On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe flou fortement continu* $(T(t))_{t\geq 0}$ *l'opérateur* $A : E^n \longrightarrow E^n$ *défini par*

$$D(A) = \{x \in E^n, \ \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{T(h)x \ominus_H x}{h} \text{ existe dans } E^n\},$$

$$Ax = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{T(h)x \ominus_H x}{h}.$$

CHAPITRE

2

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES NON LOCALES DU PREMIER ORDRE

Notre objectif dans ce chapitre est de discuter certains résultats pour l'équation différentielle fractionnaire non locale du premier ordre de la forme

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}} = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 + g(x), \tag{2.1}$$

avec $0 < \tau$, $0 < t \leq \tau$, $\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}}$ est la dérivée fractionnaire conforme d'ordre $\alpha \in (0,1)$, X est un espace de Banach muni de la norme $\| \, . \, \|$, $x_0 \in X$, $A : X \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire, $\mathcal{C}$ est l'espace de Banach des fonctions continues de $[0,\tau]$ à valeurs dans X muni de la norme $| x |= \sup\limits_{t\in[0,\tau]} \| x(t) \|$, $f : [0,\tau] \times X \longrightarrow X$ et $g : \mathcal{C} \longrightarrow X$ sont des fonctions satisfaisant certaines hypothèses.

Le problème de Cauchy (2.1) est considéré en trois cas, dans un premier temps, nous supposons que la partie linéaire A est un opérateur sectoriel, puis nous établissons l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport à la donnée initiale de la solution faible. Dans le deuxième cas, on suppose que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu et on montre l'existence, l'unicité, la régularité et la dépendance continue par rapport à la donnée initiale de la solution faible. Dans le troisième cas, nous supposons seulement que A est un opérateur de Hille-Yosida et nous utilisons deux approches, l'approche des semi-groupes intégrés et celle des semi-groupes d'extrapolation pour prouver l'existence et l'unicité de la solution intégrale. En fin, nous appliquons les principaux résultats pour l'équation fractionnaire non locale de la chaleur. Avant de présenter nos résultats, nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H_1) il existe une constante $L > 0$ telle que $\| f(t,y) - f(t,x) \| \leq L \| y - x \|$, pour tous $x, y \in X$ et $t \in [0,\tau]$,

(H_2) la fonction $f(.,x) : [0,\tau] \longrightarrow X$ est continue, pour chaque $x \in X$,

(H_3) il existe une constante $K > 0$ telle que $\| g(y) - g(x) \| \leq K \mid y - x \mid$, pour tous $x, y \in \mathcal{C}$,

(H_4) la fonction $f(t,.) : X \longrightarrow X$ est continue et pour tout $r > 0$ il existe une fonction $\mu_r \in L^\infty([0,\tau],\mathbb{R}^+)$ telle que $\sup\limits_{\|x\| \leq r} \| f(t,x) \| \leq \mu_r(t)$, pour tout $t \in [0,\tau]$,

(H_5) $x_0 + g(x) \in \overline{D(A)}$, pour tout $x \in \mathcal{C}$,

(H_6) la fonction f est (α)–différentiable par apport à la première variable et différentiable par apport à la seconde variable.

2.1 Solution faible d'un problème de Cauchy avec un opérateur sectoriel

Supposons que A est un opérateur sectoriel et notons par $(R(t))_{t\geq 0}$ sa famille résolvante.

2.1.1 Existence et unicité de la solution faible

Appliquons la transformation fractionnaire de Laplace à l'équation (2.1), on aura

$$\mathcal{L}_\alpha(x(t))(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}[x_0 + g(x)] + (\lambda I - A)^{-1}\mathcal{L}_\alpha(f(t,x(t)))(\lambda).$$

Ensuite, par la transformation inverse fractionnaire de Laplace, on obtient la formule de Duhamel suivante :

$$x(t) = R(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1} R(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s,x(s))ds.$$

Nous remarquons que pour $\alpha = 1$, on retrouve la formule de Duhamel classique [55]. Ainsi, on peut proposer la définition suivante :

Définition 2.1. *On dit que $x \in \mathcal{C}$ est une solution faible du problème de Cauchy* (2.1)*, si*

$$x(t) = R(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1} R(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s,x(s))ds, \ t \in [0,\tau].$$

Théorème 2.1. *Supposons que* $(H_1)-(H_3)$ *sont vérifiées, si de plus*

$$(\frac{\tau^\alpha}{\alpha} L + K) \sup_{t\in[0,\tau]} |R(\frac{t^\alpha}{\alpha})| < 1,$$

alors le problème de Cauchy (2.1) *admet une unique solution faible.*

Démonstration. On définit l'opérateur $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ par

$$\Gamma(x)(t) = R(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1} R(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s,x(s))ds.$$

Soient $x, y \in \mathcal{C}$, nous avons

$$\Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) = R(\frac{t^\alpha}{\alpha})[g(y) - g(x)]$$
$$+ \int_0^t s^{\alpha-1} R(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[f(s, y(s)) - f(s, x(s))]ds.$$

Donc, on en déduit que

$$\| \Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) \| \leq (\frac{\tau^\alpha}{\alpha} L + K) \sup_{t \in [0,\tau]} |R(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \, | y - x | .$$

Et par suite, on obtient

$$| \Gamma(y) - \Gamma(x) | \leq (\frac{\tau^\alpha}{\alpha} L + K) \sup_{t \in [0,\tau]} |R(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \, | y - x | .$$

Ainsi, Γ admet un unique point fixe dans $\mathcal{C}$, qui est la solution faible du problème de Cauchy (2.1). □

2.1.2 Dépendance continue de la solution faible par rapport à la donnée initiale

Théorème 2.2. *Supposons les même conditions du théorème* (2.1).

Soient x_0, $y_0 \in X$ et notons par x et y les deux solutions faibles associées à x_0 et y_0 respectivement. Alors, nous avons

$$| y - x | \leq \frac{\alpha \sup_{t \in [0,\tau]} |R(\frac{t^\alpha}{\alpha})|}{\alpha - \sup_{t \in [0,\tau]} |R(\frac{t^\alpha}{\alpha})| (\alpha K + L\tau^\alpha)} \| y_0 - x_0 \| .$$

Démonstration. On a

$$y(t) - x(t) = R(\frac{t^\alpha}{\alpha})[y_0 - x_0 + g(y) - g(x)]$$
$$+ \int_0^t s^{\alpha-1} R(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[f(s, y(s)) - f(s, x(s))]ds.$$

Alors, on obtient

$$\| y(t) - x(t) \| \leq \sup_{t \in [0,\tau]} |R(\frac{t^\alpha}{\alpha})| [\| y_0 - x_0 \| + (K + \frac{L\tau^\alpha}{\alpha}) \, | y - x |].$$

Ainsi, on en déduit que

$$| y - x | \leq \sup_{t \in [0,\tau]} |R(\frac{t^\alpha}{\alpha})| [\| y_0 - x_0 \| + (K + \frac{L\tau^\alpha}{\alpha}) \, | y - x |].$$

Et par conséquent, on aura

$$| y - x | \leq \frac{\alpha \sup_{t \in [0,\tau]} |R(\frac{t^\alpha}{\alpha})|}{\alpha - \sup_{t \in [0,\tau]} |R(\frac{t^\alpha}{\alpha})| (\alpha K + L\tau^\alpha)} \| y_0 - x_0 \| .$$

□

2.2 Solution faible d'un problème de Cauchy avec un opérateur qui génère un semi-groupe fortement continu

Maintenant, supposons que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$.

2.2.1 Existence et unicité de la solution faible

Appliquons la transformation fractionnaire de Laplace à l'équation (2.1), on aura

$$\mathcal{L}_\alpha(x(t))(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}[x_0 + g(x)] + (\lambda I - A)^{-1}\mathcal{L}_\alpha(f(t,x(t)))(\lambda).$$

Par la transformation inverse fractionnaire de Laplace, on trouve la formule de Duhamel suivante :

$$x(t) = T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s,x(s))ds.$$

Alors, nous introduisons la définition suivante :

Définition 2.2. *On dit que $x \in \mathcal{C}$ est une solution faible du problème de Cauchy* (2.1), *si*

$$x(t) = T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s,x(s))ds,\ t \in [0,\tau].$$

Théorème 2.3. *Supposons que $(H_1) - (H_3)$ sont vérifiées, si de plus*

$$(\frac{\tau^\alpha}{\alpha}L + K)\sup_{t\in[0,\tau]}|T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| < 1,$$

alors le problème de Cauchy (2.1) *admet une unique solution faible.*

Démonstration. On peut utiliser les mêmes techniques de la preuve du théorème 2.1. □

Maintenant, nous exploitons la compacité de $(T(t))_{t>0}$, à fin d'affaiblir l'hypothèse (H_1) et la condition de contraction supposée dans le théorème (2.3), ainsi nous aurons seulement le résultat d'existence suivant :

Théorème 2.4. *Supposons que $(T(t))_{t>0}$ est compact et $(H_2) - (H_4)$ sont vérifiées, si de plus*

$$K\sup_{t\in[0,\tau]}|T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| < 1,$$

alors le problème de Cauchy (2.1) *a au moins une solution faible.*

Démonstration. On choisit

$$r \geq \frac{\sup_{t\in[0,\tau]}|T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\| x_0 \| + \| g(0) \| + \frac{\tau^\alpha}{\alpha} \mid \mu \mid_{L^\infty([0,\tau],\mathbb{R}^+)}]}{1 - K\sup_{t\in[0,\tau]}|T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|}.$$

Soit $x \in B_r := \{x \in \mathcal{C},\ \mid x \mid \leq r\}$ et considérons les deux opérateurs Γ_1 et Γ_2 définis par

$$\Gamma_1(x)(t) = T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)],$$

$$\Gamma_2(x)(t) = \int_0^t s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, x(s)) ds.$$

En utilisant $(H_2)-(H_4)$, on aura $\Gamma_1(x)+\Gamma_2(y) \in B_r$ pour tout x, $y \in B_r$ et Γ_1 est une contraction dans B_r. Ensuite, montrons que Γ_2 est continu et compact.

Continuité de Γ_2 :

Soit $(x_n) \subset B_r$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans B_r. Par l'hypothèse (H_4), on aura

$$\| s^{\alpha-1}[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))] \| \leq 2\mu(s) s^{\alpha-1},$$

$$f(s, x_n(s) \longrightarrow f(s, x(s)) \quad quand \quad n \longrightarrow +\infty.$$

D'autre part, on a

$$\Gamma_2(x_n)(t) - \Gamma_2(x)(t) = \int_0^t s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))] ds.$$

Donc, on obtient

$$|\Gamma_2(x_n) - \Gamma_2(x)| \leq \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \int_0^\tau s^{\alpha-1} \| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \| ds.$$

Ainsi, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on aura

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} |\Gamma_2(x_n) - \Gamma_2(x)| = 0.$$

Compacité de Γ_2 :

Étape 1 : Montrons que $\{\Gamma_2(x)(t), \;\; x \in B_r\}$ est relativement compact dans X.

Fixons $t \in]0, \tau[$ et prenons $\varepsilon \in]0, t[$. Ensuite, pour $x \in B_r$, nous définissons l'opérateur Γ_2^ε par

$$\Gamma_2^\varepsilon(x)(t) = \int_0^{(t^\alpha-\varepsilon^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, x(s)) ds.$$

On peut écrire Γ_2^ε comme suit

$$\Gamma_2^\varepsilon(x)(t) = T(\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}) \int_0^{(t^\alpha-\varepsilon^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha - \varepsilon^\alpha}{\alpha}) f(s, x(s)) ds.$$

Comme $(T(t))_{t>0}$ est compact, alors $\{\Gamma_2^\varepsilon(x)(t), \;\; x \in B_r\}$ est relativement compact dans X.

En utilisant (H_4), on obtient

$$\| \Gamma_2^\varepsilon(x)(t) - \Gamma_2(x)(t) \| \leq |\mu|_{L^\infty([0,\tau],\mathbb{R}^+)} \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}.$$

Ainsi, $\{\Gamma_2(x)(t), \;\; x \in B_r\}$ est relativement compact dans X.

D'autre part, on a $\{\Gamma_2(x)(0), \;\; x \in B_r\}$ est un ensemble compact.

Finalement, $\{\Gamma_2(x)(t), \;\; x \in B_r\}$ est relativement compact dans X pour tout $t \in [0, \tau]$.

Étape 2 : Montrons que $\Gamma_2(B_r)$ est équicontinu.

Soient $t_1, t_2 \in]0,\tau]$ tel que $t_1 < t_2$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\Gamma_2(x)(t_2) - \Gamma_2(x)(t_1) &= \int_0^{t_1} s^{\alpha-1}[T(\frac{t_2^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) - T(\frac{t_1^\alpha - s^\alpha}{\alpha})]f(s,x(s))ds \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1}T(\frac{t_2^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s,x(s))ds \\ &= [T(\frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha}) - I)]\int_0^{t_1} s^{\alpha-1}T(\frac{t_1^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s,x(s))ds \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1}T(\frac{t_2^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s,x(s))ds.\end{aligned}$$

Donc, on en déduit que

$$\| \Gamma_2(x)(t_2) - \Gamma_2(x)(t_1) \| \leq \frac{\sup\limits_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \mid \mu \mid_{L^\infty([0,\tau],\mathbb{R}^+)}}{\alpha}[t_2^\alpha - t_1^\alpha + \tau^\alpha \mid T(\frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha}) - I \mid].$$

Et par suite $\Gamma_2(x)$, $x \in B_\tau$ sont équicontinues.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, on déduit que Γ_2 est compact.

Finalement, le théorème du point fixe de Krasnoselskii nous donne l'existence d'un point fixe de $\Gamma_1 + \Gamma_2$ dans $\mathcal{C}$, qui est une solution faible du problème de Cauchy (2.1). □

2.2.2 Dépendance continue de la solution faible par rapport à la donnée initiale

Théorème 2.5. *Supposons les mêmes conditions du théorème* (2.3).

Soient x_0, $y_0 \in X$ et notons par x et y les deux solutions faibles associées à x_0 et y_0 respectivement. Alors, nous avons

$$\mid y - x \mid \leq \frac{\alpha \sup\limits_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|}{\alpha - \sup\limits_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|(\alpha K + L\tau^\alpha)} \| y_0 - x_0 \|.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}y(t) - x(t) &= T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[y_0 - x_0 + g(y) - g(x)] \\ &+ \int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[f(s,y(s)) - f(s,x(s))]ds.\end{aligned}$$

Alors, on aura

$$\| y(t) - x(t) \| \leq \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\| y_0 - x_0 \| + (K + \frac{L\tau^\alpha}{\alpha}) \mid y - x \mid].$$

Ainsi, on en déduit que

$$\mid y - x \mid \leq \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\| y_0 - x_0 \| + (K + \frac{L\tau^\alpha}{\alpha}) \mid y - x \mid].$$

Finalement, on obtient

$$\mid y - x \mid \leq \frac{\alpha \sup\limits_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|}{\alpha - \sup\limits_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|(\alpha K + L\tau^\alpha)} \| y_0 - x_0 \|.$$

□

Nous proposons aussi un deuxième résultat de la dépendance continue de la solution faible par rapport à la donnée initiale, qui est meilleur que celui donné dans le théorème (2.5).

