



**UNIVERSITE SULTAN MOULAY SLIMANE**  
**Faculté des Sciences et Techniques**  
**Béni-Mellal**



*Centre d'Études Doctorales : Sciences et Techniques*  
*Formation Doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées*

**THÈSE**

Présentée par

**AISSAM HADRI**

Pour l'obtention du grade de  
**DOCTEUR**

*Spécialité : Mathématiques*

---

---

**Contribution à l'étude théorique et numérique par homogénéisation  
d'un problème de transfert de la chaleur dans un matériau composite**

---

---

Soutenue le 18/07/2017 à 10h devant la commission d'examen composée de :

Président	:	Pr. Ahmed ZEGHAL	PES	FST - Béni Mellal
Rapporteurs	:	Pr. Christophe BERTHON	PES	Université de Nantes
		Pr. Abdelilah HAKIM	PES	FST - Marrakech
		Pr. Mouhcine TILIOUA	PH	FST - ERRACHIDIA
Examineurs	:	Pr. Elhoussine AZROUL	PES	FS - FES
		Pr. Abdeljalil NACHAOUI	PES	Université de Nantes
Directeur de thèse	:	Pr. Abdelkrim CHAKIB	PES	FST - Béni Mellal
Membre invité	:	Pr. Mourad NACHAOUI	PA	FST - Béni Mellal

# Remerciements

---

En tout premier lieu, je remercie Allah sans Qui rien n'est possible.

Ensuite, je tiens à adresser mes vifs remerciements à mon directeur de thèse et encadrant le professeur Abdelkrim Chakib pour l'aide compétente qu'il m'a apporté, pour sa patience, sa rigueur et ses encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail. Malgré ses responsabilités, il a toujours répondu présent, me montre ainsi la voie tout en me laissant une grande liberté de pensée et d'action. Ses discussions utiles et fructueuses ont été un atout pour moi pour mener à bien les travaux de cette thèse. J'ai eu ainsi la chance de travailler sous sa direction pendant ces années. Merci.

Ensuite, toutes mes pensées de gratitude se dirigent vers mon co-encadrant Mourad Nachaoui pour m'avoir encouragé et conseillé tout au long de ce travail. Ses discussions ont été d'intérêt considérable.

Ce fut un grand honneur que les professeur Christophe Berthon, Abdelilah Hakim et Mouhcine Tilioua, aient accepté de rapporter sur ma thèse. Merci pour vos remarques avisées et pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail.

Je remercie respectueusement le professeur Ahmed Zeghal, pour le temps qu'il a consacré à examiner cette thèse et pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury.

Je tiens à remercier le professeur Elhoussine Azroul d'avoir participé en tant qu'examinateur à mon jury de thèse, ainsi, l'intérêt que vous avez porté à mon travail.

Je remercie aussi le professeur Abdeljalil Nachaoui d'avoir participé à mon jury, et pour ses discussions qui sont très précieuses et qui ont amélioré la qualité de mon travail.

Un grand merci aux membres du Laboratoire de Mathématiques et Applications, surtout le professeur Amine Laghrib et les doctants Mustapha, Hssaine, Abou-bakre, Hamid, Soufiane et Chouaib, pour les bons moments que nous avons partagé.

Je tiens à remercier ma famille, en particulier mes parents pour leurs soutiens et leurs encouragements. Ils ont été présents tout au long de ce travail, je ne serais certainement pas là sans eux. Merci!

Un grand merci à mes frères et ma sœur pour leurs soutiens. Ils ont été présents tout au long de ce travail.

Pour finir, que toute personne qui ait contribué de près ou de loin à la réalisation de cette thèse, trouve ici l'expression de mes sincères sentiments.

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Résumé</b>	<b>7</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>8</b>
<b>1 Résultats préliminaires</b>	<b>13</b>
1.1 Notations et définitions . . . . .	13
1.2 Espaces fonctionnels . . . . .	14
1.2.1 Les espaces $L^p(\Omega)$ . . . . .	14
1.2.2 Les espaces $C^m(\Omega)$ . . . . .	15
1.2.3 Espace de Sobolev . . . . .	16
1.2.4 Injections de Sobolev et application trace . . . . .	17
1.2.5 Quelques estimations et inégalités sur les espaces de Sobolev . . . . .	18
1.3 Les espaces à valeurs vectorielles . . . . .	19
1.3.1 Les espaces $L^p(I, E)$ . . . . .	19
1.3.2 Les espaces $W^{1,p}(I, E)$ . . . . .	20
1.3.3 Injection compacte dans les espaces $L^p(I, E)$ . . . . .	21
1.4 Outils pour l'étude de problèmes évolutifs linéaires . . . . .	21
1.5 Point fixe et degrés topologiques . . . . .	22
1.5.1 Degré topologique de Brouwer . . . . .	22
1.5.2 Degré topologique de Leray-Schauder . . . . .	23
1.6 Introduction à l'homogénéisation . . . . .	24
1.6.1 Problème modèle en homogénéisation . . . . .	24
1.6.2 Inégalité de Sobolev et convergence à deux échelles . . . . .	25
<b>2 Modélisation du problème</b>	<b>28</b>
2.1 Matériaux composites . . . . .	28
2.1.1 Mise en forme des pièces composites . . . . .	29
2.1.2 Procédés de fabrication de structures composites . . . . .	30
2.1.3 Enjeux et défis des matériaux composites . . . . .	31
2.2 Transfert de la chaleur . . . . .	32
2.2.1 Modes de transfert de la chaleur . . . . .	32

2.3	Modèle de transfert de la chaleur considéré . . . . .	38
2.4	Formulation du problème à l'échelle locale . . . . .	40
2.4.1	L'approximation $\epsilon$ -périodique du matériau . . . . .	40
2.4.2	Position du modèle à l'échelle microscopique . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Etude théorique par homogénéisation du problème</b>	<b>44</b>
3.1	Position du problème . . . . .	44
3.1.1	Géométrie du matériau composite . . . . .	45
3.1.2	Equations du modèle . . . . .	46
3.1.3	Hypothèses sur les données et estimations de base . . . . .	48
3.2	Etude par homogénéisation des modèles d'échange thermique . . . . .	49
3.2.1	Etude du modèle avec terme d'échange radiatif lipschitzien . . . . .	50
3.2.2	Etude du modèle avec le terme d'échange radiatif $ u_\epsilon^f u_\epsilon^f$ . . . . .	62
3.2.3	Etude du modèle avec le terme d'échange radiatif $ u_\epsilon^f ^p u_\epsilon^f$ . . . . .	73
3.3	Identification du problème macroscopique . . . . .	85
3.3.1	Convergence forte . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Etude de l'approximation numérique du problème</b>	<b>90</b>
4.1	Développement asymptotique et identification des correcteurs . . . . .	90
4.2	Approximation du problème d'homogénéisation . . . . .	102
4.2.1	Approximation des problèmes cellulaires et problème homogénéisé pour l'équation de Stokes . . . . .	102
4.2.2	Approximation des problèmes cellulaires de transfert de la chaleur . . . . .	104
4.2.3	Approximation du problème homogénéisé et problème d'homogénéisation de transfert de la chaleur . . . . .	105
4.2.4	Algorithme multi-échelles en éléments finis . . . . .	106
4.2.5	Résultats numériques . . . . .	107
	<b>Conclusion</b>	<b>118</b>

# Table des figures

---

1.1	Répresentation de $D_\epsilon$ en fonction de $\epsilon$ : la figure à droite pour $\epsilon = \frac{1}{100}$ au milieu pour $\epsilon = \frac{1}{50}$ et à gauche $\epsilon = \frac{1}{25}$ . . . . .	25
2.1	Mise en forme des matériaux composites . . . . .	30
2.2	Exemple de mise en forme de composites . . . . .	30
2.3	Procédure de fabrication des composites basée sur moulage . . . . .	31
2.4	Echelles caractéristiques d'une mousse architecturée d'aluminium, microstructure (Dehoff et Babu, 2010), mésostructure et macrostructure (Wikipédia : Mousse métallique, 20/08/14) . . . . .	32
2.5	Explication analogique des trois modes de transfert de la chaleur . . . . .	34
2.6	Conduction thermique . . . . .	35
2.7	Convection thermique . . . . .	35
2.8	Rayonnement thermique . . . . .	36
2.9	Exemple d'une cellule représentative . . . . .	41
2.10	Mise à l'échelle $\epsilon$ -périodique du domaine $\Omega$ . . . . .	41
3.1	Représentation de $\Omega$ . . . . .	45
4.1	Distribution spatiale bidimensionnelle de la température. Comparaison de la solution microscopique ( $\epsilon = 0,05$ , $t = 2$ ) (à gauche) avec la solution homogénéisée (à droite). . . . .	109
4.2	Distribution spatiale bidimensionnelle de la température. Comparaison de la solution microscopique ( $\epsilon = 0,1$ , $t = 2$ ) (à gauche) avec la solution homogénéisée (à droite). . . . .	110
4.3	Distribution spatiale bidimensionnelle de la température. Comparaison de la solution microscopique ( $\epsilon = 0,2$ , $t = 2$ ) (à gauche) avec la solution homogénéisée (à droite). . . . .	110
4.4	Magnitude de la différence des gradients de la solution d'homogénéisation et la solution homogénéisée $ \nabla(u_{\epsilon,h_1} - u_{0,h_1}) $ pour $\epsilon = 0.1$ en $t = 3$ . . . . .	111
4.5	Magnitude de la différence des gradients de la solution d'homogénéisation et la solution homogénéisée en introduisant le correcteur d'ordre 1 $ \nabla(u_{\epsilon,h_1} - u_{0,h_1} - \epsilon u_{1,h,h_1}) $ pour $\epsilon = 0.1$ en $t = 3$ . . . . .	112
4.6	Magnitude de la différence des gradients de la solution du problème microscopique et la solution homogénéisée en introduisant le correcteur d'ordre 1 et d'ordre 2 $ \nabla(u_{\epsilon,h_1} - u_{0,h_1} - \epsilon u_{1,h,h_1} - \epsilon^2 u_{2,h,h_1}) $ pour $\epsilon = 0.1$ en $t = 3$ . . . . .	112
4.7	Variation des erreurs $E_0$ , $E_1$ et $E_2$ en fonction de $\epsilon$ pour $t = 3$ . . . . .	113

4.8 La différence entre la solution du problème d’homogénéisation, la solution homogénéisée et les correcteurs (pour  $t = 2$  en  $\epsilon = 0.1$ ) : la figure (à gauche) représente  $(u_{\epsilon,h_1} - u_{0,h_1})$  et la figure (à droite) représente  $(u_{\epsilon,h_1} - u_{0,h_1} - \epsilon u_{1,h,h_1})$  . . . . . 114

4.9 La différence entre la solution du problème d’homogénéisation, la solution homogénéisée et les correcteurs (pour  $t = 2$  en  $\epsilon = 0.1$ ) : la figure représente  $(u_{\epsilon,h_1} - u_{0,h_1} - \epsilon u_{1,h,h_1} - \epsilon^2 u_{2,h,h_1})$  . . . . . 114

4.10 Distribution spatiale bidimensionnelle de la température. Comparaison de la solution microscopique ( $\epsilon = 0,05, t = 2$ ) (à gauche) avec la solution homogénéisée (à droite). . . 115

4.11 Distribution spatiale bidimensionnelle de la température. Comparaison de la solution microscopique ( $\epsilon = 0,1, t = 2$ ) (à gauche) avec la solution homogénéisée (à droite). . . 116

4.12 Distribution spatiale bidimensionnelle de la température. Comparaison de la solution microscopique ( $\epsilon = 0,25, t = 2$ ) (à gauche) avec la solution homogénéisée (à droite). . . 116

# Liste des tableaux

---

4.1	Paramètres utilisés dans les simulations numériques. . . . .	107
4.2	Évolution de l'erreur $E_0 = \ u_{\epsilon, h_1} - u_{0, h_1}\ _{L^2(\Omega^h)}$ en fonction du temps et de $\epsilon$ . . . . .	110
4.3	Évolution de l'erreur relative en fonction du temps pour $\epsilon = 0.09$ . . . . .	111
4.4	L'évolution de l'erreur entre la solution exacte et la solution homogénéisée en fonction de $h_1$ pour $\epsilon = 0.1$ en $t = 3$ . . . . .	111
4.5	Évolution de l'erreur relative en fonction du temps pour $\epsilon = 0.1$ . . . . .	113
4.6	Évolution de l'erreur $\ u_{\epsilon, h_1} - u_{0, h_1}\ _{L^2(\Omega^h)}$ en fonction du temps et de $\epsilon$ . . . . .	117
4.7	Évolution de l'erreur relative en fonction du temps pour $\epsilon = 0.1$ . . . . .	117

# Résumé

---

Dans cette thèse, nous nous intéressons à une analyse multi-échelles d'un problème d'échange thermique issu de la construction d'un matériau composite. Ce problème modélise l'évolution de la température dans une pièce composite périodiquement distribuée, formée par un milieu hétérogène composé de deux sous-domaines. Ce modèle est régi par un problème parabolique couplé, faisant intervenir un champ de vecteur solution d'une équation de Stokes, en présence d'une condition de transmission décrite par un terme d'échange radiatif non linéaire. Pour pallier ces difficultés, nous nous appuyons sur la théorie de l'homogénéisation périodique pour fournir un moyen systématique décrivant le comportement asymptotique de l'évolution de la température dans la pièce. Ceci dans le but d'obtenir des modèles homogénéisés par un passage à la limite via la convergence à deux échelles. Pour cela, nous proposons une étude théorique par homogénéisation de trois modèles physiques correspondant à différents termes d'échange thermique non linéaires. Ainsi, nous établissons tout d'abord quelques résultats d'estimations a priori sur la solution. Puis, en nous basant sur ces résultats, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution du problème d'homogénéisation, dans chacun des cas, en utilisant le degré topologique de Leray-Schauder. Nous proposons, ensuite, un passage à la limite dans le problème d'homogénéisation, à l'aide de la convergence à deux échelles, pour les différents problèmes considérés. Nous identifions ainsi les problèmes homogénéisés associés à différents termes d'échange thermique non linéaires. Finalement, nous proposons une étude de l'approximation du problème d'homogénéisation, via un développement asymptotique et une discrétisation par la méthode des éléments finis. Nous terminons par donner quelques résultats numériques qui montrent l'efficacité de l'approche proposée.



# Introduction générale

---

Dans le but d'optimiser des structures en améliorant leurs performances, tout en réduisant leurs coûts d'exploitation, les industriels de l'aéronautique, du transport terrestre et du bâtiment s'orientent de plus en plus vers la réalisation des pièces de façon optimale en se basant sur des matériaux à multi-phases ou hétérogènes, nommés matériaux composites. Un matériau composite est une combinaison microscopique de deux ou plusieurs matériaux différents, avec une interface entre eux [19]. Les composites se sont progressivement imposés dans notre vie moderne grâce à leurs nombreux atouts. En effet, ils ont un très bon rapport poids/résistance mécanique, une bonne tenue au vieillissement, en intérieur comme en extérieur et une insensibilité à la corrosion. Ils permettent aussi l'obtention de formes complexes, ainsi que l'intégration de fonctions de bonnes propriétés d'isolation thermique, électrique et phonique et même une bonne adaptation à l'esthétique des formes design. En plus des avantages liés à leurs propriétés structurelles, les matériaux composites offrent une alternative au métal. En effet, leur usage participe à la réduction de la consommation de carburant fossile et à la baisse des gaz à effet de serre. Ceci explique les vastes domaines d'applications des composites, que ce soit dans le domaine des transports aérien, maritime et ferroviaire, ou bien celui du bâtiment, de l'automobile, des objets de décoration et d'ameublement, du sport et des loisirs ou encore de l'aérospatiale [48, 58].

L'un des défis majeurs rencontrés dans les procédures de fabrication des composites est de pouvoir disposer d'un matériau qui réalise un équilibre particulier des propriétés pour une gamme de donnée d'applications [23]. En effet, il faut assurer un bon dosage des constituants, ce qui est primordial pour assurer de bonnes propriétés mécaniques, garantir la forme de la pièce, assurer une température adéquate, tout en minimisant le coût de fabrication. Ceci n'est possible que si l'on assure un bon contrôle du cycle thermique qui accompagne le processus de fabrication. Il s'agit en fait de prendre en compte plusieurs éléments, tels que l'aspect multi-échelles qui caractérise ces matériaux, les caractéristiques géométriques et la distribution des phases ainsi que les phénomènes physiques impliqués. Notamment, l'écoulement du fluide lors de la construction de la pièce, mais aussi l'échange thermique non linéaire qui est modélisé par la loi de Stefan-Boltzmann. Parmi les difficultés rencontrées lors de la modélisation, on trouve aussi la détermination de la conductivité thermique effective qui caractérise la pièce composite. Par ailleurs, dans le but de suggérer un moyen d'approximation de ce type de problèmes, on peut envisager d'utiliser une méthode de résolution numérique d'un système d'équations couplé (fluide / solide), qui modélise l'écoulement du fluide aussi bien que l'échange de la température en fonction des paramètres physiques dans les deux phases et dans une géométrie complexe du matériau. Cependant, ceci est très lourd, puisqu'elle demande de fortes hypothèses sur

les données et un temps de calcul souvent prohibitif.

Pour surmonter ces difficultés, de nombreuses approches ont été proposées pour relever les défis du comportement de matériaux composites. La première classe vise à effectuer des mesures expérimentales avec un ou plusieurs dispositifs pour obtenir tous les composants du tenseur [36]. Quant à la deuxième, elle consiste à faire une analyse des propriétés macroscopiques des matériaux composites à partir de quantités microscopiques. Cette approche a été initiée par les physiciens Rayleigh, Maxwell et Einstein. Mais ce n'est que dans les années soixante-dix que les physiciens ont réussi à formuler ce problème physique des structures composites de façon mathématique. Cette formulation mathématique a introduit une nouvelle discipline dans le domaine de l'analyse asymptotique appelée "la théorie de l'homogénéisation". L'objectif majeur de cette théorie est de fournir un moyen systématique qui modélise le comportement asymptotique d'un milieu hétérogène à l'échelle microscopique par un modèle macroscopique homogène conservant les propriétés microscopiques associées au milieu (voir par exemple [12, 55, 65]). Mathématiquement parlant, la théorie de l'homogénéisation assure la convergence des solutions d'un problème aux limites donné, qui a des coefficients fortement oscillants ou une géométrie complexe, vers la solution d'un problème aux limites avec des données simples.

Dans ce contexte, nous signalons que parmi les méthodes les plus répandues dans l'étude de l'homogénéisation, nous trouvons celles qui ne sont pas mathématiquement rigoureuses. Notamment, celle du Volume Élémentaire Représentatif (VER ou RVE en anglais) [17, 32, 33], c'est en fait une méthode physique qui repose sur l'idée de calculer les moyennes des perturbations dans un volume représentatif de l'hétérogénéité du système, puis de les utiliser ensuite pour décrire macroscopiquement le problème initialement décrit de manière microscopique. Il existe aussi la méthode utilisant un développement asymptotique (voir [12]). Cette dernière est formelle et permet d'avoir une forme explicite du modèle et de ses paramètres effectifs. Elle est généralement utilisée dans le cadre numérique, puisqu'elle donne plus d'information sur l'approximation du modèle. Tandis que, parmi les méthodes mathématiquement rigoureuses, nous rencontrons celle utilisant la  $\Gamma$ -convergence introduite par De Giorgi [20, 65] ou celle utilisant des fonctions tests oscillantes introduite par Tartar [19, 65]. Cependant, ces deux méthodes présentent des limites lorsqu'il s'agit d'étudier des problèmes d'homogénéisation compliqués. Une autre méthode rigoureuse est celle utilisant la convergence à deux échelles, elle est introduite à la fin des années quatre-vingts par Nguetseng [55] et développée ensuite par Allaire [3]. Cette méthode est mieux adaptée aux problèmes d'homogénéisation périodiques. D'où l'intérêt que nous lui portons, puisque nous nous intéressons au cas des structures périodiquement hétérogènes.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude par la méthode d'homogénéisation d'un problème de transfert de la chaleur issu de la construction d'une pièce composite, caractérisée par un matériau hétérogène et composée de deux sous-domaines, un état solide et un état fluide. A ce stade, nous précisons que plusieurs contributions et travaux antérieurs sur l'homogénéisation des problèmes aux limites sur des matériaux hétérogènes, dans le cas elliptique ou parabolique, linéaire

ou non linéaire ont été développés. En effet, le problème elliptique dans le cas linéaire, correspondant à différentes géométries ou échelles, a été étudié de manière approfondie (voir par exemple [7, 23, 51]). Aussi l'homogénéisation dans le cas d'un opérateur elliptique en présence d'un terme non linéaire dans un milieu perforé a été étudiée dans [25, 59, 68, 69]. Notons également que des problèmes paraboliques avec des conditions aux limites non linéaires où la non linéarité est décrite par une fonction lipschitzienne sont largement étudiés dans [28, 30, 54, 50, 62]. En particulier, les problèmes paraboliques de transmission dont le flux sur la frontière interne du matériau est modélisé par des lois qui sont soit linéaires ou non linéaires décrites par une fonction lipschitzienne ou bornée ont été aussi étudiées dans [9, 27, 29, 39, 54]. Toutefois, les différentes études développées dans le cas parabolique nécessitent des hypothèses de régularité un peu fortes sur les données et sur la solution.

De notre part, nous considérons un modèle de transfert de la chaleur dans un matériau composite régi par une équation parabolique, faisant intervenir un champ de vecteur solution d'une équation de Stokes. La difficulté majeure liée à la résolution de ce problème réside en général dans la présence d'un échange thermique entre les sous-domaines qui est modélisé par une condition de transmission non linéaire sur l'interface. Pour surmonter ces difficultés, nous nous appuyons sur la théorie d'homogénéisation périodique, afin de fournir un moyen systématique décrivant le comportement asymptotique de l'évolution de la température dans la pièce. Ceci dans le but d'obtenir des modèles homogénéisés sur un domaine homogène et avec des coefficients homogénéisés, en utilisant un passage à la limite via la convergence à deux échelles [3, 55]. Pour cela, nous proposons une étude théorique par homogénéisation de trois modèles physiques correspondant à différents termes d'échange thermique non linéaires. Ainsi nous commençons, dans un premier lieu, par l'étude du modèle dans le cas où le terme d'échange radiatif  $F$  est une fonction lipschitzienne et monotone, en utilisant un minimum de régularité sur les données et sur la solution. Ensuite, nous considérons un modèle plus général qui décrit une situation physique plus concrète, à savoir le cas où le terme d'échange radiatif  $F$  n'est pas nécessairement une fonction lipschitzienne. Plus précisément le cas où  $F(x) = x|x|$  qui vérifie, tout de même, les hypothèses de monotonie et de continuité. Enfin, nous considérons le cas physique le plus complexe qui décrit plusieurs lois, telles que la loi de Planck ou celle de Stefan-Boltzmann, à savoir le cas où le terme d'échange radiatif est donné par  $F(x) = x|x|^p$ , pour  $p \in \mathbb{N}^*$ . Ce terme peut aussi modéliser les réactions cinétiques sur une interface entre deux particules (voir [26, 66]). Ainsi, l'étude par la méthode d'homogénéisation des différents modèles considérés consiste tout d'abord à établir quelques résultats d'estimations a priori sur la solution des problèmes correspondant à différents termes d'échange radiatif. Cette étape est cruciale et nécessite un traitement spécial, tout en utilisant des espaces appropriés et en faisant appel à des outils d'analyse mathématique, comme le principe du maximum, la positivité de la solution et sa bornitude sur le bord. Puis, en nous basant sur ces résultats, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution du problème d'homogénéisation, dans chacun des cas, en utilisant le degré topologique de Leray-Schauder. Ce dernier est considéré comme un outil plus puissant et plus général et souvent plus facile à utiliser que les théorèmes classiques de

points fixes [56]. Nous proposons, ensuite, un passage à la limite dans le problème d'homogénéisation, via la convergence à deux échelles, pour les différents problèmes considérés. Ensuite, nous identifions les problèmes homogénéisés associés à différents termes d'échange thermique non linéaires puis nous étudions la convergence forte des problèmes d'homogénéisation. Nous terminons cette étude par proposer une approximation des problèmes d'homogénéisation, via un développement asymptotique et une discrétisation par la méthode des éléments finis. Ceci dans le but de montrer qualitativement l'efficacité du processus d'homogénéisation tout en illustrant numériquement la convergence en fonction du paramètre d'échelle  $\epsilon$  et grâce à la construction du correcteur du premier ordre par rapport à  $\epsilon$  et même celui du second ordre lorsque le terme d'échange thermique est décrit par une fonction assez régulière. Enfin nous donnons quelques résultats numériques qui montrent l'efficacité de l'approche proposée.

Dans la suite, nous allons décrire brièvement le contenu de cette thèse.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques outils de base et nous présentons ainsi quelques résultats préliminaires essentiels pour ce travail. Nous donnons quelques résultats fondamentaux, sur les espaces de Sobolev, les espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles et des injections et des inégalités sur les espaces de Sobolev. Ensuite, nous présentons quelques outils de résolution des problèmes non linéaires par la méthode de point fixe, notamment le degré topologique de Leray-Schauder. Nous terminons ce chapitre en introduisant la théorie de l'homogénéisation et en donnant quelques définitions et propriétés sur la convergence à deux échelles.

Le deuxième chapitre porte sur une description physique du modèle de transfert de la chaleur lors de la construction d'une pièce par des matériaux composites. Ainsi, nous commençons, dans un premier lieu, par donner une définition et une présentation physique des matériaux composites. Dans ce cadre, nous donnons un aperçu sur l'intérêt des composites, leurs vastes champs d'applications, leurs mises en forme et procédés de fabrication et leurs enjeux et défis. Ensuite, nous traitons le phénomène de transfert de la chaleur en exposant ses trois modes classiques, puis nous donnons la description du modèle de transfert de la chaleur considéré dans cette thèse. Finalement, nous présentons la géométrie du matériau ainsi que la formulation mathématique du modèle à l'échelle microscopique.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une analyse multi-échelles du problème d'échange thermique issu de la construction d'un matériau composite, dont la géométrie est périodiquement distribuée par rapport à une cellule de référence. Pour cela, nous nous appuyons sur la théorie de l'homogénéisation périodique pour proposer, d'une part, une étude mathématique de ce problème et d'autre part, afin de fournir un moyen systématique décrivant le comportement asymptotique de l'évolution de la température dans la pièce. Ainsi, nous proposons une étude théorique par homogénéisation de trois modèles physiques correspondant à différents termes d'échange thermique non linéaires. Pour ce faire, nous commençons par montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème d'homogénéisation en utilisant le degré topologique de Leray Schauder. Nous proposons

ensuite une étude de la convergence à deux échelles du problème d'homogénéisation. Nous terminons ce chapitre par une identification du problème homogénéisé et par une étude de la convergence forte du problème d'homogénéisation.

Dans le dernier chapitre, nous proposons un développement asymptotique de la solution du problème d'homogénéisation. Nous identifions ainsi les équations homogénéisées associées au problème d'homogénéisation et celles correspondant au correcteur du premier ordre et même celui du second ordre, lorsque le terme d'échange thermique est décrit par une fonction assez régulière. Ensuite, nous donnons les problèmes approchés par discrétisation via la méthode des éléments finis. Enfin, nous donnons des résultats numériques illustrant la convergence en fonction du paramètre d'échelle  $\epsilon$  et justifiant qualitativement l'importance et l'efficacité de l'homogénéisation ainsi que l'utilité des correcteurs du premier et du second ordre dans la convergence du processus d'homogénéisation.

Enfin, nous terminons cette thèse par une conclusion et perspectives.

# Résultats préliminaires

---

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques outils de base et nous présentons quelques résultats préliminaires essentiels pour ce travail. Nous donnons, en particulier, quelques résultats fondamentaux sur les espaces de Sobolev, les espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles et des injections et des inégalités sur les espaces de Sobolev. Ensuite, nous présentons quelques outils de résolution des problèmes non linéaires par la méthode de point fixe, notamment le degré topologique de Leray Schauder. Nous terminons ce chapitre par introduire la théorie de l'homogénéisation et par donner quelques définitions et propriétés sur la convergence à deux échelles.

## 1.1 Notations et définitions

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  pour ( $d \in \mathbb{N}^*$ ) de frontière assez régulière  $\Gamma = \partial\Omega$  et soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions définies respectivement de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^d$ .

- On désigne par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^d$  défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (1.1)$$

dont la norme associée est définie par :

$$|x| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

- On note le gradient de  $\varphi$  par :

$$\nabla\varphi = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_d} \right). \quad (1.3)$$

- Le laplacien de  $\varphi$  s'écrit :

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}. \quad (1.4)$$

- La divergence de  $\psi$  est notée par :

$$\nabla \cdot \psi = \sum_{i=1}^d \frac{\partial\psi_i}{\partial x_i}. \quad (1.5)$$

- On note la dérivée normale de  $\varphi$  par :

$$\nabla\varphi \cdot \nu = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \quad (1.6)$$

où  $\nu$  est la normale à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

- Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  un multi-indice dans  $\mathbb{N}^d$  de longueur  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ , la dérivée partielle d'ordre  $|\alpha|$  de  $\varphi$  notée  $D^\alpha\varphi$ , est définie par :

$$D^\alpha\varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad (1.7)$$

- Soit  $n_1$  et  $n_2$  deux entiers naturels et soit  $Y = ]0, l_1[ \times \dots \times ]0, l_{n_1}[$  avec  $l_i \in \mathbb{R}$ , pour  $i = 1, \dots, n_1$ . Une fonction  $u$  définie de  $\mathbb{R}^{n_1}$  dans  $\mathbb{R}^{n_2}$  est dite  $Y$ -périodique, si elle admet la période  $l_i$  dans la direction  $x_i$ , c'est-à-dire

$$u(x + kl_i e_i) = u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \text{et } \forall i \in \{1, \dots, n_1\},$$

où  $e_i$  est la  $i^{\text{eme}}$  composante de la base canonique.

- On note par  $|\Omega|$  la mesure de Lebesgue de  $\Omega$  et par  $|\Gamma|$  la mesure de Lebesgue  $(d - 1)$  dimensionnelle de  $\Gamma$ .

## 1.2 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous rappelons des définitions et des propriétés de quelques espaces fonctionnels. Nous présentons, en particulier, quelques définitions des espaces de Sobolev, puis nous y introduisons quelques injections de Sobolev, la notion de trace et quelques inégalités de Sobolev. Pour cela, nous commençons par définir les espaces de Lebesgue. Nous renvoyons le lecteur par exemple, à [1, 21, 46, 47], pour plus de détails à propos de ces espaces fonctionnels et de leurs propriétés.

### 1.2.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Soit  $p \in [1, +\infty[$ , on définit l'espace  $L^p(\Omega)$  comme étant l'espace des fonctions mesurables dont la  $p^{\text{ieme}}$  puissance est intégrable, au sens de Lebesgue. L'espace  $L^p(\Omega)$  muni de la norme

$$\|\varphi\|_{p,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.8)$$

est un espace de Banach.

En particulier, pour  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  est l'espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{0,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.9)$$

associée au produit scalaire :

$$(\varphi, \psi)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} \varphi(x)\psi(x)dx. \quad (1.10)$$

$L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions mesurables  $\varphi$ , dont la norme :

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{\substack{M \subset \Omega \\ \text{mes} M = 0}} \sup_{x \in \Omega \setminus M} |\varphi(x)| \equiv \text{ess sup}_{x \in \Omega} |\varphi(x)| \quad (1.11)$$

est finie.  $L^\infty(\Omega)$  muni de la norme (1.11) est un espace de Banach.

Soit  $Y = ]0, l_1[ \times \dots \times ]0, l_d[$  avec  $l_i \in \mathbb{R}$ , pour tout  $i = 1, \dots, d$ , on définit l'espace  $L_{\#}^p(Y)$  comme étant l'espace des fonctions de  $L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$  qui sont  $Y$ -périodiques. Il est défini comme suit

$$L_{\#}^p(Y) = \{u \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d) / u \text{ est } Y\text{-périodique}\}.$$

Avant d'introduire les espaces de Sobolev, nous donnons quelques résultats sur les espaces de fonctions de classe  $C^m$ , pour  $m \in \mathbb{N}$ .

### 1.2.2 Les espaces $C^m(\Omega)$

- On désigne par  $C(\Omega)$  l'espace des fonctions continues sur  $\Omega$ , muni de la norme suivante :

$$\|\varphi\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|. \quad (1.12)$$

- $C^m(\Omega)$  est l'espace des fonctions,  $\varphi$ , qui ont des dérivées partielles  $D^\alpha \varphi$  continues sur  $\Omega$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ , tel que  $|\alpha| \leq m$ .
- On note par  $C_0^m(\Omega)$  le sous-espace de  $C^m(\Omega)$  des fonctions qui s'annulent à l'infini.
- $C^m(\bar{\Omega})$  est un sous-espace de  $C^m(\Omega)$  des fonctions  $\varphi$  telles que  $D^\alpha \varphi$  soit bornée et uniformément continue sur  $\Omega$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ , tel que  $|\alpha| \leq m$ . Il est muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha \varphi(x)|. \quad (1.13)$$

- Pour  $0 < \lambda \leq 1$ , on désigne par  $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$  le sous-espace de  $C^m(\bar{\Omega})$ , des fonctions  $\varphi$  dont les dérivées  $D^\alpha \varphi$  satisfont la condition de Hölder d'exposant  $\lambda$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ , telle que  $|\alpha| = m$ , i.e. il existe  $c > 0$ , telle que

$$|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)| \leq c|x - y|^\lambda \quad \forall x, y \in \Omega \quad (1.14)$$



$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$  est muni de la norme

$$\|\varphi\|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|\varphi\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \max_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)|}{|x - y|^\lambda}. \quad (1.15)$$

- Soit  $Y = ]0, l_1[ \times \dots \times ]0, l_d[$  avec  $l_i \in \mathbb{R}$ , pour tout  $i = 1, \dots, d$ , on définit l'espace  $C_{\#}^\infty(Y)$  comme étant l'espace des fonctions de  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$  qui sont  $Y$ -périodique. Il est défini comme suit

$$C_{\#}^\infty(Y) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) / u \text{ est } Y\text{-périodique}\}.$$

- On désigne par  $D(\Omega)$  l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans  $\Omega$ , dont le dual topologique  $D'(\Omega)$  est l'espace des distributions sur  $\Omega$ .
- $D(\bar{\Omega})$  est l'espace des restrictions à  $\Omega$  des fonctions de  $D(\mathbb{R}^d)$ .

Nous donnons maintenant quelques définitions et propriétés sur les espaces de Sobolev.

### 1.2.3 Espace de Sobolev

Soit  $m$  un entier naturel, on définit l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  par

$$H^m(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) / D^\alpha \varphi \in L^2(\Omega), \text{ pour tout } |\alpha| \leq m \right\} \quad (1.16)$$

où  $D^\alpha$  est la dérivée au sens des distributions d'ordre  $|\alpha|$  de  $\varphi$ .

L'espace de Hilbert  $H^m(\Omega)$  est muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{m,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.17)$$

Pour tout réel  $s = m + \sigma$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et  $0 < \sigma < 1$ , on définit  $H^s(\Omega)$  comme étant l'espace des fonctions  $\varphi \in H^m(\Omega)$  qui vérifient :

$$\int \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)|^2}{|x - y|^{m+2\sigma}} dx dy < +\infty \text{ pour } |\alpha| = m. \quad (1.18)$$

$H^s(\Omega)$  muni de la norme

$$\|\varphi\|_{s,\Omega} = \left( \|\varphi\|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)|^2}{|x - y|^{m+2\sigma}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.19)$$

est un espace de Banach.

L'espace  $H_0^1(\Omega)$  est défini comme étant l'adhérence de  $D(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ . Si la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$

est assez régulière,  $H_0^1(\Omega)$  est défini par

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) / \gamma(\varphi) = \varphi|_{\Gamma} = 0 \right\} \quad (1.20)$$

où  $\gamma$  désigne l'opérateur trace qui est une application linéaire et continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma)$ . L'espace  $H_0^1(\Omega)$  muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} = \|\nabla\varphi\|_{0,\Omega}. \quad (1.21)$$

est un espace de Hilbert, dont le dual topologique est  $H^{-1}(\Omega)$ .

On note par  $\Gamma_0$  une partie de mesure non nulle de  $\Gamma$ , l'espace

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) / \varphi|_{\Gamma_0} = 0 \right\} \quad (1.22)$$

muni de la norme (1.21) est aussi un espace de Hilbert.

Soit  $Y = ]0, l_1[ \times \cdots \times ]0, l_d[$  avec  $l_i \in \mathbb{R}$ , pour tout  $i = 1, \dots, d$ . L'espace  $H_{\sharp}^1(Y)$  est défini comme étant la fermeture de  $C_{\sharp}^{\infty}(Y)$  pour la norme de  $H^1(Y)$ .

### 1.2.4 Injections de Sobolev et application trace

Nous donnons maintenant quelques injections de Sobolev et quelques résultats de continuité de l'application trace sur  $H^m(\Omega)$  et  $H^s(\Omega)$ , qui seront utiles par la suite. Voir par exemple [45, 46], pour plus de détails.

Nous commençons par énoncer le théorème d'injection de Sobolev suivant :

**Théorème 1.1** *Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  de frontière lipschitzienne.*

- i) *Si  $2m < d$ , alors  $H^m(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $L^{p^*}(\Omega)$ , où  $p^* = \frac{2d}{d-2m}$ , et l'injection de  $H^m(\Omega)$  dans  $L^q(\Omega)$  est compacte pour tout  $q < p^*$ .*
- ii) *L'espace  $H^s(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $L^{p^*}(\Omega)$  pour tout  $p^*$  vérifiant  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d}$ .*
- iii) *L'espace  $H^1(\Omega)$  s'injecte continûment et d'une manière compacte dans  $H^{1-\delta}(\Omega)$ , pour tout  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ .*
- iv) *Si  $k$  est un entier, tel que  $0 \leq k \leq m - \frac{d}{2} < k + 1$ , alors  $H^m(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ , pour  $\alpha = m - \frac{d}{2} - k$ , et l'injection de  $H^m(\Omega)$  dans  $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$  est compacte pour tout  $\beta < \alpha$ .*

Nous énonçons également un résultat sur la continuité de l'opérateur trace.

**Théorème 1.2** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  de frontière lipschitzienne, alors il existe une unique application  $\gamma$  linéaire et continue, définie de*

- i)  *$H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ .*
- ii)  *$H^{1-\delta}(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , pour tout  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ .*

- iii)  $H^{1-\delta}(\Omega)$  dans  $H^{\frac{1}{2}-\delta}(\partial\Omega)$ , pour tout  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ .
- iv)  $H^1(\Omega)$  dans  $L^q(\partial\Omega)$ , pour tout  $1 \leq q < p^*$ , avec  $p^* = \frac{2(d-1)}{(d-2)}$  si  $d \geq 3$ , et  $p^* = 2$  si  $d = 2$ .
- v)  $H^{1-\delta}(\Omega)$  dans  $L^{\frac{1}{\delta}}(\partial\Omega)$ , pour tout  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  et pour  $d = 2$ .

### 1.2.5 Quelques estimations et inégalités sur les espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques estimations d'interpolation sur les applications traces et quelques inégalités sur les espaces de Sobolev. Pour plus de détails voir [42, 45, 52].

**Lemme 1.1** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  de frontière lipschitzienne, alors il existe une constante  $C > 0$ , telle que*

$$\|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \text{ tel que } \int_{\Omega} u dx = 0. \quad (1.23)$$

*En particulier, pour  $d = 2$  et pour tout  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ , il existe deux constantes strictement positives  $C_1$  et  $C_2$ , telles que*

$$\|\gamma(u)\|_{L^{\frac{1}{\delta}}(\partial\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{H^{1-\delta}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\delta} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\delta}, \quad \forall u \in H^{1-\delta}(\Omega). \quad (1.24)$$

*Nous énonçons ensuite un résultat sur l'inégalité de Poincaré.*

**Théorème 1.3** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de frontière lipschitzienne. Il existe une constante strictement positive  $C$ , telle que*

$$\|u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \sum_{i=1}^{i=d} \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (1.25)$$

Comme conséquence de ce résultat nous avons :

**Corollaire 1.1** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \sum_{i=1}^{i=d} \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega). \quad (1.26)$$

Nous énonçons également un résultat connu sous le nom du lemme de Gronwall.

**Lemme 1.2** *Soit  $\phi, \varphi$  deux fonctions de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  continues. Supposons qu'il existe  $C > 0$ , telle que*

$$\varphi(t) \leq C + \int_a^t \phi(s)\varphi(s)ds, \quad \forall t \in [a, b],$$

*alors*

$$\varphi(t) \leq C \exp\left(\int_a^t \phi(s)ds\right), \quad \forall t \in [a, b].$$

## 1.3 Les espaces à valeurs vectorielles

Dans cette section, nous présentons certaines propriétés des espaces de Lebesgue et des espaces de Sobolev à valeurs vectorielles. Ces derniers jouent un rôle important dans l'étude des problèmes évolutifs (voir par exemple [1, 22, 70]).

Soient  $p \in [1, +\infty[$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $E$  un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|_E$ .

### 1.3.1 Les espaces $L^p(I, E)$

**Définition 1.1** L'espace  $L^p(I, E)$  est défini par :

$$L^p(I, E) = \left\{ u : I \longrightarrow E \text{ mesurable} / \int_I \|u(t)\|_E^p dt < \infty \right\}.$$

Il est muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(I, E)} = \left( \int_I \|u(t)\|_E^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si  $p = +\infty$ , l'espace  $L^\infty(I, E)$  est défini par

$$L^\infty(I, E) = \{ u : I \longrightarrow E \text{ mesurable} / \exists C > 0, \|u(t)\|_E \leq C \text{ pour presque tout } t \},$$

et muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(I, E)} = \inf \{ C > 0 / \|u(t)\|_E \leq C \text{ pour presque tout } t \}.$$

Nous avons alors les résultats suivants (voir par exemple [22, 70]).

**Proposition 1.1** Pour tout  $p, q$  et  $r \in [1, +\infty[$ , on a

- i) Soit  $u$  une fonction mesurable définie de  $I$  à valeurs dans  $E$ , alors  $u \in L^p(I, E)$  si et seulement s'il existe une fonction  $v \in L^p(I)$ , telle que  $\|u(t)\|_E \leq v$  pour presque tout  $t \in I$ .
- ii) Si  $E$  s'injecte continûment dans  $F$ , alors  $L^p(I, E)$  s'injecte continûment dans  $L^p(I, F)$ .
- iii) Si  $p, q$  et  $r$  sont des réels tels que  $p \leq r \leq q$ , alors  $L^p(I, E) \cap L^q(I, E) \subset L^r(I, E)$ . De plus si  $I$  est borné, on a  $L^p(I, E)$  s'injecte continûment dans  $L^q(I, E)$  pour tout  $q \leq p$ .

