

Etude théorique des processus de collision en  
physique atomique relativiste : Proton-atome  
d'hydrogène et positron-atome d'hydrogène

**Thèse présentée par : Elmostafa Hrou**

**Sous la direction de : Pr. B. Manaut et Pr. S. Taj**

**Nom et prénom de l'auteur :** Elmostafa HROUR

**Intitulé de la thèse :**

" Etude théorique des processus de collision en physique atomique relativiste : Proton-atome d'hydrogène et positron-atome d'hydrogène".

**Nom et prénom du directeur de thèse :** Bouzid MANAUT ( FP Béni mellal)

**Nom et prénom du Co-encadrant :** Souad TAJ ( FP Béni mellal)

Ce travail a été réalisé au : Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Sciences et Techniques (LIRST), FP, Beni Mellal.

**Les publications de la thèse sont :**

1. " On the Coulomb effect in laser-assisted proton scattering by a stationary atomic nucleus" E Hrou, S Taj, A Chahboune, M El Idrissi and B Manaut, *Laser Phys.* **27**, 066003 (9pp)(2017)
2. "Relativistic proton-impact excitation of hydrogen atom in the presence of intense laser field " E. Hrou, S. Taj, A. Chahboune, and B. Manaut. *Can. J. Phys.* **94** : 645650 (2016)
3. "Relativistic elastic scattering of hydrogen atoms by positron impact with anomalous magnetic moment effects" E. Hrou , M. El Idrissi , S. Taj and B. Manaut *Indian J Phys***89**(8) : 783788 (August 2015)

**Les Collaborations scientifiques :**

1. "Relativistic Ionization of Hydrogen Atoms by Positron Impact " - Amal Chahboune, Bouzid Manaut \*, Elmostafa Hrouer and Souad Taj.  
*Atoms* , 4, 10(2016) doi :10.3390/atoms4010010
2. " Relativistic ionization of hydrogen atoms by positron impact in the presence of a circularly polarized laser field"- Chahboune Amal ; Taj Souad ; Hrouer El Mostafa ; El Idrissi Moha ; Manaut Bouzid. (en état de Soumission)

### **Les communications nationales et internationales :**

1. " Etude des processus d'excitation d'hydrogènoïdes atomique par impact électronique en absence d'un champ laser" E. Hrouer , M. El Idrissi , S. Taj and B. Manaut .(journées doctorales beni mellal 10-11 juin 2014).
2. " Diffusion élastique relativiste de l'atome d'hydrogène par l'impact de positron avec effet De moment magnetique anomal" E. Hrouer ,A. Chahboune, S. Taj and B. Manaut .(journées doctorales beni mellal 2015).
3. " Relativistic laser-assisted excitation of hydrogen atom by proton impact ".E. Hrouer, S. Taj, A. Chahboune, and B. Manaut. ( journées doctorales CPM 11-13 juin 2015 , faculté des sciences université mohamed 5 rabat )
4. " Diffusion relativiste de proton en présence de champ laser polarisé circulairement " E. Hrouer, S. Taj, A. Chahboune, and B. Manaut. ( journées doctorales CPM 26-27-28 Mai 2016 , faculté des sciences université mohamed 5 rabat ).
5. " Coulomb effect in Mott scattering in the presence of a circularly polarized laser field "E. Hrouer, B. Manaut , A. Chahboune, S. Taj. (1st International conference on Theoretical Physics and High Energy Physics @ Casablanca (ICTHP-2016) - la Faculté des Sciences Ben M'sik Le 22-24 Septembre 2016 )
6. " Processus de diffusion en physique atomique relativiste"E. Hrouer, S. Taj, A. Chahboune, and B. Manaut ( première rencontre nationale de la physique des particules à safi le 4-5 novembre 2016 ).
7. "Effet du moment magnétique anomal sur l'ionisation d'hydrogène par impact de positron en présence d'un champ laser" Amal Chahboune, Bouzid Manaut, Elmostafa Hrouer and Souad Taj. (2° Edition des Journées Doctorales Sciences et Techniques 2016 - à la FST D'Errachidia Le 14-15-16 Avril 2016).
8. " Relativistic triple differential cross section of positron-impact ionization of hydrogen atom ". (1st International conference on Theoretical Physics and High Energy Physics @ Casablanca (ICTHP-2016) - la Faculté des Sciences Ben M'sik Le 22-24 Septembre 2016 )

## REMERCIEMENT

Mes premiers remerciements vont à mon encadrant Mr bouzid Manaut, qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris. Ils ont été et resteront des moteurs de mon travail de recherche. Il a dépassé le rôle d'un directeur de thèse pour être un ami sincère. Je te suis reconnaissant de m'avoir transmis ton savoir faire et de m'avoir poussé jusqu'à l'aboutissement de ce travail.

Ma profonde gratitude à Madame Souad Taj pour son encadrement précieux, ces discussions fructueuses, ses conseils et encouragements m'ont permis de prendre confiance en moi, et de mettre le Pier sur la bonne voie de recherche.

Je tiens ensuite à exprimer ma profonde reconnaissance à mon frère Hassan Hrouur pour son encouragement et son support moral durant ces quatre années de thèse. J'adresse également mes remerciements aux membres du jury d'avoir consacré une partie de leur temps et de leurs efforts pour évaluer ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à mon ami Hassan Elharfi et aux membres du laboratoire de modélisation des écoulements et des transferts dans lequel j'ai passé de bons moments de discussions scientifiques, J'apprécierai pour toujours leurs inestimable et incomparable amitié.

Ma grande reconnaissance pour ma mère Molouda Qalad à qui je dois tout après Dieu, pour les sacrifices et le dévouement qu'elle a fait pour moi ainsi que pour mes frères. Je suis infiniment reconnaissant pour son amour, son soutien et son encouragement à être le meilleur.

Toute la grâce à mon père Elarbi Hrouur, la miséricorde de Dieu, qui a fait de son mieux pour le bonheur sa famille, que Dieu vous récompense, Père, tu resteras mon modèle suprême, et vôtres sages conseils resteront une lumière brillante de mon chemin pour l'amour et la paix....

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités et support théorique</b>	<b>8</b>
1 Physique prérelativiste . . . . .	8
2 Relativité restreinte . . . . .	11
2.1 Principes de relativité . . . . .	11
2.2 Transformation de Lorentz . . . . .	11
2.3 Quelques résultats généraux de la relativité restreinte . . . . .	12
3 Formalisme quadridimensionnel . . . . .	13
4 Equation de Klein-Gordon . . . . .	15
5 Equation de Dirac . . . . .	16
5.1 Covariance de l'équation de Dirac . . . . .	17
5.2 Interpretation de Feynman-stuckelberg . . . . .	18
6 Les lasers . . . . .	20
7 Électron dans un champ électromagnétique . . . . .	22
7.1 Équation de Dirac pour un électron dans un champ électromagnétique . . . . .	22
7.2 Solution de Dirac-Volkov pour l'électron dans le champ d'une onde électromagnétique plane . . . . .	23
8 Fonction d'onde d'une particule de Dirac dans un champ Coulombien . . . . .	26

9	Section efficace : formalisme relativiste . . . . .	29
10	Approximation de Born . . . . .	30
11	Moment magnétique anomal de l'électron . . . . .	32
11.1	Moment magnétique de l'électron . . . . .	32
11.2	Equation de Dirac avec moment magnétique anomal . . . . .	34
12	Fonction d'onde relativiste exacte de l'atome d'hydrogène . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Diffusion Coulombienne, assistée par laser, d'un proton par noyau atomique fixe</b>	<b>40</b>
1	Introduction . . . . .	40
2	Développement théorique . . . . .	41
2.1	Effet Coulombien sur le proton incident . . . . .	42
2.2	Effet Coulombien sur le proton diffusé . . . . .	46
2.3	Effet Coulomb total . . . . .	47
3	Resultas et discussions . . . . .	47
3.1	Approximation de Coulomb simple (ACS) . . . . .	48
3.2	Effet total : approximation de Coulomb total (ACT) . . . . .	51
3.3	Effet de Coulomb total sur électron . . . . .	59
4	Conclusion . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Excitation relativiste de l'atome d'hydrogène par impact de proton en présence d'un champ laser intense</b>	<b>65</b>
1	Introduction . . . . .	65
2	Formalisme théorique . . . . .	67
2.1	Élément de matrice de transition . . . . .	67
2.2	Section efficace différentielle . . . . .	68
3	Résultats et discussions . . . . .	73
4	Conclusions . . . . .	79

---

<b>4</b>	<b>Diffusion élastique relativiste de l'atome d'hydrogène par l'impact de positrons : effet du moment magnétique anomal</b>	<b>83</b>
1	Introduction . . . . .	83
2	Partie théorique . . . . .	85
3	Resultats et discussions . . . . .	90
4	Conclusion . . . . .	95
	<b>Conclusion générale</b>	<b>98</b>
<b>A</b>	<b>Quelques relations utiles pour le calcul de la partie intégrale de la section efficace</b>	<b>101</b>
1	Polynômes de Legendre . . . . .	101
2	Relations entre les harmoniques sphériques . . . . .	102
3	Développement des distances en fonction des harmoniques sphériques . . . . .	104
4	Lien avec les fonctions de Bessel . . . . .	104
<b>B</b>	<b>Contributions scientifiques</b>	<b>108</b>

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'étude de la diffusion des atomes ou des molécules par l'impact des particules chargées, représente l'un des domaines les plus importants de la physique des collisions. Ces études ont permis grâce au progrès technologique de comprendre plusieurs effets sur la matière. L'analyse des informations qu'apportent ces études joue un rôle essentiel aussi bien pour la compréhension de la structure interne de la matière que de la dynamique de la collision. Elle présente aussi un intérêt tant fondamental que pratique pour la compréhension de nombreux phénomènes naturels dans plusieurs domaines de la physique, telles que la biophysique (dépôt d'énergie consécutive à l'irradiation de tissus vivants), la physique des plasmas (processus de transfert d'énergie au sein de plasmas chauds) et l'astrophysique (rôle essentiel des mécanismes élémentaires d'interaction, ionisation, excitation et capture qui interviennent lors de la formation d'objets cosmologiques). Ces collisions dépendent de plusieurs paramètres tels que l'énergie de la particule incidente, l'énergie de la cible et la géométrie de la collision.

De façon générale, les diffusions peuvent être classées en deux catégories :

- Diffusion élastique au cours de laquelle l'énergie interne des deux particules reste inchangée, seules les directions de propagation sont modifiées.
- Diffusion inélastique au cours de laquelle une partie de l'énergie incidente est cédée à la cible qui passe dans un état excité durant la collision.

L'intérêt majeur de l'étude de ces diffusions est la détermination de la probabilité d'interaction ou le taux d'interaction lié à la section efficace différentielle (SED) qui contient toute l'information sur les processus de diffusion et qui présente des intérêts scientifiques pour la compréhension de la structure interne de la matière à l'échelle atomique et subatomique. La première mesure de la section efficace totale de la diffusion électron-atome date du début du vingtième siècle [1]. Le concept d'un électron habillé est introduit depuis l'avènement des sources laser vers 1960 [2]. La règle de conservation d'énergie introduit une différence entre les énergies de l'électron incident



et diffusé qui représente un multiple entier arbitraire de l'énergie du photon laser. Les collisions assistées par laser des électrons par des ions ou des atomes ont été bien développées ces dernières années ( Berestetzki, *et al.* [3], Faisal [4], Mittelman [5], Fedorov [6] et dans d'autres documents récents [7, 9]). La plupart de ces études ont été menées dans le cadre du régime des collisions non-relativistes et pour des champs faibles ou moyennement intenses [10, 11].

Les avancées considérables dans la technique laser ont permis de produire des intensités relativistes [12]. Le seuil de ce régime est caractérisé selon Panek *et al.*, [13] par le paramètre fondamental  $\mu(u.a) = eE/m\omega c$ . Lorsque le champ électrique atteint la valeur critique  $E_c(u.a) = \omega c$ , le paramètre  $\mu(u.a)$  est égal à 1. Ce qui correspond à une intensité critique  $I_c(u.a) = \omega^2 c^2$  et une énergie pondéromotrice  $U_p(u.a) = mc^2/4$  qui devient de l'ordre de l'énergie au repos de l'électron. Dans ces conditions, même si la fréquence du champ laser est basse, il est nécessaire de tenir compte du spin de l'électron au moyen de l'équation de Dirac. De nombreux travaux ont été menés dans ce contexte pour des énergies incidentes qui excèdent la masse au repos de l'électron. Ils ont permis d'évaluer et de comprendre les effets de l'interaction spin-orbite, spin-laser et aussi pour les diffusions tenant compte de l'effet Coulombien.

Récemment, les aspects relativistes des processus induits par laser ont suscité plus d'intérêt. Parmi ces processus, on trouve : la transition entre Thomson et Compton, la diffusion dans un champ laser ultra-intense [14] et l'influence de la matière sur la propagation de la lumière en auto-canalisation dans le régime relativiste [15]. Il a été vérifié expérimentalement que grâce à la divergence infrarouge de l'électrodynamique quantique (QED) [16], le système projectile-cible peut échanger un nombre assez grand de photons avec le champ dans la limite des photons mous. La diffusion Coulombienne pour des vitesses relativistes a été mise au point, depuis 1929, par Mott [17]. Une extension, dans le cadre de la première approximation de Born [18] de la diffusion relativiste Coulombienne assistée par laser, a été formellement dérivée par Denisov et Fedorov [19]. Kamiński [20] a utilisé une transformation non-locale en un processus généralisé de Kramers-Henneberger pour développer les résultats de Kroll-Watson à basse fréquence. Parmi les processus assistés par laser, on peut citer aussi en utilisant la méthode variationnelle, la diffusion relativiste en présence d'un champ multimode réalisée par Zhou et Rosenberg [21]. D'autres exemples sont exposés dans [22] où les auteurs résument les progrès de l'étude des processus fondamentaux de l'électrodynamique quantique en présence du laser.

Le processus de la diffusion de Mott assistée par un laser polarisé circulairement a été étudié par Szymanowski *et al.* [23] et linéairement par Li *et al.* [24]. Attaourti et Manaut ont étudié le même processus pour un champ de polarisation circulaire et elliptique [25, 26]. Manaut *et al.* ont traité le cas des électrons de spin polarisé [27] en utilisant les fonctions d'ondes standard de Dirac-Volkov (DV)[28] pour décrire l'électron sous l'influence simultanée du noyau et du champ laser intense. Cependant, le potentiel Coulombien étant à longue portée, l'électron habillé par le

champ laser ressent ce champ même pour  $r \rightarrow \infty$  avant et après l'interaction. Ainsi, les fonctions d'onde de Dirac-Volkov doivent être modifiées de manière à prendre en compte les corrections dues aux effets Coulombiens. En physique des collisions non relativistes assistées par laser, ces fonctions d'onde sont bien connues sous le nom des fonctions d'onde de Coulomb-Volkov (CV). Elles ont été proposées pour la première fois par Jain et Tzoar [29] et Cavalière *et al.* [30] et utilisées durant plusieurs années pour des études théoriques telles que la diffusion assistée par laser [31] et l'ionisation multiphotonique [32]. Une démarche récente, de l'introduction des effets Coulombiens dans le régime relativiste, a été faite par Liu et Kelly [33]. Ils ont amélioré la version relativiste de l'approximation du champ fort (ACF) faite par Reiss [34] de la théorie KFR [35, 37] qui consiste à négliger l'interaction entre les photoélectrons et le potentiel de l'ion résiduel. Ils ont introduit l'approximation de Sommerfeld-Maue-Volkov (SMV)[38] pour étudier l'ionisation multiphotonique dans un large domaine d'intensité du laser. Pour des intensités intermédiaires, Li *et al.* [39] ont étudié récemment, dans l'approximation Coulombienne, la diffusion de Mott en présence d'un champ laser polarisé linéairement. Ces auteurs ont utilisé une autre variante de fonction d'onde, pour tenir compte à la fois des effets de spin, de la relativité et de l'effet Coulombien. Ils ont calculé l'expression analytique de la section efficace de spin non polarisé en utilisant les fonctions d'onde de Dirac-Volkov [28] pour décrire l'électron sous l'influence simultanée du noyau et du champ laser intense. Ils ont aussi discuté l'influence de la fonction d'onde de l'électron dans l'approximation Coulombienne sur la section efficace différentielle.

Le développement des fonctions d'ondes qui représentent les systèmes mis en collision ainsi que la définition de quelques notions attachées au calcul des sections efficaces différentielles sont introduits dans le premier chapitre. Le second chapitre est une généralisation de l'étude faite par Li *et al.* [39] pour le cas de la diffusion d'un proton habillé par un noyau fixe en tenant compte de l'effet Coulombien sur le proton incident et diffusé. Une discussion, dans cette géométrie particulière, est menée sur l'effet Coulombien et l'effet de la charge  $Z$  pour différentes énergies du proton incident. A hautes énergies, les fonctions d'onde de Dirac-Volkov sont largement suffisantes pour décrire le mouvement du proton dans le champ électromagnétique.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'excitation relativiste de l'atome d'hydrogène par impact de proton en l'absence et en présence du champ laser. L'interaction matière-antimatière est un champ de recherches vaste et intéressant. L'un des plus simples processus de ce type est la diffusion positron-atome [40] et positron-molécule [41]. Selon le travail [42], la section efficace différentielle, dans la première approximation de Born, est la même pour la diffusion élastique de l'atome d'hydrogène par impact de positron ou d'électron. Ces investigations n'ont pas tenu compte de l'effet du moment magnétique anomal de l'électron. Les travaux [43, 44] ont trouvé que, en tenant compte de l'effet du moment magnétique anomal de l'électron dans les deux états initial et final, les sections efficaces différentielles augmentent de manière significative.

Le quatrième chapitre est destiné à la diffusion élastique assistée par laser, en tenant compte de l'effet du moment magnétique anomal, de l'atome d'hydrogène par impact de positron. Nous avons utilisé les fonctions d'onde de Dirac-Volkov, avec moment magnétique anomal [45], pour décrire respectivement les deux états initial et final. Le but principal est de donner un formalisme général tout en comparant le cas de la diffusion d'électron et de positron.

Tout au long de ce travail, les unités atomiques sont utilisées : la vitesse de la lumière et la constante de structure fine sont  $c = 1/\alpha = 137.036 u.a$ , le coefficient de conversion de l'énergie en  $eV$  à l'énergie en unité atomique est  $1 u.a = 27,2116 eV$ . L'unité atomique de l'intensité du champ laser est  $1 u.a = 3,5 \cdot 10^{16} W/cm^2$  et l'unité atomique du champ électrique est telle que :  $\epsilon = 1 u.a = 0,5 \cdot 10^9 V/cm$ . Le laser utilisé est de fréquence  $\omega = 0,043 u.a = 1,17 eV$  qui correspond à la transition de Neodmium de longueur d'onde de  $1064 nm$ .

- [1] L. S. Brown and T. W. B. Kibble, *Phys. Rev.* **133**, A705 (1964); T. W. B. Kibble, *ibid.* **138**, B740 (1965); **150**, 1060 (1966); J. H. Eberly and H. R. Reiss, *Phys. Rev.* **145**, 1035 (1966); H. R. Reiss and J. H. Eberly, *ibid.* **151**, 1058 (1966); J. H. Eberly and A. Sleeper, *ibid.* **176**, 1570 (1968).
- [2] T. H. Maiman, *Stimulated optical radiation in ruby*. *Nature* **187**, 493(1960).
- [3] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz and Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics* (Course of Theoretical Physics Vol 4) 2nd edn Pergamon Press,(1982)
- [4] F. H. M. Faisal, *Theory o f Multiphoton Processes* (Plenum, New York, 1987).
- [5] M. H. Mittleman, *Introduction to the Theory o f Laser-Atom Interactions* (Plenum, New York, 1993).
- [6] M. V. Fedorov, *Atomic and Free Electrons in a Strong Light Field* (World Scientific, Singapore, 1997).
- [7] P. Francken and C. J. Joachain, *J. Opt. Soc. Am.* B 7, 554, (1990).
- [8] F. Ehlotzky, A. Jaron, and J. Z. Kaminski, *Phys. Rep.* 297, 63, (1998) .
- [9] F. Ehlotzky, *Phys. Rep.* 345, 175, (2001).
- [10] F. V. Bunkin and M. V. Fedorov, *Zh. Éksp. Teor. Fiz.***49**, 1215 (1965) [*Sov. Phys. JETP* **22**, 844 (1966)].
- [11] N. M. Kroll and K. M. Watson, *Phys. Rev. A* **8**, 804 (1973).
- [12] H. Milchberg and R. Freeman, special issue of *J. Opt. Soc. Am. B* **13**, 51 (1996); **13**, 314 (1996).
- [13] P. Panek, J.Z. Kaminski and F. Ehlotzky *Phys. Rev. A* **65** 033408 (2002).

- [14] C. I. Moore, J. P. Knauer, and D. D. Meyerhofer, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2439 (1995).
- [15] P. Monot, T. Auguste, P. Gibbon, F. Jakober, G. Mainfray, A. Dulieu, M. Louis-Jacquet, G. Malka, and J. L. Miquel, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2953 (1995).
- [16] F. E. Low, *Phys. Rev.* **110**, 974 (1958).
- [17] N. F. Mott *Proc. R. Soc. London Ser. A* **124**, 135, 429, (1932).
- [18] M Born , *Z. Phys.*, **37**, 863, (1926).
- [19] M. M. Denisov and M. V. Fedorov, *Zh. Éksp. Teor. Fiz.***53**, 1340 (1967) [*Sov. Phys. JETP* **26**, 779, (1968)].
- [20] J. Z. Kamiński, *J. Phys. A* **18**, 3365 (1985).
- [21] F. Zhou and L. Rosenberg, *Phys. Rev. A*, **48**, 505, (1993).
- [22] F. Ehlotzky, ; K. Krajewska, and J. Z. Kaminski, *Rep. Prog. Phys.*, **72** , 046401, (32pp), (2009).
- [23] C. Szymanowski, V. Véniard, R. Taïeb, A. Maquet, and C. H. Keitel, *Phys. Rev. A* **56**, 3846 (1997).
- [24] S.-M. Li, J. Berakdar, J. Chen, and Z.-F. Zhou, *Phys. Rev. A* **67**, 063409 (2003).
- [25] Y. Attaourti and B. Manaut, *Phys. Rev. A* **68**, 067401 (2003).
- [26] Y. Attaourti, B. Manaut and S. Taj, *Physical Review A* 70 (2), 023404, (2004).
- [27] B. Manaut, S. Taj, and Y. Attaourti, *Phys. Rev. A* **71**, 043401, (2004).
- [28] D.M. Volkov *Z. Phys.* **94**, 250, (1935).
- [29] M. Jain and N. Tzoar *Phys. Rev. A*, 18, 538, (1978).
- [30] P. Cavaliere, G. Ferrante and C. Leone *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **13** (1980) 4495.
- [31] S.-M. Li, Y.-G. Miao, Z-F. Zhou, J. Chen and Y.-Y. Liu *Phys. Rev. A* **58** 2615(1998).
- [32] G. Duchateau, C. Illescas, B. Pons, E. Cornuer and R. Gayet *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **33a** L571(2000) ; G. Duchateau, E. Cornier and R. Gayet *Eur. Phys. J. D* **11** 191(2000) ; S.-M. Li, J. Chen and Z-F. Zhou *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **35**, 557(2002) ; J.Z. Kaminski, A. Jaron and F. Ehlotzky *Phys. Rev. A* **53** 1756, (1996) ; H.R. Reiss and V.P. Krainov, *Phys. Rev. A* **50**, R910(1994).
- [33] Z.W. Liu and H.P. Kelly *Phys. Rev.***47** 1460(1993).
- [34] H.R. Reiss *J. Opt. Soc. Am. B* **7** (1990) 574.
- [35] L.V. Keldysh *Zh. Eksp., Teor. Fiz.*, **47**, 1945, (1965) ; [*Sov. Phys. JETP* **20**, 1307, (1965)].
- [36] F. Faisal *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **6** L89(1973).
- [37] H.R. Reiss *Phys. Rev. A* **22** 1786(1980).

- [38] A. Sommerfeld and A.W. Maue Ann. d., *Physik.*, 22, 629, (1935).
- [39] S-M Li, J. Berakdar, J. Chen and Z-F Zhou, *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **37**, 653 (2004).
- [40] M Kimura, M Takekawa, Y Itikawa, H Takaki and O Sueoka *Phys. Rev. Lett.* **80** 3936 (1998);  
K Iwata, G F Gribakin, R G Greaves, C Kurz and C M Surko *Phys. Rev. A* **61** 022719 (2000);  
K Iwata, R G Greaves, T J Murphy, M D Tinkle and C M Surko *Phys. Rev. A* **51** 473 (1995);  
G F Gribakin *Phys. Rev. A* **61** 022720 (2000); S Zhou, H Li, W E Kauppila, C K Kwan and  
T S Stein *Phys. Rev. A* **55** 361 (1997); S A Elkilany *Indian J. Phys.*, **88**, 19, (2014)
- [41] G F Gribakin, J A Young and C M Surko *Rev. Mod. Phys.* **83** 2577 (2010); C M Surko, G  
F Gribakin and S J Buckman *J. Phys. B* **38** R57(2005)
- [42] B. Manaut, S. Taj and M. El Idrissi, *Can. J. Phys.* **91**, 696 (2013).
- [43] M. El Idrissi, S. Taj, B. Manaut and L. Oufni, *Ind. J. Phys.* **88**, 111 (2014).
- [44] J. M. Ngoko Djiokap, H. M. Tetchou Nganso, and M. G. Kwato Njock, *Phys. Scr.* **75**, 726  
(2007).; Preprint Publications. Coulomb effects in relativistic laser-assisted Mott scattering,  
IC/2004/82.
- [45] Youssef I. Salamin *J. Phys. A : Math. Gen.* **26** 6067-6071(1993).

# CHAPITRE 1

## GÉNÉRALITÉS ET SUPPORT THÉORIQUE

### 1 Physique prérelativiste

À la fin du 19e siècle, la physique a atteint un niveau de développement remarquable. De nombreux phénomènes naturels sont expliqués. La mécanique de Newton constitue le fondement de l'étude des fluides et bien d'autres. La théorie de l'électromagnétisme de Maxwell fournit une explication unifiée des phénomènes magnétiques et électriques. selon la théorie de la gravitation universelle de Newton(1867), une distribution de masse  $\rho$  produit un champ gravitationnel  $g$  donné par l'équation :

$$\vec{\nabla} \vec{g} = -4\pi G \rho_M \quad (1.1)$$

Ainsi, toute masse  $m$  se trouvant dans le champ  $g$  est soumise à la force de gravitation :

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

En électromagnétisme, les équations de Maxwell unifiant tous les phénomènes électriques et magnétiques, permettent de calculer les champs électriques  $E(x,y,z,t)$  et magnétiques  $B(x,y,z,t)$  créés par une distribution de charges  $\rho(x, y, z, t)$  et courants électriques  $j(x, y, z, t)$ .

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{aligned}$$

Toute charge  $q$  de vitesse  $v$  plongée dans le champ électromagnétique  $E(x, y, z, t)$ ,  $B(x, y, z, t)$  est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Alors toute particule de masse  $m$  et de charge  $q$  est soumise aux forces électromagnétiques et gravitationnelles, son accélération  $\vec{a}$  est donnée par le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

La mécanique classique (Newtonienne) était plutôt fondée sur le principe d'inertie et le PFD.

**-Le Principe d'inertie :** " il existe des référentiels dits d'inertie, dans lesquels le mouvement d'un corps sur lequel aucune force ne s'applique est rectiligne uniforme." Dans un tel référentiel, les lois de la physique prennent une forme particulière, plus simple que dans les autres référentiels, alors que dans un référentiel non-inertiel, il faut faire apparaître des forces supplémentaires dans le membre de droite (du PFD ), appelées forces d'inertie.

### -Transformations de Galilée

Soient  $R(x, y, z)$  et  $R'(x', y', z')$  deux référentiels tels que  $R'$  est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $\vec{v}$  par rapport à  $R$ . Soit à utiliser des rotations ou des translations (y compris un changement d'origine des dates), on peut supposer qu'à l'instant  $t = 0$ , les deux référentiels ont la même origine et les mêmes axes, et que la vitesse  $\vec{v}$  est dans la direction de l'axe des  $x$ .

Il est alors facile de voir que le changement de référentiel s'écrit :

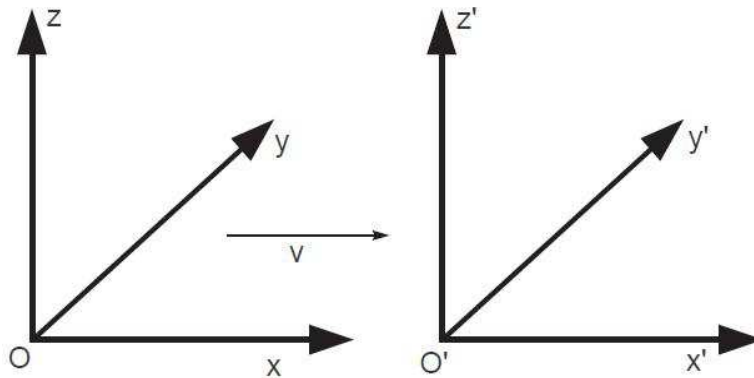


FIGURE 1 – Choix des axes dans deux référentiels  $R$  et  $R'$  en mouvement relatif. Les axes des deux repères sont parallèles. Les axes  $Ox$  et  $O'x'$ , alignés avec la vitesse relative  $v$ , coïncident à chaque instant.



$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. \quad (1.2)$$

En composant ce type de transformation avec des rotations ou des translations, on obtient toutes les transformations possibles qui correspondent à des changements de référentiels dont les axes sont orthonormés directs. L'ensemble de ces transformations forme un groupe appelé groupe de Galilée.

Le paradoxe qui apparaît ainsi entre les conclusions de la mécanique non relativiste de Newton et celles des lois de l'électromagnétisme de Maxwell est plus dramatique. En effet, le principe de relativité Galiléen se trouve inscrit dans les équations dynamiques mêmes de la mécanique de Newton. En particulier, les prédictions physiques des équations utilisées ne sauraient donc dépendre du choix du référentiel inertiel. Néanmoins, les équations de Maxwell prédisent l'existence de processus ondulatoires électromagnétiques dont la vitesse de propagation est déterminée de manière unique, en terme d'une seule même valeur numérique, par ces équations, et ceci à priori pour tout choix de référentiel inertiel. Or, en vertu du théorème d'addition des vitesses, cette valeur devrait dépendre du choix du référentiel inertiel, tandis que les équations de Maxwell conduisent à une seule valeur sans que le choix de référentiel ne soit spécifié. En d'autres termes, les équations de Maxwell ne sont certainement pas invariantes sous les transformations de Galilée.

Alors quels sont les principes et équations fondamentaux qu'il faut modifier, ceux de la mécanique de Newton ou ceux de l'électromagnétisme ?

Seule l'expérience a pu finalement trancher laquelle de ces possibilités n'était pas en conflit avec les phénomènes observés dans la nature. L'expérience de Michelson et Morley a montré que la vitesse de la lumière est indépendante du mouvement de l'observateur. D'autres expériences ont utilisé différentes sources (soleil, étoiles, . . . ) et ont obtenu les mêmes résultats. La mesure de la vitesse de la lumière dans le vide donne toujours le même résultat.

## 2 Relativité restreinte

### 2.1 Principes de relativité

Einstein finit par comprendre que la solution pour se tirer de ces contradictions consistait à condamner les notions classiques d'éther et de la cinématique galiléenne et c'est une toute nouvelle physique qui se trouve effectivement élaborée sur la base de deux postulats fondamentaux :

- **Postulat 1** (principe de relativité) : Les lois de la physique sont les mêmes pour tous les observateurs inertiels.

Ce premier postulat étendait le principe de la relativité Newtonienne non seulement aux lois de la mécanique mais aussi au reste de la physique, y compris l'électricité et le magnétisme.

- **Postulat 2** (invariance de la vitesse de la lumière) : La vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels inertiels.

La vitesse de la lumière est une constante universelle qui a la même valeur  $c$  dans tous les référentiels Galiléens. Elle est donc indépendante du mouvement de la source et de la direction de propagation (isotrope).

Un autre postulat doit être maintenu qui est celui du principe de causalité : « l'ordre temporel de deux événements est conservé lors de tout changement de référentiel Galiléen ».

Les deux postulats sont solidaires du choix qu'impose le résultat négatif de l'expérience de Michelson. Il faut rejeter les transformations de Galilée incompatibles avec la constance de la vitesse de lumière  $c$ . Les équations de l'électromagnétisme pourront être gardées à condition qu'elles soient invariantes sous les nouvelles transformations qui s'imposent en remplacement de celles de Galilée : les transformations de Lorentz.

### 2.2 Transformation de Lorentz

La transformation classique de Galilée étant incapable de satisfaire au principe de relativité en ce qui concerne les équations de Maxwell du champ électromagnétique. C'est Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) qui le premier, s'est posé la question de déterminer le groupe d'invariance des équations de Maxwell, découvrant ainsi le groupe de Lorentz qui porte son nom, mais Einstein les a établies à partir du postulat de relativité restreinte, puis interprétées physiquement en (1905).

soient deux référentiels  $R$  et  $R'$  munis de repères aux axes  $y$  et  $z$  parallèles et  $x$  confondus, en mouvement relatif de vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_x$  dans la direction de l'axe  $x$ . Les origines des temps communes  $t = t' = 0$  ont été fixées à l'instant passé où  $O$  et  $O'$  coïncidaient.

La transformation de Lorentz-Poincaré s'écrit simplement, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

avec

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Les transformations de Lorentz incluent toutes les transformations entre référentiels Galiléens laissant invariante la vitesse de la lumière. Elles ne se réduisent donc pas aux transformations de changement de vitesse ou boosts mais incluent également les rotations et les translations de l'espace tridimensionnel. L'ensemble de toutes ces transformations possède une structure de groupe. Il est appelé groupe inhomogène de Lorentz ou groupe de Poincaré. En excluant les translations, on obtient le groupe homogène de Lorentz.

## 2.3 Quelques résultats généraux de la relativité restreinte

### — Dilatation du temps

Considérons deux événements qui se produisent au même endroit dans  $R_0$ . Ces deux événements sont séparés de  $\Delta t$  et  $\Delta x$  dans le référentiel  $R$ , et de  $\Delta t'$  dans  $R'$ . La position spatiale dans  $R'$  ne varie pas donc  $\Delta x' = 0$ . Alors :

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Le temps mesuré est supérieur au temps propre, c'est la dilatation du temps selon laquelle les horloges en mouvement avancent plus lentement que les horloges au repos.

### — Perte de la simultanéité

On peut mesurer la variation des coordonnées qui sépare deux événements distincts dans  $R$  :  $(\Delta t; \Delta x; \Delta y; \Delta z)$ . Si ces événements sont simultanés dans  $R$ , alors  $\Delta t = 0$ . Dans  $R'$ ,  $\Delta t' = \gamma v \Delta x' / c^2$  : ils ne sont plus simultanés dans le cas général. Deux événements simultanés dans  $R$  ne le sont plus dans  $R'$ . La notion de simultanéité pour deux événements distants n'a plus un sens absolu indépendant du référentiel. Seule la simultanéité de deux événements au même point est valide dans tous les référentiels.

— **Contraction des distances**

Considérons une règle de longueur  $\Delta x = x_2 - x_1$  immobile dans  $R$  : c'est donc sa longueur propre. On veut mesurer sa longueur dans  $R'$ . Cela veut dire mesurer ce qui sépare les deux événements de coordonnées  $(x'_1, y_0, z_0, t_0)$  et  $(x'_2, y_0, z_0, t_0)$  à la même date  $t'$  : ces deux événements sont simultanés dans  $R'$ . Alors  $\Delta x = \gamma \Delta x'$  car  $\Delta t' = 0$ .

Ainsi :

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}$$

La longueur mesurée est inférieure à la longueur propre

— **Invariant fondamental**

En relativité restreinte, nous avons vu que les longueurs se contractent et le temps se dilate. On conserve néanmoins un invariant, appelé intervalle entre deux événements et qu'on note  $\Delta S$ .

$$\Delta S^2 = (ct)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

$\Delta S^2$  peut être interprété comme le carré de la distance dans l'espace de Minkowski entre les deux événements considérés. Cette forme quadratique généralise l'expression habituelle de la distance dans l'espace Euclidien tridimensionnel entre deux points voisins de coordonnées cartésiennes.

Les prédictions de la théorie de la relativité restreinte ont été mises à l'épreuve dans un grand nombre d'expériences, et aucune contradiction entre les résultats de ces expériences et la théorie n'a été trouvée. La grande majorité des scientifiques ont alors accepté la théorie de la relativité comme une description exacte de la nature. L'une des plus grandes applications de nos jours est le système GPS (Global Positioning System).

### 3 Formalisme quadridimensionnel

La similitude entre les notions de temps et d'espace suggère d'adopter un formalisme quadridimensionnel. Le vecteur position espace-temps est représenté par ses composantes contravariantes  $x^\mu$  :

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) = (ct, \mathbf{r})$$

$x^0$  la composante temporelle tandis que  $(x^1, x^2, x^3)$  sont les coordonnées spatiales usuelles.

Par exemple le vecteur  $A$  s'écrit dans un espace à quatre dimensions :

$$A = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu e_\mu = A^\mu e_\mu$$

La convention d'Einstein ou indice répété contravariant-covariant signifie la sommation sur toutes ses valeurs possibles.

Le produit scalaire a la forme

$$A.B = A^\mu e_\mu . B^\nu e_\nu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu}$$

avec  $g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu$  est le tenseur métrique. Si on choisit une base orthogonale  $g_{\mu\nu} = 0$  si  $\mu \neq \nu$

Dans l'espace de Minkowski la longueur généralisée d'un vecteur est reliée à l'intervalle par :

$$x^2 = x^\mu x^\mu e_\mu^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

La norme du vecteur de base

$$e_\mu^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = 0 \\ -1 & \text{si } \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.1)$$

Donc le tenseur métrique s'écrit :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a  $g_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu}$  puisque  $g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} = \delta_\lambda^\nu$  et  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4 \times \mathbb{1}_4$ , avec  $\mathbb{1}_4$  la matrice unité. Le vecteur contravariant  $x_\mu$  est obtenu on abaissant l'indice comme suit :

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\mathbf{r})$$

La définition du quadri-impulsion est telle que ;

$$\begin{aligned} p^\mu &= (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \\ p_\mu &= (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{E}{c}, p^x, p^y, p^z\right) = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p}\right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

La relation énergie-impulsion est donnée par ;

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \sum_{\mu=0}^{\mu=3} = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2 c^2 \quad (3.3)$$

L'énergie relativiste de la particule est donnée par  $E = \gamma mc^2$ , son énergie cinétique est  $T = (\gamma - 1)mc^2$ , alors que l'énergie de masse au repos est  $E_0 = mc^2$ .

Un autre pilier de la physique moderne est la théorie de la mécanique quantique qui a bouleversé, au début du XXIème siècle, notre compréhension des phénomènes à très petite échelle, celle des particules élémentaires et des atomes. La théorie quantique des champs relativistes qui en est l'aboutissement est le cadre théorique obligatoire pour comprendre les interactions entre particules via les forces électromagnétiques, nucléaires faibles et fortes aujourd'hui décrites par le modèle standard des particules élémentaires.

## 4 Equation de Klein-Gordon

Les équations de mouvement relativistes obeissent dans le cas d'une particule libre à la relation d'énergie-impulsion.

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2, \quad (4.1)$$

avec  $mc^2$  l'énergie de masse au repos, selon la règle de correspondance de la mécanique quantique on procède au substitutions en terme d'opérateurs :

$$p^\mu = (E, p) = (i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \nabla) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar \partial^\mu$$

la relation d'énergie-impulsion s'écrit :

$$-\hbar^2 \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi(x) = m^2 c^2 \psi(x) \quad (4.2)$$

qui est une équation différentielle du second ordre appelée équation de Klein-Gordon

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi(x) \quad (4.3)$$

où

$$(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 c^2) \Psi(x) = (p^2 - m^2 c^2) \Psi(x) = 0 \quad (4.4)$$

Cette équation est covariante sous une transformation de Lorentz et la fonction  $\psi(x)$  se transforme comme un scalaire. Dans la limite non relativiste  $E \ll mc^2$  l'équation de Klein-Gordon libre

restitue l'équation de schrodinger non relativiste, elle décrit donc les particules de spin zéro, et admet des solutions en ondes planes :

$$\psi(x) = A \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) = A \exp(-ik_\mu x^\mu) \quad (4.5)$$

avec  $k_\mu = (k_0, -\mathbf{k}) = \left(\frac{\omega}{c}, -\mathbf{k}\right)$ . En remplaçant dans l'équation, on aboutit à :

$$E = \pm c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \quad \text{et} \quad \omega = \pm c\sqrt{k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}}$$

Ce qui conduit à des solutions d'énergies positives et négatives, si l'on écrit le quadri-vecteur densité de courant  $J_\mu$  tel que :

$$J^\mu(x) = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \psi^*) \quad (4.6)$$

La relation vérifiée par la densité de courant  $\nabla_\mu J^\mu(x) = 0$  peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla J = 0 \quad (4.7)$$

Qui a la forme d'une équation de continuité, avec

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) \quad (4.8)$$

On voit que  $\rho$  n'est pas nécessairement positive. En effet prenons l'onde plane (4.5) on aura  $\rho = \frac{E}{mc} |A|^2$  on a donc signe ( $\rho$ ) = signe (E), et  $\rho$  ne peut être considérée comme une densité de probabilité de position. Cependant il est possible de donner un sens physique à  $\rho$  en l'identifiant non pas à une densité de probabilité, mais à une densité de charge électrique en multipliant par la charge électrique. Le fait que  $\rho$  soit positive (négative) pour les solutions d'énergie positive (négative) suggère de réinterpréter les solutions d'énergie négative comme des antiparticules portant une charge électrique opposée à celle des particules (solutions d'énergie positive).

## 5 Equation de Dirac

Dirac a tenté de linéariser l'équation de Klein-Gordon et à régler les problèmes de densité de probabilité négative et des solutions d'énergies négatives. Il a introduit une équation qui ne contient que des opérateurs différentiels du premier ordre. L'idée de Dirac est de travailler avec une équation du 1<sup>er</sup> ordre dont le carré redonne l'équation de Klein-Gordon. Il postule l'existence de deux opérateurs  $\alpha$  et  $\beta$  dont le premier est lié à l'énergie cinétique et le second à l'énergie au repos de la particule

$$\hat{H} = c\hat{\alpha}\hat{p} + \hat{\beta}mc^2. \quad (5.1)$$

Les opérateurs  $\alpha$  et  $\beta$  sont déterminés en imposant à l'équation de reproduire  $E^2 = p^2 + m^2c^4$

Le calcul du carré de  $H$  donne :

$$\begin{aligned}
H^2 &= (c\alpha p + \beta mc^2)^2 \\
&= c^2\alpha_i p_i \alpha_k p_k + mc^2(\alpha_i p_i \beta + \beta \alpha_k p_k) + m^2 c^4 \beta \\
&= \frac{c^2}{2}[\alpha_i, \alpha_k] p_i p_k + m^2 c^3 \{\alpha_i, \beta\} p_k + m^2 c^4 \beta \\
&= p^2 c^2 + m^2 c^4
\end{aligned}$$

Ce qui impose à  $\alpha$  et  $\beta$  de former des anticommutateurs et d'être de carré égal à 1 et de trace nulle :

$$\begin{aligned}
\{\alpha_i, \alpha_j\} &= 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0 \\
\alpha_i \alpha_i &= \beta^2 = \mathbb{1}_4, \quad Tr \alpha_i = Tr \beta_i = 0
\end{aligned}$$

avec  $\mathbb{1}_4$  est la matrice unité et les matrices  $\alpha$  et  $\beta$  sont de dimension 4 données dans la représentation de Dirac comme suit :

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Les matrices  $\sigma$  sont définies comme suit :

$$\sigma_0 = \mathbb{1}_2; \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

## 5.1 Covariance de l'équation de Dirac

Un point important réside dans le fait que le formalisme de l'équation de Dirac est compatible avec la relativité restreinte telle qu'elle est décrite mathématiquement par la théorie de Lorentz, Poincaré et Einstein.