Théorème 2.6. *Supposons les mêmes conditions du théorème* (2.5)*. Si de plus*

$$K \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \exp(L \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \frac{\tau^\alpha}{\alpha}) < 1,$$

alors, nous avons

$$| y - x | \leq \frac{\sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|}{1 - K \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \exp(L \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \frac{\tau^\alpha}{\alpha})} \| y_0 - x_0 \| .$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} y(t) - x(t) &= T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[y_0 - x_0 + g(y) - g(x)] \\ &\quad + \int_0^t s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[f(s, y(s)) - f(s, x(s))] ds. \end{aligned}$$

Alors, on en déduit que

$$\| y(t) - x(t) \| \leq \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| [\| y_0 - x_0 \| + K | y - x | + L \int_0^t s^{\alpha-1} \| y(s) - x(s) \| ds].$$

Par l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\| y(t) - x(t) \| \leq \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| [\| y_0 - x_0 \| + K | y - x |] \exp(L \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \frac{\tau^\alpha}{\alpha}).$$

Et par suite, on aura

$$| y(t) - x(t) | \leq \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| [\| y_0 - x_0 \| + K | y - x |] \exp(L \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \frac{\tau^\alpha}{\alpha}).$$

Ainsi, on trouve

$$| y(t) - x(t) | \leq \frac{\sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \exp(L \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \frac{\tau^\alpha}{\alpha})}{1 - K \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \exp(L \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \frac{\tau^\alpha}{\alpha})} \| y_0 - x_0 \| .$$

□

Remarque 2.1. *Nous remarquons que*

$$\frac{\exp(\frac{l_1 \tau^\alpha}{\alpha} \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|)}{1 - l_2 \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \exp(\frac{l_1 \tau^\alpha}{\alpha} \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|)} < \frac{\alpha}{\alpha - \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| (\alpha l_2 + l_1 \tau^\alpha)}.$$

Alors, le résultat du théorème (2.6) *est meilleur que celui du théorème* (2.5).

2.2.3 Régularité de la solution faible

Définition 2.3. *Une fonction* $(\alpha)-$*différentiable* x *est dite solution* (α)*-classique du problème de Cauchy* (2.1)*, si les deux assertions suivantes sont satisfaites*

1. $\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = Ax(t) + f(t, x(t))$,
2. $x(0) = x_0 + g(x)$.

Pour montrer l'existence de la solution (α)-classique, on aura besoin de l'hypothèse suivante :

(H_7) $x_0 + g(x) \in D(A)$, pour tout $x \in \mathcal{C}$.

Théorème 2.7. *On suppose que les hypothèses* (H_1)*,* (H_3)*,* (H_6) *et* (H_7) *sont vérifiées, si de plus*

$$(\frac{\tau^\alpha}{\alpha} L + K) \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| < 1,$$

alors le problème de Cauchy (2.1) *admet une unique solution* (α)*-classique.*

Démonstration. Nous avons toutes les conditions du théorème (2.3). Alors, le problème de Cauchy (2.1) admet une unique solution faible notée x.
Ensuite, soit y la solution continue de l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} y(t) = T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[A(x_0 + g(x)) + f(0, x(0))] + \int_0^t s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) \frac{\partial^\alpha f}{\partial s^\alpha}(s, x(s)) ds \\ + \int_0^t s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s)) y(s) ds. \end{aligned}$$

Nous avons $\frac{x(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - x(t)}{\varepsilon} \longrightarrow y(t)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ pour $t > 0$.
Ainsi, $t \longmapsto f(t, x(t))$ est continûment $(\alpha)-$différentiable.
Et par suite, le problème de Cauchy suivant :

$$\frac{d^\alpha w(t)}{dt^\alpha} = Aw(t) + f(t, x(t)), \quad w(0) = x_0 + g(x),$$

admet une unique solution $(\alpha)-$classique. Comme x est l'unique solution faible de (2.1), on en déduit que $x \equiv w$. □

2.2.4 Étude d'un cas spécial de la condition non locale

Dans cette sous-section, nous allons étudier un cas spécial de la condition non locale donnée par

$$g(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i x(t_i),$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$, $c_1, ..., c_p$ sont des constantes réelles et $0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < \tau$.

Proposition 2.1. *Supposons que* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées et de plus il existe une constante* $\varepsilon \in]0,1[$ *telle que*

$$\sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \sum_{i=1}^{p} | c_i | < \varepsilon,$$

alors le problème de Cauchy (2.1) *admet une unique solution faible.*

Démonstration. Soit $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ l'opérateur défini par

$$\Gamma(x)(t) = T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, x(s)) ds.$$

Nous définissons une nouvelle norme $| x |_\alpha$ dans $\mathcal{C}$ par

$$| x |_\alpha = | \exp(\frac{-\theta(.)^\alpha}{\alpha}) x |,$$

avec

$$\theta = \frac{L \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})|}{\varepsilon - \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \sum_{i=1}^{p} | c_i |}.$$

Ensuite, pour tout $x, y \in \mathcal{C}$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) &= T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[g(y) - g(x)] \\ &\quad + \int_0^t s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[f(s, y(s)) - f(s, x(s))] ds. \end{aligned}$$

Alors, on en déduit que

$$\begin{aligned} \| \Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) \| \leq \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| [\exp(\frac{\theta t^\alpha}{\alpha}) \sum_{i=1}^{p} | c_i | \\ + L \int_0^t s^{\alpha-1} \exp(\theta \frac{s^\alpha}{\alpha}) ds] \, | y - x |_\alpha . \end{aligned}$$

Et par suite, on obtient

$$| \Gamma(y) - \Gamma(x) |_\alpha \leq \sup_{t\in[0,\tau]} |T(\frac{t^\alpha}{\alpha})| [\sum_{i=1}^{p} | c_i | + \frac{L}{\theta}] \, | y - x |_\alpha .$$

Ainsi, on trouve que

$$| \Gamma(y) - \Gamma(x) |_\alpha \leq \varepsilon \, | y - x |_\alpha .$$

Finalement, on conclut que Γ admet un unique point fixe dans $(\mathcal{C}, | \,.\, |_\alpha)$. □

2.3 Solution intégrale d'un problème de Cauchy avec un opérateur de Hille-Yosida

Dans cette section, nous allons étudier le concept de la solution intégrale dans le cas d'un opérateur à domaine non dense, par deux approches, appelées approche des semi-groupes intégrés et approche des semi-groupes d'extrapolation.

Nous supposons que (H_5) est vérifiée et A est un opérateur de Hille-Yosida.

Définition 2.4. *Une fonction $x \in \mathcal{C}$ est dite solution intégrale du problème de Cauchy* (2.1) *si*

$$\int_0^t s^{\alpha-1} x(s)ds \in D(A),\ t \in [0,\tau],$$

$$x(t) = x_0 + g(x) + A(\int_0^t s^{\alpha-1} x(s)ds) + \int_0^t s^{\alpha-1} f(s,x(s))ds,\ t \in [0,\tau].$$

Remarque 2.2. *Nous avons*

$$x(t) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon t^{1-\alpha}} s^{\alpha-1} x(s)ds \in \overline{D(A)}.$$

2.3.1 Étude de la solution intégrale par la méthode des semi-groupes intégrés

Notons par $(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe intégré généré par A et appliquons la transformation fractionnaire de Laplace à l'équation (2.1), on obtient

$$x(t) = \dot{S}(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s,x(s))ds.$$

D'après la remarque 1.7, on aura

$$x(t) = \dot{S}(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t s^{\alpha-1} \dot{S}(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) \lambda(\lambda I - A)^{-1} f(s,x(s))ds.$$

Théorème 2.8. *Supposons que* $(H_1)-(H_3)$ *et* (H_5) *sont vérifiées, si de plus*

$$(\frac{\tau^\alpha}{\alpha} ML + K) \sup_{t\in[0,\tau]} |\dot{S}(\frac{t^\alpha}{\alpha})| < 1,$$

alors le problème de Cauchy (2.1) *a une unique solution intégrale.*

Démonstration. Soit $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned}\Gamma(x)(t) &= \dot{S}(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] \\ &\quad + \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t s^{\alpha-1} \dot{S}(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) \lambda(\lambda I - A)^{-1} f(s,x(s))ds.\end{aligned}$$

Pour tout $x, y \in \mathcal{C}$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) &= \dot{S}(\frac{t^\alpha}{\alpha})[g(y) - g(x)] \\ &\quad + \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t s^{\alpha-1} \dot{S}(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) \lambda(\lambda I - A)^{-1} [f(s,y(s)) - f(s,x(s))]ds.\end{aligned}$$

Donc, on en déduit que

$$\| \Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) \| \leq (\frac{\tau^\alpha}{\alpha} ML + K) \sup_{t\in[0,\tau]} |\dot{S}(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \, | y - x | .$$

Ainsi, on obtient

$$| \Gamma(y) - \Gamma(x) | \leq (\frac{\tau^\alpha}{\alpha} LM + K) \sup_{t\in[0,\tau]} |\dot{S}(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \, | y - x | .$$

Et par suite, Γ admet un unique point fixe dans $\mathcal{C}$. □

Théorème 2.9. *Supposons que* $(\dot{S}(t))_{t>0}$ *est compact et les hypothèses* $(H_2)-(H_5)$ *sont satisfaites, si de plus*

$$K \sup_{t\in[0,\tau]} |\dot{S}(\frac{t^\alpha}{\alpha})| < 1,$$

alors le problème de Cauchy (2.1) *a ou moins une solution intégrale.*

Démonstration. On peut utiliser les mêmes techniques de la preuve du théorème 2.2. □

2.3.2 Étude de la solution intégrale par la méthode des semi-groupes d'extrapolation

Notons par $(T_0(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe généré par A_0 et appliquons la transformation fractionnaire de Laplace pour l'équation (2.1), on obtient

$$x(t) = T_0(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1} T_{-1}(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, x(s)) ds.$$

Par la remarque 1.7, on aura

$$x(t) = T_0(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t s^{\alpha-1} T_0(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) \lambda(\lambda I - A)^{-1} f(s, x(s)) ds.$$

Théorème 2.10. *Supposons que* $(H_1)-(H_3)$ *et* (H_5) *sont vérifiées, si de plus*

$$(\frac{\tau^\alpha}{\alpha} ML + K) \sup_{t\in[0,\tau]} |T_0(\frac{t^\alpha}{\alpha})| < 1,$$

alors le problème de Cauchy (2.1) *a une unique solution intégrale.*

Démonstration. Soit $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned}\Gamma(x)(t) &= T_0(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] \\ &\quad + \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t s^{\alpha-1} T_0(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) \lambda(\lambda I - A)^{-1} f(s, x(s)) ds.\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $x, y \in \mathcal{C}$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) &= T_0(\frac{t^\alpha}{\alpha})[g(y) - g(x)] \\ &\quad + \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t s^{\alpha-1} T_0(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) \lambda(\lambda I - A)^{-1} [f(s, y(s)) - f(s, x(s))] ds.\end{aligned}$$

Donc, on en déduit que

$$\| \Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) \| \leq (\frac{\tau^\alpha}{\alpha} ML + K) \sup_{t\in[0,\tau]} |T_0(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \, | y - x |_\tau .$$

Ainsi, on obtient

$$| \Gamma(y) - \Gamma(x) | \leq (\frac{\tau^\alpha}{\alpha} LM + K) \sup_{t\in[0,\tau]} |T_0(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \, | y - x | .$$

Et par suite, Γ admet un unique point fixe dans $\mathcal{C}$. □

Théorème 2.11. *Supposons que* $(T_0(t))_{t>0}$ *est compact et les hypothèses* $(H_2)-(H_5)$ *sont satisfaites, si de plus*

$$K \sup_{t\in[0,\tau]} |\dot{S}(\frac{t^\alpha}{\alpha})| < 1,$$

alors le problème de Cauchy (2.1) *a ou moins une solution intégrale.*

Démonstration. On peut utiliser les mêmes techniques de la preuve du théorème 2.2. □

2.4 Application

Considérons l'équation fractionnaire non locale de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{\frac{1}{2}} u(t,x)}{\partial t^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + a(t)u(t,x), & (t,x) \in]0,1[\times]0,\pi[, \\ \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in [0,1], \\ \\ u(s,x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} c_i u(t_i,x), & x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{2.2}$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$, $0 < t_1 < ... < t_p < 1$, $c_1,...,c_p$ sont des constantes réelles et $a : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que

$$2 \sup_{t\in[0,1]} (a(t)) + \sum_{i=1}^{p} | c_i |< 1.$$

Soit $X = C([0,\pi],\mathbb{R})$ et $A : X \longrightarrow X$ l'opérateur défini par

$$A = \frac{\partial(.)}{\partial x^2},$$

$$D(A) = \{u \in X, \;\; Au \in X \;\; et \;\; u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Nous avons, $\overline{D(A)} = \{u \in X, \;\; u(0) = u(\pi) = 0\} \neq X$ et $| (\lambda I - A)^{-1} |\leq \frac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda \in \rho(A) =]0,+\infty[$ ([48]). Alors, A est un opérateur de Hille-Yosida. De plus, la part A_0 de A génère un semi-groupe fortement continu $(T_0(t))_{t\geq 0}$ dans $\overline{D(A)}$ et $| T_0(t) |\leq 1$.

Posons $v(t)(x) = u(t,x)$, $f(t,\theta) = a(t)\theta$ et $g(v) = \sum_{i=1}^{p} c_i u(t_i,.)$. Alors, (2.2) peut s'écrire comme suit

$$\begin{cases} \dfrac{d^{\frac{1}{2}} v(t)}{dt^{\frac{1}{2}}} = Av(t) + f(t,v(t)), & t \in]0,1[, \\ \\ v(0) = g(v). & . \end{cases} \tag{2.3}$$

Proposition 2.2. *Le problème de Cauchy* (2.3) *admet une unique solution intégrale.*

Démonstration. On peut utiliser le théorème (2.10). □

CHAPITRE

3

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES NON LOCALES DU SECOND ORDRE

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude du problème de Cauchy pour les équations différentielles fractionnaires non locales du second ordre.

3.1 Solution faible d'un problème de Cauchy avec un opérateur qui génère une famille cosine fortement continue

Dans cette section, on s'intéresse aux résultats d'existence, d'unicité et la dépendance continue par rapport aux données initiales de la solution faible pour le problème de Cauchy $(3.1)-(3.2)$ suivant :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = Ax(t) + F(t, x(t), \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}), \tag{3.1}$$

$$x(0) = x_0 + G(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}), \quad \frac{d^\alpha x(0)}{dt^\alpha} = x_1 + H(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}), \tag{3.2}$$

avec $0 < \tau$, $0 < t \leq \tau$, $\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}$ est la dérivée fractionnaire conforme d'ordre $\alpha \in (0,1)$, $(X, \|\,.\,\|)$ est un espace de Banach, $x_0, x_1 \in X$, $A : X \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'une famille cosine $((C(t))_{t\in\mathbb{R}}, (S(t))_{t\in\mathbb{R}})$, $\mathcal{C}$ est l'espace de Banach des fonctions continues de $[0,\tau]$ à valeurs dans X muni de la norme $\mid x \mid = \sup\limits_{t\in[0,\tau]} \| x(t) \|$, C^α est l'espace de Banach des fonctions continûment $(\alpha)-$différentiables de $[0,\tau]$ à valeurs dans X muni de la norme $\mid x \mid_\alpha = \mid x \mid + \mid \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} \mid$, $F : [0,\tau] \times X \times X \longrightarrow X$, $G : \mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C} \longrightarrow X$ et $H : \mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C} \longrightarrow X$ sont des fonctions satisfaisant certaines hypothèses. Avant de présenter nos résultats, nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H_1) ils existent deux constantes $L_1 > 0$ et $L_2 > 0$ telle que

$\| F(t,y,v) - F(t,x,u) \| \leq L_1 \| y - x \| + L_2 \| v - u \|$, pour tout $x, y, u, v \in X$ et $t \in [0,\tau]$,

(H_2) la fonction $F(.,x,u) : [0,\tau] \longrightarrow X$ est continue, pour tout $x, u \in X$,

(H_3) ils existent deux constantes $L_3 > 0$ et $L_4 > 0$ telle que

$\| G(y,v) - G(x,u) \| \leq L_3 \mid y - x \mid + L_4 \mid v - u \mid$, pour tout $x, y \in \mathcal{C}$ et $u, v \in \mathcal{C}^\alpha$,

(H_4) ils existent deux constantes $L_5 > 0$ et $L_6 > 0$ telle que

$\| H(y,v) - H(x,u) \| \leq L_5 \mid y - x \mid + L_6 \mid v - u \mid$, pour tout $x, y \in \mathcal{C}^\alpha$ et $u, v \in \mathcal{C}$,

(H_5) la fonctions $t \longmapsto C(t)(x_0 + G(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}))$ est continûment différentiable, pour tout $x \in \mathcal{C}^\alpha$,

(H_6) la fonction $F(t,.,.) : X \times X \longrightarrow X$ est continue et pour tout $r > 0$ il existe une fonction $\mu_r \in L^\infty([0,\tau], \mathbb{R}^+)$ telle que $\sup\limits_{\|x\|+\|y\| \leq r} \| F(t,x,y) \| \leq \mu_r(t)$, pour tout $t \in [0,\tau]$.