**Proposition 1.2** Pour tout  $p \in [1, +\infty[$ , on a

- i)  $L^p(I, E)$  est un espace de Banach.
- ii) L'espace  $\mathcal{D}(I, E)$  est dense dans  $L^p(I, E)$ , où  $\mathcal{D}(I, E)$  est l'espace des fonctions définies sur  $I$  à valeurs dans  $E$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et à support compact dans  $I$ .

**Théorème 1.4** On suppose que l'intervalle  $I$  est ouvert, alors pour tout  $p \in [1, +\infty[$ , on a

- i) Si  $E$  est réflexif, alors l'espace  $L^p(I, E)$  est réflexif et son dual est l'espace  $L^q(I, E')$ , avec  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$  et  $E'$  est le dual de  $E$ .
- ii) Si  $E$  est séparable, alors l'espace  $L^p(I, E)$  est séparable.

Dans la suite, nous allons introduire les espaces de Sobolev à valeurs vectorielles.

### 1.3.2 Les espaces $W^{1,p}(I, E)$

**Définition 1.2** On définit l'espace  $W^{1,p}(I, E)$  par :

$$W^{1,p}(I, E) = \left\{ u \in L^p(I, E) / \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(I, E) \right\}.$$

Il est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(I,E)} = \|u\|_{L^p(I,E)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(I,E)}$$

**Remarque 1.1** D'une manière générale, on utilise souvent pour la résolution des problèmes évolutifs, l'espace suivant

$$W^{1,p}(I, E, F) = \left\{ u \in L^p(I, E) / \frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(I, F) \right\},$$

muni de la norme  $\|u\|_{W^{1,p}(I,E)} = \|u\|_{L^p(I,E)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^q(I,F)}$ , où les espaces  $E$  et  $F$  sont des Banach. En particulier, dans la plupart des cas  $F$  est considéré comme le dual topologique de l'espace  $E$ . Plus précisément, on utilise souvent l'espace  $W(0, T)$ , pour  $I = (0, T)$  avec  $T > 0$ , défini par

$$W(0, T) = \left\{ u \in L^p(0, T, E) : \frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(0, T, E') \right\}.$$

Nous avons les propriétés suivantes (voir par exemple [22, 70]).

**Proposition 1.3** Pour tout  $p \in [1, +\infty[$ , on a

- i)  $W^{1,p}(I, E)$  est un espace de Banach.
- ii) Si  $E$  est séparable alors  $W^{1,p}(I, E)$  est séparable.
- iii) Si  $E$  est séparable réflexif alors  $W^{1,p}(I, E)$  est réflexif.
- iv)  $C^\infty([0, T], E)$  dense dans  $W^{1,p}(0, T; E)$ , où  $C^\infty([0, T], E)$  est l'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  définies de  $[0, T]$  à valeurs dans  $E$ .

Nous avons également le résultat suivant (voir [22]).

**Lemme 1.3** Soient  $E$  un espace de Banach et  $F$  un espace de Hilbert, tels que  $E \subset F$ , avec injection continue, et que  $E$  dense dans  $F$ . On suppose que  $F'$  s'identifie à  $F$  (de sorte que  $E \subset F = F' \subset E'$ ). Soit  $u \in L^2(I, E)$ , tel que  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(I, E')$ , alors  $u \in C(I, F)$  et, pour tout  $t_1, t_2 \in I$ , on a

$$2 \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u \right\rangle dt = \|u(t_2)\|_F + \|u(t_1)\|_F.$$

### 1.3.3 Injection compacte dans les espaces $L^p(I, E)$

Les résultats de compacité les plus connus sur les espaces à valeurs vectorielles sont ceux d'Aubin [10] et de Simon [64]. Le premier suppose la réflexivité des espaces, tandis que celui de Simon généralise le résultat dans le cas de non-réflexivité. Ces résultats sont très importants, en particulier lorsqu'il s'agit d'étudier certaines équations aux dérivées partielles.

#### Lemme 1.4 (Simon)

Soit  $p \in ]1, +\infty[$  et soient  $V, E$  et  $F$  des espaces de Banach tels que  $V \hookrightarrow E \hookrightarrow F$  (injections continues). Si  $A$  est une partie bornée dans  $W^{1,p}(0, T; F)$ , alors  $A$  est relativement compacte dans  $\mathcal{C}([0, T]; F)$ .

Dans le cas de l'espace  $W = \left\{ u \in L^p([0, T], E) : \frac{\partial u}{\partial t} \in L^q([0, T], F) \right\}$ , le théorème suivant donne un résultat similaire connu sous le nom du lemme d'Aubin-Simon, dont la démonstration se trouve par exemple dans [10].

#### Lemme 1.5 (Aubin-Simon)

Soient  $E, V$  et  $F$  des espaces de Banach tels que  $E \subset V \subset F$ . On suppose que l'injection  $E \hookrightarrow V$  est compacte et que l'injection  $V \hookrightarrow F$  est continue. Soient  $p \in [1, +\infty]$  et  $q \in [1, +\infty]$ , alors

- i) Si  $p < +\infty$ , alors l'injection  $W \hookrightarrow L^p([0, T], V)$  est compacte.
- ii) Si  $p = +\infty$  et  $1 < q$ , alors l'injection  $W \hookrightarrow \mathcal{C}([0, T], V)$  est compacte.

## 1.4 Outils pour l'étude de problèmes évolutifs linéaires

Dans cette section, nous présentons un résultat qui sert à montrer l'existence et l'unicité d'une solution des problèmes évolutifs linéaires. C'est en fait l'analogie du lemme de Lax-Milgram pour les problèmes elliptiques (voir par exemple [22]).

Soit  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert, tels que  $V \subset H \subset V'$ , dont les normes respectives sont notées par  $\|\cdot\|_V$  et  $\|\cdot\|_H$ . Soit  $T > 0$  un réel fixé, on considère la forme bilinéaire  $a(t; u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  définie p.p.  $t \in [0, T]$  qui vérifie les propriétés suivantes :

(H<sub>1</sub>) Pour tout  $u$  et  $v \in V$  l'application  $t \rightarrow a(t; u, v)$  est mesurable.

(H<sub>2</sub>) Il existe une constante  $M > 0$ , telle que

$$|a(t; u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \text{pour p.p. } t \in [0, T], \quad \forall u, v \in V.$$

( $H_3$ ) Il existe deux constantes  $\alpha > 0$  et  $C > 0$ , telles que

$$a(t; v, v) \geq \alpha \|u\|_V^2 - C \|u\|_H^2 \text{ pour p.p. } t \in [0, T], \forall u, v \in V.$$

Nous avons alors le résultat suivant

**Lemme 1.6** *Soit  $f \in L^2(0, T; V')$  et  $u_0 \in H$ , on suppose que la forme  $a$  satisfait les hypothèses ( $H_1$ ) – ( $H_3$ ), alors le problème variationnel suivant*

$$\begin{cases} \left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + a(t, u, v) = \langle f, v \rangle, \\ \text{et } u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.27)$$

*admet une unique solution  $u$  appartenant  $C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H)$  et de plus  $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V')$ .*

## 1.5 Point fixe et degrés topologiques

Dans cette section nous donnons quelques résultats sur la théorie de point fixe. Nous présentons en particulier quelques définitions et propriétés sur le degré topologique qui est une notion géométrique très utile en analyse fonctionnelle non linéaire. Pour plus de détails voir par exemple [43]

### 1.5.1 Degré topologique de Brouwer

Soit  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ , si  $f$  est différentiable en  $x_0$ , on note par  $J_f(x_0) = \det f'(x_0)$  le jacobien de  $f$  en  $x_0$ .

**Définition 1.3** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert borné et  $f \in C^1(\bar{\Omega})$ . On désigne par*

$$S := \{x \in \Omega; J_f(x) = 0\},$$

*l'ensemble des points singuliers de  $f$  et on suppose que  $p \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$ . On définit alors le degré topologique par :*

$$\deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \text{sgn} J_f(x),$$

*où  $\text{sgn} J_f(x)$  est le signe de  $J_f(x)$ ; avec  $\deg(f, \Omega, p) = 0$  si  $f^{-1}(p) = \emptyset$ .*

Nous avons alors le résultat cité dans la référence suivante [21], qui rappelle quelques propriétés du degré topologique de Brouwer.

**Théorème 1.5** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert borné et  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$  une application continue. Si  $p \notin f(\partial\Omega)$ , alors il existe un entier  $\deg(f, \Omega, p)$  satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. (Normalité)  $\deg(I, \Omega, p) = 1$  si et seulement si  $p \in \Omega$ , où  $I$  note l'application identité;

2. (Solvabilité) Si  $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$ , alors  $f(x) = p$  admet au moins une solution dans  $\Omega$  ;
3. (Invariance par homotopie )  $\forall t \in [0, 1]$   $f_t : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$  est continue et  $p \notin \bigcup_{t \in [0, 1]} f_t(\partial\Omega)$ , alors  $\deg(f_t, \Omega, p)$  ne dépend pas de  $t \in [0, 1]$  ;
4. (Additivité) Supposons que  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont deux sous-ensembles disjoints et ouverts de  $\Omega$  et  $p \notin f(\bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2)$ . Alors

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p);$$

5.  $\deg(f, \Omega, p)$  est constant sur toute composante connexe de  $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$ .

En 1934, Leray et Schauder (cf. [43]) ont généralisé le degré topologique de Brouwer à des espaces de Banach de dimension infinie. Ainsi, ils ont défini ce qu'on appelle le degré topologique de Leray-Schauder. Ce résultat est devenu un outil très efficace pour montrer différents résultats d'existence pour les équations aux dérivées partielles non linéaires.

### 1.5.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Pour introduire cette notion du degré de Leray-Schauder, nous avons besoin de quelques résultats et définitions [56].

**Lemme 1.7** Soient  $E$  un espace de Banach,  $\Omega \subset E$  un ouvert borné et  $T : \bar{\Omega} \mapsto E$  une application continue compacte. Alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un espace de dimension finie noté  $F$  et une application continue  $T_\epsilon : \bar{\Omega} \mapsto F$  telle que

$$\|T_\epsilon x - Tx\| < \epsilon \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

**Définition 1.4** Soient  $E$  un espace de Banach,  $\Omega \subset E$  un ouvert borné et  $T : \bar{\Omega} \mapsto E$  une application continue compacte. Supposons maintenant que  $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$ . Alors, il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ , le degré de Brouwer  $\deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0)$  est bien défini, où  $T_\epsilon$  est défini comme dans le lemme 1.7. Par conséquent, nous définissons le degré de Leray-Schauder par

$$\deg(I - T, \Omega, 0) = \deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0).$$

**Théorème 1.6** Le degré de Leray-Schauder possède les propriétés suivantes :

1. (Normalité)  $\deg(I, \Omega, 0) = 1$  si et seulement si  $0 \in \Omega$  ;
2. (Solvabilité) Si  $\deg(I - T, \Omega, 0) \neq 0$  alors  $Tx = x$  a une solution dans  $\Omega$  ;
3. (Invariance par homotopie) Soit  $T_t : [0, 1] \times \bar{\Omega} \mapsto E$  continu compact et  $T_t x \neq x$  pour tout  $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$ . Alors  $\deg(I - T_t, \Omega, 0)$  ne dépend pas de  $t \in [0, 1]$  ;



4. (Additivité) Soit  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux sous-ensembles disjoints ouverts de  $\Omega$  et

$$0 \notin (I - T)(\bar{\Omega} - \Omega_1 \cup \Omega_2).$$

Alors

$$\deg(I - T, \Omega, 0) = \deg(I - T, \Omega_1, 0) + \deg(I - T, \Omega_2, 0).$$

## 1.6 Introduction à l'homogénéisation

L'analyse des propriétés macroscopiques des matériaux composites à partir de quantités microscopiques a été initiée par les physiciens Rayleigh, Maxwell et Einstein. Mais ce n'est que dans les années soixante-dix que les physiciens ont réussi à formuler le problème physique des structures composites de façon mathématique. Cette formulation mathématique a initié une nouvelle discipline dans le domaine de l'analyse asymptotique appelée "la théorie de l'homogénéisation". L'objectif majeur de la théorie d'homogénéisation est de fournir un moyen systématique qui modélise le comportement asymptotique d'un milieu microscopiquement hétérogène par un modèle macroscopique homogène conservant les propriétés microscopiques associées aux milieux. Mathématiquement parlant, la théorie de l'homogénéisation donne la convergence des solutions d'un problème aux limites donné, qui a des coefficients fortement oscillants ou une géométrie complexe vers la solution d'un problème aux limites avec des données simples.

### 1.6.1 Problème modèle en homogénéisation

Afin de mieux comprendre cette théorie de l'homogénéisation, nous considérons un problème modèle simple en homogénéisation périodique. Pour cela, soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un domaine borné et supposons que les hétérogénéités de  $\Omega$  sont très petites et régulièrement réparties. Soit  $\epsilon > 0$  le paramètre représentant le rapport de la variable macroscopique par rapport à la variable microscopique. Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D_\epsilon \nabla u_\epsilon) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u_\epsilon = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.28)$$

où la fonction  $D_\epsilon(x) = D(x, \frac{x}{\epsilon})$  pour p.p.  $x \in \Omega$  et elle est périodique (voir [19, 5]). Ici  $x$  désigne la variable macroscopique et  $\frac{x}{\epsilon}$  est la variable microscopique. Pour bien illustrer ce modèle simple, nous considérons le cas où  $\Omega = ]-\pi, \pi[$  et  $D_\epsilon(x) = 0.8 * \cos(x) + \epsilon \sin(\frac{x}{\epsilon})$ . Pour les différentes valeurs de  $\epsilon$ , la fonction  $D_\epsilon$  est présentée graphiquement dans la figure 1.1. La variation à l'échelle macro est donnée par le terme  $0.8 \cos(x)$ , tandis que l'oscillation à l'échelle micro est décrite par  $\epsilon \sin(\frac{x}{\epsilon})$ . En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0, nous rendons les oscillations de plus en plus petites. La simulation numérique

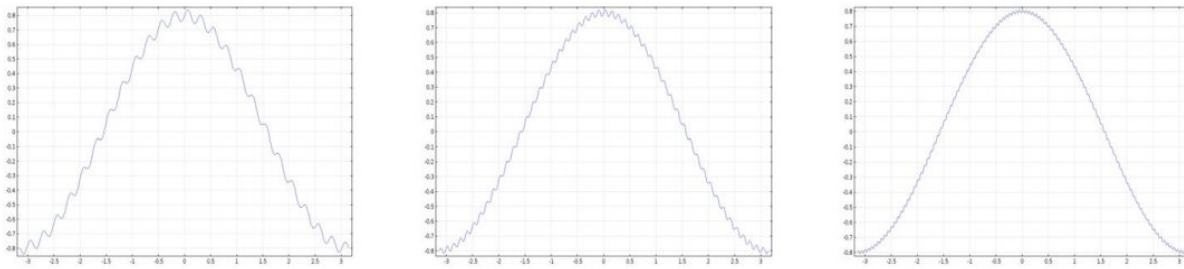


FIGURE 1.1 – Représentation de  $D_\epsilon$  en fonction de  $\epsilon$  : la figure à droite pour  $\epsilon = \frac{1}{100}$  au milieu pour  $\epsilon = \frac{1}{50}$  et à gauche  $\epsilon = \frac{1}{25}$ .

du modèle (1.28) est difficile en raison des micro oscillations. Pour y remédier, nous considérons une démarche qui consiste à déterminer un problème aux limites homogénéisé, qui contient un effet moyen des micro oscillations au lieu de l'impliquer explicitement dans le problème. Notons ce problème aux limites

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D^* \nabla u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.29)$$

où  $D^*$  est le coefficient homogénéisé. L'équation homogénéisée (1.29) ainsi obtenue est mieux adaptée aux simulations numériques et la solution de (1.29) est une approximation de la solution de (1.28). Cependant, la convergence de  $u_\epsilon$  quand  $\epsilon$  tend vers 0 doit être établie. Dans ce contexte, nous précisons que plusieurs méthodes ont été proposées pour l'étude de ce type de convergence. Notamment, la méthode utilisant un développement asymptotique de  $u_\epsilon$  [12], celle utilisant les fonctions de test oscillantes [65, 19] et la méthode utilisant la convergence à deux échelles [3, 5], etc.

Dans ce travail de thèse, nous allons intéresser au cas des structures périodiquement hétérogènes. Ceci est dicté par l'application industrielle que nous considérons. Ainsi, dans le but d'étudier la convergence de  $u_\epsilon$  quand  $\epsilon$  tend vers 0, nous optons pour la convergence à deux échelles, puisqu'elle est mieux adaptée aux problèmes périodiques. Cette dernière est introduite dans le paragraphe suivant.

### 1.6.2 Inégalité de Sobolev et convergence à deux échelles

Dans ce paragraphe, nous présentons, tout d'abord, quelques inégalités sur les espaces de Sobolev définis sur les domaines périodiques, puis nous donnons des définitions et des propriétés sur la convergence à deux échelles.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $3$ ). On décompose  $\Omega$  en  $N(\epsilon)$  cellules élémentaires toutes égales, à une translation près, à  $Y = ]0, \epsilon[^d$ .

On note par  $\epsilon$  la période du domaine. On considère également  $\Omega_\epsilon$  un milieu perforé obtenu à partir de  $\Omega$  auquel on retire une collection de trous identiques de manière périodique. Ces perforations sont présentes en nombre  $N(\epsilon)$  de trous et notés  $(Tr_\epsilon^k)$  avec  $k = 1, \dots, N(\epsilon)$ . La frontière de ces trous est définie par  $\Gamma_\epsilon$ , c'est-à-dire  $\Gamma_\epsilon = \bigcap_{k=1}^{N(\epsilon)} (Tr_\epsilon^k)$  et  $\Gamma = \partial Tr$ .

Nous donnons alors les estimations suivantes sur les espaces de Sobolev définis sur  $\Gamma_\epsilon$  et  $\Omega_\epsilon$  (voir [7]).

**Lemme 1.8** *i) Il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $\epsilon$ , telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega_\epsilon), \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_\epsilon. \quad (1.30)$$

*ii) Il existe deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  indépendantes de  $\epsilon$ , telles que*

$$\sqrt{\epsilon} \|u\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)} \leq C_1 \|u\|_{H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega_\epsilon), \quad (1.31)$$

et

$$\epsilon \|u\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)}^2 \leq C_2 (\|u\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 + \epsilon^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2), \quad \forall u \in H^1(\Omega_\epsilon). \quad (1.32)$$

Nous allons maintenant rappeler quelques résultats sur la convergence à deux échelles qui vont nous servir par la suite dans les passages à la limite par homogénéisation [3, 50].

**Définition 1.5** *Soit  $u_\epsilon$  une suite bornée dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . On dit que  $u_\epsilon$  converge à deux échelles vers  $u_0(t, x, y)$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega, L^2(Y)))$ . S'il existe une sous-suite notée encore  $u_\epsilon$ , telle que pour toute fonction test  $\varphi(t, x, y) \in D(0, T; D(\Omega; C_\#^\infty(Y)))$ , on a :*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega u_\epsilon(t, x) \varphi(t, x, \frac{x}{\epsilon}) dx dt = \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega \int_Y u_0(t, x, y) \varphi(t, x, y) dy dx dt. \quad (1.33)$$

Ainsi, nous avons les résultats suivants

**Lemme 1.9** *i) Pour toute suite bornée  $u_\epsilon$  de  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , on peut extraire une sous-suite notée encore  $u_\epsilon$  et il existe  $u_0(t, x, y) \in L^2(0, T; L^2(\Omega, L^2(Y)))$ , tel que la suite  $u_\epsilon$  converge à deux-échelles vers  $u_0$  et*

$$\|u_0\|_{L^2(0, T; \Omega \times Y)} \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon\|_{L^2(0, T; \Omega)}.$$

*ii) Pour toute suite bornée  $u_\epsilon$  de  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , on peut extraire une sous-suite notée encore  $u_\epsilon$  et il existe  $u_0(t, x, y)$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  et  $u_1(t, x, y)$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega, H_\#^1(Y)/\mathbb{R}))$ , tels que la suite  $u_\epsilon$  converge à deux-échelles vers  $u_0$  et  $\nabla u_\epsilon$  converge à deux-échelles vers  $\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1$ .*

Nous donnons ensuite quelques résultats de compacité dans le cas où  $u_\epsilon$  est définie sur  $\Gamma_\epsilon \subset \Omega$ , pour plus de détails, voir [6, 53].

**Définition 1.6** *On dit qu'une suite bornée  $u_\epsilon$  de  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_\epsilon))$  est convergente à deux échelles vers la fonction  $u_0(t, x, y)$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega, L^2(\Gamma)))$ , s'il existe une sous-suite notée encore  $u_\epsilon$ , telle que pour toute fonction  $\varphi(t, x, y) \in D(0, T; D(\Omega; C_\#^\infty(\Gamma)))$ , on a :*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} u_\epsilon(t, x) \varphi(t, x, \frac{x}{\epsilon}) d\sigma_x dt = \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega \int_\Gamma u_0(t, x, y) \varphi(t, x, y) d\sigma_y dx dt. \quad (1.34)$$

Nous énonçons également les résultats suivants, qui servent à montrer la convergence forte à partir de la convergence à deux échelles (voir [49]).

**Théorème 1.7** *Soit  $p$  tel que  $1 \leq p < +\infty$ ,  $q$  le conjugué de  $p$  et soit  $(u_\epsilon)$  une suite dans  $L^p(\Omega)$  qui converge à deux échelles vers  $u_0$ . Alors*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\epsilon(x) \varphi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \varphi(x, y) dy dx. \quad (1.35)$$

pour toute fonction  $\varphi$  de la forme  $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y)$ , où  $\varphi_1 \in L^{sq}(\Omega)$  et  $\varphi_2 \in L_{\#}^{tq}(Y)$  avec  $1 \leq s, t \leq \infty$ , tel que  $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$ .

**Théorème 1.8** *Soit  $p$  tel que  $1 \leq p < +\infty$  et supposons que  $\varphi$  est de la forme  $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y)$ , où  $\varphi_1 \in L^{sp}(\Omega)$  et  $\varphi_2 \in L_{\#}^{tp}(Y)$  avec  $1 \leq s, t \leq \infty$ , tel que  $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$ . Alors  $\varphi(x, \frac{x}{\epsilon}) \in L^p(\Omega)$  et*

$$\varphi(x, \frac{x}{\epsilon}) \rightarrow \varphi_1(x) \int_Y \varphi_2(y) dy \text{ faiblement dans } L^p(\Omega).$$

# Modélisation du problème

---

Dans ce chapitre, nous présentons une description physique du modèle de transfert de la chaleur lors de la construction d'une pièce par des matériaux composites. Ainsi, nous commençons, dans un premier lieu, par donner une définition et une présentation physique des matériaux composites. Dans ce cadre, nous donnons un aperçu sur l'intérêt des composites, leurs vastes champs d'applications, leurs mises en forme et procédés de fabrication et leurs enjeux et défis. Ensuite, nous traitons le phénomène de transfert de la chaleur en exposant ses trois modes classiques, puis nous donnons la description du modèle de transfert de la chaleur considéré dans cette thèse. Finalement, nous présentons la géométrie du matériau ainsi que la formulation mathématique du modèle à l'échelle microscopique.

## 2.1 Matériaux composites

Les matériaux composites se sont progressivement imposés dans notre vie moderne grâce à leurs nombreux atouts. En effet, ils ont un très bon rapport poids/résistance mécanique, une bonne tenue au vieillissement, en intérieur comme en extérieur et une insensibilité à la corrosion. Ils permettent aussi l'obtention de formes complexes, ainsi que l'intégration de fonctions de bonnes propriétés d'isolation thermique, électrique et phonique et même une bonne adaptation à l'esthétique des formes design. Ceci explique leurs vastes domaines d'applications que ce soit en transports aérien, maritime et ferroviaire, ou bien en bâtiment, automobiles, objets de décoration et d'ameublement, sport et loisirs ou encore aérospatiale [48].

Alors qu'est-ce qu'un matériau composite ? Une définition superficielle pourrait être : un matériau composite est celui dans lequel deux matériaux (ou plus) sont liés ensemble pour former un troisième matériau. Cette définition est très large et loin d'être précise. En effet, pratiquement tous les alliages métalliques, les polymères et la céramique satisfont cette large définition d'un matériau composite car tous ces matériaux contiennent plus d'un type d'atome élémentaire. Par conséquent, avant d'utiliser l'appellation matériau composite, des caractéristiques importantes qui prennent en considération l'échelle physique doivent être satisfaites. Ainsi, tout d'abord, les deux constituants doivent être présents dans des proportions raisonnables. Ensuite, les phases constitutives devraient avoir des propriétés distinctement différentes, de sorte que les propriétés du composite soient sensiblement différentes des propriétés des constituants. Enfin, un composite synthétique est généralement produit

en mélangeant délibérément et en combinant les constituants par divers moyens.

L'utilisation des matériaux composites n'est pas due uniquement à leurs propriétés structurales, mais également à leur usage comme alternative au métal. Ainsi, ils participent à la réduction de la consommation de carburant fossile et à la baisse des gaz à effet de serre. Il est aussi préférable d'utiliser des composites à matrice thermoplastique plutôt qu'à matrice thermodurcissable pour une meilleure recyclabilité. Ceci dans le but de répondre aux nouvelles exigences environnementales tout en préservant les caractéristiques et performances mécaniques ou en améliorant la conductivité électrique ou thermique de ces composites. Un autre avantage de l'usage des composites est qu'ils peuvent être à la fois légers et forts. En choisissant une combinaison appropriée de matrices et de matériaux de renforcement, un nouveau matériau peut être produit de telle sorte qu'il réponde exactement aux exigences d'une application particulière. Les composites offrent également une flexibilité de conception car beaucoup d'entre eux peuvent être moulés en formes complexes. Pour plus d'informations sur les composites nous renvoyons le lecteur aux références classiques, qui sont assez nombreuses en nous contentant de citer [36, 48, 60].

### 2.1.1 Mise en forme des pièces composites

Un produit composite représente l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux non miscibles. La nouvelle structure ainsi obtenue a des propriétés physiques bien supérieures à celles caractérisant les matériaux de base. Les matériaux composites sont généralement constitués de deux à trois composants de base (voir Fig 2.1). Ainsi, la mise en forme des pièces à partir des matériaux composites doivent obéir aux phases suivantes :

- Le renfort : Phase discontinue et souvent filamentaire à très hautes caractéristiques mécaniques, qui assure le principal des contraintes mécaniques du composite (résistance et rigidité, tenue aux chocs).
- La matrice : Phase continue qui assure la cohésion, transfère et répartit les contraintes, protège des agressions extérieures et commande la mise en œuvre.
- Charges et additifs : adhérence fibre/matrice, pigments de coloration...

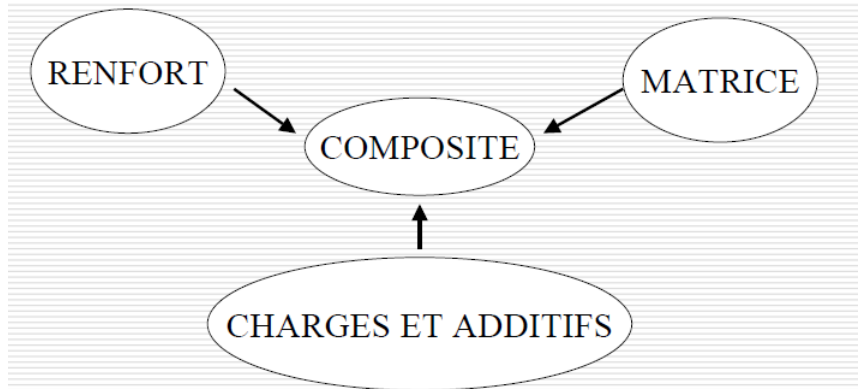


FIGURE 2.1 – Mise en forme des matériaux composites

En général, dans tous les matériaux composites, le renfort est intégré dans un matériau qui joue le rôle de matrice (voir Fig 2.2). La matrice peut être polymère, métallique ou céramique. En effet, les matériaux composites sont souvent classés en se référant au matériau de matrice utilisé, plutôt qu'au matériau de renforcement. Par conséquent les composites peuvent être classés en trois types principaux, basés sur :

- des matrices organiques, qui sont des résines polymères,
- des matrices métalliques
- des matériaux composites à matrice céramique.

Habituellement, le matériau de renfort régit la rigidité et la résistance d'un composite, tandis que le matériau de la matrice gouverne habituellement la stabilité thermique.

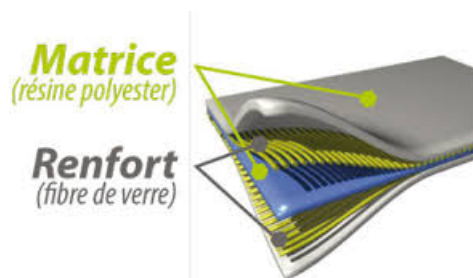


FIGURE 2.2 – Exemple de mise en forme de composites

### 2.1.2 Procédés de fabrication de structures composites

De manière générale, les procédés utilisés pour la fabrication de structures composites entrent tous dans la catégorie très vaste du moulage (voir Fig 2.3). Cependant, les principes physico-chimiques employés diffèrent d'une famille à l'autre. Schématiquement, les matrices thermoplastiques et métalliques sont fondues puis moulées avec leurs renforts, tandis que les matrices thermodurcissables et céramiques sont directement synthétisées sur place, autour de leurs renforts, à partir de réactifs fluides. Ceci est résumé en deux grandes étapes :

- Disposer les fibres et la matrice liquide dans un moule.
- Solidifier la matrice.

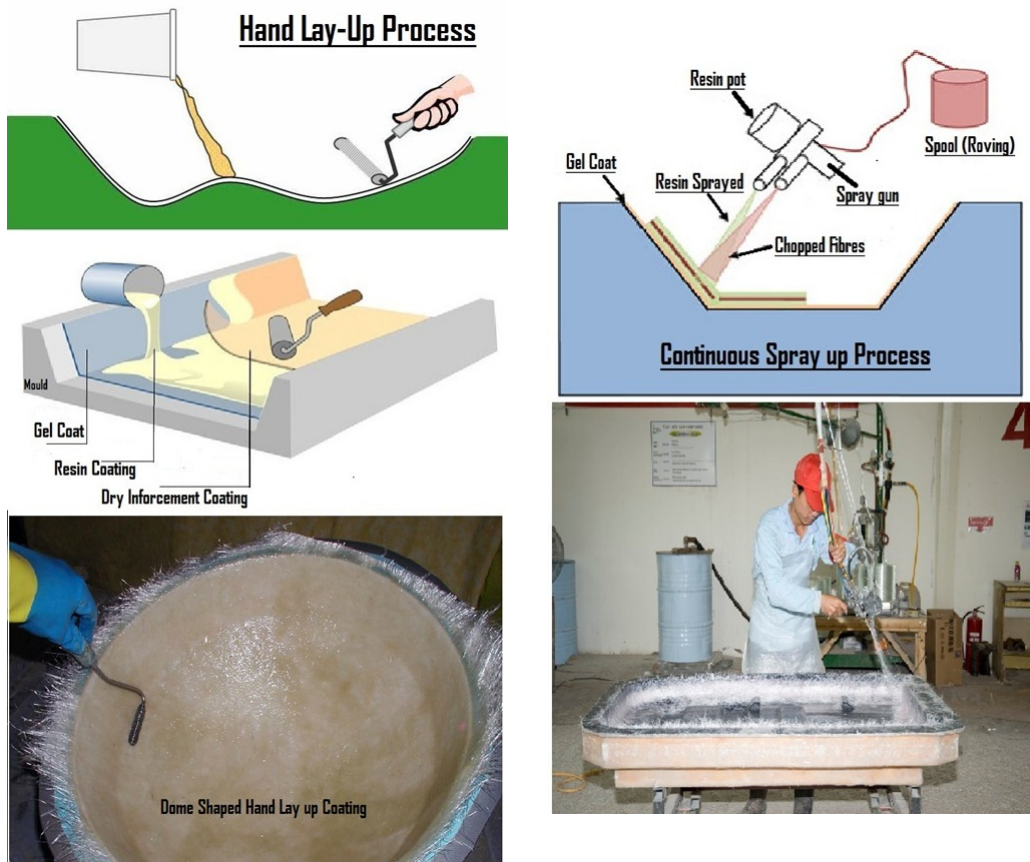


FIGURE 2.3 – Procédure de fabrication des composites basée sur moulage

### 2.1.3 Enjeux et défis des matériaux composites

L'un des défis importants rencontré lors des procédures de fabrication des composites est de pouvoir disposer d'un matériau qui réalise un équilibre particulier des propriétés pour une gamme donnée d'applications. En effet, il faut assurer le dosage correct des constituants. Ceci est primordial pour assurer de bonnes propriétés mécaniques, garantir la forme de la pièce et assurer une température adéquate, tout en minimisant le coût de fabrication. Ceci n'est possible que si l'on assure un bon contrôle du cycle thermique qui accompagne le processus de fabrication tout en prenant en compte plusieurs éléments :

- Tout d'abord il faut prendre en considération l'aspect multi-échelles qui caractérise ces matériaux (voir Fig. 2.4).
  - L'échelle macroscopique : c'est l'échelle de la structure, où l'on reconnaît la géométrie de la structure de l'application. On y trouve également les propriétés physiques apparentes.
  - L'échelle mésoscopique : c'est l'échelle à laquelle on distingue une structure interne au matériau, distribution, taille et forme des phases.



- L'échelle microscopique : c'est l'échelle des constituants des différentes phases du matériau hétérogène qui peut elle-même être hétérogène.
- Les caractéristiques géométriques et la distribution des phases ainsi que les phénomènes physiques impliqués tels que l'écoulement du fluide lors de la construction de la pièce, mais aussi l'échange thermique non linéaire qui est modélisé par la loi de Stefan-Boltzmann.

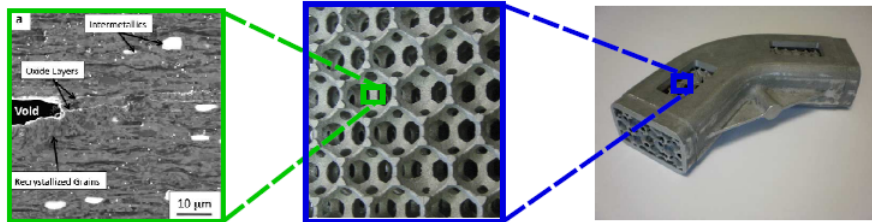


FIGURE 2.4 – Echelles caractéristiques d'une mousse architecturée d'aluminium, microstructure (Dehoff et Babu, 2010), mésostructure et macrostructure (Wikipédia : Mousse métallique, 20/08/14)

La solution la plus adoptée pour surmonter ces difficultés, est basée sur la théorie d'homogénéisation périodique qui consiste à modéliser le milieu en utilisant un paramètre représentant le rapport entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique [34].

## 2.2 Transfert de la chaleur

Le transfert de la chaleur est le résultat de la variation spatiale de la température dans un milieu donné ou dans un milieu adjacent. Il se produit, en général, dès qu'il y a une différence de température dans un même milieu ou entre plusieurs milieux. Ainsi l'énergie thermique, qui en résulte, peut être stockée, convertie vers ou à partir d'autres formes d'énergie, ou tout simplement échangée avec l'environnement. Le transfert de la chaleur se produit dans de nombreux systèmes naturels et techniques. Il est même omniprésent et actif dans une mesure ou dans une autre. Par exemple, le transfert de la chaleur se produit constamment de notre circulation sanguine vers l'air autour de nous. De même l'eau chauffée est évacuée de notre corps pour réchauffer la pièce dans laquelle nous nous trouvons. Si nous quittons la pièce, un léger mouvement (convection) de l'air continuera à exister car les murs ne peuvent jamais être parfaitement isothermes. De tels processus se déroulent dans toute la vie qu'elle soit végétale ou animale et dans l'air qui nous entoure. Ils se produisent également dans toute la terre, qui est chaude au cœur et se refroidit autour de sa surface [63].

### 2.2.1 Modes de transfert de la chaleur

Il existe trois modes classiques de transfert de la chaleur à savoir : le transfert de la chaleur dans les matériaux (conduction : gérée par la loi de Fourier), le transfert de la chaleur dans un fluide (convection : gérée par la loi de refroidissement de Newton) et le transfert de la chaleur dans l'espace

vide (rayonnement : g er e par la loi de Stefan-Boltzmann sur le refroidissement d'un corps dans un grand environnement). Ainsi, la chaleur ne peut être transférée que par trois concepts : conduction, convection et rayonnement. La figure 2.5 montre une analogie qui pourrait être utile pour mieux comprendre ces concepts [44].

### Conduction thermique

C'est le transfert de chaleur par contact physique. Elle se produit, par exemple, lorsque vous appuyez avec votre main sur un volet de fenêtre, lorsque vous placez un pot d'eau sur un élément actif ou lorsque vous placez un fer dans le feu. En bref, la conduction se produit dès qu'il y a une différence de chaleur entre deux milieux ou entre deux points distincts dans le même milieu (voir Fig 2.6).

On peut également définir la conduction comme étant un transfert de la chaleur qui se produit au moyen d'une agitation moléculaire dans un matériau sans aucun mouvement de la matière dans son ensemble [57].

On considère l'exemple d'une tige de métal d'extrémité soumise à une température plus  lev e, L'énergie sera transférée par la tige vers l'extrémité la plus froide, car les particules de vitesse plus élevées entreront en collision avec les plus lentes avec un transfert net d'énergie. Ainsi, le flux  $q$  qui en résulte est régi par la loi de la conduction de la chaleur, également connue sous le nom la loi de Fourier donn e par

$$q = -K\nabla T,$$

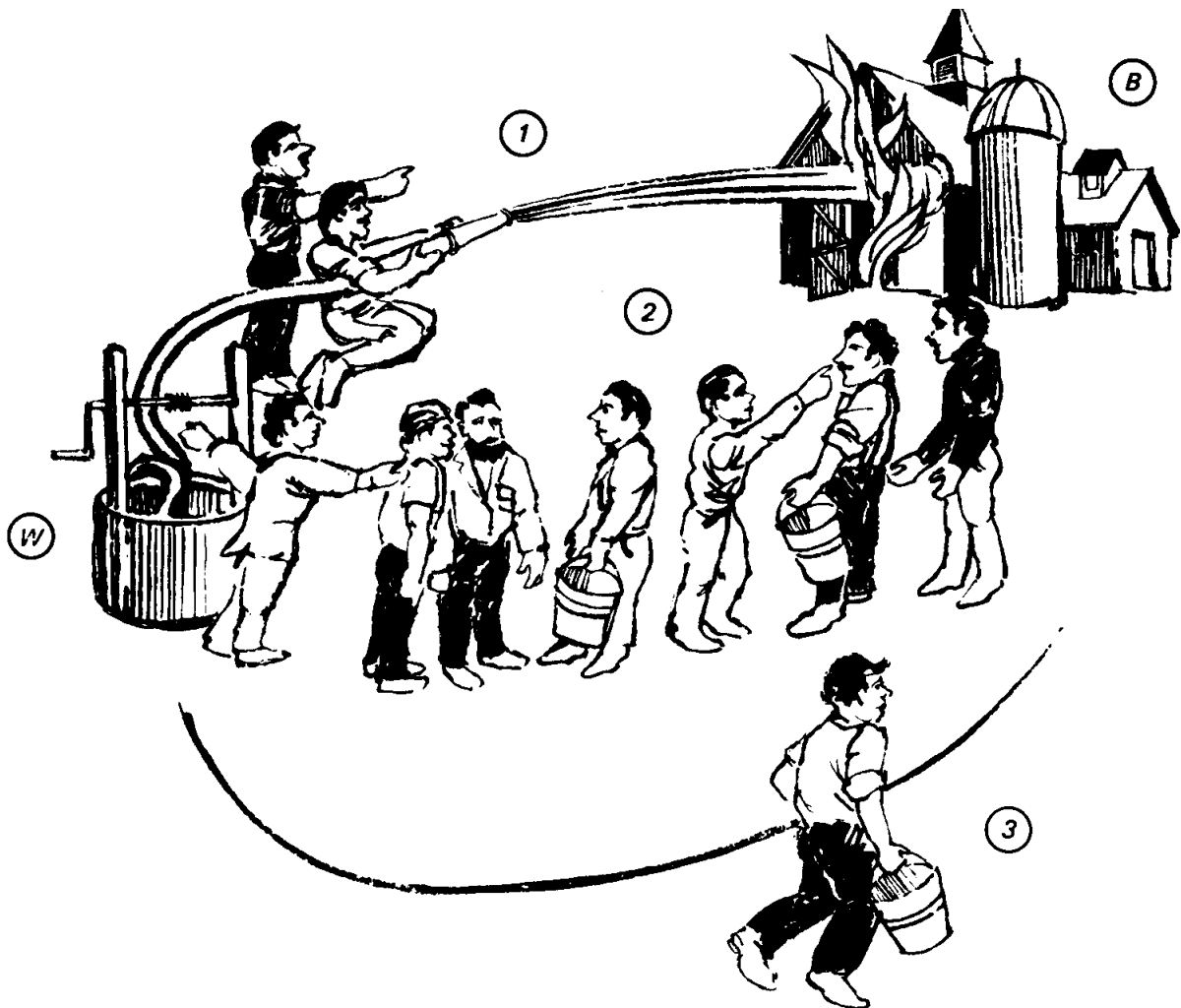
où  $T$  est la température et  $K$  est le tenseur de conductivité thermique.

### Convection thermique

La convection est un transfert de chaleur par un mouvement de masse d'un fluide tel que de l'air ou de l'eau ou encore du gaz [11]. En effet, l'énergie thermique est transférée des lieux chauds aux endroits froids par convection. La convection se produit alors, lorsque les zones plus chaudes d'un liquide ou d'un gaz se déplacent dans les zones froides. Le liquide ou le gaz le plus frais prend alors la place des zones les plus chaudes qui se sont d plac es. Il en résulte un modèle de circulation continue. L'eau bouillante dans une bouilloire est un bon exemple de ces courants de convection (voir fig 2.7).

La convection peut se produire naturellement : convection naturelle ou à cause d'un dispositif de déplacement : convection forc e. Un exemple simple de la convection naturelle se produit dans l'atmosphère, lorsque la surface de la terre est chauff e par le soleil, l'air chaud monte et l'air frais se déplace pour remplir la place lib r e.

Un exemple de la convection forc e est celui du ventilateur qui est un dispositif qui produit artificiellement le mouvement de l'air. L'air dans ce cas se déplace en raison de la rotation du ventilateur.



Considérant que l'eau est analogue à la chaleur et que les gens représentent le milieu de transfert de la chaleur.

- Cas 1** Le tuyau dirige l'eau à partir de (W) vers (B) indépendamment du milieu. Ceci est analogue au rayonnement thermique dans le vide ou dans la plupart des gaz.
- Cas 2** Dans la brigade de seau, l'eau passe à partir de (W) vers (B) à travers le milieu. Ceci est analogue au transfert par conduction.
- Cas 3** Un coureur unique, qui représente le milieu, transporte de l'eau à partir de (W) vers (B). Ceci est analogue au transfert par convection.