Le point de départ est l'équation de Dirac (5.1) que l'on multiplie à gauche par  $\beta$  et que l'on divise par  $c$  puis, on regroupe les dérivées premières par rapport à l'espace et au temps :

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar})\psi = 0. \quad (5.4)$$

Les matrices  $\gamma^\mu$ , qui apparaissent dans l'équation de Dirac, sont telles que :

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \beta \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$



ou de façon équivalente :

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha}) \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

On introduit la notation "slash" de Feynman

$$\not{a} = \gamma^\mu a_\mu = \gamma^0 a_0 + \gamma^k a_k.$$

L'équation de Dirac devient sous la forme suivante :

$$(i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$$

La covariance relativiste est assurée par le fait que, lors d'un changement de référentiel Galiléen  $R$  à un autre référentiel Galiléen  $R'$ , l'équation (5.4) garde la même forme :

$$(i\not{\partial}' + \frac{mc}{\hbar})\psi' = 0$$

où  $x' = \Lambda x$  et  $\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(x)$ , avec  $\Lambda$  et  $S(\Lambda)$  sont les matrices de Lorentz. L'équation sera invariante de forme si

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\nu$$

Pour plus de détails, le lecteur peut consulter la référence [7].

## 5.2 Interpretation de Feynman-stuckelberg

La densité de courant pour une particule de charge  $-e$  et de quadri-impulsion  $(E, \vec{p})$  est :

$$J^\mu = -2e |N|^2 p^\mu = -2 |N|^2 (E, \vec{p}).$$

Tandis que la densité de courant pour une particule de charge  $+e$  et de quadri-impulsion  $(E, \vec{p})$  est :

$$J^\mu = +2e |N|^2 p^\mu = -2 |N|^2 (-E, -\vec{p})$$

Ceci montre que la solution d'énergie positive pour le positron est équivalente à la solution pour d'énergie négative pour l'électron.

La fonction d'onde  $N e^{ip_\mu x^\mu}$  est invariante par transformation :  $p^\mu \rightarrow -p_\mu$  et  $x_\mu \rightarrow -x_\mu$ .

Ainsi, les fonctions d'ondes qui décrivent les particules décrivent également les anti-particules. Les solutions d'énergie négative donnent des particules qui remontent le temps.

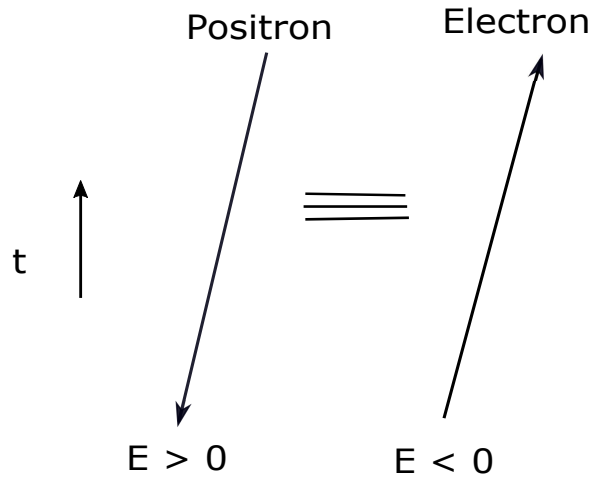


FIGURE 2 – Equivalence entre un positron remontant le temps et un électron .

En conséquence de l'interprétation de Feynman-Stückelberg, le processus d'absorption d'un positron d'énergie  $-E$  est la même que l'émission d'un électron d'énergie  $E$  (voir figure 2). Dans les calculs des amplitudes de diffusion, en utilisant les diagrammes de Feynman, tous les processus de diffusion sont calculés en termes de particules et non d'antiparticules. A titre d'exemple, le processus de diffusion d'un positron entrant par un potentiel est assimilé à un électron qui remonte le temps (sortant).

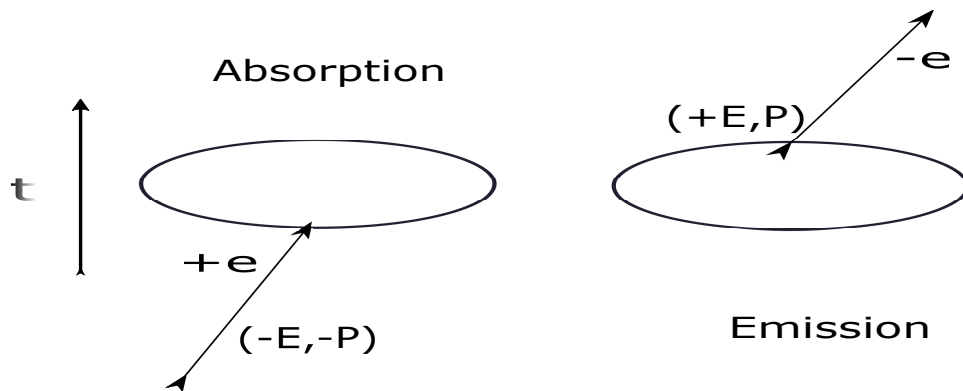


FIGURE 3 – Equivalence entre le processus d'absorption d'un positron d'impulsion  $p_\mu = (-E, -\vec{p})$  et l'émission d'un électron d'impulsion  $p_\mu = (E, \vec{p})$ .

## 6 Les lasers

En 1916, Albert Einstein définit les lois d'émission de photons (lumière) par stimulation (pompage optique) et annonce le principe de l'émission stimulée qui ouvre la porte à une nouvelle technologie : le LASER " Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation ", soit en français : l'amplification de lumière par émission stimulée de radiations.

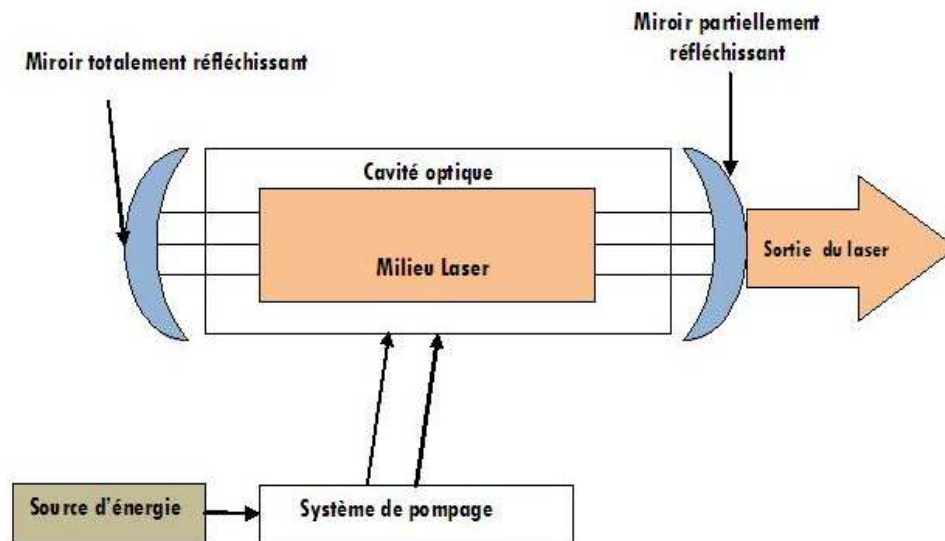


FIGURE 4 – Principe de fonctionnement d'un laser

Le faisceau laser est généré dans un résonateur constitué de deux miroirs dont l'un est partiellement transparent et contenant un milieu actif généralement solide ou gazeux. Le milieu actif est excité par une source d'énergie qui induit dans la cavité une émission stimulée. Les lois de l'émission stimulée font que les photons réémis ont tous la même fréquence et la même phase. À partir d'un certain seuil, il y a amplification et émission d'un très grand nombre de photons qui constituent une onde électromagnétique cohérente. La fréquence de celle-ci est celle des photons qui la gènèrent et elle est fixée par la nature du milieu excité.

Dans le cas des lasers continus, l'étendue des puissances de sortie va du mW à 50 kW. Le plus gros laser industriel d'Europe a été implanté à Yutz-Thionville en 1994. Il s'agit d'un laser CO<sub>2</sub> (dioxyde de carbone) dont la puissance de sortie continue est de 45 kW. Il est dédié à des applications de soudage sur une forte épaisseur.

Un laser impulsif peut générer, de façon discontinue, des impulsions de courte durée. Dans ce cas, il faut distinguer :

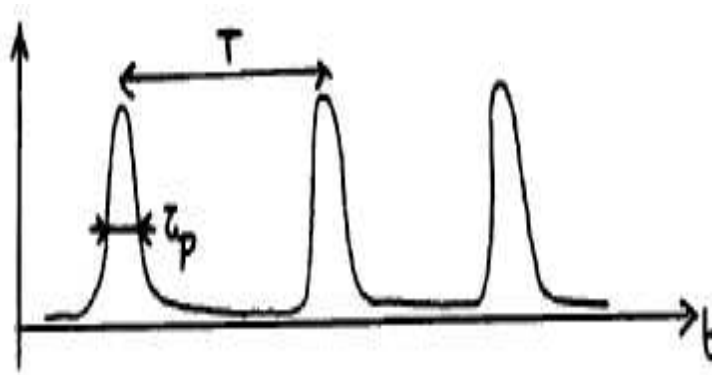


FIGURE 5 – Impulsions délivrées par un laser pulsé

- la puissance moyenne de sortie, qui tient compte également des intervalles de temps entre chaque impulsion ;

- la puissance de crête, qui est la puissance atteinte lors de l'impulsion.

La Cadence est la fréquence de répétition  $= 1/T$ . Le fait de pulser un laser permet d'atteindre des puissances  $P_{max}$  très élevées en des temps très courts, pour la même énergie par impulsion. L'intérêt de laser impulsionnel par rapport au régime continu est d'avoir un laser beaucoup plus puissant pour une même consommation d'énergie. Par exemple, un laser de un watt donnant sa lumière de façon continue aura une puissance de 1 joule/s, mais s'il concentre une énergie de un joule en une décharge lumineuse d'une milliseconde, sa puissance de crête va être multipliée par mille et sera de un kilowatt. Ces dernières années, la technologie laser a considérablement progressé, ce qui a augmenté l'intensité de quelques ordres de grandeur au-delà de la limite relativiste et réduit la durée d'impulsion au régime de l'attoseconde.

Le laser en verre Vulcan au laboratoire Rutherford Appleton est capable de délivrer une impulsion de nanoseconde d'une énergie jusqu'à  $2,6 kJ$ . Il a également permis une performance en petawatt en 2004 :  $423 J$  dans une impulsion de  $410 fs$  de puissance de  $1,03 PW$  qui a été focalisé à l'intensité de  $10^{21} W/cm^2$ .

Dans la plupart des études de processus de l'électrodynamique quantique, le champ laser est décrit classiquement par son quadri-potentiel  $A$ , il définit les caractéristiques du champ laser : intensité, fréquence, polarisation,...

Dans le cas d'une polarisation linéaire le potentiel vecteur s'écrit :

$$A = a \cos \phi,$$

avec  $\phi$  la phase défini par  $\phi = (k \cdot x) = k_\mu x^\mu$ ,  $k$  le quadri-vecteur d'onde.

Le cas d'un champ monochromatique polarisé circulairement est décrit par son quadri-vecteur potentiel tel que :

$$A^\mu = a_1^\mu \cos \phi + a_2^\mu \sin \phi. \quad (6.1)$$

Le cas de polarisation elliptique le quadri-vecteur est décrit comme suit :

$$A^\mu = a_1^\mu \cos(\phi) + a_2^\mu \sin(\phi) \tan(\eta/2) \quad (6.2)$$

où  $\eta$  est le degré d'ellipticité. On obtient le cas de polarisation linéaire pour  $\eta = 0$ , et la polarisation circulaire pour  $\eta = \pi/2$ .

## 7 Électron dans un champ électromagnétique

### 7.1 Équation de Dirac pour un électron dans un champ électromagnétique

L'équation de Dirac du premier ordre pour un électron libre de quadri-impulsion  $p^\mu$  s'écrit :

$$(p^\mu - m)\psi = 0, \quad (7.1)$$

avec  $\psi$  la fonction d'onde bispinorielle qui décrit le mouvement de l'électron. En présence du champ électromagnétique extérieur de quadri-potential  $A^\mu(\phi, \mathbf{A})$ ,  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur et  $\phi$  est le potentiel scalaire. Le principe du couplage minimal donne la substitution  $p^\mu \rightarrow p^\mu - eA/c$ , l'équation devient :

$$\left[ \gamma(p - \frac{eA}{c}) - mc^2 \right] \psi = 0. \quad (7.2)$$

L'hamiltonien correspondant est  $H = c\alpha(p - eA/c) + \beta mc^2 + e\phi$ . L'équation de Dirac est invariante sous les transformations de jauge  $A \rightarrow A + iP\xi$  (avec  $\xi$  fonction arbitraire) et  $\psi \rightarrow \psi e^{ie\xi}$ . En présence du champ électromagnétique, elle est souvent utilisée sous sa forme en seconde ordre. Pour cela appliquons l'opérateur  $\gamma(p - eA/c) + mc$  à l'équation (7.2), on obtient :

$$\left[ \gamma^\mu \gamma^\nu (p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) (p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu) - m^2 c^2 \right] \psi = 0 \quad (7.3)$$

Le produit  $\gamma^\mu \gamma^\nu$  peut être écrit comme suit :

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) + \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}, \quad (7.4)$$

avec  $\sigma^{\mu\nu}$  est le tenseur antisymétrique défini par :

$$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu} - \sigma^{\nu\mu}). \quad (7.5)$$

Le premier produit de l'équation (7.3) devient :

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu (p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) (p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu) &= (g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}) (p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) (p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu) \\
&= (p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu)^2 + \frac{1}{2} (\sigma^{\mu\nu} - \sigma^{\nu\mu}) (p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) (p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu) \\
&= (p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu)^2 + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \left[ (p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu), (p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu) \right] \quad (7.6)
\end{aligned}$$

Soit  $[p_\mu, p_\nu] = [A_\mu, A_\nu] = 0$ , alors on a :

$$\left[ (p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu), (p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu) \right] = -\frac{ie}{c} (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = -\frac{ie}{c} \mathbf{F}_{\mu\nu} \quad (7.7)$$

avec  $\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - \partial_\mu \mathbf{A}_\nu$  est le tenseur du champ électromagnétique. Après calcul, l'équation de Dirac du seconde ordre devient :

$$\left[ (p - \frac{e}{c} A)^2 - \frac{ie}{2c} \mathbf{F}_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} - m^2 c^2 \right] \psi = 0 \quad (7.8)$$

Prenons  $\sigma^{\mu\nu} = (\alpha, i\Sigma)$  et  $\mathbf{F}_{\mu\nu} = (-\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , l'équation (7.8) devient :

$$\left[ (p - \frac{e}{c} A)^2 - m^2 c^2 + e\Sigma\mathbf{B} - ie\alpha\mathbf{E} \right] \Psi = 0. \quad (7.9)$$

Le terme  $\sigma^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu}$  représente l'interaction entre le spin de l'électron et le champ électromagnétique.

## 7.2 Solution de Dirac-Volkov pour l'électron dans le champ d'une onde électromagnétique plane

Dans ce cas, l'équation de Dirac pour l'électron admet une solution exacte [1]. Les unités naturelles sont utilisées dans l'équation de Dirac (7.8) pour conserver les paramètres ( $e$  : charge de la particule,  $c$  : vitesse de la lumière dans le vide et  $m$  : masse de la particule). Cette conservation est adoptée pour généraliser l'étude à d'autres particules telle que le proton (Voir chapitre 3).

On commence par le calcul du premier terme  $(p - eA/c)^2$  : avec  $p^\mu = i\partial^\mu$ .

$$\begin{aligned}
(p_\mu - \frac{e}{c} A)^2 &= (p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) (p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu) \psi \\
&= p^\mu p_\mu - \frac{e}{c} p^\mu (A_\mu \psi) - \frac{e}{c} A^\mu (p_\mu \psi) + \frac{e^2}{c^2} (A^\mu A_\mu) \psi \\
&= p^2 \psi - \frac{e}{c} [p^\mu (A_\mu \psi) + A^\mu (p_\mu \psi)] + \frac{e^2}{c^2} (A^\mu A_\mu) \psi \\
&= -\partial^2 \psi - \frac{ie}{c} [(A_\mu (\partial_\mu \psi) + (A^\mu (\partial_\mu \psi))] + \frac{e^2}{c^2} (A^\mu A_\mu) \psi \\
&= -\partial^2 \psi - \frac{2ie}{c} A^\mu (\partial_\mu \psi) + \frac{e^2}{c^2} (A^\mu A_\mu) \psi. \quad (7.10)
\end{aligned}$$

Le deuxième terme à calculer est  $ieF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}/(2c)\psi$  avec  $\phi = k_\mu x^\mu = (k.x)$ . Le tenseur du champ électromagnétique est donné par :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = k_\mu \frac{\partial_\nu}{\partial\phi} - k_\nu \frac{\partial_\mu}{\partial\phi}.$$

On écrit :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi &= \frac{i}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi \\ &= \frac{i}{2}(k_\mu \frac{\partial_\nu}{\partial\phi} - k_\nu \frac{\partial_\mu}{\partial\phi})(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi \\ &= \frac{i}{2}(\not{k}A' - A'\not{k} - A\not{k} + \not{k}A')\psi \\ &= i(\not{k}A' - A'\not{k})\psi. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Dans la condition de jauge de Lorentz  $k_\mu A^\mu = 0$ , le terme  $(\not{k}A' - A'\not{k})$  s'annule tel que :

$$\begin{aligned} (\not{k}A' - A'\not{k}) &= 2(kA') - A'\not{k} + A'\not{k} \\ &= 2(kA') = 2(k_{\mu\nu}A^{\mu\nu}) \\ &= 2\frac{\partial}{\partial\phi}(k_\mu A^\mu) = 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

L'expression finale devient :

$$\frac{ie}{2c}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi = 2i\not{k}A'\psi \quad (7.13)$$

Avec toutes ces substitutions, l'équation de Dirac devient la forme :

$$\left[ -\partial_\mu\partial^\mu - \frac{2ie}{c}A^\mu\partial_\mu + \frac{e^2}{c^2}A^\mu A_\mu - m^2c^2 - \frac{ie}{c}\not{k}A' \right] \psi. \quad (7.14)$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme :

$$\psi = e^{-ipx}\mathbf{F}(\phi),$$

Le quadrivecteur  $p$  satisfait à la condition  $p^2 = p_\mu p^\mu = m^2c^2$  et  $\partial F = k^\mu F'(\phi)$  avec " prime " signifie la dérivée par rapport à  $\phi$

$$\partial^2 F = k^\mu k_\mu F''(\phi) = 0 \quad ; \quad (k^2 = k^\mu k_\mu = 0).$$

On calcule d'abord :  $-\partial^2\psi = ?$

$$\begin{aligned} \partial^2\psi &= \partial^2(e^{-ipx}F(\phi)) \\ &= [\partial^2 e^{-ipx}]F(\phi) + 2[\partial e^{-ipx}][\partial F(\phi)] + e^{-ipx}\partial^2 F(\phi) \\ &= -p^2 e^{-ipx}F(\phi) - 2i(p_\mu \cdot k^\mu)e^{-ipx}F'(\phi) \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\longrightarrow -\partial^2\psi = m^2c^2e^{-ipx}F(\phi) + 2i(P_\mu.k^\mu)e^{-ipx}F'(\phi).$$

On évalue à présent le deuxième terme :  $-2ieA^\mu\partial_\mu/c$

$$\begin{aligned} -\frac{2ie}{c}A_\mu(\partial^\mu\psi) &= -\frac{2ie}{c}A_\mu(\partial_\mu e^{-ipx}F(\phi)) \\ &= -\frac{2ie}{c}A_\mu[-ip^\mu e^{-ipx}F(\phi) + e^{-ipx}k^\mu F'(\phi)] \\ &= -\frac{2e}{c}(A_\mu p^\mu)e^{-ipx}F(\phi) - \frac{2ie}{c}(A_\mu k^\mu)e^{-ipx}F'(\phi) \end{aligned} \quad (7.16)$$

La condition de jauge de Lorentz annule le terme à droite.

$$-\frac{2ie}{c}A_\mu(\partial^\mu\psi) = -\frac{2e}{c}(A_\mu p^\mu)e^{-ipx}F(\phi).$$

Après calcul, l'équation devient :

$$2i(kP)F'(\phi) + \left\{ -\frac{2e}{c}(pA) + \frac{e^2}{c^2}A^2 - \frac{ie}{c}kA' \right\} F(\phi) = 0 \quad (7.17)$$

La solution de cette équation donne pour  $F(\phi)$  :

$$F(\phi) = \exp \left\{ -i \int_0^\phi \left[ \frac{e}{c(k.p)}(pA) - \frac{e^2}{2c^2(k.p)}A^2 \right] d\phi + \frac{e}{2c(k.p)}kA' \right\} \frac{u(p,s)}{\sqrt{2p_0}} \quad (7.18)$$

On développe  $\exp \left\{ \frac{e}{2c(k.p)}kA' \right\}$ , tous les termes de puissance supérieure à 1 de  $kA$  sont nuls, car :

$$kA kA = -kA^2 k = -k^2 A^2 = 0, \quad (k^2 = 0) \quad (7.19)$$

L'exponentielle se réduit à :

$$\exp \left\{ \frac{e}{2c(k.p)}kA' \right\} = 1 + \frac{e}{2c(k.p)}kA'$$

La fonction d'onde, qui est solution de l'équation de Dirac en présence du champ électromagnétique, est donnée finalement par :

$$\psi(x) = \left[ 1 + \frac{e}{2c(k.p)}kA' \right] \frac{u(p,s)}{\sqrt{2p_0}} e^{is(x)} \quad (7.20)$$

$$s(x) = -px - i \int_0^\phi \left[ \frac{e}{c(k.p)}(pA) - \frac{e^2}{2c^2(k.p)}A^2 \right] d\phi. \quad (7.21)$$

Le bispineur de Dirac  $u(p,s)$  est normalisé selon,  $\bar{u}(p,s)u(p,s) = 2c^2$  et la fonction d'onde décrivant le positron s'obtient par la règle de correspondance  $p \rightarrow -p$  en remplaçant  $u(p,s)$  par  $v(p,s)$ . La densité de courant de Dirac correspondant aux fonctions d'ondes de Volkov s'écrit :

$$J^\mu = c\bar{\psi}_p(x)\gamma^\mu\psi_p(x)$$



On trouve après tout calcul fait :

$$J^\mu = \frac{1}{p_0} \left\{ \left( p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) + \left( \frac{e(A \cdot p)}{c(k \cdot p)} - \frac{e^2 A^2}{2c^2(k \cdot p)} \right) k^\mu \right\}.$$

Dans le cas où  $A^\mu$  est quasi périodique, sa valeur moyenne temporelle s'annule, et la moyenne de la densité de courant s'écrit sous la forme :

$$\bar{J}^\mu = \frac{1}{p_0} \left\{ p^\mu - \frac{e^2 \bar{A}^2}{2c^2(k \cdot p)} k^\mu \right\}. \quad (7.22)$$

On définit le quadri-vecteur quasi-impulsion qui représente l'effet du champ électromagnétique sur l'impulsion  $p^\mu$  par l'expression :

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2 \bar{A}^2}{2c^2(k \cdot p)} k^\mu \quad (7.23)$$

La quasi-impulsion  $q^\mu$  satisfait l'équation suivante :

$$\begin{aligned} q^2 = q^\mu q_\mu &= \left( p^\mu - \frac{e^2 \bar{A}^2}{2c^2(k \cdot p)} k^\mu \right) \left( p_\mu - \frac{e^2 \bar{A}^2}{2c^2(k \cdot p)} k_\mu \right), \\ &= m^2 c^2 \left( 1 - \frac{e^2 \bar{A}^2}{m^2 c^4} \right) = m_*^2 c^2, \end{aligned} \quad (7.24)$$

avec  $m_*$  la masse effective de la particule dans le champ électromagnétique :

$$m_* = m \left[ 1 - \frac{e^2 \bar{A}^2}{m^2 c^4} \right]^{1/2}.$$

## 8 Fonction d'onde d'une particule de Dirac dans un champ Coulombien

On considère un électron qui n'est soumis qu'au potentiel Coulombien de la forme  $U(r) = \alpha Z/r$ . Dans ce cas, la résolution de l'équation de Dirac avec un champ électromagnétique est donnée par Furry [12] et Sommerfield-Maue [13] dont l'approximation est sous la forme d'une série infinie et elles sont aussi présentées dans les références [5, 12].

L'équation de Dirac s'écrit de la forme :

$$(\varepsilon - U - \beta m + ic\hat{\alpha}\nabla)\psi = 0, \quad (8.1)$$

avec  $U$  est le potentiel donné par :  $U = -Z\alpha/r$ . Cette équation est transformée en deuxième ordre par application de l'opérateur  $(\varepsilon - U + \beta m - ic\hat{\alpha}\nabla)$  ce qui donne :

$$(\Delta + p^2 - 2\varepsilon U)\psi = (-ic\hat{\alpha}\cdot\nabla U - U^2)\psi. \quad (8.2)$$

Pour les distances  $r \gg Z\alpha/\varepsilon$  qui sont loin de l'origine  $U \ll E$  et à la première approximation, on peut négliger le terme de droite dans l'équation (??) :

$$(\Delta + p^2 + 2\varepsilon(Z\alpha/r))\psi = 0, \quad (8.3)$$

qui a la forme de l'équation de Schrödinger dans un champ Coulombien ;

$$\left(\frac{1}{2m}\Delta + \frac{p^2}{2m} + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi = 0 \quad (8.4)$$

Alors, on peut écrire une solution qui a le comportement d'une onde plane ( $\propto e^{ikr}$ ) modulée par des termes qui contiennent l'effet Coulombien,

$$\psi_{\varepsilon,p} = N \frac{u(p,s)}{\sqrt{2\varepsilon V}} e^{ipr} {}_1F_1\left(\frac{iZ\alpha\varepsilon}{p}, 1, i(pr - \mathbf{p}\mathbf{r})\right), \quad (8.5)$$

avec  $N$  est le coefficient de normalisation donnée par :

$$N = e^{\frac{\pi Z\alpha\varepsilon}{2p}} \Gamma\left(1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{p}\right),$$

où  $F$  est la fonction hypergéométrique confluyente et  $u(p,s)$  est le bispineur libre de Dirac normalisé tel que  $\bar{u}u = 2c^2$ . La fonction d'onde est normalisée de sorte que la limite asymptotique reproduit la fonction usuelle :

$$\psi = \frac{u}{\sqrt{2\varepsilon V}} e^{ipr}.$$

Dans le régime ultra-relativiste où  $p \approx \varepsilon$  on peut écrire :  $Z\alpha\varepsilon/p \approx Z\alpha$  alors, on a :

$$\psi^+ = N \frac{u(p,s)}{\sqrt{2\varepsilon V}} e^{ipr} F(iZ\alpha, 1, i(pr - \mathbf{p}\mathbf{r})). \quad (8.6)$$

Le coefficient de normalisation  $N$  est donné par :

$$N = \exp(Z\alpha\pi/2)\Gamma(1 - iZ\alpha).$$

Dans une deuxième approximation, on pose :

$$\psi = \frac{N}{\sqrt{2\varepsilon V}} e^{ipr} (u(p,s)F + \phi) \quad (8.7)$$

On retient le terme linéaire en  $U$ , et l'équation devient :

$$(\Delta + 2i\mathbf{p}\nabla - 2\varepsilon\mathbf{U})\tilde{\nabla}\phi = -i\mathbf{u}(\mathbf{p},s)\hat{\alpha}(\nabla\mathbf{U})\phi \quad (8.8)$$

avec  $F$  satisfait à l'équation suivante :

$$(\Delta + 2i\mathbf{p}\nabla - 2\varepsilon\mathbf{U})\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (8.9)$$

On substitue la solution (8.5) dans l'équation (8.3) et on applique l'opérateur  $\nabla$ , on trouve :

$$(\Delta + 2i\mathbf{p}\cdot\nabla - 2\varepsilon\mathbf{U})\nabla\mathbf{F} = 2\varepsilon\mathbf{F}\cdot(\nabla\mathbf{U}) \quad (8.10)$$

En comparaison avec l'équation (8.8), on voit que :

$$\phi = -\frac{ic}{2\varepsilon}(\hat{\alpha}\nabla)u(p, s)F \quad (8.11)$$

Finalement,  $\psi^+$  et  $\psi^-$  qui tiennent compte de l'effet Coulombien sont :

$$\psi^+ = N\frac{u(p, s)}{\sqrt{2\varepsilon V}}e^{ipr} \left[1 - \frac{ic}{2\varepsilon}\hat{\alpha}\nabla\right] {}_1F_1(i\eta, 1, i(pr - \mathbf{p}\mathbf{r})) \quad (8.12)$$

$$\psi^- = N^*\frac{u(p, s)}{\sqrt{2\varepsilon V}}e^{ipr} \left[1 - \frac{ic}{2\varepsilon}\hat{\alpha}\nabla\right] {}_1F_1(-i\eta, 1, -i(pr + \mathbf{p}\mathbf{r})) \quad (8.13)$$

avec  $N = e^{\pi\eta/2}\Gamma(1 - i\eta)$ ,  $\eta = Z\alpha\varepsilon/|p|$ , et  $\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$ .

Pour les processus impliquant des positrons, la fonction d'onde est obtenue par substitution  $p \rightarrow -p$ , et  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$  avec la norme  $p = |\mathbf{p}|$  est inchangée, le paramètre  $iZ\alpha$  change de signe, on obtient :

$$\psi_{-\varepsilon, -p}^+ = N\frac{v(p, s)}{\sqrt{2E V}}e^{-ipr} \left[1 + \frac{ic}{2\varepsilon}\hat{\alpha}\nabla\right] {}_1F_1(-i\eta, 1, i(pr + \mathbf{p}\mathbf{r})) \quad (8.14)$$

$$\psi_{-\varepsilon, -p}^- = N^*\frac{v(p, s)}{\sqrt{2\varepsilon V}}e^{-ipr} \left[1 + \frac{ic}{2\varepsilon}\hat{\alpha}\nabla\right] {}_1F_1(i\eta, 1, -i(pr - \mathbf{p}\mathbf{r})) \quad (8.15)$$

où  $N = e^{-\pi\eta/2}\Gamma(1 + i\eta)$ ,  $\eta = Z\alpha\varepsilon/|p|$  et  $|p|$  est la norme de l'impulsion de l'électron. Pour décrire l'état d'un électron qui interagit simultanément avec un noyau de charge  $Z$  et un champ laser, nous avons utilisé les résultats des travaux de Jain et Tzoar [7]. Pour un électron plongé simultanément dans un potentiel Coulombien nucléaire attractif et dans un champ laser intense  $A^\mu = (V, \mathbf{A})$ , aucune solution exacte du problème n'est disponible. S'inspirant de l'interpolation faite dans le cas non relativiste [7, 8] et de l'extension de la fonction d'onde Coulombienne dans le cas relativiste de Li *et al.* [2], on écrit la fonction d'onde sortante sous la forme définitive suivante :

$$\psi^+ = N {}_1F_1(i\eta, 1, i(qr - \mathbf{q}\mathbf{r})) \left[1 + \frac{e}{2c(kp)}\not{k}\not{A}\right] \frac{u}{\sqrt{2QV}} \exp\left(-iqx - i\int_0^\phi \frac{e}{c(kp)}(pA)d\phi\right), \quad (8.16)$$

avec  $N = e^{\pi\eta/2}\Gamma(1 - i\eta)$ ,  $\eta = Z\alpha Q/|q|$ , et  $q^\mu = (Q, \mathbf{q})$ . Si on passe à la limite non relativiste de cette équation, on retrouve la fonction d'onde proposée par Jain et Tzoar dans le régime non relativiste [7] :

$$\psi = N {}_1F_1(i\eta, 1, i(pr - \vec{p}\vec{r})) \exp(i\vec{p}\vec{r} - iEt) \exp\left(-\frac{ie}{c}\int_0^\tau \vec{p}\vec{A}d\tau - \frac{ie^2}{2c^2}\int_0^\tau A^2d\tau\right) \quad (8.17)$$

## 9 Section efficace : formalisme relativiste

Dans une expérience de diffusion, on envoie un faisceau monocinétique de particules sur une cible. Dans notre cas, les particules projectiles sont des électrons, de proton, ou de positron,... La cible est un atome ou un ion fixé à l'origine d'un repère  $xyz$ . Les électrons incidents arrivent le long de l'axe  $ox$  avec un vecteur d'onde  $k_i$  et une énergie  $E_i$ , les électrons diffusés se propagent avec un vecteur d'onde  $k_f$  et une énergie  $E_f$ . L'une des plus importantes quantités à déterminer, dans les expériences de diffusion, est la section efficace de diffusion.

Considérons un processus de diffusion où deux particules initiales :  $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$  ( $i = 1, 2$ ) produisent  $N$  particules finales  $p'_f = (E'_f, \mathbf{p}'_f)$ , ( $f = 1, 2, \dots, N$ ) :

$$A + B \rightarrow \alpha + \beta + \eta \dots \quad (|i\rangle \rightarrow |f\rangle). \quad (9.1)$$

L'amplitude de Feynman (réduite), pour ce processus, est définie par :

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \underbrace{\sum_f p_f}_{p_f} - \underbrace{\sum_i p_i}_{p_i} \right) T_{fi}, \quad (9.2)$$

où la fonction  $\delta$  de Dirac  $\delta^{(4)}(p_f - p_i)$  assure la conservation de l'énergie-impulsion. La probabilité de transition de l'état initial à l'état final s'écrit :

$$\omega_{fi} = |S_{fi} - \delta_{fi}|^2 \quad (9.3)$$

Pour un volume  $V$  fini et un intervalle de temps fini ( $-T/2 \ll t \ll T/2$ ), nous pouvons remplacer  $[\delta^{(4)}]^2$  par la formule :

$$\begin{aligned} |(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)|^2 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \lim_{V, T \rightarrow \infty} \delta_{VT}(p_f - p_i) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \lim_{V, T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x e^{ix(p_f - p_i)} \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) VT. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Par conséquent,

$$\omega_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) VT |T_{fi}|^2 \quad (9.5)$$

Ainsi, la probabilité de transition par unité de temps est donnée par :

$$\omega = \frac{\omega_{fi}}{T} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) V |T_{fi}|^2 \quad (9.6)$$

et la section efficace différentielle  $d\sigma_{fi}$  est définie par :

$$d\sigma = \frac{\omega}{|J_{inc}|} dN_f \quad (9.7)$$

Où  $dN_f$  est le nombre d'états finaux avec l'énergie-impulsion comprise entre  $\mathbf{p}_f$  et  $\mathbf{p}_f + d\mathbf{p}_f$ , on a :

$$dN_f = \prod_{f=1,2,\dots,n} \frac{V}{(2\pi)^3} d\mathbf{p}_f$$

et  $J_{inc}$  le flux de particules incidentes, sa composante dans la direction de la vitesse de particule est donnée par :

$$J_{inc}^a = c\bar{\psi}_i(x)\gamma^a\psi_i(x)$$

Dans cette expression, les particules initiales et finales sont des états à polarisation (spin) bien définis. Souvent dans les expériences, les particules en diffusion sont de spins non polarisés et la polarisation du spin des particules finales n'est pas détectée. Pour calculer  $\sigma_{NP}$  de spins non polarisés, nous devons prendre la moyenne sur tous les états de polarisations initiales et la somme sur tous les états de polarisations finales.

Les bispineurs de Dirac  $u(p, s)$  définit l'état de spin. Ainsi, l'élément de matrice de transition s'écrit sous la forme

$$T_{fi} \propto \bar{u}(p, s)\Gamma u(p, s)$$

avec  $\Gamma$  opérateur qui dépend des matrices  $\gamma$  de Dirac et de la fonction d'onde de la particule. Le carré de l'élément de transition s'écrit alors :

$$\begin{aligned} |T_{fi}|^2 &= \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}(p, s)\Gamma u(p, s)|^2, \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \delta, \lambda} \sum_{s_i, s_f} u_\lambda(p_f, s_f)\bar{u}_\alpha(p_f, s_f)\Gamma_{\alpha\beta}u_\beta(p_i, s_i)\bar{u}_\delta(p_i, s_i)\bar{\Gamma}_{\delta\lambda}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

En utilisant le produit du bispineurs de Dirac, l'expression se réduit à :

$$\begin{aligned} \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}(p, s)\Gamma u(p, s)|^2 &= \sum_{\alpha, \beta, \delta, \lambda} (\not{p}_f c + mc^2)_{\lambda\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}(\not{p}_i c + mc^2)\bar{\Gamma}_{\delta\lambda} \\ &= Tr [(\not{p}_f c + mc^2)\Gamma(\not{p}_i c + mc^2)\bar{\Gamma}] \end{aligned} \quad (9.9)$$

Le calcul de cette trace donne lieu au produits de Lorentz des différents quadri-vecteurs. Cette partie spinorielle contient toute l'information sur les effets relativistes et le calcul à la main est très laborieux, souvent on utilise des logiciels de calcul symbolique tels que REDUCE, FeynCalc,....

## 10 Approximation de Born

Le modèle développé par Born [14] est une des approximations les plus utilisées pour le calcul des sections efficaces dans le domaine relativiste. Dans cette approximation, on suppose que le potentiel diffuseur qui décrit l'interaction Coulombienne du projectile avec les différentes particules

de la cible, est petit devant l'énergie totale de la cible et celle de la particule incidente (rapide). Dans l'Hamiltonien du système, le potentiel diffuseur est donc traité comme une perturbation  $H = H_0 + V$ , et l'état propre de la cible avant la collision est gouvernée par l'équation de Schrödinger :

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \quad (10.1)$$

La solution de l'équation de Lippmann-Schwinger, qui tient compte des conditions aux limites du problème de diffusion, est telle que :

$$|\psi_i^+\rangle \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} |\psi_0^+\rangle + \text{onde sortante} \quad (10.2)$$

On commence par réécrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps, avec  $V(r)$  le potentiel diffuseur, et  $k$  le vecteur d'onde :

$$[\nabla^2 + k^2] \psi(r) = V(r)\psi(r), \quad (10.3)$$

qui admet une solution appelée équation intégrale de Lippman-Schwinger de la forme :

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \int G(r, r') V(r') \psi(r) dr', \quad (10.4)$$

où  $|\psi_0^+\rangle$  est la solution de l'équation homogène  $[\nabla^2 + k^2] \psi(r) = 0$  et  $G^\pm(r, r')$  est la fonction de Green de l'onde entrante (+) et sortante (-) définies par :

$$G_0^\pm(r, r') = \langle r | G_0^\pm | r' \rangle. \quad (10.5)$$

La solution formelle de l'équation (10.4) en puissance de  $V$  est obtenue par itération :

$$|\psi_i^+\rangle = \left(1 + G_0^\pm V + (G_0^\pm V)^2 + \dots (G_0^\pm V)^n\right) |\psi_0^+\rangle. \quad (10.6)$$

L'équation (10.6) représente la série de Born pour la fonction d'onde. En utilisant cette relation dans l'expression de l'amplitude de diffusion, on obtient le développement de Born de l'amplitude de diffusion :

$$f = -2\pi^2 \langle \psi_{k_f} | V | \psi_{k_i} \rangle = -2\pi^2 \langle \psi_{k_f} | V + V G_0^\pm V + V G_0^\pm V G_0^\pm V + \dots | \psi_{k_i} \rangle. \quad (10.7)$$

L'ordre correspondant à la série de Born, représente le nombre d'interactions de la particule incidente avec la cible. Pour Born 1 une seule interaction, deux fois pour Born 2... etc. La première approximation de Born consiste à négliger la contribution des termes contenant les puissances supérieures à un et à ne retenir que le premier terme du développement précédent. Ce traitement est légitime pour une particule incidente d'énergie suffisamment élevée relativement au potentiel d'interaction. Dans le cadre de ce travail (domaine relativiste), la particule incidente a une énergie assez grande et transfère peu d'impulsion à la cible. L'approximation de Born est pleinement remplie et les calculs sont faits en première approximation de Born.

# 11 Moment magnétique anomal de l'électron

## 11.1 Moment magnétique de l'électron

Pour calculer le moment magnétique associé à l'électron, dans un modèle classique, on suppose que il se déplace avec la vitesse  $v$  le long d'un chemin circulaire de rayon  $r$ . L'électron constitue une boucle qui enferme une zone de surface  $S = \pi r^2$  et porte un courant  $I = ev/(2\pi r)$  et de moment magnétique  $\mu = IS = evr/2$ .

Le moment angulaire associé au mouvement de l'électron est  $L = mvr$  donc :

$$\mu_L = \left(\frac{e}{2m}\right)L, \quad (11.1)$$

où le rapport  $e/2m$  est appelé rapport gyromagnétique. Les particules subatomiques ont un moment magnétique qui est généré par leur spin intrinsèque. Ces deux quantités sont liées par la relation :

$$\mu_s = g\left(\frac{e}{2m}\right)S,$$

où  $g$  est un nombre pur, appelé facteur de Landé, et  $S$  le moment cinétique de spin. La comparaison avec l'équation (11.1) montre que  $g = 1$ . Cette prédiction classique est clairement en désaccord avec les résultats expérimentaux et aussi la mécanique quantique qui mène à une conclusion très différente. Dans la limite non relativiste, l'équation de Dirac peut être transformée à l'équation de Schrödinger-Pauli.

La limite non relativiste de l'équation de Dirac couplée au champ électromagnétique, avec la substitution minimale  $P^\mu \rightarrow P^\mu - \frac{e}{c}A^\mu$  où  $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ , devient :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[ c\vec{\alpha}\left(P - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\psi + \beta mc^2 + eA^0 \right] \psi \quad (11.2)$$

Les matrices  $\alpha$  et  $\beta$ , dans la représentation de Dirac, sont données par :

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

et l'Hamiltonien est tel que :

$$H = \begin{pmatrix} mc^2 + eA^0 & c\vec{\alpha}\left(P - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \\ c\vec{\alpha}\left(P - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) & -mc^2 + eA^0 \end{pmatrix}.$$

Pour chercher les solutions stationnaires, on divise le spineur à quatre composantes  $\psi$  en deux spineurs à deux composantes,

$$\psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{(-\frac{i}{\hbar}Et)} \quad ; \quad E = mc^2 + \epsilon. \quad (11.3)$$

Posons  $\vec{\Pi} = P - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ , on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} &= c\vec{\alpha}\vec{\pi}\tilde{\chi} + (mc^2 + eA^0)\tilde{\varphi} \\ i\hbar \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} &= c\vec{\alpha}\vec{\pi}\tilde{\varphi} + (-mc^2 + eA^0)\tilde{\chi} \end{aligned}$$

La deuxième équation donne :

$$\epsilon\chi = c\vec{\alpha}\vec{\pi}\varphi + (-mc^2 + eA^0)\chi.$$

Dans la limite non relativiste,  $\epsilon \ll mc^2$ , nous pouvons négliger  $\epsilon$  et  $eA^0$  devant l'énergie de masse ( $2mc^2$ ).

$$\chi = \frac{1}{2mc} \vec{\sigma}\vec{\Pi}\varphi$$

La première équation s'écrit :

$$E\varphi = c(\vec{\sigma}\vec{\Pi})\chi + (mc^2 + eA^0)\varphi.$$

Après rearrangement, on aura :

$$(E - mc^2)\varphi = \left[ \frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\vec{\Pi})^2 + eA^0 \right] \varphi.$$

En utilisant la propriété suivante :

$$(\vec{\sigma}\vec{\Pi})^2 = \vec{\Pi}^2 + i(\vec{\sigma}\vec{\Pi}) \wedge \vec{\Pi},$$

on obtient finalement l'équation de Pauli, telle que :

$$\epsilon\varphi = \left( \frac{\vec{\Pi}^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma}\vec{B} + eA^0 \right) \varphi.$$

Le terme de moment magnétique est identifié dans l'hamiltonien en comparaison avec le potentiel d'interaction :

$$H = -\frac{\vec{\mu}\vec{B}}{c} = -\frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma}\vec{B},$$



avec  $\vec{\mu} = e\hbar\vec{\sigma}/2m$ . En terme de l'opérateur de spin  $\vec{S} = \hbar\vec{\sigma}/2$ , on voit que le facteur  $g$  est égal à 2. Les travaux expérimentaux [9] et les calculs théoriques [10] des corrections radiatives de l'électrodynamique quantique, à l'ordre trois de la constante  $\alpha/\pi$  qui incluent près de 900 diagrammes de Feynman [3], ont mis en évidence une anomalie du moment magnétique (MMA)  $a_e = (g - 2)/2 = 1159652188,4 \cdot 10^{-12}$ . Notre objectif n'est pas de calculer le moment magnétique anomal, mais d'étudier son effet sur les diffusions relativistes de particules chargées. Dans le chapitre 4 on va comparer le cas de la diffusion de l'atome d'hydrogène par impact d'électron et de positron. En développant le formalisme théorique, avec et sans MMA pour l'étude des diffusions relativistes en présence du champ laser, des conclusions importantes ont été tirées.