Ensuite, nous introduisons aussi les notations suivantes :

$$\Theta_1 := L_3 (\sup_{t\in[0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|) + (L_5 + L_1 \frac{\tau^\alpha}{\alpha})(\sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|),$$

$$\Theta_2 := L_4 (\sup_{t\in[0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|) + (L_6 + L_2 \frac{\tau^\alpha}{\alpha})(\sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|)),$$

$$\theta_1 := L_3 (\sup_{t\in[0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|) + L_5 (\sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|),$$

$$\theta_2 := L_4 (\sup_{t\in[0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|) + L_6 (\sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|).$$

3.1.1 Existence et unicité de la solution faible

Tout d'abord, appliquons la transformation fractionnaire de Laplace à l'équation (3.1), on aura

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha(x(t))(\lambda) = \lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}[x_0 + G(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] + (\lambda^2 I - A)^{-1}[x_1 + H(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] \\ + (\lambda^2 I - A)^{-1} \mathcal{L}_\alpha(F(t, x(t), \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}))(\lambda).\end{aligned}$$

Par l'inversion de la transformation fractionnaire de Laplace, on obtient la formule de Duhamel suivante :

$$\begin{aligned}x(t) = C(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + G(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] + S(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_1 + H(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] \\ + \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) F(s, x(s), \frac{d^\alpha x(s)}{dt^\alpha}) ds.\end{aligned}$$

Nous remarquons que pour $\alpha = 1$, nous retrouvons la formule de Duhamel classique [27, 69]. Ainsi, nous proposons la définition suivante :

Définition 3.1. *Une fonction* $x \in C^\alpha$ *est dite solution faible du problème de Cauchy* $(3.1)-(3.2)$, *si*

$$\begin{aligned} x(t) &= C(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + G(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] + S(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_1 + H(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] \\ &+ \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) F(s, x(s), \frac{d^\alpha x(s)}{dt^\alpha}) ds, \ t \in [0, \tau]. \end{aligned}$$

Théorème 3.1. *Supposons que* $(H_1)-(H_5)$ *sont vérifiées, si de plus*

$$\max(\Theta_1, \Theta_2) < 1,$$

alors le problème de Cauchy $(3.1)-(3.2)$ *admet une unique solution faible.*

Démonstration. On définit l'opérateur $\Gamma : C^\alpha \longrightarrow C^\alpha$ par

$$\begin{aligned} \Gamma(x)(t) &= C(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + G(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] + S(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_1 + H(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] \\ &+ \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) F(s, x(s), \frac{d^\alpha x(s)}{dt^\alpha}) ds. \end{aligned}$$

Soient $x, y \in C^\alpha$ on a

$$\begin{aligned} \Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) &= C(\frac{t^\alpha}{\alpha})[G(y, \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}) - G(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] + S(\frac{t^\alpha}{\alpha})[H(y, \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}) - H(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] \\ &+ \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[F(s, y(s), \frac{d^\alpha y(s)}{dt^\alpha}) - F(s, x(s), \frac{d^\alpha x(s)}{dt^\alpha})] ds. \end{aligned}$$

Donc, on en déduit que

$$\begin{aligned} \| \Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) \| &\leq [L_3 \sup_{t \in [0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + (L_5 + L_1 \frac{\tau^\alpha}{\alpha}) \sup_{t \in [0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|] \mid y - x \mid \\ &+ [L_4 \sup_{t \in [0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + (L_6 + L_2 \frac{\tau^\alpha}{\alpha}) \sup_{t \in [0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|] \mid \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} - \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} \mid . \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}[\Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t)] &= AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})[G(y, \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}) - G(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] + C(\frac{t^\alpha}{\alpha})[H(y, \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}) - H(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] \\ &+ \int_0^t s^{\alpha-1} C(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[F(s, y(s), \frac{d^\alpha y(s)}{dt^\alpha}) - F(s, x(s), \frac{d^\alpha x(s)}{dt^\alpha})] ds. \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \| \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}[\Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t)] \| &\leq [L_3 \sup_{t \in [0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + (L_5 + L_1 \frac{\tau^\alpha}{\alpha}) \sup_{t \in [0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|] \mid y - x \mid \\ &+ [L_4 \sup_{t \in [0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + (L_6 + L_2 \frac{\tau^\alpha}{\alpha}) \sup_{t \in [0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|] \mid \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} - \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} \mid . \end{aligned}$$

Et par suite, on aura

$$\mid \Gamma(y) - \Gamma(x) \mid_\alpha \leq \max(\Theta_1, \Theta_2) \mid y - x \mid_\alpha .$$

D'où, Γ admet un unique point fixe dans C^α, qui est la solution faible du problème de Cauchy $(3.1)-(3.2)$. □

La compacité de $(S(t))_{t>0}$ nous permet d'affaiblir l'hypothèse (H_1) et la condition de contraction donnée dans le théorème (3.1), ainsi nous aurons le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.2. *Supposons que* $(S(t))_{t>0}$ *est compact et* $(H_2)-(H_6)$ *sont vérifiées, si de plus*

$$\max(\theta_1, \theta_2) < 1,$$

alors le problème de Cauchy $(3.1)-(3.2)$ *admet au moins une solution faible.*

Démonstration. On pose

$$\begin{aligned} r_0 =& \Big(\sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})|\Big)[\| x_0 \| + \| G(0,0) \|] \\ &+ \Big(\sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|\Big)[\| x_1 \| + \| H(0,0) \| + \frac{\tau^\alpha}{\alpha} \mid \mu \mid_{L^\infty([0,\tau],\mathbb{R}^+)}]. \end{aligned}$$

Soit $r \geq \frac{r_0}{1-\min(\theta_1,\theta_2)}$ et posons $B_r = \{x \in \mathcal{C}^\alpha, \quad \mid x \mid_\alpha \leq r\}$.
Ensuite, pour $x \in B_r$, on définit les deux opérateurs Γ_1 et Γ_2 par

$$\Gamma_1(x)(t) = C(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + G(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] + S(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_1 + H(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})],$$

$$\Gamma_2(x)(t) = \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) F(s, x(s), \frac{d^\alpha x(s)}{dt^\alpha}) ds.$$

Les hypothèses $(H_2)-(H_5)$ montrent que $\Gamma_1(x) + \Gamma_2(y) \in B_r$ pour tout x, $y \in B_r$ et Γ_1 est une contraction dans B_r. Alors, il reste à montrer que Γ_2 est continu et compact.

Continuité de Γ_2 :

Soit $(x_n) \subset B_r$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans B_r. Alors, par l'hypothèse (H_5), on aura

$$\| s^{\alpha-1}[F(s, x_n(s), \frac{d^\alpha x_n(s)}{dt^\alpha}) - F(s, x(s), \frac{d^\alpha x(s)}{dt^\alpha})] \| \leq 2\mu_r(s) s^{\alpha-1},$$

$$F(s, x_n(s), \frac{d^\alpha x_n(s)}{dt^\alpha}) \longrightarrow F(s, x(s), \frac{d^\alpha x(s)}{dt^\alpha}) \quad quand \quad n \longrightarrow +\infty.$$

D'autre part, on a

$$\Gamma_2(x_n)(t) - \Gamma_2(x)(t) = \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[F(s, x_n(s), \frac{d^\alpha x_n(s)}{dt^\alpha}) - F(s, x(s), \frac{d^\alpha x(s)}{dt^\alpha})] ds.$$

Donc, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mid \Gamma_2(x_n) - \Gamma_2(x) \mid_\alpha \leq& \Big(\sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|\Big) \\ & \times \int_0^\tau s^{\alpha-1} \| F(s, x_n(s), \frac{d^\alpha x_n(s)}{dt^\alpha}) - F(s, x(s), \frac{d^\alpha x(s)}{dt^\alpha}) \| ds. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mid \Gamma_2(x_n) - \Gamma_2(x) \mid_\alpha = 0.$$

Compacité de Γ_2 :

Étape 1 : Montrons que $\{\Gamma_2(x)(t), \;\; x \in B_r\}$ est relativement compact dans X.

Fixons $t \in]0,\tau[$ et prenons $\varepsilon \in]0,t[$. Ensuite, pour $x \in B_r$, on définit l'opérateur Γ_2^{ε} par

$$\Gamma_2^{\varepsilon}(x)(t) = \int_0^{(t^{\alpha}-\varepsilon^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}} s^{\alpha-1} S(\frac{t^{\alpha}-s^{\alpha}}{\alpha}) F(s,x(s),\frac{d^{\alpha}x(s)}{dt^{\alpha}}) ds.$$

Comme $(S(t))_{t>0}$ est compact, alors $\{\Gamma_2^{\varepsilon}(x)(t), \;\; x \in B_r\}$ est relativement compact dans X.

D'après l'hypothèse (H_6), on aura

$$\| \Gamma_2^{\varepsilon}(x)(t) - \Gamma_2(x)(t) \| \leq | \mu_r |_{L^{\infty}([0,\tau],\mathbb{R}^+)} (\sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})|) \frac{\varepsilon^{\alpha}}{\alpha}.$$

Alors, on en déduit que $\{\Gamma_2(x)(t), \;\; x \in B_r\}$ est relativement compact dans X.

Comme $\{\Gamma_2(x)(0), \;\; x \in B_r\}$ est compact. Alors, $\{\Gamma_2(x)(t), \;\; x \in B_r\}$ est relativement compact dans X pour tout $t \in [0,\tau]$.

Étape 2 : Montrons que $\Gamma_2(B_r)$ est équicontinu.

Soit $t_1, t_2 \in]0,\tau]$ tel que $t_1 < t_2$. On a

$$\begin{aligned}\Gamma_2(x)(t_2) - \Gamma_2(x)(t_1) = & \int_0^{t_1} s^{\alpha-1} [S(\frac{t_2^{\alpha}-s^{\alpha}}{\alpha}) - S(\frac{t_1^{\alpha}-s^{\alpha}}{\alpha})] F(s,x(s),\frac{d^{\alpha}x(s)}{dt^{\alpha}}) ds \\ & + \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1} S(\frac{t_2^{\alpha}-s^{\alpha}}{\alpha}) F(s,x(s),\frac{d^{\alpha}x(s)}{dt^{\alpha}}) ds.\end{aligned}$$

Alors, on en déduit que

$$\| \Gamma_2(x)(t_2) - \Gamma_2(x)(t_1) \| \leq | \mu_r |_{L^{\infty}([0,\tau],\mathbb{R}^+)} [\frac{K}{\omega^2}(\exp(\frac{\omega t_2^{\alpha}}{\alpha}) - \exp(\frac{\omega t_1^{\alpha}}{\alpha})) + \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})| (\frac{t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}}{\alpha})].$$

Pour $\omega = 0$, on aura

$$\| \Gamma_2(x)(t_2) - \Gamma_2(x)(t_1) \| \leq | \mu_r |_{L^{\infty}([0,\tau],\mathbb{R}^+)} (\frac{K t_1^{\alpha}}{\alpha} + \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})|)[\frac{t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}}{\alpha}].$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\frac{d^{\alpha}\Gamma_2(x)(t_2)}{dt^{\alpha}} - \frac{d^{\alpha}\Gamma_2(x)(t_1)}{dt^{\alpha}} = & \int_0^{t_1} s^{\alpha-1} [C(\frac{t_2^{\alpha}-s^{\alpha}}{\alpha}) - C(\frac{t_1^{\alpha}-s^{\alpha}}{\alpha})] F(s,x(s),\frac{d^{\alpha}x(s)}{dt^{\alpha}}) ds \\ & + \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1} C(\frac{t_2^{\alpha}-s^{\alpha}}{\alpha}) F(s,x(s),\frac{d^{\alpha}x(s)}{dt^{\alpha}}) ds.\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\| \frac{d^{\alpha}\Gamma_2(x)(t_2)}{dt^{\alpha}} - \frac{d^{\alpha}\Gamma_2(x)(t_1)}{dt^{\alpha}} \| \leq \frac{\tau^{\alpha}}{\alpha} | \mu_r |_{L^{\infty}([0,\tau],\mathbb{R}^+)} [\sup_{t\in[0,\tau]} |AS(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})|) + \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})|)][\frac{t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}}{\alpha}].$$

Ainsi, on en déduit que $\Gamma_2(x)$, $x \in B_r$ sont équicontinus.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, on déduit que Γ_2 est compact.

Finalement, le théorème du point fixe de Krasnoselskii nous donne un point fixe de $\Gamma_1 + \Gamma_2$ dans $\mathcal{C}^{\alpha}$. □

3.1.2 Dépendance continue de la solution faible par rapport aux données initiales

Théorème 3.3. *On suppose les mêmes hypothèses du théorème* (3.1).