FIGURE 2.5 – Explication analogique des trois modes de transfert de la chaleur

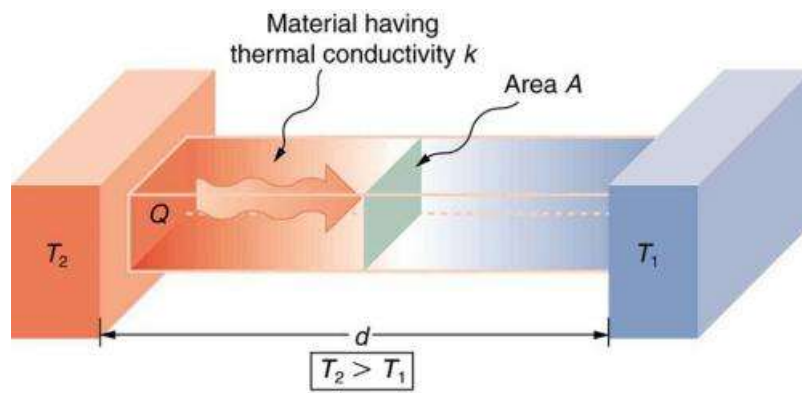
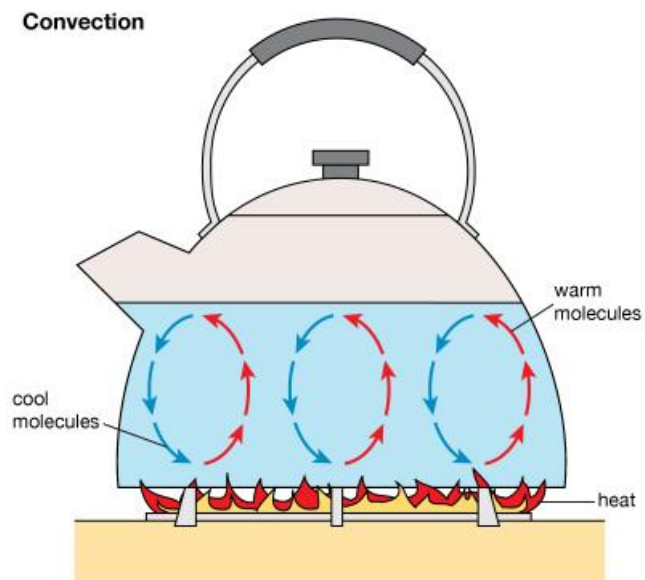


FIGURE 2.6 – Conduction thermique



© 2013 Encyclopædia Britannica, Inc.

FIGURE 2.7 – Convection thermique

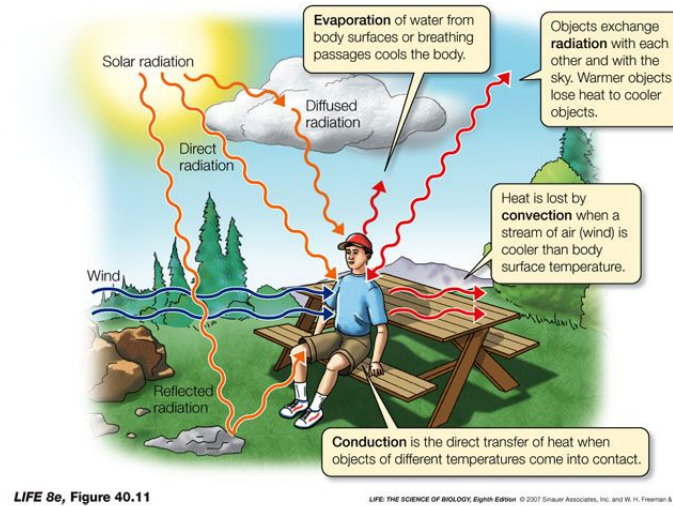


FIGURE 2.8 – Rayonnement thermique

La loi de la convection thermique est connue sous le nom la loi de Newton. Dans ce cas le flux d'énergie  $q$ , produit par l'échange de chaleur entre un fluide en mouvement de température  $T_f$  et une surface de température  $T_s$ , est donné par :

$$q = h(T_s - T_f),$$

où  $h$  est le coefficient d'échange. Pour plus d'informations sur ce mode de transfert d'énergie, on renvoie le lecteur à [11, 38, 41].

## Rayonnement thermique

Le rayonnement est un phénomène de transfert de la chaleur qui n'exige pas de contact entre la source de chaleur et l'objet chauffé comme c'est le cas avec la conduction et la convection. La chaleur peut donc être transmise dans l'espace vide par rayonnement thermique. Il s'agit d'un rayonnement de type électromagnétique. Dans le processus de rayonnement, aucune masse n'est échangée et aucun milieu n'est requis. En effet, le transfert d'énergie est réalisé par des ondes. Tous les matériaux émettent et absorbent de manière continue des ondes électromagnétiques ou des photons. Ils augmentent ou ils diminuent ainsi leurs niveaux d'énergie moléculaire. Ainsi, le rayonnement se transmet d'un milieu à un autre par le déplacement des ondes électromagnétiques ou des photons qui peuvent parcourir de longues distances sans la moindre interaction avec un milieu [35, 61]. L'exemple le plus simple de transfert de la chaleur par rayonnement est celui de la chaleur qui se dégage à partir du soleil (voir Fig 2.8). L'échange thermique par rayonnement se fait suivant un processus général qui dépend de trois éléments :

- L'émission qui se traduit par la conversion de l'énergie fournie à la source en énergie électromagnétique

- La transmission de cette énergie électromagnétique se fait par propagation des ondes avec éventuellement absorption par le milieu traversé.
- La réception qui se traduit par la conversion du rayonnement électromagnétique incident en énergie thermique (absorption).

Par conséquent, le rayonnement subit une variation quantitative et qualitative au cours de sa propagation. De plus, le rayonnement a une influence sur la matière traversée (chauffage, donc modification de la structure) qui influe rétroactivement sur le rayonnement (émission). Il s'en suit que le rayonnement apparait souvent comme une fonction de la température non linéaire, non locale, décrite par des équations différentielles (intégré-différentielles). En plus de la température, le transfert radiatif dépend de l'émissivité du milieu, de la longueur d'onde et de la direction du rayonnement. Cette multiplicité de dépendance de paramètres rend difficile la résolution générale du transfert du rayonnement tant d'un point de vue théorique que numérique.

Le flux de rayonnement par unité de temps émis d'une surface est proportionnel à la quatrième puissance de la température absolue et peut être exprimé avec la loi Stefan-Boltzmann comme suit

$$q = e\sigma T^4$$

où  $T$  est la température absolue de la surface,  $e$  est le coefficient d'émissivité de la surface et  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann. Lorsque  $e = 1$ , une paroi émettant un tel flux est dite corps noir ou radiateur parfait. Un corps noir est défini comme étant un corps hypothétique qui absorbe complètement toutes les longueurs d'ondes des rayonnements thermiques qui s'y rattachent. De tels corps ne reflètent pas la lumière et apparaissent donc noirs si leurs températures sont suffisamment faibles pour ne pas être auto-lumineuses. Tous les corps noirs chauffés à une température donnée émettent des rayonnements thermiques. Le spectre d'émission de tels corps a été décrit par Max Planck [61].

En pratique l'émissivité  $e$  est inférieure à 1. Elle varie avec la longueur d'onde, la direction d'émission et la température de surface. Ainsi, un corps est dit :

- gris si son émissivité est indépendante de la longueur d'onde,
- à émission diffuse si son émissivité est indépendante de la direction d'émission,
- gris et diffusant si son émissivité est indépendante de la longueur d'onde et de la direction d'émission.

Après avoir présenté un aperçu sur les matériaux composites et les modes de transfert de la chaleur, nous allons décrire, dans la section suivante, le modèle mathématique de transfert de la chaleur entre deux phases d'une pièce composite, que nous allons étudier dans cette thèse. Comme nous allons le voir ce modèle fait intervenir les trois modes de transfert présentés précédemment.

## 2.3 Modèle de transfert de la chaleur considéré

Nous nous sommes intéressés à un problème de transfert de la chaleur dans un milieu poreux périodique  $\Omega$ , qui est un sous ensemble ouvert et borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $3$ ) de frontière lipschitzienne. L'ouvert  $\Omega$  est divisé en deux composantes

$$\Omega = \Omega^f \cup \overline{\Omega^s},$$

où  $\Omega^s$  est la partie solide et  $\Omega^f$  représente la partie fluide. Nous supposons que la conductivité thermique du milieu occupant  $\Omega^f$  est  $K^f$  et celle du milieu occupant  $\Omega^s$  est  $K^s$ . Ainsi on écrit.

$$K = \begin{cases} K^f & \text{dans } \Omega^f, \\ K^s & \text{dans } \Omega^s. \end{cases}$$

Par conséquent, la température inconnue  $u$  peut être décomposée, elle même, en deux parties, la première étant la température du fluide (décrite par  $u^f$ ), tandis que la seconde est la température de la partie solide (notée par  $u^s$ ). Alors  $u$  s'écrit comme suit :

$$u = \begin{cases} u^f & \text{dans } (0, T) \times \Omega^f, \\ u^s & \text{dans } (0, T) \times \Omega^s. \end{cases}$$

Le mode de transfert de la chaleur dans la partie solide est la conduction thermique qui est modélisée par une loi de Fourier. Grâce à cette loi, nous pouvons modéliser les échanges de la chaleur par conduction au sein d'un solide en utilisant le vecteur densité de courant thermique  $J$ , qui représente la chaleur transmise à travers une surface par unité de temps. La loi de Fourier donne une expression du vecteur courant de densité thermique en fonction de la variation de la température  $u^s$

Le vecteur  $J$  est proportionnel au taux de variation de la température dans la direction de la conductivité thermique  $K^s$  qui est caractéristique du matériau et qui dépend de la température du matériau.

Donc  $J$  s'écrit sous la forme

$$J = -K^s \nabla u^s$$

A partir du premier principe de la thermodynamique, nous obtenons l'équation mathématique qui modélise le transfert d'énergie par conduction thermique ; c'est-à-dire que l'enthalpie du système est égale à l'échange de la chaleur avec l'extérieur plus les sources internes. Grâce à la loi de Fourier, cette équation s'écrit :

$$\rho^s C_p^s \frac{\partial u^s}{\partial t} = \nabla \cdot (K^s \nabla u^s) + G^s$$

où  $\rho^s$  est la masse volumique du matériau  $\Omega^s$ ,  $C_p^s$  sa capacité calorifique et  $G^s$  est la puissance

correspondant aux sources internes.  $\frac{\partial}{\partial t}$  est la dérivée par rapport au temps.

Dans la partie fluide, nous prenons en compte le transfert de la chaleur par conduction en plus de la convection thermique, due à la différence de température entre les deux milieux. Ceci se traduit par un déplacement macroscopique de particules à une vitesse  $V$ . Ainsi, ce mode de transfert thermique propre aux matériaux fluides est donné par

$$\rho^f C_p^f \left( \frac{\partial u^f}{\partial t} + V \cdot \nabla u^f \right) = \nabla \cdot (K^f \nabla u^f) + G^f.$$

où  $\rho^f$  est la masse volumique du matériau  $\Omega^f$ ,  $C_p^f$  sa capacité calorifique,  $G^f$  est la puissance correspondant aux sources internes et la vitesse est régie sur  $\Omega^f$  par une équation de Stokes avec une viscosité  $\mu$

$$\begin{cases} \mu \Delta V + \nabla p = g \text{ dans } \Omega^f, \\ \nabla \cdot V = 0 \text{ dans } \Omega^f, \\ V = 0 \text{ sur } \partial\Omega^f, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $p$  est la pression du fluide et  $g$  représente les forces portées par le fluide.

L'échange thermique entre les deux milieux  $\Omega^s$  et  $\Omega^f$  produit par le rayonnement thermique est décrit par un terme non linéaire. Ainsi la continuité de la température sur l'interface  $\Gamma$  s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} u^s(t, x) &= u^f(t, x) \\ -K^s \nabla u^s \cdot n_1 &= -K^f \nabla u^f \cdot n_2 + F(u^f) \end{aligned}$$

où  $n_1$  et  $n_2$  sont les vecteurs normaux extérieur et intérieur à  $\Gamma$ .

Dans l'étude mathématique que nous allons proposer, une attention particulière sera donnée à ces équations et plus précisément au terme de radiation qui est modélisé par  $F(u^f)$ . Par conséquent, notre étude théorique et numérique par homogénéisation sera consacrée à trois types de radiations qui correspondent à des situations physiques associées aux réactions cinétiques généralisant la loi de Stefan-Boltzmann et la loi de Newton. Notamment, les cas où :

- $F$  est lipschitzienne.
- $F(u^f) = \sigma |u^f| u^f$ .
- $F(u^f) = \sigma |u^f|^p u^f$  (avec  $p$  un entier, tel que  $p \in \mathbb{N}^*$ ).

où  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann.



Par conséquent, la température inconnue  $u$  est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^f}{\partial t} - \nabla \cdot (K^f \nabla u^f) + V \cdot \nabla u^f = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega^f, \\ \frac{\partial u^s}{\partial t} - \nabla \cdot (K^s \nabla u^s) = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega^s, \\ u^s(t, x) = u^f(t, x) \text{ sur } (0, T) \times \Gamma, \\ -K^s \nabla u^s \cdot n_1 = -K^f \nabla u^f \cdot n_2 + F(u^f) \text{ sur } (0, T) \times \Gamma \\ u^f(t, x) = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_{in} \text{ sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

avec  $u_{in}$  est une fonction donnée et  $V$  est la vitesse du fluide solution du problème (2.1).

## 2.4 Formulation du problème à l'échelle locale

Dans cette section, nous présentons une description mathématique du problème à l'échelle microscopique. Ainsi, nous commençons, dans un premier temps, par la description de la structure poreuse que nous considérons. A ce stade, l'hypothèse physique principale que la géométrie du matériau est périodique et, par conséquent, la propriété d'invariance par translation peut être appliquée. Nous allons, par la suite, donner une description mathématique des processus locaux.

### 2.4.1 L'approximation $\epsilon$ -périodique du matériau

En ce qui concerne la question du comportement microscopique du matériau composite occupant  $\Omega$ , nous supposons que les hétérogénéités sont très faibles par rapport à la taille et qu'elles sont uniformément réparties. C'est une hypothèse réaliste pour une large gamme d'applications [19]. Du point de vue mathématique, on peut modéliser cette distribution en supposant qu'elle soit périodique (voir Fig 2.10). Cette périodicité peut être représentée par un paramètre assez petit noté  $\epsilon$ . Considérons  $Y = ]0, l_1[ \times \dots \times ]0, l_d[ \subset \mathbb{R}^d$  une cellule représentative décomposée en deux parties,  $Y_f$  qui représente le milieu fluide, et  $Y_s$  qui représente le milieu solide, tels que

$$Y = Y_f \cup \overline{Y_s},$$

dont la frontière de  $Y_s$ , notée  $\Gamma = \partial Y_s$ , est supposée lipschitzienne et  $Y_f$  est supposée connexe (voir Fig 2.9).

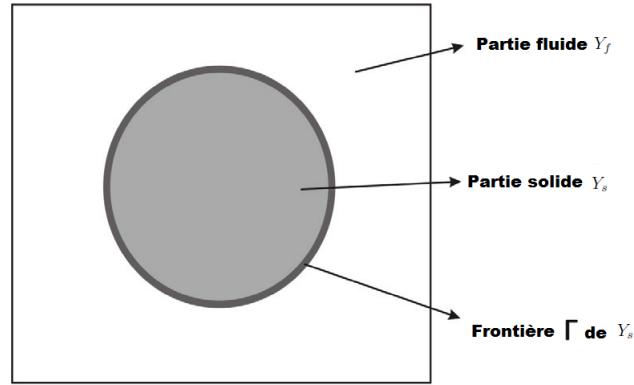


FIGURE 2.9 – Exemple d'une cellule représentative

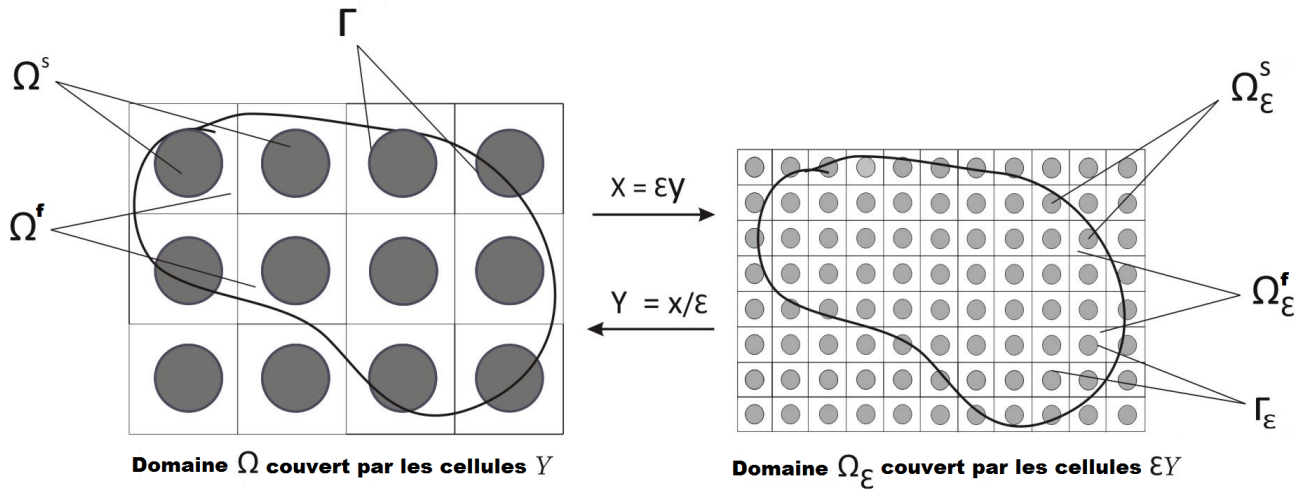


FIGURE 2.10 – Mise à l'échelle  $\epsilon$ -périodique du domaine  $\Omega$

Puisque le domaine  $\Omega$  peut être considéré comme une réunion par translations réduites des  $Y$ , on définit ces translations comme suit

$$Y_i^k := k_l + Y_i, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

où  $k_l = (k_{l1}, \dots, k_{ld})$  et  $i = s, f$ . Quant aux translations des frontières des  $Y^s$ , elles sont définies comme suit

$$\Gamma_k := k_l + \Gamma,$$

Grâce à cette construction on peut définir une correspondance entre  $x \in \Omega$  et  $y \in Y$  de la manière suivante

$$\forall x \in \Omega, \exists k \in \mathbb{Z}^d \text{ et } \exists y \in Y \text{ tels que } x = \epsilon(k_l + y).$$

Nous définissons l'ensemble  $Z_\epsilon$  par

$$Z_\epsilon = \left\{ k \in \mathbb{Z}^d / \epsilon Y_i^k \cap \Omega \neq \emptyset, i = s, f \right\}.$$

Puis nous supposons que

$$\partial\Omega \cap \left( \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (\epsilon \Gamma_k) \right) = \emptyset. \quad (2.3)$$

On peut donc définir les deux parties de  $\Omega$  et leurs interfaces

$$\Omega_\epsilon^i = \Omega \cap \left( \bigcup_{k \in Z_\epsilon} (\epsilon Y_i^k) \right), i = s, f, \quad \Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon^s \quad (2.4)$$

A partir de (2.3), il est clair que

$$\partial\Omega \cap \Gamma_\epsilon = \emptyset, \quad (2.5)$$

et à partir de (2.4), on obtient

$$\Omega = \Omega_\epsilon^f \cup \overline{\Omega_\epsilon^s}.$$

## 2.4.2 Position du modèle à l'échelle microscopique

Dans le but de donner la description mathématique du problème à l'échelle microscopique, considérons  $\epsilon > 0$  le paramètre de périodicité et notons par  $u_\epsilon$ , la température qui règne dans le milieu  $\Omega$ , définie par

$$u_\epsilon = \begin{cases} u_\epsilon^f & \text{dans } (0, T) \times \Omega_\epsilon^f, \\ u_\epsilon^s & \text{dans } (0, T) \times \Omega_\epsilon^s. \end{cases}$$

Le problème que nous allons étudier dans cette thèse, consiste à trouver  $u_\epsilon$  solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} - \nabla \cdot (K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f) + V_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon^f = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega_\epsilon^f, \\ \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} - \nabla \cdot (K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s) = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega_\epsilon^s, \\ u_\epsilon^s(t, x) = u_\epsilon^f(t, x) \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_\epsilon, \\ -K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \cdot n_1 = -K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \cdot n_2 + \epsilon F(u_\epsilon^f) \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_\epsilon \\ u_\epsilon^f(t, x) = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u_\epsilon(0, x) = u_{in} \text{ sur } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

où le tenseur de conductivité dans la partie fluide  $K_\epsilon^f$  est défini par

$$K_\epsilon^f = K^f\left(t, x, \frac{x}{\epsilon}\right), \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega_\epsilon^f,$$

et  $K_\epsilon^s$  le tenseur de conductivité dans la partie solide est défini par

$$K_\epsilon^s = K^s(t, x, \frac{x}{\epsilon}), \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega_\epsilon^s.$$

et  $V_\epsilon$  est la vitesse du fluide

$$V_\epsilon(x) = V(x, \frac{x}{\epsilon}) \quad \text{dans} \quad \Omega_\epsilon^f,$$

telle que  $V_\epsilon$  solution de l'équation de Stokes dans  $\Omega_\epsilon^f$ .

# Etude théorique par homogénéisation du problème

---

Dans ce chapitre, nous présentons une analyse multi-échelles d'un problème d'échange thermique issu de la construction d'un matériau composite. Ce problème modélise l'évolution de la température dans une pièce composite, dont sa géométrie est périodiquement distribuée par rapport à une cellule de référence. Ainsi, la pièce est formée par un milieu hétérogène composé de deux sous-domaines. Ce modèle est régi par un problème parabolique, faisant intervenir un champ de vecteur solution d'une équation de Stokes. La difficulté majeure liée à la résolution de ce problème réside en général dans la présence d'un échange thermique entre les sous-domaines qui est modélisé par une condition de transmission non linéaire sur l'interface. Pour pallier cette difficulté, nous nous appuyons sur la théorie de l'homogénéisation périodique pour proposer, d'une part, une étude mathématique de ce problème et d'autre part, afin de fournir un moyen systématique décrivant le comportement asymptotique de l'évolution de la température dans la pièce. Pour cela, nous proposons une étude théorique par homogénéisation de trois modèles physiques correspondant à différents termes d'échange thermique non linéaires. Ainsi, nous commençons par montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème d'homogénéisation en utilisant le degré topologique de Leray Schauder. Nous proposons ensuite une étude de la convergence à deux échelles du problème d'homogénéisation. Nous terminons ce chapitre par une identification du problème homogénéisé et par une étude de la convergence forte du problème d'homogénéisation.

## 3.1 Position du problème

Dans ce paragraphe, nous commençons encore une fois par rappeler la description de la géométrie  $\epsilon$ -périodique de la micro structure. Ensuite, nous exposons la formulation mathématique décrivant le modèle microscopique d'évolution de la température dans chaque composante du matériau. Nous terminons par donner quelques hypothèses sur les données et quelques résultats de base utiles pour la suite de ce travail.

### 3.1.1 Géométrie du matériau composite

Soit  $\{\epsilon\}$  une suite de nombres réels strictement positifs destinée à tendre vers 0. On considère un matériau composite  $\Omega$ , qui est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , pour  $(d = 2, 3)$  de frontière  $\partial\Omega$  lipschitzienne, divisé en deux composantes liquide et solide (voir figure 3.1).

Ceci signifie que  $\Omega$  est décrit comme suit

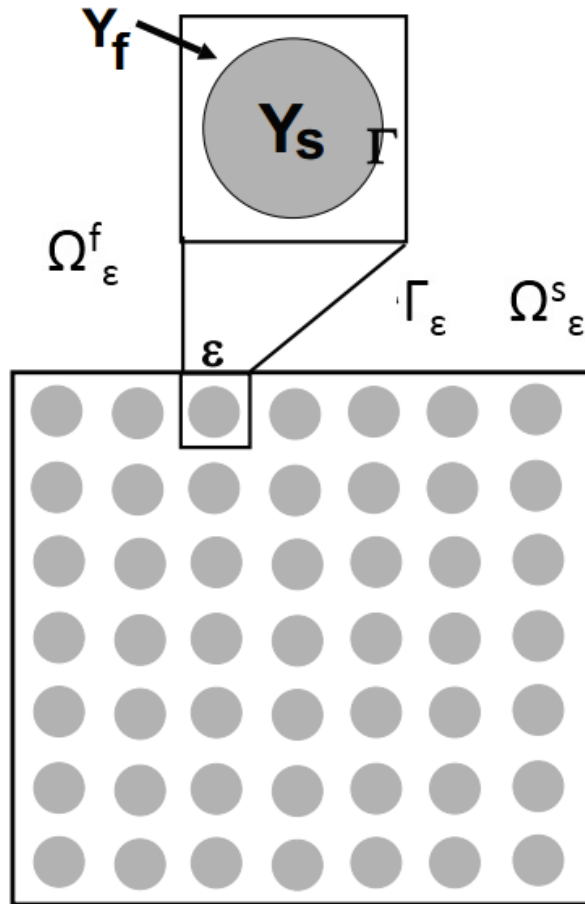


FIGURE 3.1 – Représentation de  $\Omega$ .

$$\Omega = \Omega_\epsilon^f \cup \overline{\Omega_\epsilon^s},$$

avec

$$\Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon^s \quad \text{et} \quad \partial\Omega \cup \Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon^f. \quad (3.1)$$

Les microstructures de  $\Omega_\epsilon^i$  (pour  $i = s, f$ ) et  $\Gamma_\epsilon$  sont périodiques. Elles sont générées par la répétition des cellules de référence  $Y_i$  (pour  $i = s, f$ ) et  $\Gamma$ . Ces cellules de références  $Y_f$  et  $Y_s$  sont deux ouverts non vides de  $Y = ]0, l_1[ \times \dots \times ]0, l_d[ \subset \mathbb{R}^d$ , vérifiant

$$Y = Y_f \cup \overline{Y_s}.$$

On suppose que la frontière  $\Gamma = \partial Y_s$  est lipschitzienne et que  $Y_f$  est connexe. On définit  $Y_i^k$  (la translation de  $Y_i$ ) par

$$Y_i^k := k_l + Y_i, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

où  $k_l = (k_1 l_1, \dots, k_d l_d)$  et  $i = s, f$ . Sa frontière est définie par

$$\Gamma_k := k_l + \Gamma.$$

Ainsi on définit les composantes de  $\Omega$  et leurs frontières comme suit

$$\Omega_\epsilon^i = \Omega \cap \left( \bigcup_{k \in Z_\epsilon} (\epsilon Y_i^k) \right), \quad i = s, f, \quad (3.2)$$

et

$$\Gamma_\epsilon = \bigcup_{k \in Z_\epsilon} (\epsilon \Gamma_i^k), \quad (3.3)$$

où l'ensemble  $Z_\epsilon$  est donné par

$$Z_\epsilon = \left\{ k \in \mathbb{Z}^d / \epsilon Y_i^k \cap \Omega \neq \emptyset, i = s, f \right\}.$$

En se basant sur ces définitions et constructions, on définit une correspondance entre  $x \in \Omega$  et  $y \in Y$  de la manière suivante

$$\forall x \in \Omega, \exists k \in \mathbb{Z}^d \text{ et } \exists y \in Y \quad \text{tels que} \quad x = \epsilon(k_l + y),$$

de plus, le domaine  $\Omega$  est défini par

$$\Omega = \bigcup_{k \in Z_\epsilon} (\epsilon Y^k). \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Equations du modèle

Dans cette section, nous allons rappeler tout d'abord les équations microscopiques associées au modèle d'échange thermique dans une pièce composite. Ces équations décrivent le comportement microscopique de la température entre les deux composants du matériau  $\Omega$ . Ainsi, la température inconnue  $u_\epsilon$  peut être décomposée en deux parties, la première étant la température du fluide notée par  $u_\epsilon^f$ , tandis que la seconde est la température du solide notée  $u_\epsilon^s$ . La température  $u_\epsilon$  s'écrit alors

$$u_\epsilon = \begin{cases} u_\epsilon^f & \text{dans } (0, T) \times \Omega_\epsilon^f, \\ u_\epsilon^s & \text{dans } (0, T) \times \Omega_\epsilon^s. \end{cases}$$

En tenant compte de la continuité de  $u_\epsilon$  sur l'interface  $\Gamma_\epsilon$ , le transfert radiatif entre les deux composantes de  $\Omega$  est modélisé par une condition aux limites du type

$$-K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \cdot n_1 = -K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \cdot n_2 + \epsilon \sigma F(u_\epsilon^f), \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_\epsilon,$$

où  $n_1$  et  $n_2$  sont respectivement les normales extérieure et intérieure à  $\Gamma_\epsilon$ ,  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann et  $F$  désigne la fonction qui modélise l'échange radiatif entre les deux composantes de  $\Omega$ .

Ainsi le modèle décrivant le problème de transfert de la chaleur dans un matériau composite est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} - \nabla \cdot (K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f) + V_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon^f = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega_\epsilon^f, \\ \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} - \nabla \cdot (K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s) = 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega_\epsilon^s, \\ u_\epsilon^s(t, x) = u_\epsilon^f(t, x) \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_\epsilon, \\ -K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \cdot n_1 = -K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \cdot n_2 + \epsilon \sigma F(u_\epsilon^f) \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_\epsilon, \\ u_\epsilon^f(t, x) = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u_\epsilon^f(0, x) = u_{in}^f \text{ sur } \Omega_\epsilon^f, \\ u_\epsilon^s(0, x) = u_{in}^s \text{ sur } \Omega_\epsilon^s, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

où  $u_{in}^f$  et  $u_{in}^s$  sont des fonctions données,  $K_\epsilon^f$  et  $K_\epsilon^s$  désignent respectivement le tenseur de conductivité dans la partie fluide et liquide définis respectivement par

$$K_\epsilon^f = K^f(t, x, \frac{x}{\epsilon}), \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega_\epsilon^f$$

et

$$K_\epsilon^s = K^s(t, x, \frac{x}{\epsilon}), \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega_\epsilon^s,$$

et  $V_\epsilon$  est la vitesse du fluide définie par

$$V_\epsilon(x) = V(x, \frac{x}{\epsilon}) \quad \text{dans} \quad \Omega_\epsilon^f,$$

telle que  $V$  est  $Y$ -périodique et que  $V(x, y)$  est solution de l'équation de Stokes suivante dans  $\Omega_\epsilon^f$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\epsilon^2 \mu \Delta V_\epsilon + \nabla p_\epsilon = g_\epsilon \text{ dans } \Omega_\epsilon^f, \\ \nabla \cdot V_\epsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\epsilon^f, \\ V_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon^f, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

où  $p_\epsilon$  est la pression du fluide,  $g_\epsilon$  désigne la densité de force exercée par le fluide et  $\mu$  est la viscosité du fluide. C'est une constante positive mise en échelle par  $\epsilon^2$ .



Nous précisons que dans ce chapitre nous allons étudier trois modèles différents associés à trois types d'échange radiatif correspondant à différentes expressions de la fonction d'échange  $F$ . Selon ces expressions, nous posons les hypothèses nécessaires sur les données, puis nous introduisons les espaces les plus appropriés pour l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du modèle (3.5) et permettant un passage à la limite rigoureux par homogénéisation.

### 3.1.3 Hypothèses sur les données et estimations de base

Dans cette section, nous donnons quelques hypothèses communes sur les données du modèle pour les différents types d'échanges radiatifs, puis nous définissons la solution faible du problème d'homogénéisation (3.5). Nous donnons ensuite quelques estimations sur la solution de l'équation de Stokes.

Nous commençons alors par introduire les hypothèses suivantes sur les données et les paramètres du modèle.

**(H1)** Les tenseurs  $K^s(t, x, y)$ ,  $K^f(t, x, y)$  sont respectivement dans  $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega; L^\infty(Y^s)))$  et  $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega; L^\infty(Y^f)))$ . Ils sont aussi périodiques, symétriques et ils vérifient les conditions suivantes

$$\forall v \in \mathbb{R}^d, \forall t \in ]0, T[, \forall x \in \Omega, \forall y \in Y_f, \quad \alpha_1 |v|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d K^f(t, x, y) v_i v_j,$$

et

$$\forall v \in \mathbb{R}^d, \forall t \in ]0, T[, \forall x \in \Omega, \forall y \in Y_s, \quad \alpha_2 |v|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d K^s(t, x, y) v_i v_j,$$

où  $0 < \alpha_i$ , pour  $i = 1, 2$ , sont des constantes données.

**(H2)** Les seconds membres des conditions initiales  $u_{in}^f$  (resp.  $u_{in}^s$ ) sont dans  $L^\infty(\Omega_\epsilon^f)$  (resp.  $L^\infty(\Omega_\epsilon^s)$ ).

**(H3)** La fonction  $F$  est continue,  $F(0) = 0$  et pour tout  $t_1, t_2$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $(F(t_1) - F(t_2))(t_1 - t_2) \geq 0$ .

Dans la suite, afin d'étudier l'existence et l'unicité du problème d'homogénéisation (3.5), nous donnons la définition de sa solution faible qui est énoncée comme suit

**Définition 3.1** *Sous les hypothèses (H<sub>1</sub>) – (H3), on dit que  $u_\epsilon$  est une solution faible de (3.5), si*

$$u_\epsilon = (u_\epsilon^f|_{\Omega_\epsilon^f}, u_\epsilon^s|_{\Omega_\epsilon^s}) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \text{ et } u_\epsilon \text{ vérifie}$$

$$\left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, w_\epsilon^f \right\rangle_{(H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f))', H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx + \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, w_\epsilon^s \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla w_\epsilon^s dx \quad (3.7)$$

$$+ \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla w_\epsilon^f w_\epsilon^f dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} F(w_\epsilon^f) w_\epsilon^f d\sigma_x = 0, \quad \forall w_\epsilon = (w_\epsilon^f|_{\Omega_\epsilon^f}, w_\epsilon^s|_{\Omega_\epsilon^s}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Nous donnons maintenant quelques estimations a priori sur la solution de l'équation de Stokes qui sont très utiles par la suite. Ainsi, on note par  $(V_\epsilon, p_\epsilon)$  la solution de (3.6), définie sur  $\Omega_\epsilon^f$ , nous avons d'une part  $V_\epsilon \in H^2(\Omega_\epsilon^f) \cap H_0^1(\Omega_\epsilon^f)$ . D'autre part, elle satisfait les estimations, données dans le lemme suivant (voir [2, 4, 67])

**Lemme 3.1** *Il existe une extension  $(\tilde{V}_\epsilon, \tilde{p}_\epsilon)$  de la solution  $(V_\epsilon, p_\epsilon)$  qui satisfait les estimations suivantes*

$$\|\tilde{V}_\epsilon\|_{L^2(\Omega)^d} + \epsilon \|\nabla \tilde{V}_\epsilon\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \leq C,$$

$$\|\tilde{p}_\epsilon\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C,$$

et

$$\|V_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)^d} + \epsilon \|\nabla V_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)^{d \times d}} \leq C,$$

où  $C$  est une constante générique positive indépendante de  $\epsilon$ .

## 3.2 Etude par homogénéisation des modèles d'échange thermique

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le problème d'homogénéisation (3.5) pour les différents types de fonctions d'échange radiatif  $F$ . Ceci dans le but d'obtenir des modèles homogénéisés sur un domaine homogène et avec des coefficients homogénéisés, en utilisant un passage à la limite via la convergence à deux échelles. Pour cela, nous montrons tout d'abord quelques résultats d'estimations a priori sur la solution. Ensuite, en se basant sur ces résultats, nous proposons une étude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème d'homogénéisation (3.5), dans chacun des cas, en utilisant le degré topologique de Leray-Schauder. Nous terminons cette étude, par un passage à la limite dans le problème d'homogénéisation (3.5), quand  $\epsilon$  tend vers 0, en utilisant la convergence à deux échelles, pour les différents termes d'échange radiatif. Ainsi nous commençons, dans un premier lieu, par l'étude du modèle dans le cas où le terme d'échange radiatif  $F$  est une fonction lipschitzienne (voir [15]). Ensuite, nous considérons un modèle plus général qui décrit une situation physique plus concrète, à savoir le cas où le terme d'échange radiatif  $F$  n'est pas nécessairement une fonction lipschitzienne. Plus précisément le cas où  $F(x) = x|x|$  qui satisfait les hypothèses de monotonie et de continuité (voir [16]). Enfin, nous considérons le cas physique le plus complexe qui décrit plusieurs lois, telles que la loi de Planck ou celle de Stefan-Boltzmann, à savoir le cas où le terme d'échange radiatif est donné par  $F(x) = x|x|^p$ , pour  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Dans toute la suite de ce travail, nous notons par  $C$  une constante générique strictement positive.

### 3.2.1 Etude du modèle avec terme d'échange radiatif lipschitzien

Nous considérons le problème d'homogénéisation pour le modèle avec terme d'échange radiatif lipschitzien dont la formulation faible s'écrit

Trouver  $u_\epsilon = (u_\epsilon^f|_{\Omega_\epsilon^f}, u_\epsilon^s|_{\Omega_\epsilon^s}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  et  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  solution de

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, w_\epsilon^f \right\rangle_{(H_0^1(\Omega_\epsilon^f))', H_0^1(\Omega_\epsilon^f)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx + \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, w_\epsilon^s \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla w_\epsilon^s dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f w_\epsilon^f dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_\epsilon^f) w_\epsilon^f d\sigma_x = 0, \quad \forall w_\epsilon = (w_\epsilon^f|_{\Omega_\epsilon^f}, w_\epsilon^s|_{\Omega_\epsilon^s}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $F$  est une fonction lipschitzienne.

Dans la suite, nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.8). Pour ce faire, nous établissons quelques estimations a priori sur la solution qui vont nous servir également pour étudier les convergences nécessaires pour l'identification du problème homogénéisé.

#### Résultat d'existence et d'unicité du problème d'homogénéisation

Pour montrer l'existence de la solution du problème (3.8), nous utilisons le degré topologique de Leray-Schauder. Pour cela, nous commençons par montrer le lemme suivant

**Lemme 3.2** *Supposons que les hypothèses (H1) – (H3) sont satisfaites, alors il existe une constante  $C$ , indépendante de  $\epsilon$ , telle que la solution faible du problème microscopique (3.8) satisfait l'estimation a priori suivante*

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C, \quad (3.9)$$

et

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq C. \quad (3.10)$$

#### Démonstration

En prenant dans la formulation variationnelle (3.8)  $w = u_\epsilon$  et en intégrant par rapport à  $t \in (0, \tau)$  avec  $\tau \in (0, T]$ , on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_\epsilon^f(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1}{2} \|u_\epsilon^s(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon^f u_\epsilon^f dx dt + \epsilon \sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_\epsilon^f) (u_\epsilon^f) d\sigma_x dt \leq C. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le fait que  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$ , la coercivité de  $K^f$  et  $K^s$  et l'hypothèse (H3), on obtient l'inégalité suivante

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C.$$

Pour montrer la deuxième estimation, on définit  $M$  par  $M = \max(\|u_{in}^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)}, \|u_{in}^s\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)})$  qui est bien défini, puisque les valeurs initiales sont des fonctions de  $L^\infty$ .

En prenant comme fonctions tests  $w_\epsilon^f = (u_\epsilon^f - M)_+$  et  $w_\epsilon^s = (u_\epsilon^s - M)_+$ , dans la formulation faible (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, (u_\epsilon^f - M)_+ \right\rangle_{(H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f))', H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla (u_\epsilon^f - M)_+ dx \\ & + \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, (u_\epsilon^s - M)_+ \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla (u_\epsilon^s - M)_+ dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f (u_\epsilon^f - M)_+ dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_\epsilon^f) (u_\epsilon^f - M)_+ d\sigma_x = 0. \end{aligned}$$

Par suite, on aura

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial (u_\epsilon^f - M)_+}{\partial t}, (u_\epsilon^f - M)_+ \right\rangle_{(H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f))', H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f (\nabla (u_\epsilon^f - M)_+)^2 dx \\ & + \left\langle \frac{\partial (u_\epsilon^s - M)_+}{\partial t}, (u_\epsilon^s - M)_+ \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s (\nabla (u_\epsilon^s - M)_+)^2 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla (u_\epsilon^f - M)_+ (u_\epsilon^f - M)_+ dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} LM (u_\epsilon^f - M)_+ d\sigma_x \\ & = -\epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} (F(u_\epsilon^f) - LM) (u_\epsilon^f - M)_+ d\sigma_x, \end{aligned}$$

avec  $L$  est la constante de Lipschitz de la fonction  $F$ .