## 11.2 Equation de Dirac avec moment magnétique anomal

En présence du moment magnétique anomal, on change le principe du couplage minimal en effectuant la substitution suivante :  $i\hat{\phi}_\mu \rightarrow i\hat{D}_\mu + a\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ . Ainsi, l'équation de Dirac du premier ordre pour un électron possédant un MMA s'écrit :

$$(i\hat{D}_\mu - mc + a\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\psi(x) = 0. \quad (11.4)$$

Appliquons l'opérateur  $i\hat{D} + m$  à l'équation précédente, on obtient l'équation de Dirac du second ordre avec MMA :

$$\left[ (P - \frac{e}{c}A)^2 - \frac{ie}{2c}\mathbf{F}_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - m^2c^2 + ia_e(i\hat{D} - \frac{e}{c}A + mc)\sigma^{\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu} \right] \psi(x) = 0 \quad (11.5)$$

Dans la jauge de Lorentz, cette équation devient après quelques manipulations de calcul :

$$\left[ -\partial_\mu\partial^\mu - \frac{2ie}{c}A^\mu\partial_\mu + \frac{e^2}{c^2}A^\mu A_\mu - m^2c^2 - \frac{ie}{c}\not{K}\not{A}' + 2ia_e(\not{p} - \frac{e}{c}\not{A} + mc)\not{K}\not{A}' \right] \psi \quad (11.6)$$

La solution cherchée est de la forme  $\psi(x) = e^{-ipx}F(\phi)$ . Remplaçons tous les termes par leurs expressions, la fonction  $F(\phi)$  devient :

$$F(\phi) = \exp \left\{ i \int_0^\phi \left[ \frac{e^2 A^2}{2c^2(k.p)} - \frac{e(A.p)}{c(k.p)} \right] d\phi + \frac{1}{2(k.p)} \left[ \frac{e}{c} - 2a(\not{p} - \frac{e}{c}\not{A} + mc) \right] \not{K}\not{A}' \right\}. \quad (11.7)$$

L'expression de la fonction d'onde  $\psi(x)$  devient :

$$\psi(x) = \exp \left\{ \frac{e\not{K}\not{A}}{2c(k.p)} - a \frac{\not{p}\not{K}\not{A}}{(k.p)} + a \frac{\not{A}\not{K}\not{A}}{c(k.p)} - \frac{amc}{(k.p)}\not{K}\not{A}' \right\} \frac{u(p, s)}{\sqrt{2QV}} \quad (11.8)$$

$$\exp \left\{ -px - i \int_0^\phi \left[ \frac{e}{c(k.p)}(pA) - \frac{e^2}{2c^2(k.p)}A^2 \right] d\phi \right\}. \quad (11.9)$$

En remarquant que  $\mathcal{A}\not{k}\mathcal{A} = \mathcal{A}(2(k.A) - \not{k}) = -A^2\not{k}$  et en posant  $\alpha, \beta, \delta$  tel que :

$$\alpha = \frac{amc}{(k.p)} - \frac{e}{2c(k.p)} \quad (11.10)$$

$$\beta = a \frac{eA^2}{c(k.p)} \quad (11.11)$$

$$\delta = \frac{a}{(k.p)} \quad (11.12)$$

L'approximation des champs faibles consiste à négliger les termes d'ordre supérieur à 1 dans le développement de l'exponentielle et la fonction d'onde devient finalement comme suit [4] :

$$\psi(x) = [1 - (\alpha\not{k}\mathcal{A} + \beta\not{k} + \delta\not{p}\not{k}\mathcal{A})] \exp \left[ -qx - i \int_0^\phi \frac{e}{c(k.p)}(pA) \right] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2QV}}, \quad (11.13)$$

avec la quasi-impulsion  $q^\mu = p^\mu - \frac{e^2 A^2}{2c^2(k.p)} k^\mu$  qui ne dépend pas de l'effet du moment magnétique anomal, le terme  $\alpha\not{k}\mathcal{A}$  représente le couplage spin-champ laser qui est affecté par le moment magnétique anomal via le paramètre  $\alpha$ .

## 12 Fonction d'onde relativiste exacte de l'atome d'hydrogène

Dans cette section, on présente les résultats de la construction de la fonction d'onde de l'atome d'hydrogène, qui sont détaillés dans les références [6, 11, 15, 16]. On considère l'électron dans le potentiel Coloumbien du noyau, l'équation de Dirac s'écrit :

$$H_D = c\alpha p + \beta mc^2 + v(r) \quad ; \quad v(r) = -\frac{Z\alpha}{r}. \quad (12.1)$$

On cherche la solution sous la forme :

$$\psi_{jm_j}(r, t) = \begin{pmatrix} \phi_{j,\ell,m_j}(r, t) \\ \chi_{j,\ell',m_j}(r, t) \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

Pour que  $\psi$  ait la parité convenable, les deux spineurs, à deux composantes  $\phi$  et  $\chi$ , ont une parité différente. On pose alors :

$$\psi_{jm_j}(r, t) = \begin{pmatrix} ig(r)\Omega_{j,\ell,m_j}(r, t) \\ -f(r)\Omega_{j,\ell',m_j}(r, t) \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

On définit le nombre quantique  $k$  par :

$$k = \pm(j + \frac{1}{2}) = \begin{cases} -(\ell + 1) & \text{pour } j = \ell + 1 \\ \ell & \text{pour } j = \ell - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (12.4)$$

On a  $|k| = j + 1/2 \longrightarrow$  alors  $j = |k| - 1/2$ .

Avec les changements de variables  $G = rg$  et  $F = rf$ , les fonctions  $G$  et  $F$  vérifient les équations couplées suivantes :

$$\frac{dG}{dr} + \frac{k}{r}G(r) - \frac{1}{\hbar c} [E + mc^2 - v(r)] F(r) = 0, \quad (12.5)$$

$$\frac{dF}{dr} - \frac{k}{r}G(r) + \frac{1}{\hbar c} [E + mc^2 - v(r)] G(r) = 0. \quad (12.6)$$

La solution de ces équations est cherchée sous la forme :

$$g(\rho) = \sqrt{mc^2 + E}\rho^{\gamma-1} \exp(-\rho/2) (\varphi_1(\rho) + \varphi_2(\rho)), \quad (12.7)$$

$$f(\rho) = -\sqrt{mc^2 + E}\rho^{\gamma-1} \exp(-\rho/2) (\varphi_1(\rho) - \varphi_2(\rho)), \quad (12.8)$$

où les substitutions suivantes sont effectuées :

$$\rho = 2\lambda r, \quad \lambda = \frac{(m^2c^4 - E^2)}{\hbar c}, \quad \gamma = \sqrt{k^2 - (Z\alpha)^2}. \quad (12.9)$$

Les solutions qui restent finies, en  $\rho = 0$ , sont les fonctions hypergéométriques confluentes :

$$\varphi_1(\rho) = A_1 F_1(\gamma - \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda}, 2\gamma + 1, \rho), \quad (12.10)$$

$$\varphi_2(\rho) = B_1 F_1(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda}, 2\gamma + 1, \rho), \quad (12.11)$$

avec

$$A = \frac{(k - Z\alpha mc^2/\hbar c \lambda)}{k - Z\alpha E/\hbar c \lambda} B. \quad (12.12)$$

Introduisons le nombre quantique radial  $n_r$  tel que :

$$\gamma - \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} = -n_r \quad n_r = 1, 2, 3, \dots \quad (12.13)$$

Pour  $n_r = 0$ , on a

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \implies \gamma^2 = k^2 - Z^2\alpha^2 &= \frac{(Z\alpha E)^2}{(\hbar c \lambda)^2}, \\ k^2 = \frac{(Z\alpha mc^2)^2}{(\hbar c \lambda)^2} \implies |k| &= \frac{Z\alpha mc^2}{\hbar c \lambda}, \end{aligned} \quad (12.14)$$

Les valeurs admises pour le nombre quantique radial  $n_r$  sont :

$$n_r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{pour } k < 1 \quad (12.15)$$

$$n_r = 1, 2, 3, \dots \quad \text{pour } k > 1 \quad (12.16)$$

De la relation (12.12), l'énergie s'écrit :

$$E_{n_r} = mc^2 \left[ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(\gamma + n_r)^2} \right]^{1/2}. \quad (12.17)$$

Le nombre quantique principal est défini par :  $n = n_r + |k| = n_r + j + 1/2$  avec  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  
et  $k = \pm(j + 1/2) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

L'expression de l'énergie devient :

$$E_{n_r} = mc^2 \left[ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n - j - 1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - Z^2\alpha^2})} \right]^{-1/2}. \quad (12.18)$$

On impose à  $g(r)$  et  $f(r)$  d'être normalisées telle que :

$$\int_0^\infty r^2 (g^2(r) + f^2(r)) dr = 1, \quad (12.19)$$

où l'expression complète de  $g(r)$  et  $f(r)$  est donnée par :

$$g(r) = \frac{(2\lambda)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma + 1)} \left\{ \frac{(mc^2 + E)}{4mc^2} \frac{\Gamma(2\gamma + 1 + n_r)}{(\frac{Z\alpha mc^2}{\hbar c \lambda})(\frac{Z\alpha mc^2}{\hbar c \lambda} - k)n_r!} \right\}^{-1/2} \exp(-\rho/2) \rho^{\gamma-1} \quad (12.20)$$

$$\times \left\{ \left( \frac{Z\alpha mc^2}{\hbar c \lambda} - k \right) {}_1F_1(-n_r, 2\gamma, \rho) - n_r {}_1F_1(1 - n_r, 2\gamma + 1, \rho) \right\},$$

$$f(r) = \frac{(2\lambda)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma + 1)} \left\{ \frac{(mc^2 - E)}{4mc^2} \frac{\Gamma(2\gamma + 1 + n_r)}{(\frac{Z\alpha mc^2}{\hbar c \lambda})(\frac{Z\alpha mc^2}{\hbar c \lambda} - k)n_r!} \right\}^{-1/2} \exp(-\rho/2) \rho^{\gamma-1} \quad (12.21)$$

$$\times \left\{ \left( \frac{Z\alpha mc^2}{\hbar c \lambda} - k \right) {}_1F_1(-n_r, 2\gamma, \rho) + n_r {}_1F_1(1 - n_r, 2\gamma + 1, \rho) \right\}.$$

Pour le spectre continu  $E > mc^2$  les fonctions radiales  $g(r)$  et  $f(r)$  se déduisent à partir des fonctions précédentes par substitutions ( Voir référence [15]) :

$$\sqrt{mc^2 - E} \longrightarrow -i\sqrt{E - mc^2}, \quad \lambda \longrightarrow -ip, \quad -n_r \longrightarrow \gamma - i\frac{Z\alpha E}{\hbar cp}. \quad (12.22)$$

$$\nu = \frac{Z\alpha E}{\hbar cp}, \quad \exp(-i2\zeta) = \frac{(\gamma - i\nu)}{(k - i\frac{Z\alpha mc^2}{\hbar cp})}, \quad Q = {}_1F_1(\gamma - i\nu, 2\gamma + 1, -2ipr). \quad (12.23)$$

Finalement, les fonctions  $f(r)$  et  $g(r)$  sont données par :

$$f(r) = 2^{3/2} \sqrt{\frac{E + mc^2}{E}} e^{\pi\nu/2} \frac{\Gamma(\gamma + 1 + i\nu)}{\Gamma(2\gamma + 1)} \frac{(2pr)^{\gamma-1}}{r} \Im m(e^{i(pr+\zeta)} Q),$$

$$g(r) = 2^{3/2} \sqrt{\frac{E - mc^2}{E}} e^{\pi\nu/2} \frac{\Gamma(\gamma + 1 + i\nu)}{\Gamma(2\gamma + 1)} \frac{(2pr)^{\gamma-1}}{r} \Re(e^{i(pr+\zeta)} Q).$$

Les fonctions propres normalisées qui correspondent au spin down et au spin up pour l'atome d'hydrogène sont données par :

$$\psi_{n=1/2, j=1/2, m=1/2}(r, \theta, \varphi) = \psi_{n=1/2, j=1/2, \uparrow}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} ig(r)Y_{1/2,0,1/2}(\theta, \varphi) \\ -f(r)Y_{1/2,1,1/2}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (12.24)$$

avec les harmoniques sphériques sont définies par :

$$Y_{1/2,0,1/2}(\theta, \varphi) = Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (12.25)$$

$$Y_{1/2,1,1/2}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -Y_{1,0} \\ \sqrt{2}Y_{1,1}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (12.26)$$

Ainsi, la fonction d'onde pour l'état  $1s_{1/2}$  spin up est données par :

$$\psi_{n=1/2, j=1/2, \uparrow}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ig(r) \\ 0 \\ f(r)\cos\theta \\ f(r)\sin\theta e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (12.27)$$

de même la fonction d'onde pour le spin down est donnée par :

$$\psi_{n=1/2, j=1/2, \downarrow}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ ig(r) \\ f(r)\sin\theta e^{i\varphi} \\ -f(r)\cos\theta \end{pmatrix}. \quad (12.28)$$

Pour l'état fondamental  $n = 1$ ,  $k = -1$  on a  $\gamma = \sqrt{k^2 - Z^2\alpha^2} = \sqrt{1 - Z^2\alpha^2}$ , les fonctions  $g_{1s_{1/2}}(r)$  et  $f_{1s_{1/2}}(r)$  sont données par :

$$g_{1s_{1/2}}(r) = \left(\frac{2Z\alpha mc^2}{\hbar c}\right)^{\gamma+1/2} \sqrt{\frac{(1+\gamma)}{2\Gamma(2\gamma+1)}} r^{\gamma-1} \exp\left(\frac{-Z\alpha mc^2}{\hbar c} r\right), \quad (12.29)$$

$$f_{1s_{1/2}}(r) = - \left(\frac{2Z\alpha mc^2}{\hbar c}\right)^{\gamma+1/2} \sqrt{\frac{(1+\gamma)}{2\Gamma(2\gamma+1)}} r^{\gamma-1} \exp\left(\frac{-Z\alpha mc^2}{\hbar c} r\right) \left(\frac{1-\gamma}{Z\alpha}\right). \quad (12.30)$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.M. Volkov *Z. Phys.*, **94**, 250(1935).
- [2] S-M Li, J. Berakdar, J. Chen and Z-F Zhou, *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.*, **37**, 653, (2004).
- [3] Itzykson et Züber, *Phys. Rev. Lett*, **59**, 26, (1987).
- [4] Youssef I. Salamin *J. Phys. A : Math. Gen.*, **26**, 6067-6071, (1993).
- [5] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz and Pitaevskii *Quantum Electrodynamics* (Course of Theoretical Physics Vol 4, 2nd edn Pergamon Press,(1982)).
- [6] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (New York : McGraw-Hill 1964) ; C. Itzykson and J-B Zuber, *Quantum field Theory* (New York : McGraw-Hill, 1985).
- [7] M. Jain and N. Tzoar *Phys. Rev. A* **18**, 538, (1978).
- [8] P. Cavaliere, G. Ferrante and C. Leone *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys*, **13**, 4495, (1980).
- [9] R.S. Van Dyck, Jr., P.B. Schwinberg and H.G. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett*, **59**, 26, (1987).
- [10] A.M. Awobode ICTP Preprint Publications. *The anomalous Magnetic Moment of the electron*, IC/167/2001
- [11] C.J. Joachain *Quantum Collision Theory*, (North-Hollet, Amsterdam, (1983)).
- [12] W.H. Furry *Phys. Rev.*, **46**, 391, (1934).
- [13] A. Sommerfeld and A.W. Maue *Ann. d. Physik.* **22**, 629, (1935).
- [14] Born M,*Z. Phys.*, **37**, 863, (1926)
- [15] Y. Attaourti, *Mécanique Quantique. Une Approche Analytique*, (Tome II., Editions Afrique-Orient, (2005)).
- [16] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, (Wave Equations, Springer-Verlag, (1990)).

## CHAPITRE 2

# DIFFUSION COULOMBIENNE, ASSISTÉE PAR LASER, D'UN PROTON PAR NOYAU ATOMIQUE FIXE

## 1 Introduction

Avec les progrès de la technique laser, la génération actuelle des sources laser peut atteindre des intensités plus de  $10^{18}W/cm^2$  [1, 2]. L'intérêt d'utiliser un traitement relativiste des processus fondamentaux en présence du champ laser devient impératif, car les intensités ont dépassé la valeur seuil  $10^{18}W/cm^2$  [2]. L'interaction laser-matière avec de telles intensités est capable de produire des électrons relativistes qui ont une variété d'applications dans le domaine de la recherche scientifique.

Depuis 1932, en l'absence du champ laser, Mott [3] a obtenu la section efficace du processus de la diffusion élastique d'un électron par un potentiel Coulombien. Dans les travaux [?], les auteurs ont considéré l'électron comme une particule de Klein-Gordon, et ont négligé les effets de spin. Le travail théorique de Denisov et Fedorov [7] a excité Szymanowski *et al.* [2] pour étudier les effets de spin dans le processus de diffusion de Mott assisté par laser avec beaucoup de détails en utilisant le formalisme de Dirac-Volkov dans la première approximation de Born. Plusieurs papiers dans lesquels le formalisme de Dirac-Volkov est entièrement utilisé [8, 14]. Roshchupkin [15] a étendu le même processus pour la seconde approximation de Born. L'intérêt de l'utilisation des approximations des fonctions d'ondes Coulombiennes dans la théorie de la diffusion, vient de la physique des plasmas étant donné que l'interaction électrostatique est de longue portée. Le modèle

de l'onde distordue et ses variantes ont été en mesure de prédire les sections efficaces, à des énergies faibles et intermédiaires, pendant plusieurs années. Récemment, Boca [16] a présenté le résultat analytique et numérique pour le processus de diffusion de particules de spin 1/2 dans un champ Coulombien en présence d'un champ laser intense. Alebed [17] a étudié le processus de diffusion de Mott en présence de deux champs laser pulsés.

Le premier objectif de ce travail est d'étudier la diffusion de proton par le potentiel Coulombien du noyau en présence d'un champ laser polarisé circulairement. L'influence combinée de ces deux champs sur le proton rend nécessaire l'utilisation des fonctions Coulombiennes de Dirac-Volkov pour décrire le proton, en particulier pour les basses énergies. Cet effet peut être modélisé par l'introduction des fonctions hypergéométriques confluentes dans l'amplitude de l'onde. Le deuxième objectif est de généraliser l'article [18] dans lequel les auteurs ont étudié la diffusion de Mott en utilisant les états Coulombiennes de Dirac-Volkov. Il ont étudié l'influence de la distorsion de la fonction d'onde par effet Coulombien, pour les intensités modérées de champ laser de polarisation linéaire, uniquement sur les électrons entrants. Dans ce qui suit, nous allons discuter trois cas dans lesquels nous considérons :

- Effet Coulombien seulement sur le proton incident,
- Effet Coulombien seulement sur le proton diffusé,
- Effet Coulombien à la fois sur le proton incident et diffusé.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2, nous avons donné le développement nécessaire du formalisme théorique pour le calcul analytique de la section efficace différentielle relativiste. Dans la section 3, nous avons présenté et discuté des résultats numériques. Ensuite, nous avons donné une brève conclusion dans la section 4.

Tout au long du travail, on utilise les unités atomiques ( $\hbar = m_e = e = 1$ ), où  $m_e$  est la masse de l'électron au repos, et le tenseur métrique est  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Le produit scalaire de Lorentz est défini par  $(a.b) = a^\mu b_\mu$  et, pour tout  $k$ , le style "gras"  $\mathbf{k}$  est recommandé pour les vecteurs.

## 2 Développement théorique

En présence du champ laser, on considère le proton comme une particule de Dirac de spin 1/2 avec la charge  $+e$ . Dans cette approximation, le mouvement du proton est décrit par l'équation de Dirac suivante :

$$\left\{ \left( \hat{p} + \frac{A}{c} \right)^2 - m_p c^2 + \frac{i}{2c} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right\} \psi(x) = 0, \quad (2.1)$$

avec  $m_p = 1836.15267245 \times m_e$  est la masse du proton. La solution générale de cette équation donne la fonction d'onde de Dirac-Volkov normalisée dans le volume  $V$ , elle représente le proton



dans le champ laser :

$$\psi(x) = \left(1 + \frac{\not{k}\not{A}}{2c(k.p)}\right) \sqrt{\frac{m_p}{2QV}} u(p, s) \exp \left[ -i(q.x) + i \int_0^{k.x} \frac{(A.p)}{c(k.p)} d\phi \right], \quad (2.2)$$

où  $u(p, s)$  représente le bispineur libre du proton qui est normalisé selon,  $\bar{u}(p, s)u(p, s) = u^*(p, s)\gamma^0 u(p, s) = 2c^2$  et  $q^\mu = p^\mu - \frac{e^2 \bar{\mathbf{A}}^2}{2c^2(k.p)} k^\mu$  est la quasi-impulsion du proton habillé par le champ laser  $q = (Q/c, \mathbf{q})$ .

Nous considérons le champ laser comme un champ électromagnétique monochromatique polarisé circulairement qui est classiquement décrit par le quadri-potentiel suivant :

$$A^\mu = a_1^\mu \cos\phi + a_2^\mu \sin\phi. \quad (2.3)$$

Ce potentiel satisfait à la condition de Lorentz ( $k^\mu A_\mu = 0 \rightarrow (k.a_1) = (k.a_2) = 0$ ). On a aussi le produit  $(a_1.a_2) = 0$  et  $A^2 = a_1^2 = a_2^2 = a^2$  avec  $k^\mu$  est le quadri-nombre d'onde  $k = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$  et  $(k_\mu k^\mu = k^2 = 0)$  qui dépend uniquement de l'argument :  $\phi = (k.x) = k_\mu x^\mu$ , alors  $A^\mu$  peut s'écrire sous la forme :

$$A^\mu = A^\mu(\phi). \quad (2.4)$$

Dans ces conditions, la solution de Dirac-Volkov devient :

$$\psi_q(x) = \left[1 + \frac{1}{2c(k.p)} (\not{k}.\not{a}_1 \cos(\phi) + \not{k}.\not{a}_2 \sin(\phi))\right] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2QV}} e^{iS(q,x)}, \quad (2.5)$$

avec

$$S(q, x) = -q.x + \left[ \frac{(a_1.p)}{c(k.p)} \sin(\phi) - \frac{(a_2.p)}{c(k.p)} \cos(\phi) \right] \quad (2.6)$$

$$= -q.x + \left[ \frac{(a_1.q)}{c(k.q)} \sin(\phi) - \frac{(a_2.q)}{c(k.q)} \cos(\phi) \right]. \quad (2.7)$$

Tout le formalisme théorique pour le proton habillé sans effet Coulombien peut-être trouvé dans notre travail récent [20]. Ce travail a été dédié, en employant le formalisme de Dirac-Volkov, au traitement de collision proton-atome d'hydrogène assisté par laser.

## 2.1 Effet Coulombien sur le proton incident

Pour établir l'expression de l'élément de matrice de transition ainsi que l'expression finale de la section efficace différentielle relativiste, les calculs ont été faits dans le système laboratoire dans lequel le noyau est fixé à l'origine et il est approximé à une source ponctuelle de potentiel Coulombien.

Le potentiel Coulombien d'une distribution ponctuelle de charge est défini en électrostatique par :

$V(r) = Ze^2/4\pi\epsilon r$ . Pour le cas de diffusion de proton, le quadrivecteur potentiel est donné, en unités atomiques, par la formule suivante :

$$\mathcal{A}^\mu = \left( \frac{Z}{|\mathbf{x}|}, 0, 0, 0 \right), \quad (2.8)$$

où  $Z$  est le nombre atomique du noyau. La fonction hypergéométrique confluyente est utilisée comme un moyen pour résoudre un grand nombre de problèmes en physique mathématique. Dans un champ Coulombien, le proton entrant ressent les effets de Coulomb, et sa fonction d'onde est approchée par la fonction d'onde de Dirac-Volkov modulée par une fonction hypergéométrique confluyente  ${}_1F_1(a, b, c, z)$  :

$$\psi_{q_i}(x) = N_{i1} F_1(i\eta_i, 1, i(q_i|x| - \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{x})) R(p_i) \frac{u(p, s)}{\sqrt{2Q_i V}} e^{iS(q_i, x)}, \quad (2.9)$$

où l'indice  $i$  représente l'état initial,  $f$  représente l'état final,  $\eta_i = Z\alpha Q_i/(c|q_i|)$  est le paramètre relativiste de Sommerfeld et  $\alpha$  est la constante de structure fine. Le facteur de normalisation de la fonction hypergéométrique confluyente est comme suit :

$$N_i = e^{\frac{\pi\eta_i}{2}} \Gamma(1 - i\eta_i). \quad (2.10)$$

Dans la présente section, on néglige l'effet Coulombien sur le proton sortant et on le décrit simplement par la fonction d'onde relativiste de Dirac-Volkov normalisée dans le volume  $V$  :

$$\psi_{q_f}(x) = R(p_f) \frac{u(p, s)}{\sqrt{2Q_f V}} e^{iS(q_f, x)}. \quad (2.11)$$

L'élément de matrice  $S_{fi}$ , pour la diffusion de proton par potentiel Coulombien, est donné par l'expression :

$$S_{fi} = \frac{iZ}{c} \int d^4x \bar{\psi}_{q_f}(x) \frac{\gamma^0}{|\mathbf{x}|} \psi_{q_i}(x). \quad (2.12)$$

Remplaçons les fonctions d'onde dans l'élément de matrice  $S_{fi}$  par leurs expressions, on trouve :

$$\begin{aligned} S_{fi} = & \frac{iZ}{c} \int d^4x \frac{1}{\sqrt{2Q_i V}} \frac{1}{\sqrt{2Q_f V}} N_{i1} F_1(i\eta_i, 1, i(q_i|x| - \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{x})) \\ & \times \bar{u}(p_f, s_f) \bar{R}(p_f) \frac{\gamma^0}{|\mathbf{x}|} R(p_i) u(p_i, s_i) e^{-i(S(q_f, x) - S(q_i, x))}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Procédons aux substitutions suivantes :

$$\alpha_1 = - \left( \frac{(a_1 \cdot p_i)}{c(k \cdot p_i)} - \frac{(a_1 \cdot p_f)}{c(k \cdot p_f)} \right), \quad \alpha_2 = - \left( \frac{(a_2 \cdot p_i)}{c(k \cdot p_i)} - \frac{(a_2 \cdot p_f)}{c(k \cdot p_f)} \right) \quad (2.14)$$

et

$$z = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}. \quad (2.15)$$

Le terme dans l'exponentielle de l'équation (2.16) devient :

$$e^{-i(S(q_f, x) - S(q_i, x))} = \exp[i(q_f - q_i)x - iz \sin(\phi - \phi_0)], \quad (2.16)$$

et, la phase  $\phi_0$  s'écrit :

$$\phi_0 = \arccos(\alpha_1/z) = \arcsin(\alpha_2/z) = \arctan(\alpha_2/\alpha_1). \quad (2.17)$$

Après quelques manipulations algébriques, on aboutit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{iZ}{c} \int d^4x \frac{1}{\sqrt{2Q_i V}} \frac{1}{\sqrt{2Q_f V}} \bar{u}(p_f, s_f) [C_0 + C_1 \cos(\phi) + C_2 \sin(\phi)] u(p_i, s_i) \\ &\times \frac{1}{|\mathbf{x}|} {}_1F_1(i\eta_i, 1, i(q_i|x| - \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{x})) \exp[i(q_f - q_i)x - iz \sin(\phi - \phi_0)], \end{aligned} \quad (2.18)$$

où les trois coefficients  $C_0$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont respectivement donnés par :

$$\begin{aligned} C_0 &= \gamma^0 - 2k_0 a^2 k c(p_i) c(p_f), \\ C_1 &= c(p_i) \gamma^0 k \phi_1 + c(p_f) \phi_1 k \gamma^0, \\ C_2 &= c(p_i) \gamma^0 k \phi_2 + c(p_f) \phi_2 k \gamma^0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec  $c(p) = 1/2c(k \cdot p)$  et  $k_0 = k^0 = \omega/c$ . On introduit les fonctions de Bessel ordinaires bien connus  $J_n(z)$  telles que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} e^{-iz \sin(\phi - \phi_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} B_n \\ B_{1n} \\ B_{2n} \end{pmatrix} e^{-in\phi}, \quad (2.20)$$

avec

$$\begin{pmatrix} B_n \\ B_{1n} \\ B_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_n(z) e^{in\phi_0} \\ (J_{n+1}(z) e^{i(n+1)\phi_0} + J_{n-1}(z) e^{i(n-1)\phi_0})/2 \\ (J_{n+1}(z) e^{i(n+1)\phi_0} - J_{n-1}(z) e^{i(n-1)\phi_0})/2i \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

où  $z$  est l'argument des fonctions de Bessel défini dans l'équation (2.15). Après intégration sur la variable temporelle, l'élément de matrice  $S_{fi}$  devient :

$$S_{fi} = \frac{iZ}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{I}{\sqrt{4Q_i Q_f V^2}} \bar{u}(p_f, s_f) \Gamma^{(n)} u(p_i, s_i) \delta(Q_f + n\omega - Q_i) \right\} \quad (2.22)$$

où  $\Gamma^{(n)}$  est défini par :

$$\Gamma^{(n)} = C_0 B_n + C_1 B_{1n} + C_2 B_{2n}. \quad (2.23)$$

Dans ce travail, on considère la SED de spin non polarisé. Par conséquent, les différents états de polarisation ont la même probabilité et la SED, mesurée, est donnée par la somme sur la polarisation finale  $s_f$  et la moyenne sur la polarisation initiale  $s_i$ . Ainsi, la SED de spin non polarisé est formellement donnée par :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f} \Big|_{Q_f=Q_i+n\omega} \quad (2.24)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{Z^2}{(4\pi c^2)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|} \left[ \frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 \right] |I_i^{(n)}|^2, \quad (2.25)$$

avec

$$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f} \Big|_{Q_f=Q_i+n\omega} = \frac{Z^2}{(4\pi c^2)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|} \left[ \frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 \right] |I_i^{(n)}|^2. \quad (2.26)$$

On calcule à présent la partie spinorielle :

$$\frac{1}{2} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |\bar{u}(p_f, s_f) \Gamma^{(n)} u(p_i, s_i)|^2, \quad (2.27)$$

en utilisant les techniques standards de l'électrodynamique quantique dans l'algèbre de Dirac :

$$\frac{1}{2} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \frac{(\not{p}_f c + m_p c^2)}{m_p} \Gamma^{(n)} \frac{(\not{p}_i c + m_p c^2)}{m_p} \bar{\Gamma}^{(n)} \right\}. \quad (2.28)$$

Le calcul est maintenant réduit à l'évaluation des traces de matrices  $\gamma$  de Dirac. Ceci est habituellement fait en utilisant le logiciel de calcul symbolique "REDUCE" [19]. Cette quantité représente la contribution spinorielle à la section efficace différentielle et elle est explicitement détaillée dans notre travail récent [20].

L'expression de la contribution intégrale  $I_i^n$  qui contient toutes informations sur l'effet Coulombien est la suivante :

$$I_i^n = N_i \int d^3x \frac{e^{i(q_f - q_i - nk)x}}{|\mathbf{x}|} {}_1F_1(i\eta_i, 1, i(q_i|x| - \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{x})), \quad (2.29)$$

qui peut être calculée à l'aide de l'équation générale, donnée, dans la référence [21] :

$$\int {}_1F_1(i\xi, 1, i(pr - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r} - \lambda r} \frac{d\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = 4\pi \frac{a^{-i\xi}}{(a+b)^{1-i\xi}}, \quad (2.30)$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{k}^2 + (\lambda - i\mathbf{p})^2, \\ a + b &= (\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + \lambda^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

En introduisant les changements  $\xi = \eta_i$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{q}_f + n\mathbf{k}$  et,  $\mathbf{p} = \mathbf{q}_i$ , on obtient la forme finale de l'intégral  $I_i^n$  comme suit :

$$I_i^n = 4\pi N_i \frac{[(\mathbf{q}_f + n\mathbf{k})^2 - \mathbf{q}_i^2]^{-i\eta_i}}{[(\mathbf{q}_f - n\mathbf{k} - \mathbf{q}_i)]^{1-i\eta_i}}. \quad (2.32)$$

Dans l'équation (2.32), l'effet de Coulombien affecte le proton incident à travers le paramètre de Sommerfeld  $\eta_i$ . Si on néglige la distorsion due au champ Coulombien ( c-à-d on prend  $\eta_i = 0$  ), on restitue l'expression correspondante obtenue sans approximation de Coulomb.

## 2.2 Effect Coulombien sur le proton diffusé

Dans ce cas, nous décrivons le proton sortant de la même manière par la fonction d'onde de Dirac-volkov distordue comme suit :

$$\psi_{q_f}(x) = N_f {}_1F_1(-i\eta_f, 1, -i(q_f|x| + \mathbf{q}_f\mathbf{x})) R(p_f) \sqrt{\frac{m_p}{2Q_f V}} u(p, s) e^{iS(q_f, x)}, \quad (2.33)$$

avec  $\eta_f = Z\alpha Q_f/c|q_f|$  est le paramètre relativiste de sommerfeld et  $N_f = e^{\frac{\pi\eta_f}{2}} \Gamma(1 + i\eta_f)$  est le facteur de normalisation de la fonction hypergéométrique confluyente. Lorsque le proton incident ne ressent pas l'effet Coulombien, sa fonction d'onde dans le champ laser est simplement donnée par l'équation (2.6). La section efficace différentielle, avec effet Coulombien sur le proton diffusé, est donnée par :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{Z^2}{(4\pi c^2)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|} \times \left[ \frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 \right] \times |I_f^{(n)}|^2, \quad (2.34)$$

avec l'intégral  $I_f$  est donnée par la formule suivante :

$$I_f^n = N_f \int d^3x \frac{e^{i(q_f - q_i - nk)x}}{|\mathbf{x}|} {}_1F_1(i\eta_f, 1, i(q_f|x| + \mathbf{q}_f\mathbf{x})). \quad (2.35)$$

A l'aide de la forme analytique de l'intégrale bien connue suivante :

$$\begin{aligned} \int {}_1F_1(i\xi, 1, i(\mathbf{p}\mathbf{r} + \mathbf{p}\mathbf{r})) e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{r}-\lambda r} \frac{d\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} &= 2\pi \left( \frac{(\mathbf{q}-\mathbf{p})^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \right)^{i\xi-1} \\ &\times \left( \frac{(\mathbf{q}-\mathbf{p})^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} + \mathbf{p}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) - i\lambda p \right)^{-i\xi}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

et les substitutions suivantes  $\xi = \eta_f$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_f + n\mathbf{k}$  et  $\mathbf{p} = \mathbf{q}_i$ , on obtient pour l'intégral  $I_f^n$  la formule finale suivante :

$$I_f^n = 4\pi N_f [(\mathbf{q}_f - n\mathbf{k})^2 - \mathbf{q}_i^2]^{-i\eta_f} [(\mathbf{q}_f - n\mathbf{k} - \mathbf{q}_i)^2]^{i\eta_f-1}. \quad (2.37)$$

Lorsque le paramètre de Sommerfeld  $\eta_f$  est nul, on retrouve le cas simple sans effet Coulombien.

### 2.3 Effet Coulomb total

Dans cette section, le proton diffusé et incident ressentent l'effet coulombien. Dans ce cas, ils sont représentés par les fonctions d'ondes de Dirac-Volkov données explicitement dans les équations (2.12) et (2.33). La section efficace différentielle pour ce troisième cas est donnée par la même équation avec  $I_{if}^{(n)}$  au lieu de  $I_i^{(n)}$  ou  $I_f^{(n)}$  :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{Z^2}{(4\pi c^2)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|} \times \left[ \frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 \right] \times |I_{if}^{(n)}|^2. \quad (2.38)$$

L'intégral  $I_{if}^{(n)}$ , qui exprime l'effet Coulombien sur le proton incident et diffusé à la fois, est évaluée selon :

$$I_{if}^{(n)} = N_f^* N_i \int d^3x \frac{e^{i(q_f - q_i - nk)x}}{|\mathbf{x}|} {}_1F_1(i\eta_i, 1, i(q_i|x| - \mathbf{q}_i \mathbf{x})) {}_1F_1(i\eta_f, 1, i(q_f|x| + \mathbf{q}_f \mathbf{x})). \quad (2.39)$$

Après calculs analytiques fastidieux, nous trouvons l'expression analytique finale de cet intégrale comme suit :

$$I_{if}^{(n)} = N_f^* N_i \frac{2\pi}{\alpha} e^{-\pi\eta_i} \left[ \frac{\alpha}{\gamma} \right]^{i\eta_i} \left[ \frac{\alpha + \delta}{\gamma} \right]^{-i\eta_f} {}_2F_1(1 - i\eta_i, i\eta_f, 1, \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha(\gamma + \delta)}), \quad (2.40)$$

où les quantités  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  sont données par :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}_i - nk)^2 \quad ; \quad \beta = \mathbf{q}_f(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}_i - nk) \\ \gamma &= \mathbf{q}_i(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}_i - nk) - \alpha \quad ; \quad \delta = |\mathbf{q}_i||\mathbf{q}_f| - \mathbf{q}_i \mathbf{q}_f - \beta. \end{aligned}$$

Toutes les informations sur les effets Coulombiens sont contenues dans les facteurs de normalisation de la fonction d'onde qui dépendent de la fonction hypergéométrique. L'amplitude des fonctions d'onde agit sur la contribution intégrale  $I_{if}^{(n)}$  et provoque directement des changements d'amplitude dans la section efficace différentielle. Pour vérifier la cohérence de nos calculs, on annule les paramètres de Sommerfeld ( $\eta_i = 0$  et  $\eta_f = 0$ ) et nous retrouvons facilement le cas sans effet Coulombien. Dans cette sous-section, nous avons présenté les résultats complets pour les sections efficaces différentielles des protons incidents et diffusés.

## 3 Resultas et discussions

Nous présentons les résultats numériques du calcul de la section efficace différentielle, en présence du champ laser monochromatique à polarisation circulaire, pour la diffusion de proton par un potentiel Coulombien du noyau . La cible est un ion de charge  $Z$  qui se trouve à l'origine

du référentiel de laboratoire. Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  du champ laser est orienté le long de l'axe  $z$  et les vecteurs impulsion initiale et finale du proton sont dirigés vers les angles  $\phi_{i,f}$  et  $\theta_{i,f}$ . L'incorporation des effets Coulombiens au processus de diffusion est une tâche difficile. Il est évident que l'effet de Coulomb, dû à la charge de particules (proton, positron, électron, ...), n'est pas négligeable dans le régime non-relativiste. Par conséquent, il est indispensable de tenir compte de l'effet Coulombien dans les calculs de la section efficace différentielle pour de telles énergies.

Dans ce qui suit, nous voulons étudier, dans la première approximation de Born et dans le régime non-relativiste, comment le traitement correct des effets Coulombiens influence la section efficace différentielle du processus de diffusion proton-noyaux atomiques. Par conséquent, il est indispensable de tenir compte des effets Coulombiens dans les calculs de la section efficace différentielle dans le domaine de ces énergies.

### 3.1 Approximation de Coulomb simple (ACS)

Nous présentons dans les figures 1 et 2, en présence et en l'absence des champs laser, la section efficace différentielle relativiste (SEDR) en fonction de l'angle de diffusion  $\theta_f$ . Nous devons appliquer ces effets à l'interaction du proton avec les noyaux par trois possibilités : sans effet Coulombien (AB), avec effet Coulombien sur le proton incident (ACI) et avec effet Coulombien sur le proton diffusé (ACD). Puisque dans la section efficace différentielle la contribution intégrale est la même, les deux approches de calcul possibles (ACI et ACD), des figures 1 et 2, sont en accord.

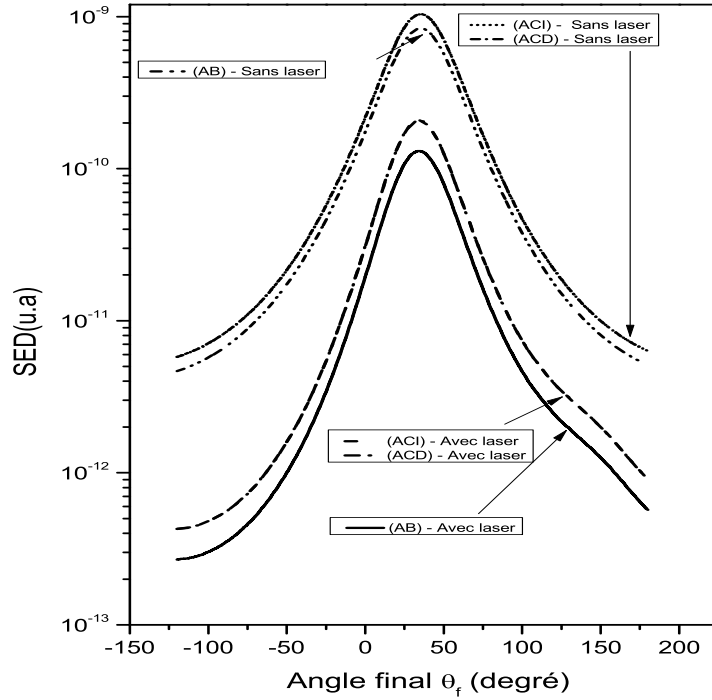


FIGURE 1 – SEDs relativistes à l'échelle Logarithmique pour les trois approches (AB), (ACI) et (ACD) en fonction de  $\theta_f$  sans laser. L'énergie cinétique du proton incident est de  $E_k = 4,97 \text{ MeV}$ . Les paramètres géométriques  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$  et  $\phi_f = 90^\circ$ . L'intensité du champ électrique  $\epsilon = 0.1 \text{ u.a}$  et le nombre de photons échangés  $n = \pm 100$ .

Cela est dû au fait que ce processus de collision est élastique et que les énergies et les impulsions, en présence du laser, sont presque égales  $[(Q_i \simeq Q_f; |\mathbf{q}_i| \simeq |\mathbf{q}_f|) \implies \eta_i \simeq \eta_f]$ . Par conséquent, puisque dans différentes énergies et géométries les deux approches chevauchent, nous remplaçons les notations (ACI) et (ACD) par une seule notation qui est " Approximation Coulombienne simple " (ACS). A partir de ces deux figures, on remarque aussi que l'introduction du champ laser, avec et sans effet Coulombien sur le proton incident ou diffusé, diminue la section efficace différentielle relativiste (SEDR).



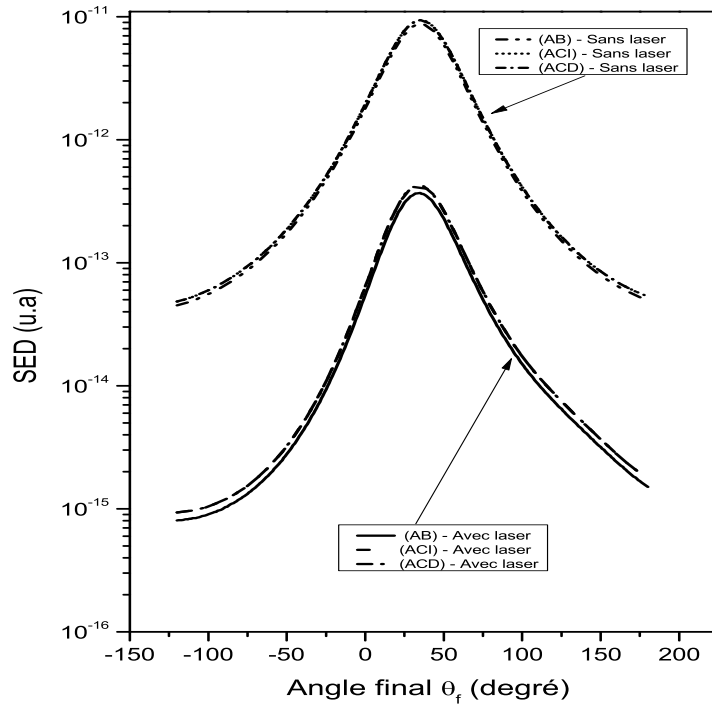


FIGURE 2 – SEDs relativistes mise à l'échelle Logarithmique pour les trois approches (AB), (ACI) et (ACD) en fonction de  $\theta_f$  en présence et en absence de champ laser. L'énergie cinétique du proton incident est de  $E_k = 46,91 \text{ MeV}$ . Les paramètres géométriques  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$  et  $\phi_f = 90^\circ$ . L'intensité du champ électrique  $\epsilon = 0.1 \text{ u.a.}$ , le nombre de photons échangés  $n = \pm 100$  et le nombre atomique  $Z = 1$

Le rapport entre les deux SEDs sans tenir compte de l'effet Coulombien (AB) et celle avec l'effet Coulombien (AC) reste pratiquement constant. Pour la géométrie choisie et le nombre de photons échangés  $\pm 100$ , les courbes, qui représentent la SED relativiste pour tous les cas, montrent un maximum au voisinage de  $\theta_f = 40^\circ$ . Le comportement général des SEDs par rapport à l'énergie cinétique du proton incident reste presque le même. Lorsqu'on augmente l'énergie  $E_k$  du proton entrant de  $E_k = 4,97 \text{ MeV}$  dans la figure 1 à  $E_k = 46,9 \text{ MeV}$  dans la figure 2, la seule différence est que les SEDs relativistes (AB) et (ACS) diminuent d'environ  $10^2$  fois. Le résultat remarquable, à travers cet étude et dans cette particulière géométrie, est que les effets Coulombiens disparaissent pour le domaine d'énergies élevées.