Soient $x_0, y_0, x_1, y_1 \in X$ *et on note par* x, y *les deux solutions faibles associées à* (x_0, x_1) *et* (y_0, y_1)

respectivement. Alors,

$$| y - x |_\alpha \leq \frac{\sup\limits_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup\limits_{t\in[0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})|) \| y_0 - x_0 \| + (\sup\limits_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha}) + \sup\limits_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha}))| \| y_1 - x_1 \|}{1 - \max(\Theta_1, \Theta_2)}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} y(t) - x(t) = C(\frac{t^\alpha}{\alpha})&[y_0 - x_0 + G(y, \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}) - G(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] \\ &+ S(\frac{t^\alpha}{\alpha})[y_1 - x_1 + H(y, \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}) - H(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] \\ &+ \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[F(s, y(s), \frac{d^\alpha y(s)}{dt^\alpha}) - F(s, x(s), \frac{d^\alpha x(s)}{dt^\alpha})]ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}[\Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t)] = AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})&[y_0 - x_0 + G(y, \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}) - G(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] \\ &+ C(\frac{t^\alpha}{\alpha})[y_1 - x_1 + H(y, \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}) - H(x, \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})] \\ &+ \int_0^t s^{\alpha-1} C(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[F(s, y(s), \frac{d^\alpha y(s)}{dt^\alpha}) - F(s, x(s), \frac{d^\alpha x(s)}{dt^\alpha})]ds. \end{aligned}$$

Alors, on en déduit que

$$\begin{aligned} \| \Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) \| \leq &[L_3 \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + (L_5 + L_1 \frac{\tau^\alpha}{\alpha}) \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|] \, | y - x | \\ &+ [L_4 \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + (L_6 + L_2 \frac{\tau^\alpha}{\alpha}) \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|] \, | \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} - \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} | \\ &+ \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \| y_0 - x_0 \| + \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \| y_1 - x_1 \|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(\Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t)) \| \leq &[L_3 \sup_{t\in[0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + (L_5 + L_1 \frac{\tau^\alpha}{\alpha}) \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|] \, | y - x | \\ &+ [L_4 \sup_{t\in[0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + (L_6 + L_2 \frac{\tau^\alpha}{\alpha}) \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|] \, | \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} - \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} | \\ &+ \sup_{t\in[0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \| y_0 - x_0 \| + \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \| y_1 - x_1 \|. \end{aligned}$$

Ainsi, on aura

$$\begin{aligned} | y - x |_\alpha \leq \Theta_1 | y - x | + \Theta_2 | \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} - \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} | \\ + (\sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup_{t\in[0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})|) \| y_0 - x_0 \| + (\sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha}) + \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha}))| \| y_1 - x_1 \|. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$| y - x |_\alpha \leq \frac{\sup\limits_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + \sup\limits_{t\in[0,\tau]} |AS(\frac{t^\alpha}{\alpha})|) \| y_0 - x_0 \| + (\sup\limits_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha}) + \sup\limits_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha}))| \| y_1 - x_1 \|}{1 - \max(\Theta_1, \Theta_2)}.$$

□

3.1.3 Étude d'un cas spécial d'équations du second ordre

Dans cette section, nous considérons le problème de Cauchy de la forme suivante :

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}} = Ax(t) + f(t, x(t)), \tag{3.3}$$

$$x(0) = x_0 + g(x), \quad \frac{d^{\alpha}x(0)}{dt^{\alpha}} = x_1 + h(x), \tag{3.4}$$

avec $f : [0,\tau] \times X \longrightarrow X$, $g : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ et $h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ sont des fonctions données.
Ensuite, nous introduisons les hypothèses suivantes :

(h_1) il existe une constante $l_1 > 0$ telle que $\| f(t,y) - f(t,x) \| \leq l_1 \| y - x \|$, pour tout $x, y \in X$ et $t \in [0,\tau]$,

(h_2) la fonction $f(.,x) : [0,\tau] \longrightarrow X$ est continue, pour tout $x \in X$,

(h_3) il existe une constante $l_2 > 0$ telle que $\| g(y) - g(x) \| \leq l_2 \mid y - x \mid$, pour tout $x, y \in \mathcal{C}$,

(h_4) il existe une constante $l_3 > 0$ telle $\| h(y) - h(x) \| \leq l_3 \mid y - x \mid$, pour tout $x, y \in \mathcal{C}$,

(h_5) la fonction $f(t,.) : X \longrightarrow X$ est continue et pour tout $r > 0$ il existe une fonction $\mu_r \in L^{\infty}([0,\tau], \mathbb{R}^+)$ telle que $\sup_{\|x\| \leq r} \| f(t,x) \| \leq \mu_r(t)$, pour tout $t \in [0,\tau]$.

Définition 3.2. *On dit que $x \in \mathcal{C}$ est une solution faible du problème de Cauchy* $(3.3)-(3.4)$, *si*

$$x(t) = C(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})[x_0 + g(x)] + S(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})[x_1 + h(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^{\alpha} - s^{\alpha}}{\alpha}) f(s, x(s)) ds, \ t \in [0,\tau].$$

Théorème 3.4. *Supposons que $(h_1) - (h_4)$ sont vérifiées, si de plus*

$$l_2 \sup_{t \in [0,\tau]} |C(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})| + (l_3 + l_1 \frac{\tau^{\alpha}}{\alpha}) \sup_{t \in [0,\tau]} |S(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})| < 1,$$

alors le problème de Cauchy $(3.3)-(3.4)$ *admet une unique solution faible.*

Démonstration. Soit $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ l'opérateur défini par

$$\Gamma(x)(t) = C(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})[x_0 + g(x)] + S(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})[x_1 + h(x)] + \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^{\alpha} - s^{\alpha}}{\alpha}) f(s, x(s)) ds.$$

Soient $x, y \in \mathcal{C}$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) &= C(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})[g(y) - g(x)] + S(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})[h(y) - h(x)] \\ &\quad + \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^{\alpha} - s^{\alpha}}{\alpha})[f(s, y(s)) - f(s, x(s))] ds.\end{aligned}$$

Donc, on en déduit que

$$\| \Gamma(y)(t) - \Gamma(x)(t) \| \leq [l_2 \sup_{t \in [0,\tau]} |C(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})| + (l_3 + l_1 \frac{\tau^{\alpha}}{\alpha}) \sup_{t \in [0,\tau]} |S(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})|] \mid y - x \mid.$$

Ainsi, on obtient

$$\mid \Gamma(y) - \Gamma(x) \mid \leq [l_2 \sup_{t \in [0,\tau]} |C(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})| + (l_3 + l_1 \frac{\tau^{\alpha}}{\alpha}) \sup_{t \in [0,\tau]} |S(\frac{t^{\alpha}}{\alpha})|] \mid y - x \mid.$$

Alors, on en déduit que Γ admet un unique point fixe dans $\mathcal{C}$. □

Théorème 3.5. *Supposons que* $(S(t))_{t>0}$ *est compact et* $(h_2)-(h_5)$ *sont vérifiées, si de plus*

$$l_2 \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + l_3 \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})| < 1,$$

alors le problème de Cauchy $(3.3)-(3.4)$ *admet au moins une solution faible.*

Démonstration. Soit r un rayon tel que

$$r \geq \frac{\sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\| x_0 \| + \| g(0) \|] + \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\frac{\tau^\alpha}{\alpha} \mid \mu_r \mid_{L^\infty([0,\tau],\mathbb{R}^+)} + \| x_1 \| + \| h(0) \|]}{1 - l_2 \sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| - l_3 \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|}.$$

Ensuite, pour $x \in B_r := \{x \in \mathcal{C}, \ \ | x | \leq r\}$, on définit les deux opérateurs Γ_1 et Γ_2 par

$$\Gamma_1(x)(t) = C(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_0 + g(x)] + S(\frac{t^\alpha}{\alpha})[x_1 + h(x)],$$

$$\Gamma_2(x)(t) = \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, x(s)) ds.$$

En utilisant les hypothèses $(h_2)-(h_5)$, on obtient $\Gamma_1(x)+\Gamma_2(y) \in B_r$ pour tout x, $y \in B_r$ et Γ_1 est une contraction dans B_r. Alors, il reste à montrer que Γ_2 est continu et compact.

Continuité de Γ_2 **:**

Soit $(x_n) \subset B_r$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans B_r. Alors, par l'hypothèse (h_5), on aura

$$\| s^{\alpha-1}[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))] \| \leq 2\mu(s) s^{\alpha-1},$$

$$f(s, x_n(s) \longrightarrow f(s, x(s)) \ \ quand \ \ n \longrightarrow +\infty.$$

D'autre part, on a

$$\Gamma_2(x_n)(t) - \Gamma_2(x)(t) = \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))] ds, \ t \in [0, \tau].$$

Alors, on en déduit que

$$| \Gamma_2(x_n) - \Gamma_2(x) | \leq \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \int_0^\tau s^{\alpha-1}[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))] ds.$$

Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} | \Gamma_2(x_n) - \Gamma_2(x) | = 0.$$

Compacité de Γ_2 **:**

Étape 1 : Montrons que $\{\Gamma_2(x)(t), \ x \in B_r\}$ est relativement compact dans X.

Pour $t \in]0, \tau[$ fixé prenons $\varepsilon \in]0, t[$, $x \in B_r$ et considérons l'opérateur Γ_2^ε défini par

$$\Gamma_2^\varepsilon(x)(t) = \int_0^{(t^\alpha - \varepsilon^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, x(s)) ds.$$

Comme $(S(t))_{t>0}$ est compact, alors $\{\Gamma_2^\varepsilon(x)(t), \ x \in B_r\}$ est relativement compact dans X.

D'après l'hypothèse (H_5), on aura

$$\| \Gamma_2^\varepsilon(x)(t) - \Gamma_2(x)(t) \| \leq \mid \mu_r \mid_{L^\infty([0,\tau],\mathbb{R}^+)} \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}.$$

Alors, on en déduit que $\{\Gamma_2(x)(t),\ x \in B_r\}$ est relativement compact dans X.

Comme $\{\Gamma_2(x)(0),\ x \in B_r\}$ est compact, alors $\{\Gamma_2(x)(t),\ x \in B_r\}$ est relativement compact dans X pour tout $t \in [0,\tau]$.

Étape 2 : Montrons que $\Gamma_2(B_r)$ est équicontinu.

Soit $t_1, t_2 \in]0,\tau]$ tel que $t_1 < t_2$. On a

$$\begin{aligned}\Gamma_2(x)(t_2) - \Gamma_2(x)(t_1) &= \int_0^{t_1} s^{\alpha-1}[S(\frac{t_2^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) - S(\frac{t_1^\alpha - s^\alpha}{\alpha})]f(s,x(s))ds \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1} S(\frac{t_2^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s,x(s))ds.\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\| \Gamma_2(x)(t_2) - \Gamma_2(x)(t_1) \| \leq | \mu_r |_{L^\infty([0,\tau],\mathbb{R}^+)} [\frac{K}{\omega^2}(\exp(\frac{\omega t_2^\alpha}{\alpha}) - \exp(\frac{\omega t_1^\alpha}{\alpha})) + \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|(\frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha})].$$

Et par suite $\Gamma_2(x)$, $x \in B_\tau$ sont équicontinus.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, on déduit que Γ_2 est compact.

Finalement, le théorème du point fixe de Krasnoselskii nous donne l'existence d'un point fixe de $\Gamma_1 + \Gamma_2$ dans $\mathcal{C}$, qui est une solution faible du problème de Cauchy $(3.3) - (3.4)$. □

Maintenant, nous examinons la dépendance continue de la solution faible par rapport aux données initiales.

Théorème 3.6. *On suppose les mêmes hypothèses du théorème* (3.4).

Soient x_0, y_0, x_1, $y_1 \in X$ et notons par x, y les deux solutions faibles associées à (x_0,x_1) et (y_0,y_1) respectivement. Alors,

$$| y - x | \leq \frac{\alpha}{\alpha - L_1\tau^\alpha - \alpha L_2 - \alpha L_3}[\sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \, \| y_0 - x_0 \| + \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \, \| y_1 - x_1 \|].$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}y(t) - x(t) &= C(\frac{t^\alpha}{\alpha})[y_0 - x_0 + g(y) - g(x)] + S(\frac{t^\alpha}{\alpha})[y_1 - x_1 + h(y) - h(x)] \\ &+ \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[f(s,y(s)) - f(s,x(s))]ds.\end{aligned}$$

Alors, on en déduit

$$\begin{aligned}\| y(t) - x(t) \| \leq &\sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\| y_0 - x_0 \| + L_2 | y - x |] \\ &+ \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\| y_1 - x_1 \| + (L_3 + \frac{L_1\tau^\alpha}{\alpha}) | y - x |].\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}| y - x | \leq &\sup_{t\in[0,\tau]} |C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\| y_0 - x_0 \| + L_2 | y - x |] \\ &+ \sup_{t\in[0,\tau]} |S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\| y_1 - x_1 \| + (L_3 + \frac{L_1\tau^\alpha}{\alpha}) | y - x |].\end{aligned}$$

Et par suite, on aura

$$|y-x| \leq \frac{\alpha}{\alpha - L_1\tau^\alpha - \alpha L_2 - \alpha L_3}[\sup_{t\in[0,\tau]}|C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \| y_0 - x_0 \| + \sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \| y_1 - x_1 \|].$$

□

Nous allons proposer un deuxième résultat de la dépendance continue de la solution faible par rapport aux données initiales, qui est meilleur que le celui donné dans le théorème (3.6).

Théorème 3.7. *On suppose les mêmes hypothèses du théorème* (3.4)*.*
Soient x_0, y_0, x_1, $y_1 \in X$ et notons par x, y les deux solutions faibles associées à (x_0, x_1) et (y_0, y_1) respectivement. Si de plus

$$l_2 \sup_{t\in[0,\tau]}|C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + l_3 \sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|]\exp(\frac{l_1\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|) < 1.$$

Alors, nous avons

$$|y-x| \leq \Big[\frac{\sup_{t\in[0,\tau]}|C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \| y_0 - x_0 \| + \sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \| y_1 - x_1 \|}{1 - [l_2 \sup_{t\in[0,\tau]}|C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + l_3 \sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|]\exp(\frac{l_1\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|)}\Big]\exp(\frac{l_1\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} y(t) - x(t) &= C(\frac{t^\alpha}{\alpha})[y_0 - x_0 + g(y) - g(x)] + S(\frac{t^\alpha}{\alpha})[y_1 - x_1 + h(y) - h(x)] \\ &+ \int_0^t s^{\alpha-1} S(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})[f(s, y(s)) - f(s, x(s))]ds. \end{aligned}$$

Alors, on en déduit que

$$\begin{aligned} \| y(t) - x(t) \| \leq & \sup_{t\in[0,\tau]}|C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\| y_0 - x_0 \| + l_2 |y-x|] \\ & + \sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\| y_1 - x_1 \| + l_3 |y-x|] \\ & + l_1 \sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \int_0^t s^{\alpha-1} \| y(s) - x(s) \| ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned} |y-x| \leq & \Big[\sup_{t\in[0,\tau]}|C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\| y_0 - x_0 \| + l_2 |y-x|] + \sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|[\| y_1 - x_1 \| + l_3 |y-x|]\Big] \\ & \times \exp(\frac{l_1\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|). \end{aligned}$$

Ainsi, on aura

$$|y-x| \leq \Big[\frac{\sup_{t\in[0,\tau]}|C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \| y_0 - x_0 \| + \sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})| \| y_1 - x_1 \|}{1 - [l_2 \sup_{t\in[0,\tau]}|C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| + l_3 \sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|]\exp(\frac{l_1\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|)}\Big]\exp(\frac{l_1\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|).$$

□

Remarque 3.1. *Posons*

$$C_1 = \frac{\exp(\frac{l_1\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|)}{1-[l_2\sup_{t\in[0,\tau]}|C(\frac{t^\alpha}{\alpha})|+l_3\sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|]\exp(\frac{l_1\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|)},$$

$$C_2 = \frac{\alpha}{\alpha - l_1\tau^\alpha\sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})| - \alpha l_2\sup_{t\in[0,\tau]}|C(\frac{t^\alpha}{\alpha})| - \alpha l_3\sup_{t\in[0,\tau]}|S(\frac{t^\alpha}{\alpha})|}.$$

Comme $C_1 < C_2$, alors le résultat du théorème (3.7) *est meilleur que celui du théorème* (3.6).

3.2 Solution fondamentale implicite de deux équations aux dérivées partielles fractionnaires non locales

Notre objectif dans cette section est de donner la solution fondamentale implicite pour les deux équations différentielles fractionnaires non locales suivantes :

$$au(t,\ell) + b\frac{\partial^\alpha u(t,\ell)}{\partial t^\alpha} + c\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}}}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t,\ell)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}} = \frac{\partial^2 u(t,\ell)}{\partial \ell^2}, \tag{3.5}$$

$$au(t,\ell) + b\frac{\partial^\alpha u(t,\ell)}{\partial t^\alpha} + c\frac{\partial^\beta u(t,\ell)}{\partial t^\beta} = \frac{\partial^2 u(t,\ell)}{\partial \ell^2}, \tag{3.6}$$

avec les conditions initiales non locales (3.7) et (3.8) respectivement

$$u(0,\ell) = \sum_{i=1}^{p}[a_i u(t_i,\ell) + b_i\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t_i,\ell)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}], \quad \frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(0,\ell)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}} = \sum_{i=1}^{p}[c_i u(t_i,\ell) + d_i\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t_i,\ell)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}], \tag{3.7}$$

$$u(0,\ell) = \sum_{i=1}^{p}[a_i u(t_i,\ell) + b_i\frac{\partial u(t_i,\ell)}{\partial t}], \quad \frac{\partial u(0,\ell)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{p}[c_i u(t_i,\ell) + d_i\frac{\partial u(t_i,\ell)}{\partial t}]. \tag{3.8}$$

Nous introduisons aussi les conditions aux limites non locales (3.9) et (3.10) respectivement

$$u(t,0) = \sum_{i=1}^{p}[r_i u(t,\ell_i) + s_i\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t,\ell_i)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}], \quad u(t,1) = \sum_{i=1}^{p}[\eta_i u(t,\ell_i) + \mu_i\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t,\ell_i)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}], \tag{3.9}$$

$$u(t,0) = \sum_{i=1}^{p}[r_i u(t,\ell_i) + s_i\frac{\partial u(t,\ell_i)}{\partial t}], \quad u(t,1) = \sum_{i=1}^{p}[\eta_i u(t,\ell_i) + \mu_i\frac{\partial u(t,\ell_i)}{\partial t}], \tag{3.10}$$

avec $0 < \ell < 1$, $0 < t < +\infty$, $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta < 2$, $0 < a$, $0 < b$, $0 < c$, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < +\infty$, $0 < \ell_1 < \ell_2 < ... < \ell_p < 1$, a_i, b_i, c_i, d_i, r_i, s_i, μ_i, η_i, sont des constantes réelles où $i = 1,...,p$, $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$, $\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}$ et $\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}$ sont des dérivées fractionnaires prises au sens de Caputo. Sans perdre de généralité, on peut supposer que

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \tag{3.11}$$

En effet, on peut considérer $v(t,\ell)=u(t,\ell)-u(t,0)-\ell(u(t,1)-u(t,0))$.