Ensuite, en utilisant le fait que  $F$  est lipschitzienne et que  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$  dans  $\Omega_\epsilon^f$  puis à l'aide de la coercivité de  $K^s$  et  $K^f$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1d}{2dt} \|(u_\epsilon^f - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1d}{2dt} \|(u_\epsilon^s - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla (u_\epsilon^f - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 \\ & + \alpha_2 \|\nabla (u_\epsilon^s - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} LM (u_\epsilon^f - M)_+ d\sigma_x \\ & \leq \epsilon L \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} (u_\epsilon^f - M)_+^2 d\sigma_x, \end{aligned}$$

d'après le lemme 1.8, on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1d}{2dt} \|(u_\epsilon^f - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1d}{2dt} \|(u_\epsilon^s - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla (u_\epsilon^f - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 \\ & + \alpha_2 \|\nabla (u_\epsilon^s - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} LM (u_\epsilon^f - M)_+ d\sigma_x \\ & \leq CL\sigma \left( \int_{\Omega_\epsilon^f} (u_\epsilon^f - M)_+^2 dx + \epsilon^2 \int_{\Omega_\epsilon^f} \nabla (u_\epsilon^f - M)_+^2 dx \right). \end{aligned}$$

Par suite, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1d}{2dt} \|(u_\epsilon^f - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1d}{2dt} \|(u_\epsilon^s - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + (\alpha_1 - \epsilon^2 CL) \|\nabla (u_\epsilon^f - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 \\ & + \alpha_2 \|\nabla (u_\epsilon^s - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} LM (u_\epsilon^f - M)_+ d\sigma_x \\ & \leq CL\sigma \int_{\Omega_\epsilon^f} (u_\epsilon^f - M)_+^2 dx. \end{aligned}$$

Pour  $\epsilon$  assez petit, en intégrant par rapport au temps et en utilisant l'inégalité de Granwall, on obtient

$$\|(u_\epsilon^f - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 \leq 0.$$

Par conséquent, pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons  $u_\epsilon^f(t, x) \leq C$ . Par suite, on aura

$$u_\epsilon^s(t, x) \leq C, \quad t \in [0, T].$$

Montrons maintenant que pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons  $u_\epsilon^i(t, x) \geq 0$ , pour  $i = s, f$ . Pour ce faire, prenons comme fonctions tests  $w_\epsilon^f = -(u_\epsilon^f)_-$  et  $w_\epsilon^s = -(u_\epsilon^s)_-$  dans la formulation faible (3.8), on aura

$$\begin{aligned} & - \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, (u_\epsilon^f)_- \right\rangle_{(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))', H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)} - \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla (u_\epsilon^f)_- dx - \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, (u_\epsilon^s)_- \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} \\ & - \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla (u_\epsilon^s)_- dx - \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f (u_\epsilon^f)_- dx - \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_\epsilon^f) (u_\epsilon^f)_- d\sigma_x = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la définition de  $(u_\epsilon^f)_-$  et  $(u_\epsilon^s)_-$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial (u_\epsilon^f)_-}{\partial t}, (u_\epsilon^f)_- \right\rangle_{(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))', H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f (\nabla (u_\epsilon^f)_-)^2 dx + \left\langle \frac{\partial (u_\epsilon^s)_-}{\partial t}, (u_\epsilon^s)_- \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s (\nabla (u_\epsilon^s)_-)^2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla (u_\epsilon^f)_- (u_\epsilon^f)_- dx = \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_\epsilon^f) (u_\epsilon^f)_- d\sigma_x. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $F$  est lipschitzienne et que  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$  dans  $\Omega_\epsilon^f$ , puis à l'aide de la coercivité de  $K^s$  et  $K^f$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1d}{2dt} \|(u_\epsilon^f)_-\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1d}{2dt} \|(u_\epsilon^s)_-\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla (u_\epsilon^f)_-\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \alpha_2 \|\nabla (u_\epsilon^s)_-\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 \\ & = \epsilon \sigma L \int_{\Gamma_\epsilon} (u_\epsilon^f)_-^2 d\sigma_x, \end{aligned} \quad (3.11)$$

d'après le lemme 1.8, on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1d}{2dt} \|(u_\epsilon^f)_-\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1d}{2dt} \|(u_\epsilon^s)_-\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla (u_\epsilon^f)_-\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \alpha_2 \|\nabla (u_\epsilon^s)_-\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 \\ & \leq \sigma CL \left( \int_{\Omega_\epsilon^f} (u_\epsilon^f)_-^2 dx + \epsilon^2 \int_{\Omega_\epsilon^f} \nabla (u_\epsilon^f)_-^2 dx \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Par suite, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1d}{2dt} \|(u_\epsilon)_-\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\alpha - \epsilon^2 \sigma CL) \|\nabla (u_\epsilon)_-\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \sigma CL \int_{\Omega} (u_\epsilon)_-^2 dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour  $\epsilon$  très petit, en intégrant par rapport au temps et en utilisant l'inégalité de Granwall, on obtient

$$\|(u_\epsilon)_-\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Par conséquent, pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons  $u_\epsilon^i(t, x) \geq 0$ , pour  $i = s, f$ . Ce qui permet de conclure.

Nous allons maintenant montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.8).

**Théorème 3.1** *Supposons que les hypothèses (H1) – (H3) sont satisfaites, le problème (3.8) admet une unique solution dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ .*

### Démonstration

Notons tout d'abord que, pour tout  $\bar{u}_\epsilon$  fixé dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , le problème variationnel

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, w_\epsilon^f \right\rangle_{(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))', H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx + \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, w_\epsilon^f \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla w_\epsilon^s dx \quad (3.14) \\ = - \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla \bar{u}_\epsilon^f w_\epsilon^f dx - \int_{\Gamma_\epsilon} \epsilon F(\bar{u}_\epsilon^f) w_\epsilon^f d\sigma_x, \forall w_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{aligned}$$

avec  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , admet une unique solution  $u_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , grâce au lemme 1.6.

Définissons maintenant l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} G : L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \bar{u}_\epsilon &\longmapsto u_\epsilon, \end{aligned}$$

où  $u_\epsilon$  est l'unique solution du problème (3.14). Alors on a bien que l'opérateur  $G$  est bien défini.

Afin de prouver l'existence de la solution du problème (3.8), il faut montrer que l'opérateur  $G$  admet un point fixe. Ceci implique, en utilisant le degré topologique de Leray Schauder, qu'il faut montrer que  $G$  est compact, continu et trouver  $R > 0$ , tel qu'il n'existe aucune solution de  $u - \lambda G(u) = 0$  satisfaisant  $\|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} = R$ , pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ .

Tout d'abord, dans le but de monter la continuité de l'opérateur  $G$ , considérons une suite  $\bar{u}_{\epsilon, n}$  dans  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ , telle que

$$\bar{u}_{\epsilon, n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{u}_\epsilon \quad \text{dans } L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$$

et prouvons que

$$G(\bar{u}_{\epsilon, n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(\bar{u}_\epsilon) \quad \text{dans } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)).$$

En effet, soit  $u_{\epsilon, n}$  (respectivement  $u_\epsilon$ ) l'unique solution du problème (3.14) associé à  $\bar{u}_{\epsilon, n}$  (respectivement à  $\bar{u}_\epsilon$ ). En soustrayant les deux formulations associées à  $u_{\epsilon, n}$  et  $u_\epsilon$ , on obtient l'équation

suivante

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} - \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t}, w_\epsilon^f \right\rangle_{(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))', H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)} + \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} - \frac{\partial u_{\epsilon,n}^s}{\partial t}, w_\epsilon^s \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f (\nabla u_\epsilon^f - \nabla u_{\epsilon,n}^f) \nabla w_\epsilon^f dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s (\nabla u_\epsilon^s - \nabla u_{\epsilon,n}^s) \nabla w_\epsilon^s dx = \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla (\bar{u}_{\epsilon,n}^f - \bar{u}_\epsilon^f) w_\epsilon^f dx + \int_{\Gamma_\epsilon} \epsilon (F(\bar{u}_{\epsilon,n}^f) - F(\bar{u}_\epsilon^f)) w_\epsilon^f d\sigma_x. \end{aligned}$$

En prenant  $w_\epsilon^f = u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f$ ,  $w_\epsilon^s = u_\epsilon^s - u_{\epsilon,n}^s$  et en intégrant par rapport à  $t$ , on aura

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} - \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t}, u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f \right\rangle_{(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))', H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)} dt + \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} - \frac{\partial u_{\epsilon,n}^s}{\partial t}, u_\epsilon^s - u_{\epsilon,n}^s \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f (\nabla u_\epsilon^f - \nabla u_{\epsilon,n}^f) (\nabla u_\epsilon^f - \nabla u_{\epsilon,n}^f) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s (\nabla u_\epsilon^s - \nabla u_{\epsilon,n}^s) (\nabla u_\epsilon^s - \nabla u_{\epsilon,n}^s) dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla (\bar{u}_{\epsilon,n}^f - \bar{u}_\epsilon^f) (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} \epsilon (F(\bar{u}_{\epsilon,n}^f) - F(\bar{u}_\epsilon^f)) (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) d\sigma_x dt. \end{aligned}$$

Or d'après le théorème 1.1, on a  $H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)$  s'injecte continûment et dense dans  $L^2(\Omega_\epsilon^f)$  (respectivement  $H^1(\Omega_\epsilon^s)$  s'injecte continûment et dense dans  $L^2(\Omega_\epsilon^s)$ ). De plus  $L^2(\Omega_\epsilon^f)$  s'injecte continûment dans  $(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))'$  (respectivement  $L^2(\Omega_\epsilon^s)$  s'injecte continûment dans  $(H^1(\Omega_\epsilon^s))'$ ) et  $\frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \in L^2(0, T; (H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))')$  (respectivement  $\frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega_\epsilon^s))')$ ). Donc d'après le lemme 1.3, nous avons les résultats suivants

$$\frac{1}{2} \|u_\epsilon^f(T) - u_{\epsilon,n}^f(T)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 = \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} - \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t}, u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f \right\rangle_{(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))', H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)} dt$$

et

$$\frac{1}{2} \|u_\epsilon^s(T) - u_{\epsilon,n}^s(T)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 = \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} - \frac{\partial u_{\epsilon,n}^s}{\partial t}, u_\epsilon^s - u_{\epsilon,n}^s \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} dt.$$

Par suite

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_\epsilon^f(T) - u_{\epsilon,n}^f(T)\|_{0, \Omega_\epsilon^f}^2 + \frac{1}{2} \|u_\epsilon^s(T) - u_{\epsilon,n}^s(T)\|_{0, \Omega_\epsilon^s}^2 + \alpha_1 \|\nabla u_\epsilon^f - \nabla u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_\epsilon^f))}^2 \\ & + \alpha_2 \|\nabla u_\epsilon^s - \nabla u_{\epsilon,n}^s\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_\epsilon^s))}^2 \leq \int_0^T \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla (\bar{u}_{\epsilon,n}^f - \bar{u}_\epsilon^f) (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) dx dt \\ & + \epsilon \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} (F(\bar{u}_{\epsilon,n}^f) - F(\bar{u}_\epsilon^f)) (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) d\sigma_x dt. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ainsi en notant les termes à droite de l'inégalité comme suit

$$I_1 = \int_0^T \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon (\nabla \bar{u}_{\epsilon,n}^f - \nabla \bar{u}_\epsilon^f) (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) dx dt, \quad I_2 = \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} \epsilon (F(\bar{u}_{\epsilon,n}^f) - F(\bar{u}_\epsilon^f)) (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) d\sigma_x dt,$$

et en utilisant le fait que  $V_\epsilon \in H_0^1(\Omega_\epsilon^f)$  et que l'injection de  $H_0^1(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $L^4(\Omega_\epsilon^f)$  est continue (ceci d'après le théorème 1.1), puis en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|I_1| \leq \|V_\epsilon\|_{L^4(\Omega_\epsilon^f)} \int_0^T \|u_\epsilon^f(t) - u_{\epsilon,n}^f(t)\|_{L^4(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla \bar{u}_{\epsilon,n}^f(t) - \nabla \bar{u}_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} dt.$$

En utilisant, encore une fois, l'inégalité de Hölder et l'injection continue de  $H_0^1(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $L^4(\Omega_\epsilon^f)$ , on aura

$$|I_1| \leq C \|V_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega_\epsilon^f)} \|u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;W_\epsilon)} \|\nabla \bar{u}_{\epsilon,n}^f - \nabla \bar{u}_\epsilon^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))}.$$

D'après le lemme 3.1 on trouve,

$$|I_1| \leq C \|u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;W_\epsilon)} \|\nabla \bar{u}_{\epsilon,n}^f - \nabla \bar{u}_\epsilon^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))}.$$

D'autre part, on a

$$|I_2| \leq \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} \epsilon (F(\bar{u}_{\epsilon,n}^f) - F(\bar{u}_\epsilon^f)) (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) d\sigma_x dt,$$

or comme  $F$  est lipschitzienne, alors l'inégalité de Hölder permet d'avoir

$$|I_2| \leq C \|\bar{u}_\epsilon^f - \bar{u}_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))} \|u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))}.$$

Ainsi, grâce au théorème 1.2, on obtient

$$|I_2| \leq C \|\bar{u}_\epsilon^f - \bar{u}_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)))} \|u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)))},$$

Donc l'inégalité (3.15) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_{\epsilon,n}^f(T) - u_\epsilon^f(T)\|_{0,\Omega_\epsilon^f}^2 + \frac{1}{2} \|u_{\epsilon,n}^s(T) - u_\epsilon^s(T)\|_{0,\Omega_\epsilon^s}^2 + \alpha_1 \|\nabla u_{\epsilon,n}^f - \nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(0,T;\Omega_\epsilon^f)}^2 \\ & + \alpha_2 \|\nabla u_{\epsilon,n}^s - \nabla u_\epsilon^s\|_{L^2(0,T;\Omega_\epsilon^s)}^2 \leq C \|\bar{u}_\epsilon^f - \bar{u}_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)))} \|u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)))}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

ce qui implique que

$$\|\nabla u_{\epsilon,n} - \nabla u_\epsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C \|\bar{u}_\epsilon - \bar{u}_{\epsilon,n}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \|u_\epsilon - u_{\epsilon,n}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}. \quad (3.17)$$

Or, puisqu'on a  $\bar{u}_{\epsilon,n}$  converge vers  $\bar{u}_\epsilon$  dans  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ , on conclut que  $G$  est continu.

Montrons maintenant que  $G$  est compact. Pour cela, soit  $(\bar{u}_{\epsilon,n})_n$  une suite bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , et soit  $u_{\epsilon,n} = G(\bar{u}_{\epsilon,n})$  l'unique solution de (3.14) associée à  $\bar{u}_{\epsilon,n}$ . En prenant, comme fonction test  $w_\epsilon = u_{\epsilon,n}$  dans la formulation variationnelle (3.14) et en intégrant par rapport à  $t$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|u_{\epsilon,n}^f(T)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \|u_{\epsilon,n}^s(T)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2) + \alpha_1 \|\nabla u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))}^2 + \alpha_2 \|\nabla u_{\epsilon,n}^s\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^s))}^2 \\ & \leq C \|\nabla \bar{u}_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))} \|\nabla u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))} + \frac{1}{2} (\|u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \|u_{\epsilon,n}^s\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

ce qui entraîne que

$$\|\nabla u_{\epsilon,n}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C \|\nabla u_{\epsilon,n}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C,$$



En utilisant l'inégalité de Young [40], on obtient

$$\|\nabla u_{\epsilon,n}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

On montre aussi que

$$\left\| \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\epsilon^f))} \leq C.$$

En effet, soit  $w_\epsilon^f$  dans  $L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\epsilon^f))$ . En prenant  $w_\epsilon = (w_\epsilon^f, 0) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$  comme fonction test dans l'équation (3.14), on trouve

$$\left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, w_\epsilon^f \right\rangle_{(H^{-1}(\Omega_\epsilon^f))', H_0^1(\Omega_\epsilon^f)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f w_\epsilon^f dx = 0. \quad (3.19)$$

Donc

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{H^{-1}(\Omega_\epsilon^f)} &= \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega_\epsilon^f), \|\phi\|=1} \left| \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, \phi \right\rangle \right| \\ &\leq \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega_\epsilon^f), \|\phi\|=1} \left( \left| \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla \phi dx \right| + \left| \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f \phi dx \right| \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{H^{-1}(\Omega_\epsilon^f)} &\leq \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega_\epsilon^f), \|\phi\|=1} \left( \|K_\epsilon^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \right. \\ &\quad \left. + \|V_\epsilon\|_{L^4(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\phi\|_{L^4(\Omega_\epsilon^f)} \right). \end{aligned}$$

Or puisque l'injection de  $H_0^1(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $L^4(\Omega_\epsilon^f)$  est continue, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{H^{-1}(\Omega_\epsilon^f)} &\leq \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega_\epsilon^f), \|\phi\|=1} \left( \|K_\epsilon^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \right. \\ &\quad \left. + C \|\nabla V_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \right), \end{aligned}$$

et comme  $K_\epsilon^f \in L^\infty(\Omega_\epsilon^f)$  et  $V_\epsilon \in H_0^1(\Omega_\epsilon^f)$ , alors on a

$$\left\| \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{H^{-1}(\Omega_\epsilon^f)} \leq C \|\nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}.$$

En intégrant de 0 à  $T$ , on obtient

$$\left\| \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\epsilon^f))} \leq C \|\nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))} \leq C.$$

Or d'après le théorème 1.2, on a l'injection de  $H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $L^2(\Omega_\epsilon^f)$  est compacte et l'injection de  $L^2(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $H^{-1}(\Omega_\epsilon^f)$  est continue. Donc d'après le lemme 1.5, on peut extraire une sous-suite, notée encore  $(u_{\epsilon,n})_n$  qui converge dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega_\epsilon^f))$ .

Aussi grâce à l'injection compacte de  $H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f)$  pour tout  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  et l'injection continue de  $H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $H^{-1}(\Omega_\epsilon^f)$ , et d'après le lemme 1.5, on peut extraire une sous-suite, notée encore  $(u_{\epsilon,n})_n$  qui converge dans  $L^2(0, T; H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f))$ . Par suite, en utilisant la continuité de l'opérateur trace de  $H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $L^2(\Gamma_\epsilon)$ , on aura la suite  $(u_{\epsilon,n})_n$  converge dans  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_\epsilon))$ .

Soit maintenant  $u_{\epsilon,n}$  et  $u_{\epsilon,m}$  deux sous-suites de  $u_{\epsilon,n}$  qui sont respectivement unique solution de la formulation (3.14) associée à  $\bar{u}_{\epsilon,n}$  et à  $\bar{u}_{\epsilon,m}$ . En soustrayant ces deux formulations, on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{\epsilon,n} - \nabla u_{\epsilon,m}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq C \|\nabla \bar{u}_{\epsilon,n}^f - \nabla \bar{u}_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))} \|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))} \\ &\quad + \epsilon \|F(\bar{u}_{\epsilon,n}^f) - F(\bar{u}_{\epsilon,m}^f)\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))} \|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $F$  est lipschitzienne et que l'opérateur trace est continu, on aura

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{\epsilon,n} - \nabla u_{\epsilon,m}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq C \|\bar{u}_{\epsilon,n}^f - \bar{u}_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))} (\|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))} \\ &\quad + \|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))}). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{\epsilon,n} - \nabla u_{\epsilon,m}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq 2C \sup_m (\|\bar{u}_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))}) (\|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))} \\ &\quad + \|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))}). \end{aligned}$$

D'où la suite  $u_{\epsilon,n}$  est de Cauchy dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Ce qui montre que  $G$  est compact.

Puisque  $G$  est continu et compact, pour montre que  $G$  admet un point fixe. On considère la boule ouverte  $B$ , définie par :

$$B = \{u_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \|u_\epsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} < R\}$$

avec  $R = C + 1$ . L'opérateur  $G$  n'admet pas de point fixe sur  $\partial B$ . Donc  $\deg[I - G, B, 0]$  est défini et indépendant de  $\lambda$ . Par l'utilisation du théorème 1.6, puisque  $G_0$  correspond au problème suivant :

$$\left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, w_\epsilon^f \right\rangle_{(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))', H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)} + \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, w_\epsilon^s \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla w_\epsilon^s dx = 0 \quad (3.20)$$

qui admet une unique solution  $u_\epsilon$ , grâce au lemme 1.6, donc

$$\deg[I - G_0, B, 0] = 1.$$

Par suite

$$\deg[I - G_1, B, 0] = 1.$$

Par conséquent, il existe  $u_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , tel que  $G_1(u_\epsilon) = u_\epsilon$  et de plus  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .

Pour montrer l'unicité de la solution, on suppose que  $u_\epsilon^1$  et  $u_\epsilon^2$  sont deux solutions du problème (3.8), ainsi en soustrayant les deux formulations associées aux solutions  $u_\epsilon^1$  et  $u_\epsilon^2$ , on trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \left\langle \left( \frac{\partial u_\epsilon^{f,1}}{\partial t} - \frac{\partial u_\epsilon^{f,2}}{\partial t} \right), w_\epsilon^f \right\rangle_{(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))', H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)} dt + \int_0^\tau \left\langle \left( \frac{\partial u_\epsilon^{s,1}}{\partial t} - \frac{\partial u_\epsilon^{s,2}}{\partial t} \right), w_\epsilon^s \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} dt \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f (\nabla u_\epsilon^{f,1} - \nabla u_\epsilon^{f,2}) \nabla w_\epsilon^f dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s (\nabla u_\epsilon^{s,1} - \nabla u_\epsilon^{s,2}) \nabla w_\epsilon^s dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla (u_\epsilon^{f,1} - u_\epsilon^{f,2}) w_\epsilon^f dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} (F(u_\epsilon^{f,1}) - F(u_\epsilon^{f,2})) w_\epsilon^f d\sigma_x = 0. \end{aligned}$$

En prenant alors  $w_\epsilon^f = u_\epsilon^{f,1} - u_\epsilon^{f,2}$  et  $w_\epsilon^s = u_\epsilon^{s,1} - u_\epsilon^{s,2}$ , puis en intégrant par rapport à  $t$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|u_\epsilon^1(\tau) - u_\epsilon^2(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} + \|u_\epsilon^{s,1}(\tau) - u_\epsilon^{s,2}(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}) + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f |\nabla (u_\epsilon^{f,1} - u_\epsilon^{f,2})|^2 dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s |\nabla (u_\epsilon^{s,1} - u_\epsilon^{s,2})|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla (u_\epsilon^{f,1} - u_\epsilon^{f,2}) (u_\epsilon^{f,1} - u_\epsilon^{f,2}) dx dt \\ & + \epsilon \sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} (F(u_\epsilon^{f,1}) - F(u_\epsilon^{f,2})) (u_\epsilon^{f,1} - u_\epsilon^{f,2}) d\sigma_x dt = 0. \end{aligned}$$

Or puisque  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$ , on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|u_\epsilon^1(\tau) - u_\epsilon^2(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} + \|u_\epsilon^{s,1}(\tau) - u_\epsilon^{s,2}(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}) + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f |\nabla (u_\epsilon^{f,1} - u_\epsilon^{f,2})|^2 dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s |\nabla (u_\epsilon^{s,1} - u_\epsilon^{s,2})|^2 dx dt + \epsilon \sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} (F(u_\epsilon^{f,1}) - F(u_\epsilon^{f,2})) (u_\epsilon^{f,1} - u_\epsilon^{f,2}) d\sigma_x dt = 0. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant le fait que  $K_\epsilon^f$ ,  $K_\epsilon^s$  sont coercives et l'hypothèse (H2), on obtient que

$$\|u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq 0.$$

D'où le résultat.

### Résultats de la convergence à deux échelles

Afin de montrer le résultat de la convergence à deux échelles du problème d'homogénéisation, nous aurons besoin de certaines estimations a priori sur la solution  $u_\epsilon$  et sur sa dérivée par rapport au temps  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}$ . Ceci fait l'objet du lemme suivant.

**Lemme 3.3** *Nous avons les estimations suivantes :*

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} + \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \quad (3.21)$$

$$\left\| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C \quad (3.22)$$

### Démonstration

La première estimation a déjà été établie dans la preuve du lemme 3.2. Il reste alors à montrer l'estimation sur  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}$ . Pour cela, en prenant comme fonction test dans la formulation variationnelle (3.8), la fonction  $w_\epsilon \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ , telle que  $w_\epsilon = (w_\epsilon^f, w_\epsilon^s) \in L^2(0, T, H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)) \times L^2(0, T, H^1(\Omega_\epsilon^s))$ , on aura

$$\left| \left\langle \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}, w_\epsilon \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| = \left| \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, w_\epsilon^f \right\rangle_{(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))', H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)} + \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, w_\epsilon^s \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} \right|.$$

En utilisant ensuite l'inégalité de Hölder à la formulation variationnelle, pour tout  $t \in [0, T]$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial u_\epsilon(t)}{\partial t}, w_\epsilon \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| &\leq \|K_\epsilon^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \\ &\quad + \left| \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f w_\epsilon^f dx \right| \\ &\quad + \|K_\epsilon^s\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla u_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla w_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \\ &\quad + \left| \epsilon \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_\epsilon^f(t)) w_\epsilon^f(t) d\sigma_x \right|. \end{aligned}$$

D'après le caractère lipschitzien de  $F$  et  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$ , on aura

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial u_\epsilon(t)}{\partial t}, w_\epsilon \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| &\leq \|K_\epsilon^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \\ &\quad + \left| \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx \right| \\ &\quad + \|K_\epsilon^s\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla u_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla w_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \\ &\quad + \epsilon C \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f(t)| |w_\epsilon^f(t)| d\sigma_x, \end{aligned}$$

puis en utilisant, encore une fois, l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial u_\epsilon(t)}{\partial t}, w_\epsilon \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| &\leq \|K_\epsilon^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \\ &\quad + \|V_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|u_\epsilon^f(t)\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \\ &\quad + \|K_\epsilon^s\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla u_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla w_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \\ &\quad + \epsilon \|u_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)} \|w_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.8 et plus précisément l'inégalité (1.32), on a

$$\|\nabla w_\epsilon^f\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \leq \|\nabla w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\nabla w_\epsilon^s\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \leq \|\nabla w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \sqrt{\epsilon} \|u\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)},$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
|\langle \frac{\partial u_\epsilon(t)}{\partial t}, w_\epsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| &\leq \|K_\epsilon^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|V_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|u_\epsilon^f(t)\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|K_\epsilon^s\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla u_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla w_\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ C \|\nabla u_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Par définition de  $H^{-1}$  et en utilisant une intégration par rapport au temps, le lemme 3.1 et les estimations suivantes

$$\|u_\epsilon^f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega_\epsilon^f))} \leq C \quad \text{et} \quad \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C,$$

on aura

$$\begin{aligned}
\|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leq \|K_\epsilon^f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega_\epsilon^f))} \|\nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))} + C \|\tilde{V}_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \|u_\epsilon^f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega_\epsilon^f))} \\
&+ \|K_\epsilon^s\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega_\epsilon^s))} \|\nabla u_\epsilon^s\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^s))} + C \|\nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))}. \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Dans la suite, en utilisant les estimations ci-dessus, nous montrons les résultats de la convergence à deux échelles suivants.

**Lemme 3.4** *Supposons que les hypothèses (H1) – (H3) sont satisfaites, alors de la suite  $u_\epsilon$  de solutions du problème d'homogénéisation, on peut extraire une sous-suite notée encore  $u_\epsilon$  et il existe deux fonctions  $u_0$  (solution du problème homogénéisé (3.58)) et  $u_1$ , tels que quand  $\epsilon$  tend vers 0, nous avons :*

1.  $u_\epsilon \rightharpoonup u_0$  faiblement dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ .
2.  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_0}{\partial t}$  faiblement dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .
3.  $u_\epsilon \rightarrow u_0$  fortement dans  $L^2(0, T; H^{1-\delta}(\Omega))$  pour tout  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ,  
de plus  $\sqrt{\epsilon} \|u_\epsilon - u_0\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))}$  tend vers 0.
4.  $u_\epsilon$  converge à deux échelles vers  $u_0(t, x)$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .
5.  $\chi_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s$  converge à deux échelles vers  $\chi^s(y)(\nabla_x u_0(t, x) + \nabla_y u_1(t, x, y))$ ,  
avec  $u_1(t, x, y) \in L^2(0, T; L^2(\Omega; H_{\sharp}^1(Y)/\mathbb{R}))$ .
6.  $\chi_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f$  converge à deux échelles vers  $\chi^f(y)(\nabla_x u_0(t, x) + \nabla_y u_1(t, x, y))$ ,  
avec  $u_1(t, x, y) \in L^2(0, T; L^2(\Omega; H_{\sharp}^1(Y)/\mathbb{R}))$ .  
où  $\chi_\epsilon^s(x) = \chi^s(\frac{x}{\epsilon})$  ( resp.  $\chi_\epsilon^f(x)$ ) la fonction caractéristique de  $\Omega_\epsilon^s$  ( resp.  $\Omega_\epsilon^f$ ) et  $\chi^s(y)$  ( resp.  $\chi^f(y)$ ) celle de  $Y^s$  ( resp.  $Y^f$ ).

### Démonstration

La preuve des assertions 1. et 2. est une conséquence directe du fait que  $u_\epsilon$  est bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  et que  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}$  bornée  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Il en découle donc qu'il existe une sous-suite notée  $u_\epsilon$ , telle que  $u_\epsilon$  converge faiblement vers  $u_0$  dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  et  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}$  converge faiblement vers  $\frac{\partial u_0}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .

Pour montrer 3., nous utilisons l'injection continue de  $H^{1-\delta}(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  et l'injection compacte de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{1-\delta}(\Omega)$ , avec  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ . En effet, puisque nous avons  $u_\epsilon$  est borné dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  et  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , d'après le lemme 1.5, il existe une sous-suite notée  $u_\epsilon$  qui converge fortement vers  $u_0$  dans  $L^2(0, T; H^{1-\delta}(\Omega))$ . Ensuite, d'après le lemme 1.8, nous avons le résultat de continuité de l'opérateur trace sur les surfaces d'oscillation suivant

$$\sqrt{\epsilon} \|u_\epsilon - u_0\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_\epsilon))} \leq C \|u_\epsilon - u_0\|_{L^2(0, T; H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f))} \leq C \|u_\epsilon - u_0\|_{L^2(0, T; H^{1-\delta}(\Omega))},$$

et donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\epsilon} \|u_\epsilon - u_0\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_\epsilon))} = 0.$$

Ce qui prouve 3.

Quant à la preuve de l'assertion 4., elle découle directement du lemme 1.9. En effet, puisque nous avons  $u_\epsilon$  est bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , donc d'après le lemme 1.9, on peut en extraire une sous-suite, telle que  $\chi_\epsilon^f u_\epsilon^f$  qui converge à deux échelles vers  $\chi^f u_0$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  et  $\chi_\epsilon^f(\nabla u_\epsilon)$  converge à deux échelles vers  $\chi^f(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)$ , avec  $u_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}))$ . Ce qui montre 5..

Il reste juste à montrer l'assertion 6.. Pour cela, comme on a  $u_\epsilon^s$  est bornée dans  $L^\infty(0, T, L^2(\Omega_\epsilon^s))$  et  $\nabla u_\epsilon^s$  est bornée dans  $L^2(0, T, L^2(\Omega_\epsilon^s))$ , on aura  $u_\epsilon^s$  est bornée dans  $L^2(0, T, H^1(\Omega_\epsilon^s))$ . Ainsi d'une manière similaire à la preuve de 5., on peut en extraire une sous-suite telle que  $\chi_\epsilon^s u_\epsilon^s$  converge à deux échelles vers  $\chi^s u_0$  in  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , et  $\chi_\epsilon^s(\nabla u_\epsilon)$  converge à deux échelles vers  $\chi^s(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)$ , avec  $u_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}))$ . D'où le résultat.

Nous allons maintenant montrer le résultat de convergence associé au terme non linéaire sur la frontière.

**Lemme 3.5** *Soit  $u_\epsilon$  la solution du problème (3.8) dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , qui converge à deux échelles vers  $u_0$ , alors on a*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \sigma \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_\epsilon^f) \phi_\epsilon^f d\sigma_x dt = \frac{\sigma |\Gamma|}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega} F(u_0(t, x)) \phi_0^f(t, x) dx dt,$$

pour tout  $\phi_\epsilon^f \in D(0, T; D(\Omega; C_{\#}^\infty(\Gamma)))$  qui s'écrit

$$\phi_\epsilon^f(t, x, \frac{x}{\epsilon}) = \phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon}).$$

**Démonstration**

Pour montrer cette convergence, nous utilisons tout d'abord la décomposition suivante :

$$\epsilon \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_\epsilon^f) (\phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})) d\sigma_x dt = I_1 + I_2,$$

avec

$$I_1 = \epsilon \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_0) (\phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})) d\sigma_x dt,$$

et

$$I_2 = \epsilon \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} (F(u_\epsilon^f) - F(u_0)) (\phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})) d\sigma_x dt.$$

Nous avons d'une part l'intégrale  $I_1$  converge vers

$$\frac{\sigma}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega \int_\Gamma F(u_0) \phi_0(t, x) d\sigma_y dx dt = \frac{\sigma |\Gamma|}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega F(u_0(t, x)) \phi_0^f(t, x) dx dt.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \epsilon \left( \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |\phi_0|^2 d\sigma_x dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |F(u_\epsilon^f) - F(u_0)|^2 d\sigma_x dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \epsilon^2 \left( \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |\phi_1|^2 d\sigma_x dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |F(u_\epsilon^f) - F(u_0)|^2 d\sigma_x dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

or puisque  $u_\epsilon$  converge vers  $u_0$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_\epsilon))$ , alors on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2 = 0.$$

Ce qui nous permet de conclure.

**3.2.2 Etude du modèle avec le terme d'échange radiatif  $|u_\epsilon^f|u_\epsilon^f$** 

Dans cette section, nous étudions le modèle de transfert de la chaleur avec un terme de radiations sous la forme  $F(x) = |x|x$  qui n'est pas nécessairement une fonction lipschitzienne, mais qui vérifie la condition de la monotonie et de la continuité. Nous proposons une étude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème d'homogénéisation en utilisant le degré topologique de Leray Schauder. Pour cela, nous faisons appel à quelques outils d'analyse mathématique, tels que le principe du maximum, la positivité de la solution et sa bornitude sur le bord. Ensuite, nous établissons le résultat de la convergence à deux échelles.

Considérons tout d'abord la formulation faible du problème qui s'écrit

$$\text{Trouver } u_\epsilon = (u_\epsilon^f|_{\Omega_\epsilon^f}, u_\epsilon^s|_{\Omega_\epsilon^s}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)) \text{ et } \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

solution de

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, w_\epsilon^f \right\rangle_{(H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f))', H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx + \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, w_\epsilon^s \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla w_\epsilon^s dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f w_\epsilon^f dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| u_\epsilon^f w_\epsilon^f d\sigma_x = 0, \quad \forall w_\epsilon = (w_\epsilon^f|_{\Omega_\epsilon^f}, w_\epsilon^s|_{\Omega_\epsilon^s}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

**Remarque 3.1** Notons que dans la formulation faible (3.23), nous cherchons à trouver une solution  $u_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ , ceci dans le but d'assurer le fait que le terme  $\int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| u_\epsilon^f w_\epsilon^f d\sigma_x$  est bien défini. Ce qui est en fait garanti grâce à un résultat de bornitude de  $u_\epsilon^f$  sur le bord  $\Gamma_\epsilon$  prouvé, par la suite, dans le lemme 3.8.

Nous allons maintenant étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.23). Pour ce faire nous établissons quelques estimations a priori sur la solution qui vont nous servir également pour étudier les convergences nécessaires pour l'identification du problème homogénéisé.

### Résultat d'existence et d'unicité du problème d'homogénéisation

Pour montrer l'existence de la solution du problème (3.23), nous utilisons le degré topologique de Leray-Schauder. Pour cela, nous commençons par montrer quelques lemmes sur des estimations a priori et quelques résultats de bornitude et de positivité de la solution.

**Lemme 3.6** Supposons que les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites, alors il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $\epsilon$ , telle que la solution faible du problème microscopique (3.23) satisfait l'estimation a priori suivante

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C. \quad (3.24)$$

### Démonstration

En prenant  $w = u_\epsilon$ , dans la formulation variationnelle (3.23) et par intégration en  $t$  sur  $(0, \tau)$  avec  $\tau \in (0, T]$ , on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_\epsilon^f(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1}{2} \|u_\epsilon^s(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon^f u_\epsilon^f dx dt + \epsilon \sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| (u_\epsilon^f)^2 d\sigma_x dt \leq C. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le fait que  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$  et la coercitivité de  $K_\epsilon^f$  et  $K_\epsilon^s$ , on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_\epsilon^f(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1}{2} \|u_\epsilon^s(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(0, \tau; L^2(\Omega_\epsilon^f))}^2 + \alpha_2 \|\nabla u_\epsilon^s\|_{L^2(0, \tau; L^2(\Omega_\epsilon^s))}^2 \\ & + \epsilon \sigma \|u_\epsilon^f\|_{L^3(0, \tau; L^3(\Gamma_\epsilon))}^3 \leq C. \end{aligned}$$



Alors, on a

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \epsilon\sigma\|u_\epsilon^f\|_{L^3(0,T;L^3(\Gamma_\epsilon))}^3 \leq C.$$

Dans le deuxième lemme, nous visons à montrer la bornitude et la positivité de  $u_\epsilon^f$  et  $u_\epsilon^s$ , en utilisant le principe du maximum.

**Lemme 3.7** *Si  $u_\epsilon$  est solution de (3.23), alors pour tout  $t \in [0, T]$ , il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\epsilon$ , telle que*

$$0 \leq u_\epsilon^i(t, x) \leq C, \text{ pour } i = s, f. \quad (3.25)$$

### Démonstration

Définissons tout d'abord  $M = \max(\|u_{in}^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)}, \|u_{in}^s\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)})$  qui est bien défini, puisque les données initiales sont des fonctions de  $L^\infty$ .

En prenant les fonctions tests  $w_\epsilon^f = (u_\epsilon^f - M)_+$  et  $w_\epsilon^s = (u_\epsilon^s - M)_+$  dans la formulation faible (3.23), on obtient

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, (u_\epsilon^f - M)_+ \right\rangle_{(H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f))', H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla (u_\epsilon^f - M)_+ dx \\ & + \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, (u_\epsilon^s - M)_+ \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla (u_\epsilon^s - M)_+ dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f (u_\epsilon^f - M)_+ dx + \epsilon\sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| u_\epsilon^f (u_\epsilon^f - M)_+ d\sigma_x = 0. \end{aligned}$$

Par suite, on aura

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial (u_\epsilon^f - M)_+}{\partial t}, (u_\epsilon^f - M)_+ \right\rangle_{(H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f))', H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f)} \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f (\nabla (u_\epsilon^f - M)_+)^2 dx \\ & + \left\langle \frac{\partial (u_\epsilon^s - M)_+}{\partial t}, (u_\epsilon^s - M)_+ \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s (\nabla (u_\epsilon^s - M)_+)^2 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla (u_\epsilon^f - M)_+ (u_\epsilon^f - M)_+ dx + \epsilon\sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| (u_\epsilon^f - M)_+^2 d\sigma_x \\ & + \epsilon\sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| M (u_\epsilon^f - M)_+ d\sigma_x = 0, \end{aligned}$$

puis, en intégrant par rapport au temps et en utilisant la coercivité de  $K^s$  et  $K^f$  et le fait que  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$  dans  $\Omega_\epsilon^f$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|(u_\epsilon^f - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1}{2} \|(u_\epsilon^s - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla (u_\epsilon^f - M)_+\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))}^2 \\ & + \alpha_2 \|\nabla (u_\epsilon^s - M)_+\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^s))}^2 + \epsilon\sigma \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| (u_\epsilon^f - M)_+^2 d\sigma_x dt \\ & + \epsilon\sigma \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| M (u_\epsilon^f - M)_+ d\sigma_x dt \leq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons  $u_\epsilon^i(t, x) \leq C$ , pour  $i = s, f$ .

Il reste alors à montrer que pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons  $u_\epsilon^i(t, x) \geq 0$ , pour  $i = s, f$ . Pour cela, en

prenant les fonction tests  $w_\epsilon^f = -(u_\epsilon^f)_-$  et  $w_\epsilon^s = -(u_\epsilon^s)_-$  dans la formulation faible (3.23), on aura

$$\begin{aligned} & - \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, (u_\epsilon^f)_- \right\rangle_{(H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f))', H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f)} dx - \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla (u_\epsilon^f)_- dx - \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, (u_\epsilon^s)_- \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} \\ & - \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla (u_\epsilon^s)_- dx - \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f (u_\epsilon^f)_- dx - \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| u_\epsilon^f (u_\epsilon^f)_- d\sigma_x = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la définition de  $(u_\epsilon^f)_-$  et  $(u_\epsilon^s)_-$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial (u_\epsilon^f)_-}{\partial t}, (u_\epsilon^f)_- \right\rangle_{(H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f))', H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f (\nabla (u_\epsilon^f)_-)^2 dx + \left\langle \frac{\partial (u_\epsilon^s)_-}{\partial t}, (u_\epsilon^s)_- \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s (\nabla (u_\epsilon^s)_-)^2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla (u_\epsilon^f)_- (u_\epsilon^f)_- dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| (u_\epsilon^f)_-^2 d\sigma_x = 0, \end{aligned}$$

puis, en intégrant par rapport au temps et en utilisant la coercivité de  $K^s$  et  $K^f$  et le fait que  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$  dans  $\Omega_\epsilon^f$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|(u_\epsilon^f)_-\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1}{2} \|(u_\epsilon^s)_-\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla (u_\epsilon^f)_-\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega_\epsilon^f))}^2 + \alpha_2 \|\nabla (u_\epsilon^s)_-\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega_\epsilon^s))}^2 \\ & + \epsilon \sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| (u_\epsilon^f)_-^2 d\sigma_x dt \leq 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Par conséquent, pour tout  $t \in [0, T]$ , nous aurons  $u_\epsilon^i(t, x) \geq 0$ , pour  $i = s, f$ . Ce qui achève la preuve de ce lemme.

Nous allons maintenant montrer un résultat clé qui nous permet d'avoir la bornitude de la solution sur le bord. Ce dernier a été donné, sans démonstration, comme remarque dans [24]. Il va en fait nous servir tout au long de l'étude de l'existence de ce problème.

**Lemme 3.8** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  de frontière lipschitzienne. Si  $u$  appartient à  $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , alors  $u$  appartient à  $L^\infty(\partial\Omega)$  et*

$$\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

### Démonstration

Soit  $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . En utilisant la technique de régularisation et de troncature, considérons la suite suivante

$$u_n = \rho_n * \tilde{\alpha} u \in C(\bar{\Omega}), \text{ avec } \tilde{\alpha} u \in H^1(\mathbb{R}^d),$$

où  $(\rho_n)_n$  est une suite régularisante,  $\alpha$  est une fonction dans  $C_c^1(\Omega)$ , qui vérifie  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $\alpha = 1$  au voisinage de  $K_n \subset \Omega$ , avec

$$K_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^d, \text{ tel que } \|x\| \leq n \text{ et } \text{dist}(x, \Omega^c) \geq \frac{2}{n} \right\} \text{ et } \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n = \Omega$$

$\tilde{f}$  désigne l'extension de la fonction  $f$  par 0 en dehors de  $\Omega$  et  $\Omega^c$  est le complémentaire de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Alors on a

$$\text{supp}(u_n) \subset \text{supp}(\rho_n) + \text{supp}(\tilde{\alpha}u).$$

Ce qui entraîne que

$$\text{supp}(u_n) \subset \overline{B(0, \frac{1}{n})} + K_n \subset \Omega$$

et

$$\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = \|u_n - \tilde{\alpha}u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\rho_n * \tilde{\alpha}u - \tilde{\alpha}u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Aussi d'après [13], on a

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \text{ in } L^2(\Omega).$$

En utilisant la définition de la suite régularisante, on a

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\rho_n * \tilde{\alpha}u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|\rho_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|\tilde{\alpha}u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

où  $\|\rho_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$ , alors pour tout  $n$ , on a

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\tilde{\alpha}u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ainsi on a montré qu'il existe une suite  $(u_n)$  telle que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega)$$

et

$$|u_n| \leq M = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

En utilisant la continuité de l'opérateur trace, on a

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2(\partial\Omega).$$

Montrons alors que

$$|u_n| \leq M \text{ p.p. } x \in \partial\Omega.$$

Supposons que ce résultat est faux. Ceci entraîne qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $x_0 \in \partial\Omega$ , tels que

$$|u_{n_0}(x_0)| > M.$$

Définissons alors la fonction  $H$  par

$$H(x) = (|u_{n_0}(x)| - M)_+ \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Or comme on a  $H(x_0) \neq 0$ , en utilisant le fait que  $H$  est continue dans  $\overline{\Omega}$ , donc il existe  $O_{x_0}$  un voisinage ouvert de  $x_0$ , tel que  $H(x) \neq 0$ , pour tout  $x \in O_{x_0}$  et  $O_{x_0} \cap \Omega \neq \emptyset$ . Ce qui est en contradiction avec le fait que pour tout  $n$ , on a

$$|u_n| \leq M \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Par suite on a

$$|u_n| \leq M \text{ p.p. } x \in \partial\Omega.$$

En appliquant le théorème de Lebesgue, on peut extraire de la suite  $(u_n)_n$  une sous-suite notée encore  $(u_n)_n$  telle que

$$u_n(x) \text{ converge vers } u(x) \text{ pour p.p. } x \in \partial\Omega, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Alors finalement, on a

$$|u| \leq M \text{ p.p. } x \in \partial\Omega.$$

Par conséquent

$$\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Les trois résultats qu'on a montrés précédemment sont très utiles pour étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.23). Nous avons alors le résultat suivant

**Théorème 3.2** *Supposons que les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites, alors le problème (3.23) admet une unique solution dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ .*

### Démonstration

Notons tout d'abord que pour tout  $\bar{u}_\epsilon$  fixé dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ , le problème variationnel

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, w_\epsilon^f \right\rangle_{(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))', H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx + \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, w_\epsilon^s \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla w_\epsilon^s dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f w_\epsilon^f dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |\bar{u}_\epsilon^f| u_\epsilon^f w_\epsilon^f d\sigma_x = 0, \forall w_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{aligned} \quad (3.27)$$

avec  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , admet une unique solution  $u_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ ; grâce au lemme 1.6. Ainsi, en utilisant la même preuve que celle du lemme 3.7, on aura  $u_\epsilon$  est dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ .

Définissons maintenant l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} G : L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)) & \longrightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)) \\ \bar{u}_\epsilon & \longmapsto u_\epsilon, \end{aligned}$$

où  $u_\epsilon$  est l'unique solution du problème (3.27). Il est simple de voir que l'opérateur  $G$  est bien défini. Afin de prouver l'existence de la solution du problème (3.8), il faut montrer que l'opérateur  $G$  admet un point fixe. Ceci en utilisant le degré topologique de Leray Schauder, qu'il faut montrer que  $G$  est compact, continu et trouver  $R > 0$ , tel qu'il n'existe aucune solution de  $u - \lambda G(u) = 0$  satisfaisant  $\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} = R$ , pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ .

Tout d'abord, dans le but de monter la continuité de l'opérateur  $G$ , on considère la suite  $\bar{u}_{\epsilon,n}$  dans  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ , telle que

$$\bar{u}_{\epsilon,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{u}_\epsilon \text{ in } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)),$$

et prouvons que

$$G(\bar{u}_{\epsilon,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(\bar{u}_\epsilon) \text{ dans } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)).$$

En effet, Soit  $u_{\epsilon,n}$  (respectivement  $u_\epsilon$ ) l'unique solution associée à  $\bar{u}_{\epsilon,n}$  (respectivement à  $\bar{u}_\epsilon$ ) de la formulation (3.27).

En utilisant les mêmes techniques que dans la preuve de la continuité de l'opérateur de point fixe dans le cas du problème avec terme de radiation lipschitzien, et d'après le lemme 1.8 et le lemme 3.8, il existe  $C$  indépendante de  $n$  et  $\epsilon$ , telle que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_{\epsilon,n}^f(\tau) - u_\epsilon^f(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1}{2} \|u_{\epsilon,n}^s(\tau) - u_\epsilon^s(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla u_{\epsilon,n}^f - \nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(0,\tau;\Omega_\epsilon^f)}^2 \\ & + \alpha_2 \|\nabla u_{\epsilon,n}^s - \nabla u_\epsilon^s\|_{L^2(0,\tau;\Omega_\epsilon^s)}^2 + \epsilon \sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} |\bar{u}_\epsilon^f| (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f)^2 d\sigma_x dt \\ & \leq C \|\bar{u}_\epsilon^f - \bar{u}_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,\tau;H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))} \|u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,\tau;H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))}, \forall \tau \in (0, T]. \end{aligned}$$

Par suite

$$\|\nabla u_{\epsilon,n} - \nabla u_\epsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C \|\bar{u}_\epsilon - \bar{u}_{\epsilon,n}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \|u_\epsilon - u_{\epsilon,n}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}. \quad (3.28)$$

Or, puisqu'on a  $\bar{u}_{\epsilon,n}$  converge vers  $\bar{u}_\epsilon$  dans  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ , on conclut que  $G$  est continu.

Montrons maintenant que l'opérateur  $G$  est compact. Pour cela, soit  $(\bar{u}_{\epsilon,n})_n$  une suite bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$  et soit  $u_{\epsilon,n} = G(\bar{u}_{\epsilon,n})$  l'unique solution du problème (3.27) associée à  $\bar{u}_{\epsilon,n}$ . En prenant, comme fonction test  $w_\epsilon = u_{\epsilon,n}$  dans la formulation (3.27) et en intégrant par rapport à  $t$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_{\epsilon,n}^f(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1}{2} \|u_{\epsilon,n}^s(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,\tau;\Omega_\epsilon^f)}^2 + \alpha_2 \|\nabla u_{\epsilon,n}^s\|_{L^2(0,\tau;\Omega_\epsilon^s)}^2 \\ & + \epsilon \sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} |\bar{u}_{\epsilon,n}^f| (u_{\epsilon,n}^f)^2 d\sigma_x dt \leq C, \end{aligned} \quad (3.29)$$

ce qui entraîne que

$$\|\nabla u_{\epsilon,n}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C.$$

Ainsi, en faisant un choix convenable de la fonction test dans l'équation (3.27), et en procédant de la même manière que pour la preuve de l'estimation de la dérivée par rapport au temps de la solution, dans le cas du terme de radiation lipschitzien, on obtient

$$\left\| \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\epsilon^f))} \leq C.$$

Or d'après le théorème 1.2, on a l'injection de  $H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f)$  est compacte, pour tout  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  et l'injection de  $H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $H^{-1}(\Omega_\epsilon^f)$  continue. Donc d'après le lemme 1.5, on peut extraire une sous-suite notée encore  $(u_{\epsilon,n})_n$  qui converge dans  $L^2(0,T;H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f))$ . Par suite, en utilisant la continuité de l'opérateur trace de  $H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $L^2(\Gamma_\epsilon)$ , la suite  $(u_{\epsilon,n})_n$  converge dans  $L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))$ .

Soit maintenant  $u_{\epsilon,n}$  et  $u_{\epsilon,m}$  deux sous-suites de  $(u_{\epsilon,n})_n$  qui sont respectivement l'unique solution de la formulation (3.27) associée à  $\bar{u}_{\epsilon,n}$ , respectivement à  $\bar{u}_{\epsilon,m}$ . Donc en utilisant le lemme 1.8, le lemme 3.8 et la continuité de l'opérateur trace, on trouve

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{\epsilon,n} - \nabla u_{\epsilon,m}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq C \|\bar{u}_{\epsilon,n}^f - \bar{u}_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))} \|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))} \\ &\quad + C \|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))}^2, \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{\epsilon,n} - \nabla u_{\epsilon,m}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq 2C \sup_m (\|\bar{u}_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))}) \|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))} \\ &\quad + C \|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))}^2. \end{aligned}$$

Par suite  $(u_{\epsilon,n})$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ . Ce qui montre que l'opérateur  $G$  est compact.

Puisque  $G$  est continu et compact, pour montrer que  $G$  admet un point fixe, on considère la boule ouverte  $B$ , définie par :

$$B = \{u_\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)), \|u_\epsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} < R\}$$

avec  $R = C + 1$ . L'opérateur  $G$  n'admet pas de point fixe sur  $\partial B$ . Donc  $\deg[I - G, B, 0]$  est défini et indépendant de  $\lambda$ . En utilisant le théorème 1.6, puisque  $G_0$  correspond au problème suivant :

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, w_\epsilon^f \right\rangle_{(H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f))', H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f)} + \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, w_\epsilon^s \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla w_\epsilon^s dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f w_\epsilon^f dx = 0 \end{aligned}$$

qui admet une unique solution  $u_\epsilon$ , grâce au lemme 1.6, donc

$$\deg[I - G_0, B, 0] = 1.$$

Par suite

$$\deg[I - G_1, B, 0] = 1.$$

Par conséquent, il existe  $u_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ , tel que  $G_1(u_\epsilon) = u_\epsilon$  et de plus  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .

Pour terminer, notons que l'étude de l'unicité de la solution du problème (3.23) se fait de la même manière que celle dans le cas du problème (3.8), tout en remarquant bien évidemment que la fonction  $F(x) = |x|x$  satisfait les hypothèses  $F(0) = 0$  et la monotonie. Ceci achève la preuve du théorème.

### Résultats de la convergence à deux échelles

Afin de montrer le résultat de la convergence à deux échelles, nous aurons besoin de certaines estimations a priori sur la solution  $u_\epsilon$  et sur sa dérivée par rapport au temps  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}$ . Ceci fait l'objet du lemme suivant.

**Lemme 3.9** *Nous avons les estimations suivantes :*

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} + \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C. \quad (3.30)$$

$$\left\| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C. \quad (3.31)$$

### Démonstration

La première estimation est déjà établie dans la preuve du lemme 3.6 et du lemme 3.7. Il reste alors à montrer l'estimation sur  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}$ . Pour cela, en prenant comme fonction test dans la formulation variationnelle (3.23) la fonction  $w_\epsilon \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ , telle que  $w_\epsilon = (w_\epsilon^f, w_\epsilon^s) \in L^2(0, T, H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f)) \times L^2(0, T, H^1(\Omega_\epsilon^s))$ , on aura

$$\left| \left\langle \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}, w_\epsilon \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| = \left| \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, w_\epsilon^f \right\rangle_{(H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f))', H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\epsilon^f)} + \left\langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, w_\epsilon^s \right\rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} \right|.$$

En utilisant ensuite l'inégalité de Hölder à la formulation variationnelle, pour tout  $t \in [0, T]$ , on obtient

$$\begin{aligned}
|\langle \frac{\partial u_\epsilon(t)}{\partial t}, w_\epsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| &\leq \|K_\epsilon^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \\
&+ \left| \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f w_\epsilon^f dx \right| \\
&+ \|K_\epsilon^s\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla u_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla w_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \\
&+ \epsilon \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f(t)| |u_\epsilon^f(t)| |w_\epsilon^f(t)| d\sigma_x.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|\langle \frac{\partial u_\epsilon(t)}{\partial t}, w_\epsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| &\leq \|K_\epsilon^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \\
&+ \left| \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx \right| \\
&+ \|K_\epsilon^s\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla u_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla w_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \\
&+ \epsilon \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f(t)|^2 |w_\epsilon^f(t)| d\sigma_x,
\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.8 et la première estimation 3.30 du lemme 3.9, on aura

$$\|u_\epsilon^f\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_\epsilon))} \leq C.$$

Ainsi en utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}
|\langle \frac{\partial u_\epsilon(t)}{\partial t}, w_\epsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| &\leq \|K_\epsilon^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \\
&+ \|V_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|u_\epsilon^f(t)\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \\
&+ \|K_\epsilon^s\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla u_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla w_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \\
&+ \epsilon \sigma C \|u_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)} \|w_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)}.
\end{aligned}$$

Or d'après le lemme 1.8, on a

$$\|\nabla w_\epsilon^f\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \leq \|\nabla w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla w_\epsilon^s\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \leq \|\nabla w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \text{ and } \sqrt{\epsilon} \|u\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)},$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
|\langle \frac{\partial u_\epsilon(t)}{\partial t}, w_\epsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| &\leq \|K_\epsilon^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|V_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|u_\epsilon^f(t)\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|K_\epsilon^s\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla u_\epsilon^s(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \|\nabla w_\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \sigma C \|\nabla u_\epsilon^f(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla w_\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$



Selon la définition de  $H^{-1}$  et en utilisant l'intégration par rapport au temps, le lemme 3.1 et les estimations suivantes

$$\|u_\epsilon^f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega_\epsilon^f))} \leq C \quad \text{et} \quad \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C,$$

on aura

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leq \|K_\epsilon^f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega_\epsilon^f))} \|\nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))} + C \|\tilde{V}_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \|u_\epsilon^f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega_\epsilon^f))} \\ &\quad + \|K_\epsilon^s\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega_\epsilon^s))} \|\nabla u_\epsilon^s\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^s))} + C \|u_\epsilon^f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_\epsilon))} \|\nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))}. \\ &\leq C. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Nous allons maintenant énoncer les résultats de convergence à deux échelles suivants, dont la preuve se base sur les estimations ci-dessus et est analogue à celle du lemme 3.4.

**Lemme 3.10** *Supposons que les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites, alors de la suite  $u_\epsilon$  de solutions du problème d'homogénéisation, on peut extraire une sous-suite notée encore  $u_\epsilon$  et il existe deux fonctions  $u_0$  (solution du problème homogénéisé (3.58)) et  $u_1$ , tel que quand  $\epsilon$  tend vers 0, nous avons :*

1.  $u_\epsilon \rightharpoonup u_0$  faiblement dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ .
2.  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_0}{\partial t}$  faiblement dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .
3.  $u_\epsilon \rightarrow u_0$  fortement dans  $L^2(0, T; H^{1-\delta}(\Omega))$  pour tout  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ,  
de plus  $\sqrt{\epsilon} \|u_\epsilon - u_0\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))}$  tend vers 0.
4.  $u_\epsilon$  converge à deux échelles vers  $u_0(t, x)$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .
5.  $\chi_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s$  converge à deux échelles vers  $\chi^s(y)(\nabla_x u_0(t, x) + \nabla_y u_1(t, x, y))$  avec  
 $u_1(t, x, y) \in L^2(0, T; L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R}))$ .
6.  $\chi_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f$  converge à deux échelles vers  $\chi^f(y)(\nabla_x u_0(t, x) + \nabla_y u_1(t, x, y))$  avec  
 $u_1(t, x, y) \in L^2(0, T; L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R}))$ .  
où  $\chi_\epsilon^s(x) = \chi^s(\frac{x}{\epsilon})$  ( resp.  $\chi_\epsilon^f(x)$ ) la fonction caractéristique de  $\Omega_\epsilon^s$  ( resp.  $\Omega_\epsilon^f$ ) et  $\chi^s(y)$  ( resp.  $\chi^f(y)$ ) celle de  $Y^s$  ( resp.  $Y^f$ ).

Nous montrons, par la suite, le résultat de la convergence associé au terme non linéaire sur la frontière.

**Lemme 3.11** *Soit  $u_\epsilon$  la solution du problème (3.23) dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , qui converge à deux échelles vers  $u_0$ . Alors on*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \sigma \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| u_\epsilon^f \phi_\epsilon d\sigma_x dt = \frac{\sigma |\Gamma|}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega |u_0(t, x)| u_0(t, x) \phi(t, x) dx dt.$$

pour tout  $\phi_\epsilon^f \in D(0, T; D(\Omega; C_\#^\infty(\Gamma)))$  qui s'écrit

$$\phi_\epsilon^f(t, x, \frac{x}{\epsilon}) = \phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon}).$$

### Démonstration

Pour montrer cette convergence, nous utilisons tout d'abord la décomposition suivante :

$$\epsilon \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| (\phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})) d\sigma_x dt = I_1 + I_2,$$

avec

$$I_1 = \epsilon \sigma \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| u_0 (\phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})) d\sigma_x dt,$$

et

$$I_2 = \epsilon \sigma \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f| (u_\epsilon^f - u_0) (\phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})) d\sigma_x dt.$$

Nous avons d'une part  $u_\epsilon$  qui converge à deux échelles vers  $u_0$ . Donc l'intégrale  $I_1$  converge vers

$$\frac{\sigma}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega \int_\Gamma |u_0| u_0 \phi_0(t, x) d\sigma_y dx dt = \frac{\sigma}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega |u_0(t, x)| u_0(t, x) \phi(t, x) dx dt.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|I_2| \leq \epsilon \sigma \left( \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f \phi_0|^2 d\sigma_x dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f - u_0|^2 d\sigma_x dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

$$+ \epsilon^2 \sigma \left( \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f \phi_1|^2 d\sigma_x dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f - u_0|^2 d\sigma_x dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.33)$$

or puisque  $u_\epsilon$  converge vers  $u_0$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_\epsilon))$ , alors on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2 = 0.$$

Ce qui nous permet de conclure.

### 3.2.3 Etude du modèle avec le terme d'échange radiatif $|u_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f$

Dans cette section, nous étudions le modèle de transfert de la chaleur (3.5) en deux dimensions avec un terme de radiation  $F$  sous la forme  $|u_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ . Ce modèle correspond à un cas physique plus complexe décrivant plusieurs lois, telles que la loi de Planck ou celle de Stefan-Boltzmann. Dans le but d'étudier, dans la suite, l'existence et l'unicité de la solution du problème d'homogénéisation (3.5) associé à ce modèle, nous aurons besoin de quelques hypothèses supplémentaires sur les données, pour avoir un peu plus de régularité sur la solution. Ces hypothèses sont énoncées comme suit

(H4) La dérivée des tenseurs de conductivité  $(\partial_t K_\epsilon^f, \partial_t K_\epsilon^s)$  est bornée indépendamment de  $\epsilon$  dans  $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega_\epsilon^f)) \times L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega_\epsilon^s))$ .

(H5) Le second membre de la condition initiale  $u_{in}^f$  (resp.  $u_{in}^s$ ) est dans  $L^\infty(\Omega_\epsilon^f) \cap H_0^1(\Omega_\epsilon^f)$  (resp. est dans  $L^\infty(\Omega_\epsilon^s) \cap H_0^1(\Omega_\epsilon^s)$ ), ainsi que  $\frac{\partial u_{in}^f}{\partial t}$  (resp.  $\frac{\partial u_{in}^s}{\partial t}$ ) est dans  $L^\infty(\Omega_\epsilon^f)$  (resp. est dans  $L^\infty(\Omega_\epsilon^s)$ ).

Nous donnons tout d'abord la définition d'une solution faible du problème d'homogénéisation (3.5).

**Définition 3.2** *Sous les hypothèses (H1), (H4) et (H5), on dit que  $u_\epsilon$  est une solution faible de (3.5), si elle vérifie*

$$\forall u_\epsilon = (u_\epsilon^f|_{\Omega_\epsilon^f}, u_\epsilon^s|_{\Omega_\epsilon^s}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)) \text{ et } \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ tel que}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\epsilon^f} \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} w_\epsilon^f dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} w_\epsilon^s dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla w_\epsilon^s dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f w_\epsilon^f dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_\epsilon^f) w_\epsilon^f d\sigma_x = 0, \quad \forall w_\epsilon = (w_\epsilon^f|_{\Omega_\epsilon^f}, w_\epsilon^s|_{\Omega_\epsilon^s}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.34)$$

**Remarque 3.2** 1. Dans la définition 3.2, nous cherchons à trouver une solution  $u_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ , ceci dans le but d'assurer le fait que le terme  $\int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f w_\epsilon^f d\sigma_x$  est bien défini. Ceci est en fait garanti grâce au lemme 3.8.

2. Dans la suite nous allons montrer que le problème (3.34) admet une solution unique  $u_\epsilon$ , telle que  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Ceci puisque le passage à la limite par la méthode de la convergence à deux échelles nécessite une telle régularité sur la solution  $u_\epsilon$ . Mais en fait le résultat d'existence que nous donnons reste valable dans le cas où nous cherchons à déterminer  $u_\epsilon$  telle que  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .

### Résultat d'existence et d'unicité du problème d'homogénéisation

Dans cette section, pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème d'homogénéisation (3.34), nous utilisons le degré topologique de Leray-Schauder. Pour cela, nous commençons par donner des estimations qui sont démontrées dans le lemme suivant

**Lemme 3.12** *Supposons que les hypothèses (H1), (H4) et (H5) sont satisfaites. Alors il existe une constante  $C$ , indépendante de  $\epsilon$ , telle que la solution du problème microscopique (3.34) satisfait les estimations a priori suivantes*

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C. \quad (3.35)$$

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq C. \quad (3.36)$$

**Démonstration**

En prenant comme fonction test  $w = u_\epsilon$ , dans la formulation variationnelle (3.34) et en intégrant par rapport à  $t \in (0, \tau)$  avec  $\tau \in (0, T]$ , on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_\epsilon^f(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1}{2} \|u_\epsilon^s(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon^f u_\epsilon^f dx dt + \epsilon \sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p (u_\epsilon^f)^2 d\sigma_x dt \leq C. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le fait que  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$  et la coercivité de  $K^f$  et  $K^s$ , on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_\epsilon^f(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1}{2} \|u_\epsilon^s(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega_\epsilon^f))}^2 + \alpha_2 \|\nabla u_\epsilon^s\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega_\epsilon^s))}^2 \\ & + \epsilon \sigma \|u_\epsilon^f\|_{L^{p+2}(0,\tau;L^{p+2}(\Gamma_\epsilon))}^{p+2} \leq C. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \epsilon \sigma \|u_\epsilon^f\|_{L^{p+2}(0,T;L^{p+2}(\Gamma_\epsilon))}^{p+2} \leq C.$$

D'où

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C.$$

Pour montrer la deuxième estimation, on définit  $M$  par  $M = \max(\|u_{in}^f\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)}, \|u_{in}^s\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)})$  qui est bien défini, puisque les valeurs initiales sont des fonctions de  $L^\infty$ .

En prenant comme fonctions tests  $w_\epsilon^f = (u_\epsilon^f - M)_+$  et  $w_\epsilon^s = (u_\epsilon^s - M)_+$ , dans la formulation faible (3.34), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\epsilon^f} \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} (u_\epsilon^f - M)_+ dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla (u_\epsilon^f - M)_+ dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^s} \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} (u_\epsilon^s - M)_+ dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla (u_\epsilon^s - M)_+ dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon^f (u_\epsilon^f - M)_+ dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f (u_\epsilon^f - M)_+ d\sigma_x = 0. \end{aligned}$$

Par suite, on aura

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\epsilon^f} \frac{\partial (u_\epsilon^f - M)_+}{\partial t} (u_\epsilon^f - M)_+ dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f (\nabla (u_\epsilon^f - M)_+)^2 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^s} \frac{\partial (u_\epsilon^s - M)_+}{\partial t} (u_\epsilon^s - M)_+ dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s (\nabla (u_\epsilon^s - M)_+)^2 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \cdot \nabla (u_\epsilon^f - M)_+ (u_\epsilon^f - M)_+ dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p (u_\epsilon^f - M)_+^2 d\sigma_x \\ & + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p M (u_\epsilon^f - M)_+ d\sigma_x = 0, \end{aligned}$$

Ensuite, en intégrant par rapport au temps et à l'aide de la coercivité de  $K^s$  et  $K^f$  puis en utilisant le fait que  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$  dans  $\Omega_\epsilon^f$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|(u_\epsilon^f - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1}{2} \|(u_\epsilon^s - M)_+\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla(u_\epsilon^f - M)_+\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega_\epsilon^f))}^2 \\ & + \alpha_2 \|\nabla(u_\epsilon^s - M)_+\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega_\epsilon^s))}^2 + \epsilon\sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p (u_\epsilon^f - M)_+^2 d\sigma_x dt \\ & + \epsilon\sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p M (u_\epsilon^f - M)_+ d\sigma_x dt \leq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons  $u_\epsilon^i(t, x) \leq C$ , pour  $i = s, f$ .

Montrons maintenant que pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons  $u_\epsilon^i(t, x) \geq 0$ , pour  $i = s, f$ . Pour ce faire, prenons comme fonctions tests  $w_\epsilon^f = -(u_\epsilon^f)_-$  et  $w_\epsilon^s = -(u_\epsilon^s)_-$  dans la formulation faible (3.34). Ainsi on aura

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_\epsilon^f} \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} (u_\epsilon^f)_- dx - \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla (u_\epsilon^f)_- dx - \int_{\Omega_\epsilon^s} \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} (u_\epsilon^s)_- dx \\ & - \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla (u_\epsilon^s)_- dx - \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f (u_\epsilon^f)_- dx - \epsilon\sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f (u_\epsilon^f)_- d\sigma_x = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la définition de  $(u_\epsilon^f)_-$  et  $(u_\epsilon^s)_-$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\epsilon^f} \frac{\partial (u_\epsilon^f)_-}{\partial t} (u_\epsilon^f)_- dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f (\nabla (u_\epsilon^f)_-)^2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} \frac{\partial (u_\epsilon^s)_-}{\partial t} (u_\epsilon^s)_- dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s (\nabla (u_\epsilon^s)_-)^2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla (u_\epsilon^f)_- (u_\epsilon^f)_- dx + \epsilon\sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p (u_\epsilon^f)_-^2 d\sigma_x = 0, \end{aligned}$$

puis en intégrant par rapport au temps et en utilisant la coercivité de  $K^s$  et  $K^f$  et le fait que  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$  dans  $\Omega_\epsilon^f$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|(u_\epsilon^f)_-\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1}{2} \|(u_\epsilon^s)_-\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla (u_\epsilon^f)_-\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega_\epsilon^f))}^2 + \alpha_2 \|\nabla (u_\epsilon^s)_-\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega_\epsilon^s))}^2 \\ & + \epsilon\sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p (u_\epsilon^f)_-^2 d\sigma_x dt \leq 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Par conséquent, pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons  $u_\epsilon^i(t, x) \geq 0$ , pour  $i = s, f$ . Ce qui achève la preuve du lemme.

Nous avons alors le résultat d'existence et d'unicité du problème d'homogénéisation.

**Théorème 3.3** *Supposons que les hypothèses (H1), (H4) et (H5) sont satisfaites, alors le problème (3.34) admet une unique solution dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ .*

### Démonstration

Avant de donner la démonstration de ce résultat, notons tout d'abord que pour tout  $\bar{u}_\epsilon$  fixé dans

$L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ , le problème variationnel

$$\int_{\Omega_f^f} \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} w_\epsilon^f dx + \int_{\Omega_f^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx + \int_{\Omega_s^s} \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} w_\epsilon^s dx + \int_{\Omega_s^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla w_\epsilon^s dx \quad (3.38)$$

$$\int_{\Omega_f^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f w_\epsilon^f dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |\bar{u}_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f w_\epsilon^f d\sigma_x = 0, \forall w_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

avec  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , admet une unique solution  $u_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  (voir [22]). Ensuite, en utilisant le lemme 3.12, on aura que  $u_\epsilon$  est dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ .

Définissons maintenant l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} G : L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)) \\ \bar{u}_\epsilon &\longmapsto u_\epsilon, \end{aligned}$$

où  $u_\epsilon$  est l'unique solution du problème (3.38). On a bien que l'opérateur  $G$  est bien défini.

Afin de prouver l'existence de la solution du problème (3.34), il faut montrer que l'opérateur  $G$  admet un point fixe. Ceci, en utilisant le degré topologique de Leray Schauder, qu'il faut montrer que  $G$  est compact, continu et trouver  $R > 0$ , tel qu'il n'existe aucune solution de  $u - \lambda G(u) = 0$  satisfaisant  $\|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} = R$ , pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ .

Tout d'abord, dans le but de montrer la continuité de l'opérateur  $G$ , considérons une suite  $\bar{u}_{\epsilon, n}$  dans  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ , telle que

$$\bar{u}_{\epsilon, n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \bar{u}_\epsilon \quad \text{dans } L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$$

et prouvons que

$$G(\bar{u}_{\epsilon, n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G(\bar{u}_\epsilon) \quad \text{dans } L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$$

En effet, soit  $u_{\epsilon, n}$  (respectivement  $u_\epsilon$ ) l'unique solution du problème (3.38) associée à  $\bar{u}_{\epsilon, n}$  (respectivement à  $\bar{u}_\epsilon$ ).

En soustrayant les deux formulations associées à  $u_{\epsilon, n}$  et  $u_\epsilon$ , on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_f^f} \left( \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} - \frac{\partial u_{\epsilon, n}^f}{\partial t} \right) w_\epsilon^f dx + \int_{\Omega_s^s} \left( \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} - \frac{\partial u_{\epsilon, n}^s}{\partial t} \right) w_\epsilon^s dx + \int_{\Omega_f^f} K_\epsilon^f (\nabla u_\epsilon^f - \nabla u_{\epsilon, n}^f) \nabla w_\epsilon^f dx \\ &+ \int_{\Omega_s^s} K_\epsilon^s (\nabla u_\epsilon^s - \nabla u_{\epsilon, n}^s) \nabla w_\epsilon^s dx + \int_{\Omega_f^f} V_\epsilon \nabla (u_\epsilon^f - u_{\epsilon, n}^f) w_\epsilon^f dx + \int_{\Gamma_\epsilon} \epsilon \sigma (|\bar{u}_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f - |\bar{u}_{\epsilon, n}^f|^p u_{\epsilon, n}^f) w_\epsilon^f d\sigma_x = 0. \end{aligned}$$

En prenant  $w_\epsilon^f = u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f$ ,  $w_\epsilon^s = u_\epsilon^s - u_{\epsilon,n}^s$  et en intégrant par rapport à  $t \in (0, \tau]$  avec  $\tau \in (0, T]$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} \left( \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} - \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} \right) (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^s} \left( \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} - \frac{\partial u_{\epsilon,n}^s}{\partial t} \right) (u_\epsilon^s - u_{\epsilon,n}^s) dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f (\nabla u_\epsilon^f - \nabla u_{\epsilon,n}^f) \nabla (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s (\nabla u_\epsilon^s - \nabla u_{\epsilon,n}^s) \nabla (u_\epsilon^s - u_{\epsilon,n}^s) dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) dx dt + \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} \epsilon \sigma (|\bar{u}_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f - |\bar{u}_{\epsilon,n}^f|^p u_{\epsilon,n}^f) (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) d\sigma_x dt = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Or puisque  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$ , on aura

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} \left( \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} - \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} \right) (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^s} \left( \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} - \frac{\partial u_{\epsilon,n}^s}{\partial t} \right) (u_\epsilon^s - u_{\epsilon,n}^s) dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f (\nabla u_\epsilon^f - \nabla u_{\epsilon,n}^f) \nabla (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s (\nabla u_\epsilon^s - \nabla u_{\epsilon,n}^s) \nabla (u_\epsilon^s - u_{\epsilon,n}^s) dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} \epsilon \sigma |\bar{u}_\epsilon^f|^p (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f)^2 d\sigma_x dt \\ & = - \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} \epsilon \sigma u_{\epsilon,n}^f (|\bar{u}_\epsilon^f|^p - |\bar{u}_{\epsilon,n}^f|^p) (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f) d\sigma_x dt. \end{aligned} \quad (3.41)$$

D'autre part, en utilisant une démonstration analogue à celle du lemme 3.12, nous aurons les deux estimations suivantes

$$\|\nabla \bar{u}_{\epsilon,n}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\bar{u}_{\epsilon,n}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq C, \quad (3.42)$$

et

$$\|\nabla u_{\epsilon,n}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_{\epsilon,n}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq C. \quad (3.43)$$

DE même, d'après le lemme 3.8, nous avons

$$\|\bar{u}_{\epsilon,n}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_\epsilon))} \leq C \text{ et } \|u_{\epsilon,n}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_\epsilon))} \leq C. \quad (3.44)$$

Donc, il existe  $C$  indépendante de  $n$ , telle que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_{\epsilon,n}^f(\tau) - u_\epsilon^f(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1}{2} \|u_{\epsilon,n}^s(\tau) - u_\epsilon^s(\tau)\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_1 \|\nabla u_{\epsilon,n}^f - \nabla u_\epsilon^f\|_{L^2(0,\tau;\Omega_\epsilon^f)}^2 \\ & + \alpha_2 \|\nabla u_{\epsilon,n}^s - \nabla u_\epsilon^s\|_{L^2(0,\tau;\Omega_\epsilon^s)}^2 + \epsilon \sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} |\bar{u}_\epsilon^f|^p (u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f)^2 d\sigma_x dt \\ & \leq C \|\bar{u}_\epsilon^f - \bar{u}_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,\tau;H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))} \|u_\epsilon^f - u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,\tau;H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))}, \forall \tau \in (0, T]. \end{aligned}$$

Or, puisqu'on a  $\bar{u}_{\epsilon,n}$  converge vers  $\bar{u}_\epsilon$  dans  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ , on conclut que  $G$  est continu.

Montrons maintenant que  $G$  est compact. Pour cela, soit  $(\bar{u}_{\epsilon,n})_n$  une suite bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , et soit  $u_{\epsilon,n} = G(\bar{u}_{\epsilon,n})$  l'unique solution de (3.38) associée à  $\bar{u}_{\epsilon,n}$ , d'après (3.43), on a

$$\|\nabla u_{\epsilon,n}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

Nous allons maintenant montrer que  $\frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial t}$  est bornée dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

C'est à dire que

$$\left\| \frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))} \leq C.$$

En effet, en prenant comme fonction test  $w_\epsilon = \left( \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t}, \frac{\partial u_{\epsilon,n}^s}{\partial t} \right)$  (voir [22]) dans (3.38), on aura

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon^f} \left( \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} \right)^2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} \left( \frac{\partial u_{\epsilon,n}^s}{\partial t} \right)^2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_{\epsilon,n}^f \nabla \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_{\epsilon,n}^f \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} dx \\ + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_{\epsilon,n}^s \nabla \frac{\partial u_{\epsilon,n}^s}{\partial t} dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |\bar{u}_{\epsilon,n}^f|^p u_{\epsilon,n}^f \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

En développant chaque terme de l'équation ci-dessus, on obtient

$$\int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_{\epsilon,n}^f \nabla \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_{\epsilon,n}^f \nabla u_{\epsilon,n}^f dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon^f} \partial_t K_\epsilon^f \nabla u_{\epsilon,n}^f \nabla u_{\epsilon,n}^f dx$$

et

$$\int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_{\epsilon,n}^s \nabla \frac{\partial u_{\epsilon,n}^s}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_{\epsilon,n}^s \nabla u_{\epsilon,n}^s dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon^s} \partial_t K_\epsilon^s \nabla u_{\epsilon,n}^s \nabla u_{\epsilon,n}^s dx,$$

Puis en remplaçant alors ces termes dans (3.45), on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon^f} \left( \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} \right)^2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} \left( \frac{\partial u_{\epsilon,n}^s}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_{\epsilon,n}^f \nabla u_{\epsilon,n}^f dx \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_{\epsilon,n}^s \nabla u_{\epsilon,n}^s dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon^f} \partial_t K_\epsilon^f \nabla u_{\epsilon,n}^f \nabla u_{\epsilon,n}^f dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon^s} \partial_t K_\epsilon^s \nabla u_{\epsilon,n}^s \nabla u_{\epsilon,n}^s dx - \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_{\epsilon,n}^f \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} dx - \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} |\bar{u}_{\epsilon,n}^f|^p u_{\epsilon,n}^f \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

Ensuite, en intégrant par rapport à  $t \in (0, \tau)$ , pour  $\tau \in (0, T]$  et en utilisant la coercivité de  $K^f$  et  $K^s$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \alpha \|\nabla u_\epsilon(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \alpha \|\nabla u_{\epsilon,n}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \frac{1}{2} \|\partial_t K_\epsilon^f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega_\epsilon^f))} \|\nabla u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t K_\epsilon^s\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega_\epsilon^s))} \|\nabla u_{\epsilon,n}^s\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^s))}^2 \\ + \|V_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \|\nabla u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))} \left\| \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))} \\ + \left| \epsilon \sigma \int_0^\tau \int_{\Gamma_\epsilon} |\bar{u}_{\epsilon,n}^f|^p u_{\epsilon,n}^f \frac{\partial u_{\epsilon,n}^f}{\partial t} dx \right|. \end{aligned}$$

Or puisqu'on a  $V_\epsilon$  appartient à  $H_0^1(\Omega_\epsilon^f) \cap H^2(\Omega_\epsilon^f)$ , d'après l'injection continue de  $H_0^1(\Omega_\epsilon^f) \cap H^2(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $L^\infty(\Omega_\epsilon^f)$ , en dimension 2 puis en utilisant l'inégalité de Young et le lemme 3.8, nous obtenons



l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \alpha \|\nabla u_{\epsilon,n}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \alpha \|\nabla u_{\epsilon,n}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \frac{1}{2} \|\partial_t K_\epsilon^f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega_\epsilon^f))} \|\nabla u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t K_\epsilon^s\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega_\epsilon^s))} \|\nabla u_{\epsilon,n}^s\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^s))}^2 \\
& + \frac{1}{2} \|V_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)}^2 \|\nabla u_{\epsilon,n}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\epsilon^f))}^2 \\
& + \epsilon \sigma C \|\bar{u}_{\epsilon,n}^f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_\epsilon))}^p \|u_{\epsilon,n}^f(T) - u_{\epsilon,n}^f(0)\|_{L^\infty(\Gamma_\epsilon)}^2.
\end{aligned}$$

Or d'après le théorème 1.2, on a l'injection de  $H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)$  in  $H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f)$  est compacte pour  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  et l'injection de  $H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $L^2(\Omega_\epsilon^f)$  est continue. Donc à partir du lemme 1.5, on peut extraire une sous-suite notée encore  $(u_{\epsilon,n})_n$  qui converge vers  $L^2(0, T; H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f))$ . Or puisque l'opérateur trace de  $H^{1-\delta}(\Omega_\epsilon^f)$  dans  $L^2(\Gamma_\epsilon)$  est continue, alors la sous-suite  $(u_{\epsilon,n})_n$  converge dans  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_\epsilon))$ .

Soit alors  $u_{\epsilon,n}$  et  $u_{\epsilon,m}$  deux sous-suites de  $(u_{\epsilon,n})_n$  qui sont respectivement l'unique solution de la formulation (3.38) associée à  $\bar{u}_{\epsilon,n}$  et à  $\bar{u}_{\epsilon,m}$ .

Ainsi, en utilisant le lemme 3.8 et la continuité de l'opérateur trace, on trouve

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_{\epsilon,n} - \nabla u_{\epsilon,m}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 & \leq C \|\bar{u}_{\epsilon,n}^f - \bar{u}_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))} \|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))} \\
& + C \|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))}^2,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_{\epsilon,n} - \nabla u_{\epsilon,m}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 & \leq 2C \sup_m (\|\bar{u}_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))}) \|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))} \\
& + C \|u_{\epsilon,n}^f - u_{\epsilon,m}^f\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))}^2.
\end{aligned}$$

D'où la suite  $u_{\epsilon,n}$  est de Cauchy dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Ce qui montre que  $G$  est compact.

Puisque  $G$  est continu et compact, pour montrer que  $G$  admet un point fixe, on considère la boule ouverte  $B$ , définie par :

$$B = \{u_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)), \|u_\epsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} < R\}$$

avec  $R = C + 1$ . L'opérateur  $G$  n'admet pas de point fixe sur  $\partial B$ . Donc  $\deg[I - G, B, 0]$  est défini et indépendant de  $\lambda$ . En utilisant le théorème 1.6, puisque  $G_0$  correspond au problème suivant :

$$\int_{\Omega_\epsilon^f} \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} w_\epsilon^f dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} w_\epsilon^s dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla w_\epsilon^f dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla w_\epsilon^s dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f w_\epsilon^f dx = 0, \quad (3.46)$$

qui admet une solution unique  $u_\epsilon$  (voir [22]), alors

$$\deg[I - G_0, B, 0] = 1.$$

Donc

$$\deg[I - G_1, B, 0] = 1.$$

Par conséquent, il existe  $u_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , tel que  $G_1(u_\epsilon) = u_\epsilon$  et de plus  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Ce qui montre l'existence du point fixe.

Pour terminer, notons que l'étude de l'unicité de la solution du problème (3.34) se fait de la même manière que celle dans le cas du problème (3.8), tout en remarquant bien évidemment que la fonction  $F(x) = |x|^p x$  satisfait les hypothèses  $F(0) = 0$  et la monotonie. Ceci achève la preuve du théorème.

### Résultats de la convergence à deux échelles

Afin de montrer le résultat de la convergence à deux échelles, nous aurons besoin de certaines estimations a priori sur la solution  $u_\epsilon$  et sur sa dérivée par rapport au temps  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}$ . Ceci fait l'objet du lemme suivant.

**Lemme 3.13** *Si  $u_\epsilon$  est solution de (3.34), alors pour tout  $t \in [0, T]$ , il existe une constante  $C > 0$ , telle que*

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C. \quad (3.47)$$

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq C. \quad (3.48)$$

$$\left\| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C. \quad (3.49)$$

### Démonstration

La première et la deuxième estimation ont déjà été établies dans la preuve du lemme 3.12. Il reste alors à montrer l'estimation sur  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}$ . Pour cela, en dérivant par rapport au temps l'équation associée à la formulation variationnelle (3.34) et en prenant comme fonction test  $w_\epsilon = (\frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t})$ , on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\epsilon^f} \left( \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\epsilon^s} \left( \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} \right)^2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} \frac{\partial(K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f)}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} dx \\ + \int_{\Omega_\epsilon^s} \frac{\partial(K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s)}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial(|u_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f)}{\partial t} \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

En développant chaque terme de l'équation ci-dessus et en utilisant le fait que  $\nabla \cdot V_\epsilon = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon^f} \frac{\partial(K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f)}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} dx &= \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} \partial_t K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} dx, \\ \int_{\Omega_\epsilon^s} \frac{\partial(K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s)}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} dx &= \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} \partial_t K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} dx, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} dx = 0$$

et

$$\epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial (|u_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f)}{\partial t} \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} dx = \epsilon \sigma \left( \int_{\Gamma_\epsilon} (p|u_\epsilon^f|^p + |u_\epsilon^f|^p) \left( \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right)^2 dx \right).$$

Ainsi en remplaçant ces termes dans (3.50), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1d}{2dt} \int_{\Omega_\epsilon^f} \left( \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right)^2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} \partial_t K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} dx \\ & + \frac{1d}{2dt} \int_{\Omega_\epsilon^s} \left( \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} \right)^2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} \partial_t K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} dx \\ & + \epsilon \sigma \left( \int_{\Gamma_\epsilon} (p|u_\epsilon^f|^p + |u_\epsilon^f|^p) \left( \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right)^2 dx \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ensuite, en intégrant par rapport à  $t \in (0, \tau)$ , pour  $\tau \in (0, T]$ , et en utilisant la coercivité de  $K^f$  et  $K^s$  et l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1d}{2dt} \left\| \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \alpha_1 \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1d}{2dt} \left\| \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_2 \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 \\ & \leq \left\| \partial_t K_\epsilon^f \right\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \left\| \nabla u_\epsilon^f \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} + \left\| \partial_t K_\epsilon^s \right\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)} \left\| \nabla u_\epsilon^s \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \\ & + \epsilon \sigma (p+1) \left\| u_\epsilon^f \right\|_{L^\infty(\Gamma_\epsilon)}^p \left\| \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)}^2. \end{aligned}$$

Puis en utilisant le lemme 1.8, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1d}{2dt} \left\| \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \alpha_1 \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \frac{1d}{2dt} \left\| \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 + \alpha_2 \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)}^2 \\ & \leq \left\| \partial_t K_\epsilon^f \right\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^f)} \left\| \nabla u_\epsilon^f \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} + \left\| \partial_t K_\epsilon^s \right\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon^s)} \left\| \nabla u_\epsilon^s \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^s)} \\ & + C \sigma (p+1) \left\| u_\epsilon^f \right\|_{L^\infty(\Gamma_\epsilon)}^p \left( \left\| \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 + \epsilon^2 \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)}^2 \right). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H4), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1d}{2dt} \left\| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left\| \nabla u_\epsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & + C \sigma (p+1) \left\| u_\epsilon^f \right\|_{L^\infty(\Gamma_\epsilon)}^p \left( \left\| \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon^2 \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

En utilisant l'inégalité de Young et le lemme 3.8, nous obtenons l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & \frac{1d}{2dt} \left\| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \alpha - \epsilon^2 C \sigma (p+1) - \frac{\alpha}{2} \right) \left\| \nabla \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2\alpha} \left\| \nabla u_\epsilon \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + C \sigma (p+1) \left\| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Pour  $\epsilon$  assez petit, en intégrant par rapport au temps et en utilisant l'inégalité de Granwall, on aura

$$\left\| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C. \quad (3.54)$$

Ensuite, on conclut que

$$\left\| \frac{\partial \nabla u_\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C. \quad (3.55)$$

D'où le résultat.