### 3.2 Effet total : approximation de Coulomb total (ACT)

Dans cette section, nous prenons en compte l'effet Coulombien sur le proton incident et diffusé. Les figures (3 et 4) donnent, les sections efficaces différentielles calculées (ACT) et (AB) en fonction de l'angle final  $\theta_f$  pour les deux cas avec et sans laser.

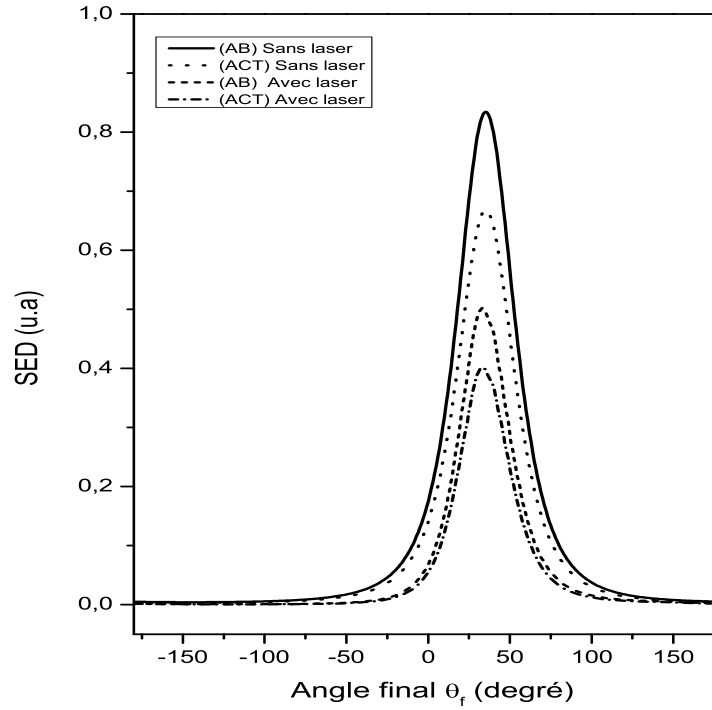


FIGURE 3 – SED relativiste en unité de  $10^{-7}$  en fonction de l'angle  $\theta_f$ . L'énergie cinétique du proton incident  $E_k = 0.49 \text{ MeV}$  l'intensité du champ laser est  $\epsilon = 0.1 \text{ u.a}$  est , la fréquence du champ laser est  $\omega = 0.043 \text{ u.a}$ , le nombre atomique  $Z = 1$  et le nombre de photons échangés est  $n = \pm 100$ . les paramètres géométriques  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$  et  $\phi_f = 90^\circ$

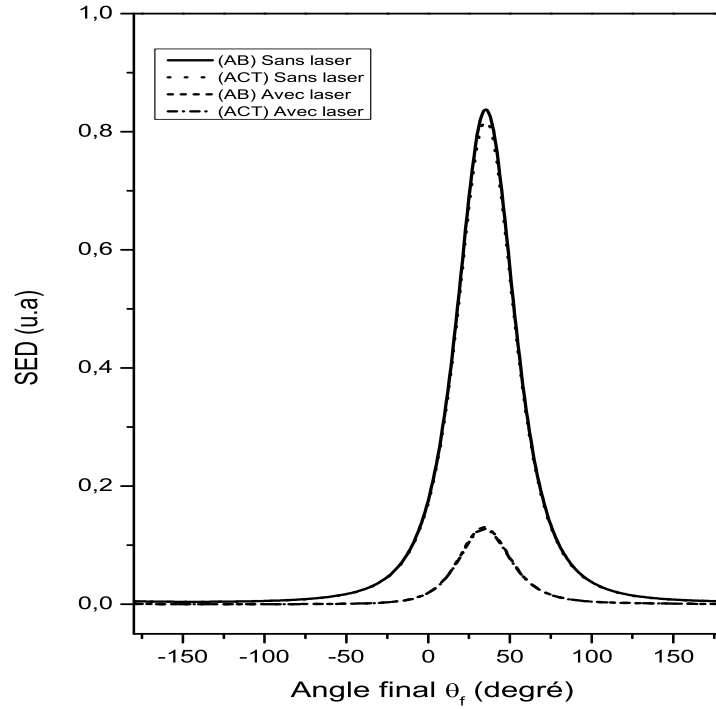


FIGURE 4 – SEDs relativistes en unité de  $10^{-9}$  en fonction de l'angle  $\theta_f$ . L'énergie cinétique du proton incident est  $E_k = 4.97 \text{ MeV}$ , l'intensité du champ électrique est  $\epsilon = 0.1 \text{ u.a.}$ , la fréquence du champ laser  $\omega = 0.043 \text{ u.a.}$ , le nombre atomique  $Z = 1$  et le nombre de photons échangés  $n = \pm 100$ . Les paramètres géométriques sont  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$  et  $\phi_f = 90^\circ$

De la figure 3, on remarque que les deux SEDs sont significativement différentes pour les énergies cinétiques non relativistes  $E_k = 0,49 \text{ MeV}$ . La figure 4 montre que, aux énergies cinétiques égales à  $4,97 \text{ MeV}$ , les deux approches, processus assistés par laser et sans laser, présentent une différence significative dans l'ordre de grandeur. On remarque aussi qu'aucune différence n'est observée lorsqu'on tient compte de l'effet Coulombien. Cela peut être compris par le fait que, les effets Coulombiens disparaissent dans la limite non relativiste  $4.97 \text{ MeV}$  et au-dessus.

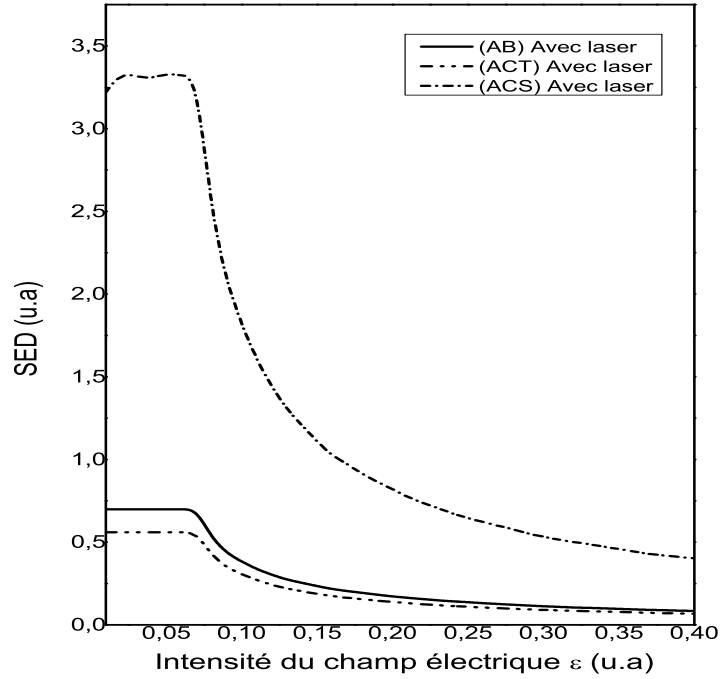


FIGURE 5 – SED relativiste (AB, ACS et ACT) en unité de  $10^{-7}$  en fonction de l'intensité du champ électrique  $\epsilon$ . L'énergie cinétique du proton incident  $E_k = 0.49 \text{ MeV}$ , les paramètres géométriques :  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$ ,  $\theta_f = 45^\circ$ , le nombre atomique  $Z = 1$  et le nombre de photons échangés  $n = \pm 100$ .

La figure 5 montre la dépendance des sections efficaces différentielles relativistes (ACS), (ACT) et (AB) de l'intensité laser pour l'énergie cinétique du proton  $E_k = 0,49 \text{ MeV}$ . De cette figure, la première remarque qu'on tire est que : les trois approches (ACS), (ACT) et (AB) présentent le même comportement. Dans de telles conditions, en particulier pour l'énergie  $E_k = 0,49 \text{ MeV}$ , il y a en fait deux types de comportement : le premier est que les SEDs sont moins sensibles à la variation de l'intensité du champ électrique au dessous de  $\epsilon \approx 0,06 \text{ (u.a.)}$  et le deuxième est que les trois approches diminuent pour les intensités de champ électrique supérieures à  $0,06 \text{ (u.a.)}$ . En outre, l'effet Coulombien dans le cas de l'approximation Coulombienne simple (ACS), augmente la SED qui est en parfait accord avec les résultats de S-M Li *et al* [18]. Toutefois, pour l'approximation Coulombienne total (ACT) cet effet diminue la section efficace différentielle.

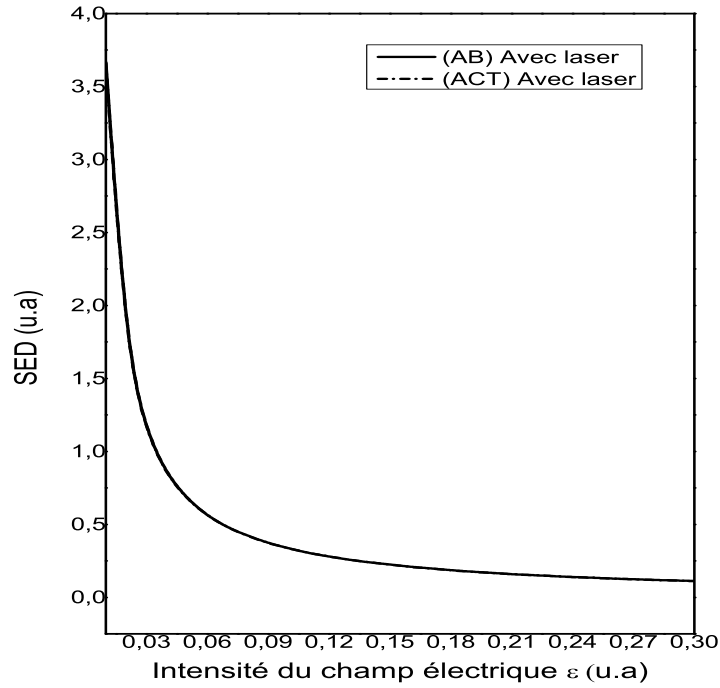


FIGURE 6 – SED relativiste (AB et ACT) en unité de  $10^{-12}$  en fonction de l'intensité du champ électrique  $\epsilon$ . L'énergie du proton incident est  $E_k = 46.9 \text{ MeV}$ , les paramètres géométriques :  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$ ,  $\theta_f = 45^\circ$ , le nombre atomique  $Z = 1$  et le nombre de photons échangés  $n = \pm 100$ .

Après avoir testé différentes géométries et différentes énergies, le comportement des différentes sections efficaces différentielles change pour les hautes énergies. On donne, dans la figure 6, le tracé des deux approches (ACT) et (AB) pour une énergie  $E_k = 46,9 \text{ MeV}$ . Deux remarques peuvent être tirées de cette figure : d'abord, les deux approches chevauchent, ce qui signifie physiquement l'absence totale de l'effet Coulombien dans ce régime. D'autre part, la disparition complète de la partie de la SED qui est moins sensible à l'intensité du champ électrique. Plus précisément, pour un point de vue physique, cela signifie que pour les faibles énergies et les petites intensités, l'interaction laser-proton est moins prononcée. Cependant, à haute énergie, l'interaction laser-proton est plus significative, même pour des intensités faibles.

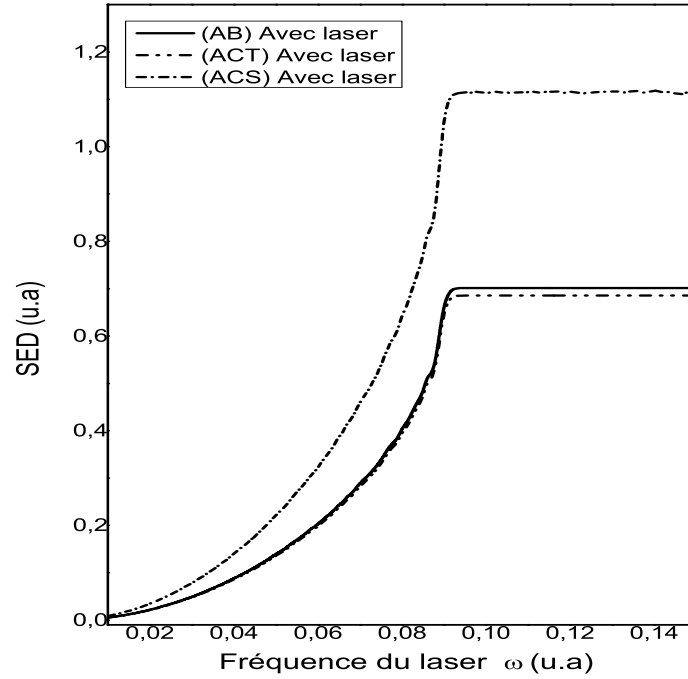


FIGURE 7 – SEDs relativistes(AB, ACT et ACS) en unité de  $10^{-9}$  en fonction la fréquence du laser pour l'énergie du proton incident  $E_k = 4.97 \text{ MeV}$ . La géométrie est telle que  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\theta_f = 45^\circ$  et  $\phi_f = 90^\circ$ . L'intensité du champ électrique  $\epsilon = 0.1 \text{ a.u.}$ , le nombre atomique  $Z = 1$  et le nombre de photons échangés  $n = \pm 100$ .

Dans la figure 7, nous avons tracé les sections efficaces différentielles relativistes (ACS), (ACT) et (AB) en fonction de la fréquence du laser  $\omega$  pour une même intensité du champ électrique, un angle final  $\theta_f = 45^\circ$  et une énergie cinétique du proton incident égale à  $4,97 \text{ MeV}$ . Les sections efficaces différentielles augmentent avec la fréquence jusqu'à la valeur  $\omega = 0,09 \text{ u.a}$  et puis elles deviennent insensibles aux changements de fréquence tout en maintenant un rapport constant entre les sections (ACS) et (AB).

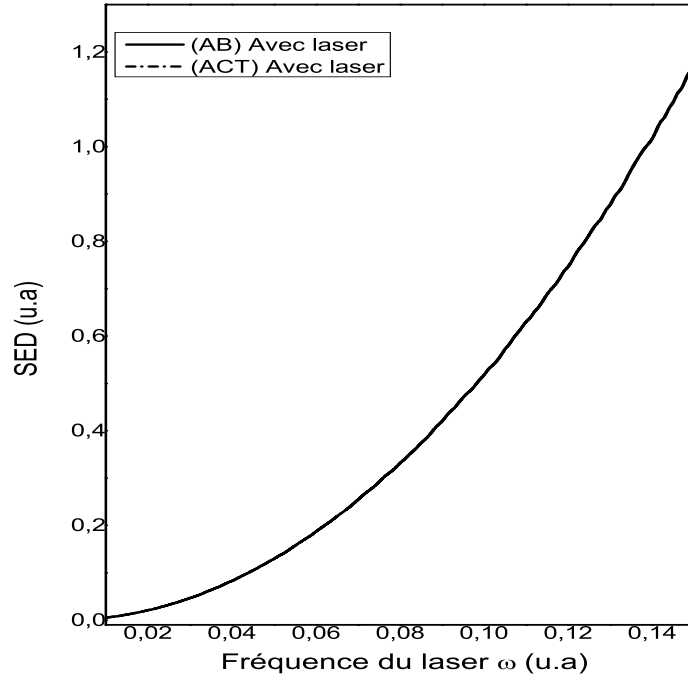


FIGURE 8 – SEDs relativistes (AB, ACT et ACS) à l'échelle  $10^{-14}$  en fonction de la fréquence du champ laser pour l'énergie cinétique du proton incident  $E_k = 497.28 \text{ MeV}$ . Les paramètres géométriques sont  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\theta_f = 45^\circ$  et  $\phi_f = 90^\circ$ . L'intensité du champ électrique  $\epsilon = 0.1 \text{ u.a.}$ , le nombre atomique  $Z = 1$  et le nombre de photons échangés  $n = \pm 100$ .

La figure 8 montre qu'à des énergies cinétiques élevées  $E_k = 497,28 \text{ MeV}$ , les SEDs relativistes augmentent avec la fréquence du laser et la partie de la SED, insensible à la variation de fréquence, disparaît complètement. En outre, à haute énergie, il n'y a pas d'effet Coulombien, puisque les deux SEDs relativistes (AB) et (ACT) donnent les mêmes résultats. Ce comportement inverse entre la dépendance de la SED relativiste vis-à-vis de l'intensité et la fréquence s'explique par l'introduction de l'énergie pondérative  $U_p = \epsilon^2/(4m_p\omega^2)$ . L'augmentation de l'intensité entraîne une augmentation de l'énergie totale et par conséquent une diminution de la section efficace différentielle. Cependant, l'augmentation de la fréquence provoque la situation inverse.

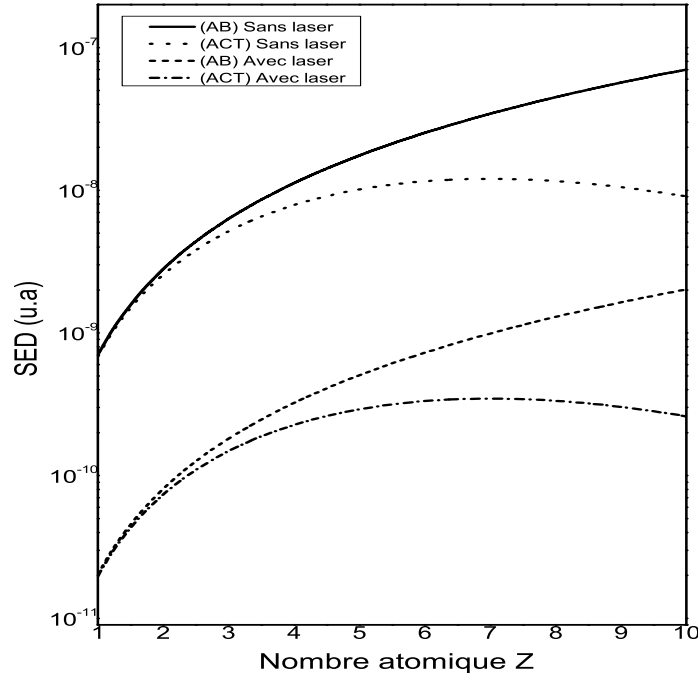


FIGURE 9 – Echelle Logarithmique des SEDs relativistes, avec et sans laser pour deux approches ((AB) et (ACT)) en fonction du nombre atomique  $Z$  pour l'énergie cinétique du proton incident  $E_k = 4.9 \text{ MeV}$ . Les paramètres géométriques sont  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$  et  $\theta_f = 45^\circ$ , l'intensité du champ électrique est  $\epsilon = 0.5 \text{ u.a}$ , la fréquence du laser  $\omega = 0.043 \text{ u.a}$  et le nombre de photons échangés est  $\pm 100$ .

Dans la figure 9, on trace les sections efficaces différentielles (ACT) et (AB) en fonction du nombre atomique  $Z$ . Les SEDs pour les deux approches diminuent avec l'introduction du champ laser à petit et à grand nombre atomique. Pour le nombre atomique  $Z > 6$ , en comparant la section efficace sans effet Coulombien ((AB) avec laser) et la section efficace avec effet Coulombien total (ACT avec laser), l'effet Coulombien est trop prononcé pour les grand  $Z$  et entraîne une diminution des sections efficaces différentielles qui tiennent compte de cet effet.



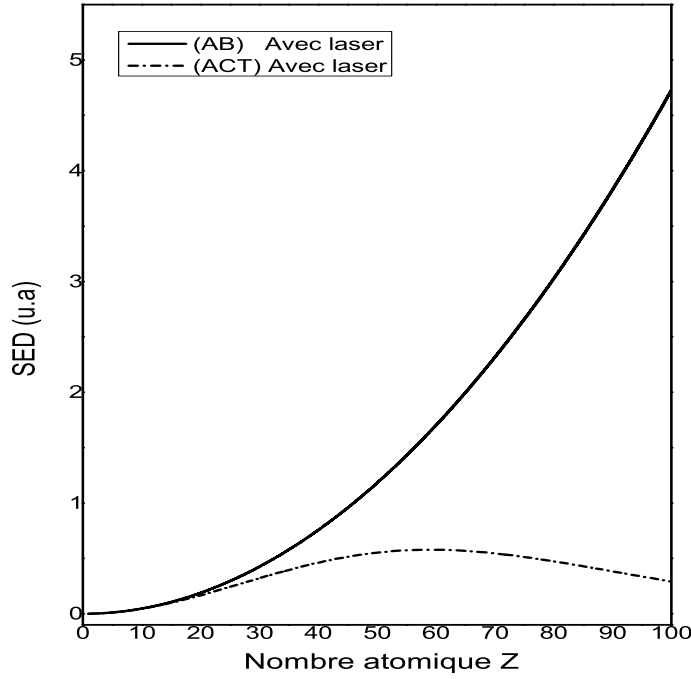


FIGURE 10 – SEDs relativistes avec et sans laser, en unité de  $10^{-13}$ , pour deux approches ((AB) et (ACT)) en fonction du nombre atomique  $Z$  pour l'énergie cinétique du proton incident  $E_k = 938.27 \text{ MeV}$ . Les paramètres géométriques sont  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$  et  $\theta_f = 45^\circ$ , l'intensité du champ électrique est  $\epsilon = 0.5 \text{ u.a}$ , la fréquence du laser  $\omega = 0.043 \text{ a.u}$  et le nombre de photons échangés est  $\pm 100$ .

Pour plus de détails, la figure 10 montre qu'en augmentant le nombre atomique  $Z$ , la limite finale du chevauchement des courbes pour les deux approches (ACT) et (AB) augmentent avec l'augmentation de l'énergie cinétique des particules incidentes. Nous avons également trouvé, à partir de cette figure, qu'en incluant l'effet Coulombien total (ACT), les sections efficaces différentielles relativistes ont deux comportements : pour les faibles nombres atomiques ( $Z < 60$ ), les SEDRs augmentent avec  $Z$  et pour les grands  $Z$  ( $Z > 60$ ), Les SEDRs diminuent avec  $Z$ . Lors de l'augmentation de  $Z$ , l'effet Coulombien commence à se manifester, Le rapport entre SED (AB) et SED (ACT) devient plus important avec l'augmentation du nombre atomique  $Z$  même dans le régime relativiste. À partir des figures 9 et 10 et pour cette géométrie particulière, nous arrivons à la conclusion suivante : l'effet Coulombien disparaît à haute énergie, en particulier pour les énergies relativistes et ultra-relativistes. Dans ce cas, les ondes planes, en très bonne approxima-

tion, peuvent être utilisées pour décrire les particules libres ainsi que les ondes de Dirac-Volkov pour décrire les particules dans le champ laser. Pour obtenir plus de renseignements sur la SED ( $n$  photons émis/absorbés), on donne, dans le tableau 1,  $d\sigma^{(n)}(E_k)/d\Omega(CT)$  pour le nombre de photons échangés  $n = -100$  et  $n = 100$ .

$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega}(CT)(E_k[MeV])$	n=-100	n=+100
$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega}(0.49)$	$3.10853 \cdot 10^{-11}$	$3.52263 \cdot 10^{-11}$
$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega}(4.97)$	$7.33867 \cdot 10^{-14}$	$6.8114 \cdot 10^{-14}$
$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega}(49.7)$	$1.9368 \cdot 10^{-16}$	$1.99826 \cdot 10^{-16}$
$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega}(938.3)$	$4.5665 \cdot 10^{-19}$	$4.56301 \cdot 10^{-19}$

TABLE 2.1 – Les paramètres géométriques sont  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$  et  $\theta_f = 45^\circ$ . L'intensité du champ électrique est  $\epsilon = 0.5 u.a$  et la fréquence du champ laser est  $\omega = 0.043 u.a$ .

Du tableau (2.1), on tire que, les deux SEDs  $(CT)d\sigma^{(n)}(E_k)/d\Omega$ , pour un nombre de photons échangés égale à  $n = -100$  et  $n = +100$ , sont différentes à basses énergies et approximativement les mêmes à hautes énergies.

### 3.3 Effet de Coulomb total sur électron

Dans cette contribution, on a donné la formule générale qui décrit une particule chargée de Dirac avec la masse  $m$ . Nous donnons au tableau (2.2) quelques différences et similitudes entre l'électron et le proton.

	Electron	Proton
Charge	-1	+1
Spin	1/2	1/2
Masse $m$	1	1836.15267245

TABLE 2.2 – Charges, spins et masses pour l'électron et le proton en unités atomiques.

Pour retrouver les résultats du processus de diffusion de l'électron, on doit changer uniquement les paramètres d'entrée de l'électron dans les codes de programmation : "REDUCE" et "fortran".

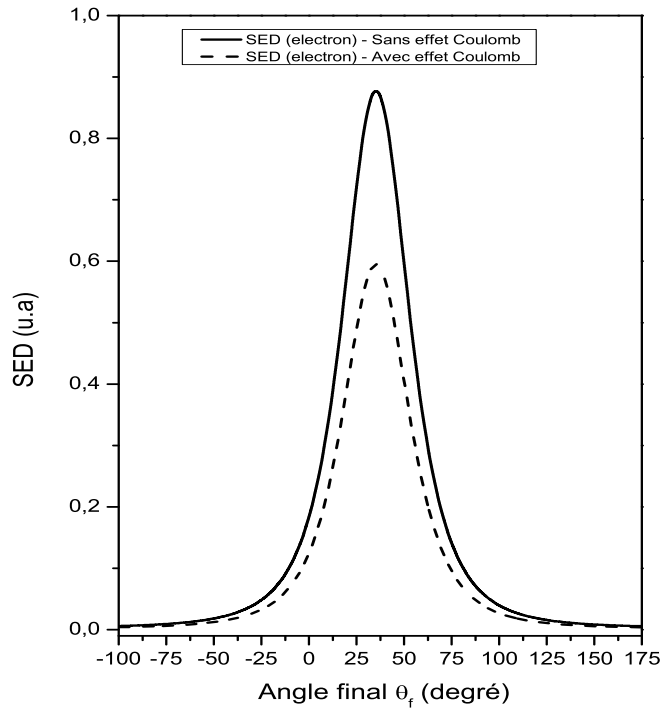


FIGURE 11 – SEDs sans laser pour électron en fonction de l’angle final  $\theta_f$ . L’énergie cinétique de l’électron incident est  $E_k = 153.32 \text{ eV}$  et le nombre atomique  $Z = 1$ . Les paramètres géométriques  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$ .

La figure 11 décrit, avec l’énergie cinétique de l’électron incident  $E_k = 153,32 \text{ eV}$ , les résultats des sections efficaces pour le processus de diffusion de Mott avec et sans effets Coulombiens en fonction de l’angle final. La section efficace avec effets Coulombiens (fonctions Coulombiennes généralisées) est donnée en ligne pointillée et la section efficace sans effets Coulomb en ligne continue. La section efficace différentielle, qui dépend de l’énergie incidente et la charge du noyau cible, a diminuée considérablement avec l’introduction de l’effet Coulombien.

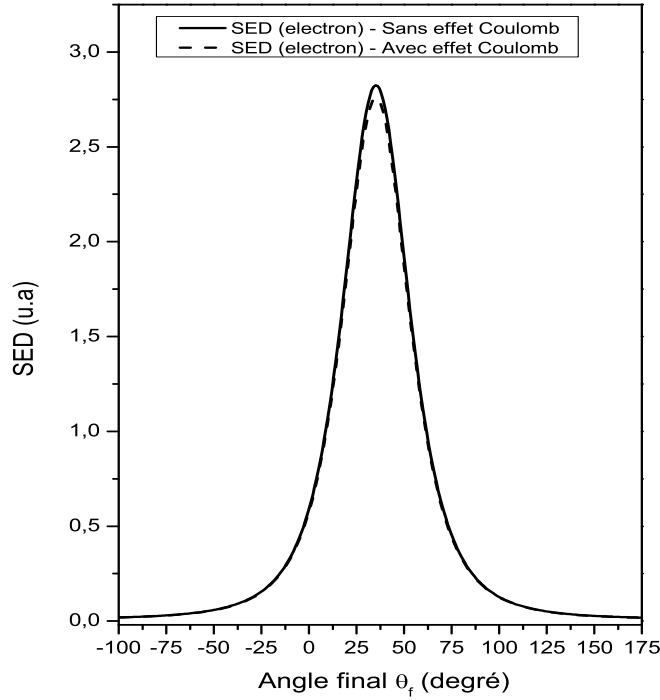


FIGURE 12 – SEDs relativistes en unité de  $10^{-3}$  pour l'électron en fonction de  $\theta_f$  et en absence du champ laser. L'énergie cinétique de l'électron est  $E_k = 2700 \text{ eV}$  et le nombre atomique  $Z = 1$ . Les paramètres géométriques sont  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$ .

La figure 12 montre que, pour l'énergie cinétique de l'électron incident  $E_k = 2700 \text{ eV}$ , les sections efficaces dans les deux approximations avec et sans effet de Coulombien sont qualitativement similaires. À partir de ces deux courbes et aussi pour cette géométrie particulière, nous arrivons à la conclusion suivante : dans le régime de basse énergie l'effet Coulombien est important alors que, pour les hautes énergies, le choix de la fonction d'onde de Dirac-Volkov pour décrire des particules de spin 1/2 dans le champ laser est bien justifié et par conséquent, l'effet Coulombien peut être négligé. Il est intéressant de souligner que la différence majeure de ce travail et celui de S-M Li *et al.* [18], qui rend la comparaison difficile, a été mentionnée dans le tableau (2.3) :

	Le travail de [18]	Notre travail
Le vecteur d'onde $\vec{k}$	dirigé suivant l'axe $y$	selon l'axe $z$
Polarization du champ Laser	Linéaire	Circulaire
L'objectif du travail	spécifique à l'électron	électron et proton

TABLE 2.3 – Quelques différences entre notre travail et celui de [18]

Dans le travail [18], les auteurs ont montré que la distorsion, par effet Coulombien de la fonction d'onde des électrons, conduit à une différence qualitative entre les sections efficaces avec et sans effet Coulombien par rapport aux différents paramètres libres. Dans ce travail, nous avons montré que cette différence significative, dans le calcul de la section efficace différentielle, se réduit quand on tient compte des effets Coulombien dans les deux états initial et final. En outre, nous avons également montré que l'approximation de la ACS de la SED surestime toujours la SED dans l'approximation (BA) ce qui est en bon accord avec [18]. La deuxième remarque importante est que : lors de l'augmentation de l'énergie de la particule incidente, la différence entre les deux approches (AB) et (ACT) diminue.

## 4 Conclusion

Nous donnons, dans le présent travail, la diffusion de proton par un potentiel Coulombien en présence d'un champ laser polarisé circulairement en tenant compte de la distorsion due aux effets Coulombien. Les sections efficaces différentielles relativistes dépendent à la fois des paramètres du champ laser et du transfert d'énergie et de l'impulsion entre le système de collision et le champ laser. L'augmentation du nombre atomique  $Z$  a la tendance générale de différencier les résultats obtenus avec et sans effet Coulombien. Ceci a suggéré l'utilisation de la fonction d'onde Coulombienne pour les grand  $Z$  en particulier pour les basses énergies cinétiques. Nous avons constaté aussi que, dans le régime non relativiste, la SEDR dans l'approximation de Coulomb simple (ACS) est toujours plus grande que celle relative à l'approximation Coulombienne totale (ACT) et sans approximation Coulombienne (BA) et que, les SEDRs des trois approches chevauchent à des énergies cinétiques élevées. L'idée principale de la présente étude est de montrer qu'à des énergies cinétiques élevées de la particule incidente, l'effet Coulombien peut être négligé et l'utilisation des états de Dirac-Volkov, plus particulièrement pour les régimes relativistes et ultra-relativistes, est largement satisfaisante pour le calcul de la section efficace différentielle en présence du champ laser.

- [1] V Yanovsky *et al.*, *Opt. Express*, **16**, 2109, (2008).
- [2] C Szymanowski, V Veniard, R Taïeb , A Maquet and C H Keitel , *Phys. Rev. A*, **56**, 3846, (1997).
- [3] N F Mott *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **124**, 135, (1932).
- [4] F Ehlotzky *Opt. Commun.*, **66**, 265, (1988).
- [5] J Z Kamiński and F Ehlotzky *Phys. Rev. A*, **59**, 2105, (1999).
- [6] P Panek, J Z Kamiński and F Ehlotzky *Can. J. Phys.*, **77**, 591, (1999).
- [7] M M Denisov and M V Fedorov *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **53**, 1340, (1967) ; *Sov. Phys. JETP*, **26**, 779, (1968).
- [8] C Szymanowski and A Maquet *Opt. Express*, **2**, 262, (1998).
- [9] P Panek, J Z Kamiński and F Ehlotzky *Phys. Rev. A*, **65**, 033408, (2002).
- [10] S-M Li, J Berakdar, J Chen and Z-F Zhou *Phys. Rev. A*, **67**, 063409, (2003).
- [11] M El Idrissi, S Taj, B Manaut and L Oufni *Ind. J. Phys.*, **88**, 111, (2014).
- [12] B Manaut, S Taj and M El Idrissi *Can. J. Phys.*, **91**, 696, (2013).
- [13] E Hrouar, M El Idrissi , S Taj and B Manaut, *Ind. J. Phys.*, **89**, 783, (2015).
- [14] Y Attaourti and B Manaut *Phys. Rev. A*, **68**, 067401, (2003).
- [15] S P Roshchupkin *Laser Phys.*, **3**, 414, (1993) ; *Laser Phys.*, **7**, 873, (1997).
- [16] M Boca *Romain Reports in physics*, **60**, 1246, (2013).
- [17] A Alebed *Laser phys.* **25**, 055301, (2015).
- [18] S-M Li, J Berakdar, J Chen and Z-F Zhou *J. Phys. B*, **37**, 653, (2004).

- 
- [19] A G Grozin *Using Reduce in High Energy Physics* (Cambridge University Press Cambridge, 1997).
- [20] E Hrou , S Taj, A Chahboune and B Manaut *Can. J. Phys*, **94**, 645, (2016).
- [21] A I Akhiezer and V B Berestetsky *Quantum Electrodynamics* (Moscow : Nauka, 1969).

## CHAPITRE 3

# EXCITATION RELATIVISTE DE L'ATOME D'HYDROGÈNE

# PAR IMPACT DE PROTON EN PRÉSENCE D'UN CHAMP LASER

# INTENSE

## 1 Introduction

L'analyse des diffusions inélastique proton-atome et proton-molécule, pour des énergies intermédiaires à des hautes énergies, a récemment attiré beaucoup d'intérêt en recherches scientifiques. Dans le cas de la diffusion des particules et des anti-particules chargées telles que les électrons ou les positrons, des traitements quantiques relativistes avec des effets de l'électrodynamique quantique ont été effectués [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Avec la disponibilité des faisceaux de protons d'énergie bien définie, l'excitation et l'ionisation de l'atome d'hydrogène par l'impact de protons a été pendant de nombreuses années un sujet de grand intérêt théorique. Une collision d'un atome d'hydrogène par l'impact du proton est la plus simple des collisions de particules lourdes par des atomes. Ce type de collision est potentiellement plus complexe que la diffusion des électrons ou des positrons, puisque le proton peut transférer beaucoup plus d'impulsion à la cible que l'électron ou le positron. De nombreuses recherches théoriques ont été effectuées pour le processus de diffusion de l'atome d'hydrogène par l'impact de proton. Bransden et Noble ont présenté le résultat théorique de la section efficace différentielle pour l'excitation de l'atome d'hydrogène au niveaux ( $2s + 2p$ ) par des protons d'énergie de  $50 \text{ KeV}$ ,  $100 \text{ KeV}$  et  $150 \text{ KeV}$ , employant la méthode "Close-Coupling"



[7]. Rudd *et al.* ont mesuré les distributions angulaires et énergétique pour des électrons éjectés de  $He$  et  $H_2$ , par protons d'énergies  $100 KeV$  et  $300 keV$  [8]. Certaines tentatives ont été faites pour étendre et améliorer la première approximation de Born en tenant compte du terme de l'effet de l'interaction nucléaire sous la forme d'ondes déformées (ondes Coulombienne avec effet d'écran). Geltman et Hidalgo ont introduit l'approximation Coulomb-Born uniquement pour les fonctions d'ondes du canal final [9]. Junker a étendu cette approche à l'aide de l'approximation de Born modifiée dans les deux canaux initial et final [10]. Mandal *et al.* ont utilisé l'approximation Coulomb-Born pour obtenir la section efficace différentielle non-relativiste pour l'excitation  $n = 2$  de l'atome d'hydrogène par impact de protons [11]. Récemment Elkilany a employé le formalisme statique couplé pour le traitement des collisions proton-lithium pour des des énergies incidentes entre  $10keV$  et  $1000keV$  [12].

Lorsque un proton d'énergie élevée entre en collision avec un atome ou une molécule, plusieurs processus inélastique autre que la diffusion élastique peuvent prendre place. Ceux de base sont l'excitation de la cible et l'éjection d'électrons libres à partir des cibles. Le proton interagit avec l'atome d'hydrogène, en fonction de l'énergie transférée, par deux processus :

- Collision élastique :  $p + H \longrightarrow p + H$
- Collision inélastique :
  - Excitation :  $p + H \longrightarrow p + H'$
  - Ionisation :  $p + H \longrightarrow p + p + e^-$

Dans ce travail, le formalisme Dirac-Volkov relativiste est employé pour le traitement des collisions de l'atome d'hydrogène par protons à haute énergie assistée par laser. Nous utilisons la théorie de perturbative à l'arbre pour déterminer la section efficace différentielle relativiste (SED) de l'excitation de l'atome d'hydrogène par impact de proton en présence d'un champ laser polarisé circulairement.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans la section 2, on donne l'essentiel du formalisme théorique. Dans la section 3, on discute les résultats obtenus et on finit par une brève conclusion dans la section 4. La métrique de Minkowski  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$  est employée tout au long de ce travail.

Dans de nombreuses équations de ce document, la notation 'slash' de Feynmann est utilisée. Pour tout 4-vecteur  $A$ ,  $\not{A} = A^\mu \gamma_\mu = A^0 \gamma_0 - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\gamma}$  où les matrices  $\gamma$  sont les matrices de Dirac bien connus.

## 2 Formalisme théorique

Dans la gamme d'énergies intermédiaire à hautes énergies, les études théoriques pour l'excitation de l'atome d'hydrogène par l'impact de protons sont basés sur des méthodes perturbatives et sont principalement l'approximations de Born et celle de Glauber [13, 14]. Dans la gamme des hautes énergies, ces méthodes perturbatives utilisent des ondes planes pour décrire des particules entrantes et sortantes. Dans la gamme de faible énergie, les erreurs dans le modèle d'ondes planes sont importantes surtout lorsque l'interaction avec le potentiel Coulombien est de longue portée. Dans ce qui suit, nous présentons les sections efficaces différentielles relativistes pour la diffusion de l'atome d'hydrogène par l'impact de proton assistée par laser. Dans ce travail, nous avons utilisé l'approximation dans laquelle le proton est 1836.15 fois plus lourd que l'électron mais avec une charge électrique positive. Il convient de noter que la principale différence dans les expressions théoriques pour la SED relativiste et non relativiste se produit dans les deux parties spinorielle et intégrale. Nous donnons ici l'expression détaillée pour la SED relativiste en présence d'un champ laser polarisé circulairement.

### 2.1 Élément de matrice de transition

Le processus dans lequel  $n$  photons sont échangés entre le système et le champ laser pendant la collision inélastique proton-atome d'hydrogène peut être décrit par la réaction suivante :

$$P(Q_i, \mathbf{q}_i) + H(1s) + n\omega \longrightarrow H(2s) + P(Q_f, \mathbf{q}_f), \quad (2.1)$$

qui représente la collision de proton incident de quadri-impulsion  $q_i = (Q_i, \mathbf{q}_i)$ , avec l'atome d'hydrogène cible (dans son état fondamental) en présence de champ laser. L'équation de conservation de l'énergie correspondante à l'excitation inélastique de l'atome d'hydrogène par impact de proton assistée par laser, s'écrit :

$$Q_f = \mathcal{E}_b(1s_{1/2}) - \mathcal{E}_b(2s_{1/2}) + Q_i + n\omega, \quad (2.2)$$

avec

$$Q_{(i,f)} = E_{(i,f)} - \frac{A^2}{2c^2(k \cdot p_{(i,f)})} \omega. \quad (2.3)$$

Le champ laser de polarisation circulaire est donné par son quadri-potentiel

$$A = a_1 \cos(\phi) + a_2 \sin(\phi),$$

où  $a_1$  et  $a_2$  satisfont aux conditions  $a_1^2 = a_2^2 = a^2$  et  $a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1 = 0$ . La condition de Lorentz est donnée par  $k \cdot A = k \cdot a_1 = k \cdot a_2 = 0$  et la phase  $\phi$  est telle que  $\phi = k \cdot x = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ , avec  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde du champ laser, dirigé selon l'axe  $z$  et  $\omega = 0,043 u.a$  sa fréquence.

Le cadre le plus simple qui a été utilisé pour analyser la diffusion inélastique de l'atome d'hydrogène par impact de proton est de supposer que le proton entrant et sortant sont des états de Dirac-Volkov. L'évaluation de la section efficace différentielle, pour la diffusion d'un atome d'hydrogène par l'impact de proton habillé de spin 1/2, peut s'effectuer d'une manière très simple dans le cadre de cette approximation. La solution de l'équation de Dirac-Volkov, décrivant le proton de quasi-impulsion initiale  $q_i$ , est donnée par :

$$\psi_{q_i}(x_1) = \left[1 - \frac{\hbar A}{2c(k \cdot p_i)}\right] \sqrt{\frac{m_p}{2Q_i V}} u(p_i, s_i) \exp \left[ -i(q_i \cdot x_1) - i \int_0^{k \cdot x_1} \frac{(A \cdot p_i)}{c(k \cdot p_i)} d\phi_1 \right]. \quad (2.4)$$

La solution similaire pour le proton diffusé de quadri-impulsion finale  $q_f$  est donnée tout simplement par le changement de l'indice ' $i$ ' par ' $f$ '. Dans le cadre de la première approximation de Born, la quantité centrale à évaluer est l'élément de matrice de transition directe  $S_{fi}$ . Cette quantité peut être calculée en utilisant les règles de Feynman en complète analogie avec le cas du proton libre. Il suffit dans l'intégrale typique de Feynman de remplacer les fonctions d'onde libre du proton par les fonctions d'onde de Dirac-Volkov et l'élément de matrice devient comme suit :

$$S_{fi} = -\frac{i}{c} \int d^4 x_1 \bar{\psi}_{q_f}(\mathbf{r}_1, t) \gamma^0 \psi_{q_i}(\mathbf{r}_1, t) \langle \phi_f(\mathbf{r}_2, t) | V_d | \phi_i(\mathbf{r}_2, t) \rangle, \quad (2.5)$$

où  $\phi_{i,f}(\mathbf{r}_2, t) = \exp(-i\mathcal{E}_b(i, f)t) \varphi_{i,f}(\mathbf{r}_2)$  sont les fonctions d'onde semi-relativistes de l'atome d'hydrogène et  $\mathcal{E}_b(i) = \mathcal{E}_b(1s_{1/2}) = c^2 \sqrt{(1 - Z^2 \alpha^2)}$  est l'énergie de liaison de l'état fondamental  $\mathcal{E}_b(f) = \mathcal{E}_b(2s_{1/2}) = c^2 \sqrt{(\sqrt{1 - Z^2 \alpha^2} + 1.0)/2}$  est l'énergie de liaison de l'état excité.  $\psi_q(\mathbf{r}_1, t)$  est la solution de Dirac-Volkov normalisée dans le volume  $V$  qui est explicitement donnée dans Eq. (2.4) et  $V_d$  est le potentiel d'interaction.