Nous allons chercher des solutions à variables séparées. Pour ce faire, on pose $u(t,\ell)=x(t)y(\ell)$, alors (3.5) et (3.6) deviennent respectivement comme suit :

$$ax(t)y(\ell)+by(\ell)\frac{\partial^{\alpha}x(t)}{\partial t^{\alpha}}+cy(\ell)\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}}}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}}x(t)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}=x(t)\frac{\partial^{2}y(\ell)}{\partial \ell^{2}}, \tag{3.12}$$

$$ax(t)y(\ell)+by(\ell)\frac{\partial^{\alpha}x(t)}{\partial t^{\alpha}}+cy(\ell)\frac{\partial^{\beta}x(t)}{\partial t^{\beta}}=x(t)\frac{\partial^{2}y(\ell)}{\partial \ell^{2}}. \tag{3.13}$$

Donc, il existe une constante λ^2 telles que

$$(a+\lambda^2)x(t)+b\frac{\partial^{\alpha}x(t)}{\partial t^{\alpha}}+c\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}}}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}}x(t)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}=0, \tag{3.14}$$

$$(a+\lambda^2)x(t)+b\frac{\partial^{\alpha}x(t)}{\partial t^{\alpha}}+c\frac{\partial^{\beta}x(t)}{\partial t^{\beta}}=0, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial^{2}y(\ell)}{\partial \ell^{2}}=-\lambda^2 y(\ell). \tag{3.16}$$

La solution de (3.16) est donnée par

$$y(\ell)=\eta\cos(\lambda\ell)+\mu\sin(\lambda\ell). \tag{3.17}$$

En utilisant la condition (3.11), on obtient $\lambda_n=n\pi$ et $y_n(\ell)=\sin(\lambda_n\ell)$.

Ensuite, on a

$$u(t,\ell)=\sum_{n=0}^{+\infty}y_n(\ell)x_n(t), \tag{3.18}$$

avec $x_n(t)$ est la solution de (3.19) et (3.20) respectivement

$$(a+\lambda_n^2)x_n(t)+b\frac{\partial^{\alpha}x_n(t)}{\partial t^{\alpha}}+c\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}}}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}}x_n(t)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}=0, \tag{3.19}$$

$$(a+\lambda_n^2)x_n(t)+b\frac{\partial^{\alpha}x_n(t)}{\partial t^{\alpha}}+c\frac{\partial^{\beta}x_n(t)}{\partial t^{\beta}}=0, \tag{3.20}$$

avec les conditions non locales suivantes respectivement

$$x_n(0)=2\int_0^1\sin(\lambda_n\sigma)u(0,\sigma)d\sigma,\quad \frac{d^{\frac{\beta}{2}}x_n(0)}{dt^{\frac{\beta}{2}}}=2\int_0^1\sin(\lambda_n\sigma)\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}}u(0,\sigma)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}d\sigma, \tag{3.21}$$

$$x_n(0)=2\int_0^1\sin(\lambda_n\sigma)u(0,\sigma)d\sigma,\quad \frac{dx_n(0)}{dt}=2\int_0^1\sin(\lambda_n\sigma)\frac{\partial u(0,\sigma)}{\partial t}d\sigma. \tag{3.22}$$

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation (3.19), on obtient

$$\mathcal{L}(x_n(t))(s)=\frac{bs^{\alpha-1}x_n(0)+cs^{\beta-1}x_n(0)+cs^{\frac{\beta}{2}-1}\frac{d^{\frac{\beta}{2}}x_n(0)}{dt^{\frac{\beta}{2}}}}{a+bs^{\alpha}+cs^{\beta}+\lambda_n^2}. \tag{3.23}$$

On peut écrire (3.23) comme suit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_n(t))(s) = bx_n(0)\int_0^{+\infty}[&\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(r(a+\lambda_n^2))^n s^{-(\alpha+2)n-1}}{n!}\\ &\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(br)^n s^{-2n-1}}{n!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(cr)^n s^{(\beta-\alpha-2)n-1}}{n!}]dr\\ &+cx_n(0)\int_0^{+\infty}[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(r(a+\lambda_n^2))^n s^{-(\beta+2)n-1}}{n!}\\ &\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(br)^n s^{(\alpha-\beta-2)n-1}}{n!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(cr)^n s^{-2n-1}}{n!}]dr\\ &+c\frac{d^{\frac{\beta}{2}}x_n(0)}{dt^{\frac{\beta}{2}}}\int_0^{+\infty}[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(r(a+\lambda_n^2))^n s^{-(\frac{\beta+4}{2})n-1}}{n!}\\ &\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(br)^n s^{\frac{2\alpha-\beta-4}{2}n-1}}{n!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(cr)^n s^{\frac{\beta-4}{2}n-1}}{n!}]dr.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Par l'inversion de la transformation de Laplace, on déduit que

$$\begin{aligned}x_n(t) = bx_n(0)\int_0^{+\infty}&[W_{(\alpha+2,1)}(-(a+\lambda_n^2)rt^{\alpha+2})\\ &*W_{(2,1)}(-brt^2)*W_{(\alpha-\beta+2,1)}(-crt^{\alpha-\beta+2}))]dr\\ &+cx_n(0)\int_0^{+\infty}[W_{(\beta+2,1)}(-(a+\lambda_n^2)rt^{\beta+2})\\ &*W_{(\beta-\alpha+2,1)}(-brt^{\beta-\alpha+2})*W_{(2,1)}(-crt^2)]dr\\ &+c\frac{d^{\frac{\beta}{2}}x_n(0)}{dt^{\frac{\beta}{2}}}\int_0^{+\infty}[W_{(\frac{\beta+4}{2},1)}(-(a+\lambda_n^2)rt^{\frac{\beta+4}{2}})\\ &*W_{(\frac{\beta-2\alpha+4}{2},1)}(-brt^{\frac{\beta-2\alpha+4}{2}})*W_{(\frac{4-\beta}{2},1)}(-crt^{\frac{4-\beta}{2}})]dr.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Finalement, on en déduit que la solution fondamentale implicite de (3.5) est donnée par (3.26)

$$\begin{aligned}
u(t,\ell) &= 2b\sum_{0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1 [W_{(\alpha+2,1)}(-(a+\lambda_n^2)rt^{\alpha+2}) \\
&\quad * (W_{(2,1)}(-brt^2) * W_{(\alpha-\beta+2,1)}(-crt^{\alpha-\beta+2})][a_i u(t_i,\sigma) + b_i \frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t_i,\sigma)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}]\sin(\lambda_n \ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma dr \\
&\quad + 2c\sum_{0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1 [W_{(\beta+2,1)}(-(a+\lambda_n^2)rt^{\beta+2}) \\
&\quad * W_{(\beta-\alpha+2,1)}(-brt^{\beta-\alpha+2}) * W_{(2,1)}(-crt^2))][a_i u(t_i,\sigma) + b_i \frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t_i,\sigma)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}]\sin(\lambda_n \ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma dr \\
&\quad + 2c\sum_{0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1 [(W_(\frac{\beta+4}{2},1)(-(a+\lambda_n^2)rt^{\frac{\beta+4}{2}}) \\
&\quad * W_{(\frac{\beta-2\alpha+4}{2},1)}(-brt^{\frac{\beta-2\alpha+4}{2}}) * W_{(\frac{4-\beta}{2},1)}(-crt^{\frac{4-\beta}{2}})][c_i u(t_i,\sigma) + d_i \frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(t_i,\sigma)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}}]\sin(\lambda_n \ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma dr.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

De même, on trouve la solution fondamentale implicite de (3.6) comme suit

$$\begin{aligned}
u(t,\ell) &= 2b\sum_{0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1 [W_{(\alpha+2,1)}(-(a+\lambda_n^2)rt^{\alpha+2}) \\
&\quad * W_{(2,1)}(-brt^2) * W_{(\alpha-\beta+2,1)}(-crt^{\alpha-\beta+2})][a_i u(t_i,\sigma) + b_i \frac{\partial u(t_i,\sigma)}{\partial t}]\sin(\lambda_n \ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma dr \\
&\quad + 2c\sum_{0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1 [(W_{(\beta+2,1)}(-(a+\lambda_n^2)rt^{\beta+2}) \\
&\quad * W_{(\beta-\alpha+2,1)}(-brt^{\beta-\alpha+2}) * (W_{(2,1)}(-crt^2)][a_i u(t_i,\sigma) + b_i \frac{\partial u(t_i,\sigma)}{\partial t}]\sin(\lambda_n \ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma dr \\
&\quad + 2c\sum_{0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1 [W_{(\beta+1,1)}(-(a+\lambda_n^2)rt^{\beta+1}) \\
&\quad * W_{(\beta-\alpha+1,1)}(-brt^{\beta-\alpha+1}) * W_{(1,1)}(-crt)][c_i u(t_i,\sigma) + d_i \frac{\partial u(t_i,\sigma)}{\partial t}]\sin(\lambda_n \ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma dr.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Remarque 3.2. *Si $\beta = 2\alpha$ et $b^2 < 4ac$, alors dans ce cas spécial, les solutions fondamentales* *implicites de* (3.5) *et* (3.6) *sont données respectivement par* (3.28) *et* (3.29)

$$u(t,\ell)=2b\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1[\frac{E_{(\alpha,1)}(z_nt^\alpha)-E_{(\alpha,1)}(\overline{z_n}t^\alpha)}{2ciIm(z_n)}][a_iu(t_i,\sigma)+b_i\frac{\partial u(t_i,\sigma)}{\partial t}]\sin(\lambda_n\ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma$$
$$+2\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1[\frac{E_{(\alpha,1-\alpha)}(z_nt^\alpha)-E_{(\alpha,1-\alpha)}(\overline{z_n}t^\alpha)}{2iIm(z_n)t^\alpha}][a_iu(t_i,\sigma)+b_i\frac{\partial u(t_i,\sigma)}{\partial t}]\sin(\lambda_n\ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma \tag{3.28}$$
$$+2\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1[\frac{E_{(\alpha,1)}(z_nt^\alpha)-E_{(\alpha,1)}(\overline{z_n}t^\alpha)}{2iIm(z_n)}][c_iu(t_i,\sigma)+d_i\frac{\partial u(t_i,\sigma)}{\partial t}]\sin(\lambda_n\ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma,$$

$$u(t,\ell)=2b\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1[\frac{E_{(\alpha,1)}(z_nt^\alpha)-E_{(\alpha,1)}(\overline{z_n}t^\alpha)}{2ciIm(z_n)}][a_iu(t_i,\sigma)+b_i\frac{\partial u(t_i,\sigma)}{\partial t}]\sin(\lambda_n\ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma$$
$$+2\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1[\frac{E_{(\alpha,1-\alpha)}(z_nt^\alpha)-E_{(\alpha,1-\alpha)}(\overline{z_n}t^\alpha)}{2iIm(z_n)t^\alpha}][a_iu(t_i,\sigma)+b_i\frac{\partial u(t_i,\sigma)}{\partial t}]\sin(\lambda_n\ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma \tag{3.29}$$
$$+2\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1[\frac{E_{(\alpha,2-\alpha)}(z_nt^\alpha)-E_{(\alpha,2-\alpha)}(\overline{z_n}t^\alpha)}{2iIm(z_n)t^{\alpha-1}}][c_iu(t_i,\sigma)+d_i\frac{\partial u(t_i,\sigma)}{\partial t}]\sin(\lambda_n\ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma,$$

avec $z_n=\frac{1}{2c}[-b+i\sqrt{4cn^2\pi^2+4ac-b^2}]$.

Remarque 3.3. *Si la variable* $\ell\in\mathbb{R}$*, alors on peut utiliser la transformation de Laplace* $\mathcal{L}$ *en temps et celle de Fourier* $\mathcal{F}$ *en espace pour trouver les solutions fondamentales implicites de* (3.5) *et* (3.6) *respectivement comme suit*

$$u(t,x)=\frac{b}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}[W_{(\alpha+2,1)}(-(a+\xi^2)rt^{\alpha+2}))$$
$$*W_{(2,1)}(-brt^2)*W_{(\alpha-\beta+2,1)}(-crt^{\alpha-\beta+2})][a_i\mathcal{F}(u(t_i,\ell))(\xi)+b_i\mathcal{F}(\frac{\partial u(t_i,\ell)}{\partial t})(\xi)]e^{-ix\xi}drd\xi$$

$$+\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}[W_{(\beta+2,1)}(-(a+\xi^2)rt^{\beta+2})$$
$$*W_{(\beta-\alpha+2,1)}(-brt^{\beta-\alpha+2})*(W_{(2,1)}(-crt^2)][a_i\mathcal{F}(u(t_i,\ell))(\xi)+b_i\mathcal{F}(\frac{\partial u(t_i,\ell)}{\partial t})(\xi)]e^{-ix\xi}drd\xi \tag{3.30}$$

$$+\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}[W_{(\frac{\beta+4}{2},1)}(-(a+\xi^2)rt^{\frac{\beta+4}{2}})$$
$$*W_{(\frac{\beta-2\alpha+4}{2},1)}(-brt^{\frac{\beta-2\alpha+4}{2}})*W_{(\frac{4-\beta}{2},1)}(-crt^{\frac{4-\beta}{2}})][c_i\mathcal{F}(u(t_i,\ell))(\xi)+d_i\mathcal{F}(\frac{\partial^{\frac{\beta}{2}}u(t_i,\ell)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}})(\xi)]e^{-ix\xi}drd\xi,$$

$$u(t,x)=\frac{b}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}[W_{(\alpha+2,1)}(-(a+\xi^2)rt^{\alpha+2})$$
$$*W_{(2,1)}(-brt^2)*W_{(\alpha-\beta+2,1)}(-crt^{\alpha-\beta+2}))][a_i\mathcal{F}(u(t_i,\ell))(\xi)+b_i\mathcal{F}(\frac{\partial u(t_i,\ell)}{\partial t})(\xi)]e^{-ix\xi}drd\xi$$

$$+\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}[W_{(\beta+2,1)}(-(a+\xi^2)rt^{\beta+2})$$
$$*W_{(\beta-\alpha+2,1)}(-brt^{\beta-\alpha+2})*W_{(2,1)}(-crt^2)][a_i\mathcal{F}(u(t_i,\ell))(\xi)+b_i\mathcal{F}(\frac{\partial u(t_i,\ell)}{\partial t})(\xi)]e^{-ix\xi}drd\xi \quad (3.31)$$

$$+\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}[W_{(\beta+1,1)}(-(a+\xi^2)rt^{\beta+1})$$
$$*W_{(\beta-\alpha+1,1)}(-brt^{\beta-\alpha+1})*W_{(1,1)}(-crt)][c_i\mathcal{F}(u(t_i,\ell))(\xi)+d_i\mathcal{F}(\frac{\partial u(t_i,\ell)}{\partial t})(\xi)]e^{-ix\xi}drd\xi.$$