Nous allons maintenant énoncer les résultats de convergence à deux échelles suivants, dont la preuve se base sur les estimations ci-dessus.

**Lemme 3.14** *Supposons que les hypothèses (H1), (H4) et (H5) sont satisfaites, alors de la suite  $u_\epsilon$  de solutions du problème d'homogénéisation, on peut extraire une sous-suite notée encore  $u_\epsilon$  et il existe deux fonctions  $u_0$  (solution du problème homogénéisé (3.58)) et  $u_1$ , tels que quand  $\epsilon$  tend vers 0, nous avons :*

1.  $u_\epsilon \rightharpoonup u_0$  faiblement dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ .
2.  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_0}{\partial t}$  faiblement dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .
3.  $u_\epsilon \rightarrow u_0$  fortement dans  $L^2(0, T; H^{1-\delta}(\Omega))$  pour tout  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ,  
de plus  $\sqrt{\epsilon} \|u_\epsilon - u_0\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_\epsilon))}$  tend vers 0.
4.  $u_\epsilon \rightarrow u_0$  fortement dans  $C([0, T]; H^{1-\delta}(\Omega))$  pour tout  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ,  
de plus  $u_\epsilon \rightarrow u_0$  fortement dans  $L^\infty(0, T; L^{\frac{1}{\delta}}(\Gamma_\epsilon))$  pour  $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ .
5.  $u_\epsilon$  converge à deux échelles vers  $u_0(t, x)$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .
6.  $\chi_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s$  converge à deux échelles vers  $\chi^s(y)(\nabla_x u_0(t, x) + \nabla_y u_1(t, x, y))$  avec  
 $u_1(t, x, y) \in L^2(0, T; L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}))$ .
7.  $\chi_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f$  converge à deux échelles vers  $\chi^f(y)(\nabla_x u_0(t, x) + \nabla_y u_1(t, x, y))$  avec  
 $u_1(t, x, y) \in L^2(0, T; L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}))$ .  
où  $\chi_\epsilon^s(x) = \chi^s(\frac{x}{\epsilon})$  ( resp.  $\chi_\epsilon^f(x)$ ) la fonction caractéristique de  $\Omega_\epsilon^s$  ( resp.  $\Omega_\epsilon^f$ ) et  $\chi^s(y)$  ( resp.  $\chi^f(y)$ ) celle de  $Y^s$  ( resp.  $Y^f$ ).

### Démonstration

Les assertions de 1. à 3. et celles de 5. à 7. se démontrent de la même façon que le lemme 3.4. Il reste alors à montrer l'assertion 4. En utilisant le lemme 3.13, comme on a  $u_\epsilon$  est bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  et  $\nabla \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}$  est bornée dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Donc  $u_\epsilon \in H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ , or comme on a  $H^1(0, T, H_0^1(\Omega))$  s'injecte continûment dans  $C([0, T], H_0^1(\Omega))$ , alors

$$u_\epsilon \in V = \left\{ u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \right\}.$$

Par suite, il existe une sous-suite notée  $u_\epsilon$  qui converge fortement vers  $u_0$  dans  $C([0, T]; H^{1-\delta}(\Omega))$ , pour  $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ . Ensuite, d'après le théorème 1.2 l'espace  $H^{1-\delta}(\Omega)$  s'injecte continûment dans

$L^{\frac{1}{\delta}}(\Gamma_\epsilon)$  et  $H^{1-\delta}(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $L^2(\Gamma_\epsilon)$ , donc  $u_\epsilon$  converge fortement vers  $u_0$  dans  $C(0, T; L^{\frac{1}{\delta}}(\Gamma_\epsilon))$ , pour  $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ . Ce qui termine la preuve.

Nous allons montrer maintenant le résultat de convergence associé au terme non linéaire sur la frontière.

**Lemme 3.15** *Soit  $u_\epsilon$  la solution du problème (3.34) dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , qui converge à deux échelles vers  $u_0$ . Alors*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \sigma \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f \phi_\epsilon^f d\sigma_x dt = \frac{|\Gamma| \sigma}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega |u_0(t, x)|^p u_0(t, x) \phi(t, x) dx dt,$$

pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $\phi_\epsilon^f \in D(0, T; D(\Omega; C_\#^\infty(\Gamma)))$  qui s'écrit

$$\phi_\epsilon^f(t, x, \frac{x}{\epsilon}) = \phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon}).$$

### Démonstration

Pour montrer cette convergence, nous utilisons la décomposition suivante :

$$\epsilon \sigma \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f (\phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})) d\sigma_x dt = I_1 + I_2,$$

avec

$$I_1 = \epsilon \sigma \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f|^p u_\epsilon^f (\phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})) d\sigma_x dt,$$

et

$$I_2 = \epsilon \sigma \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} u_\epsilon^f (|u_\epsilon^f|^p - |u_0|^p) (\phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})) d\sigma_x dt.$$

D'une part, d'après l'assertion 4. du lemme précédent, on a  $u_0$  appartient  $L^\infty(0, T; L^{\frac{1}{2p}}(\Gamma_\epsilon))$  et  $0 < \frac{1}{2p} \leq \frac{1}{2}$ . Ceci implique que

$$|u_0|^p (\phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_\epsilon)).$$

Ainsi en utilisant la convergence à deux échelles de  $u_\epsilon$  vers  $u_0$ , on aura

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \sigma \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_0|^p u_\epsilon^f (\phi_0^f(t, x) + \epsilon \phi_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})) d\sigma_x dt &= \frac{\sigma}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega \int_\Gamma |u_0|^p u_0 \phi_0^f(t, x) d\sigma_y dx dt \quad (3.56) \\ &= \frac{|\Gamma| \sigma}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega |u_0(t, x)|^p u_0(t, x) \phi(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$|I_2| \leq \epsilon \sigma \left( \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} (|u_\epsilon^f|^{p-1} + |u_\epsilon^f|^{p-2} |u_0| + \dots + |u_0|^{p-2} |u_\epsilon^f|) \phi_0^f |d\sigma_x dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f - u_0|^2 d\sigma_x dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\epsilon^2 \sigma \left( \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} \left( |u_\epsilon^f|^{p-1} + |u_\epsilon^f|^{p-2} |u_0| + \dots + |u_0|^{p-2} |u_\epsilon^f| \right) \phi_1^2 d\sigma_x dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon^f - u_0|^2 d\sigma_x dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc en utilisant le fait que  $u_0$  dans  $L^\infty(0, T; L^{\frac{1}{2p}}(\Gamma_\epsilon))$ ,  $u_\epsilon$  dans  $L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_\epsilon))$  et  $u_\epsilon$  converge vers  $u_0$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_\epsilon))$ , on aura

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2 = 0.$$

### 3.3 Identification du problème macroscopique

Dans cette section, en utilisant les résultats obtenus dans la section précédente, nous identifions le problème macroscopique commun pour les différents modèles correspondant à différents termes de radiations, notés tout court par  $F$ . Pour cela nous aurons besoin du problème macroscopique dérivant de l'équation de Stokes, donné dans le résultat suivant (voir [2, 4]) et qui va nous servir pour l'identification du problème macroscopique de notre modèle.

**Théorème 3.4** *L'extension  $(\tilde{V}_\epsilon, \tilde{p}_\epsilon)$  de la solution du problème de Stokes (3.6) converge à deux échelles vers  $(V_0(x, y), p(x))$  l'unique solution du problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_y p_1(x, y) + \nabla_x p(x) - \mu \Delta_{yy} V_0(x, y) = g(x) \text{ dans } \Omega \times Y^f, \\ \nabla_y \cdot V_0(x, y) = 0 \text{ dans } \Omega \times Y^f, \\ \nabla_x \cdot (\int_Y V_0(x, y) dy) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ V_0(x, y) = 0 \text{ sur } \Omega \times Y^s, \\ (\int_Y V_0(x, y) dy) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ y \rightarrow V_0(x, y) \text{ et } p_1(x, y), \quad Y - \text{périodique.} \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Ainsi, en se basant sur les différentes convergences des termes non linéaires obtenues précédemment et la formulation du problème macroscopique de Stokes, nous pouvons identifier les problèmes aux limites macroscopiques. Ce résultat est énoncé dans le théorème suivant.

**Théorème 3.5** *Soit  $u_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  la solution du problème d'homogénéisation (3.8). Alors, il existe une sous-suite notée encore  $u_\epsilon$ ,  $u_0(t, x) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  et  $u_1(t, x, y) \in L^2(0, T; L^2(\Omega; H_{\sharp}^1(Y)/\mathbb{R}))$ , tels que*

- i)  $u_\epsilon$  converge à deux échelles vers  $u_0(t, x)$ .
- ii)  $\chi_\epsilon^s(x) \nabla u_\epsilon^s$  converge à deux échelles vers  $\chi^s(y) (\nabla_x u_0(t, x) + \nabla_y u_1(t, x, y))$ .
- iii)  $\chi_\epsilon^f(x) \nabla u_\epsilon^f$  converge à deux échelles vers  $\chi^f(y) (\nabla_x u_0(t, x) + \nabla_y u_1(t, x, y))$ .

où  $\chi_\epsilon^s(x)$  (resp.  $\chi_\epsilon^f(x)$ ) est la fonction caractéristique de  $\Omega_\epsilon^s$  (resp.  $\Omega_\epsilon^f$ ) et  $\chi^s(y)$  (resp.  $\chi^f(y)$ ) la

fonction caractéristique  $Y_s$  ( resp.  $Y_f$  ) et  $u_0(t, x)$  est la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{|Y_f|+|Y_s|}{|Y|} \frac{\partial u_0(t, x)}{\partial t} - \nabla \cdot (K^* \nabla u_0(t, x)) + V^* \nabla u_0(t, x) + \frac{|\Gamma|}{|Y|} F(u_0(t, x)) = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \\ u_0(t, x) = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u_0(0, x) = u_{in} \text{ sur } \Omega. \end{cases} \quad (3.58)$$

où  $K^*(t, x)$  est le tenseur de conductivité homogénéisé donné par :

$$\begin{aligned} K_{i,j}^* &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} K^f(t, x, y) (e_i + \nabla w_i^f(y)) (e_j + \nabla w_j^f(y)) dy \\ &+ \frac{1}{|Y|} \int_{Y_s} K^s(t, x, y) (e_i + \nabla w_i^s(y)) (e_j + \nabla w_j^s(y)) dy, \quad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, d\}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

avec

$$w_j = \begin{cases} w_j^s & \text{dans } Y_s, \\ w_j^f & \text{dans } Y_f, \end{cases} \quad \text{pour } j \in \{1, \dots, d\} \quad (3.60)$$

est la solution du système suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (K^s(t, x, y) (e_j + \nabla w_j^s)) = 0 \text{ dans } Y_s \\ -\nabla \cdot (K^f(t, x, y) (e_j + \nabla w_j^f)) = 0 \text{ dans } Y_f \\ -K^s(t, x, y) (e_j + \nabla w_j^s) \cdot n = -K^f(t, x, y) (e_j + \nabla w_j^f) \cdot n \text{ sur } \Gamma \\ w_j^s = w_j^f \text{ sur } \Gamma \\ w_j^f \text{ est } Y - \text{périodique} \\ w_j^s \text{ est } Y - \text{périodique} \end{cases} \quad (3.61)$$

$V^*$  est la vitesse homogénéisée définie par

$$V^* = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} V_0(x, y) dy, \quad (3.62)$$

et  $u_1(t, x, y)$  désigne le correcteur d'ordre 1 défini par :

$$u_1(t, x, y) = \sum_{j=1}^d w_j(y) \frac{\partial u_0(t, x)}{\partial x_j}. \quad (3.63)$$

### Démonstration

Les trois premières convergences à deux échelles sont prouvées dans le lemme 3.14. Cependant, les passages à la limite par la convergence à deux échelles nécessitent un bon choix des fonctions tests, pour obtenir les résultats qu'il faut. Considérons donc la fonction test  $\phi_\epsilon \in C_0^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$  telle

que

$$\phi_\epsilon(t, x) = \phi_0(t, x) + \epsilon\phi_1(t, x, \frac{x}{\epsilon}),$$

où  $(\phi_0, \phi_1) \in C_0^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega)) \times C_0^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y)))$ , et

$$\phi_i = \begin{cases} \phi_i^s & \text{in } (0, T) \times \Omega_\epsilon^s, \\ \phi_i^f & \text{in } (0, T) \times \Omega_\epsilon^f, \end{cases} \quad \text{pour } i = 0, 1.$$

Notons tout d'abord qu'en raison de l'analogie entre  $u_\epsilon^f$  and  $u_\epsilon^s$ , nous n'allons identifier les problèmes aux limites que pour  $u_\epsilon^f$ . Ensuite, ceux de  $u_\epsilon^s$  peuvent être obtenus en utilisant les mêmes techniques. En effet, en utilisant la convergence à deux échelles de  $u_\epsilon$  vers  $u_0(t, x)$ , on obtient le résultat de convergence suivant

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \langle \frac{\partial u_\epsilon^f(t, x)}{\partial t}, \phi_\epsilon^f \rangle_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)', H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f)} dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega u_\epsilon \chi^f(\frac{x}{\epsilon}) \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial t} dx dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega u_\epsilon \chi^f(\frac{x}{\epsilon}) (\frac{\partial \phi_0(t, x)}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \phi_1(t, x, \frac{x}{\epsilon})}{\partial t}) dx dt \\ &= \frac{|Y_f|}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega u_0(t, x) \frac{\partial \phi_0(t, x)}{\partial t} dx dt \\ &= \frac{|Y_f|}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_0(t, x)}{\partial t} \phi_0(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

Ensuite, à partir de la convergence à deux échelles de  $\nabla u_\epsilon$  vers  $\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla \phi_\epsilon^f dx dt &= \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega \int_{Y_f} K^f(t, x, y) \nabla_x u_0(t, x) (\nabla_x \phi_0(x, t) + \nabla_y \phi_1(t, x, y)) dy dx dt \\ &+ \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega \int_{Y_f} K^f(t, x, y) \nabla_y u_1(t, x, y) (\nabla_x \phi_0(x, t) + \nabla_y \phi_1(t, x, y)) dy dx dt. \end{aligned}$$

En utilisant les deux résultats de convergences ci-dessus et la convergence à deux échelles de  $V_\epsilon$  vers  $V_0(x, y)$  et d'après le théorème 3.4, nous obtenons les résultats suivants

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \chi_\epsilon^f(x) V_\epsilon \nabla u_\epsilon (\phi_0(t, x) + \epsilon \phi_1(t, x, \frac{x}{\epsilon})) dx dt = -\frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega \int_{Y_f} V_0(x, y) u_0(t, x) (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1) dx dt. \quad (3.64)$$

Puis du fait que  $\nabla_y \cdot V_0(x, y) = 0$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \chi_\epsilon^f(x) V_\epsilon \nabla u_\epsilon (\phi_0(t, x) + \epsilon \phi_1(t, x, \frac{x}{\epsilon})) dx dt &= -\frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega \int_{Y_f} V_0(x, y) u_0(t, x) (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1) dy dx dt \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_\Omega \int_{Y_f} V_0(x, y) \nabla_x u_0(t, x) \phi_0 dy dx dt. \end{aligned}$$



Ainsi en utilisant le lemme 3.5 et les résultats précédents, on obtient le problème aux limites suivant

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{|Y_f|}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t} \phi_0(t,x) dx dt + \frac{|Y_s|}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t} \phi_0(t,x) dx dt \\
&+ \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f(t,x,y) (\nabla_x u_0(t,x) + \nabla_y u_1(t,x,y)) (\nabla_x \phi_0(x,t) + \nabla_y \phi_1(t,x,y)) dy dx dt \\
&+ \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s(t,x,y) (\nabla_x u_0(t,x) + \nabla_y u_1(t,x,y)) (\nabla_x \phi_0(x,t) + \nabla_y \phi_1(t,x,y)) dy dx dt \\
&+ \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega} \int_{Y_f} V_0(x,y) \nabla_x u_0 \phi_0(t,x) dy dx dt + \frac{|\Gamma| \sigma}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega} F(u_0) \phi_0(t,x) d\sigma_y dx dt.
\end{aligned}$$

Il reste à prendre  $\phi_0 = 0$  pour obtenir le problème cellulaire (3.61) et aussi  $\phi_1 = 0$  pour obtenir le problème homogénéisé (3.58).

Maintenant, dans le but de démontrer l'unicité de la solution du problème homogénéisé (3.58), nous supposons que  $u_0^1$  et  $u_0^2$  sont deux solutions du problème (3.58). En soustrayant les formulations faibles associées aux solutions  $u_0^1$  et  $u_0^2$ , on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{|Y_f| + |Y_s|}{|Y|} \left\langle \frac{\partial u_0^1}{\partial t} - \frac{\partial u_0^2}{\partial t}, w \right\rangle_{(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))} + \int_{\Omega} K^* (\nabla u_0^1 - \nabla u_0^2) \nabla w dx \\
&+ \int_{\Omega} V^* \nabla (u_0^1 - u_0^2) w dx + \frac{|\Gamma| \sigma}{|Y|} \int_{\Omega} (F(u_0^1(t,x)) - F(u_0^2(t,x))) w dx = 0.
\end{aligned}$$

Prenons alors  $w = u_0^1 - u_0^2$  et intégrons par rapport à  $t$ . On aura alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{|Y_f| + |Y_s|}{|Y|} \|u_0^1(\tau) - u_0^2(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} K^* |\nabla (u_0^1 - u_0^2)|^2 dx dt \\
&+ \int_0^{\tau} \int_{\Omega} V^* \nabla (u_0^1 - u_0^2) (u_0^1 - u_0^2) dx dt + \frac{|\Gamma| \sigma}{|Y|} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (F(u_0^1(t,x)) - F(u_0^2(t,x))) (u_0^1 - u_0^2) dx dt = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi en utilisant le fait que  $\nabla \cdot V^* = 0$  dans  $\Omega$ ,  $K^*$  est coercive et que  $F$  est monotone, on aura

$$\|u_0^1 - u_0^2\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq 0.$$

Ce qui achève la preuve du théorème.

### 3.3.1 Convergence forte

Les résultats de la section précédente ne donnent qu'une forte convergence de  $u_{\epsilon}$  mais une faible convergence du gradient  $\nabla u_{\epsilon}$  de  $u_{\epsilon}$ . Nous souhaitons améliorer cette faible convergence afin d'obtenir une convergence forte dans  $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ . Ceci nécessite généralement des hypothèses de régularité supplémentaires, en particulier que le terme correcteur  $u_1$  appartienne à l'espace  $H_0^1(\Omega)$ . En fait cette exigence semble être satisfaite si la solution homogénéisée  $u_0$  et les solutions des problèmes cellulaires  $w_j$  sont régulières. De plus, la convergence nécessite également que  $\nabla_y u_1(t,x,y)$  soit dans

$L^2(0, T; L^2(\Omega; C_{\sharp}(Y)))$  et que  $K_{\epsilon}^i(t, x) = K^i(t, \frac{x}{\epsilon})$  au lieu de  $K_{\epsilon}^i(t, x) = K^i(t, x, \frac{x}{\epsilon})$  pour  $i = f, s$ . L'approche que nous utiliserons pour obtenir les résultats de convergence forte se base sur la convergence à deux échelles. Nous avons alors le résultat

**Théorème 3.6** *Supposons que  $u_1$  est régulier. Alors nous avons*

*La suite  $(\nabla u_{\epsilon}(t, x) - \nabla_x u_0(t, x) - \nabla_y u_1(t, x, \frac{x}{\epsilon}))_{\epsilon > 0}$  converge fortement vers 0 dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .*

### Démonstration

Posons

$$I_1 = \alpha \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon}(t, x) - \nabla_x u_0(t, x) - \nabla_y u_1(t, x, \frac{x}{\epsilon})|^2 dx dt.$$

En utilisant le fait que  $\nabla \cdot V_{\epsilon} = 0$  et la coercivité de  $K^f$  et  $K^s$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^T \int_{\Omega_f^{\epsilon}} K_{\epsilon}^f |\nabla u_{\epsilon}^f(t, x) - \nabla_x u_0(t, x) - \nabla_y u_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})|^2 dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega_s^{\epsilon}} K_{\epsilon}^s |\nabla u_{\epsilon}^s(t, x) - \nabla_x u_0(t, x) - \nabla_y u_1^s(t, x, \frac{x}{\epsilon})|^2 dx dt \\ &= -\epsilon \int_0^T \int_{\Gamma_{\epsilon}} \sigma F(u_{\epsilon}^f) u_{\epsilon}^f d\sigma_x dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega_f^{\epsilon}} |u_{\epsilon}^f(T, x)|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_f^{\epsilon}} |u_{\epsilon}^f(0, x)|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s^{\epsilon}} |u_{\epsilon}^s(T, x)|^2 dx dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_s^{\epsilon}} |u_{\epsilon}^s(0, x)|^2 dx dt \int_0^T + \int_{\Omega_f^{\epsilon}} K_{\epsilon}^f |\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})|^2 dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega_s^{\epsilon}} K_{\epsilon}^s |\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1^s(t, x, \frac{x}{\epsilon})|^2 dx dt \\ &- 2 \int_0^T \int_{\Omega_f^{\epsilon}} K_{\epsilon}^f \nabla u_{\epsilon}^f (\nabla u_0 + \nabla u_1^f(t, x, \frac{x}{\epsilon})) dx dt - 2 \int_0^T \int_{\Omega_s^{\epsilon}} K_{\epsilon}^s \nabla u_{\epsilon}^s (\nabla u_0 + \nabla_y u_1^s(t, x, \frac{x}{\epsilon})) dx dt. \end{aligned}$$

Donc d'après les résultats de convergence à deux échelles obtenus dans le lemme 3.4, le théorème 1.7 et le théorème 1.8, on aura le résultat suivant

$$\begin{aligned} I_1 &\leq -\frac{|\Gamma|}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega} \sigma F(u_0) u_0 dx dt - \frac{|Y^f|}{2|Y|} \int_{\Omega} |u_0(T, x)|^2 dx dt + \frac{|Y^f|}{2|Y|} \int_{\Omega} |u_0(0, x)|^2 dx dt \\ &- \frac{|Y^s|}{2|Y|} \int_{\Omega} |u_0(T, x)|^2 dx dt + \frac{|Y^s|}{2|Y|} \int_{\Omega} |u_0(0, x)|^2 dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} K^* |\nabla u_0|^2 dx dt, \quad (3.65) \end{aligned}$$

Finalement, l'expression (3.65) est exactement la formulation variationnelle du problème homogenisé (3.58) pour la fonction test  $u_0$ . Ceci implique donc que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \nabla(u_{\epsilon} - u_0 - \epsilon u_1) = 0 \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Ce qui achève la preuve du résultat de la convergence forte.

# Etude de l'approximation numérique du problème

---

Dans ce chapitre, nous proposons un développement asymptotique de la solution du problème d'homogénéisation. Nous identifions ainsi les équations homogénéisées associées au problème d'homogénéisation et celles correspondant au correcteur du premier ordre et même celui du second ordre, lorsque le terme d'échange thermique est décrit par une fonction assez régulière. Ensuite, nous proposons une discrétisation des problèmes ainsi obtenus via la méthode des éléments finis. Enfin, nous donnons des résultats numériques illustrant la convergence en fonction du paramètre d'échelle  $\epsilon$  et justifiant qualitativement l'importance et l'efficacité de l'homogénéisation ainsi que l'utilité des correcteurs du premier et du second ordre dans la convergence du processus d'homogénéisation.

## 4.1 Développement asymptotique et identification des correcteurs

Avant de donner le développement asymptotique de la solution du problème d'homogénéisation et d'identifier les correcteurs, notons tout d'abord qu'à la fin du chapitre précédent, nous avons utilisé la convergence à deux échelles pour identifier la solution homogénéisée  $u_0$  et le correcteur du premier ordre. Ainsi dans ce chapitre, nous proposons une autre approche formelle basée sur le développement asymptotique qui va nous permettre d'identifier également le correcteur du second ordre permettant d'améliorer nettement la qualité de la solution, ceci en rajoutant des hypothèses de régularité supplémentaires sur les données.

Nous commençons tout d'abord par rappeler les équations du modèle de transfert thermique dont

nous cherchons à déterminer le modèle homogénéisé correspondant.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t} - \nabla \cdot (K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f) + V_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon^f = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega_\epsilon^f, \\ \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t} - \nabla \cdot (K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s) = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega_\epsilon^s, \\ u_\epsilon^s(t, x) = u_\epsilon^f(t, x) \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_\epsilon, \\ -K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \cdot n_1 = -K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \cdot n_2 + \epsilon \sigma F(u_\epsilon^f) \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_\epsilon \\ u_\epsilon^f(t, x) = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u_\epsilon(0, x) = u_{in} \text{ sur } \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $u_{in}$  est une fonction donnée.

Le tenseur de conductivité dans la partie fluide  $K_\epsilon^f$  est défini par

$$K_\epsilon^f = K^f(t, x, \frac{x}{\epsilon}), \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega_\epsilon^f,$$

et  $K_\epsilon^s$  le tenseur de conductivité dans la partie solide, défini par

$$K_\epsilon^s = K^s(t, x, \frac{x}{\epsilon}), \quad t \in ]0, T[, \quad x \in \Omega_\epsilon^s.$$

Les vecteurs  $n^f$  et  $n^s$  sont respectivement les normales intérieure et extérieure au bord  $\Gamma_\epsilon$ .

$$V_\epsilon(x) = V(x, \frac{x}{\epsilon}) \quad \text{dans} \quad \Omega_\epsilon^f,$$

telle que  $V_\epsilon$  est la solution de l'équation de Stokes définie dans  $\Omega_\epsilon^f$  comme suit

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \mu \Delta V_\epsilon + \nabla p_\epsilon = g \text{ dans } \Omega_\epsilon^f, \\ \nabla \cdot V_\epsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\epsilon^f, \\ V_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon^f, \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $p_\epsilon$  est la pression du fluide et  $g_\epsilon$  sont les forces exercées sur le fluide.

Dans la suite, nous allons donner un développement asymptotique à deux échelles de  $u_\epsilon$  la solution du problème (4.1). L'objectif de l'homogénéisation, basée sur la méthode du développement asymptotique à deux échelles, est d'introduire d'abord les variables macroscopiques et microscopiques désignées respectivement par  $x$  et  $y = \frac{x}{\epsilon}$ , puis de supposer que la solution  $u_\epsilon$  de (4.1) est donnée par la série suivante (voir [12])

$$u_\epsilon = u_0(t, x) + \epsilon u_1(t, x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon^2 u_2(t, x, \frac{x}{\epsilon}) + o(\epsilon^2), \quad (4.3)$$

où les fonctions  $u_i(t, x, y)$ , pour  $i = 1, 2$ , sont  $Y$ -périodiques par rapport à la variable  $y$ . La fonction  $u_0$  désigne le profil homogénéisé de  $u_\epsilon$ . Les fonctions  $u_1$  et  $u_2$  sont respectivement les correcteurs du premier et du second ordre. Ensuite, il faut insérer le développement (4.3) dans la formulation variationnelle faible du problème (4.1). Ainsi une succession d'équations est déduite pour les termes  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ . Par conséquent, selon nos besoins de précision, nous pouvons approcher la solution  $u_\epsilon$  soit par la solution homogénéisée  $u_0$ , soit par  $(u_0 + \epsilon u_1)$ , en utilisant le correcteur du premier ordre ou bien par  $(u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2)$ , en utilisant le correcteur du deuxième ordre.

Avant d'énoncer notre résultat principal concernant l'application de la méthode du développement asymptotique pour le problème (4.1), on aura besoin des deux lemmes suivants qui sont respectivement donnés dans [7, 8, 31] et dans [37].

**Lemme 4.1** *Sous les mêmes hypothèses sur la géométrie définies dans le chapitre 2 et pour toute fonction  $f$  régulière, nous avons*

$$\epsilon \int_{\Gamma_\epsilon} f(x, \frac{x}{\epsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\Gamma} f(x, y) d\sigma_y dx + o(\epsilon^2),$$

et

$$\int_{\Omega_\epsilon^f} f(x, \frac{x}{\epsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} f(x, y) dx dy + o(\epsilon^2).$$

Le deuxième lemme nous permet d'avoir l'expression du problème homogénéisé de l'équation de Stokes défini comme suit.

**Lemme 4.2** *Notons par  $(\tilde{V}_\epsilon, \tilde{p}_\epsilon)$  l'extension sur  $\Omega$  de la solution du problème (4.2). Alors  $(\tilde{V}_\epsilon, \tilde{p}_\epsilon)$  converge à deux échelles vers  $(V_0(x, y), p_0(x))$  l'unique solution du problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_y p_1(x, y) + \nabla_x p_0(x) - \mu \Delta_{yy} V_0(x, y) = g(x) \text{ dans } \Omega \times Y_f, \\ \nabla_y \cdot V_0(x, y) = 0 \text{ dans } \Omega \times Y_f, \\ \nabla_x \cdot (\int_Y V_0(x, y) dy) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ V_0(x, y) = 0 \text{ sur } \Omega \times Y_s, \\ (\int_Y V_0(x, y) dy) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ y \mapsto V_0(x, y) \text{ } Y\text{-périodique,} \\ y \mapsto p_1(x, y) \text{ } Y\text{-périodique.} \end{array} \right. \quad (4.4)$$

où  $n$  est la normale extérieure au bord  $\partial\Omega$ . Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0(x, y) = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^d U_j \left( g_j - \frac{\partial p_0}{\partial x_j} \right), \\ p_1(x, y) = \sum_{j=1}^d q_j \left( g_j - \frac{\partial p_0}{\partial x_j} \right), \\ \nabla_y \cdot V_0(x, y) = 0 \text{ dans } \Omega \times Y_f, \\ \nabla_x \cdot (\int_Y V_0(x, y) dy) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ V_0(x, y) = 0 \text{ sur } \Omega \times Y_s, \\ (\int_Y V_0(x, y) dy) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ y \mapsto V_0(x, y) \text{ } Y - \text{périodique}, \\ y \mapsto p_1(x, y) \text{ } Y - \text{périodique}. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

où  $U_j$  et  $q_j$ , pour  $j \in \{1, \dots, d\}$ , sont les solutions des problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta U_j + \nabla q_j = e_j \text{ dans } Y_f, \\ \nabla \cdot U_j = 0 \text{ dans } Y_f, \\ U_j \cdot n_3^f = 0 \text{ sur } \partial Y_f, \\ U_j \text{ est } Y - \text{périodique}, \\ q_j \text{ est } Y - \text{périodique}. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

où  $e_j$  est le  $j^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique et  $n_3^f$  est le vecteur normal sur  $\partial Y_f$ .

**Remarque 4.1** Dans le but de calculer, par la suite, des approximations numériques de  $p_0$  et  $V_0$ , comme  $V_0$  est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_x \cdot (\int_Y V_0(x, y) dy) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ (\int_Y V_0(x, y) dy) \cdot n = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

et en remplaçant dans (4.7) l'expression de  $V_0$  donnée par

$$V_0(x, y) = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^d U_j \left( g_j - \frac{\partial p_0}{\partial x_j} \right)$$

on aura  $p_0$  est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_x \cdot \left( \frac{1}{\mu} \rho (g - \nabla p_0) \right) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{1}{\mu} \rho (g - \nabla p_0) \cdot n = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

avec

$$\rho_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^f} U_i e_j dy.$$

Ainsi, il suffit de calculer une approximation de  $p_0$  comme solution approchée de (4.8) puis d'endéduire la valeur approchée de  $V_0$ .

En utilisant le lemme 4.1 et le lemme 4.2, nous établissons le résultat suivant :

**Théorème 4.1** *Supposons que  $u_\epsilon$  la solution du problème (4.1) satisfait le développement (4.3). Alors*

*i) Le terme d'ordre zéro,  $u_0$ , du développement asymptotique de  $u_\epsilon$  la solution du problème (4.1), est solution du problème homogénéisé suivant*

$$\begin{cases} \frac{|Y_f|+|Y_s|}{|Y|} \frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t} - \nabla \cdot (K^* \nabla u_0(t,x)) + V^* \nabla u_0(t,x) + \sigma \frac{|\Gamma|}{|Y|} F(u_0(t,x)) = 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ u_0(t,x) = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ u_0(0,x) = u_{in} & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

où  $K^*(t,x)$  est le tenseur de conductivité homogénéisé donné par :

$$\begin{aligned} K_{i,j}^* &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y^f} K^f(t,x,y) (e_i + \nabla w_i^f(y)) (e_j + \nabla w_j^f(y)) dy \\ &+ \frac{1}{|Y|} \int_{Y^s} K^s(t,x,y) (e_i + \nabla w_i^s(y)) (e_j + \nabla w_j^s(y)) dy, \quad \text{pour } i,j \in \{1, \dots, d\}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec

$$w_j = \begin{cases} w_j^s & \text{dans } Y_s, \\ w_j^f & \text{dans } Y_f, \end{cases} \quad \text{pour } j \in \{1, \dots, d\} \quad (4.11)$$

est la solution du système suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (K^s(t,x,y) (e_j + \nabla w_j^s)) = 0 & \text{dans } Y_s, \\ -\nabla \cdot (K^f(t,x,y) (e_j + \nabla w_j^f)) = 0 & \text{dans } Y_f, \\ -K^s(t,x,y) (e_j + \nabla w_j^s) \cdot n^s = -K^f(t,x,y) (e_j + \nabla w_j^f) \cdot n^f & \text{sur } \Gamma, \\ w_j^s = w_j^f & \text{sur } \Gamma, \\ w_j^f & \text{est } Y - \text{périodique}, \\ w_j^s & \text{est } Y - \text{périodique}. \end{cases} \quad (4.12)$$

La vitesse homogénéisée  $V^*$  est définie par

$$V^* = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^f} V_0(x,y) dy, \quad (4.13)$$

avec  $V_0$  est la solution du problème de Stokes définie dans le lemme 4.2.

ii) Le correcteur du premier ordre  $u_1(t, x, y)$  est défini par :

$$u_1(t, x, y) = \sum_{j=1}^d w_j(y) \frac{\partial u_0(t, x)}{\partial x_j}. \quad (4.14)$$

iii) Le correcteur du second ordre  $u_2$  est solution du problème cellulaire suivant,

$$\begin{cases} -\nabla_y \cdot (K^f (\nabla_y u_2^f + \nabla_x u_1^f)) = \nabla_x \cdot (K^f (\nabla_y u_1^f + \nabla_x u_0)) - \frac{\partial u_0}{\partial t} - V_0(x, y) \nabla_x u_0 & \text{dans } Y_f, \\ -\nabla_y \cdot (K^s (\nabla_y u_2^s + \nabla_x u_1^s)) = \nabla_x \cdot (K^s (\nabla_y u_1^s + \nabla_x u_0)) - \frac{\partial u_0}{\partial t} & \text{dans } Y_s, \\ -K^f (\nabla_y u_2^f + \nabla_x u_1^f) \cdot n^f + \sigma F(u_0) = -K^s (\nabla_y u_2^s + \nabla_x u_1^s) \cdot n^s & \text{sur } \Gamma, \\ u_2^s = u_2^f & \text{sur } \Gamma, \\ u_2^f & \text{est } Y - \text{périodique}, \\ u_2^s & \text{est } Y - \text{périodique}. \end{cases} \quad (4.15)$$

où  $n^f$  et  $n^s$  sont respectivement les normales extérieure et intérieure à l'interface  $\Gamma$ .

### Démonstration

Tout d'abord, nous rappelons la formulation variationnelle du problème (4.1) donnée par Trounev  $u_\epsilon = (u_\epsilon^f|_{\Omega_\epsilon^f}, u_\epsilon^s|_{\Omega_\epsilon^s}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  et  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  vérifiant

$$\begin{aligned} & \langle \frac{\partial u_\epsilon^f}{\partial t}, \phi_\epsilon^f \rangle_{(H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\epsilon^f))', H_0^1(\Omega_\epsilon^f)} + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla u_\epsilon^f \nabla \phi_\epsilon^f dx + \langle \frac{\partial u_\epsilon^s}{\partial t}, \phi_\epsilon^s \rangle_{(H^1(\Omega_\epsilon^s))', H^1(\Omega_\epsilon^s)} + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla u_\epsilon^s \nabla \phi_\epsilon^s dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla u_\epsilon^f \phi_\epsilon^f dx + \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_\epsilon^f) \phi_\epsilon^f d\sigma_x = 0, \quad \forall \phi_\epsilon = (\phi_\epsilon^f|_{\Omega_\epsilon^f}, \phi_\epsilon^s|_{\Omega_\epsilon^s}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Considérons les deux développements asymptotiques de  $u_\epsilon$  et de la fonction test  $\phi_\epsilon$  qui sont définis respectivement comme suit

$$u_\epsilon = u_0(t, x) + \epsilon u_1(t, x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon^2 u_2(t, x, \frac{x}{\epsilon}) + o(\epsilon^2), \quad (4.17)$$

et

$$\phi_\epsilon = \phi_0(t, x) + \epsilon \phi_1(t, x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon^2 \phi_2(t, x, \frac{x}{\epsilon}) + o(\epsilon^2), \quad (4.18)$$

avec

$$u_i = \begin{cases} u_i^f & \text{sur } \Omega_\epsilon^f, \\ u_i^s & \text{sur } \Omega_\epsilon^s, \end{cases} \quad (4.19)$$

et

$$\phi_i = \begin{cases} \phi_i^f & \text{sur } \Omega_\epsilon^f, \\ \phi_i^s & \text{sur } \Omega_\epsilon^s. \end{cases} \quad (4.20)$$



Nous utilisons une idée de J.L.Lions [7] qui consiste à insérer les deux formules de développement asymptotique (4.17) et (4.18) dans la formulation variationnelle (4.16). Ceci va nous permettre de tronquer cette formulation à un ordre inférieur et de simplifier considérablement les calculs. Ainsi, en regroupant les termes du même ordre de multiplicité en  $\epsilon$ , nous obtenons :

Pour  $\epsilon^0$ , on trouve les termes suivants

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\epsilon^f} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi_0 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_x u_0 \nabla_x \phi_0 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla_x u_0 \nabla_x \phi_0 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_x u_0 \nabla_y \phi_1 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_y u_1 \nabla_x \phi_0 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_y u_1 \nabla_y \phi_1 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla_x u_0 \phi_0 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla_y u_1 \phi_0 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^s} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi_0 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla_x u_0 \nabla_y \phi_1 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla_y u_1 \nabla_x \phi_0 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla_y u_1 \nabla_y \phi_1 dx + o(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Pour  $\epsilon^1$ , on trouve les termes suivants

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\epsilon^f} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi_1 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} \frac{\partial u_1}{\partial t} \phi_0 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_x u_0 \nabla_x \phi_1 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_x u_0 \nabla_y \phi_2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_x u_1 \nabla_x \phi_0 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_x u_1 \nabla_y \phi_1 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_y u_1 \nabla_x \phi_1 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_y u_1 \nabla_y \phi_2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_y u_2 \nabla_x \phi_0 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_y u_2 \nabla_y \phi_1 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^s} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi_1 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} \frac{\partial u_1}{\partial t} \phi_0 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla_x u_0 \nabla_x \phi_1 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} K_\epsilon^f \nabla_y u_1 \nabla_x \phi_1 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla_x u_0 \nabla_y \phi_2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla_x u_1 \nabla_x \phi_0 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla_x u_1 \nabla_y \phi_1 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla_y u_1 \nabla_y \phi_2 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla_y u_2 \nabla_x \phi_0 dx + \int_{\Omega_\epsilon^s} K_\epsilon^s \nabla_y u_2 \nabla_y \phi_1 dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla_x u_0 \phi_1 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla_x u_1 \phi_0 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla_y u_1 \phi_1 dx + \int_{\Omega_\epsilon^f} V_\epsilon \nabla_y u_2 \phi_0 dx + o(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Pour le traitement du terme de radiation non linéaire sur le bord, on suppose que  $F$  est de classe  $C^1$ , on aura le développement limité suivant

$$F(u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2) = F(u_0) + (\epsilon u_1 + \epsilon^2 \phi_1) F'(u_0) + o(\epsilon^2).$$

Par suite

$$\begin{aligned} \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2) (\phi_0 + \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2) d\sigma_x &= \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} F(u_0) (\phi_0 + \epsilon \phi_1) d\sigma_x \\ &+ \epsilon^2 \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} u_1 F'(u_0) \phi_0 d\sigma_x + o(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le lemme 4.1, l'expression en  $\epsilon^0$  devient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_x u_0 \nabla_y \phi_1 dy dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_x u_0 \nabla_x \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_y u_1 \nabla_x \phi_0 dy dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_y u_1 \nabla_y \phi_1 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} V_0(x, y) \nabla_x u_0 \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} V_0(x, y) \nabla_y u_1 \phi_0 dy dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_x u_0 \nabla_x \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_x u_0 \nabla_y \phi_1 dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_y u_1 \nabla_x \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_y u_1 \nabla_y \phi_1 dy dx + o(\epsilon^2).
 \end{aligned}$$

Aussi l'expression en  $\epsilon^1$  devient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi_1 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} \frac{\partial u_1}{\partial t} \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_x u_0 \nabla_x \phi_1 dy dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_x u_0 \nabla_y \phi_2 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_x u_1 \nabla_x \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_x u_1 \nabla_y \phi_1 dy dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_y u_1 \nabla_y \phi_2 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_y u_2 \nabla_x \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_y u_2 \nabla_y \phi_1 dy dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_y u_1 \nabla_x \phi_1 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_y u_1 \nabla_x \phi_0 dy dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_x u_0 \nabla_x \phi_1 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_x u_0 \nabla_y \phi_2 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_x u_1 \nabla_x \phi_0 dy dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_x u_1 \nabla_y \phi_1 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_y u_1 \nabla_y \phi_2 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_y u_2 \nabla_x \phi_0 dy dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_y u_2 \nabla_y \phi_1 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} V(x, y) \nabla_x u_0 \phi_1 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} V_0(x, y) \nabla_x u_1 \phi_0 dy dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi_1 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} \frac{\partial u_1}{\partial t} \phi_0 dy dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} V_0 \nabla_y u_1 \phi_1 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} V_0 \nabla_y u_2 \phi_0 dy dx + o(\epsilon^2).
 \end{aligned}$$

Puis en appliquant le lemme 4.1 pour le terme de radiation, on obtient, pour  $\epsilon^0$  :

$$\frac{\sigma}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\Gamma} F(u_0) \phi_0 d\sigma_y dx$$

et pour  $\epsilon^1$  :

$$\frac{\sigma}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\Gamma} F(u_0) \phi_1 d\sigma_y dx + \frac{\sigma}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\Gamma} u_1 F'(u_0) \phi_0 d\sigma_y dx.$$

Nous allons maintenant identifier, à partir de l'équation d'ordre  $\epsilon^0$ , les problèmes de la cellule, le problème homogénéisé et l'expression du correcteur du premier ordre. En effet, en prenant  $\phi_0 = 0$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_x u_0 \nabla_y \phi_1 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_y u_1 \nabla_y \phi_1 dy dx \\
 & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_x u_0 \nabla_y \phi_1 dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_y u_1 \nabla_y \phi_1 dy dx = 0.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'expression du correcteur du premier ordre et les problèmes de la cellule qui en découle s'écrivent :

$$u_1(t, x, y) = \sum_{j=1}^d w_j(y) \frac{\partial u_0(t, x)}{\partial x_j}$$

où  $w_j$ , pour  $j = 1, \dots, d$ , définie par

$$w_j = \begin{cases} w_j^s & \text{dans } Y_s, \\ w_j^f & \text{dans } Y_f, \end{cases} \quad (4.21)$$

est la solution du problème :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (K^s(t, x, y)(e_j + \nabla w_j^s)) = 0 & \text{dans } Y_s. \\ -\nabla \cdot (K^f(t, x, y)(e_j + \nabla w_j^f)) = 0 & \text{dans } Y_f. \\ -K^s(t, x, y)(e_j + \nabla w_j^s) \cdot n^s = -K^f(t, x, y)(e_j + \nabla w_j^f) \cdot n^f & \text{sur } \Gamma, \\ w_j^s = w_j^f & \text{sur } \Gamma, \\ w_j^f & \text{est } Y - \text{périodique}, \\ w_j^s & \text{est } Y - \text{périodique}. \end{cases} \quad (4.22)$$

Ensuite, nous allons identifier le problème homogénéisé (4.9). En effet, en prenant  $\phi_1 = 0$  dans les termes d'ordre  $\epsilon^0$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_y u_1 \nabla_x \phi_0 dy dx \\ & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} K^f \nabla_x u_0 \nabla \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} V_0(x, y) \nabla_x u_0 \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_f} V_0(x, y) \nabla_y u_1 \phi_0 dy dx \\ & \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} \frac{\partial u_0}{\partial t} \phi_0 dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_y u_1 \nabla_x \phi_0 dy dx \\ & + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y_s} K^s \nabla_x u_0 \nabla \phi_0 dy dx + \frac{\sigma}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\Gamma} F(u_0) \phi_0 d\sigma_y dx = 0. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le fait que  $w_j$ , pour  $j = 1, \dots, d$ , est solution du problème (4.22) et l'expression du correcteur du premier ordre, on trouve que  $u_0$  est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{|Y_f| + |Y_s|}{|Y|} \frac{\partial u_0(t, x)}{\partial t} - \nabla \cdot (K^* \nabla u_0(t, x)) + V^* \nabla u_0(t, x) + \sigma \frac{|\Gamma|}{|Y|} F(u_0(t, x)) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u_0(t, x) = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial \Omega, \\ u_0(0, x) = u_{in} & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (4.23)$$

avec  $K^*(t, x)$  est le tenseur de conductivité homogénéisé donné par :

$$K_{i,j}^* = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} K^f(t, x, y)(e_i + \nabla w_i^f(y))(e_j + \nabla w_j^f(y)) dy \quad (4.24)$$

$$+ \frac{1}{|Y|} \int_{Y_s} K^s(t, x, y)(e_i + \nabla w_i^s(y))(e_j + \nabla w_j^s(y)) dy, \quad i, j = 1, \dots, d,$$

et  $V^*$  désigne la vitesse homogénéisée, définie comme suit

$$V^* = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} V_0(x, y) dy, \quad (4.25)$$

Maintenant, dans le but d'identifier le correcteur du deuxième ordre  $u_2$ , prenons  $\phi_0 = 0$  et  $\phi_2 = 0$  dans les termes d'ordre  $\epsilon^1$ , on obtient alors  $u_2$  solution du système suivant

$$\begin{cases} -\nabla_y \cdot (K^f(\nabla_y u_2^f + \nabla_x u_1^f)) = \nabla_x \cdot (K^f(\nabla_y u_1^f + \nabla_x u_0)) - \frac{\partial u_0}{\partial t} - V_0(x, y) \nabla_x u_0 \text{ dans } Y_f, \\ -\nabla_y \cdot (K^s(\nabla_y u_2^s + \nabla_x u_1^s)) = \nabla_x \cdot (K^s(\nabla_y u_1^s + \nabla_x u_0)) - \frac{\partial u_0}{\partial t} \text{ dans } Y_s, \\ -K^f(\nabla_y u_2^f + \nabla_x u_1^f) \cdot n^f + \sigma F(u_0) = -K^s(\nabla_y u_2^s + \nabla_x u_1^s) \cdot n^s \text{ sur } \Gamma, \\ u_2^s = u_2^f \text{ sur } \Gamma, \\ u_2^f \text{ est } Y\text{-périodique}, \\ u_2^s \text{ est } Y\text{-périodique}. \end{cases} \quad (4.26)$$

Ce qui achève la preuve du théorème.