## 2.2 Section efficace différentielle

Nous utilisons les techniques standards de calcul des SED en électrodynamique quantique [15], on trouve :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4\pi c^2)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|} \left[ \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 \right] \times |I(\Delta_n)|^2. \quad (2.6)$$

avec  $\Delta_n = |\mathbf{q}_i + n\mathbf{k} - \mathbf{q}_f|$  est le transfert d'impulsion avec l'échange de  $n$  photons.

### 2.2.1 Contribution spinoriale ( $\mathcal{SC}$ )

La quantité importante qui contient toute l'information sur le spin est donnée par :

$$\mathcal{SC} = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}(p_f, s_f) \Lambda^{(n)} u(p_i, s_i)|^2, \quad (2.7)$$

avec

$$\begin{aligned}
\Lambda^{(n)} &= [\gamma^0 - 2k_0 a^2 \not{k} c(p_i) c(p_f)] B_n \\
&+ [c(p_i) \gamma^0 \not{k} \phi_1 + c(p_f) \phi_1 \not{k} \gamma^0] B_{1n} \\
&+ [c(p_i) \gamma^0 \not{k} \phi_2 + c(p_f) \phi_2 \not{k} \gamma^0] B_{2n}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Les coefficients  $B_n$ ,  $B_{1n}$  et  $B_{2n}$  sont liés aux fonctions de Bessel ordinaires et ils sont explicitement détaillés dans [16]. La partie spinorielle se réduit au calcul des traces des matrice  $\gamma$  dans l'algèbre de Dirac comme suit :

$$\frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{1}{2} Tr \left\{ \frac{(\not{p}_f c + m_p c^2)}{m_p} \Lambda^{(n)} \frac{(\not{p}_i c + m_p c^2)}{m_p} \bar{\Lambda}^{(n)} \right\}, \tag{2.9}$$

avec

$$\begin{aligned}
\bar{\Lambda}^{(n)} = \gamma^0 \Lambda^{(n) \dagger} \gamma^0 &= [\gamma^0 - 2k_0 a^2 \not{k} c(p_i) c(p_f)] B_n^* \\
&+ [c(p_i) \phi_1 \not{k} \gamma^0 + c(p_f) \gamma^0 \not{k} \phi_1] B_{1n}^* \\
&+ [c(p_i) \phi_2 \not{k} \gamma^0 + c(p_f) \gamma^0 \not{k} \phi_2] B_{2n}^*.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Après long calcul et utilisons la condition "<on-shell>" (les particules sont sur leurs couches de masses) qui se traduit mathématiquement par :  $p_i^2 = p_f^2 = m_p^2 c^2$ ,  $k^2 = 0$  et à l'aide du logiciel de calcul symbolique REDUCE [17], la partie spinorielle  $\mathcal{SC} = \frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2$  est explicitement écrite sous la forme :

$$\mathcal{SC} = \frac{1}{4(k.p_f)(k.p_i)c^4} \{ \mathcal{A} + \mathcal{B} \}$$

avec  $\mathcal{A}$  est explicitement donné par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = & 4(a_1.p_f)(a_1.p_i)j_{n+1}^2c^2\omega^2 + 8(a_1.p_f)(a_1.p_i)j_{n+1}j_{n-1}c^2\cos(2\phi_0)\omega^2 \\
& + 4(a_1.p_f)(a_1.p_i)j_{n-1}^2c^2\omega^2 + 4(a_1.p_f)(a_2.p_i)j_{n+1}j_{n-1}c^2\omega^2\sin(2\phi_0) + 4(a_1.p_f)(a_2.p_i) \\
& \times j_{n-1}j_{n+1}c^2\omega^2\sin(2\phi_0) - 4(a_1.p_f)j_{n+1}j_n(k.p_f)(k.p_i)c^5\cos(\phi_0) + 4(a_1.p_f)j_{n+1}j_n \\
& \times (k.p_i)^2c^5\cos(\phi_0) - 8(a_1.p_f)j_{n+1}j_n(k.p_i)c^3\cos(\phi_0)E_i\omega + 4(a_1.p_f)j_{n+1}j_n a^2c\cos(\phi_0) \\
& \times \omega^2 - 4(a_1.p_f)j_nj_{n-1}(k.p_f)(k.p_i)c^5\cos(\phi_0) + 4(a_1.p_f)j_nj_{n-1}(k.p_i)^2c^5\cos(\phi_0) - 8 \\
& \times (a_1.p_f)j_nj_{n-1}(k.p_i)c^3\cos(\phi_0)E_i\omega + 4(a_1.p_f)j_nj_{n-1}a^2c\cos(\phi_0)\omega^2 + 4(a_1.p_i)(a_2.p_f) \\
& \times j_{n+1}j_{n-1}c^2\omega^2\sin(2\phi_0) + 4(a_1.p_i)(a_2.p_f)j_{n-1}j_{n+1}c^2\omega^2\sin(2\phi_0) + 4(a_1.p_i)j_{n+1} \\
& \times j_n(k.p_f)^2c^5\cos(\phi_0) - 4(a_1.p_i)j_{n+1}j_n(k.p_f)(k.p_i)c^5\cos(\phi_0) - 8(a_1.p_i)j_{n+1}j_n(k.p_f) \\
& \times c^3\cos(\phi_0)E_f\omega + 4(a_1.p_i)j_{n+1}j_n a^2c\cos(\phi_0)\omega^2 + 4(a_1.p_i)j_nj_{n-1}(k.p_f)^2c^5\cos(\phi_0) \\
& - 4(a_1.p_i)j_nj_{n-1}(k.p_f)(k.p_i)c^5\cos(\phi_0) - 8(a_1.p_i)j_nj_{n-1}(k.p_f)c^3\cos(\phi_0)E_f\omega + 4 \\
& \times (a_1.p_i)j_nj_{n-1}a^2c\cos(\phi_0)\omega^2 + 4(a_2.p_f)(a_2.p_i)j_{n-1}^2c^2\omega^2 - 8(a_2.p_f)(a_2.p_i)j_{n-1}j_{n+1} \\
& \times c^2\cos(2\phi_0)\omega^2 + 4(a_2.p_f)(a_2.p_i)j_{n+1}^2c^2\omega^2 - 4(a_2.p_f)j_nj_{n-1}(k.p_f)(k.p_i)c^5\sin(\phi_0) \\
& + 4(a_2.p_f)j_nj_{n-1}(k.p_i)^2c^5\sin(\phi_0) - 8(a_2.p_f)j_nj_{n-1}(k.p_i)c^3E_i\omega\sin(\phi_0) + 4(a_2.p_f)j_n \\
& \times j_{n-1}a^2c\omega^2\sin(\phi_0) - 4(a_2.p_f)j_nj_{n+1}(k.p_f)(k.p_i)c^5\sin(\phi_0) + 4(a_2.p_f)j_nj_{n+1}(k.p_i)^2 \\
& \times c^5\sin(\phi_0) - 8(a_2.p_f)j_nj_{n+1}(k.p_i)c^3E_i\omega\sin(\phi_0) + 4(a_2.p_f)j_nj_{n+1}a^2c\omega^2\sin(\phi_0) + 4 \\
& \times (a_2.p_i)j_nj_{n-1}(k.p_f)^2c^5\sin(\phi_0) - 4(a_2.p_i)j_nj_{n-1}(k.p_f)(k.p_i)c^5\sin(\phi_0) - 8(a_2.p_i)j_n \\
& \times j_{n-1}(k.p_f)c^3E_f\omega\sin(\phi_0) + 4(a_2.p_i)j_nj_{n-1}a^2c\omega^2\sin(\phi_0) + 4(a_2.p_i)j_nj_{n+1}(k.p_f)^2 \\
& \times c^5\sin(\phi_0) - 4(a_2.p_i)j_nj_{n+1}(k.p_f)(k.p_i)c^5\sin(\phi_0) - 8(a_2.p_i)j_nj_{n+1}(k.p_f)c^3E_f\omega \\
& \times \sin(\phi_0) + 4(a_2.p_i)j_nj_{n+1}a^2c\omega^2\sin(\phi_0) + j_{n+1}^2(k.p_f)^2a^2c^4 - 2j_{n+1}^2(k.p_f)(k.p_i)a^2c^4 \quad (2.11)
\end{aligned}$$

et  $\mathcal{B}$  est donné par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} = & -2j_{n+1}^2(k.p_f)a^2c^2E_f\omega + 2j_{n+1}^2(k.p_f)a^2c^2E_i\omega + j_{n+1}^2(k.p_i)^2a^2c^4 + 2j_{n+1}^2(k.p_i)a^2c^2 \\
& \times E_f\omega - 2j_{n+1}^2(k.p_i)a^2c^2E_i\omega + 2j_{n+1}^2m_p^2a^2c^4\omega^2 + 2j_{n+1}^2a^2c^2 \cos(\widehat{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f})\omega^2|\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i| \\
& -2j_{n+1}^2a^2E_fE_i\omega^2 + 2j_{n+1}j_{n-1}(k.p_f)^2a^2c^4 \cos(2\phi_0) - 4j_{n+1}j_{n-1}(k.p_f)(k.p_i)a^2c^4 \\
& \times \cos(2\phi_0) - 4j_{n+1}j_{n-1}(k.p_f)a^2c^2 \cos(2\phi_0)E_f\omega + 4j_{n+1}j_{n-1}(k.p_f)a^2c^2 \cos(2\phi_0) \\
& \times E_i\omega + 2j_{n+1}j_{n-1}(k.p_i)^2a^2c^4 \cos(2\phi_0) + 4j_{n+1}j_{n-1}(k.p_i)a^2c^2 \cos(2\phi_0)E_f\omega - 4 \\
& \times j_{n+1}j_{n-1}(k.p_i)a^2c^2 \cos(2\phi_0)E_i\omega + 4j_{n+1}j_{n-1}m_p^2a^2c^4 \cos(2\phi_0)\omega^2 + 4j_{n+1}j_{n-1}a^2 \\
& \times c^2 \cos(\widehat{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f}) \cos(2\phi_0)\omega^2|\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i| - 4j_{n+1}j_{n-1}a^2 \cos(2\phi_0)E_fE_i\omega^2 + 8j_n^2(k.p_f)(k.p_i) \\
& \times m_p^2c^8 + 8j_n^2(k.p_f)(k.p_i)c^6 \cos(\widehat{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f})|\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i| + 8j_n^2(k.p_f)(k.p_i)c^4E_fE_i - 8.0j_n^2(k.p_f) \\
& \times a^2c^2E_i\omega - 8j_n^2(k.p_i)a^2c^2E_f\omega - 8j_n^2m_p^2a^2c^4\omega^2 + 4j_n^2a^4\omega^2 - 8j_n^2a^2c^2 \cos(\widehat{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f})\omega^2 \\
& \times |\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i| + 8j_n^2a^2E_fE_i\omega^2 + 2j_{n-1}^2(k.p_f)^2a^2c^4 - 4j_{n-1}^2(k.p_f)(k.p_i)a^2c^4 - 4j_{n-1}^2(k.p_f) \\
& \times a^2c^2E_f\omega + 4j_{n-1}^2(k.p_f)a^2c^2E_i\omega + 2j_{n-1}^2(k.p_i)^2a^2c^4 + 4j_{n-1}^2(k.p_i)a^2c^2E_f\omega - 4j_{n-1}^2 \\
& \times (k.p_i)a^2c^2E_i\omega + 4j_{n-1}^2m_p^2a^2c^4\omega^2 + 4j_{n-1}^2a^2c^2 \cos(\widehat{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f})\omega^2|\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i| - 4j_{n-1}^2a^2E_fE_i\omega^2 \\
& -2j_{n-1}j_{n+1}(k.p_f)^2a^2c^4 \cos(2\phi_0) + 4j_{n-1}j_{n+1}(k.p_f)(k.p_i)a^2c^4 \cos(2\phi_0) + 4j_{n-1}j_{n+1} \\
& \times (k.p_f)a^2c^2 \cos(2\phi_0)E_f\omega - 4j_{n-1}j_{n+1}(k.p_f)a^2c^2 \cos(2\phi_0)E_i\omega - 2j_{n-1}j_{n+1}(k.p_i)^2a^2 \\
& \times c^4 \cos(2\phi_0) - 4j_{n-1}j_{n+1}(k.p_i)a^2c^2 \cos(2\phi_0)E_f\omega + 4j_{n-1}j_{n+1}(k.p_i)a^2c^2 \cos(2\phi_0)E_i\omega \\
& -4j_{n-1}j_{n+1}m_p^2a^2c^4 \cos(2\phi_0)\omega^2 - 4j_{n-1}j_{n+1}a^2c^2 \cos(\widehat{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f}) \cos(2\phi_0)\omega^2|\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i| + 4j_{n-1} \\
& \times j_{n+1}a^2 \cos(2\phi_0)E_fE_i\omega^2 + j_{n+1}^2(k.p_f)^2a^2c^4 - 2j_{n+1}^2(k.p_f)(k.p_i)a^2c^4 - 2j_{n+1}^2(k.p_f)a^2c^2 \\
& \times E_f\omega + 2j_{n+1}^2(k.p_f)a^2c^2E_i\omega + j_{n+1}^2(k.p_i)^2a^2c^4 + 2j_{n+1}^2(k.p_i)a^2c^2E_f\omega - 2j_{n+1}^2(k.p_i)a^2 \\
& \times c^2E_i\omega + 2j_{n+1}^2m_p^2a^2c^4\omega^2 + 2j_{n+1}^2a^2c^2 \cos(\widehat{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f})\omega^2|\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i| - 2j_{n+1}^2a^2E_fE_i\omega^2. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

## 2.2.2 Contribution intégrale

On peut facilement prendre en compte de l'effet Coulombien dans les processus de diffusion de particules chargées par potentiel Coulombien (exemple diffusion de Mott). L'introduction de cet effet dans les diffusions en physique atomique, rend les calculs plus laborieux à cause de la présence de la structure

interne des cibles atomiques. L'intégral  $I(\Delta_n)$ , qui apparaît dans l'équation (2.6), peut être évaluée sans difficulté comme suit :

$$I(\Delta_n) = \int_0^{+\infty} d\mathbf{r}_1 e^{i\Delta_n \mathbf{r}_1} \int_0^{+\infty} d\mathbf{r}_2 \varphi_{2s}^\dagger(\mathbf{r}_2) V_d \varphi_{1s}(\mathbf{r}_2). \quad (2.13)$$

avec  $V_d$  est le potentiel d'interaction dans le canal direct :

$$V_d = \frac{Z}{r_1} - \frac{1}{r_{12}}, \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{r}_1$  sont les coordonnées du proton,  $\mathbf{r}_2$  sont les coordonnées de l'électron atomique, et  $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ .

Dans l'équation (2.13),  $\varphi_{1s}(\mathbf{r}_2)$  est la fonction d'onde de Darwin pour l'état fondamental. Pour le spin up,  $\varphi_{1s_{1/2}}(\mathbf{r}_2)$  s'écrit :

$$\varphi_{1s}(\mathbf{r}_2) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{i}{2cr_2} z \\ \frac{i}{2cr_2} (x + iy) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r_2} \quad (2.15)$$

et  $\varphi_{2s}(\mathbf{r}_2)$  est la fonction d'onde de Darwin pour l'état  $2s_{1/2}$  :

$$\varphi_{2s}(\mathbf{r}_2) = C_2 \begin{pmatrix} 2 - r_2 \\ 0 \\ \frac{i(4-r_2)}{4r_2c} z \\ \frac{(4-r_2)}{4rc} (-y + ix) \end{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-r_2}, \quad (2.16)$$

avec  $C_1$  et  $C_2$  sont les constantes de normalisation très proche de 1. On développe les deux quantités  $r_{12}^{-1}$  et  $e^{i\Delta_n \mathbf{r}_1}$  en termes des harmoniques sphériques tel que (Pour plus de détail voir annexe A) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{12}} &= 4\pi \sum_{lm} \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}_2)}{2l+1} \frac{(r_<)^l}{(r_>)^{l+1}}, \\ e^{i\Delta_n \mathbf{r}_1} &= \sum_{lm} 4\pi i^l j_l(\Delta_n r_1) Y_{lm}(\widehat{\Delta_n}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}_1). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dans l'expression de  $r_{12}^{-1}$ ,  $r_>$  est le plus grand de  $r_1$  et  $r_2$ , et  $r_<$  le plus petit. Dans l'expression de  $e^{i\Delta_n \mathbf{r}_1}$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_1 = (\theta_1, \varphi_1)$  et  $\hat{\mathbf{r}}_2 = (\theta_2, \varphi_2)$  sont les coordonnées angulaires de  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  respectivement. Après long calcul et en utilisant l'intégral bien connu [15]

$$\int_x^{+\infty} du u^m e^{-\alpha u} = \frac{m!}{\alpha^{m+1}} e^{-\alpha x} \sum_{\mu=0}^m \frac{\alpha^\mu x^\mu}{\mu!}; \text{Re}(\alpha) > 0, \quad (2.18)$$

l'expression analytique finale de la contribution intégrale devient comme suit :

$$I(\Delta_n) = -\frac{4\pi}{\sqrt{2}}(I_1 + I_2 + I_3), \quad (2.19)$$

où les trois intégrales  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont explicitement données par :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{4}{27c^2} \int_0^{+\infty} dr_1 r_1 e^{-\frac{3}{2}r_1} j_0(\Delta_n r_1) \\ &= \frac{4}{27c^2} \frac{1}{((3/2)^2 + |\Delta_n|^2)}, \\ I_2 &= \frac{6}{27} \left(\frac{1}{c^2} - 4\right) \int_0^{+\infty} dr_1 r_1^2 e^{-\frac{3}{2}r_1} j_0(\Delta_n r_1) \\ &= \frac{2}{27} \left(\frac{1}{c^2} - 4\right) \frac{3}{((3/2)^2 + |\Delta_n|^2)^2}, \\ I_3 &= -\frac{4}{9} \left(1 + \frac{1}{8c^2}\right) \int_0^{+\infty} dr_1 r_1^3 e^{-\frac{3}{2}r_1} j_0(\Delta_n r_1) \\ &= \frac{8}{9} \left(1 + \frac{1}{8c^2}\right) \frac{|\Delta_n|^2 - 27/4}{((3/2)^2 + |\Delta_n|^2)^3}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 3 Résultats et discussions

La collision des particules lourdes par des atomes demeure un champ de développement trop fertile en théories de diffusion atomique. Il existe deux classes de processus inélastiques qui peuvent avoir lieu : L'excitation de la cible ou l'ionisation directe. Ce travail est consacré à l'excitation relativiste de l'atome d'hydrogène par l'impact de proton en présence d'un champ laser. En particulier, le calcul des sections efficaces pour l'excitation de l'atome d'hydrogène  $1s - 2s$  par l'impact du proton à différentes énergies cinétiques du proton incident en utilisant des techniques standard de l'électrodynamique quantique et le formalisme de Dirac-Volkov. On s'intéresse maintenant à la cinématique du processus de diffusion en système laboratoire. Pour la description de la géométrie de diffusion, nous utilisons des variables angulaires en coordonnées sphériques  $(\theta_{(i,f)}, \phi_{(i,f)})$  pour  $\vec{p}_{(i,f)}$  et l'angle  $\theta_{if}$  est défini comme  $\theta_{if} = \angle(\vec{p}_i, \vec{p}_f)$ . Il est important de comparer les valeurs de la SED  $d\sigma^n/d\Omega$  correspondantes à l'échange de  $n$  photons où seul le terme de l'habillage de proton est pris en compte, avec la section SED non relativiste correspondante. En utilisant les états non-relativistes de Shrödinger-Volkov, on obtient facilement pour le cas non relativiste :

$$\frac{d\sigma^n}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{k}_f|}{|\mathbf{k}_i|} j_n^2 \left( \frac{|A|}{c\omega} [(\mathbf{K}_n \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 + (\mathbf{K}_n \cdot \hat{\mathbf{y}})^2]^{1/2} \right) |f_{B1}(\mathbf{K}_n)|^2, \quad (3.1)$$



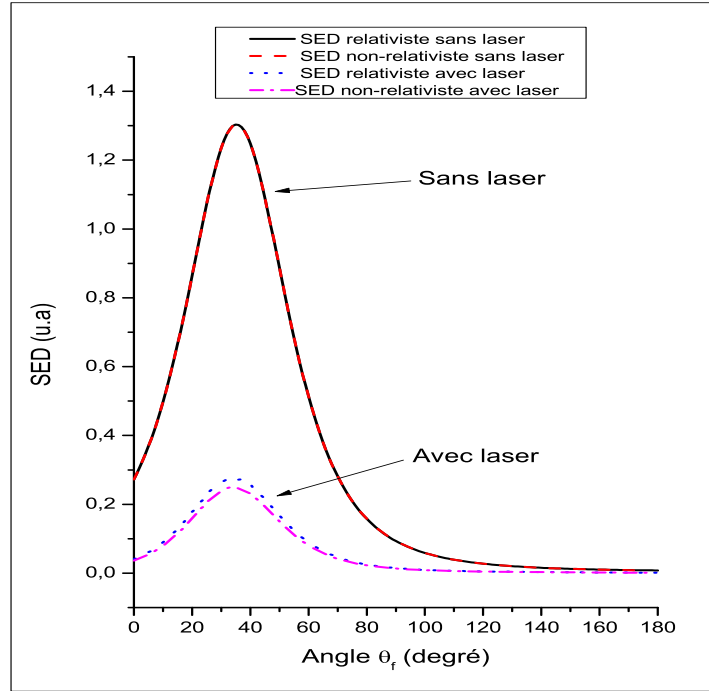


FIGURE 1 – SEDs relativiste et non-relativiste (en unité de  $10^{-20}$ ) avec et sans champ laser pour la diffusion d'atome d'hydrogène par impact de proton en fonction de l'angle final  $\theta_f$ , l'énergie cinétique du proton est fixée à ( $4.973 \text{ MeV}$ ). Les paramètres géométriques sont tels que  $\theta_i = \varphi_i = 45^\circ$ ,  $\varphi_f = 90^\circ$ . Les paramètres de champ laser sont : l'intensité du champ électrique  $\mathcal{E} = 0.05 \text{ u.a}$  et le nombre de photons échangés  $n = \pm 60$ .

où

$$f_{B1}(\mathbf{K}_n) = -\frac{8\sqrt{2}}{[\mathbf{K}_n^2 + \frac{9}{4}]^3}, \quad (3.2)$$

avec  $\mathbf{k}_i$  et  $\mathbf{k}_f$  sont les vecteurs impulsions initial et final du proton,  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{y}}$  sont les vecteurs unitaires du plan de polarisation du champ laser et  $\mathbf{K}_n$  est le transfert d'impulsion non relativiste en présence d'un champ laser. Nous avons donné les résultats des sections efficaces différentielles pour différentes énergies cinétiques de proton incident et différentes intensités du champ laser. Figure 1 représente la comparaison entre la SED relativiste et non-relativiste dans la limite non-relativiste pour deux cas : en présence et en l'absence du champ laser. A partir de cette figure, on voit bien que les deux SEDs chevauchent en l'absence du champ laser mais une légère différence se produit dès qu'on introduit le champ laser. Figure

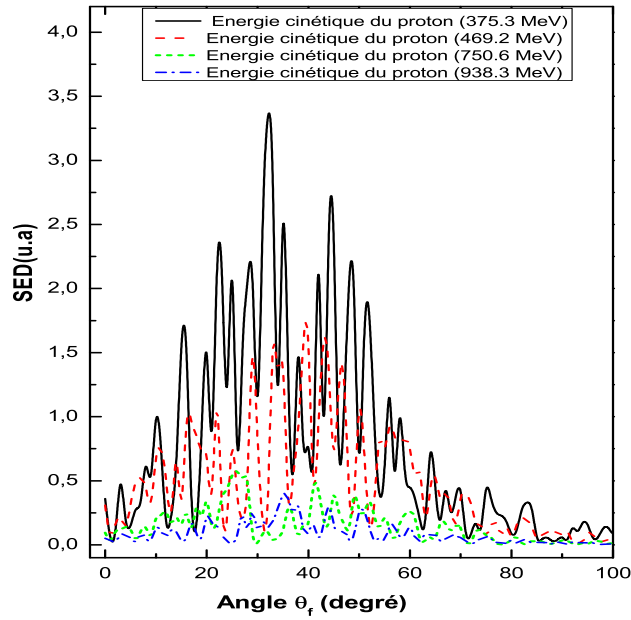


FIGURE 2 – SED relativiste (à l'échelle de  $10^{-29}$ ) pour la diffusion d'atome d'hydrogène par impact de proton par rapport à  $\theta_f$  pour l'intensité fixé de champ électrique ( $\mathcal{E} = 1 u.a$ ) et différentes énergies cinétiques (375.3 MeV, 469.2 MeV, 750.6 MeV and 938.3 MeV). La géométrie du processus est donné par  $\theta_i = \varphi_i = 45^\circ$ ,  $\varphi_f = 90^\circ$ . Ce processus est en présence de champ laser mais sans échange de photons.

2 présente les résultats des SEDs relativistes pour l'excitation de l'atome d'hydrogène par l'impact de proton pour diverses énergies cinétiques  $E_k = 375,3 MeV$ ,  $469,2 MeV$ ,  $750,6 MeV$  et  $938,3 MeV$  en présence d'un champ laser avec une intensité de champ électrique  $\mathcal{E} = 1 u.a$  mais sans échange de photons. En dehors des différences d'ordre de grandeurs, les quatres courbes présentent un comportement oscillatoire. Figure 3 montre la dépendance angulaire par rapport à  $\theta_f$  des sections efficaces différentielles relativistes pour une énergie cinétique fixe du proton ( $497.3 MeV$ ) et pour diverses intensités de champ électrique et sans échange de photons. Les SEDs sont présentés dans un domaine de champ électrique, de ( $1 u.a$  à  $2.5 u.a$ ) et présentent un comportement oscillatoire fort. Ces deux SEDs montrent clairement des oscillations inhérentes aux fonctions de Bessel ordinaires. Un tel comportement est également trouvé pour le cas du régime non-relativiste. Ce comportement oscillatoire est valable tant que le nombre de

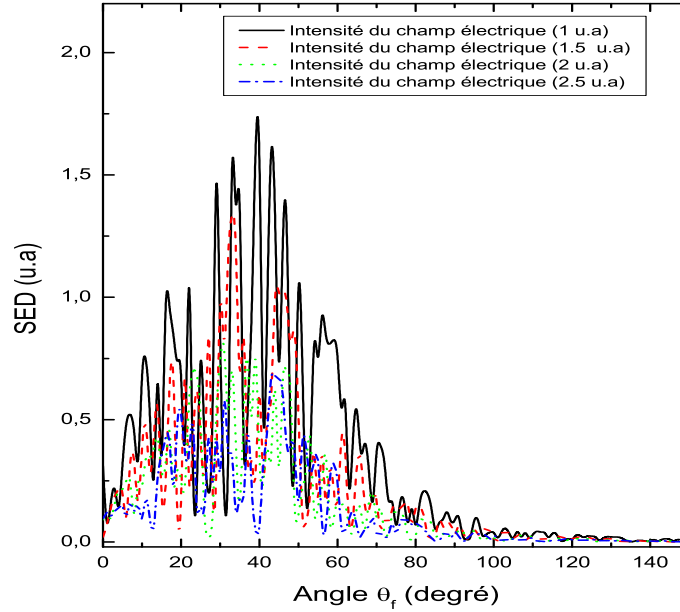


FIGURE 3 – SED relativiste (en unité de  $10^{-29}$ ) de la diffusion de l'atome d'hydrogène par l'impact du proton par en fonction de l'angle final  $\theta_f$  pour l'énergie cinétique du proton ( $497.3 \text{ MeV}$ ) et pour différentes intensités du champ électrique ( $1 \text{ a.u.}$ ,  $1.5 \text{ a.u.}$ ,  $2 \text{ a.u.}$  et  $2.5 \text{ a.u.}$ ). Les paramètres géométriques sont :  $\theta_i = \varphi_i = 45^\circ$ ,  $\varphi_f = 90^\circ$ . Le processus est en présence d'un champ laser mais sans échange de photons.

photons échangés reste nul. Ces oscillations disparaissent lorsque les SEDs sont sommées sur un très grand nombre de photons échangés  $\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma^n}{d\Omega_f}$ . Pour plus de détails qualitatifs, on donne dans la figure 4 la SED en trois dimensions par rapport à l'angle final  $\theta_f$  et l'intensité du champ électrique  $\mathcal{E}$ . A trois dimensions, la SED a pris une nouvelle forme autre que celle des figures précédentes. Le comportement oscillatoire qualitatif observé sur les deux figures (2 et 3) disparaît complètement après la somme sur le nombre de photons échangés  $n = \pm 50$ . Toutefois, les sections efficaces diminuent avec l'intensité du champ électrique et décroissent rapidement à zéro pour les petits et grands angles.

Figure 5 donne l'enveloppe de la SED relativiste de spin non polarisé en fonction du transfert d'énergie photonique. La section efficace différentielle relativiste s'annule au-delà des points où les arguments

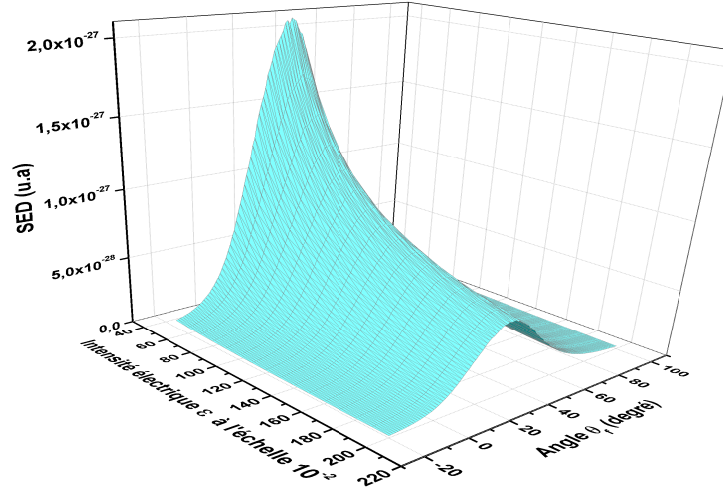


FIGURE 4 – SEDs relativistes pour la diffusion de l’atome d’hydrogène par l’impact du proton, l’énergie cinétique est fixée à  $(469.13 \text{ MeV})$ , en fonction de l’angle final  $\theta_f$  ( $-20^\circ \leq \theta_f \leq 100^\circ$ ) et l’intensité du champ électrique  $\mathcal{E}$  ( $0.5 \text{ u.a} \leq \mathcal{E} \leq 2 \text{ u.a}$ ) le nombre de photons échangé est  $n = \pm 50$ . Les paramètres géométriques sont tels que  $\theta_i = \varphi_i = 45^\circ$ ,  $\varphi_f = 90^\circ$ .

des fonctions de Bessel sont approximativement proches de leurs ordres. Cette annulation se produit numériquement pour  $n = \pm 1820$  et un argument  $z$  des fonctions de Bessel ordinaires presque constant et égal à 1819.94. Cette figure montre aussi que la règle de somme bien connue de Kroll-Watson [19] sera atteinte à environ  $n = \pm 1820$ . Cette règle, pour les états de transition libre, est définie par :

$$\sum_n \frac{d\sigma^n}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad (3.3)$$

où la sommation est sur tous les  $n$  positifs et négatifs et le terme de droite représente la section efficace différentielle sans champ. On observe généralement que lorsque les particules de Dirac sont diffusées par un atome d’hydrogène en présence d’un champ laser, de nouveaux effets sont observés qui ne sont pas accessibles en l’absence du champ laser. Ces collisions ont la particularité fondamentale d’être des processus dans lesquels trois sous-systèmes sont présents : proton, cible d’atome d’hydrogène et le champ

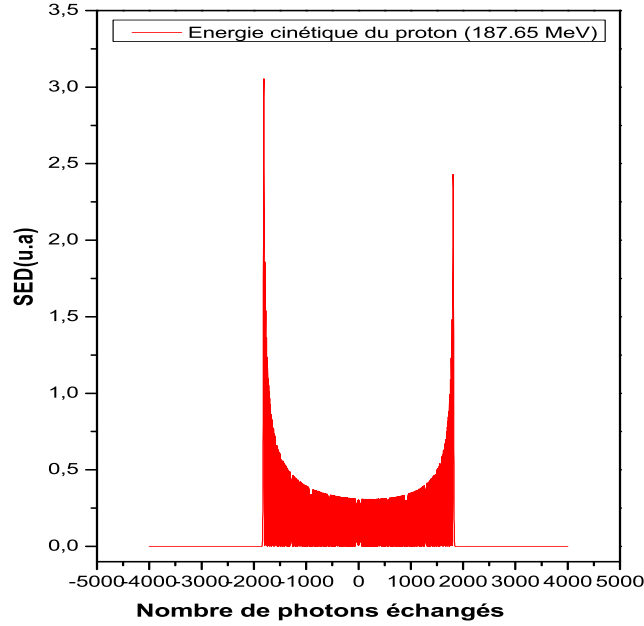


FIGURE 5 – Enveloppe de la section efficace différentielle relativiste en unité de  $(10^{-26})$  en fonction du nombre de photons échangés. L'énergie cinétique du proton incident est  $:(187.65 \text{ MeV})$ , l'intensité du champ électrique ( $\mathcal{E} = 0.05 \text{ u.a}$ ) et la géométrie de la collision est telle que  $\theta_i = \varphi_i = \theta_f = 45^\circ$ ,  $\varphi_f = 90^\circ$ .

électromagnétique qui dépend de trois paramètres : l'intensité, la fréquence et le degré de polarisation.

Dans ce travail, nous avons étudié la diffusion de l'atome d'hydrogène par l'impact de proton en présence du champ laser. La section efficace différentielle dépend, en plus de l'énergie et des paramètres géométriques, de l'intensité et de la fréquence du champ laser.

De la figure 6, on constate que la section efficace croît avec l'augmentation de la fréquence  $\omega$  du champ laser. La figure montre également que, la section efficace est nulle en dessous de la fréquence seuil de  $0.05 \text{ u.a}$ . Ceci se traduit par le fait que l'énergie totale du proton étant essentiellement la somme de l'énergie cinétique du proton, de l'énergie du proton au repos et de l'énergie ponderomotrice moyenne gagnée par le proton en présence du champ laser. Cette dernière quantité est telle que  $U_p = \mathcal{E}_0^2 / (4m_p\omega^2)$  et elle représente juste l'énergie cinétique moyenne dans un cycle de mouvement de proton dans un champ électromagnétique oscillant. Ce travail est limité par le fait qu'il n'y a pas d'expériences et d'études

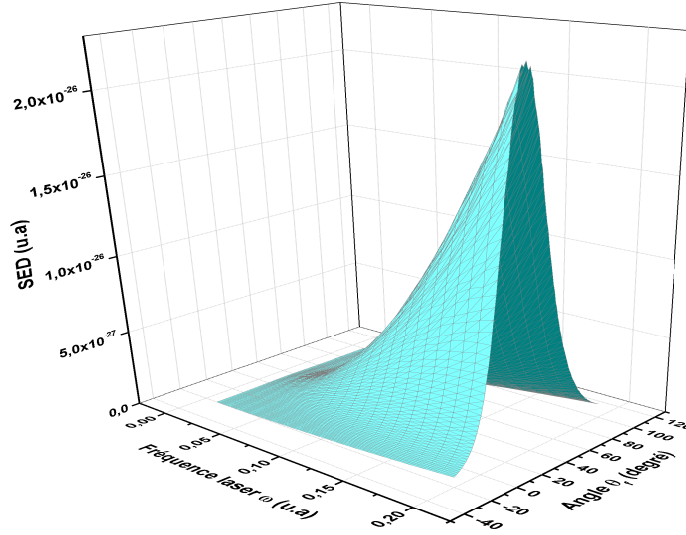


FIGURE 6 – Section efficace différentielle pour la diffusion de l’atome d’hydrogène par l’impact du proton, pour une énergie cinétique du proton fixée ( $469.13 \text{ MeV}$ ), en fonction de l’angle final  $\theta_f$  ( $-20^\circ \leq \theta_f \leq 100^\circ$ ), l’intensité du champ électrique  $\mathcal{E} = 1.0 \text{ u.a}$ , la fréquence varie entre deux valeurs ( $0.01 \text{ u.a} \leq \omega \leq 0.2 \text{ u.a}$ ) et le nombre de photons échangés est tel que :  $n = \pm 50$ . Les paramètres géométrique sont :  $\theta_i = \varphi_i = 45^\circ$ ,  $\varphi_f = 90^\circ$ .

théoriques parallèles pour une telle comparaison.

## 4 Conclusions

Dans ce chapitre, l’effet de la relativité et l’interaction spin-champ laser sont étudiés pour les collisions inélastiques relativistes de l’atome d’hydrogène par l’impact de proton. Nous avons conclu que pour les énergies cinétiques élevés du proton, les états de Dirac-Volkov devraient fournir de bons résultats pour les sections efficaces différentielles. Les résultats théoriques présentés dans ce travail représentent une description relativiste complète de l’expression analytique détaillée des sections efficaces différentielles de

la diffusion proton-atome d'hydrogène assistées par laser. La règle de somme, indiquant que la section efficace différentielle sommée sur tous les nombres de photons échangés donne la section efficace différentielle sans champ, est largement satisfaite à des nombre de photons d'environ  $n = \pm 1820$  pour le cas relativiste. Ces résultats représentent un défi passionnant pour tester des expériences à haute énergie. On espère que les résultats rapportés ici stimulent le scientifiques pour de nouvelles observations dans cette nouvelle classe de collisions atomiques.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Manaut, S. Taj and M. El Idrissi, *Can. J. Phys.* **91**, 696 (2013).
- [2] M. El Idrissi, S. Taj, B. Manaut and L. Oufni, *Ind. J. Phys.* **88**, 111 (2014).
- [3] S-M Li, J. Berakdar, J. Chen and Z-F Zhou, *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **37**, 653 (2004).
- [4] J. M. Ngoko Djiokap, H. M. Tetchou Nganso, and M. G. Kwato Njock, *Phys. Scr.* **75**, 726 (2007).
- [5] C. Szymanowski, V. Véniard, R. Taïeb, A. Maquet, and C. H. Keitel, *Phys. Rev. A* **56**, 3846 (1997).
- [6] S.-M. Li, J. Berakdar, J. Chen, and Z.-F. Zhou, *Phys. Rev. A* **67**, 063409 (2003).
- [7] B. H. Bransden and C. J. Noble, *Phys. Lett. A* **70**, 404 (1979).
- [8] M. E. Rudd, C. A. Sautler and C. L. Bailey, *Phys. Rev.* **151**, 20 (1966).
- [9] S. Geltman and M. B. Hidalgo, *J. Phys. B : At. Mol. Phys.* **4**, 1299 (1971).
- [10] B. R. Junker, *Phys. Rev. A* **11**, 1552 (1975).
- [11] C. R. Mandal, Shyamal Datta, and S.C. Mukherjee, *Phys. Rev. A* **24**, 3044 (1981).
- [12] S. A. Elkilany, *Journal of Theoretical Chemistry*, vol. **2014**, Article ID 820672 (2014).
- [13] A. S. Ghosh and N. C. Sil, *J. Phys. B : At. Mol. Phys.* **4**, 836 (1971).
- [14] V. Franco and B. K. Thomas, *Phys. Rev. A* **4**, 945 (1971).
- [15] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (New York : McGraw-Hill 1964) ; C. Itzykson and J-B Zuber, *Quantum field Theory* (New York : McGraw-Hill, 1985).



- 
- [16] Y. Attaourti and B. Manaut, *Phys. Rev. A* **68**, 067401 (2003).
- [17] A. G. Grozin, *Using REDUCE in High Energy Physics* (Cambridge University, Cambridge, England, 1997).
- [18] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik : *Tables of Integrals, Sutures, Sets and Their Products* (Moscow : Nauka, 1971).
- [19] N. M. Kroll and K. M. Watson, *Phys. Rev. A* **8**, 804 (1973).

## CHAPITRE 4

# DIFFUSION ÉLASTIQUE RELATIVISTE DE L'ATOME D'HYDROGÈNE PAR L'IMPACT DE POSITRONS : EFFET DU MOMENT MAGNÉTIQUE ANOMAL

## 1 Introduction

La diffusion de l'atome d'hydrogène par impact d'électrons et de positrons est un processus fondamental dans les collisions atomiques relativistes. L'hydrogène est le seul atome pour lequel les fonctions d'ondes non relativistes et relativistes sont connues exactement. Le processus de collision relativiste  $e^\pm - H$ , incluant les effets relativistes, fournit un vaste champ d'expérimentation intéressante pour la théorie de diffusion en électrodynamique quantique (QED). La majorité des précisions et les tests spécifiques du QED consiste à mesurer la constante de structure fine  $\alpha$  qui est proportionnelle au moment magnétique anormal.

À l'ordre zéro de la théorie de perturbation, la QED prédit que la valeur de  $g$  est égale à 2 pour un électron et un positron, l'interaction d'un électron (ou un positron) avec le vide, tel qu'il est décrit en électrodynamique quantique (QED), donne une valeur de  $g$  légèrement supérieure à 2 par environ une

partie par mille. Cet écart de 2 est appelé moment magnétique anomal, noté  $a_e$  défini par :  $\frac{g}{2} = (1 + a_e)$ .

Une mesure de la valeur  $g$  pour l'électron fournit un test précis de la théorie de Dirac et de l'électrodynamique quantique pour près de 20 ans.

La meilleure valeur du moment magnétique anomal pour l'électron libre est [1, 2] :

$$a_{e^-} = 0.00115965218073(28).$$

Pour le positron et en tenant compte de la symétrie particule-antiparticule chargée

$$g_{e^-}/g_{e^+} = 1 + (0.5 \pm 2.1) \times 10^{-12}, \text{ on a}$$

$$a_{e^+} = 0.00115965218068(28).$$

L'interaction matière anti-matière est un champ de recherches actif et intéressant [3, 6]. L'un des plus simples processus de ce type est la collision entre positron-atome [7, 12] et positron molécule [13, 14], ces processus de collision sont importants en physique atomique et moléculaire.

L'ouvrage fondamental "Physique de positrons" par Charlton et Humberston [15] a donné les principales avancées dans le domaine de la physique de positron. Il aborde une étude détaillée du domaine de basses énergies du positron et positronium en physique atomique et moléculaire. La disponibilité des faisceaux intenses de positrons mono-énergétiques et des améliorations récentes dans les techniques de mesure actuelles fournissent régulièrement de nouvelles preuves sur la formation du positronium, l'annihilation et la diffusion des positrons.

Premièrement, ce travail donne les bases théoriques nécessaires de calcul des sections efficaces différentielles SEDs du positron et de l'électron en énonçant le cadre dans lequel la théorie relativiste des positrons a été introduite. Ensuite, nous avons discuté l'équation de Dirac pour le positron en l'absence et en présence de l'effet du moment magnétique anomal. Cette étape sera suivie d'une brève théorie relativiste décrivant l'atome d'hydrogène. Nous avons aussi discuté le spin et la relativité comme étant des degrés de liberté internes et ils sont intrinsèques à la théorie de Dirac.

Dans la section 2 de ce chapitre, nous avons développé le formalisme théorique nécessaire pour l'étude du processus proposé. Dans la section 3, nous avons discuté les résultats que nous avons obtenu et nous avons terminé par une brève conclusion dans la section 4. Les unités atomiques sont utilisées  $\hbar = m = e = 1$ ,

la métrique plane de Minkowski est :  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  et la notation slash de Feynman est utilisée tel que pour tout quadri-vecteur  $A$ , on a  $\not{A} = A^\mu \gamma_\mu = A^0 \gamma_0 - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ .

## 2 Partie théorique

Le but de ce travail est de généraliser le processus de diffusion positron-hydrogène assisté par rayonnement laser en tenant compte l'effet du moment magnétique anomal du positron. Le moment magnétique anomal du positron, qui résulte du fait qu'il peut émettre ou absorber des photons virtuels, est pris en compte de manière phénoménologique en ajoutant, dans l'équation de Dirac en présence du champ magnétique extérieur, le terme de Dirac-Pauli qui exprime l'interaction du moment magnétique anomal avec le champ,  $ia_{e^+} \left( \not{p} - \frac{\not{A}}{c} + c \right) F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$ . On écrit alors l'équation de Dirac avec moment magnétique anomal comme suit :

$$\left[ \left( p - \frac{1}{c} A \right)^2 - c^2 - \frac{i}{2c} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + ia_{e^+} \left( \not{p} - \frac{\not{A}}{c} + c \right) F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \psi(x) = 0, \quad (2.1)$$

Dans ce cas, on remplace les fonctions d'onde de Dirac Volkov par la solution la plus générale de l'équation de Dirac en tenant compte de l'effet du moment magnétique anomal. D'après Feynman, la fonction d'onde du positron est obtenue de celle de l'électron en effectuant le remplacement suivant :  $[\psi^{\text{électron}}(-p_f, -s_f) \longrightarrow v(p_f, s_f)]$  qui est une caractéristique générale de la théorie de positrons appelée "règle de substitution". Ainsi, la fonction d'onde correctement normalisée pour le positron est donnée par l'expression :

$$\Psi(x) = [1 - (\alpha \not{k} \not{A} + \beta \not{k} + \delta \not{p} \not{k} \not{A})] \frac{v(p, s)}{\sqrt{2VQ_0}} \exp \left[ -i(q^\mu x_\mu) - i \int_0^{kx} \frac{(A^\mu p_\mu)}{c(k^\mu p_\mu)} d\phi \right], \quad (2.2)$$

avec :

$$\alpha = \frac{1}{(k^\mu p_\mu)} \left( ca_{e^+} - \frac{1}{2c} \right) \quad ; \quad \beta = \frac{a_{e^+} A^2}{c(k^\mu p_\mu)} \quad ; \quad \delta = \frac{a_{e^+}}{(k^\mu p_\mu)}. \quad (2.3)$$

Le bispineur de Dirac  $v(p, s)$  est normalisé selon,  $\bar{v}(p, s)v(p, s) = v(p, s)\gamma^0 v(p, s) = -2c^2$ . Le champ électromagnétique est considéré classique de potentiel  $A^\mu = a_1^\mu \cos(\varphi) + a_2^\mu \sin(\varphi)$  avec  $k_\mu A^\mu = k_\mu a_1^\mu = k_\mu a_2^\mu = 0$  (condition de lorentz) et  $A^2 = a_1^2 = a_2^2 = a^2$ ,  $a_1^\mu a_{2\mu} = 0$ . Le quadri-vecteur  $q^\mu = p^\mu -$

$a^2 k^\mu / [2(k^\mu p_\mu) c^2]$  représente l'impulsion de positron acquise dans le champ électromagnétique de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ .

Dans le système d'unités atomiques les valeurs propres de l'énergie de liaison sont données par :

$$E_n = c^2 \left[ 1 + \left( \frac{Z\alpha}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - Z^2\alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.4)$$

avec  $n$  est le nombre quantique principal variant comme suit :  $n = 1, 2, \dots, \infty$  et les valeurs propres du moment angulaire varient de 0 à  $j + 1/2 \leq n$  avec la condition  $0 \leq l \leq n - 1$ .

Développons l'équation (2.4) en terme de  $(Z\alpha)^2$  on voit que  $n$  correspond au nombre quantique principal de la théorie non-relativiste et l'énergie devient comme suit :

$$E_n = c^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{Z^2\alpha^2}{n^2} \left[ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left( \frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right] + O((Z\alpha)^6) \right\} \quad (2.5)$$

Dans le cas  $n = 1$  et  $j = 1/2$ , l'énergie de liaison l'état fondamental se réduit à :

$$E_n = c^2 \sqrt{1 - Z^2\alpha^2} \quad (2.6)$$

Les fonctions propres correspondantes normalisées de spin up et down s'écrivent, respectivement, en unités atomiques comme suit [16] :

$$\Phi_{n=1, j=1/2, \uparrow}(\mathbf{r}, \theta', \varphi') = \frac{(2Z)^{\gamma_H+1/2}}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{1 + \gamma_H}{2\Gamma(1 + 2\gamma_H)}} e^{-Zr} r^{\gamma_H-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{i(1-\gamma_H)}{Z\alpha} \cos(\theta') \\ \frac{i(1-\gamma_H)}{Z\alpha} \sin(\theta') e^{i\phi'} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

et :

$$\Phi_{n=1, j=1/2, \downarrow}(\mathbf{r}, \theta', \varphi') = \frac{(2Z)^{\gamma_H+1/2}}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{1 + \gamma_H}{2\Gamma(1 + 2\gamma_H)}} e^{-Zr} r^{\gamma_H-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{i(1-\gamma_H)}{Z\alpha} \sin(\theta') e^{i\phi'} \\ -\frac{i(1-\gamma_H)}{Z\alpha} \cos(\theta') \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

avec  $\gamma_H = \sqrt{1 - Z^2\alpha^2}$ . Dans la limite non relativiste, on a :  $\gamma_H \rightarrow 1$  et  $(1 - \gamma_H)/Z\alpha \rightarrow 0$ , alors ces fonctions d'onde se réduisent à celles de Schrödinger multipliés par les deux spineurs de Pauli.

Pour évaluer l'élément de matrice de transition  $S_{fi}$  pour le processus de diffusion élastique  $e^+ - H(1s_{1/2}) \rightarrow$

$e^+ - H(1s_{1/2})$ , on utilise les fonctions d'onde générales pour le positron (Eq. (2.2)), et de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental pour le spin-up (Eq.(2.7)). L'élément de matrice s'écrit alors comme suit :

$$S_{fi} = \frac{i}{c} \int d^4x_1 \bar{\psi}_f(\mathbf{r}_1, t) \gamma^0 \psi_i(\mathbf{r}_1, t) \langle \Phi_f(\mathbf{r}_2) | V_d | \Phi_i(\mathbf{r}_2) \rangle \quad (2.9)$$

Dans l'équation (2.9)  $V_d$  représente le potentiel direct d'interaction :

$$V_d = -\frac{1}{r_{12}} + \frac{Z}{r_1} \quad (2.10)$$

où  $\mathbf{r}_1$  est la coordonnée du positron,  $\mathbf{r}_2$  est la coordonnée de l'électron lié à l'atome et  $r_{12}$  est la distance entre les deux telle que :  $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . En utilisant la notation et les conventions de Brocken-Drell [13, 14] et en procédant aux techniques standards de calcul des sections efficaces dans l'électrodynamique quantique, on trouve :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f}. \quad (2.11)$$

La somme sur  $n$  dans l'équation (2.11) découle de la relation bien connue des fonctions de Bessel ordinaires :  $\exp[-iz \sin(\varphi)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) \exp(-in\varphi)$ . Cette somme représente physiquement l'émission et l'absorption du nombre de photons échangés entre les particules mises en collision et le laser.

L'expression de la section efficace différentielle en particulier la partie spinorielle entraîne un calcul fastidieux et ceci est due à l'introduction à la fois du laser et du moment magnétique anomal. La section efficace différentielle de l'atome d'hydrogène par l'impact de positron, évaluée pour  $Q_f = Q_i + n\omega$ , est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f} &= \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|(4\pi c^2)^2} |\bar{v}(p_f, s_f) \Gamma_n v(p_i, s_i)|^2 |H_{el}(\Delta_s)|^2 \\ &= \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|(4\pi c^2)^2} \mathbf{Tr} \left\{ (\not{p}_f c - c^2) \Gamma_n (\not{p}_i c - c^2) \bar{\Gamma}_n \right\} |H_{el}(\Delta_s)|^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

La section efficace différentielle de diffusion de l'atome d'hydrogène par l'impact de l'électron, évaluée aussi pour  $Q_f = Q_i + n\omega$ , est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f} &= \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|(4\pi c^2)^2} |\bar{u}(p_f, s_f) \Gamma_n u(p_i, s_i)|^2 |H_{el}(\Delta_s)|^2 \\ &= \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|(4\pi c^2)^2} \mathbf{Tr} \left\{ (\not{p}_f c + c^2) \Gamma_n (\not{p}_i c + c^2) \bar{\Gamma}_n \right\} |H_{el}(\Delta_s)|^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'opérateur  $\bar{\Gamma}_n$  est donné par :  $\bar{\Gamma}_n = \gamma_0 \Gamma_n^\dagger \gamma_0$  et  $\Gamma_n$  est explicitement donné par :

$$\Gamma_n = C_0 B_{0n}(z) + C_1 B_{1n} + C_2 B_{2n} + C_3 B_{3n} + C_4 B_{4n} \quad (2.14)$$

avec  $C_0, C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  sont explicitement détaillés dans nos travaux précédents [15, 16]. Les coefficients  $B_{0n}, B_{1n}, B_{2n}, B_{3n}$  et  $B_{4n}$  sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{0n} \\ B_{1n} \\ B_{2n} \\ B_{3n} \\ B_{4n} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} J_n(z) e^{in\phi_0} \\ (J_{n+1}(z) e^{i(n+1)\phi_0} + J_{n-1}(z) e^{i(n-1)\phi_0}) / 2 \\ (J_{n+1}(z) e^{i(n+1)\phi_0} - J_{n-1}(z) e^{i(n-1)\phi_0}) / 2i \\ (J_{n+2}(z) e^{i(n+2)\phi_0} + J_{n-2}(z) e^{i(n-2)\phi_0}) / 2 \\ (J_{n+2}(z) e^{i(n+2)\phi_0} - J_{n-2}(z) e^{i(n-2)\phi_0}) / 2i \end{array} \right\} \quad (2.15)$$

Dans l'équation (2.12), la fonction  $|H_{el}(\Delta_s)|$  est la transformée de Fourier de la valeur moyenne du potentiel (statique) explicitement détaillé dans la référence [17].

Avant de présenter nos résultats analytiques, nous tenons à souligner que le logiciel de calcul symbolique "REDUCE" a donné des expressions analytiques trop longues. Ainsi, nous donnons ci-dessous, par exemple, le coefficient  $\mathcal{B}$  qui apparaît dans les traces et qui multiplie les fonctions de Bessel ordinaires

$(J_{n+1}^2(z) + J_{n-1}^2(z)) :$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} = & \left\{ -16(a_2.p_f)^2(k.p_i)^2 a_{e+}^2 c^6 + 32(a_2.p_f)^2(k.p_i) a_{e+}^2 c^4 E_i \omega + 32(a_2.p_f)^2 a_{e+}^3 |a|^2 c^4 \omega^2 \right. \\
& -16(a_2.p_f)^2 a_{e+}^2 |a|^2 c^2 \omega^2 - 8(a_2.p_f)^2 a_{e+} c^4 \omega^2 + 32(a_2.p_f)(a_2.p_i)(k.p_f)(k.p_i) a_{e+}^2 c^6 \\
& -32(a_2.p_f)(a_2.p_i)(k.p_f) a_{e+}^2 c^4 E_i \omega - 32(a_2.p_f)(a_2.p_i)(k.p_i) a_{e+}^2 c^4 E_f \omega + 64(a_2.p_f) \\
& \times (a_2.p_i) a_{e+}^4 |a|^4 c^2 \omega^2 + 64(a_2.p_f)(a_2.p_i) a_{e+}^3 |a|^2 c^4 \omega^2 + 32(a_2.p_f)(a_2.p_i) a_{e+}^2 c^6 \omega^2 - 32 \\
& \times (a_2.p_f)(a_2.p_i) a_{e+}^2 c^4 \cos(\widehat{p_i, p_f}) \omega^2 |p_f| |p_i| + 32(a_2.p_f)(a_2.p_i) a_{e+}^2 c^2 E_f E_i \omega^2 - 16 \\
& \times (a_2.p_f)(a_2.p_i) a_{e+} c^4 \omega^2 + 4(a_2.p_f)(a_2.p_i) c^2 \omega^2 - 16(a_2.p_i)^2 (k.p_f)^2 a_{e+}^2 c^6 + 32 \\
& \times (a_2.p_i)^2 (k.p_f) a_{e+}^2 c^4 E_f \omega + 32(a_2.p_i)^2 a_{e+}^3 |a|^2 c^4 \omega^2 - 16(a_2.p_i)^2 a_{e+}^2 |a|^2 c^2 \omega^2 - 8 \\
& \times (a_2.p_i)^2 a_{e+} c^4 \omega^2 + 16(k.p_f)^2 a_{e+}^4 |a|^5 c^4 + 8(k.p_f)^2 a_{e+}^2 |a|^4 c^4 + (k.p_f)^2 |a|^2 c^4 - 32 \\
& \times (k.p_f)(k.p_i) a_{e+}^4 |a|^5 c^4 - 16(k.p_f)(k.p_i) a_{e+}^2 |a|^4 c^4 - 2(k.p_f)(k.p_i) |a|^2 c^4 - 32(k.p_f) \\
& \times a_{e+}^4 |a|^5 c^2 E_f \omega + 32(k.p_f) a_{e+}^4 |a|^5 c^2 E_i \omega - 16(k.p_f) a_{e+}^2 |a|^4 c^2 E_f \omega + 16(k.p_f) a_{e+}^2 |a|^4 \\
& \times c^2 E_i \omega - 2(k.p_f) |a|^2 c^2 E_f \omega + 2(k.p_f) |a|^2 c^2 E_i \omega + 16(k.p_i)^2 a_{e+}^4 |a|^5 c^4 + 8(k.p_i)^2 a_{e+}^2 \\
& \times |a|^4 c^4 + (k.p_i)^2 |a|^2 c^4 + 32(k.p_i) a_{e+}^4 |a|^5 c^2 E_f \omega - 32(k.p_i) a_{e+}^4 |a|^5 c^2 E_i \omega + 16(k.p_i) \\
& \times a_{e+}^2 |a|^4 c^2 E_f \omega - 16(k.p_i) a_{e+}^2 |a|^4 c^2 E_i \omega + 2(k.p_i) |a|^2 c^2 E_f \omega - 2(k.p_i) |a|^2 c^2 E_i \omega + 32 \\
& \times a_{e+}^4 |a|^5 c^4 \omega^2 + 32 a_{e+}^4 |a|^5 c^2 \cos(\widehat{p_i, p_f}) \omega^2 |p_f| |p_i| - 32 a_{e+}^4 |a|^5 E_f E_i \omega^2 + 16 a_{e+}^2 |a|^4 c^4 \omega^2 \\
& + 16 a_{e+}^2 |a|^4 c \cos(\widehat{p_i, p_f}) \omega^2 |p_f| |p_i| - 16 a_{e+}^2 |a|^4 E_f E_i \omega^2 + 2 |a|^2 c^4 \omega^2 + 2 |a|^2 c^2 \cos(\widehat{p_i, p_f}) \\
& \left. \times \omega^2 |p_f| |p_i| - 2 |a|^2 E_f E_i \omega^2 \right\} \times \frac{1}{(4(k.p_f)(k.p_i)c^4)}.
\end{aligned}$$

En absence de l'effet du moment magnétique anomal  $a_{e+} = 0$ , le coefficient  $\mathcal{B}$  se réduit à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} = & \left\{ 4(a_2.p_f)(a_2.p_i) c^2 \omega^2 + (k.p_f)^2 |a|^2 c^4 - 2(k.p_f)(k.p_i) |a|^2 c^4 - 2(k.p_f) |a|^2 c^2 E_f \omega \right. \\
& + 2(k.p_f) |a|^2 c^2 E_i \omega + (k.p_i)^2 |a|^2 c^4 + 2(k.p_i) |a|^2 c^2 E_f \omega - 2(k.p_i) |a|^2 c^2 E_i \omega + \\
& \left. 2 |a|^2 c^4 \omega^2 + 2 |a|^2 c^2 \cos(\widehat{p_i, p_f}) \omega^2 |p_i| |p_f| - 2 |a|^2 E_f E_i \omega^2 \right\} \times \frac{1}{(4(k.p_f)(k.p_i)c^4)}
\end{aligned}$$

Si on annule encore le champ laser (le potentiel laser  $|a| = 0 u.a$  et la fréquence laser  $\omega = 0 u.a$ ), le coefficient  $\mathcal{B}$  disparaît.



### 3 Resultats et discussions

Dans le travail [16], le même processus à été étudié. En particulier, le processus de collision positrons-atome en présence d'un champ laser. L'étude a été fait en dessous de la valeur du champ électrique " $\mathcal{E}_{Threshold} = 0.25 \text{ u.a}$ " qui représente la valeur seuil de l'ionisation de l'atome d'hydrogène par le laser. L'étude comparative des deux processus de diffusion  $e^\pm$ -atome d'hydrogène, en présence du champ laser et avec moment magnétique anomal, a été faite pour les deux particules en question.

Le processus de diffusion  $e^\pm - H$ , en présence du champ laser et avec l'introduction du moment magnétique anomal, met en jeu plusieurs nouveaux paramètres dont la variation permet d'obtenir une compréhension plus profonde du processus fondamental. Pour la description de la géométrie de diffusion, nous travaillons dans un système de coordonnées dans lequel  $\mathbf{k} \parallel \hat{e}_z$ , cela signifie que la direction de propagation du champ laser est le long de l'axe  $Oz$ .

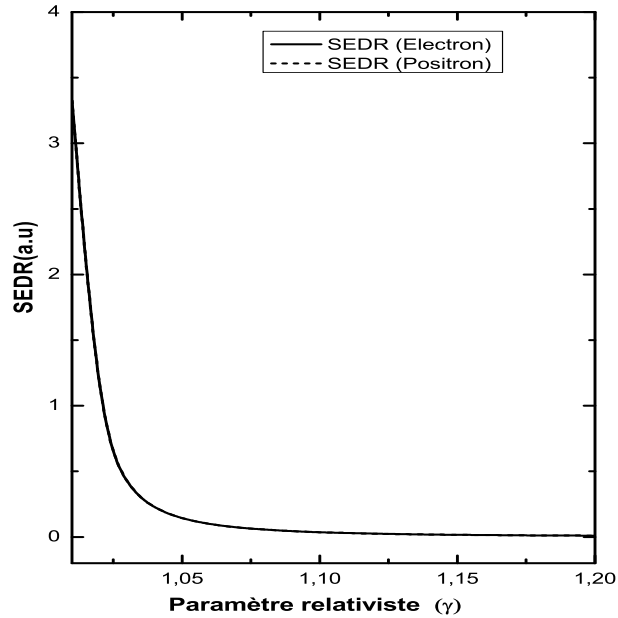


FIGURE 1 – SEDRs de collision  $e^\pm - H$  à l'échelle de  $10^{-4}$  en absence de champ laser en fonction de paramètre relativiste  $\gamma$ , l'angle final est  $\theta_f = 45^\circ$

Dans la présente étude, les coordonnées angulaires du positron incident sont  $\theta_i = 45^\circ$  et  $\phi_i = 90^\circ$  et celles du positron diffusé sont telles que :  $\phi_f = 90^\circ$  et  $0^\circ$ ,  $< \theta_f < 180^\circ$ . Les résultats que nous avons obtenus, pour la diffusion élastique assistée par laser de l'atome d'hydrogène par impact de positron (électron) en présence de l'effet du moment magnétique anomal, sont présentés dans les figures [1-4] :

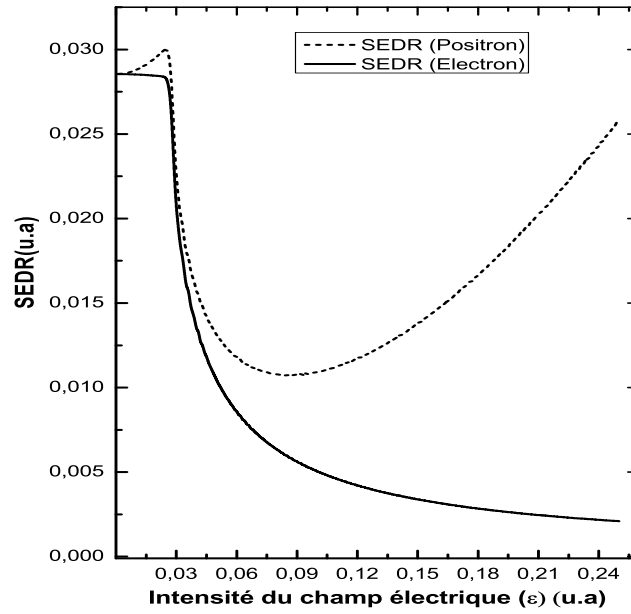


FIGURE 2 – SEDs relativistes de  $e^\pm - H$  en fonction de l'intensité du champ électrique pour le paramètre relativiste  $\gamma = 1.001$  ( énergie cinétique  $511 \text{ keV}$  ). Les paramètres géométriques sont :  $\theta_i = \varphi_i = 45^\circ$ ,  $\varphi_f = 90^\circ$  et  $\theta_f = 45^\circ$ . Le nombre de photons échangés est égal à  $\pm 50$ .

La figure 1 représente la variation des sections efficaces différentielles (SEDs) relativistes en fonction du paramètre relativiste  $\gamma$  pour la diffusion élastique de l'électron et du positron sur l'atome d'hydrogène. On observe que les SEDs diminuent rapidement en augmentant l'énergie et restent constante au-delà de la valeur du paramètre relativiste  $\gamma = 1,08$  (qui correspond à l'énergie cinétique de :  $E_c = 40\,880 \text{ eV}$ ). En outre, pour vérifier la cohérence de nos calculs, on donne dans cette figure les sections efficaces différentielles pour les deux processus  $e^\pm - H$  en l'absence du champ laser. Il est clair, d'après la comparaison,

qu'il y a un très bon accord entre les deux approches théoriques, en particulier en l'absence du moment magnétique anomal et à la première approximation de Born. Dans le travail précédent [17], les auteurs ont montré, même si le champ laser est présent, qu'il n'y a pas de différence entre les deux sections efficaces différentielles pour l'électron et le positron en particulier en première approximation de Born. Dans la figure 2, on donne les deux sections efficaces différentielles relativistes, avec l'ajout de l'effet du moment magnétique anomal, en fonction de l'intensité du champ électrique. D'après la figure, on voit qu'il y a une différence importante entre les deux approches (SEDR pour le positron et SEDR pour l'électron), notamment pour les intensités élevées du champ laser. Il est aussi clair que les sections efficaces différentielles prennent les valeurs les plus élevées particulièrement pour les faibles intensités du champ laser. On voit aussi, toujours d'après la figure 2, que les SEDRs pour l'électron et le positron diminuent rapidement en augmentant l'intensité du champ électrique jusqu'à  $\varepsilon = 0,09$  *a.u.* En-dessus de cette valeur, la SEDR de l'électron continue à diminuer lentement tandis que la SEDR pour le positon augmente rapidement avec l'intensité du champ. La comparaison entre les deux SEDRs indique que, à proximité de l'intensité du champ électrique  $\varepsilon = 0,25$ , la SEDR pour positon est plus grande que celle pour l'électron d'environ 12 fois. Cela montre que l'introduction du moment magnétique anomal dans l'expression de la fonction d'onde de l'électron et du positron est indispensable particulièrement dans les intensités élevées.

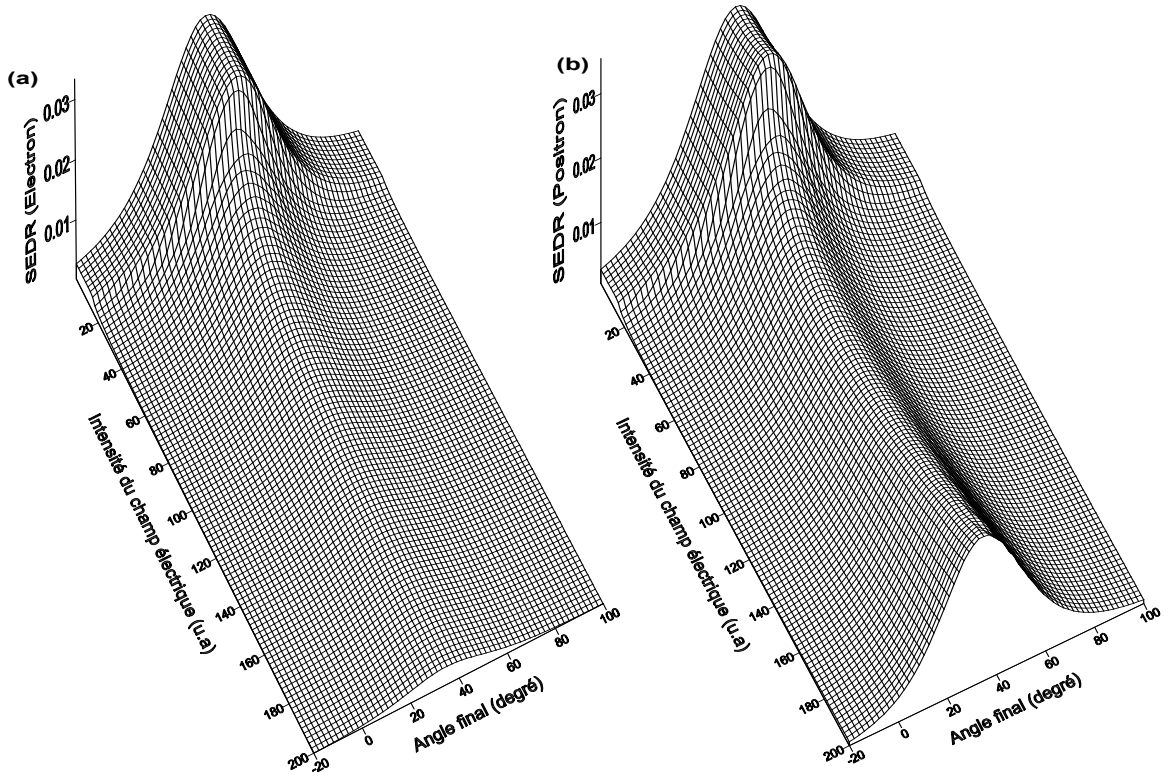


FIGURE 3 – (a) : SEDR de  $e^+ - H$  et (b) : SEDR de  $e^- - H$  en unité de  $10^{-3}$ , en fonction de l'intensité du champ électrique et de l'angle final  $\theta_f$  pour le paramètre relativiste  $\gamma = 1,001$  (énergie cinétique  $511 eV$ ) et les paramètres géométriques  $\theta_i = \varphi_i = 45^\circ$  and  $\varphi_f = 90^\circ$ . Le nombre de photons échangés est de  $\pm 50$ .

Pour avoir une vision très clair sur le comportement des SEDs par rapport aux paramètres d'étude, on donne dans la figure 3 une représentation tridimensionnelle des SEDs relativistes en fonction de l'intensité du champ électrique et de l'angle final  $\theta_f$  de la particule diffusée. Dans une vision plus générale, le comportement de la SEDR dans la figure 3 est le même que la figure précédente avec la seule différence est que pour la figure 2, l'angle final  $\theta_f$  est fixé pour la valeur de  $45^\circ$ . Dans les deux figures, une dimension (figure 2) et trois dimensions (figure 3), la section efficace différentielle relativiste présente, pour le positron, un minimum dans les environs de  $\varepsilon = 0,09u.a.$  On observe aussi une croissance significative avec l'intensité de la SEDR particulièrement pour le positron. Ce comportement est qualitativement semblable à celui obtenu sur la représentation à une dimension de la figure 2.

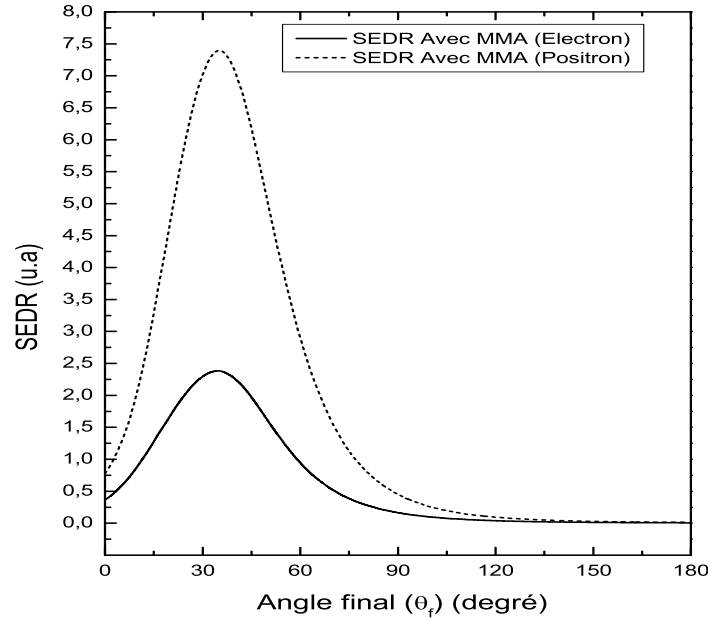


FIGURE 4 – Les SEDRs de  $e^+ - H$  et  $e^- - H$  (en unité de  $10^{-9}$ ) en fonction de l'angle final  $\theta_f$  pour un paramètre relativiste  $\gamma = 1,5$  et une intensité du champ électrique de  $\varepsilon = 0,1 u.a.$ . Les paramètres géométriques sont :  $\theta_i = \varphi_i = 45^\circ$  et  $\varphi_f = 90^\circ$ . Le nombre de photons échangés est :  $\pm 100$ .

On montre dans la figure 4, les SEDs relativistes pour l'électron et le positron avec l'introduction du moment magnétique anomal dans le régime relativiste  $\gamma = 1,5$  (qui correspond à une énergie cinétique  $E_c = 255\,501\text{ eV}$ ). Dans ces conditions énergétique et géométrique, la section efficace différentielle de la diffusion élastique pour le positron est trois fois plus grande que celle de l'électron au voisinage de l'angle final  $\theta_f = 35^\circ$ . Il est approprié de conclure ce chapitre par le fait que, en première approximation de Born, les collisions relativistes  $e^\pm - H$  sont affectés différemment par l'introduction du moment magnétique anomal de l'électron et du positron.

## 4 Conclusion

La présente étude est consacrée à des calculs théoriques relativistes qui introduit aussi bien l'interaction du champ laser et l'effet du moment magnétique anormal. Elle fournit des informations détaillées sur la diffusion élastique relativiste de l'atome d'hydrogène par l'impact d'électron et de positron. Nous avons utilisé l'approximation de Feynman, qui représente la anti-matière comme étant la matière qui remonte le temps, pour décrire l'anti-matière dans le processus de diffusion. Même s'il y a une absence totale des résultats expérimentaux dans ce domaine de recherche, il y a toujours un intérêt théorique de voir comment les sections efficaces, de l'électron et du positron, se comportent lorsqu'elle sont calculée dans une approximation similaire. Il est démontré que, spécialement aux hautes intensités du champ laser et en présence de l'effet du moment magnétique anormal, la section différentielle pour le positron est beaucoup plus supérieure que celle de l'électron. On espère que les résultats importants de ce travail stimulera de nouveaux travaux théoriques dans ce domaine de recherche. En l'absence des observations expérimentales et travaux théoriques parallèles, nos résultats actuels donne uniquement une idée sur la forme et l'ordre de grandeur des caractéristiques qualitatives de la courbe des sections efficaces différentielles pour l'électron et le positron.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R S Van Dyck et al., *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 26, (1987).
- [2] W E Kauppila and T.S. Stein, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, **26**, ,1, (1990).
- [3] O Sueoka and A. Hamada, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **62**, 2669, (1993).
- [4] A Hamada and O. Sueoka, *J. Phys. B*, **27**, 5055, (1994).
- [5] G Laricchia and M. Charlton, *Philo. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, **357**, 2259, (1999).
- [6] M Kimura et al. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 3936, (1998).
- [7] K Iwata *et al.*, *Phys. Rev. A*, **61**, 022719, (2000).
- [8] K Iwata *et al.* *Phys. Rev. A*, **51**, 473, (1995).
- [9] G F Gribakin, *Phys. Rev. A*, **61**, 022720, (2000).
- [10] S Zhou *et al.*, *Phys. Rev. A*, **55**, 361, (1997).
- [11] S A Elkilany, *Indian J. Phys.*, **88**, 19, (2014).
- [12] C D Anderson, *Phys. Rev.*, **43**, 491,(1933).
- [13] M Rose, *Relativistic Electron Theory* John Wiley & Sons Inc. New York (1961).
- [14] J D Bjorken and Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (Mac Graw Hill,New York, 1964) ; C Itzykson and J-B Zuber, *Quantum field Theory* (Mac Graw Hill,New York,198).
- [15] S. Elhandi *et al.*, *Phys. Rev. A*, **81**, 043422, (2010).

- 
- [16] M El Idrissi *et al.*, *Indian J. Phys.*, **88**, 111, (2014).
- [17] B Manaut, *et al.*, *Can. J. Phys.*, **91**, 696702, (2013).



---

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce travail de thèse est réalisé dans le cadre théorique de l'électrodynamique quantique. Il a eu pour but d'étudier, en détail et en utilisant le formalisme de Dirac-Volkov, les diffusions relativistes de particules chargées sur les atomes (ou noyau atomique) cibles. Les calculs sont faits à la première approximation de Born et sans tenir compte des effets d'échange.

Dans la plupart des processus de diffusions des particules chargées par potentiel de type Coulomb, l'effet Coulombien est de longue portée. Les sections efficaces doivent être corrigées en tenant compte de l'effet Coulombien, créé par le champ de noyau, dans les ondes associées aux particules incidentes. L'utilisation des fonctions Coulombiennes, en présence du champ laser, consiste à faire moduler l'état de Dirac-Volkov par la fonction hypergéométrique confluite. La première étude a mis le point sur la diffusion de proton par le potentiel Coulombien d'un noyau atomique en présence d'un champ laser polarisé circulairement. L'introduction de l'effet Coulombien pour le proton incident et diffusé à basse énergie affecte les résultats obtenus pour la SED en fonction de l'énergie cinétique du proton incident. Pour cette particulière géométrie, l'effet Coulombien disparaît à haute énergie et les fonctions de Dirac-Volkov sont largement suffisantes pour décrire le mouvement des particules de Dirac. À une énergie cinétique du proton incident  $E_k = 4.9 \text{ MeV}$ , l'étude montre que la SED augmente avec  $Z$  jusqu'à  $Z = 6$  où elle change de comportement, et diminue avec l'augmentation de  $Z$ . Le seuil de ce changement devient plus important pour une énergie cinétique plus élevée. Les sections efficaces différentielles relativistes dépendent à la fois des

paramètres du champ laser, du transfert de quadri-impulsion entre le système de collision et le champ laser. La deuxième étude a été consacrée à l'étude de l'excitation de l'atome d'hydrogène  $1s - 2s$  par l'impact de proton en présence d'un champ laser circulairement polarisé. On a montré que pour différentes énergies cinétiques du proton incident et une intensité électrique égale à  $1 u.a.$ , sans échange de photons entre le système et le champ laser, les sections efficaces présentent un comportement oscillatoire à l'instar du régime non relativiste. Pour une énergie cinétique de  $E_k = 187.65 MeV$ , la règle de somme de Kroll-Watson qui dit que lorsque la section efficace différentielle est sommée sur un grand nombre de photons échangés, on retrouve la section efficace différentielle sans champ laser. Pour cette énergie, la convergence est atteinte à environ  $n = \pm 1820$ . La section efficace différentielle du proton décroît avec l'intensité et croît avec la fréquence du laser ceci peut être expliqué par l'énergie ponderomotrice gagnée par le proton dans le champ laser qui est donnée par  $U_p = \varepsilon^2 / (4m_p \omega^2)$ . Pour une énergie cinétique fixe, la section efficace diminue avec l'intensité du champ électrique et décroît à zéro pour des petits et grands angles.

Dans la dernière étude, on a généralisé le processus de diffusion élastique positron-atome d'hydrogène assisté par rayonnement laser en tenant compte du moment magnétique anomal du positron. L'atome d'hydrogène est décrit par sa fonction d'onde relativiste hydrogénéoïde exacte obtenue à partir de l'équation de Dirac. Nous avons utilisé la même approximation pour étudier la diffusion du positron/électron sur l'atome d'hydrogène en exprimant la fonction d'onde du positron par la substitution de Fynmann. La comparaison entre les sections efficaces différentielles SEDs de la diffusion de positron et de l'électron a révélé que, en absence de l'effet du moment magnétique anomal, les deux approches sont les mêmes particulièrement à la première approximation de Born. L'introduction de l'effet du moment magnétique anomal a différencié radicalement la forme des sections efficaces différentielles pour le positron et l'électron. On constate que la SED du positron est toujours supérieure par rapport à celle de l'électron et ceci de plus en plus que l'intensité du champ électrique augmente. On conclut que lors des processus de diffusion relativiste en présence du champ laser, il est indispensable, spécialement à grandes intensités du champ laser, de prendre en compte l'effet du moment magnétique anomal. De façon générale le couplage spin-champ laser devient plus important au régime relativiste et à haute intensité du champ électrique.

Ceci se traduit par l'augmentation des sections efficaces différentielles qui tiennent compte du caractère relativiste et fermionique des particules de Dirac. Le processus de la diffusion élastique  $2s - 2s$  de l'atome d'hydrogène par impact de particules chargées en présence et en absence du champ laser est en cours d'études. D'autres perspectives sont envisagées comme la considération d'habillage atomique par champ laser et l'étude des ions hydrogènoïdes . . . .

## ANNEXE A

# QUELQUES RELATIONS UTILES POUR LE CALCUL DE LA PARTIE INTÉGRALE DE LA SECTION EFFICACE

## 1 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont définis pour  $\ell \in \mathbb{N}$  par la formule de Rodriguez suivante :

$$P_\ell(x) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (1-x^2)^\ell. \quad (1.1)$$

Ces polynômes sont orthogonaux sur l'intervalle  $x = [-1, 1]$  c'est à dire  $\theta = [\pi, 0]$  et ils ne sont pas normalisés :

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}. \quad (1.2)$$

Les fonctions de Legendre  $P_\ell^m$  sont définis pour  $\ell \in \mathbb{N}$  et  $x \in [-1, 1]$  par l'équation suivantes :

$$P_\ell^m = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell. \quad (1.3)$$

Le polynôme  $P_\ell(x)$  est d'ordre  $\ell$ . Il est évident, puisque  $m$  est le nombre de fois que l'on dérive  $P_\ell(x)$ , que  $m$  ne peut prendre que des valeurs inférieures ou égale à  $\ell$  et qui satisfait  $|m| \leq \ell$  ( $m = -\ell, -\ell+1, \dots, +\ell$ ).

Les fonctions  $P_\ell^m(x)$  et  $P_\ell^{-m}(x)$  sont des solutions équivalentes, et l'une doit être proportionnelle à l'autre

comme suit :

$$P_\ell^{-m}(\cos\theta) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(\cos\theta). \quad (1.4)$$

La relation de récurrence, que les polynômes de Legendre  $P_\ell(x)$  vérifient, est donnée par :

$$(\ell + 1)P_{\ell+1}(x) = (2\ell + 1)xP_\ell(x) - \ell P_{\ell-1}(x), \quad (1.5)$$

et aussi on a la relation utile pour l'intégration de ces fonctions  $P_\ell(x)$  telle que :

$$\frac{d}{dx} [P_{\ell+1}(x) - P_{\ell-1}(x)] = (2\ell + 1)P_\ell(x). \quad (1.6)$$

Les premiers polynômes de Legendre sont explicitement donnés par :

$$\begin{aligned} P_0(x) = 1 & \quad ; \quad P_1(x) = x & \quad ; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & \quad ; \quad P_3(x) = \frac{1}{2}x(5x^2 - 3) \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & \quad ; \quad P_5(x) = \frac{1}{8}x(63x^4 - 70x^2 + 15) \end{aligned}$$

Ces fonctions obéissent à une relation d'orthogonalité sur  $\ell$  mais ne sont pas normalisés :

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell^m(x) P_\ell^m(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} \delta_{\ell\ell}. \quad (1.7)$$

Pour des indices supérieurs différents, les deux polynômes associés ne sont pas orthogonaux, puisqu'il sont solutions propres de deux Hamiltoniens différents.

## 2 Relations entre les harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  sont définis par la relation :

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!}} e^{im\phi} P_\ell^m(\cos\gamma), \quad m \geq 0. \quad (2.1)$$

L'équation (1.4) implique pour les valeurs négatives de  $m$ , on a :

$$Y_\ell^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_\ell^m(\theta, \phi)^*, \quad (2.2)$$

l'étoile dans la formule signifie le complexe conjugué. Pour les  $m$  négatifs, on obtient :

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - |m|)!}{4\pi(\ell + |m|)!}} e^{im\phi} P_\ell^m(\cos\gamma), \quad m \leq 0, \quad (2.3)$$

le facteur de normalisation est choisi de façon à ce que l'harmonique sphérique est normalisée à l'unité.

La relation d'orthonormalité pour ces harmoniques sphériques est donnée par :

$$\int Y_\ell^m(\theta, \phi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (2.4)$$

où  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  est l'angle solide en coordonnées sphériques. Les harmoniques sphériques sont linéairement indépendants, toute fonction de  $\theta$  et  $\phi$  s'écrit comme combinaison linéaire des harmoniques sphériques :

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} a_{\ell m} Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (2.5)$$

Les expressions des premières harmoniques sphériques pour  $\ell = 0, 1, 2$  sont :

$$Y_{00}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad (2.6)$$

$$\ell = 1 \begin{cases} Y_{10}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\ Y_{1\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\ell = 2 \begin{cases} Y_{20}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1) \\ Y_{2\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta \exp^{\pm i\phi} \\ Y_{2\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta \exp^{\pm 2i\phi}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Les harmoniques sphériques satisfont à une relation dite **théorème d'addition** :

$$P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell m}(\theta', \phi') Y_{\ell m}^*(\theta'', \phi'') \quad (2.9)$$

où  $(\theta', \phi')$  et  $(\theta'', \phi'')$  sont deux direction qui font entre elle l'angle  $\gamma$ . On choisit les angles tel que :

$\theta' = \theta, \phi' = \phi$  et  $\theta'' = \phi'' = 0$ .

$$P_\ell(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(0, 0) \quad (2.10)$$

avec  $Y_{\ell m}(0, 0) = \delta_{m0} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}}$  et  $P_\ell(\cos\theta)$  devient sous la forme :

$$P_\ell(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell + 1}} Y_{\ell 0}(\theta, \phi) \quad (2.11)$$

### 3 Développement des distances en fonction des harmoniques sphériques

Soit deux points de  $\mathbb{R}^3$ , extrémités de deux vecteurs  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  et notons  $r_{12}$  la distance entre ces deux points.

$$\begin{aligned} r_{12} &\stackrel{\text{déf}}{=} \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| \\ \frac{1}{r_{12}} &= \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2\cos\gamma + r_2^2}} = \frac{1}{r_>} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\gamma + (\frac{r_<}{r_>})^2}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec  $\gamma$  l'angle entre les deux vecteurs  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$ ,  $r_< = \inf(r_1, r_2)$  et  $r_> = \sup(r_1, r_2)$ . Soit la fonction génératrice des polynômes de Legendre :

$$F(x, t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\ell=0}^{+\infty} t^\ell P_\ell(x) \quad (|t| < 1), \quad \text{avec} \quad P_\ell(x) = \frac{1}{\ell!} \left( \frac{\partial^\ell F}{\partial t^\ell} \right), \quad (3.2)$$

avec  $F(x, t)$  est une fonction qui a pour expression :

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}. \quad (3.3)$$

On comparant l'équation (3.1) et (3.3), avec  $x = \cos\gamma$  et  $t = \frac{r_<}{r_>}$ , on obtient le résultat intéressant suivant :

$$\boxed{\frac{1}{r_{12}} = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} P_\ell(\cos\gamma)} \quad (3.4)$$

Finalement en utilisant la relation (2.9), on peut écrire le développement sous la forme suivante :

$$\boxed{\frac{1}{r_{12}} = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\theta_1, \phi_1) Y_{\ell m}^*(\theta_2, \phi_2)} \quad (3.5)$$

Cette relation est très utile dans les calculs en physique atomique en particulier les potentiels d'interaction.

### 4 Lien avec les fonctions de Bessel

Partons du cas d'une particule libre qui possède une énergie potentielle constante qu'on peut prendre égale à zéro, Les états propres de l'Hamiltonien  $H$  sont des ondes planes telles que :

$$\psi_k(r) = C e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$\vec{k}$  est le vecteur de composante réelle. L'énergie associé à la fonction propre est

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{k}^2,$$

qui est une relation de dispersion, toutes les valeurs de  $k \geq 0$  sont autorisées.