Remarque 3.4. 1. *Le calcul précédent n'est pas évident si les dérivées fractionnaires sont prises au sens conforme.*

2. *Si les dérivées fractionnaires sont prises au sens conforme, alors pour* $\beta=2\alpha$ *et* $b^2<4ac$, *la solution fondamentale implicite de* (3.5) *est donnée par* (3.32)

$$u(t,\ell)=2e^{-\frac{bt^\alpha}{2c\alpha}}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1\cos(\frac{\sqrt{4cn^2\pi^2+4ac-b^2}}{2c\alpha}t^\alpha)[a_iu(t_i,\sigma)+b_i\frac{\partial u(t_i,\sigma)}{\partial t}]\sin(\lambda_n\ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma$$

$$+2be^{-\frac{bt^\alpha}{2c\alpha}}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1\frac{\sin(\frac{\sqrt{4cn^2\pi^2+4ac-b^2}}{2c\alpha}t^\alpha)}{\sqrt{4cn^2\pi^2+4ac-b^2}}[a_iu(t_i,\sigma)+b_i\frac{\partial u(t_i,\sigma)}{\partial t}]\sin(\lambda_n\ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma \quad (3.32)$$

$$+4ce^{-\frac{bt^\alpha}{2c\alpha}}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\int_0^1\frac{\sin(\frac{\sqrt{4cn^2\pi^2+4ac-b^2}}{2c\alpha}t^\alpha)}{\sqrt{4cn^2\pi^2+4ac-b^2}}[c_iu(t_i,\sigma)+d_i\frac{\partial u(t_i,\sigma)}{\partial t}]\sin(\lambda_n\ell)\sin(\lambda_n\sigma)d\sigma.$$

Remarque 3.5. *La solution fondamentale de l'équation télégraphique fractionnaire avec la dérivée fractionnelle de Caputo, dans le cas particulier* $\beta=2\alpha$, *est largement étudiée en terme de la fonction de Mittag-Leffler. Ici, nous avons donné sa solution fondamentale dans le cas général. Cela nous donne plus de liberté pour choisir les paramètres sensibles* α, β, a, b *et* c *en modélisation des phénomènes naturels. Nous notons également, que la forme* (3.5) *impose une dérivée fractionnaire dans ses conditions initiales. Ainsi, la forme* (3.6) *est meilleure que la forme* (3.5).

3.3 Application

Exemple 3.1. *Considérons l'équation fractionnaire non locale des ondes suivante :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial^{\frac{1}{2}} u(t,x)}{\partial t^{\frac{1}{2}}} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + a(t)u(t,x), & (t,x) \in]0,1[\times]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in [0,1], \\ u(0,x) = \sum_{i=1}^{p} c_i u(t_i,x), & x \in [0,\pi], \\ \frac{d^{\frac{1}{2}} u(0,x)}{dt^{\frac{1}{2}}} = \sum_{i=1}^{p} c_i u(t_i,x), & x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{3.33}$$

avec $0 < t_1 < ... < t_p < 1$, $c_1,...,c_p$ *sont des constantes réelles et* $a : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue telle que*

$$\sup_{t\in[0,1]} (a(t)) + \sum_{i=1}^{p} | c_i |< \frac{1}{2}.$$

Soit $X = L^2([0,\pi])$ *et* $A : X \longrightarrow X$ *l'opérateur défini par*

$$A = \frac{\partial^2(.)}{\partial x^2},$$

$$D(A) = \{u \in H^2(0,\pi), \quad u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Nous avons, A *génère une famille cosine* $((C(t))_{t\in\mathbb{R}},(S(t))_{t\in\mathbb{R}})$. *De plus,* $| C(t) |\leq 1$, $| S(t) |\leq 1$, *pour* $t \in [0,1]$ *et* $(S(t))_{t>0}$ *est compact [27].*

Posons $v(t)(x) = u(t,x)$, $f(t,\theta) = a(t)\theta$ *et* $g(v) = h(v) = \sum_{i=1}^{p} c_i u(t_i,.)$. *Alors, l'équation* (3.33) *devient*

$$\begin{cases} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}\frac{d^{\frac{1}{2}} v(t)}{dt^{\frac{1}{2}}} = Av(t) + f(t,v(t)), \quad t \in]0,1[, \\ v(0) = g(v), \\ \frac{d^{\alpha} v(0)}{dt^{\alpha}} = h(v), \end{cases} \tag{3.34}$$

d'après le théorème (3.4), *on déduit que le problème de Cauchy* (3.34) *admet une unique solution faible.*

Exemple 3.2. *Considérons l'équation fractionnaire non locale des télégraphistes suivante :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^{\frac{1}{2}} u(t,x)}{\partial t^{\frac{1}{2}}} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + a(t)u(t,x) + b(t)\frac{\partial^{\frac{1}{2}} u(t,x)}{\partial t^{\frac{1}{2}}}, & (t,x) \in]0,1[\times]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in [0,1], \\ u(0,x) = \sum_{i=1}^{p} [c_i u(t_i,x) + d_i \frac{\partial^{\frac{1}{2}} u(t_i,x)}{\partial t^{\frac{1}{2}}}], & x \in [0,\pi], \\ \frac{\partial^{\frac{1}{2}} u(0,x)}{\partial t^{\frac{1}{2}}} = \sum_{i=1}^{p} [c_i u(t_i,x) + d_i \frac{\partial^{\frac{1}{2}} u(t_i,x)}{\partial t^{\frac{1}{2}}}], & x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{3.35}$$

avec $0 < t_1 < ... < t_p < 1$, $c_1,...,c_p, d_1,...,d_p$, *sont des constantes réelles et* $a, b : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont deux fonctions continues telle que*

$$\max(\sup_{t\in[0,1]} (a(t)) + \sum_{i=1}^{p} | c_i |, \sup_{t\in[0,1]} (b(t)) + \sum_{i=1}^{p} | d_i |) < \frac{1}{4}.$$

Soit $X = L^2([0,\pi])$ *et* $A : X \longrightarrow X$ *l'opérateur défini par*

$$A = \frac{\partial^2(.)}{\partial x^2},$$

$$D(A) = \{u \in H^2(0,\pi), \quad u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Nous avons, A *génère une famille cosine* $((C(t))_{t\in\mathbb{R}}, (S(t))_{t\in\mathbb{R}})$. *De plus,* $| AS(t) |\leq 1$, *pour* $t \in [0,1]$. *Posons* $v(t)(x) = u(t,x)$, $F(t,\varphi,\psi) = a(t)\varphi + b(t)\psi$ *et* $G(v, \frac{d^{\frac{1}{2}} v}{dt^{\frac{1}{2}}}) = H(v, \frac{d^{\frac{1}{2}} v}{dt^{\frac{1}{2}}}) = \sum_{i=1}^{p} [c_i u(t_i,x) + d_i \frac{\partial^{\frac{1}{2}} u(t_i,x)}{\partial t^{\frac{1}{2}}}]$. *Alors, l'équation* (3.35) *devient comme suit*

$$\begin{cases} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} \frac{d^{\frac{1}{2}} v(t)}{dt^{\frac{1}{2}}} = Av(t) + F(t, v(t), \frac{d^{\frac{1}{2}} v(t)}{dt^{\frac{1}{2}}}), & t \in]0,1[, \\ v(0) = G(v, \frac{d^{\frac{1}{2}} v}{dt^{\frac{1}{2}}}), \\ \frac{d^{\alpha} v(0)}{dt^{\alpha}} = H(v, \frac{d^{\frac{1}{2}} v}{dt^{\frac{1}{2}}}), \end{cases} \tag{3.36}$$

d'après le théorème (3.1), *on déduit que le problème de Cauchy* (3.36) *admet une unique solution faible.*

Exemple 3.3. *Pour* $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{5}{4}$, $R = 250\Omega$, $G = 4.10^{-3}\Omega^{-1}$, $C = 3,2.10^{-6}F$, $L = 0,2H$ *et* $u(0,\ell) = \frac{\partial u(0,\ell)}{\partial t} = \frac{\partial^{\frac{\beta}{2}} u(0,\ell)}{\partial t^{\frac{\beta}{2}}} = 2\pi\delta$, *où* δ *représente la masse de Dirac. Nous avons,* $a = 1$, $b = 16.10^{-4}$,

$c = 64.10^{-8}$*, les deux formules* (3.30) *et* (3.31) *deviennent respectivement*

$$\begin{aligned}
u(t,x) = 32.10^{-4} & \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} [(W_{(\frac{11}{4},1)}(-(1+\xi^2)rt^{\frac{11}{4}}))\\
& * (W_{(2,1)}(-16.10^{-4}rt^2))) * W_{(\frac{3}{2},1)}(-64.10^{-8}rt^{\frac{3}{2}}))) \cos(x\xi)]drd\xi \\
& + 128.10^{-8}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} [(W_{(\frac{13}{4},1)}(-(1+\xi^2)rt^{\frac{13}{4}})))\\
& * ((W_{(\frac{5}{2},1)}(-16.10^{-4}rt^{\frac{5}{2}}))) * (W_{(2,1)}(-64.10^{-8}rt^2))) \cos(x\xi)]drd\xi \\
& + 128.10^{-8}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} [W_{(\frac{21}{8},1)}(-(1+\xi^2)rt^{\frac{21}{8}})))\\
& * (W_{(\frac{15}{8},1)}(-16.10^{-4}rt^{\frac{15}{8}})) * W_{(\frac{11}{8},1)}(-64.10^{-8}rt^{\frac{11}{8}})) \cos(x\xi)]drd\xi,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
u(t,x) = 32.10^{-4} & \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} [(W_{(\frac{11}{4},1)}(-(1+\xi^2)rt^{\frac{11}{4}}))\\
& * (W_{(2,1)}(-16.10^{-4}rt^2))) * W_{(\frac{3}{2},1)}(-64.10^{-8}rt^{\frac{3}{2}}))) \cos(x\xi)]drd\xi \\
& + 128.10^{-8}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} [(W_{(\frac{13}{4},1)}(-(1+\xi^2)rt^{\frac{13}{4}})))\\
& * ((W_{(\frac{5}{2},1)}(-16.10^{-4}rt^{\frac{5}{2}}))) * W_{(2,1)}(-64.10^{-8}rt^2))) \cos(x\xi)]drd\xi \\
& + 128.10^{-8}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} [W_{(\frac{9}{4},1)}(-(1+\xi^2)rt^{\frac{9}{4}})))\\
& * W_{(\frac{3}{2},1)}(-16.10^{-4}rt^{\frac{3}{2}})) * W_{(1,1)}(-64.10^{-8}rt)) \cos(x\xi)]drd\xi.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

CHAPITRE

4

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES NON LOCALES À RETARD DANS UN ESPACE MÉTRIQUE FLOU

L'objectif principal de ce chapitre est d'établir, en utilisant la méthode des semi-groupes flous fortement continus l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport à la donnée initiale de la solution faible pour le problème de Cauchy flou de la forme suivante :

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}} = Ax(t) + f(t, x_t), \ \ t \in [0,\tau], \tag{4.1}$$

$$x(\sigma) = \varphi(\sigma) + g(x_{t_1}, ..., x_{t_p})(\sigma), \ \ \sigma \in [-r, 0], \tag{4.2}$$

où $0 < \tau$, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < \tau$, $\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}}$ est la dérivée fractionnaire conforme floue d'ordre $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{C}_{(.)}$ est l'espace métrique complet des fonctions continues de $[-r,.]$ à valeurs dans (E^n, d) muni de la métrique $d_{(.)}(y,x) = \sup\limits_{t\in[-r,.]} d(y(t), x(t))$, pour $x \in \mathcal{C}_{\tau}$, on note par $x_t \in \mathcal{C}_0$ la fonction-mémoire définie par la formule $x_t(\sigma) = x(t+\sigma)$, $A : E^n \longrightarrow E^n$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe flou fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$, $f : [0,\tau]\times\mathcal{C}, \longrightarrow E^n$, $\varphi : [-r, 0] \longrightarrow E^n$ et $g : \mathcal{C}_0\times...\times\mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C}_0$ sont des fonctions satisfaisant certaines hypothèses.

Tout d'abord, nous proposons le concept du calcul fractionnaire conforme dans le cadre flou.

4.1 Dérivée et intégrale conformes floues

Dans cette section, nous donnons la définition et certains résultats concernant les deux concepts de la dérivée et l'intégrale fractionnaires conformes floues.

Définition 4.1. *Une fonction $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ est dite $(\alpha)-$différentiable en $t \in]0,\tau]$ s'il existe un élément $\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} \in E^n$ telles que les deux limites*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon}(x(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H x(t)) \text{ et } \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon}(x(t) \ominus_H x(t-\varepsilon t^{1-\alpha}))$$

existent et sont égales à $\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}$ dans (E^n, d).
Si x est $(\alpha)-$différentiable en chaque $t \in (0,\tau)$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}$ existe, alors on note

$$\frac{d^\alpha x(0)}{dt^\alpha} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}.$$

Proposition 4.1. *Soit $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ une fonction $(\alpha)-$différentiable, alors elle est continue.*

Démonstration. Soit $h > 0$, $t \in]0,\tau]$ et $\varepsilon = ht^{\alpha-1}$. Pour la continuité à droite, on a

$$\begin{aligned} d(x(t+h), x(t)) &= d(x(t+\varepsilon t^{1-\alpha}), x(t)) \\ &= d(x(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H x(t) + x(t), x(t)) \\ &= d(x(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H x(t), \hat{0}) \\ &\leq \varepsilon d(\frac{1}{\varepsilon}(x(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H x(t)), \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}) + \varepsilon d(\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}, \hat{0}), \end{aligned}$$

de même pour la continuité à gauche, on a

$$d(x(t-h), x(t)) \leq \varepsilon d(\frac{1}{\varepsilon}(x(t) \ominus_H x(t-\varepsilon t^{1-\alpha})), \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}) + \varepsilon d(\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}, \hat{0}).$$

Par passage à la limite $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, on obtient le résultat. □

Proposition 4.2. *Soit $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ une fonction différentiable, alors elle est $(\alpha)-$différentiable, de plus nous avons*

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = t^{1-\alpha} \frac{dx(t)}{dt}.$$

Démonstration. Le résultat découle de deux égalités suivantes :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon}(x(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H x(t)) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{t^{1-\alpha}}{h}(x(t+h) \ominus_H x(t)),$$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon}(x(t) \ominus_H x(t-\varepsilon t^{1-\alpha})) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{t^{1-\alpha}}{h}(x(t) \ominus_H x(t-h)).$$

□

Proposition 4.3. *Soient $x, y : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ deux fonctions $(\alpha)-$différentiables.*
Alors, $x+y$ est $(\alpha)-$différentiable, de plus nous avons

$$\frac{d^\alpha (x+y)(t)}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha}.$$

Démonstration. Pour $t \in]0,\tau]$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} d(\frac{1}{\varepsilon}((x+y)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H (x+y)(t)), \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha}) \\
&= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} d(\frac{1}{\varepsilon}(x(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H x(t) + y(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H y(t))), \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha}) \\
&\leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} d(\frac{1}{\varepsilon}(x(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H x(t)), \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}) + \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} d(\frac{1}{\varepsilon}(y(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H y(t)), \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

On peut aussi montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λx est (α)−différentiable et $\frac{d^\alpha(\lambda x)(t)}{dt^\alpha} = \lambda \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}$.