**Remarque 4.2** Notons que les résultats obtenus dans le théorème 4.1, notamment l'expression de  $u_1$  et le fait que  $u_0$  est solution du problème homogénéisé (4.9) sont bien justifiés rigoureusement via la convergence à deux échelles dans le chapitre précédent.

Notons également que les résultats du théorème 4.1 sont obtenus formellement sous l'hypothèse que  $F$  est de classe  $C^1$ . Dans le cas où cette hypothèse n'est pas satisfaite, en l'occurrence les cas physiques concrets que nous avons considérés dans cette thèse, on peut se contenter à d'identifier juste  $u_0$  et le correcteur du premier ordre,  $u_1$ , qui sont identifiés grâce à la convergence à deux échelles dans le chapitre précédent.

Nous allons par la suite donner une formule explicite du correcteur du second ordre en utilisant la linéarité du problème (4.15), tout en essayant d'avoir des hypothèses de compatibilité sur les données qui vont nous permettre d'avoir l'unicité des solutions des problèmes cellulaires.

**Corollaire 4.1** Supposons  $K_\epsilon^i(t, x) = K^i(t, \frac{x}{\epsilon})$ , pour  $i = f, s$ . Le correcteur du second ordre  $u_2$  est donné par

$$u_2(t, x, y) = \sum_{i=1, j=1}^d w_{ij} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} + D(y) F(u_0) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \theta_{i,j} (g_j - \frac{\partial p_0}{\partial x_j}) \frac{\partial u_0}{\partial x_i}, \quad (4.27)$$

où  $D$ ,  $w_{ij}$  et  $\theta_{ij}$ , pour  $i, j = 1, \dots, d$  sont solutions respectives des problèmes suivants

$$\begin{cases} -\nabla_{y \cdot} (K^f \nabla_y D^f(y)) = -\frac{|\Gamma| \sigma}{2|Y_f|} \text{ dans } Y_f, \\ -\nabla_{y \cdot} (K^s \nabla_y D^s(y)) = -\frac{|\Gamma| \sigma}{2|Y_s|} \text{ dans } Y_s, \\ -K^f \nabla_y D^f \cdot n^f = -K^s \nabla_y D^f \cdot n^s + \sigma \text{ sur } \Gamma, \\ D^f = D^s \text{ sur } \Gamma, \\ D^f \text{ est } Y - \text{périodique}, \\ D^s \text{ est } Y - \text{périodique}, \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\begin{cases} -\nabla_{y \cdot} (K^f \nabla_y w_{ij}^f) = \nabla_{y \cdot} (K^f e_i w_j^f) + K_{i,j}^f + (K^f)^t e_i \cdot \nabla_y w_j^f - \frac{|Y|}{|Y_f| + |Y_s|} K_{ij}^* \text{ dans } Y_f, \\ -\nabla_{y \cdot} (K^s \nabla_y w_{ij}^s) = \nabla_{y \cdot} (K^s e_i w_j^s) + K_{i,j}^s + (K^s)^t e_i \cdot \nabla_y w_j^s - \frac{|Y|}{|Y_f| + |Y_s|} K_{ij}^* \text{ dans } Y_s, \\ -(K^f \nabla_y w_{ij}^f + K^f e_i w_j^f) \cdot n^f = -(K^s \nabla_y w_{ij}^s + K^s e_i w_j^s) \cdot n^s \text{ sur } \Gamma, \\ w_{ij}^f = w_{ij}^s \text{ sur } \Gamma, \\ w_{ij}^f \text{ est } Y - \text{périodique}, \\ w_{ij}^s \text{ est } Y - \text{périodique} \end{cases} \quad (4.29)$$

et

$$\begin{cases} -\nabla_{y \cdot} (K^f \nabla_y \theta_{i,j}^f) = -\frac{1}{2} |\Gamma| U_i e_j \text{ dans } Y_f, \\ -\nabla_{y \cdot} (K^s \nabla_y \theta_{i,j}^s) = 0 \text{ dans } Y_s, \\ -K^s \nabla_y \theta_{i,j}^s \cdot n^s = -K^f \nabla_y \theta_{i,j}^f \cdot n^f + \int_{Y_f} U_i e_j dy \text{ sur } \Gamma, \\ \theta_{i,j}^f = \theta_{i,j}^s \text{ sur } \Gamma, \\ \theta_{i,j}^f \text{ est } Y - \text{périodique}, \\ \theta_{i,j}^s \text{ est } Y - \text{périodique}. \end{cases} \quad (4.30)$$

Remarquons que les problèmes cellulaires peuvent être présentés sous la forme générale suivante

$$\begin{cases} -\nabla_{y \cdot} (K^f \nabla_y \Phi^f(y)) = g_f \text{ dans } Y_f, \\ -\nabla_{y \cdot} (K^s \nabla_y \Phi^s(y)) = g_s \text{ dans } Y_s, \\ -K^f \nabla_y \Phi^f(y) \cdot n^f = -K^s \nabla_y \Phi^s(y) \cdot n^s + g_\Gamma \text{ sur } \Gamma \\ \Phi^f(y) = \Phi^s(y) \text{ sur } \Gamma, \\ \Phi^f(y) \text{ est } Y - \text{périodique}, \\ \Phi^s(y) \text{ est } Y - \text{périodique}. \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, d. \quad (4.31)$$

Ainsi, le résultat d'existence et d'unicité du problème type (4.31) est donné dans le lemme suivant.

**Lemme 4.3** *Sous les conditions de compatibilité suivantes*

$$\begin{cases} \int_{Y_f} g_f dy + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} g_{\Gamma} d\sigma_y = 0, \\ \int_{Y_s} g_s dy + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} g_{\Gamma} d\sigma_y = 0, \end{cases} \quad (4.32)$$

le problème (4.31) admet une solution unique dans  $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ .

### Démonstration

Notons tout d'abord que la formulation variationnelle du problème (4.31) est donnée par

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Phi \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}, \text{ tel que,} \\ a(\Phi, W) = L(W), \\ \text{pour tout } W \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.33)$$

où

$$a(\Phi, W) = \int_{Y_f} K^f \Phi^f(y) W^f dy + \int_{Y_s} K^s \Phi^s(y) W^s dy$$

et

$$L(W) = \int_{Y_f} g_f W^f dy + \int_{Y_s} g_s W^s dy + \int_{\Gamma} g_{\Gamma} W^s dy.$$

Puisque la semi norme  $\|\nabla W\|_{L^2(Y)}$  définit une norme dans l'espace  $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$  (voir [5, 37]), la preuve de la coercivité et de la continuité de la forme bilinéaire  $a$  est évidente.

Montrons maintenant la continuité de la forme linéaire  $L$ . En utilisant les conditions de compatibilité (4.32). On a alors

$$\begin{aligned} L(W) &= \int_{Y_f} (W^f - \frac{1}{|Y_f|} \int_{Y_f} W^f dy) g_f dy + \int_{\Gamma} (W^f - \frac{1}{|Y_f|} \int_{Y_f} W^f dy) \frac{1}{2} g_{\Gamma} d\sigma_y \\ &+ \int_{Y_s} (W^s - \frac{1}{|Y_s|} \int_{Y_s} W^s dy) g_s dy + \int_{\Gamma} (W^s - \frac{1}{|Y_s|} \int_{Y_s} W^s dy) \frac{1}{2} g_{\Gamma} d\sigma_y. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Hölder, nous aurons

$$\begin{aligned} |L(W)| &\leq \|W^f - \frac{1}{|Y_f|} \int_{Y_f} W^f dy\|_{L^2(Y_f)} \|g_f\|_{L^2(Y_f)} + \|W^s - \frac{1}{|Y_s|} \int_{Y_s} W^s dy\|_{L^2(Y_s)} \|g_s\|_{L^2(Y_s)} \\ &+ C \|W^s - \frac{1}{|Y_s|} \int_{Y_s} W^s dy\|_{L^2(\Gamma)} \|g_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} + \|W^f - \frac{1}{|Y_f|} \int_{Y_f} W^f dy\|_{L^2(\Gamma)} \|g_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Puis en utilisant le lemme 1.3 et lemme 1.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} |L(W)| &\leq C \|\nabla W^f\|_{L^2(Y_f)} \|g_f\|_{L^2(Y_f)} + C \|\nabla W^s\|_{L^2(Y_s)} \|g_s\|_{L^2(Y_s)} \\ &+ C \|\nabla W^f\|_{L^2(Y_f)} \|g_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} + C \|\nabla W^s\|_{L^2(Y_s)} \|g_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Donc

$$|L(W)| \leq C \|\nabla W\|_{L^2(Y)}.$$

Ce qui nous permet de conclure grâce au lemme de Lax-Milgram que le problème (4.31) admet une unique solution dans  $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ . D'où le résultat.

Dans la section suivante, nous allons présenter la méthodologie d'approximation de notre modèle de transfert de la chaleur en se basant sur la méthode d'homogénéisation et une discrétisation par éléments finis.

## 4.2 Approximation du problème d'homogénéisation

Dans cette section, nous allons étudier numériquement le comportement asymptotique du problème de transfert de chaleur (4.1). Ceci dans le but d'illustrer les résultats de la convergence théorique, obtenus dans le chapitre précédent, et de discuter l'efficacité de la procédure d'homogénéisation. Pour cela, nous allons comparer les résultats numériques du modèle microscopique bidimensionnel avec le modèle homogénéisé. L'approximation numérique des problèmes de cellules ainsi que des problèmes microscopiques et du problème homogénéisé, est basée sur un schéma d'Euler implicite pour la discrétisation en temps et par la méthode des éléments finis  $P_1$  pour la discrétisation en espace. L'étude de la convergence se fait en variant  $\epsilon$ , le paramètre d'échelle, dans le modèle microscopique. Ainsi, pour la détermination du modèle homogénéisé, nous allons décrire la procédure algorithmique généralement utilisée pour étudier le comportement asymptotique. Finalement, nous allons présenter quelques résultats numériques qui confirment l'efficacité de l'approche développée dans cette thèse. Nous allons en particulier mettre l'accent sur l'amélioration apportée par les correcteurs du premier et du second ordre.

### 4.2.1 Approximation des problèmes cellulaires et problème homogénéisé pour l'équation de Stokes

Nous commençons, dans un premier lieu, par l'approximation numérique par éléments finis des problèmes de cellules associés au problème de Stokes (4.6). Ensuite, nous donnons le problème approché associé au problème de Stokes homogénéisé (4.5).

Considérons alors une discrétisation de la cellule  $Y_f$  en construisant sa triangulation  $\tau_{h_f}$ , telle que  $Y_f^{h_f} = \bigcup_{0 \leq i \leq N_{t,f}} \tau_{h_f}$  où  $h_f > 0$  et  $N_{t,f}$  le nombre de triangles. Soit

$$W_{h_f} = \{v_{h_f} \in C(\overline{Y_f^{h_f}})/v_{h_f}/\tau_{h_f} \in P_{1b}, \text{ pour tout } \tau_{h_f} \subset Y_f^{h_f}, v_{h_f} - Y_f^{h_f} \text{ périodique et } v_{h_f}/\Gamma = 0\}$$

où  $P_{1b}$  est l'espace des polynômes de degré 1 à bulle [14].

$$P_{h_f} = \{p_{h_f} \in C(\overline{Y_f^{h_f}})/p_{h_f}/\tau_{h_f} \in P_1, \text{ pour tout } \tau_{h_f} \subset Y_f^{h_f}, p_{h_f} - Y_f^{h_f} \text{ périodique et } \int_{Y_f^{h_f}} p_{h_f} dy = 0\}.$$

Notons par  $W_{h_f}$  et  $P_{h_f}$  les espaces approchés de dimension finie associés respectivement aux espaces

$$V_{\#} = \{v \in H_{\#}^1(Y)/v/\Gamma = 0\}.$$

et

$$P_{\#} = \left\{ p \in L_{\#}^2(Y) / \int_{Y_f} p dy = 0 \right\}.$$

Ainsi la formulation variationnelle discrète des problèmes cellulaires est donnée par

$$\begin{cases} \text{Trouver } U_{i,h_f} \text{ dans } W_{h_f}^d \text{ et } p_{h_f} \text{ dans } P_{h_f} \text{ tel que} \\ \sum_{j=1}^d \int_{Y_f^{h_f}} \nabla U_{i,j,h_f} \nabla(\phi_{i,j,h_f}) dy - \int_{Y_f^{h_f}} p_{h_f} \nabla \cdot \phi_{i,h_f} dy = \int_{Y_f^{h_f}} e_i \phi_{i,h_f} dy, \\ \int_{Y_f^{h_f}} p_{h_f} \nabla \cdot U_{i,h_f} dy = 0, \\ \forall \phi_{i,h_f} \in W_{h_f}^d, q_{h_f} \in P_{h_f} \text{ et } \forall i = \{1, \dots, d\}, \end{cases} \quad (4.37)$$

Nous donnons tout d'abord le problème approché satisfait par la pression homogénéisée et ensuite nous calculons la valeur approchée de la vitesse homogénéisée. Pour cela, construisons une triangulation  $\tau_{h_1}$  de  $\Omega$ , tel que  $\Omega^{h_1} = \bigcup_{0 < i < N_t^{h_1}} \tau_{h_1}$ , où  $h_1 > 0$  et  $N_t^{h_1}$  le nombre de triangles. La valeur approchée de la pression homogénéisée est obtenue comme solution du problème approché suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } p_{0,h_1} \text{ dans } W_{h_1}^*, \text{ tel que} \\ \int_{\Omega^{h_1}} \int_{Y_f^{h_f}} \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^d U_{i,h_f} (g_j - \frac{\partial p_{0,h_1}}{\partial x_j}) \nabla \phi_{h_1} dy dx = 0, \\ \forall \phi_{h_1} \in W_{h_1}^*. \end{cases} \quad (4.38)$$

où

$$W_{h_1}^* = \{v_{h_1} \in C(\overline{\Omega^{h_1}})/v_{h_1}/\tau_{h_1} \in P_1, \text{ pour } T \subset \Omega^{h_1}\}.$$

D'après l'équation (4.5), l'approximation de la vitesse homogénéisée est donc donnée comme suit

$$V_{0,h_1} = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^d U_{i,h_f} (g_j - \frac{\partial p_{0,h_1}}{\partial x_j}).$$

Notons que pour calculer la vitesse et la pression solution du problème d'homogénéisation de Stokes, nous approchons l'équation (4.2) de la même manière que l'équation (4.6).



### 4.2.2 Approximation des problèmes cellulaires de transfert de la chaleur

Nous commençons par discrétiser la cellule  $Y$ . Pour ce faire, nous construisons sa triangulation  $\tau_h$  telle que  $Y^h = \bigcup_{0 \leq i \leq N_t} \tau_h$  où  $h > 0$  et  $N_t$  le nombre des triangles. Soit

$$W_h = \{v_h \in C(\overline{Y^h})/v_h/\tau_h \in P_1, \text{ pour } \tau_h \subset Y^h \text{ et } v_h - Y^h \text{ périodique} \}$$

l'espace de dimension finie associé à  $H_{\sharp}^1(Y)$ . Notons que nous utilisons ici la méthode des éléments finis conforme [18]. La formulation variationnelle discrète des problèmes cellulaires est donnée par

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_{j,h} \text{ dans } W_h \text{ tel que } \int_{Y^h} K_h(e_j + \nabla w_{j,h}) \nabla \phi_h dy = 0, \\ \forall \phi_h \in W_h \text{ et } \forall j = 1, \dots, d, \end{cases} \quad (4.39)$$

où  $K_h = \chi_{Y_f^h} K_h^f + \chi_{Y_s^h} K_h^s$  avec  $K_h^f$  (resp.  $K_h^s$ ) est une approximation de  $K^f$  (resp.  $K^s$ ). En utilisant la solution du problème (4.39), nous calculons  $K_h^*$  par la formule suivante :

$$K_{i,j,h}^* = \frac{1}{|Y^h|} \int_{Y^h} K_h(e_i + \nabla w_{i,h})(e_j + \nabla w_{j,h}) dy, \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, d. \quad (4.40)$$

Ensuite, notons par  $V_h^*$ ,  $\lambda_1^*$  et  $\lambda_2^*$  les quantités définies comme suit

$$V_h^* = \frac{1}{|Y^h|} \int_{Y^h} V dy, \quad \lambda_1^* = \frac{|Y_f^h| + |Y_s^h|}{|Y^h|} \text{ et } \lambda_2^* = \frac{1}{|Y^h|}. \quad (4.41)$$

Alors à partir des problèmes cellulaires approchés (4.39) ainsi que des paramètres approchés (4.40) et (4.41), nous obtenons les problèmes variationnels discrets correspondant aux modèles (4.29), (4.28) et (4.30) définis respectivement comme suit

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_{i,j,h} \text{ dans } W_h \text{ tel que} \\ \int_{Y^h} K_h(\nabla w_{i,j,h}) \nabla \phi_h dy = \int_{Y^h} (K_h e_i w_{j,h}) \nabla_y \phi_h dy + \int_{Y^h} (K_{i,j,h} + (K_h)^t e_i \cdot \nabla_y w_{j,h} - \frac{1}{\lambda_1^*} K_{i,j,h}^*) \phi_h dy, \\ \forall \phi_h \in W_h \text{ et } \forall i, j = 1, \dots, d, \end{cases} \quad (4.42)$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } D_h \text{ dans } W_h \text{ tel que} \\ \int_{Y^h} K_h \nabla D_h \nabla \phi_h dy = - \int_{Y_f^h} \frac{|\Gamma| \sigma}{2 |Y_f^h|} \phi_h dy - \int_{Y_s^h} \frac{|\Gamma| \sigma}{2 |Y_s^h|} \phi_h dy + \int_{\Gamma^h} \sigma \phi_h d\sigma_y, \\ \forall \phi_h \in W_h, \end{cases} \quad (4.43)$$

et

$$\begin{cases} \text{Trouver } \theta_{j,h} \text{ dans } W_h \text{ tel que} \\ \int_{Y^h} K_h(e_j + \nabla \theta_{j,h}) \nabla \phi_h dy = \int_{Y_f^h} \left(-\frac{1}{2} |\Gamma| U_{h,i} e_j\right) \phi_h dy + \int_{\Gamma} (U_{h,i} e_j) \phi_h d\sigma_y, \\ \forall \phi_h \in W_h \text{ et } \forall j = 1, \dots, d, \end{cases} \quad (4.44)$$

### 4.2.3 Approximation du problème homogénéisé et problème d'homogénéisation de transfert de la chaleur

Dans le but de donner des approximations des problèmes homogénéisés et des problèmes microscopiques, nous commençons tout d'abord par une discrétisation de l'intervalle du temps  $[0, T]$  donnée comme suit

$$[0, T] = \cup_{n=1}^{j=M} [t_{n-1}, t_n], \text{ avec } \Delta t = t_n - t_{n-1} = \frac{T}{M+1}.$$

Ensuite, en utilisant une semi-discrétisation par rapport au temps, via un schéma d'Euler implicite, pour le problème homogénéisé (4.9) et en écrivant sa formulation variationnelle, on obtient

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0^{n+1} \simeq u_0(t_{n+1}, x) \in H_0^1(\Omega), \forall n = 0, \dots, M-1, \text{ tel que} \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \lambda_1^* u_0^{n+1} \phi + K_h^* \nabla u_0^{n+1} \nabla \phi + V_h^* \nabla u_0^{n+1} \phi + \frac{\sigma |\Gamma^h|}{|Y^h|} F(u_0^n) \phi dx \\ - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \lambda_1^* u_0^n \phi dx = 0, \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \text{ et } u_0^0 = u_{in}. \end{cases} \quad (4.45)$$

En utilisant la même technique de discrétisation pour le problème d'homogénéisation (4.1), on obtient

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{\epsilon}^{n+1} = u_{\epsilon}(t_{n+1}, x) = (u_{\epsilon}^{f,n+1}, u_{\epsilon}^{s,n+1}) \in H_0^1(\Omega), \forall n = 0, \dots, M-1, \text{ tel que} \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u_{\epsilon}^{n+1} \phi_{\epsilon} + K_h \nabla u_{\epsilon}^{n+1} \nabla \phi_{\epsilon} + V \nabla u_{\epsilon}^{n+1} \phi_{\epsilon} dx \\ + \int_{\Gamma_{\epsilon}} \epsilon \sigma F(u_{\epsilon}^n) \phi_{\epsilon} d\sigma_x - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u_{\epsilon}^n \phi_{\epsilon} dx = 0, \\ \forall \phi_{\epsilon} = (\phi_{\epsilon}^f, u_{\epsilon}^s) \in H_0^1(\Omega) \text{ et } u_{\epsilon}^0 = u_{in}. \end{cases} \quad (4.46)$$

Quant à l'approximation spatiale par la méthode des éléments finis, nous commençons par donner une approximation de l'espace  $H_0^1(\Omega)$ . Pour cela, nous construisons une triangulation  $\tau_{h_1}$  de  $\Omega$ , telle que  $\Omega^{h_1} = \cup_{0 < i < N_t^{h_1}} \tau_{h_1}$ , où  $h_1 > 0$  et  $N_t^{h_1}$  est le nombre de triangles. Ensuite, nous définissons  $W_{h_1}$  l'espace de dimension finie associé à  $H_0^1(\Omega)$  par

$$W_{h_1} = \{v_{h_1} \in C(\overline{\Omega^{h_1}}) / v_{h_1} / \tau_{h_1} \in P_1, \text{ pour } \tau_{h_1} \subset \Omega^{h_1} \text{ et } v_{h_1} / \partial \Omega_h = 0\}.$$

Les formulations variationnelles discrètes des problèmes (4.9) et (4.1) sont données respectivement par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{0,h_1}^{n+1} = u_0(t_{n+1}, x) \text{ dans } W_{h_1}, \forall n = 0, \dots, M-1, \text{ tel que} \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega^{h_1}} \lambda_1^* u_{0,h_1}^{n+1} \phi_{h_1} + K_h^* \nabla u_{0,h_1}^{n+1} \nabla \phi_{h_1} + V_h^* \nabla u_{0,h_1}^{n+1} \phi_{h_1} + \frac{\sigma|\Gamma|}{|Y|} F(u_{0,h_1}^n) \phi_{h_1} dx \\ - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega^{h_1}} \lambda_1^* u_{0,h_1}^n \phi_{h_1} dx = 0, \\ \forall \phi_{h_1} \in W_{h_1} \text{ et } u_0^0 = u_{in}. \end{array} \right. \quad (4.47)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{\epsilon,h_1}^{n+1} \text{ dans } W_{h_1}, \forall n = 0, \dots, M-1, \text{ tel que} \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega^{h_1}} u_{\epsilon,h_1}^{n+1} \phi_{\epsilon,h_1} + K_h \nabla u_{\epsilon,h_1}^{n+1} \nabla \phi_{\epsilon,h_1} + V_{\epsilon,h} \nabla u_{\epsilon,h_1}^{n+1} \phi_{\epsilon,h_1} dx \\ + \int_{\Gamma_\epsilon^{h_1}} \epsilon \sigma F(u_{\epsilon,h_1}^n) \phi_{\epsilon,h_1} d\sigma_x - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega^{h_1}} u_{\epsilon,h_1}^n \phi_{\epsilon,h_1} dx = 0, \\ \forall \phi_{\epsilon,h_1} \in W_{h_1} \text{ et } u_\epsilon^0 = u_{in}. \end{array} \right. \quad (4.48)$$

où  $V_{\epsilon,h}$  est l'approximation de  $V_\epsilon$  solution de l'équation de Stokes (4.2). Après avoir introduit la formulation des problèmes approchés, nous résumerons, dans la section suivante, l'algorithme multi-échelle en éléments finis pour le calcul de  $u_{0,h_1}$  la solution approchée du problème homogénéisé (4.1) ainsi que l'approximation des correcteurs du premier et du second ordre notés respectivement  $u_{1,h,h_1}$  et  $u_{2,h,h_1}$ .

#### 4.2.4 Algorithme multi-échelles en éléments finis

L'algorithme multi-échelles en éléments finis que nous proposons pour la résolution du processus d'homogénéisation est le suivant :

1. Se donner tous les paramètres physiques et numériques des problèmes.
2. Pour  $j = 1, \dots, d$ , calculer  $U_{j,h}$  solution du problème cellulaire (4.37).
3. Calculer  $p_{0,h_1}$  l'approximation de  $p_0$  en résolvant le problème homogénéisé linéaire (4.38).
4. Calculer  $V_{0,h_1}$  par la formule suivante

$$V_{0,h_1} = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^d U_{i,h_f} (g_j - \frac{\partial p_{0,h_1}}{\partial x_j}).$$

et calculer  $V_{\epsilon,h}$  et  $p_{\epsilon,h}$  en résolvant le problème d'homogénéisation de Stokes (4.2).

5. Pour  $j = 1, \dots, d$ , calculer  $w_{j,h}$  solution du problème cellulaire (4.39).
6. Calculer la conductivité thermique effective  $K_h^*$  par la formule (4.40), la vitesse  $V_h^*$  et le coefficient homogénéisé  $\lambda_i^*$  pour  $i = 1, 2$  par (4.41).
7. Résoudre le problème (4.43) puis pour tout  $i, j = 1, \dots, d$ , calculer  $w_{i,j,h}$  la solution du problème (4.42) et  $\theta_{i,j,h}$  la solution de (4.44).

8. Calculer  $u_{0,h}$  l'approximation de  $u_0$  en résolvant le problème homogénéisé non linéaire (4.47).
9. Calculer  $u_{1,h,h_1}$  et  $u_{2,h,h_1}$  les approximations des correcteurs  $u_1$  et  $u_2$  respectivement par

$$u_{1,h,h_1} = \sum_{j=1}^d w_{j,h}(y) \frac{\partial u_{0,h_1}(t, x)}{\partial x_j},$$

$$u_{2,h,h_1} = \sum_{i=1, j=1}^d w_{i,j,h} \frac{\partial^2 u_{0,h_1}}{\partial x_i \partial x_j} + D_h(y) F(u_{0,h_1}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta_{i,j} (g_j - \frac{\partial p_{0,h_1}}{\partial x_j}) \frac{\partial u_{0,h_1}}{\partial x_i}.$$

### 4.2.5 Résultats numériques

Dans cette section, nous allons présenter quelques résultats numériques illustrant l'efficacité de l'approche proposée pour l'étude de notre problème de transfert de la chaleur dans un matériau composite. Pour cela, nous allons donner les résultats numériques pour trois exemples correspondant à différents modes d'échange thermique. Dans les deux premiers exemples, on cherche à approcher la solution du problème de transfert de la chaleur pour un terme d'échange radiatif modélisé par une fonction lipschitzienne (qui est même de classe  $C^1$ ). Ainsi on suppose dans le premier exemple que la vitesse du fluide est nulle, puis dans le deuxième on considère le problème avec une vitesse du fluide non nulle. Dans ce cadre, nous testons la convergence de la solution du problème microscopique  $u_\epsilon$  vers la solution du problème homogénéisé  $u_0$ , en faisant une comparaison pour différentes valeurs de  $\epsilon > 0$  qui s'approchent de zéro. Ensuite, nous illustrons numériquement l'efficacité du correcteur du premier et du second ordre. Le troisième exemple traite le même modèle de transfert de la chaleur, mais avec un terme d'échange radiatif modélisé par une fonction de la forme  $F(u) = u|u|$  qui n'est pas nécessairement lipschitzienne. De la même manière que dans les deux premiers exemples, nous illustrons la convergence de la solution  $u_\epsilon$  vers  $u_0$  quand  $\epsilon$  tend vers 0. Dans cette exemple, vu qu'on n'a pas assez d'hypothèses de régularité sur  $F$ , nous nous contentons de donner des résultats numériques uniquement pour le correcteur du premier ordre.

Nous notons que pour les trois exemples, nous utilisons les paramètres donnés dans le tableau 4.1. avec

paramètres	valeurs
$K_\epsilon^f$	0.000238
$K_\epsilon^s$	0.0007
$\sigma$	$5,67 * 10^{-8}$
$r_{Y_s}$	0.4
$\Delta t$	0.05
$\Omega$	$[0, 1]^2$
$u_{in}$ pour $t = 0$	0

TABLE 4.1 – Paramètres utilisés dans les simulations numériques.

les pas de discrétisation pour  $\Omega_\epsilon^i$  et  $Y_i$  (pour  $i = f, s$ ) sont

$$h_1 = \begin{cases} \frac{1}{40}, & \text{pour la partie fluide} \\ \frac{1}{20}, & \text{pour la partie solide} \end{cases} \quad (4.49)$$

et

$$h = \begin{cases} \frac{1}{20}, & \text{pour la partie fluide} \\ \frac{1}{40}, & \text{pour la partie solide} \end{cases} \quad (4.50)$$

Pour l'écoulement macroscopique à deux dimensions, les contributions de la conductivité effective ne dépendent que de la base canonique  $e_1$  et  $e_2$ . Aussi les conditions aux limites périodiques, sont données par

$$w_{j,h}(y_1 = 0, y_2) = w_{j,h}(y_1 = 1, y_2) \text{ et } w_{j,h}(y_1, y_2 = 0) = w_{j,h}(y_1, y_2 = 1), \text{ pour } j = 1, 2,$$

et nous utilisons les mêmes conditions aux limites périodiques pour les autres problèmes cellulaires. Ainsi la conductivité thermique effective obtenue en résolvant les problèmes cellulaires pour les trois exemples est donnée par

$$K_h^* = \begin{pmatrix} 0.000395597 & 3.9088 * 10^{-14} \\ 3.9088 * 10^{-14} & 0.000395597 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, afin de comparer les termes macroscopiques  $u_{0,h_1}$ ,  $u_{1,h,h_1}$ ,  $u_{2,h,h_1}$  et la solution d'homogénéisation  $u_{\epsilon,h}$ , nous allons présenter quelques résultats numériques pour les trois exemples.

Notons que l'erreur  $L^2$  relative entre la solution d'homogénéisation et la solution homogénéisée est définie par :

$$ER_0 = \frac{\|u_{\epsilon,h_1}(t_n) - u_{0,h_1}(t_n)\|_{L^2(\Omega^h)}}{\|u_{h,\epsilon}(t_n)\|_{L^2(\Omega^h)}},$$

l'erreur  $L^2$  relative en introduisant le correcteur du premier ordre est donnée par

$$ER_1 = \frac{\|u_{\epsilon,h_1}(t_n) - u_{0,h_1}(t_n) - \epsilon u_{h,h_1,1}(t_n)\|_{L^2(\Omega^h)}}{\|u_{h,\epsilon}(t_n)\|_{L^2(\Omega^h)}},$$

et l'erreur  $L^2$  relative en introduisant les correcteurs du premier et du second ordre est définie par

$$ER_2 = \frac{\|u_{\epsilon,h_1}(t_n) - u_{0,h_1}(t_n) - \epsilon u_{1,h,h_1}(t_n) - \epsilon^2 u_{2,h,h_1}(t_n)\|_{L^2(\Omega^h)}}{\|u_{\epsilon,h_1}(t_n)\|_{L^2(\Omega^h)}},$$

pour chaque  $t_n$  avec  $n = 0, \dots, M$ .

Aussi les erreurs  $L^2$  relatives du gradient sont définies par :

$$ERG_0 = \frac{\|\nabla(u_{\epsilon,h_1}(t_n) - u_{0,h_1}(t_n))\|_{(L^2(\Omega^h))^d}}{\|\nabla(u_{h,\epsilon}(t_n))\|_{(L^2(\Omega^h))^d}},$$

$$ERG_1 = \frac{\|\nabla(u_{\epsilon,h_1}(t_n) - u_{0,h_1}(t_n) - \epsilon u_{h,h_1,1}(t_n))\|_{(L^2(\Omega^h))^d}}{\|\nabla(u_{h,\epsilon}(t_n))\|_{(L^2(\Omega^h))^d}}$$

et

$$ERG_2 = \frac{\|\nabla(u_{\epsilon,h_1}(t_n) - u_{0,h_1}(t_n) - \epsilon u_{1,h,h_1}(t_n) - \epsilon^2 u_{2,h,h_1}(t_n))\|_{(L^2(\Omega^h))^d}}{\|\nabla(u_{\epsilon,h_1}(t_n))\|_{(L^2(\Omega^h))^d}},$$

pour chaque  $t_n$  avec  $n = 0, \dots, M$ .

### Exemple 1 :

Dans cet exemple, nous considérons le cas où le terme d'échange radiatif sur l'interface est donné par

$$F(u) = 1 - \exp(-u),$$

pour une vitesse  $V_\epsilon = (0, 0)$  et une solution exacte  $u_{ex} = xy(1-x)(1-y)$ .

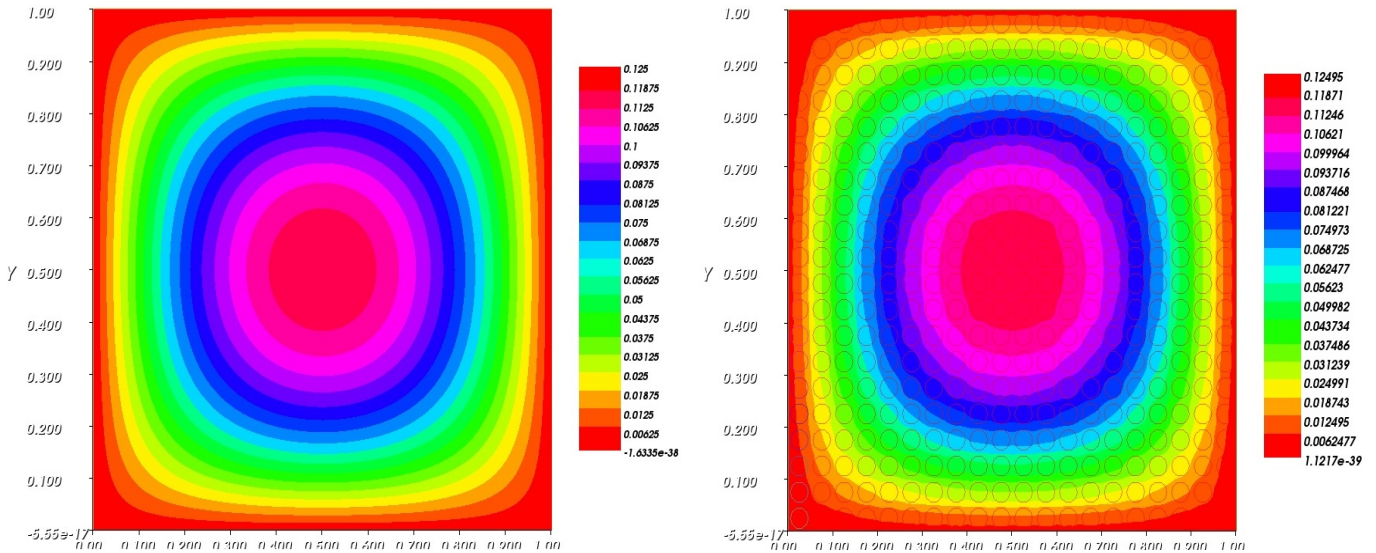


FIGURE 4.1 – Distribution spatiale bidimensionnelle de la température. Comparaison de la solution microscopique ( $\epsilon = 0,05$ ,  $t = 2$ ) (à gauche) avec la solution homogénéisée (à droite).

Dans la figure 4.1, la figure 4.2, et la figure 4.3 on représente l'évolution des solutions approchées des problèmes homogénéisés en fonction de différentes valeurs du paramètre d'échelle  $\epsilon$ , à savoir pour  $\epsilon = 0.2$ ,  $\epsilon = 0.1$  et  $\epsilon = 0.05$ . Nous constatons que les solutions  $u_{\epsilon,h_1}$  et  $u_{0,h_1}$  se rapprochent de plus en plus, lorsque  $\epsilon$  devient assez petit. En particulier la figure 4.1 montre une bonne similitude entre la solution homogénéisée  $u_{0,h_1}$  et la solution  $u_{\epsilon,h_1}$  qui correspond à  $\epsilon = 0.05$ . De plus, les résultats présentés dans le tableau 4.2 confirment la convergence de  $u_{\epsilon,h_1}$  vers  $u_{0,h_1}$  quand  $\epsilon$  tend vers 0 et ceci pour différents instants.