Pour une symétrie sphérique, l'équation radiale s'écrit comme suit :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) R(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} R(r) = ER(r) \quad (4.1)$$

En posant  $k = \sqrt{2\mu E/\hbar^2} \in \mathbb{R}_+$ ,  $\rho = kr$  et  $R(r) = v(\rho)$

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dv}{d\rho} + \left[ 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] v(\rho) = 0 \quad (4.2)$$

Cette équation est très semblable à celle définissant les fonctions de Bessel (à un facteur 2 près dans le deuxième terme).

$$J''_{\nu}(z) + \frac{1}{z} J'_{\nu}(z) + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) J_{\nu}(z) = 0. \quad (4.3)$$

La fonction de Bessel  $J_{\nu}(z)$  admet un développement en série entière tel que :

$$J_{\nu}(z) = \left( \frac{z}{2} \right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left( \frac{z}{2} \right)^{2n} \quad (-\pi < \arg(z) < \pi), \quad (4.4)$$

où  $\Gamma(\nu)$  est la fonction  $\Gamma$  d'euler de deuxième espèce.

Maintenant, posons  $v(\rho) \stackrel{\text{déf}}{=} \rho^{\alpha} f(\rho)$  et reportons dans l'équation (4.2), on aura :

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{2(\alpha+1)}{\rho} \frac{df}{d\rho} + \left[ 1 - \frac{\ell(\ell+1) - \alpha(\alpha+1)}{\rho^2} \right] f(\rho) = 0 \quad (4.5)$$

Pour  $\alpha = -1/2$ , on obtient :

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + \left[ 1 - \frac{(\ell+1/2)^2}{\rho^2} \right] f(\rho) = 0 \quad (4.6)$$

Les deux fonctions  $f(\rho)$  et  $J_{(\ell+1/2)}$  satisfont la même équation différentielle homogène, donc elles sont proportionnelles l'une de l'autre.

De la relation (4.6), on voit que  $\nu = \pm(\ell+1/2)$ , la contrainte physique impose que  $R(r)$  tends vers  $r^{\ell}$  quand  $r$  tends vers 0 alors on a  $\rho^{-1/2} f(\rho) \rightarrow \rho^{\ell}$  et la seule possibilité admise est alors  $\nu = +(\ell+1/2)$ , et finalement on aura :

$$R(r) = r^{-\frac{1}{2}} J_{(\ell+1/2)}. \quad (4.7)$$



On introduit les fonctions de Bessel sphériques telles que :

$$J_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} J_{(\ell+\frac{1}{2})}(\rho). \quad (4.8)$$

L'une des représentations intégrale de  $J_\nu$  est donnée par :

$$J_\ell(\rho) = \frac{\rho^\ell}{2^{\ell+1}\ell!} \int_{-1}^{+1} e^{i\rho s} (1-s^2)^\ell ds, \quad (4.9)$$

après  $\ell$  intégrations par partie de  $J_\nu$ , on trouve :

$$J_\ell(\rho) = (i)^\ell \frac{(-1)^\ell}{2^{\ell+1}\ell!} \int_{-1}^{+1} e^{i\rho s} \frac{d^\ell}{ds^\ell} (1-s^2)^\ell ds \quad (4.10)$$

Par comparaison avec la formule de Rodriguez, on obtient :

$$J_\ell(\rho) = \frac{-1}{2i^\ell} \int_{-1}^{+1} e^{i\rho s} P_\ell(s) ds \quad (4.11)$$

Relation qui lie les fonctions de Bessel au polynômes de Legendre de degré  $\ell$ . Les premières expressions des fonctions de bessel  $J_\ell$  sont :

$$J_0(\rho) = \frac{\sin(\rho)}{\rho} \quad ; \quad J_1(\rho) = \frac{\sin(\rho)}{\rho^2} - \frac{\cos(\rho)}{\rho}$$

$$J_2(\rho) = \left(\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right) \sin(\rho) - \frac{3}{\rho^2} \cos(\rho)$$

La solution s'écrit donc pour la particule libre

$$R_{kl}(r) = C_{kl} J_l(kr).$$

Finalement on dispose de deux jeux de fonctions propres pour la particule libre d'énergie  $E$  : les ondes planes  $\psi_{\vec{k}} = C e^{i\vec{k}\vec{r}}$  et les fonctions  $J_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi)$ . On peut donc développer la première sur les états de la deuxième comme suit :

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_{lm} J_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.12)$$

Si on prend  $\vec{k}$  suivant  $Oz$ , le premier terme ne dépend que de  $\theta$ , et non de  $\phi$ . Donc, seules les harmoniques sphériques  $Y_{l0}$  apparaissent dans le développement, en utilisant l'équation (2.11), on peut écrire :

$$e^{ikr \cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l J_l(kr) P_l(\cos\theta). \quad (4.13)$$

En tenant compte de l'équation d'orthogonalité des fonctions de Legendre :

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \int_0^\pi P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin(\theta)d\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \quad (4.14)$$

Multiplions membre à membre l'équation (4.13) par  $P_\ell(x)$  et intégrons, on obtient :

$$C_\ell J_\ell(kr) = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{ikrx} P_\ell(x) dx \quad (4.15)$$

Par comparaison avec l'expression intégrale :

$$J_\ell(\rho) = \frac{1}{2i^\ell} \int_{-1}^{+1} e^{i\rho s} P_\ell(s) ds \quad (4.16)$$

On en déduit que  $C_\ell = (2\ell+1)i^\ell$  d'où finalement on aura :

$$\boxed{e^{ikr} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)i^\ell J_\ell(kr)P_\ell(\cos\theta)} \quad (4.17)$$

C'est une relation qui est très utile en physique atomique spécialement dans les problèmes de diffusions.

ANNEXE B

CONTRIBUTIONS SCIENTIFIQUES

## ARTICLE 1

On the Coulomb effect in laser-assisted proton scattering by a stationary atomic nucleus

# On the Coulomb effect in laser-assisted proton scattering by a stationary atomic nucleus

E Hhour<sup>1</sup>, S Taj<sup>1</sup>, A Chahboune<sup>1</sup>, M El Idrissi<sup>2</sup> and B Manaut<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université Sultan Moulay Slimane, Faculté Polydisciplinaire, Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Sciences et Techniques, PO Box 523, Béni Mellal, 23000, Morocco

<sup>2</sup> Université Hassan 1er Settat-Faculté Polydisciplinaire de Khouribga, Morocco

E-mail: [b.manaut@usms.ma](mailto:b.manaut@usms.ma)

Received 16 March 2017, revised 5 April 2017

Accepted for publication 8 April 2017

Published 15 May 2017



CrossMark

## Abstract

In the framework of the first Born approximation, we investigate the scenario where in addition to a laser field, a nuclear Coulomb field is also present to affect a proton. We work in the approximation in which the proton is considered to be a structureless spin 1/2 Dirac particle with a mass  $m_p$ . Furthermore, in the laboratory system, the fixed nucleus is treated as a point-like Coulomb potential. In the presence of a laser field, and taking into account the Coulomb effect, the proton will be described by distorted Dirac–Volkov wave functions. The introduction of the Coulomb effect to both the incident and scattered proton will enhance the relativistic differential cross sections (RDCSs). Regarding the physical picture, it is found that for the various kinetic energies of the incident proton, the Coulomb effect can be neglected at high kinetic energies in this particular geometry. Therefore, Dirac–Volkov states are largely sufficient to describe the laser-dressed protons. The behavior of the various RDCSs versus the atomic number  $Z$  is also presented.

Keywords: laser-assisted, Coulomb effects, QED calculations

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

## 1. Introduction

With the progress of laser technology, the current generation of laser sources can reach intensities of more than  $10^{18}$  W cm<sup>-2</sup> [1, 2]. The interest in using relativistic treatment to study fundamental processes in the presence of a laser field becomes imperative, since the intensities exceed the threshold value  $10^{18}$  W cm<sup>-2</sup> [2]. Laser–matter interaction at such intensities is capable of producing relativistic electrons which have a variety of applications in scientific and medical research. In 1932, Mott [3] obtained the cross section of the process of the elastic scattering of an electron by a Coulomb potential in the absence of an external laser field. In the papers [4–6], the authors considered the electron to be a Klein–Gordon particle and neglected the spin effects. The theoretical work of [7] inspired Szymanowski *et al* [2] to investigate the spin effects in a laser-assisted Mott scattering process in great detail using

the Dirac–Volkov formalism in the first Born approximation. There are many other papers in which the Dirac–Volkov formalism is fully used (see [8–14]). Roshchupkin [15] extended the same process to the second Born approximation.

The interest in using Coulomb effects in atomic scattering theory comes from the fact that in plasmas physics, the electrostatic interaction has a long range. The model of the Coulomb wave functions and its variants can predict the cross sections at low and intermediate energies. Recently, Boca [16] presented the analytical and numerical result for the scattering process of the spin 1/2 particle on the Coulomb field in the presence of an intense laser pulse. Alebed [17] studied the process of Mott scattering in a field of two-pulsed lasers.

The first aim of this work is to study the proton scattering by a nuclear Coulomb field in the presence of a circularly polarized laser field. Since there is both a laser field and a stationary nuclear Coulomb field, the combined influence of these two

fields on the proton makes it necessary to use Coulomb Dirac–Volkov functions to describe the proton, especially for low energies. This effect can be modeled by introducing the hypergeometric confluent functions to the amplitude. The second aim is to generalize the article [18] in which the authors have investigated Mott scattering using Coulomb–Volkov electron states and studied the influence of Coulomb distortion on the electron motion (only on the incoming electron) for moderate laser intensities in the case of a linearly polarized laser field. In the following, we will discuss three cases in which we consider:

- the Coulomb effect on just the incident proton,
- the Coulomb effect on just the scattered proton,
- the Coulomb effect both on the incoming and outgoing proton.

This paper is organized as follows: in section 2, we will give the theoretical formalism of the relativistic differential cross section. In section 3, we will present and discuss the numerical results; then, we will draw a brief conclusion in section 4.

Unless specifically stated, the atomic units ( $\hbar = m_e = e = 1$ ), where  $m_e$  is the electron mass at rest, and the metric tensor is  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , are used throughout. The Lorentz scalar product is defined by  $(A.B) = A^\mu B_\mu$  and for all  $k$ , the ‘bold’ style  $\mathbf{k}$  is recommended for the vectors.

## 2. Outline of the theory

In the presence of a laser field, we consider the proton as a spin 1/2 Dirac particle with a charge of  $+e$ . In this approximation, the proton obeys the following Dirac equation:

$$\left\{ \left( \hat{p} + \frac{A}{c} \right)^2 - m_p c^2 + \frac{i}{2c} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right\} \psi(x) = 0, \quad (1)$$

where  $m_p = 1836.152\,672\,45 \times m_e$  is the mass of the proton. The general solution of this equation gives the normalized relativistic Dirac–Volkov wave functions, which represent the proton in a laser field normalized to the volume  $V$ :

$$\psi(x) = \left( 1 + \frac{\mathbf{k}A}{2c(k.p)} \right) \sqrt{\frac{m_p}{2QV}} u(p, s) \times \exp \left[ -i(q.x) + i \int_0^{kx} \frac{(A.p)}{c(k.p)} d\phi \right], \quad (2)$$

where  $u(p, s)$  is the free proton bispinor, which is normalized as  $\bar{u}(p, s)u(p, s) = u^*(p, s)\gamma^0 u(p, s) = 2c^2$  and  $q^\mu = p^\mu - e^2 \bar{\mathbf{A}}^2 k^\mu / [2c^2(k.p)]$  is the dressed four-momentum  $q = (Q/c, \mathbf{q})$  of the proton. We take the laser field as a circularly polarized monochromatic electromagnetic field, which is classically described by the following four-potential:

$$A^\mu = a_1^\mu \cos \phi + a_2^\mu \sin \phi. \quad (3)$$

This potential satisfies the Lorentz condition ( $k^\mu A_\mu = 0 \rightarrow (k.a_1) = (k.a_2) = 0$ ). We also have  $(a_1.a_2) = 0$  and  $A^2 = a_1^2 = a_2^2 = a^2$  where  $k^\mu$  is the four-wave number  $k = (\omega/c, \mathbf{k})$  and  $(k_\mu k^\mu = k^2 = 0)$ , which depends only on the argument:  $\phi = (k.x) = k_\mu x^\mu$ , so  $A^\mu$  can be written as:

$$A^\mu = A^\mu(\phi). \quad (4)$$

In such conditions, the Dirac–Volkov solutions become:

$$\psi_q(x) = \left[ 1 + \frac{1}{2c(k.p)} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}_1 \cos(\phi) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{d}_2 \sin(\phi)) \right] \times \sqrt{\frac{m_p}{2QV}} u(p, s) e^{iS(q,x)}, \quad (5)$$

with

$$S(q, x) = -q.x + \left[ \frac{(a_1.p)}{c(k.p)} \sin(\phi) - \frac{(a_2.p)}{c(k.p)} \cos(\phi) \right] = -q.x + \left[ \frac{(a_1.q)}{c(k.q)} \sin(\phi) - \frac{(a_2.q)}{c(k.q)} \cos(\phi) \right]. \quad (6)$$

All of the theoretical formalism for the dressed proton without Coulomb effects can be found in our recently published paper [20]. A detailed relativistic Dirac formalism is employed for the treatment of laser-assisted proton–hydrogen-atom collisions at high energies.

### 2.1. The Coulomb effect on the incident proton

To establish the expression of the  $S$ -matrix transition amplitude as well as the final expression of the differential cross section, we have done calculations in a laboratory system in which the fixed nucleus is the point-like Coulomb potential. For a uniform sphere of charge, we know from classical electrostatics that the Coulomb potential is  $V(r) = Ze^2/4\pi\epsilon r$ . In atomic units, the quadri-Coulomb potential, for the case of proton scattering, is:

$$A^\mu = \left( \frac{Z}{|\mathbf{x}|}, 0, 0, 0 \right) \quad (7)$$

where  $Z$  is the atomic number and  $|\mathbf{x}|$  is the distance between the proton and the center of the nucleus. The confluent hypergeometric function is used as a universal means for the solution of a large number of problems in mathematical physics. In the area of the Coulomb field, the incoming proton feels the Coulomb effects, and is approximated by the Dirac–Volkov wave function modulated by the Coulomb term using the confluent hypergeometric function  ${}_1F_1(a, b, c, z)$  such as:

$$\psi_{qi}(x) = N_i {}_1F_1(i\eta_i, 1, i(q_i|x| - \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{x})) R(p_i) \sqrt{\frac{m_p}{2Q_i V}} u(p, s) e^{iS(q_i, x)}, \quad (8)$$

where the index  $i$  stands for the initial state, index  $f$  stands for the final state,  $\eta_i = Z\alpha Q_i / (c|q_i|)$  is the relativistic parameter of Sommerfeld,  $\alpha$  is the fine structure constant, and the normalization factor of the confluent hypergeometric function is as follows:

$$N_i = e^{\frac{\pi\eta_i}{2}} \Gamma(1 - i\eta_i). \quad (9)$$

In this section, we neglect the Coulomb effect on the outgoing proton, and it is simply described by the relativistic Dirac–Volkov wave function normalized to the volume  $V$ :

$$\psi_{qf}(x) = R(p_f) \sqrt{\frac{m_p}{2Q_f V}} u(p, s) e^{iS(q_f, x)}. \quad (10)$$

Then, the  $S$ -matrix element for the Coulomb potential-proton scattering is given by:

$$S_{fi} = -\frac{i}{c} \int d^4x \bar{\psi}_{qf}(x) \mathcal{A} \psi_{qi}(x) = -\frac{iZ}{c} \int d^4x \bar{\psi}_{qf}(x) \frac{\gamma^0}{|\mathbf{x}|} \psi_{qi}(x). \quad (11)$$

Replacing the wave functions by their expressions, we find:

$$S_{fi} = -\frac{iZ}{c} \int d^4x \sqrt{\frac{m_p}{2Q_i V}} \sqrt{\frac{m_p}{2Q_f V}} N_i {}_1F_1(i\eta_i, 1, i(q_i|x| - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})) \\ \times \bar{u}(p_f, s_f) \bar{R}(p_f) \frac{\gamma^0}{|\mathbf{x}|} R(p_i) u(p_i, s_i) e^{-i(S(q_f, x) - S(q_i, x))}. \quad (12)$$

We proceed to the following substitutions:

$$\alpha_1 = -\left( \frac{(a_1, p_i)}{c(k, p_i)} - \frac{(a_1, p_f)}{c(k, p_f)} \right), \quad \alpha_2 = -\left( \frac{(a_2, p_i)}{c(k, p_i)} - \frac{(a_2, p_f)}{c(k, p_f)} \right) \quad (13)$$

and

$$z = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}. \quad (14)$$

The term in the exponential in equation (12) becomes:

$$e^{-i(S(q_f, x) - S(q_i, x))} = \exp[i(q_f - q_i)x - iz \sin(\phi - \phi_0)], \quad (15)$$

and the phase  $\phi_0$  is such that:

$$\phi_0 = \arccos(\alpha_1/z) = \arcsin(\alpha_2/z) = \arctan(\alpha_2/\alpha_1). \quad (16)$$

After some algebraic manipulations, we find:

$$S_{fi} = -\frac{iZ}{c} \int d^4x \sqrt{\frac{m_p}{2Q_i V}} \sqrt{\frac{m_p}{2Q_f V}} \bar{u}(p_f, s_f) \\ \times [C_0 + C_1 \cos(\phi) + C_2 \sin(\phi)] u(p_i, s_i) \\ \times \frac{1}{|\mathbf{x}|} {}_1F_1(i\eta_i, 1, i(q_i|x| - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})) \\ \times \exp[i(q_f - q_i)x - iz \sin(\phi - \phi_0)] \quad (17)$$

where the three coefficients  $C_0$ ,  $C_1$  and  $C_2$  are respectively given by:

$$C_0 = \gamma^0 - 2k_0 a^2 \mathbf{k} c(p_i) c(p_f), \\ C_1 = c(p_i) \gamma^0 \mathbf{k} \mathbf{d}_1 + c(p_f) \mathbf{d}_1 \mathbf{k} \gamma^0, \\ C_2 = c(p_i) \gamma^0 \mathbf{k} \mathbf{d}_2 + c(p_f) \mathbf{d}_2 \mathbf{k} \gamma^0, \quad (18)$$

with  $c(p) = 1/2c(k, p)$  and  $k_0 = k^0 = \omega/c$ . We introduce the well-known ordinary Bessel functions  $J_n(z)$ :

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{Bmatrix} e^{-iz \sin(\phi - \phi_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} B_n \\ B_{1n} \\ B_{2n} \end{Bmatrix} e^{-in\phi}, \quad (19)$$

where

$$\begin{Bmatrix} B_n \\ B_{1n} \\ B_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_n(z) e^{in\phi_0} \\ (J_{n+1}(z) e^{i(n+1)\phi_0} + J_{n-1}(z) e^{i(n-1)\phi_0})/2 \\ (J_{n+1}(z) e^{i(n+1)\phi_0} - J_{n-1}(z) e^{i(n-1)\phi_0})/2i \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

where  $z$  is the argument of the Bessel functions defined in equation (14).

After the time-integration, the matrix element  $S_{fi}$  becomes:

$$S_{fi} = -\frac{iZ}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{i_i^{(n)}}{\sqrt{4Q_i Q_f V^2}} \bar{u}(p_f, s_f) \Gamma^{(n)} u(p_i, s_i) \right. \\ \left. \delta(Q_i + n\omega - Q_f) \right\} \quad (21)$$

where  $\Gamma^{(n)}$  is defined by:

$$\Gamma^{(n)} = C_0 B_n + C_1 B_{1n} + C_2 B_{2n}. \quad (22)$$

In this work, we consider the spin unpolarized differential cross section (DCS). Therefore, the different polarization states have the same probability, and the measured DCS is given by the summation over the final polarization  $s_f$  and averaging over the initial polarization  $s_i$ . So, the spin unpolarized DCS is formally given by:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f} \Big|_{Q_f=Q_i+n\omega} \quad (23)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{Z^2}{(4\pi c^2)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|} \left[ \frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 \right] |I_i^{(n)}|^2, \quad (24)$$

with

$$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f} \Big|_{Q_f=Q_i+n\omega} = \frac{Z^2}{(4\pi c^2)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|} \left[ \frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 \right] |I_i^{(n)}|^2. \quad (25)$$

Then we have to calculate

$$\frac{1}{2} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |\bar{u}(p_f, s_f) \Gamma^{(n)} u(p_i, s_i)|^2. \quad (26)$$

Using standard techniques of the Dirac  $\gamma$  matrix algebra, one has

$$\frac{1}{2} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \frac{(\not{p}_f c + m_p c^2)}{m_p} \Gamma^{(n)} \frac{(\not{p}_i c + m_p c^2)}{m_p} \bar{\Gamma}^{(n)} \right\}. \quad (27)$$

The calculation is now reduced to the evaluation of the traces of the Dirac- $\gamma$  matrices. This is commonly done using the software REDUCE [19]. This quantity represents the spinorial contribution to the differential cross section and is explicitly detailed in our recent work [20].

The expression of the integral contribution  $I_i^n$ , which contains all the information on the Coulomb effect, is as follows:

$$I_i^n = N_i \int d^3x \frac{e^{i(q_f - q_i - nk)x}}{|\mathbf{x}|} {}_1F_1(i\eta_i, 1, i(q_i|x| - \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{x})) \quad (28)$$

and can be calculated using the general equation [21]:

$$\int {}_1F_1(i\xi, 1, i(pr - \mathbf{p}\mathbf{r})) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{p})\mathbf{r} - \lambda r} \frac{d\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = 4\pi \frac{a^{-i\xi}}{(a+b)^{1-i\xi}} \quad (29)$$

with

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{k}^2 + (\lambda - i\mathbf{p})^2 \\ a + b &= (\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + \lambda^2. \end{aligned} \quad (30)$$

After the changes  $\xi = \eta_f$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{q}_f - n\mathbf{k}$  and  $\mathbf{p} = \mathbf{q}_i$ , we obtain the final form of  $I_i^n$ :

$$I_i^n = 4\pi N_i \frac{[(\mathbf{q}_f - n\mathbf{k})^2 - \mathbf{q}_i^2]^{-i\eta_i}}{[(\mathbf{q}_f - n\mathbf{k} - \mathbf{q}_i)^2]^{1-i\eta_i}}. \quad (31)$$

In equation (31), the Coulomb effects influence the incident proton through the Sommerfeld parameter  $\eta_i$ . If we neglect the distortion of the Coulomb field and then set  $\eta_i = 0$ , we recover the corresponding expression obtained without the Coulomb approximation.

## 2.2. The Coulomb effect on the scattered proton

In this case, we describe the outgoing proton in the same way using the distorted Dirac–Volkov wave functions:

$$\begin{aligned} \psi_{q_f}(x) &= N_f {}_1F_1(-i\eta_f, 1, -i(q_f|x| + \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{x})) R(p_f) \\ &\times \sqrt{\frac{m_p}{2Q_f V}} u(p, s) e^{iS(q_f, x)}, \end{aligned} \quad (32)$$

where  $\eta_f = Z\alpha Q_f / (c|q_f|)$  is the relativistic parameter of Sommerfeld and  $N_f = \exp(\pi\eta_f/2)\Gamma(1 + i\eta_f)$  is the normalization factor of the confluent hypergeometric function. If we assume that the incident proton does not feel the Coulomb effect, its wave function in the laser field can only be expressed by equation (5). The differential cross section with the Coulomb effect on the scattered proton reads

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{Z^2}{(4\pi c^2)^2} \frac{|q_f|}{|q_i|} \times \left[ \frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 \right] \times |I_f^{(n)}|^2. \quad (33)$$

In this case, the integral  $I_f^{(n)}$  is given by:

$$I_f^n = N_f \int d^3x \frac{e^{i(q_f - q_i - nk)x}}{|\mathbf{x}|} {}_1F_1(i\eta_f, 1, i(q_f|x| + \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{x})), \quad (34)$$

by using the following well-known integral:

$$\begin{aligned} \int {}_1F_1(i\xi, 1, i(pr + \mathbf{p}\mathbf{r})) e^{i(\mathbf{q} - \mathbf{p})\mathbf{r} - \lambda r} \frac{d\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} &= 2\pi \left( \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{p})^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \right)^{i\xi-1} \\ &\times \left( \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{p})^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} + \mathbf{p}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) - i\lambda p \right)^{-i\xi}, \end{aligned} \quad (35)$$

and making the following substitutions:  $\xi = \eta_f$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_f - n\mathbf{k}$  and  $\mathbf{p} = \mathbf{q}_i$ , after some calculations we obtain  $I_f^n$ :

$$I_f^n = 4\pi N_f [(\mathbf{q}_f - n\mathbf{k})^2 - \mathbf{q}_i^2]^{-i\eta_f} [(\mathbf{q}_f - n\mathbf{k} - \mathbf{q}_i)^2]^{i\eta_f-1}. \quad (36)$$

Again, we come to the same result: if the Sommerfeld parameter  $\eta_f$  equals zero, we find the simple case without Coulomb effects.

## 2.3. The total Coulomb effect

In this section, both the incident and scattered proton feel the Coulomb effect, and are described by the Coulomb Dirac–Volkov wave functions, which are given explicitly in equations (8) and (32). The differential cross section, for this third case, is given by the same equation with changes only in the integral  $I_{if}^{(n)}$  instead of  $I_i^{(n)}$  or  $I_f^{(n)}$  and reads:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{Z^2}{(4\pi c^2)^2} \frac{|q_f|}{|q_i|} \times \left[ \frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 \right] \times |I_{if}^{(n)}|^2. \quad (37)$$

The integral  $I_{if}^{(n)}$ , in which the Coulomb effect is on the incoming and outgoing proton, is evaluated according to:

$$\begin{aligned} I_{if}^{(n)} &= N_f^* N_i \int d^3x \frac{e^{i(q_f - q_i - nk)x}}{|\mathbf{x}|} {}_1F_1(i\eta_i, 1, i(q_i|x| - \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{x})) \\ &\times {}_1F_1(i\eta_f, 1, i(q_f|x| + \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{x})). \end{aligned} \quad (38)$$

After tedious analytical calculations, we find the final analytical expression of this integral as follows:

$$\begin{aligned} I_{if}^{(n)} &= N_f^* N_i \frac{2\pi}{\alpha} e^{-\pi\eta_i} \left[ \frac{\alpha}{\gamma} \right]^{i\eta_i} \left[ \frac{\alpha + \delta}{\gamma} \right]^{-i\eta_f} \\ &\times {}_2F_1(1 - i\eta_i, i\eta_f, 1, \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha(\gamma + \delta)}), \end{aligned} \quad (39)$$

where the quantities  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  and  $\delta$  are such that:

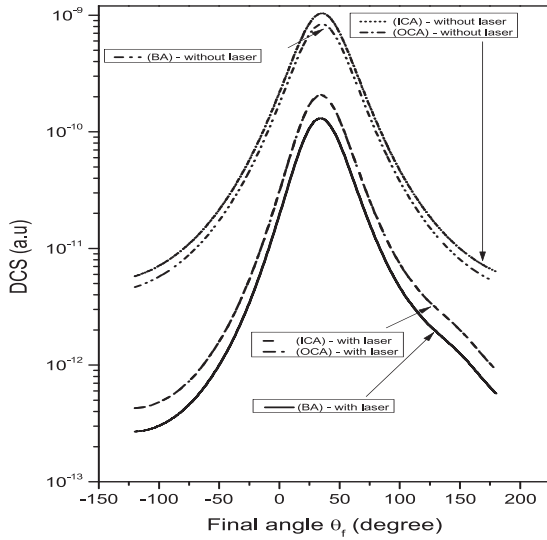
$$\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}_i - n\mathbf{k})^2; \quad \beta = \mathbf{q}_f(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}_i - n\mathbf{k})$$

$$\gamma = \mathbf{q}_i(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}_i - n\mathbf{k}) - \alpha; \quad \delta = |\mathbf{q}_i||\mathbf{q}_f| - \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_f - \beta.$$

All information on the Coulomb effects is contained in the wave function normalization factors, which depend on the hypergeometric function. The amplitude of the wave functions acts on the integral contribution  $I_{if}^{(n)}$  and directly causes the changes in the differential cross section. To check the consistency of our calculations, we set the Sommerfeld parameters to equal zero ( $\eta_i = 0$  and  $\eta_f = 0$ ) and then we easily find the case without the Coulomb effect. In this subsection, we have presented the complete results for both the incident and scattered proton differential cross sections.

## 3. Results and discussion

We present the numerical results of the differential cross section for the proton scattering by a nuclear Coulomb potential

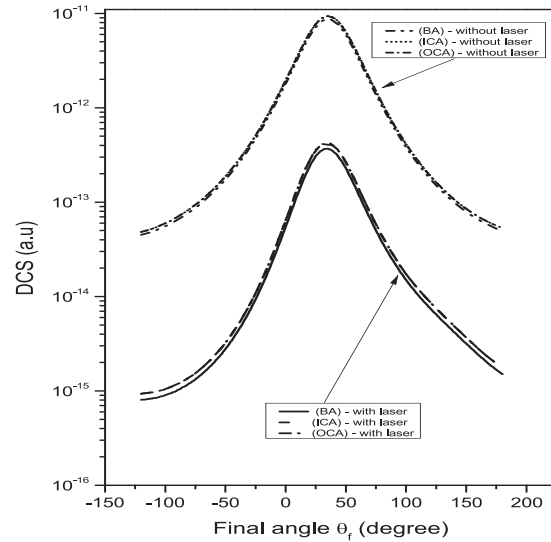


**Figure 1.** The logarithmic scale of the relativistic DCS for the three approaches BA, ICA and OCA as a function of  $\theta_f$  with and without a laser. The kinetic energy of the incoming proton is  $E_k = 4.97$  MeV. The geometric parameters  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ , the electric field strength is  $\epsilon = 0.1$  au, and the number of photons exchanged is  $n = \pm 100$ .

process, in the presence of circularly polarized monochromatic laser fields. The target is a residual ion charge  $Z$  which is located at the origin of the laboratory referential. The wave vector  $\mathbf{k}$  of the laser field is along the  $z$ -axis, and the initial and final momentum of the proton are directed at angles  $\phi_{i,f}$  and  $\theta_{i,f}$ . The incorporation of Coulomb effects into the scattering process is a challenging task. It is obvious that the Coulomb effect, due to the charge of particles (proton, positron, electron,...), is not negligible in the non-relativistic regime. Therefore, it is indispensable to account for Coulomb effects in the calculations of a differential cross section for such energies. In the following, we want to investigate how correct treatment of the Coulomb effects in the first Born approximation influences the differential cross section of the proton–atom nucleus scattering process in the non-relativistic regime.

### 3.1. Simple Coulomb approximation (SCA)

In figures 1 and 2, in the presence and absence of the laser fields, we give the relativistic differential cross section (RDCS) as a function of the scattering angle  $\theta_f$ . We have to apply this effect to the interaction of the proton with the nucleus with three possibilities: without Coulomb effects (BA), with Coulomb effects on the incoming proton (ICA) and with Coulomb effects on the outgoing proton (OCA). The two possible calculation schemes ICA and OCA (figures 1 and 2) agree, since in the differential cross section, the integral contribution is the same. This is due to the fact that this process of collision is elastic, and the two dressed energies and momenta are equal ( $(Q_i = Q_f; |\mathbf{q}_i| = |\mathbf{q}_f|) \rightarrow \eta_i = \eta_f$ ).



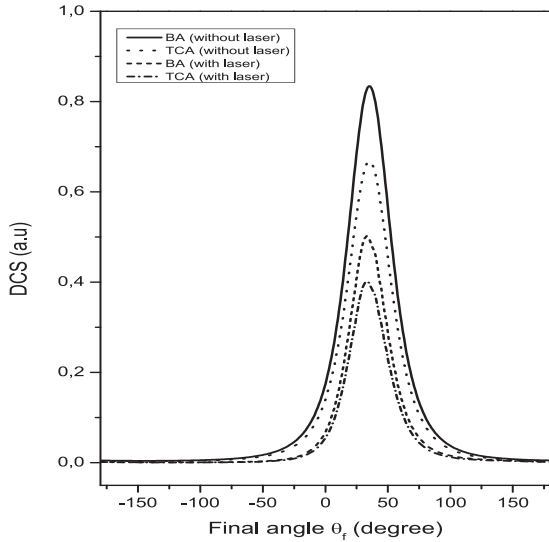
**Figure 2.** The logarithmic scale of the relativistic DCS for the three approaches BA, ICA and OCA as a function of  $\theta_f$ , with and without a laser. The kinetic energy of the incoming proton is  $E_k = 46.91$  MeV. The geometric parameters  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ , the electric field strength is  $\epsilon = 0.1$  au, the atomic number is  $Z = 1$  and the number of photons exchanged is  $n = \pm 100$ .

Therefore, since in different energies and various geometries the two approaches overlap, we replace the ICA and OCA notations with only one notation, which is a 'simple Coulomb approximation' (SCA). The introduction of the laser field in figures 1 and 2, with and without the Coulomb effect on the incoming or outgoing proton, increases the magnitude of the RDCS. The ratio between the RDCS remains practically constant, without taking into account the Coulomb effect BA and that with the Coulomb effect SCA. For the chosen geometry, and the number of photons exchanged  $\pm 100$ , the curves representing the RDCS show a maximum in the vicinity of  $\theta_f = 40^\circ$  in all cases. The general behavior of the RDCS versus the kinetic energy of the incident proton remains almost the same. By increasing the energy  $E_k$  of the incoming proton from  $E_k = 4.97$  MeV in figure 1 to  $E_k = 46.91$  MeV in figure 2, the only difference is that the RDCS BA and SCA decrease by approximately  $10^2$  times. The remarkable result for this geometry and through these figures is that the Coulomb effects reduce at high energies.

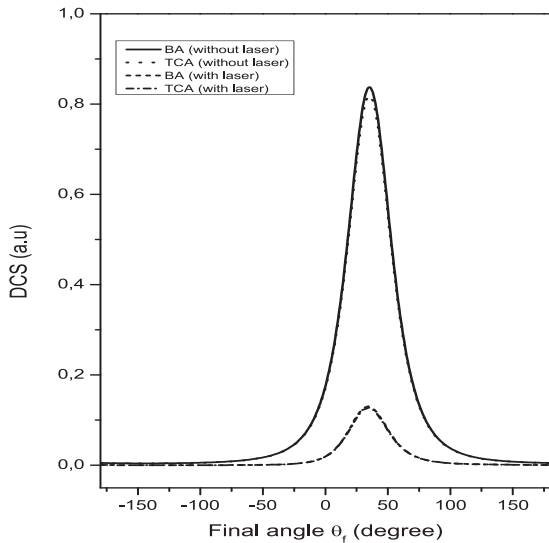
### 3.2. Total effect: the total Coulomb approximation (TCA)

In the total Coulomb approximation (TCA), we take into account the Coulomb effects on both the incident and scattered proton. In figures 3 and 4 we depict the calculated differential cross sections TCA and BA versus the final angle  $\theta_f$  for both the laser-assisted and laser-free cases. From figure 3, one can assume that the laser-assisted and laser-free RDCSs—in the two approximations TCA and BA—are significantly different for the non-relativistic kinetic energies  $E_k = 0.49$  MeV. Figure 4 shows that at kinetic energies equal to 4.97 MeV, a significant difference in magnitude remains



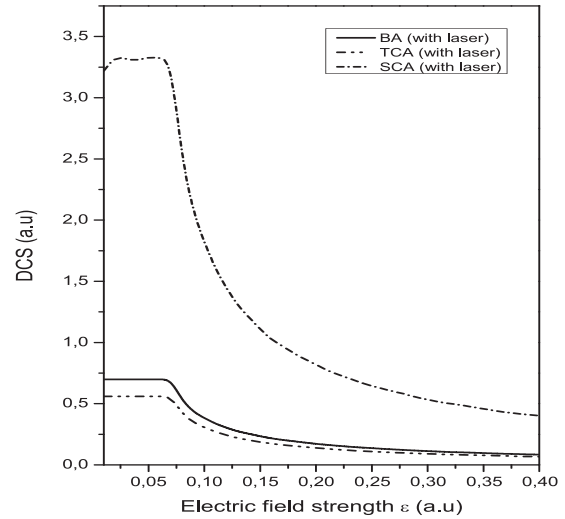


**Figure 3.** The relativistic DCS scaled in  $10^{-7}$  as a function of the final angle  $\theta_f$ . The kinetic energy of the incoming proton  $E_k = 0.49$  MeV, the electric field strength is  $\epsilon = 0.1$  au, the laser frequency is  $\omega = 0.043$  au, the atomic number is  $Z = 1$  and the number of photons exchanged is  $n = \pm 100$ . The geometric parameters are  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ .

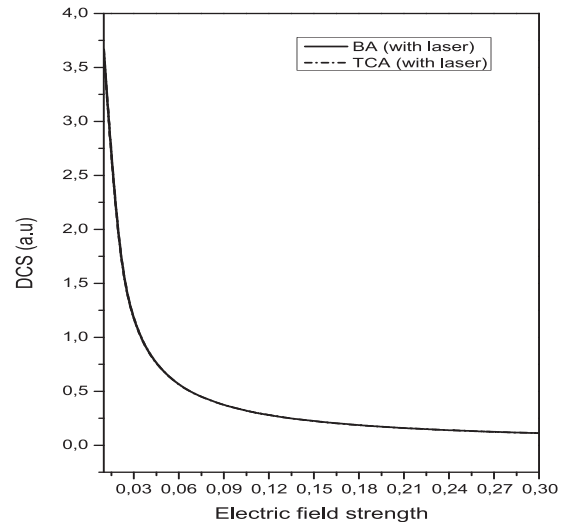


**Figure 4.** The relativistic DCS scaled in  $10^{-9}$  as a function of the final angle  $\theta_f$ . The kinetic energy of the incoming proton  $E_k = 4.97$  MeV, the electric field strength is  $\epsilon = 0.1$  au, the laser frequency is  $\omega = 0.043$  au, the atomic number is  $Z = 1$  and the number of photons exchanged is  $n = \pm 100$ . The geometric parameters are  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ .

between the laser-assisted and laser-free approaches, but no difference at all with respect to the Coulomb effects. This can be understood by the fact that the Coulomb effects vanish from the non-relativistic limit 4.97 MeV and above. Figure 5 exhibits the laser intensity dependence of the theoretical fully relativistic differential cross sections SCA, TCA and BA for the kinetic energy of the proton  $E_k = 0.49$  MeV. On the basis of this figure, the first remark is that the three approaches

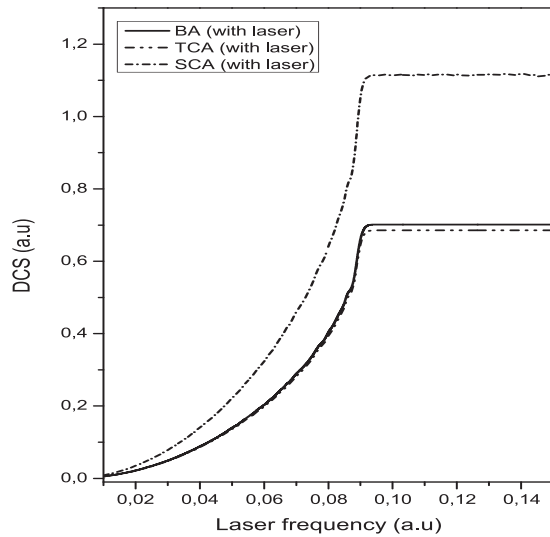


**Figure 5.** The relativistic DCS (BA, SCA and TCA) scaled in  $10^{-7}$  as a function of the electric field strength  $\epsilon$ . The kinetic energy of the incoming proton is  $E_k = 0.49$  MeV, the geometric parameters are:  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$  and  $\theta_f = 45^\circ$ , the atomic number is  $Z = 1$  and the number of photons exchanged  $n = \pm 100$ .

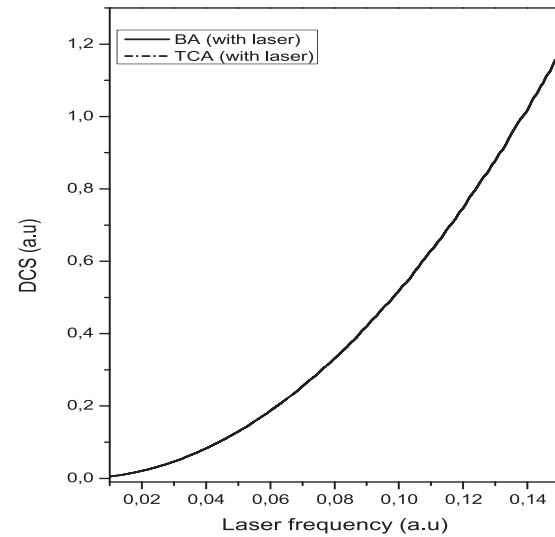


**Figure 6.** The relativistic DCS (BA and TCA) scaled in  $10^{-12}$  as a function of the electric field strength  $\epsilon$ . The kinetic energy of the incoming proton is  $E_k = 49.7$  MeV, the geometric parameters are:  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$ ,  $\theta_f = 45^\circ$ , the atomic number is  $Z = 1$  and the number of photons exchanged  $n = \pm 100$ .

SCA, TCA and BA present the same behavior. Under such conditions—in particular the energy  $E_k = 0.49$  MeV—there are actually two kinds of behavior, each associated with the fact that the RDCSs are less sensitive to the variation of the electric field strength, which is approximately  $\epsilon \approx 0.06$  (a.u) and below, and then the three approaches decrease from values of the electric field strength that are greater than 0.06 (a.u). Moreover, the Coulomb effect for SCA increases the DCS, which is in good agreement with the results of [18]. However, for the total approximation, the Coulomb effect decreases the differential cross section. After testing various geometries and different energies, the behavior of the

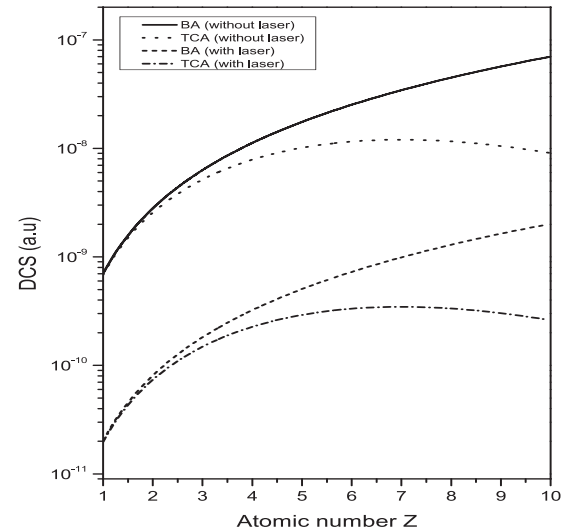


**Figure 7.** The relativistic DCS (BA, TCA and SCA) scaled in  $10^{-9}$  as a function of the laser field frequency for the kinetic energy of an incoming proton  $E_k = 4.97$  MeV. The geometric parameters  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\theta_f = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ . The electric field strength  $\epsilon = 0.1$  au, the atomic number is  $Z = 1$  and the number of photons exchanged  $n = \pm 100$ .