Théorème 4.1. *Soit $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$, une fonction (α)−différentiable avec $[x(t)]^\gamma = [x_1^\gamma(t), x_2^\gamma(t)]$. Alors, x_1^γ et x_2^γ sont (α)−différentiables et $[\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}]^\gamma = [\frac{d^\alpha x_1^\gamma(t)}{dt^\alpha}, \frac{d^\alpha x_2^\gamma(t)}{dt^\alpha}]$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser les deux égalités suivantes :

$$[x(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H x(t)]^\gamma = [x_1^\gamma(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - x_1^\gamma(t), x_2^\gamma(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - x_2^\gamma(t)],$$

$$[x(t) \ominus_H x(t-\varepsilon t^{1-\alpha})]^\gamma = [x_1^\gamma(t) - x_1^\gamma(t-\varepsilon t^{1-\alpha}), x_2^\gamma(t) - x_2^\gamma(t-\varepsilon t^{1-\alpha})].$$

□

Définition 4.2. *Soit $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ une fonction, l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in (0,1)$ de x, notée $I^\alpha(x)(t)$, est définie par*

$$I^\alpha(x)(t) = \int_0^t s^{\alpha-1} x(s) ds, \quad t \in [0,\tau],$$

où l'intégrale est l'intégrale impropre habituelle de Riemann.

Définition 4.3. *Une fonction $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ est dite (α)−intégrable sur $[0,\tau]$ si $I^\alpha(x)(t) \in E^n$ pour tout $t \in [0,\tau]$.*

Proposition 4.4. *Soient $x, y : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ deux fonctions (α)−intégrables, $A \in E^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,*

1. $I^\alpha(x+y)(t) = I^\alpha(x)(t) + I^\alpha(y)(t)$,
2. $I^\alpha(\lambda x)(t) = \lambda I^\alpha(x)(t)$,
3. $t \longmapsto d(x(t), y(t))$ *est (α)−intégrable,*
4. $d(I^\alpha(x)(t), I^\alpha(y)(t)) \leq I^\alpha(d(x,y))(t)$,
5. $I^\alpha(A)(t) = \frac{1}{\alpha} t^\alpha A$.

Démonstration. Appliquons la proposition (1.11) à la fonction $t \longmapsto t^{\alpha-1}x(t)$ sur $[\varepsilon,\tau]$ et passons à la limite $(\varepsilon \longrightarrow 0^+)$. □

Proposition 4.5. *Soit $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ une fonction différentiable.*
On suppose que la dérivée $\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}$ est (α)−intégrable sur $[0,\tau]$.
Alors, pour tout $t \in]0,\tau]$, nous avons

$$x(t) = x(0) + I^\alpha(\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})(t).$$

Démonstration. D'après la proposition (4.2) et le théorème (1.11), nous avons

$$\begin{aligned} x(0) + I^\alpha(\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha})(t) &= x(0) + \int_0^t s^{1-\alpha} s^{\alpha-1} (\frac{dx(s)}{ds}) ds \\ &= x(0) + \int_0^t (\frac{dx(s)}{ds}) ds \\ &= x(t). \end{aligned}$$

□

Proposition 4.6. *Soit $x : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ une fonction continue et (α)−intégrable.*
Alors, pour tout $t \in]0,\tau]$, la fonction $I^\alpha(x)(.)$ est (α)−différentiable, de plus, nous avons

$$\frac{d^\alpha (I^\alpha(x)(t))}{dt^\alpha} = x(t).$$

Démonstration. On pose $\varphi(t) := \int_0^t s^{\alpha-1} x(s) ds$. Soit $\varepsilon > 0$ très petit et $t \in]0,\tau]$, alors on a

$$\begin{aligned} d(\frac{1}{\varepsilon}(\varphi(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H \varphi(t)), x(t)) &= \frac{1}{\varepsilon} d(\int_t^{t+\varepsilon t^{1-\alpha}} s^{\alpha-1} x(s) ds, \int_t^{t+\varepsilon t^{1-\alpha}} t^{\alpha-1} x(t) ds) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon t^{1-\alpha}} d(s^{\alpha-1} x(s), t^{\alpha-1} x(t)) ds. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que $d(\frac{1}{\varepsilon}(\varphi(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \ominus_H \varphi(t)), x(t)) \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.
De même, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} d(\frac{1}{\varepsilon}(\varphi(t) \ominus_H \varphi(t-\varepsilon t^{1-\alpha})), x(t)) = 0.$$

□

Maintenant, nous revenons à l'étude du problème de Cauchy $(4.1)-(4.2)$.

4.2 Solution faible d'un problème de Cauchy

Avant d'étudier l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport à la donnée initiale de la solution faible du problème du Cauchy $(4.1)-(4.2)$, nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H_1) il existe une constante $L > 0$ telle que $d(f(t,y_t), f(t,x_t)) \leq L d(y(t), x(t))$, $x, y \in \mathcal{C}_\tau$ et $t \in [0,\tau]$,

(H_2) la fonction $f(., x_t) : [0,\tau] \longrightarrow E^n$ est continue, $x \in \mathcal{C}_\tau$,

(H_3) il existe une constante $K > 0$ telle que $d(g(y_{t_1},...,y_{t_n})(\sigma), g(x_{t_1},...,x_{t_n})(\sigma)) \leq K d_0(y,x)$, $x, y \in \mathcal{C}_\tau$ et $\sigma \in [-r, 0]$,

(H_4) $\varphi \in \mathcal{C}_0$.

4.2.1 Existence et unicité de la solution faible

Définition 4.4. *Une fonction $x \in \mathcal{C}_\tau$ est dite solution faible du problème de Cauchy* $(4.1)-(4.2)$, *si les deux assertions suivantes sont vérifiées*

1. $x(t) = T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[\varphi(0) + g(x_{t_1}, ..., x_{t_p})(0)] + \int_0^t s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, x_s) ds$, $t \in [0, \tau]$,
2. $x(\sigma) = \varphi(\sigma) + g(x_{t_1}, ..., x_{t_p})(\sigma)$, $\sigma \in [-r, 0]$.

Théorème 4.2. *On suppose que les hypothèses* $(H_1)-(H_4)$ *sont satisfaites, si de plus*

$$(\frac{\tau^\alpha}{\alpha} L + K) M \sup_{t \in [0,\tau]} (\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha})) < 1,$$

alors le problème de Cauchy $(4.1)-(4.2)$ *admet une unique solution faible.*

Démonstration. On définit l'opérateur $\Gamma : \mathcal{C}_\tau \longrightarrow \mathcal{C}_\tau$ par

$$\Gamma(x)(t) = T(\frac{t^\alpha}{\alpha})[\varphi(0) + g(x_{t_1}, ..., x_{t_p})(0)] + \int_0^t s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, x_s) ds, \quad t \in [0, \tau],$$

$$\Gamma(x)(\sigma) = \varphi(\sigma) + g(x_{t_1}, ..., x_{t_p})(\sigma), \quad \sigma \in [-r, 0].$$

Pour tous $x, y \in \mathcal{C}_\tau$, on a

$$\begin{aligned} d(\Gamma(y)(t), \Gamma(x)(t)) &= d(T(\frac{t^\alpha}{\alpha}) g(y_{t_1}, ..., y_{t_p})(0), T(\frac{t^\alpha}{\alpha}) g(x_{t_1}, ..., x_{t_p})(0)) \\ &\quad + d(\int_0^t s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, y_s), \int_0^t s^{\alpha-1} T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}) f(s, x_s)) ds, \\ d(\Gamma(y)(\sigma), \Gamma(x)(\sigma)) &= d(g(y_{t_1}, ..., y_{t_p})(\sigma), g(x_{t_1}, ..., x_{t_p})(\sigma)). \end{aligned}$$

Alors, on en déduit que

$$d(\Gamma(y)(t), \Gamma(x)(t)) \leq (\frac{\tau^\alpha}{\alpha} L + K) M \sup_{t \in [0,\tau]} (\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha})) d_\tau(y, x),$$

$$d(\Gamma(y)(\sigma), \Gamma(x)(\sigma)) \leq K d_\tau(y, x).$$

Et par suite, on obtient

$$d_\tau(\Gamma(y), \Gamma(x)) \leq (\frac{\tau^\alpha}{\alpha} L + K) M \sup_{t \in [0,\tau]} (\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha})) d_\tau(y, x).$$

Ainsi, Γ admet un unique point fixe dans $\mathcal{C}_\tau$, qui est la solution faible du problème de Cauchy $(4.1)-(4.2)$. □

4.2.2 Dépendance continue de la solution faible par rapport à la donnée initiale

Théorème 4.3. *Supposons les mêmes conditions du théorème* (4.2).
Soient φ, $\psi \in \mathcal{C}_0$ et notons par x, y les deux solutions faibles associées à φ et ψ respectivement. Alors, nous avons

$$d_\tau(y, x) \leq \max(\frac{\alpha M \sup_{t \in [0,\tau]} (\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))}{\alpha - M(\alpha K + L\tau^\alpha) \sup_{t \in [0,\tau]} (\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))}, \frac{1}{1-K}) d_0(\psi, \varphi).$$

Démonstration. On a

$$d(y(t),x(t)) = d(T(\frac{t^\alpha}{\alpha})(\psi(0)+g(y_{t_1},...,y_{t_p})(0)),T(\frac{t^\alpha}{\alpha})(\varphi(0)+g(x_{t_1},...,x_{t_p})(0)))$$
$$+d(\int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha})f(s,y_s)ds,\int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha})f(s,x_s)ds),$$
$$d(y(\sigma),x(\sigma)) = d(\psi(\sigma)+g(y_{t_1},...,y_{t_p})(\sigma),\varphi(\sigma)+g(x_{t_1},...,x_{t_p})(\sigma)).$$

Donc, on en déduit que

$$d(y(t),x(t)) \le M\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))[d_0(\psi,\varphi)+(K+\frac{L\tau^\alpha}{\alpha})\sup_{t\in[0,\tau]}d(y(t),x(t))],$$
$$d_0(y,x)\le d_0(\psi,\varphi)+Kd_0(y,x).$$

Ainsi, on aura

$$\sup_{t\in[0,\tau]}d(y(t),x(t))\le\frac{\alpha M\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))}{\alpha-M(\alpha K+L\tau^\alpha)\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))}d_0(\psi,\varphi),$$
$$d_0(y,x)\le\frac{1}{1-K}d_0(\psi,\varphi).$$

Finalement, on obtient

$$d_\tau(y,x)\le\max(\frac{\alpha M\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))}{\alpha-M(\alpha K+L\tau^\alpha)\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))},\frac{1}{1-K})d_0(\psi,\varphi).$$

□

Théorème 4.4. *Supposons les mêmes conditions du théorème* (4.2).

Soient φ, $\psi\in\mathcal{C}_0$ et notons par x, y les deux solutions faibles associées à φ et ψ respectivement. Si de plus

$$KM\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))\exp(\frac{LM\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))) < 1,$$

alors, on aura

$$d_\tau(y,x)\le\max(\frac{M\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))\exp(\frac{LM\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha})))}{1-KM\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))\exp(\frac{LM\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha})))},\frac{1}{1-K})d_0(\psi,\varphi).$$

Démonstration. Soit $t\in[0,\tau]$, alors on a

$$d(y(t),x(t))\le M\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))d(\psi(0)+g(y_{t_1},...,y_{t_p})(0),\psi(0)+g(x_{t_1},...,x_{t_p})(0))$$
$$+LM\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))\int_0^t s^{\alpha-1}d(y(s),x(s))ds.$$

Donc, on en déduit que

$$d(y(t),x(t)) \leq M \sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))[d(\psi(0),\psi(0))+Kd_\tau(y,x)]$$
$$+LM \sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))\int_0^t s^{\alpha-1}d(y(s),x(s))ds.$$

Ensuite, par l'inégalité de Gronwall, on aura

$$\sup_{t\in[0,\tau]} d(y(t),x(t)) \leq \frac{M\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))\exp(\frac{LM\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha})))}{1-KM\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))\exp(\frac{LM\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha})))}d_0(\psi,\varphi).$$

Ainsi, on obtient

$$d_\tau(y,x) \leq \max(\frac{M\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))\exp(\frac{LM\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha})))}{1-KM\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))\exp(\frac{LM\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha})))},\frac{1}{1-K})d_0(\psi,\varphi).$$

□

Remarque 4.1. *On remarque que*

$$\frac{\exp(\frac{LM\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha})))}{1-KM\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))\exp(\frac{LM\tau^\alpha}{\alpha}\sup_{t\in[0,\tau]}\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha})))} < \frac{\alpha}{\alpha-M(\alpha K+L\tau^\alpha)\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))}.$$

Donc, on en conclut que le théorème (4.4) *est meilleur que le théorème* (4.3).

4.2.3 Étude d'un cas spécial de la condition non locale

Dans cette sous-section, nous prenons

$$\varphi \equiv 0,$$

$$g(x_{t_1},...,x_{t_p})(\sigma) = \sum_{i=1}^{p} | c_i | x(t_i+\sigma),$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$, $c_1, c_2, ..., c_p$ sont des constantes réelles données et $0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < \tau$.

Proposition 4.7. *Supposons que* $(H_1)-(H_2)$ *sont satisfaites et il existe une constante* $\varepsilon \in]0,1[$ *telle que*

$$\max(\sum_{i=1}^{p}|c_i|, M\sum_{i=1}^{p}|c_i|\sup_{t\in[0,\tau]}(\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))) < \varepsilon,$$

alors le problème de Cauchy $(4.1)-(4.2)$ *admet une unique solution faible.*

Démonstration. Considérons l'opérateur $\Gamma : \mathcal{C}_\tau \longrightarrow \mathcal{C}_\tau$ défini par

$$\Gamma(x)(t) = T(\frac{t^\alpha}{\alpha})g(x_{t_1},...,x_{t_p})(0) + \int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s,x_s)ds, \quad t \in [0,\tau]$$

$$\Gamma(x)(\sigma) = g(x_{t_1},...,x_{t_p})(\sigma), \quad \sigma \in [-r,0].$$

Ensuite, soit la métrique d_α définie dans $\mathcal{C}_\tau$ par

$$d_\alpha(y,x) = d_\tau(\exp(\frac{-\theta\,|\,.\,|^\alpha}{\alpha})y, \exp(\frac{-\theta\,|\,.\,|^\alpha}{\alpha})x),$$

avec

$$\theta := \frac{LM \sup\limits_{t\in[0,\tau]} (\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))}{\varepsilon - M\sum\limits_{i=1}^{p} |\,c_i\,| \sup\limits_{t\in[0,\tau]} (\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))}.$$

Pour tous $x, y \in \mathcal{C}_\tau$, on a

$$\begin{aligned} d(\Gamma(y)(t),\Gamma(x)(t)) \leq\, & d(T(\frac{t^\alpha}{\alpha})g(y_{t_1},...,y_{t_p})(0), T(\frac{t^\alpha}{\alpha})g(x_{t_1},...,x_{t_p})(0)) \\ & + d(\int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s,y_s)ds, \int_0^t s^{\alpha-1}T(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha})f(s,x_s)ds). \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que

$$d(\Gamma(y)(t),\Gamma(x)(t)) \leq \sup_{t\in[0,\tau]} (\exp(\frac{\omega t^\alpha}{\alpha}))[\exp(\frac{\theta t^\alpha}{\alpha})\sum_{i=1}^{p} |\,c_i\,| + L\int_0^t s^{\alpha-1}\exp(\theta\frac{s^\alpha}{\alpha})ds]d_\alpha(y,x).$$

Et par suite, on aura

$$\sup_{t\in[0,\tau]} d(\Gamma(y)(t),\Gamma(x)(t)) \leq \varepsilon d_\alpha(y,x).$$

Ainsi, on en déduit que

$$d_\alpha(\Gamma(y),\Gamma(x)) \leq \varepsilon d_\alpha(y,x).$$

Finalement, Γ admet un unique point fixe dans $(\mathcal{C}_\tau, d_\alpha)$. □

4.3 Application

Considérons dans E^1 le problème de Cauchy fractionnaire non local à retard suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^{\frac{1}{2}} x(t)}{\partial t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{20}x(t) + \frac{1}{1+t^2}x_t, & t \in]0,1], \\ \\ x(\sigma) = \widehat{0} + \frac{1}{2}x(\frac{1}{2}+\sigma) + \frac{1}{4}x(\frac{1}{4}+\sigma), & \sigma \in [-1,0]. \end{cases} \tag{4.3}$$

Dans ce cas, nous avons $f(t,x_t) = \frac{1}{1+t^2}x_t$, $g(x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{1}{4}})(\sigma) = \frac{1}{2}x(\frac{1}{2}+\sigma) + \frac{1}{4}x(\frac{1}{4}+\sigma)$, $A = \frac{1}{20}$, $L = 1$, $T(t) = \exp(\frac{1}{20}t)$, $K = \frac{3}{4}$, $\omega = \frac{1}{20}$ et $M = 1$.