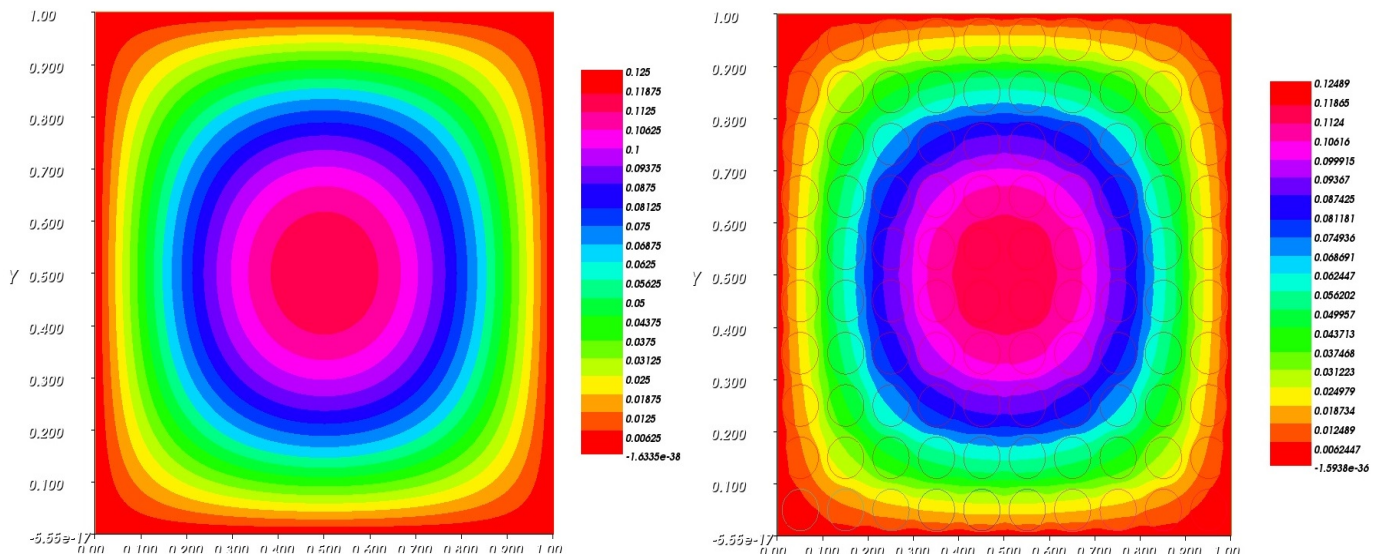


FIGURE 4.2 – Distribution spatiale bidimensionnelle de la température. Comparaison de la solution microscopique ( $\epsilon = 0,1, t = 2$ ) (à gauche) avec la solution homogénéisée (à droite).

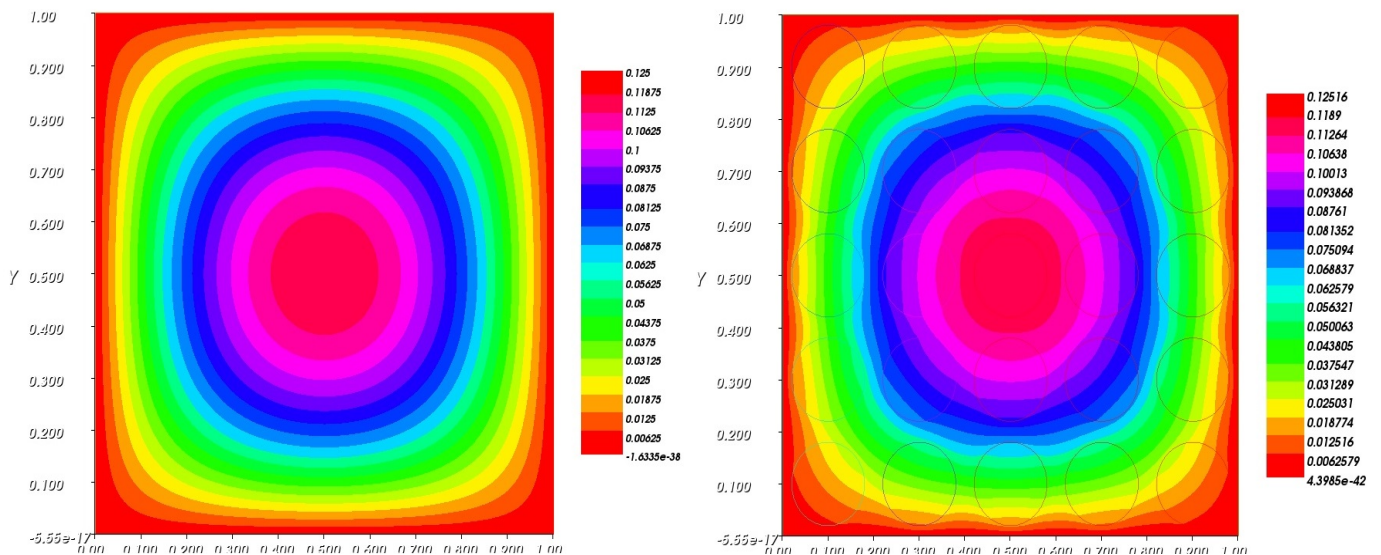


FIGURE 4.3 – Distribution spatiale bidimensionnelle de la température. Comparaison de la solution microscopique ( $\epsilon = 0,2, t = 2$ ) (à gauche) avec la solution homogénéisée (à droite).

t	$\epsilon = 0.2$	$\epsilon = 0.1$	$\epsilon = 0.05$
0.3	5.63861e-05	5.67989e-05	8.1454e-05
0.5	0.000128535	0.000129386	0.000159492
1	0.000404438	0.000383754	0.00037262
1.6	0.000881035	0.000763669	0.000634847
2	0.00126957	0.00103914	0.000722572

TABLE 4.2 – Évolution de l'erreur  $E_0 = \|u_{\epsilon, h_1} - u_{0, h_1}\|_{L^2(\Omega^h)}$  en fonction du temps et de  $\epsilon$ .

Le tableau 4.3 montre l'intérêt d'introduire les correcteurs sur le comportement de la solution  $u_{0, h_1}$ . On remarque que les solutions homogénéisées approchent mieux la solution microscopique,

quand on introduit les correcteurs du premier et du second ordre.

t	$ER_0$	$ER_1$	$ER_2$
0.1	0.00452722	0.00274355	0.00273533
0.4	0.00883446	0.0068673	0.0068667
1	0.013198	0.0111796	0.0111702
1.4	0.0157447	0.0137135	0.0136996
1.8	0.0175868	0.0155507	0.0155331

TABLE 4.3 – Évolution de l'erreur relative en fonction du temps pour  $\epsilon = 0.09$ .

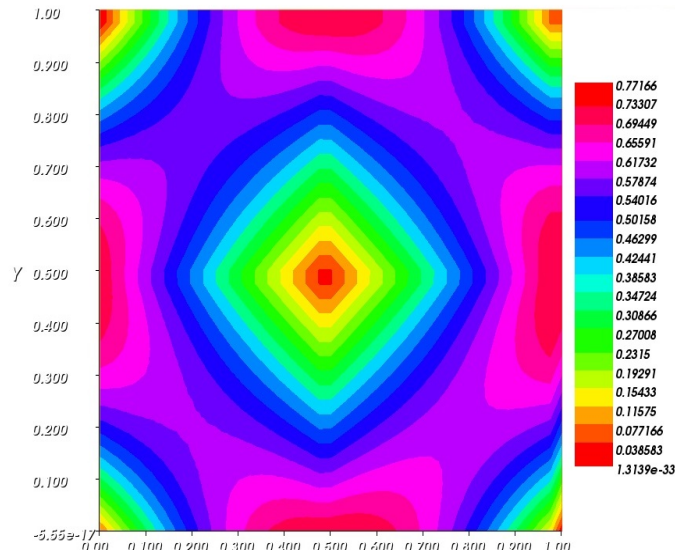


FIGURE 4.4 – Magnitude de la différence des gradients de la solution d'homogénéisation et la solution homogénéisée  $|\nabla(u_{\epsilon, h_1} - u_{0, h_1})|$  pour  $\epsilon = 0.1$  en  $t = 3$ .

Dans la figure 4.4, nous présentons la magnitude de la différence des gradients de la solution d'homogénéisation et la solution homogénéisée. On remarque qu'on obtient une bonne approximation qui devient meilleure lorsqu'on introduit les gradients des correcteurs du premier et du second ordre. Ceci est respectivement illustré dans la figure 4.5 et la figure 4.6.

La convergence de la solution homogénéisée aussi bien que celle de son flux en fonction des pas de

$h_1 = (h_1^f, h_1^s)$	$(\frac{1}{10}, \frac{1}{20})$	$(\frac{1}{20}, \frac{1}{40})$	$(\frac{1}{30}, \frac{1}{60})$	$(\frac{1}{40}, \frac{1}{80})$
$\ u_{0, h_1} - u_{ex}\ _{L^2(\Omega)}$	$2.7 * 10^{-7}$	$6.95 * 10^{-8}$	$3.08 * 10^{-8}$	$1.8 * 10^{-8}$
$\ \nabla(u_{0, h_1} - u_{ex})\ _{L^2(\Omega)}$	$3.38 * 10^{-6}$	$1.31 * 10^{-6}$	$8.8 * 10^{-7}$	$5.02 * 10^{-7}$

TABLE 4.4 – L'évolution de l'erreur entre la solution exacte et la solution homogénéisée en fonction de  $h_1$  pour  $\epsilon = 0.1$  en  $t = 3$

discrétisation est représentée dans le tableau 4.4.



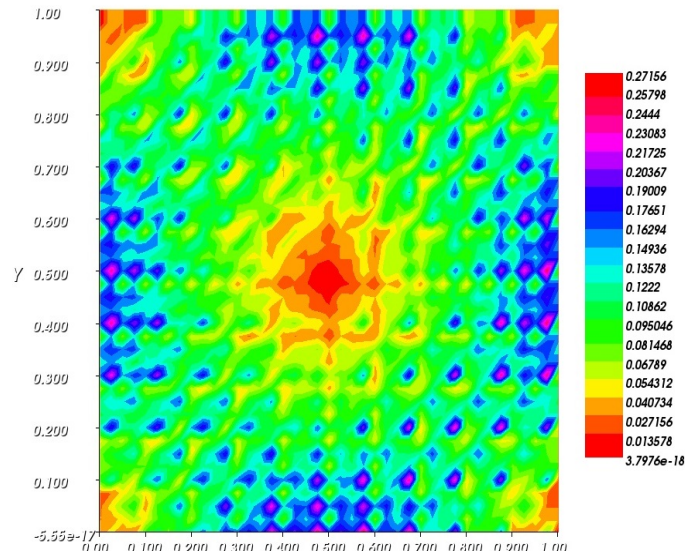


FIGURE 4.5 – Magnitude de la différence des gradients de la solution d’homogénéisation et la solution homogénéisée en introduisant le correcteur d’ordre 1  $|\nabla(u_{\epsilon,h_1} - u_{0,h_1} - \epsilon u_{1,h,h_1})|$  pour  $\epsilon = 0.1$  en  $t = 3$ .

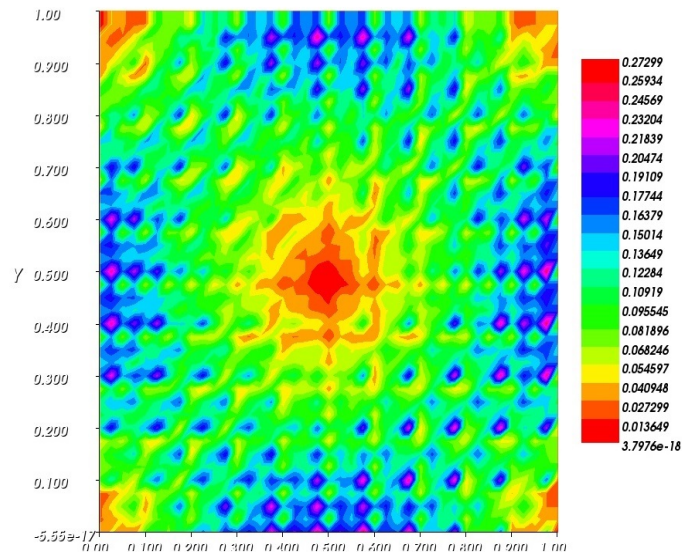
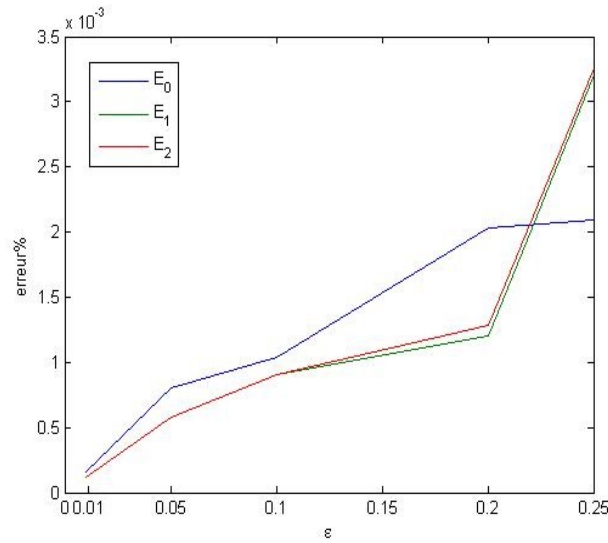


FIGURE 4.6 – Magnitude de la différence des gradients de la solution du problème microscopique et la solution homogénéisée en introduisant le correcteur d’ordre 1 et d’ordre 2  $|\nabla(u_{\epsilon,h_1} - u_{0,h_1} - \epsilon u_{1,h,h_1} - \epsilon^2 u_{2,h,h_1})|$  pour  $\epsilon = 0.1$  en  $t = 3$ .

Nous représentons également la variation des erreurs  $E_0 = \|u_{\epsilon,h_1} - u_{0,h_1}\|_{L^2(\Omega^h)}$ ,  $E_1 = \|u_{\epsilon,h_1} - u_{0,h_1} - \epsilon u_{1,h,h_1}\|_{L^2(\Omega^h)}$  et  $E_2 = \|u_{\epsilon,h_1} - u_{0,h_1} - \epsilon u_{1,h,h_1} - \epsilon^2 u_{2,h,h_1}\|_{L^2(\Omega^h)}$  en fonction du paramètre d’échelle  $\epsilon$ . On constate qu’on a une bonne amélioration de l’erreur lorsqu’on introduit les correcteurs du premier et du second ordre.

FIGURE 4.7 – Variation des erreurs  $E_0$ ,  $E_1$  et  $E_2$  en fonction de  $\epsilon$  pour  $t = 3$ .**Exemple 2 :**

Dans cet exemple nous considérons le même terme d'échange radiatif que celui de l'exemple 1, mais la vitesse  $V_\epsilon$  est solution de l'équation de Stokes (4.2) pour les forces extérieures

$$(f_1, f_2) = (0.1, 0.1).$$

Ainsi, l'erreur entre la vitesse d'homogénéisation et la vitesse homogénéisée est donnée par

$$\|V_\epsilon - V_0\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} = 8.95738e - 06,$$

l'erreur entre la pression d'homogénéisation et la pression homogénéisée est donnée par

$$\|p_\epsilon - p_0\|_{L^2(\Omega_\epsilon^f)} = 0.0569908$$

et la solution exacte  $u_{ex} = xy(1-x)(1-y)$ .

$t$	$ER_0$	$ER_1$	$ER_2$	$ERG_0$	$ERG_1$	$ERG_2$
0.1	0.00309347	0.0011361	0.00116331	0.0628019	0.0356331	0.0356687
0.4	0.00671975	0.00460155	0.00460672	0.122835	0.0912519	0.0912654
1	0.0113778	0.00923003	0.00923	0.190454	0.157949	0.15795
1.4	0.0133438	0.0111914	0.0111902	0.216767	0.184244	0.184241
1.8	0.0147688	0.012615	0.0126127	0.235144	0.202689	0.202682
5	0.0190903	0.0169491	0.0169405	0.287188	0.255273	0.255255
16	0.0254035	0.0237501	0.0201086	0.323255	0.294193	0.281147

TABLE 4.5 – Évolution de l'erreur relative en fonction du temps pour  $\epsilon = 0.1$ .

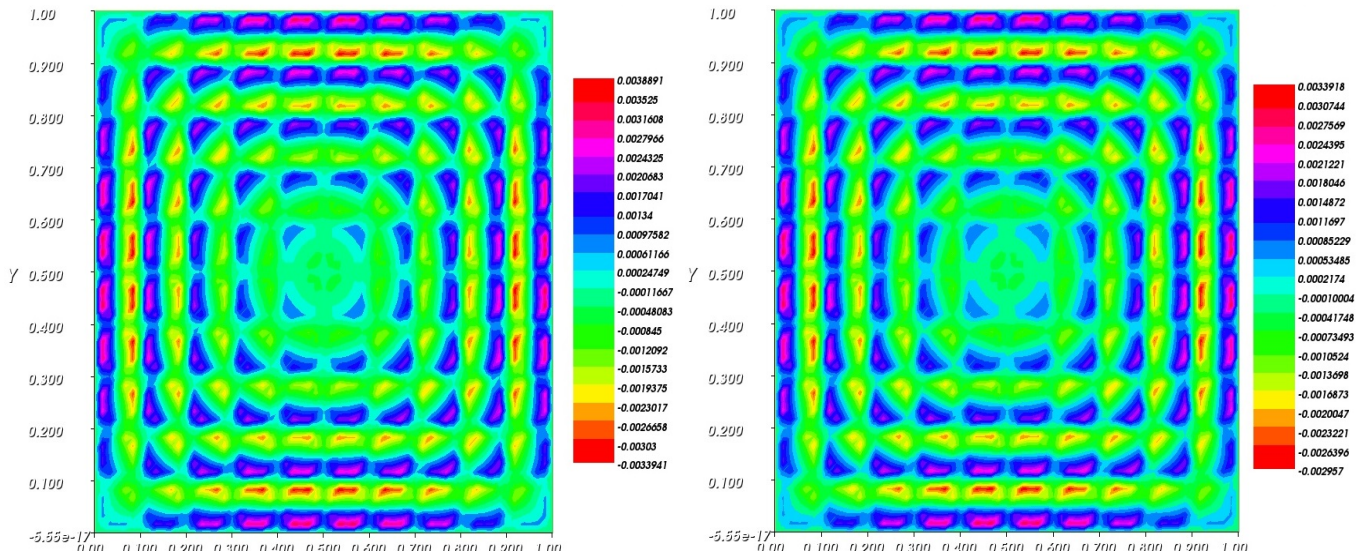


FIGURE 4.8 – La différence entre la solution du problème d’homogénéisation, la solution homogénéisée et les correcteurs (pour  $t = 2$  en  $\epsilon = 0.1$ ) : la figure (à gauche) représente  $(u_{\epsilon, h_1} - u_{0, h_1})$  et la figure (à droite) représente  $(u_{\epsilon, h_1} - u_{0, h_1} - \epsilon u_{1, h, h_1})$

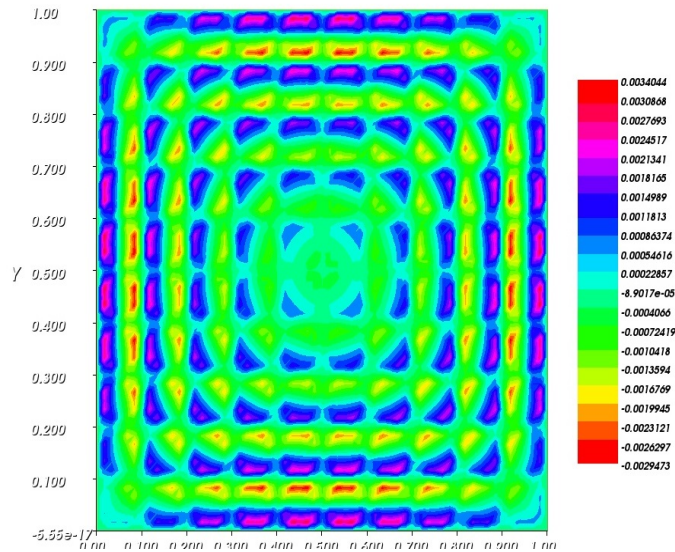


FIGURE 4.9 – La différence entre la solution du problème d’homogénéisation, la solution homogénéisée et les correcteurs (pour  $t = 2$  en  $\epsilon = 0.1$ ) : la figure représente  $(u_{\epsilon, h_1} - u_{0, h_1} - \epsilon u_{1, h, h_1} - \epsilon^2 u_{2, h, h_1})$

Le tableau 4.5, la figure 4.8 et la figure 4.9 montrent encore une fois que l’utilisation des correcteurs nous permet d’avoir une meilleure approximation de la solution  $u_{0, h_1}$  aussi bien que le gradient  $\nabla(u_{0, h_1})$ . On remarque, en particulier, que le correcteur du second ordre améliore nettement la qualité de la solution et le gradient en fonction du temps.

**Exemple 3 :**

Dans cet exemple nous considérons le cas où le terme d'échange radiatif est donné par

$$F(u) = |u|u.$$

avec la vitesse  $V_\epsilon = (0, 0)$  et la solution exacte  $u_{ex} = \sin(\pi x) \cos(\pi x)$ .

Dans la figure 4.10, la figure 4.11 et la figure 4.12, on représente l'évolution des solutions approchées des problèmes homogénéisés en fonction de différentes valeurs du paramètre d'échelle  $\epsilon$ , à savoir pour  $\epsilon = 0.25$ ,  $\epsilon = 0.1$  et  $\epsilon = 0.05$ . Nous constatons pour cet exemple aussi que l'erreur entre les deux solutions  $u_{\epsilon, h_1}$  et  $u_{0, h_1}$  se réduit considérablement quand  $\epsilon$  devient assez petit. La figure 4.12 montre encore une fois que nous obtenons pratiquement la même solution  $u_{\epsilon, h_1}$  que celle du problème homogénéisé  $u_{0, h_1}$  pour  $\epsilon = 0.05$ . Ainsi la convergence de  $u_{\epsilon, h_1}$  vers  $u_{0, h_1}$  quand  $\epsilon$  tend vers 0 est illustrée dans le tableau 4.6.

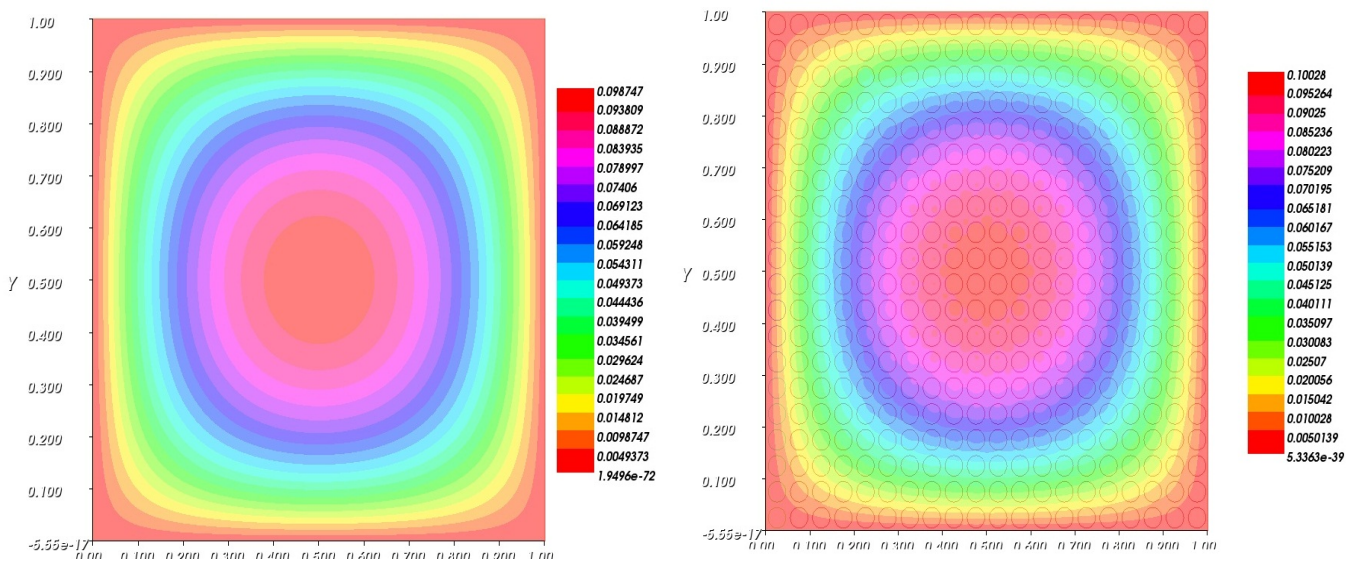


FIGURE 4.10 – Distribution spatiale bidimensionnelle de la température. Comparaison de la solution microscopique ( $\epsilon = 0,05$ ,  $t = 2$ ) (à gauche) avec la solution homogénéisée (à droite).

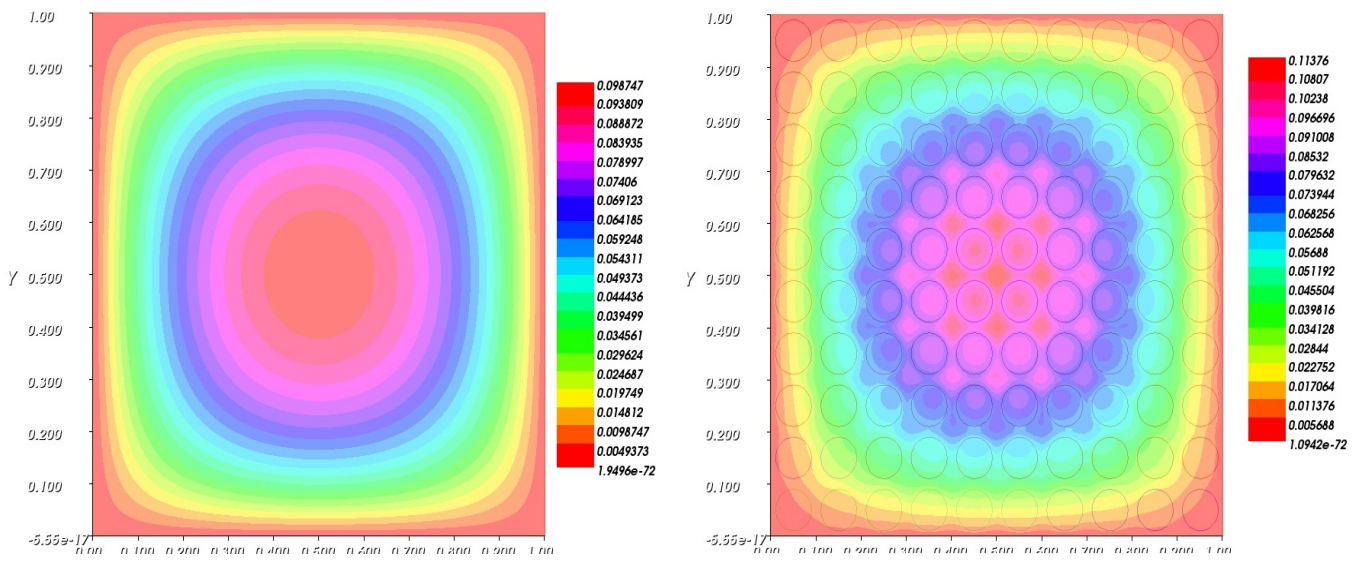


FIGURE 4.11 – Distribution spatiale bidimensionnelle de la température. Comparaison de la solution microscopique ( $\epsilon = 0,1, t = 2$ ) (à gauche) avec la solution homogénéisée (à droite).

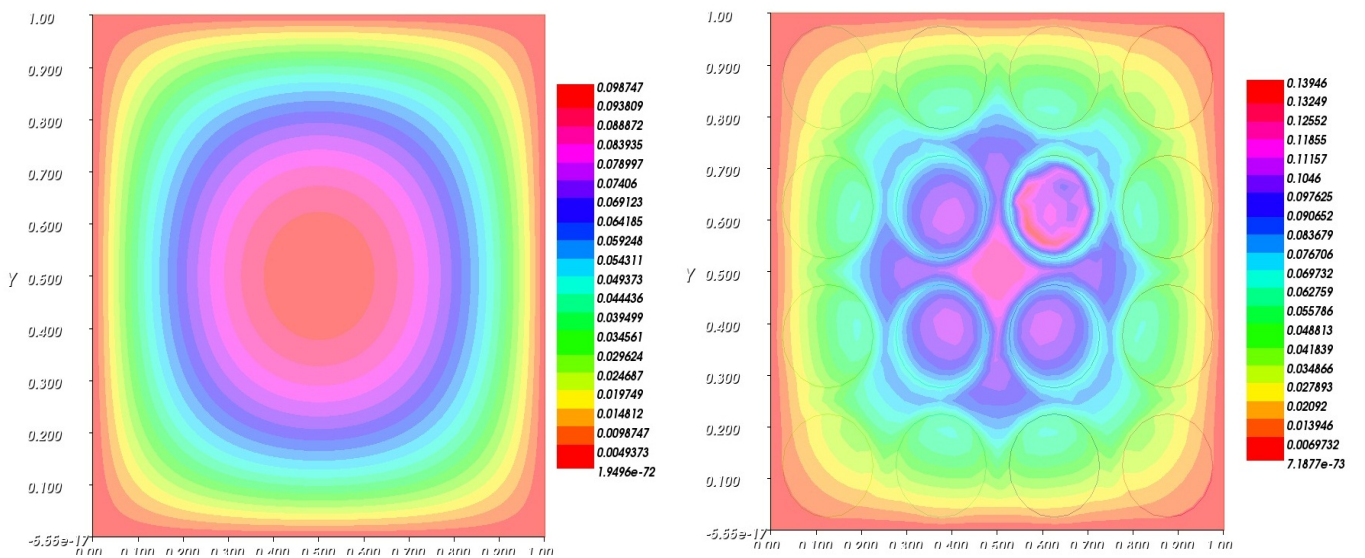


FIGURE 4.12 – Distribution spatiale bidimensionnelle de la température. Comparaison de la solution microscopique ( $\epsilon = 0,25, t = 2$ ) (à gauche) avec la solution homogénéisée (à droite).

Le tableau 4.7 montre l'impact des correcteurs sur le comportement de la solution  $u_{0,h_1}$ . Comme on peut le voir, nous obtenons une meilleure approximation de la solution du problème d'homogénéisation par la solution du problème homogénéisé lorsqu'on introduit le correcteur du premier ordre.

$t$	$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 0.25$	$\epsilon = 0.1$	$\epsilon = 0.05$
0.2	0.00664135	8.58383e-05	5.1988e-05	1.66702e-05
0.6	0.0197896	0.000502295	0.000301019	8.65635e-05
1	0.0325748	0.00156842	0.000752084	0.000197195
1.4	0.0448528	0.00322361	0.00139121	0.000335386
1.8	0.0565638	0.00543656	0.0026409	0.000488439
3	0.088073	0.0152381	0.00491643	0.000988709
4	0.111655	0.0262279	0.00735712	0.00145446
5	0.143527	0.0384619	0.00961195	0.00195828

TABLE 4.6 – Évolution de l'erreur  $\|u_{\epsilon, h_1} - u_{0, h_1}\|_{L^2(\Omega^h)}$  en fonction du temps et de  $\epsilon$ .

$t$	$ER_0$	$ER_1$
0.1	0.00309347	0.0011361
0.4	0.00671975	0.00460155
1	0.0113778	0.00923003
1.4	0.0133438	0.0111914
1.8	0.0147688	0.012615

TABLE 4.7 – Évolution de l'erreur relative en fonction du temps pour  $\epsilon = 0.1$ .

# Conclusion

---

Dans cette thèse, nous avons considéré un modèle de transfert de la chaleur issu de la construction d'une pièce par des matériaux composites. Cette pièce composite est présentée par une géométrie périodiquement distribuée par rapport à une cellule de référence. Ainsi, la pièce est formée par un milieu hétérogène composé de deux sous-domaines. Nous nous sommes intéressés, plus précisément, aux équations paraboliques, modélisant ce problème, faisant intervenir un champ de vecteur solution d'une équation de Stokes. L'échange thermique est aussi modélisé par une condition de transmission non linéaire sur l'interface entre les deux parties du milieu. Nous avons ainsi opté pour une analyse multi-échelles basée sur la théorie d'homogénéisation périodique, pour étudier ce modèle. Pour cela, nous avons commencé par démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème d'homogénéisation en utilisant le degré topologique de Leray Schauder, pour trois types d'échange thermique non linéaires. Cette étude a été réalisée en utilisant des espaces fonctionnels appropriés, pour chaque situation d'échange thermique et en utilisant un minimum d'hypothèses de régularité sur les données et la solution, par rapport à celles utilisées dans les travaux antérieurs. Nous avons ensuite proposé une étude de la convergence à deux échelles du problème d'homogénéisation, pour chacun des modèles considérés, et une identification du problème homogénéisé, ainsi qu'une étude de la convergence forte du problème d'homogénéisation vers le problème homogénéisé.

Enfin, dans le but de justifier qualitativement l'importance et l'efficacité de la méthode de l'homogénéisation et pour appuyer aussi les résultats théoriques obtenus, nous avons proposé une étude de l'approximation numérique du problème. En effet, nous avons établi un développement asymptotique de la solution du problème d'homogénéisation, tout en identifiant les équations homogénéisées associées au problème d'homogénéisation et celles correspondant aux correcteurs du premier et du second ordre. Ensuite, nous avons proposé une discrétisation des problèmes ainsi obtenus par la méthode des éléments finis. Finalement, nous avons présenté quelques résultats numériques illustrant la convergence en fonction du paramètre d'échelle  $\epsilon$  et montrant l'utilité et l'intérêt des correcteurs du premier et du second ordre dans la convergence du processus d'homogénéisation. Ceci confirme alors les résultats théoriques obtenus et justifie en même temps l'efficacité de la méthode de l'homogénéisation.

En perspective, nous souhaitons tendre cette étude dans le cas de l'homogénéisation stochastique.

# Bibliographie

---

- [1] R. A Adams and J. J. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140. Academic press, 2003. [14](#), [19](#)
- [2] G. Allaire. *Homogénéisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes*. Thèse de doctorat soutenue à Université Paris 6, 1989. [49](#), [85](#)
- [3] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6) :1482–1518, 1992. [9](#), [10](#), [25](#), [26](#)
- [4] G. Allaire. Homogenization of the unsteady stokes equations in porous media. *Progress in partial differential equations : calculus of variations, applications*, pages 109–123, 1992. [49](#), [85](#)
- [5] G. Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*, volume 146. Springer Science and Business Media, 2012. [24](#), [25](#), [101](#)
- [6] G. Allaire, A. Damlamian, and U. Hornung. Two-scale convergence on periodic surfaces and applications. In *Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media*. World Scientific Pub. Singapore, pages 15–25, 1995. [26](#)
- [7] G. Allaire and Z. Habibi. Homogenization of a conductive, convective, and radiative heat transfer problem in a heterogeneous domain. *SIAM J. Math. Anal.*, 45(3) :1136–1178, 2013. [10](#), [26](#), [92](#), [96](#)
- [8] G. Allaire and Z. Habibi. Second order corrector in the homogenization of a conductive-radiative heat transfer problem. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 18(1) :1–36, 2013. [92](#)
- [9] T. Arbogast, J. Douglas, Jr, and U. Hornung. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory. *SIAM J. Math. Anal.*, 21(4) :823–836, 1990. [10](#)
- [10] J. P. Aubin. Un théorème de compacité. *Acad. Sci. Paris 256, 5042*, 5044, 1963. [21](#)
- [11] A. Bejan. *Convection heat transfer*. John wiley & sons, 2013. [33](#), [36](#)
- [12] A. Bensoussan, J.L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 5. North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1978. [9](#), [25](#), [91](#)
- [13] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983. [66](#)
- [14] Franco Brezzi and Michel Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2012. [103](#)
- [15] A. Chakib, A. Hadri, A. Nachaoui, and M. Nachaoui. Homogenization of parabolic nonlinear coupled problem in heat exchange. *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform*, 42 :117–128, 2015. [49](#)



- [16] A. Chakib, A. Hadri, A. Nachaoui, and M. Nachaoui. Homogenization of parabolic problem with nonlinear transmission condition. *Nonlinear Anal. Real World Appl*, 37 :433–456, 2017. [49](#)
- [17] R. M. Christensen. *Mechanics of composite materials*. Courier Corporation, 2012. [9](#)
- [18] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume 40 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2002. [104](#)
- [19] D. Cioranescu and P. Donato. *An Introduction to Homogenization*. Oxford University Press, 1999. [8](#), [9](#), [24](#), [25](#), [40](#)
- [20] G. Dal Maso. *An Introduction to  $\Gamma$ -Convergence*. *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser, 1993. [9](#)
- [21] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Tome 3*. Masson, 1985. [14](#), [22](#)
- [22] R. Dautray and J.L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology :Evolution problems I*. Springer, 1992. [19](#), [20](#), [21](#), [77](#), [79](#), [80](#)
- [23] P. Donato and S. Monsurro. Homogenization of two heat conductors with an interfacial contact resistance. *Analysis and Applications*, 2(03) :247–273, 2004. [8](#), [10](#)
- [24] J. Droniou. Solving convection-diffusion equations with mixed, neumann and fourier boundary conditions and measures as data, by a duality method. *Adv. Differential Equations*, 5(10–12) :1341–1396, 2000. [65](#)
- [25] K. El Ganaoui. *Homogénéisation de modèles de transferts thermiques et radiatifs : Application au coeur des réacteurs à caloporteur gaz*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2006. [10](#)
- [26] T. Fatima, N. Arab, E. P. Zemskov, and A. Muntean. Homogenization of a reaction–diffusion system modeling sulfate corrosion of concrete in locally periodic perforated domains. *Journal of Engineering Mathematics*, 69(2) :261–276, 2011. [10](#)
- [27] T. Fatima, E. Ijioma, T. Ogawa, and A. Muntean. Homogenization and dimension reduction of filtration combustion in heterogeneous thin layers. *Netw. Heterog. Media*, 9(4) :709–737, 2014. [10](#)
- [28] T. Fatima and A. Muntean. Sulfate attack in sewer pipes : derivation of a concrete corrosion model via two-scale convergence. *Nonlinear Anal. Real World Appl*, 15 :326–344, 2014. [10](#)
- [29] M. Gahn, M. Neuss-Radu, and P. Knabner. Homogenization of reaction–diffusion processes in a two-component porous medium with nonlinear flux conditions at the interface. *SIAM J. Math. Anal*, 76(5) :1819–1843, 2016. [10](#)
- [30] I. Graf, M. Peter, and A. J. Sneyd. Homogenization of a nonlinear multiscale model of calcium dynamics in biological cells. *J. Math. Anal. Appl*, 419(1) :28–47, 2014. [10](#)
- [31] Z. Habibi. *Homogenization and two scales convergence of some stationary and non-stationary heat transfer problems, application to gas cooled nuclear reactors*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2011. Paris. [92](#)

- [32] Z. Hashin. *The elastic moduli of heterogeneous materials*. US Department of Commerce, Office of Technical Services, 1960. 9
- [33] Z. Hashin. Analysis of composite materials. *J. appl. Mech*, 50(2) :481–505, 1983. 9
- [34] U. Hornung. *Homogenization and porous media*, volume 6. Springer Science & Business Media, 2012. 32
- [35] J. R. Howell, M. P. Menguc, and Siegel. R. *Thermal radiation heat transfer*. CRC press, 2010. 36
- [36] D. Hull and T.W. Clyne. *An introduction to composite materials*. Cambridge university press, 1996. 9, 29
- [37] R. H. Hutridurga. *homogenization of complex flows in porous media and applications*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2013. Paris. 92, 101
- [38] W. S. Janna. *Engineering heat transfer*. CRC Press, 1999. 36
- [39] E. C. Jose. Homogenization of a parabolic problem with an imperfect interface. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl*, 54(3) :189–222, 2009. 10
- [40] O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Mathématiques & applications. Springer-Verlag, 1993. 56
- [41] W. M. Kays, M. E. Crawford, and B. Weigand. *Convective heat and mass transfer*. Tata McGraw-Hill Education, 2012. 36
- [42] O. A. Ladyzenskaja and N. N. Ural’ceva. *Équations aux dérivées partielles de type elliptique*. Traduit par G. Roos. Monographies Universitaires de Mathématiques, No. 31. Dunod, Paris, 1968. 18
- [43] J. Leray and J. Schauder. Topologie et équations fonctionnelles. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 51 :45–78, 1934. 22, 23
- [44] J. H. Lienhard. *A heat transfer textbook*. Courier Corporation, 2013. 33
- [45] J.L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod Paris, 1969. 17, 18
- [46] J.L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications III*. Dunod, 1968. 14, 17
- [47] J.L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968. 14
- [48] G. Lubin. *Handbook of composites*. Springer Science & Business Media, 2013. 8, 28, 29
- [49] D. Lukkassen, G. Nguetseng, and P. Wall. Two-scale convergence. *Int. J. of Pure and Appl. Math*, 2(1) :35–86, 2002. 27

- [50] A. Marciniak-Czochra and M. Ptashnyk. Derivation of a macroscopic receptor-based model using homogenization techniques. *SIAM J. Math. Anal.*, 40(1) :215–237, 2008. [10](#), [26](#)
- [51] S. Monsurró. Homogenization of a two-component composite with interfacial thermal barrier. *Adv. in Math. Sci. and Appl.*, 13(1) :43–63, 2003. [10](#)
- [52] J. Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967. [18](#)
- [53] M. Neuss-Radu. Some extensions of two-scale convergence. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 322(9) :899–904, 1996. [26](#)
- [54] M. Neuss-Radu and W. Jäger. Effective transmission conditions for reaction-diffusion processes in domains separated by an interface. *SIAM J. Math. Anal.*, 39(3) :687–720, 2007. [10](#)
- [55] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(3) :608–623, 1989. [9](#), [10](#)
- [56] D. O'Regan, Y. J. Cho, and Y. Q. Chen. *Topological degree theory and applications*. Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group, 2006. [11](#), [23](#)
- [57] M. N. Ozisik. *Heat conduction*. John Wiley & Sons, 1993. [33](#)
- [58] E.S. Palencia. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Lecture Notes in Physics. 1980. [8](#)
- [59] M. E. Pérez, M. N. Zubova, and T. A. Shaposhnikova. Homogenization problem in a domain perforated by tiny isoperimetric holes with nonlinear robin type boundary conditions. *Doklady Mathematics*, 90(1) :489–494, 2014. [10](#)
- [60] L. A. Pilato and M. J. Michno. *Advanced composite materials*. Springer Science & Business Media, 1994. [29](#)
- [61] M. Planck. *The theory of heat radiation*. Courier Corporation, 2013. [36](#), [37](#)
- [62] M. Ptashnyk and T. Roose. Derivation of a macroscopic model for transport of strongly sorbed solutes in the soil using homogenization theory. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 70(7) :2097–2118, 2010. [10](#)
- [63] W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, and E. N. Ganic. Handbook of heat transfer applications. *New York, McGraw-Hill Book Co., 1985, 973 p.*, 1, 1985. [32](#)
- [64] J Simon. Compact sets in the space  $l^p(0, t; b)$ . *Ann. Mat. Pura Appl*, 146 :65–96, 1987. [21](#)
- [65] L. Tartar. *The general theory of homogenization : a personalized introduction*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2009. [9](#), [25](#)
- [66] F. Tasnim. *Multiscale Reaction-diffusion Systems Describing Concrete Corrosion : Modeling and Analysis*. 2013. [10](#)
- [67] R. Temam. *Navier-stokes equations*, volume 2. North-Holland Amsterdam, 1984. [49](#)

- [68] C. Timofte. Homogenization results for enzyme catalyzed reactions through porous media. *Acta Mathematica Scientia*, 29(1) :74–82, 2009. [10](#)
- [69] C. Timofte, N. Cotfas, and G. Pavel. on the asymptotic behaviour of some elliptic problems in perforated domains. *Romanian Reports in Physics*, 64(1) :5–14, 2012. [10](#)
- [70] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications : III : Variational Methods and Optimization*. Springer Science & Business Media, 2013. [19](#), [20](#)