Par la proposition (4.7), on déduit que le problème de Cauchy (4.3) admet une unique solution faible.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les concepts dérivée fractionnaire, condition initiale non locale, condition initiale floue retardée ont un meilleur effet et avantage dans la modélisation des propriétés et de la mémoire d'un phénomène naturel.

Dans cette thèse, nous avons exploité la théorie des semi-groupes, la théorie des familles cosines, les théorèmes de point fixe, les transformations intégrales, les fonctions spéciales et quelques résultats d'analyse fonctionnelle pour étudier quelques équations différentielles fractionnaires non locales.

Dans un premier temps, nous avons montré, par l'approche des semi-groupes, quelques résultats d'existence, unicité, dépendance continue par rapport à la donnée initiale et régularité de la solution d'un problème de Cauchy, pour les équations différentielles fractionnaires non locales du premier ordre.

Puis, nous avons proposé quelques résultats d'existence, unicité, dépendance continue par rapport aux données initiales et régularité de la solution d'un problème de Cauchy, pour les équations différentielles fractionnaires non locales du second ordre, en se basant sur l'approche des familles cosines. Nous avons aussi établi la solution fondamentale implicite de quelques équations aux dérivées partielles fractionnaires à conditions non locales.

Finalement, nous avons étudié l'existence, unicité et dépendance continue par rapport à la donnée initiale de la solution d'un problème de Cauchy flou, pour les équations différentielles fractionnaires non locales du premier ordre à retard.

Comme perspectives, on se propose de contribuer à l'étude théorique et numérique des équations différentielles fractionnaires non locales, en se basant sur l'approche du calcul variationnel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Abdeljawad, On conformable fractional calculus, Journal of Computational and Applied Mathematics 279 (2015), 57-66.

[2] M. Adimy, M. Alia and K. Ezzinbi, Functional differential equations with unbounded delay in extrapolation spaces, Electronic Journal of Differential Equations, 2014(2014), 180, 1-16.

[3] R.P. Agarwal, V. Lakshmikantham and J.J. Nieto, On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty, Nonlinear Analysis 72(2010), 2859-2862.

[4] M. R. Altahhan, M. S. Nagy, H. H. Abou-Gabal and A. E. Aboanber, Formulation of a point reactor kinetics model based on the neutron telegraph equation, Annals of Nuclear Energy 91(2016), 176-188.

[5] W. Arendt, Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems, Israel Journal of Mathematics, 59(1987), 3, 327-352.

[6] M. Atraoui, M. Bouaouid, L.S. Chadli, K. Hilal and S. Melliani, Fractional differential equations with nonlocal-fuzzy condition, J. Adv. Math. Stud, 11(2018), 2, 195-202.

[7] J. Banasiak and J. R. Mika, Singularly perturbed telegraph equation with application in the random walk theory, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 11(1998), 1, 9-28.

[8] D. A. Benson, M. M. Meerschaert and J. Revielle, Fractional calculus in hydrologic modeling : A numerical perspective, Advances in Water Resources 51(2013), 479-497.

[9] M. Bouaouid, M. Atraoui, K. Hilal and S. Melliani, Fractional differential equations with nonlocal-delay condition, J. Adv. Math. Stud, 11(2018), 2, 214-225.

[10] L. Byszewski, Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, Journal of Mathematical Analysis and Applications 162(1991), 494-505.

[11] L. Byszewski and H. Akca, On a mild solution of a semilinear functional-differential evolution nonlocal problem, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 10(1997), 3, 265-271.

[12] R. C. Cascaval, E. C. Eckstein, C. L. Frota and J. A. Goldstein, Fractional telegraph equations, J. Math. Anal. Appl. 276(2002), 145-159.

[13] J. Chen, F. Liu and V. Anh, Analytical solution for the time-fractional telegraph equation by the method of separating variables, J. Math. Anal. Appl. 338(2008), 1364-1377.

[14] W. Chen, H. Sun, X. Zhang and D. Korošak, Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives, Computers and Mathematics with Applications 59(2010), 1754-1758.

[15] W. Chung, Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics 290(2015), 150-158.

[16] G. Da Prato and E. Sinestrari, Differential operators with non dense domain, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 14(1987), 2, 285-344.

[17] S. Das, K. Vishal, P. K. Gupta and A. Yildirim, An approximate analytical solution of time-fractional telegraph equation, Applied Mathematics and Computation 217(2011), 7405-7411.

[18] L. Debnath, Recent applications of fractional calculus to science and engineering, IJMMS, 54(2003), 3413-3442.

[19] K. Deng, Exponetial decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions, Journal of Mathematical Analysis and Applications 179(1993), 630-637.

[20] E. C. Eckstein, J. A. Goldstein and M. Leggas, The mathematics of suspensions : Kac walks and asymptotic analyticity, Electronic Journal of Differential Equations, Conference, 03(1999), 39-50.

[21] K. J. Engel and R. Nagel, One-parameter semigroups for linear evolution equations, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 194(2001).

[22] K. Ezzinbi and J.H. Liu, Nondensely defined evolution equations with nonlocal conditions, Mathematical and Computer Modelling 36(2002), 1027-1038.

[23] H.O. Fattorini, Ordinary differential equations in linear topological space, Journal of differential equations 6(1969), 50-70.

[24] W. Grzesikiewicz, A. Wakulicz and A. Zbiciak, Non-linear problems of fractional calculus in modeling of mechanical systems, International Journal of Mechanical Sciences 70(2013), 90-98.

[25] H. Gu, Y. Zhou, B. Ahmad and A. Alsaedi, Integral solutions of fractional evolution equations with nondense domain, Electronic Journal of Differential Equations, 2017(2017), 145, 1-15.

[26] J. Hale, Theory of functional differential equations, Springer-Verlag, New York, 1977.

[27] E. M. Hernández, Existence of solutions to a second order partial differential equation with nonlocal conditions, Electronic Journal of Differential Equations, 2003(2003), 51, 1-10.

[28] V. R. Hosseini, W. Chen and Z. Avazzadeh, Numerical solution of fractional telegraph equation by using radial basis functions, Engineering Analysis with Boundary Elements 38(2014), 31-39.

[29] S. H. Jhang, Analysis of random telegraph noise observed in semiconducting carbon nanotube quantum dots, Synthetic Metals 198(2014), 118-121.

[30] M. Kac, Astochastic model related to the telegraph equation, Journal of mathematics 4, 3, Summer, 1974.

[31] O. Kaleva, Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 24(1987), 301-317.

[32] O. Kaleva, The Cauchy problem for fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 35(1990), 389-396.

[33] O. Kaleva, A note on fuzzy differential equations, Nonlinear Analysis 64(2006), 895-900.

[34] U. N. Katugampola, Correction to "What is a fractional derivative ?" by Ortigueira and Machado [Journal of Computational Physics, Volume 293, 15 July 2015, Pages 4-13. Special issue on Fractional PDEs], Journal of Computational Physics 00(2015), 1-2.

[35] H. Kellerman and M. Hieber, Integrated semigroups, Journal of Functional Analysis 84(1989), 160-180.

[36] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef and M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics 264(2014), 65-70.

[37] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amesterdam, 2006.

[38] S. Kumar, A new analytical modelling for fractional telegraph equation via Laplace transform, Applied Mathematical Modelling 38(2014), 3154-3163.

[39] V. Lakshmikantham and R. N. Mohapatra, Theory of fuzzy differential equations and inclusions, Taylor & Francis, London, 2003.

[40] R. L. Magin, Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues, Computers and Mathematics with Applications 59(2010), 1586-1593.

[41] F. Mainardi, Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity, Imperial College Press, (2010).

[42] L. Martínez, J.J. Rosales, C.A. Carreño and J.M. Lozano, Electrical circuits described by fractional conformable derivative, Int J Circ Theor Appl. (2018), 1-10.

[43] S. Melliani, L.S. Chadli, M. Atraoui and M. Bouaouid, Fuzzy initial value problem, Surveys in Mathematics and its Applications 10(2015), 149-157.

[44] S. Melliani, E. Eljaoui and L. S. Chadli, Fuzzy differential equation with nonlocal conditions and fuzzy semigroup, Advances in Difference Equations 2016(2016), 35.

[45] K.S. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, John Wiley & Sons, New York, 1993.

[46] M. T. Mizukoshi, L. C. Barros, Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores and R. C. Bassanezi, Fuzzy differential equations and the extension principle, Information Sciences 177(2007), 3627-3635.

[47] S. Momani, Analytic and approximate solutions of the space and time-fractional telegraph equations, Applied Mathematics and Computation 170(2005), 1126-1134.

[48] G.M. Mophou and G.M. N'Guérékata, On integral solutions of some nonlocal fractional differential equations with nondense domain, Nonlinear Analysis 71(2009), 4668-4675.

[49] G. M. N'Guérékata, A Cauchy problem for some fractional abstract differential equation with non local conditions, Nonlinear Analysis 70(2009), 1873-1876.

[50] H.T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, Journal of Mathematical Analysis and Applications 64(1978), 369-380.

[51] K.B. Oldham and J. Spanier, The fractional calcalus, Academic Press, San Diego, 1974.

[52] W. E. Olmstead and C. A. Roberts, The one-dimensional heat equation with a nonlocal initial condition, Appl. Math. Lett. 10(1997), 3, 89-94.

[53] J.Y. Park and H.K. Han, Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 110(2000), 69-77.

[54] J.Y. Park, H.K. Han and K.H. Son, Fuzzy differential equation with nonlocal condition, Fuzzy Sets and Systems 115(2000), 365-369.

[55] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[56] I. Podlubny, Fractional differential equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[57] Y. Povstenko, Theories of thermal stresses based on spaceŰtime-fractional telegraph equations, Computers and Mathematics with Applications 64(2012), 3321-3328.

[58] D. M. Pozar, Microwave Engineering, John Wiley and Sons, Inc., 1998.

[59] M.L. Puri and D.A. Ralescu, Differentials of fuzzy functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications 91(1983), 552-558.

[60] M.L. Puri and D.A. Ralescu, Fuzzy random variables, Journal of Mathematical Analysis and Applications 114(1986), 409-422.

[61] H. Romn-Flores, L.C. Barros, R.C. Bassanezi, A note on Zadeh's extensions, Fuzzy Sets and Systems 117(2001), 327-331.

[62] S.G Samko, A.A Kilbas and O.I Marichev, Fractional integrals and derivatives theory and applications, Gordon & Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.

[63] A. Sapora, P. Cornetti and A. Carpinteri, Wave propagation in nonlocal elastic continua modelled by a fractional calculus approach, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 18(2013), 63-74.

[64] X-B. Shu and Q. Wang, The existence and uniqueness of mild solutions for fractional differential equations with nonlocal conditions of order $1 < \alpha < 2$, Computers and Mathematics with Applications 64(2012), 2100-2110.

[65] D. Sierociuk, T. Skovranek, M. Macias, I. Podlubny, I. Petras, A. Dzielinski, P. Ziubinski, Diffusion process modeling by using fractional-order models, Applied Mathematics and Computation 257(2015), 2-11.

[66] T. Škovránek, I. Podlubny and I. Petráš, Modeling of the national economies in state-space : A fractional calculus approach, Economic Modelling 29(2012), 1322-1327.

[67] V. K. Srivastava, M. K. Awasthi and S. Kumar, Analytical approximations of two and three dimensional time-fractional telegraphic equation by reduced differential transform method, egyptian journal o f basic and a pplied sciences 1(2014), 60-66.

[68] H.R. Thieme, "Integrated semigroups" and integrated solutions to abstract Cauchy problems, Journal of mathematical analysis and applications 152(1990), 416-447.

[69] C. C. Travis and G. F. Webb, Cosine family and abstract nonlinear second order differential equations, Acta Mathematica Academiae Seientiarum Hungaricae Tomus 32(1978), (3-4), 75-96.

[70] V. A. Vyawahare and P. S. V. Nataraj, Fractional-order modeling of neutron transport in a nuclear reactor, Applied Mathematical Modelling 37(2013), 9747-9767.

[71] A. W. Wharmby and R. L. Bagley, The application of the fractional calculus model for dispersion and absorption in dielectrics I. Terahertz waves, International Journal of Engineering Science 93 (2015), 1-12.

[72] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and control 8(1965), 338-353.

[73] L.A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I, Information Sciences 8(1975), 199-249.

[74] W. Zhang, J. Li and Y. Yang, Spatial fractional telegraph equation for image structure preserving denoising, Signal Processing 107(2015), 368-377.

[75] Y. Zhou, F. Jiao, Nonlocal Cauchy problem for fractional evolution equations, Nonlinear Analysis : Real World Applications 11(2010), 4465-4475.

[76] Y. Zhou and F. Jiao, Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations, Computers and Mathematics with Applications 59(2010), 1063-1077.

[77] Y. Zhou, Basic theory of fractional differential equations, World Scientific, New Jersey, 2014.

[78] H.W. Zhou, S. Yang and S.Q. Zhang, Conformable derivative approach to anomalous diffusion, Physica A 491(2018), 1001-1013.

Résumé :

Le but de ce travail de thèse est de contribuer à l'étude des équations différentielles fractionnaires non locales. Ce type d'équations a un meilleur effet et avantage que les équations différentielles classiques en modélisation des propriétés et de la mémoire des phénomènes naturelles.

Tout d'abord, nous rappelons quelques ingrédients concernant le calcul fractionnaire, la théorie des semi-groupes, la théorie des familles cosines, les transformations intégrales, les fonctions spéciales, la théorie des ensembles flous et quelques résultats d'analyse fonctionnelle sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans cette thèse.

Ensuite, nous nous intéressons à l'étude d'un problème de Cauchy, pour les équations différentielles fractionnaires non locales du premier ordre avec une nouvelle dérivée fractionnaire dite "dérivée fractionnaire conforme". Les résultats d'existence, unicité, dépendance continue par rapport à la donnée initiale et régularité de la solution s'obtiennent à l'aide de la théorie des semi-groupes combiné avec la théorie des points fixes.

Puis, nous exploitons la théorie des familles cosines et la théorie des points fixes pour montrer l'existence, unicité, dépendance continue par rapport aux données initiales et régularité de la solution d'un problème de Cauchy, pour les équations différentielles fractionnaires non locales du second ordre avec la dérivée fractionnaire conforme. Nous avons aussi donné la solution fondamentale implicite dans un cas concret des équations télégraphistes fractionnaires non locales où la dérivée fractionnaire est prise au sens de Caputo.

Finalement, après avoir donné un sens à la dérivée et l'intégrale fractionnaires conformes dans un cadre flou, nous traitons les questions d'existence, unicité et dépendance continue par rapport à la donnée initiale de la solution d'un problème de Cauchy flou, pour les équations différentielles fractionnaires non locales du premier ordre à retard.

Les mots-clés :

Équations différentielles fractionnaires, Conditions non locales, Familles d'opérateurs linéaires, Théorie des points fixes et Théorie des ensembles flous.