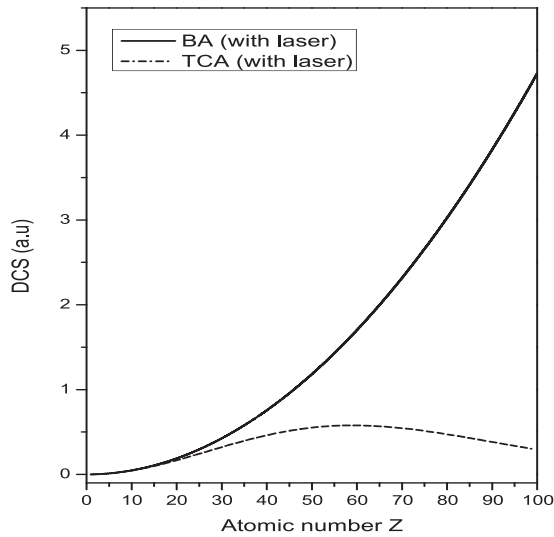
**Figure 8.** The relativistic DCS (BA, TCA and SCA) scaled in  $10^{-14}$  as a function of the laser field frequency for the kinetic energy of an incoming proton  $E_k = 497.28$  MeV. The geometric parameters  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\theta_f = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ . The electric field strength  $\epsilon = 0.1$  au, the atomic number is  $Z = 1$  and the number of photons exchanged  $n = \pm 100$ .

different differential cross sections changes for high energies. In figure 6 we give the plot of the two approaches TCA and BA for  $E_k = 49.7$  MeV. Two remarks can be made regarding this figure: first, the two approaches overlap, which means the complete physical absence of Coulomb effects in this regime. On the other hand, it means the complete disappearance of the part of the DCS, which is less sensitive to the electric field strength. More precisely, from a physical point of view, this means that at weak energies and for small intensities, the laser–proton interaction will be less pronounced. However, at high energies, laser–proton interaction is more significant, even at small intensities. In figure 7, we plot the SCA, TCA and BA relativistic differential cross section, with the same geometry and electric field strength for  $\theta_f = 45^\circ$  and proton kinetic energy equal to 4.97 MeV as a function of the laser frequency  $\omega$ . The differential cross sections increase with frequency until the value  $\omega = 0.09$  a.u., and then become insensitive to the changes in frequency while maintaining a significant ratio between the SCA and BA results. Figure 8 shows that at high kinetic energy levels  $E_k = 497.28$  MeV, relativistic DCSs increase with the laser frequency and the part of the DCS that is insensitive to the variation of frequency disappears. In addition, at high energies, there is no Coulomb effect, since the two relativistic DCSs, BA and TCA, give the same results. This inverse behavior between the intensity and frequency dependence of the relativistic DCS is explained by the introduction of the ponderomotive energy  $U_p = \epsilon^2/(4m_p\omega^2)$ . Therefore, the increase in intensity causes an increase in total energy and consequently a decrease in differential cross sections. However, the decrease in frequency causes the reverse situation. In figure 9, we give the summed differential cross sections, TCA and BA, versus the atomic number  $Z$ . The two approaches have been



**Figure 9.** The logarithmic scale of the laser-assisted and laser-free RDCS ((BA) and (TCA)) versus the atomic number  $Z$  for the kinetic energy of the incoming proton is  $E_k = 4.9$  MeV. The geometric parameters are  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$  and  $\theta_f = 45^\circ$ . The electric field strength is  $\epsilon = 0.5$  au and  $\omega = 0.043$  au, and for a number of photons exchanged  $\pm 100$ .

decreased by the introduction of a laser field with both a small and large atomic number. For an atomic number  $Z > 6$ , the Coulomb effect is very large and results in a manifold decrease in the cross sections. This can be seen by comparing the laser-assisted cross section without the Coulomb effect (BA with a laser) and the cross sections with Coulomb effects using the Coulomb function (TCA with a laser). For more details, figure 10 shows that by increasing the atomic number  $Z$ , the final limit of the overlapping curves for the two



**Figure 10.** The laser-assisted and laser-free RDCS ((BA) and (TCA)) scaled in  $10^{-13}$  versus the atomic number  $Z$  for the kinetic energy of an incoming proton is  $E_k = 938.27$  MeV. The geometric parameters are  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$  and  $\theta_f = 45^\circ$ . The electric field strength is  $\epsilon = 0.5$  au and  $\omega = 0.043$  au, and for a number of photons exchanged  $\pm 100$ .

**Table 1.** The geometric parameters are  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$  and  $\theta_f = 45^\circ$ , the electric field strength is  $\epsilon = 0.5$  au, and the laser frequency is  $\omega = 0.043$  au.

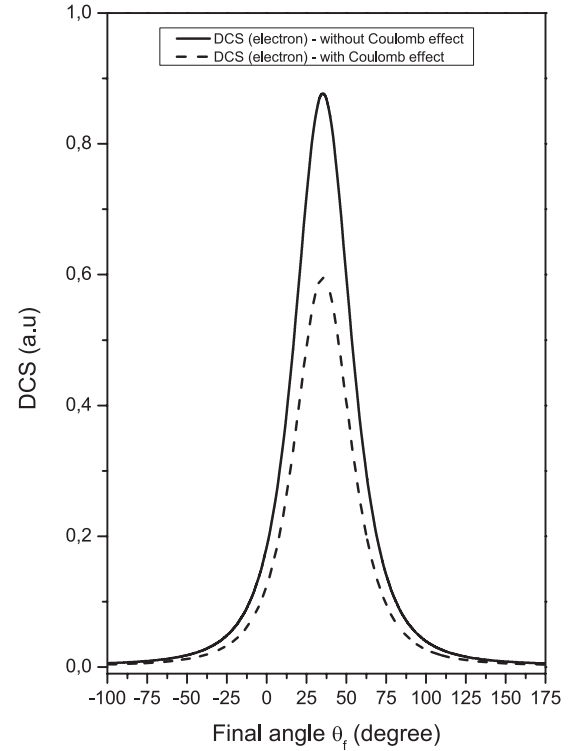
$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega}(E_k \text{ (MeV)})$	$n = -100$	$n = +100$
$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega}(0.49)$	$3.10853 \times 10^{-11}$	$3.52263 \times 10^{-11}$
$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega}(4.97)$	$7.33867 \times 10^{-14}$	$6.8114 \times 10^{-14}$
$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega}(49.7)$	$1.9368 \times 10^{-16}$	$1.99826 \times 10^{-16}$
$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega}(938.3)$	$4.5665 \times 10^{-19}$	$4.56301 \times 10^{-19}$

approaches TCA and BA increases with the increase of the kinetic energy of the incident particles. We have also found, from this figure, that by including the Coulomb effect TCA, the relativistic DCS has two kinds of behavior: for a lower number ( $Z < 60$ ), DCS increases with  $Z$  and for a higher number ( $Z > 60$ ), DCS decreases with  $Z$ . With an increasing  $Z$ , Coulomb effects begin to become noticeable at this stage since the magnitude of the relativistic DCS TCA has a clear signature with respect to the DCS BA, even in the relativistic regime. From figures 9 and 10 and for this particular geometry, we come to the following conclusion: the Coulomb effects vanish with an increase in the kinetic energy of the incident particles, and hence at high energies the use of plane waves to describe free particles and the Dirac–Volkov to describe particles in a laser field becomes completely sufficient. For more insights into DCS ( $n$  emitted/absorbed photons), in table 1 we give  $d\sigma^{(n)}(E_k)/d\Omega$  for the numbers of photons exchanged  $n = -100$  and  $n = +100$ .

As can be seen in table 1,  $d\sigma^{(n)}(E_k)/d\Omega$  for the numbers of photons exchanged  $n = -100$  and  $n = +100$  is slightly different at low energies and nearly the same at high energies.

**Table 2.** Charges, spins and masses for both electron and proton in atomic units.

	Electron	Proton
Charge	-1	+1
Spin	1/2	1/2
Mass $m$	1	1836.152 672 45

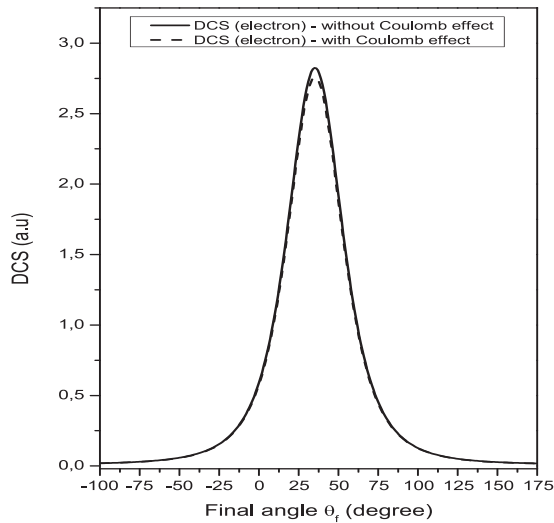


**Figure 11.** The RDCS for the electron with respect to  $\theta_f$  without a laser field. The kinetic energy of the incoming electron is  $E_k = 153.32$  eV and the atomic number is  $Z = 1$ . The geometric parameters  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ .

### 3.3. The total Coulomb effects on the electron

In this contribution, we have given the general formula which describes the charged Dirac spin 1/2 particles with mass  $m$ . In table 2 we give some differences and similarities between the electron and proton.

To find the results for the electron, we have to take the input parameters of the electron in both the REDUCE and Fortran codes. Figure 11 depicts the results of the angle dependence of the cross sections for a Mott scattering process with and without Coulomb effects and with the kinetic energy  $E_k = 153.32$  eV of the incident electron, where the dashed line shows the cross sections with the Coulomb effects and the solid line shows the cross sections without Coulomb effects using the generalized Coulomb functions. The general effect of the Coulomb distortion on the electron is to decrease the cross section, which depends upon the incident energy and the charge of the final nucleus. Figure 12 shows qualitatively similar results for the cross sections in the two approximations with and without Coulomb effects



**Figure 12.** The RDCS scaled in  $10^{-3}$  for the electron with respect to  $\theta_f$  without a laser field. The kinetic energy of the incoming electron is  $E_k = 2700$  eV and the atomic number is  $Z = 1$ . The geometric parameters  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ .

**Table 3.** Some differences between our work and that of [18].

	Work of [18]	This work
Wave vector $\vec{k}$	Along y-axis	Along z-axis
Laser polarization	Linear	Circular
Theoretical formalism of the work	Specific to electron	General (electron and proton)

with the kinetic energy  $E_k = 2700$  eV of the incident electron. From these two figures and also for this particular geometry, we come to the following conclusion: in the low incident energy region, the Coulomb effect is important but in the high incident energy region, the Dirac–Volkov states are well justified to describe the Dirac spin 1/2 particles in the laser field, and therefore the Coulomb effects may be neglected.

It is interesting to point out that the major difference between this work and that of Li *et al* [18], which makes the comparison difficult, is mentioned in table 3.

In [18], they have shown that the Coulomb distortion of the electron motion leads to a qualitative difference between the cross sections, with and without Coulomb effects versus the various free parameters. In this work, we show that this significant difference is reduced when taking Coulomb effects into account in both the initial and final states in the calculation of the differential cross section. Moreover, we have shown that the DCSs in the SCA approximation always overestimate the DCSs in the BA approximation, which is in good agreement with [18]. The second important remark is that when increasing the energy of the incident particle, the difference between the two approaches BA and TCA decreases.

## 4. Conclusion

In the present work we give the proton scattering by a Coulomb potential in the presence of a circularly polarized laser field, taking into account the distortion of the Coulomb effects. The relativistic differential cross sections depend on both laser field parameters and the transfer of energy and momentum between the colliding system and laser field. Increasing the atomic number  $Z$  has the general tendency to differentiate the results with and without the Coulomb effect and suggests the use of the distorted wave function at large  $Z$ , particularly at the low kinetic energy of the incident particle. We have found that in the non-relativistic regime, the RDCS in the simple Coulomb approximation (SCA) is always greater than that with the total Coulomb approximation (TCA) and without the Coulomb approximation (BA), and also that the RDCSs of the three approaches overlap at high kinetic energies. The main idea of the present study is to show that at high kinetic energies and for this particular geometry, the Coulomb effect can be neglected, and that then the use of Dirac–Volkov states remains satisfactory in the calculations of the laser-assisted differential cross section, particularly in the relativistic and ultra-relativistic regimes.

## References

- [1] Yanovsky V *et al* 2008 *Opt. Express* **16** 2109
- [2] Szymanowski C, Veniard V, Ta R, Maquet A and Keitel C H 1997 *Phys. Rev. A* **56** 3846
- [3] Mott N F 1932 *Proc. R. Soc. A* **124** 135
- [4] Ehlötzky F 1988 *Opt. Commun.* **66** 265
- [5] Kamiński J Z and Ehlötzky F 1999 *Phys. Rev. A* **59** 2105
- [6] Panek P, Kamiński J Z and Ehlötzky F 1999 *Can. J. Phys.* **77** 591
- [7] Denisov M M and Fedorov M V 1967 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **53** 1340  
Denisov M M and Fedorov M V 1968 *Sov. Phys.—JETP* **26** 779
- [8] Szymanowski C and Maquet A 1998 *Opt. Express* **2** 262
- [9] Panek P, Kamiński J Z and Ehlötzky F 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033408
- [10] Li S-M, Berakdar J, Chen J and Zhou Z-F 2003 *Phys. Rev. A* **67** 063409
- [11] El Idrissi M, Taj S, Manaut B and Oufni L 2014 *Ind. J. Phys.* **88** 111
- [12] Manaut B, Taj S and El Idrissi M 2013 *Can. J. Phys.* **91** 696
- [13] Hrou E, El Idrissi M, Taj S and Manaut B 2015 *Ind. J. Phys.* **89** 783
- [14] Attaouri Y and Manaut B 2003 *Phys. Rev. A* **68** 067401
- [15] Roshchupkin S P 1993 *Laser Phys.* **3** 414  
Roshchupkin S P 1997 *Laser Phys.* **7** 873
- [16] Boca M 2013 *Rom. Rep. Phys.* **60** 1246
- [17] Alebed A 2015 *Laser Phys.* **25** 055301
- [18] Li S-M, Berakdar J, Chen J and Zhou Z-F 2004 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **37** 653
- [19] Grozin A G 1997 *Using REDUCE in High Energy Physics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [20] Hrou E, Taj S, Chahboune A and Manaut B 2016 *Can. J. Phys.* **94** 645
- [21] Akhiezer A I and Berestetsky V B 1969 *Quantum Electrodynamics* (Moscow: Nauka)

## ARTICLE 2

Relativistic proton-impact excitation of hydrogen  
atom in the presence of intense laser field

# Relativistic proton-impact excitation of hydrogen atom in the presence of intense laser field

E. Hrou, S. Taj, A. Chahboune, and B. Manaut

**Abstract:** A theoretical treatment, using the first Born approximation, is presented to analyse the results of relativistic laser-assisted proton – hydrogen atom scattering. Specific calculations are carried out for excitation of hydrogen atoms from  $1s_{1/2}$  to  $2s_{1/2}$  states by proton impact. We work in an approximation in which the incoming proton may be described by Dirac–Volkov states in the presence of a laser field. Semi-relativistic Darwin wave functions are used to describe the hydrogen atom in its initial and final states, while relativistic, spin, and laser interaction effects are also accounted for. The results presented in this paper show that the differential cross section for this process depends not only upon the energy of the incident proton, but also upon its interaction with the laser field through intensity and frequency.

*Key words:* laser assisted, QED calculations, Dirac equation, relativistic atomic process, Dirac algebra.

**Résumé :** Nous présentons un calcul en première approximation de Born, pour analyser les résultats de diffusion proton-atome d'hydrogène en régime relativiste, sous l'influence d'un champ laser. Nos calculs sont spécialisés à l'excitation d'un atome d'hydrogène du  $1s_{1/2}$  au  $2s_{1/2}$  par impact de proton. Nous travaillons dans l'approximation où le proton peut être décrit par des états de Dirac–Volkov en présence d'un champ laser. Des fonctions d'onde semi-relativistes de Darwin sont utilisées pour décrire l'atome d'hydrogène dans ses états initial et final, tout en tenant compte des effets relativistes, de spin et d'interaction laser. Les résultats présentés ici montrent que la section efficace différentielle pour ce processus dépend non seulement de l'énergie du proton incident, mais aussi de son interaction avec le champ laser via son intensité et sa fréquence. [Traduit par la Rédaction]

*Mots-clés :* processus atomique relativiste assisté par laser, calculs EDQ/QED.

PACS Nos.: 34.80.Dp, 12.20.Ds.

## 1. Introduction

Analysis of inelastic proton–atom and proton–molecule scattering at intermediate to high energies has recently attracted a considerable amount of interest. In the case of electron- or positron-impact, relativistic quantum treatments with quantum electrodynamic effects have been performed [1–6]. With the availability of proton beams of well-defined energies, excitation and ionization of the hydrogen atom by proton impact has been for many years a subject of great theoretical interest. Collision of a hydrogen atom by proton impact is the simplest heavy-particle ion–atom collision. This type of collision is potentially more complex than scattering of electrons or positrons, because the proton can transfer much greater momentum to the target than can an electron or positron.

Many theoretical investigations have been carried out for scattering of hydrogen atoms by proton impact. Bransden and Noble presented a theoretical result for differential cross section (DCS) for excitation of a hydrogen atom to the  $(2s + 2p)$  level by protons at 50, 100, and 150 keV, employing the close-coupling pseudo-state model [7]. Rudd et al. measured angular and energy distributions of electrons ejected from He and  $H_2$ , by 100 and 300 keV protons [8]. Some attempts have been made to extend and improve the first Born approximation by taking into account the effect of the nuclear interaction term in the form of distorted waves (screened coulomb waves). Geltman and Hidalgo introduced the Coulomb-projected Born approximation, in which pure Coulomb waves are

taken in the final channel only [9]. Junker extended this approach by using the modified Born approximation in the initial channel and the two-potential modified Born approximation in both channels [10]. Mandal et al. used the Coulomb-projected Born approximation to obtain the non-relativistic DCS for  $n = 2$  excitation of a hydrogen atom by proton impact [11]. Recently Elkilany employed the coupled static formalism for the treatment of proton–lithium collisions at a wide range of incident energies between 10 and 1000 keV [12].

When an energetic proton collides with an atom or a molecule, several inelastic processes can take place in addition to elastic scattering. The basic ones are excitation of the target and ejection of free electrons from the target. The proton interacts with the hydrogen atoms, depending on energy transferred, by two processes:

- elastic collision,  $p + H \rightarrow p + H$ ; and
- inelastic collision,
  - excitation,  $p + H \rightarrow p + H'$ ; and
  - ionization,  $p + H \rightarrow p + p + e^-$

In this work, a detailed relativistic Dirac formalism is employed for treatment of laser-assisted proton–hydrogen atom collisions at high energies. We use relativistic perturbation theory to determine relativistic DCS of the excitation of a hydrogen atom by proton impact in the presence of a circularly polarized laser field.

Received 3 February 2016. Accepted 11 April 2016.

**E. Hrou, S. Taj, A. Chahboune, and B. Manaut.** Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane, Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Sciences et Techniques, Boite Postale 523, 23000 Béni Mellal, Morocco.

**Corresponding author:** B. Manaut (email: [b.manaut@usms.ma](mailto:b.manaut@usms.ma)).

Copyright remains with the author(s) or their institution(s). Permission for reuse (free in most cases) can be obtained from [RightsLink](https://www.rightslink.com).



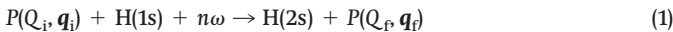
This paper is organized in the following manner: in Sect. 2, we develop a theoretical formalism; in Sect. 3, we discuss results we have obtained; and a brief conclusion appears in Sect. 4. The space-time metric  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  is employed throughout this work. In many equations of this paper, Feynman "slash notation" is used. For any 4-vector  $A$ ,  $\not{A} = A^\mu \gamma_\mu = A^0 \gamma_0 - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\gamma}$  where matrices  $\boldsymbol{\gamma}$  are well known Dirac matrices.

## 2. Theoretical formalism

In intermediate to high energy range theoretical studies for excitation of a hydrogen atom by proton impact are based on perturbative methods and are mainly Born- and Glauber-type approximations [13, 14]. In the high energy range these perturbative methods use plane waves to describe incoming and outgoing particles. In the low energy range, errors in the plane wave model are mainly important when the interaction is due to a long-range Coulomb potential. In the following, we outline laser-assisted relativistic DCS for scattering of hydrogen atoms by proton impact using the following approximations. A proton is 1836.15 times heavier than an electron, with a positive electrical charge. It should be noted that the primary difference in theoretical expressions for non-relativistic DCS and relativistic DCS occurs in both spinorial and integral parts. Here we give a detailed expression for relativistic DCS in the presence of a circularly polarized laser field.

### 2.1. Element matrix transition

The process in the course of which  $n$  photons from the laser field are exchanged, while an inelastic proton – hydrogen atom collision takes place, can be described by the following reaction:



which presents the collision of an incoming proton of quadrimomentum  $q_i = (Q_i, \mathbf{q}_i)$ , with a hydrogen atom target (in its ground state) in the presence of a laser field. The energy conservation equation corresponding to laser-assisted inelastic excitation of a hydrogen atom by proton impact, reads

$$Q_f = \mathcal{E}_b(1s_{1/2}) - \mathcal{E}_b(2s_{1/2}) + Q_i + n\omega \quad (2)$$

with

$$Q_{(i,f)} = E_{(i,f)} - \frac{A^2}{2c^2(k \cdot p_{(i,f)})} \omega \quad (3)$$

We use a circularly polarized laser field that is given by  $A = a_1 \cos(\phi) + a_2 \sin(\phi)$ , where  $a_1$  and  $a_2$  satisfy  $a_1^2 = a_2^2 = a^2$  and  $a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1 = 0$ . The Lorentz condition is given by  $k \cdot A = k \cdot a_1 = k \cdot a_2 = 0$  and phase  $\phi$  is such that  $\phi = k \cdot x = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$  with  $\mathbf{k}$  the wave vector of the laser field, pointing in the positive  $z$  direction and  $\omega = 0.043$  au is laser frequency.

Unless otherwise indicated we use atomic units ( $\hbar = m_e = e = 1$ ) throughout this work. The simplest framework used to analyze inelastic proton–hydrogen atom scattering is to assume incoming and outgoing protons to be in Dirac–Volkov states. Evaluation of DCSs for scattering of a hydrogen atom by a Dirac proton of spin  $1/2$ , embedded in a laser field, can proceed in a very straightforward manner. The required Volkov solution for a proton of initial dressed four-momentum  $q_i$  is given by

$$\psi_{q_i}(x_1) = \left[ 1 - \frac{\not{k}\not{A}}{2c(k \cdot p_i)} \right] \sqrt{\frac{m_p}{2Q_i V}} u(p_i, s_i) \exp \left[ -i(q_i \cdot x_1) - i \int_0^{k \cdot x_1} \frac{(A \cdot p_i)}{c(k \cdot p_i)} d\phi_1 \right] \quad (4)$$

and a similar solution can be found for a scattered proton of final four-momentum  $q_f$ . In the first-order Born approximation, the central quantity to be evaluated is direct transition matrix element  $S_{fi}$ . This quantity can be calculated using some generalized Feynman rules, in complete analogy to the free-proton case. It is only necessary in a Feynman-type integral to replace the free-proton wave functions by Volkov wave functions. It reads as

$$S_{fi} = -\frac{i}{c} \int d^4x_1 \bar{\psi}_{q_f}(\mathbf{r}_1, t) \gamma^0 \psi_{q_i}(\mathbf{r}_1, t) \langle \phi_f(\mathbf{r}_2, t) | V_d | \phi_i(\mathbf{r}_2, t) \rangle \quad (5)$$

where  $\phi_{i,f}(\mathbf{r}_2, t) = \exp[-i\mathcal{E}_b(i,f)t] \phi_{i,f}(\mathbf{r}_2)$  are semi-relativistic wave functions of the hydrogen atom,  $\mathcal{E}_b(i) = \mathcal{E}_b(1s_{1/2}) = c^2 \sqrt{1.0 - Z^2 \alpha^2}$  is the binding energy of the ground state,  $\mathcal{E}_b(f) = \mathcal{E}_b(2s_{1/2}) = c^2 \sqrt{(\sqrt{1.0 - Z^2 \alpha^2} + 1.0)/2.0}$  is the binding energy of excited state,  $\psi_{q_i}(\mathbf{r}_1, t)$  are Dirac–Volkov solutions normalized to volume  $V$ , which is explicitly given in (4), and  $V_d$  is the interaction potential.

### 2.2. DCS

Proceeding along the lines of standard calculations in QED [15], one has for the DCS

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4\pi c^2)^2 |\mathbf{q}_f|} \left[ \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 \right] \times |I(\Delta_n)|^2 \quad (6)$$

where  $\Delta_n = |\mathbf{q}_i + n\mathbf{k} - \mathbf{q}_f|$  is momentum transfer with net exchange of  $n$  photons.

#### 2.2.1. Spinorial contribution (SC)

We have to calculate

$$SC = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}(p_f, s_f) \Lambda^{(n)} u(p_i, s_i)|^2 \quad (7)$$

with

$$\Lambda^{(n)} = [\gamma^0 - 2k_0 a^2 \not{k} c(p_i) c(p_f)] B_n + [c(p_i) \gamma^0 \not{k} \not{A}_1 + c(p_f) \not{A}_1 \not{k} \gamma^0] B_{1n} + [c(p_i) \gamma^0 \not{k} \not{A}_2 + c(p_f) \not{A}_2 \not{k} \gamma^0] B_{2n} \quad (8)$$

where  $B_n$ ,  $B_{1n}$ , and  $B_{2n}$  are explicitly detailed in ref. 16. Using standard techniques of  $\gamma$  matrix algebra, one has

$$\frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \frac{(\not{p}_f c + m_p c^2)}{m_p} \Lambda^{(n)} \frac{(\not{p}_i c + m_p c^2)}{m_p} \bar{\Lambda}^{(n)} \right] \quad (9)$$

with

$$\bar{\Lambda}^{(n)} = \gamma^0 \Lambda^{(n)\dagger} \gamma^0 = [\gamma^0 - 2k_0 a^2 \not{k} c(p_i) c(p_f)] B_n^* + [c(p_i) \not{A}_1 \not{k} \gamma^0 + c(p_f) \gamma^0 \not{k} \not{A}_1] B_{1n}^* + [c(p_i) \not{A}_2 \not{k} \gamma^0 + c(p_f) \gamma^0 \not{k} \not{A}_2] B_{2n}^* \quad (10)$$

By using on-shell conditions  $p_i^2 = p_f^2 = m_p^2 c^2$ ,  $k^2 = 0$  and using REDUCE [17], spinorial contribution  $SC = (1/2) \sum_{s_i, s_f} |M_{fi}^{(n)}|^2$  is explicitly given by

$$\begin{aligned}
 SC = & \frac{1}{[4(k \cdot p)(k \cdot p)k^4]} \left[ 4(a_1 \cdot p)(a_1 \cdot p)j_{n+1}^2 c^2 \omega^2 + 8(a_1 \cdot p)(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1} c^2 \cos(2\phi_0) \omega^2 + 4(a_1 \cdot p)(a_1 \cdot p)j_{n-1}^2 c^2 \omega^2 + 4(a_1 \cdot p)(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1} c^2 \omega^2 \sin(2\phi_0) \right. \\
 & + 4(a_1 \cdot p)(a_2 \cdot p)j_{n-1}j_{n+1} c^2 \omega^2 \sin(2\phi_0) - 4(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_n(k \cdot p)(k \cdot p)c^5 \cos(\phi_0) + 4(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_n(k \cdot p)j_n^2 c^5 \cos(\phi_0) - 8(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_n(k \cdot p)j_n^2 c^3 \cos(\phi_0)E_i \omega \\
 & + 4(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_n a^2 c \cos(\phi_0) \omega^2 - 4(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)(k \cdot p)c^5 \cos(\phi_0) + 4(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 c^5 \cos(\phi_0) - 8(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 c^3 \cos(\phi_0)E_i \omega \\
 & + 4(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1} a^2 c \cos(\phi_0) \omega^2 + 4(a_1 \cdot p)(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1} c^2 \omega^2 \sin(2\phi_0) + 4(a_1 \cdot p)(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1} c^2 \omega^2 \sin(2\phi_0) + 4(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_n(k \cdot p)j_n^2 c^5 \cos(\phi_0) \\
 & - 4(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_n(k \cdot p)(k \cdot p)c^5 \cos(\phi_0) - 8(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_n(k \cdot p)j_n^2 c^3 \cos(\phi_0)E_i \omega + 4(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_n a^2 c \cos(\phi_0) \omega^2 + 4(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 c^5 \cos(\phi_0) \\
 & - 4(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)(k \cdot p)c^5 \cos(\phi_0) - 8(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 c^3 \cos(\phi_0)E_i \omega + 4(a_1 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1} a^2 c \cos(\phi_0) \omega^2 + 4(a_2 \cdot p)(a_2 \cdot p)j_{n+1}^2 c^2 \omega^2 \\
 & - 8(a_2 \cdot p)(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1} c^2 \cos(2\phi_0) \omega^2 + 4(a_2 \cdot p)(a_2 \cdot p)j_{n+1}^2 c^2 \omega^2 - 4(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)(k \cdot p)c^5 \sin(\phi_0) + 4(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 c^5 \sin(\phi_0) \\
 & - 8(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 c^3 E_i \omega \sin(\phi_0) + 4(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1} a^2 c \omega^2 \sin(\phi_0) - 4(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)(k \cdot p)c^5 \sin(\phi_0) + 4(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 c^5 \sin(\phi_0) \\
 & - 8(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 c^3 E_i \omega \sin(\phi_0) + 4(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1} a^2 c \omega^2 \sin(\phi_0) + 4(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 c^5 \sin(\phi_0) - 4(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)(k \cdot p)c^5 \sin(\phi_0) \\
 & - 8(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 c^3 E_i \omega \sin(\phi_0) + 4(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1} a^2 c \omega^2 \sin(\phi_0) + 4(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 c^5 \sin(\phi_0) - 4(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)(k \cdot p)c^5 \sin(\phi_0) \\
 & - 8(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 c^3 E_i \omega \sin(\phi_0) + 4(a_2 \cdot p)j_{n+1}j_{n-1} a^2 c \omega^2 \sin(\phi_0) + j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 - 2j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 - 2j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega + 2j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega \\
 & + j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 + 2j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega - 2j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega + 2j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 \omega^2 + 2j_{n+1}^2 a^2 c^2 \cos(\widehat{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}) \omega^2 |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| - 2j_{n+1}^2 a^2 E_i E_i \omega^2 \\
 & + 2j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 \cos(2\phi_0) - 4j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 \cos(2\phi_0) - 4j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 \cos(2\phi_0)E_i \omega + 4j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 \cos(2\phi_0)E_i \omega \\
 & + 2j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 \cos(2\phi_0) + 4j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 \cos(2\phi_0)E_i \omega - 4j_{n+1}j_{n-1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 \cos(2\phi_0)E_i \omega + 4j_{n+1}j_{n-1}m_p^2 a^2 c^4 \cos(2\phi_0) \omega^2 \\
 & + 4j_{n+1}j_{n-1} a^2 c^2 \cos(\widehat{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}) \cos(2\phi_0) \omega^2 |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| - 4j_{n+1}j_{n-1} a^2 \cos(2\phi_0)E_i E_i \omega^2 + 8j_n^2(k \cdot p)j_n^2 m_p^2 c^8 + 8j_n^2(k \cdot p)j_n^2 c^6 \cos(\widehat{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}) |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| \\
 & + 8j_n^2(k \cdot p)j_n^2 c^4 E_i E_i - 8.0j_n^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega - 8j_n^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega - 8j_n^2 m_p^2 a^2 c^4 \omega^2 + 4j_n^2 a^4 \omega^2 - 8j_n^2 a^2 c^2 \cos(\widehat{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}) \omega^2 |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| + 8j_n^2 a^2 E_i E_i \omega^2 \\
 & + 2j_{n-1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 - 4j_{n-1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 - 4j_{n-1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega + 4j_{n-1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega + 2j_{n-1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 + 4j_{n-1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega - 4j_{n-1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega \\
 & + 4j_{n-1}^2 m_p^2 a^2 c^4 \omega^2 + 4j_{n-1}^2 a^2 c^2 \cos(\widehat{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}) \omega^2 |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| - 4j_{n-1}^2 a^2 E_i E_i \omega^2 - 2j_{n-1}j_{n+1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 \cos(2\phi_0) + 4j_{n-1}j_{n+1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 \cos(2\phi_0) \\
 & + 4j_{n-1}j_{n+1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 \cos(2\phi_0)E_i \omega - 4j_{n-1}j_{n+1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 \cos(2\phi_0)E_i \omega - 2j_{n-1}j_{n+1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 \cos(2\phi_0) - 4j_{n-1}j_{n+1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 \cos(2\phi_0)E_i \omega \\
 & + 4j_{n-1}j_{n+1}(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 \cos(2\phi_0)E_i \omega - 4j_{n-1}j_{n+1}m_p^2 a^2 c^4 \cos(2\phi_0) \omega^2 - 4j_{n-1}j_{n+1} a^2 c^2 \cos(\widehat{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}) \cos(2\phi_0) \omega^2 |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| + 4j_{n-1}j_{n+1} a^2 \cos(2\phi_0)E_i E_i \omega^2 \\
 & + j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 - 2j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 - 2j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega + 2j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega + j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^4 + 2j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega - 2j_{n+1}^2(k \cdot p)j_n^2 a^2 c^2 E_i \omega \\
 & \left. + 2j_{n+1}^2 m_p^2 a^2 c^4 \omega^2 + 2j_{n+1}^2 a^2 c^2 \cos(\widehat{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}) \omega^2 |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| - 2j_{n+1}^2 a^2 E_i E_i \omega^2 \right] \quad (11)
 \end{aligned}$$

2.2.2. Integral contribution

We can easily take into account Coulomb effects in the scattering of charged particles by Coulomb potential (e.g., Mott scattering), but the introduction of this effect on the scattering process in atomic physics makes calculations rather cumbersome because of the presence of structure. Integral  $I(\Delta_n)$ , arising in (6), can be evaluated without difficulty

$$I(\Delta_n) = \int_0^{+\infty} dr_1 e^{i\Delta_n r_1} \int_0^{+\infty} dr_2 \phi_{2s}(r_2) V_d \phi_{1s}(r_2) \quad (12)$$

where  $V_d$  is the direct interaction potential

$$V_d = \frac{Z}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \quad (13)$$

where  $\mathbf{r}_1$  are proton coordinates,  $\mathbf{r}_2$  are atomic electron coordinates, and  $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . In (12),  $\phi_{1s}(r_2)$  is the Darwin ground state wave function. For spin up,  $\phi_{1s}(r_2)$  reads as

$$\phi_{1s}(r_2) = C_1 \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \frac{i}{2cr_2} z \\ \frac{i}{2cr_2} (x + iy) \end{array} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r_2} \quad (14)$$

and  $\phi_{2s}(r_2)$  is the Darwin wave function for 2s states

$$\phi_{2s}(r_2) = C_2 \left( \begin{array}{c} 2 - r_2 \\ 0 \\ \frac{i(4 - r_2)}{4r_2 c} z \\ \frac{(4 - r_2)}{4rc} (-y + ix) \end{array} \right) \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-r_2} \quad (15)$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are normalization constants very close to one. By developing the two quantities  $r_{12}^{-1}$  and  $e^{i\Delta_n r_1}$  in spherical harmonics, such as

$$\frac{1}{r_{12}} = 4\pi \sum_{lm} \frac{Y_{lm}(\hat{r}_1) Y_{lm}^*(\hat{r}_2)}{2l + 1} \frac{(r_<)^l}{(r_>)^{l+1}} \quad e^{i\Delta_n r_1} = \sum_{lm} 4\pi i^l j_l(\Delta_n r_1) Y_{lm}(\widehat{\Delta_n}) Y_{lm}^*(\hat{r}_1) \quad (16)$$

In the expression of  $r_{12}^{-1}$ ,  $r_>$  is the greater of  $r_1$  and  $r_2$ , and  $r_<$  the lesser of them. In the expression  $e^{i\Delta_n r_1}$ ,  $\hat{r}_1 = (\theta_1, \phi_1)$ , and  $\hat{r}_2 = (\theta_2, \phi_2)$  are angular coordinates of  $\mathbf{r}_1$  and  $\mathbf{r}_2$ , respectively. By also using the well-known integral [18]

$$\int_x^{+\infty} du u^m e^{-au} = \frac{m!}{\alpha^{m+1}} e^{-\alpha x} \sum_{\mu=0}^m \frac{\alpha^\mu x^\mu}{\mu!} \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (17)$$

we find the final analytical expression of the integral contribution as

$$I(\Delta_n) = -\frac{4\pi}{\sqrt{2}} (I_1 + I_2 + I_3) \quad (18)$$



$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{4}{27c^2} \int_0^{+\infty} dr_1 r_1 \exp\left(-\frac{3}{2}r_1\right) j_0(\Delta_n r_1) = \frac{4}{27c^2} \frac{1}{[(3/2)^2 + |\Delta_n|^2]} \\
 I_2 &= \frac{6}{27} \left(\frac{1}{c^2} - 4\right) \int_0^{+\infty} dr_1 r_1^2 \exp\left(-\frac{3}{2}r_1\right) j_0(\Delta_n r_1) \\
 &= \frac{2}{27} \left(\frac{1}{c^2} - 4\right) \frac{3}{[(3/2)^2 + |\Delta_n|^2]^2} \quad (19) \\
 I_3 &= -\frac{4}{9} \left(1 + \frac{1}{8c^2}\right) \int_0^{+\infty} dr_1 r_1^3 \exp\left(-\frac{3}{2}r_1\right) j_0(\Delta_n r_1) \\
 &= \frac{8}{9} \left(1 + \frac{1}{8c^2}\right) \frac{|\Delta_n|^2 - (27/4)}{[(3/2)^2 + |\Delta_n|^2]^3}
 \end{aligned}$$

### 3. Results and discussion

Proton – hydrogen atom collisions remain a benchmark for development of new atomic scattering theories. There are two basic inelastic processes that take place: excitation of the target and direct ionization. This work is devoted to relativistic excitation of a hydrogen atom by proton impact in the presence of a laser field. In particular, calculation of DCSs for the 1s–2s excitation of the hydrogen atom by proton impact at various incident proton kinetic energies by using the standard techniques of QED and Dirac–Volkov formalisms. We turn now to the kinematics of the present scattering process in a laboratory system. For a description of scattering geometry, we use angular variables in spherical coordinates  $(\theta_{(i,f)}, \phi_{(i,f)})$  for  $\mathbf{p}_{(i,f)}$  and angle  $\theta_{if}$  as  $\theta_{if} = \angle(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f)$ . It is important to compare the relativistic DCS  $d\sigma^r/d\Omega$  corresponding to the net exchange of  $n$  photons where only the protonic dressing term is taken into account, with the corresponding non-relativistic DCS. Working with the non-relativistic Volkov states, one easily gets, for the non-relativistic case,

$$\frac{d\sigma^n}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{k}_f|}{|\mathbf{k}_i|} j_n^2 \left\{ \frac{|A|}{c\omega} [(\mathbf{K}_n \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 + (\mathbf{K}_n \cdot \hat{\mathbf{y}})^2]^{1/2} \right\} |f_{B1}(\mathbf{K}_n)|^2 \quad (20)$$

where

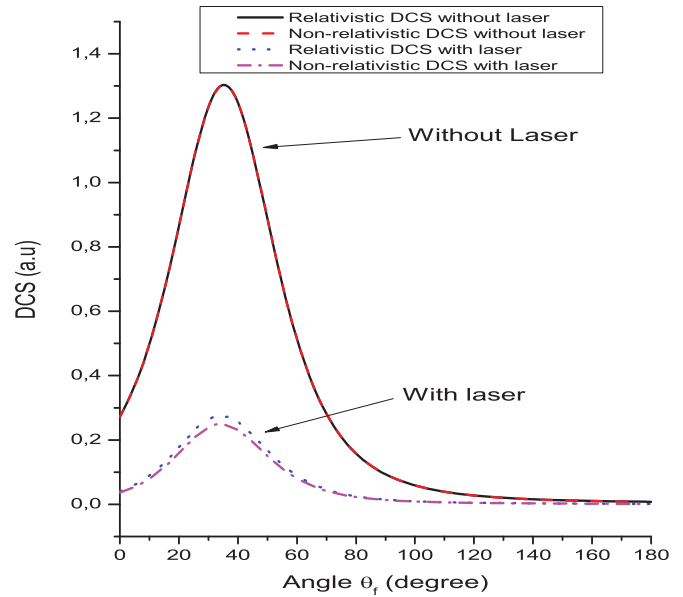
$$f_{B1}(\mathbf{K}_n) = -\frac{8\sqrt{2}}{[\mathbf{K}_n^2 + (9/4)]^3} \quad (21)$$

$\mathbf{k}_i$  and  $\mathbf{k}_f$  are the initial and final dressed momentum vectors of the proton,  $\hat{\mathbf{x}}$  and  $\hat{\mathbf{y}}$  are the unit vectors of the laser polarization plane, and  $\mathbf{K}_n$  is the non-relativistic momentum transfer in the presence of the laser field. We have computed DCSs results for different incident proton kinetic energies and different laser intensities.

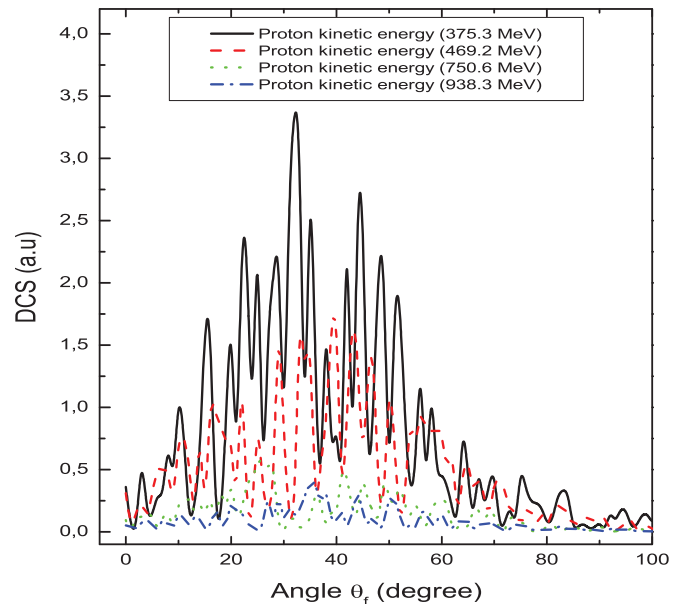
Figure 1 depicts the comparison between relativistic and non-relativistic DCSs in the non-relativistic limit for two cases: in the presence and absence of the laser field. As is seen from this figure, the two DCSs overlap for the case of no field, but a little difference occurs by introducing the laser field. Figure 2 shows results of relativistic DCSs for excitation of hydrogen atoms by proton impact versus final angle  $\theta_f$  of proton for various kinetic energies  $E_k = 375.3, 469.2, 750.6,$  and  $938.3$  MeV in the presence of a laser field with a fixed electric field strength  $\mathcal{E} = 1$  au but without exchanging photons. Apart from differences in magnitudes, the three curves exhibit oscillatory behavior.

Figure 3 gives results of relativistic DCSs versus final angle  $\theta_f$  for a fixed proton kinetic energy (497.3 MeV) and for various electric field strengths without exchanging photons. DCSs are presented in an electric field strength domain, from 1 to 2.5 au, and exhibit strong oscillatory behavior. Figures 2 and 3 clearly show oscillations

**Fig. 1.** Relativistic and non-relativistic DCSs (scaled in  $10^{-20}$ ) with and without laser field for proton impact from hydrogen atoms versus  $\theta_f$  for a fixed proton kinetic energy (4.973 MeV). Geometric parameters are  $\theta_i = \phi_i = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ . The laser parameters are electric field strength  $\mathcal{E} = 0.05$  au and the number of photons exchanged  $n = \pm 60$ . [Colour online.]

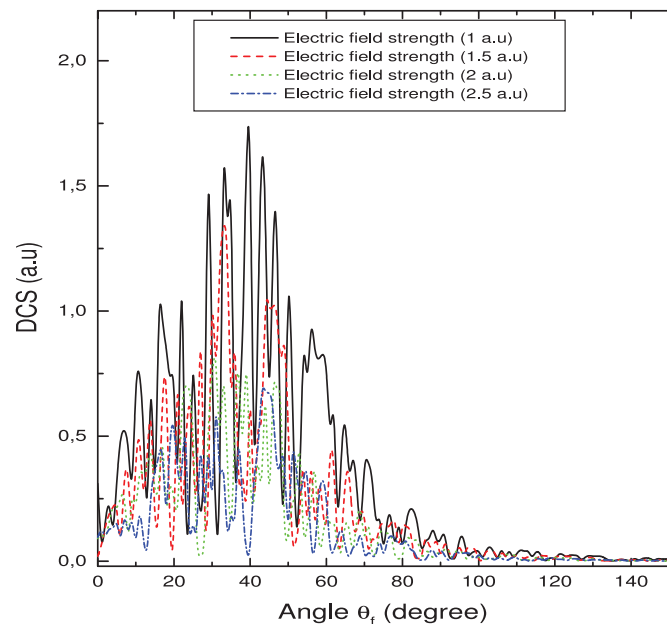


**Fig. 2.** Relativistic DCS (scaled in  $10^{-29}$ ) for proton impact from hydrogen atoms versus  $\theta_f$  for a fixed electrical field strength ( $\mathcal{E} = 1$  au) and various energies (375.3, 469.2, 750.6, and 938.3 MeV). Geometric parameters are  $\theta_i = \phi_i = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ . Process is in the presence of a laser field but without exchanging photons. [Colour online.]

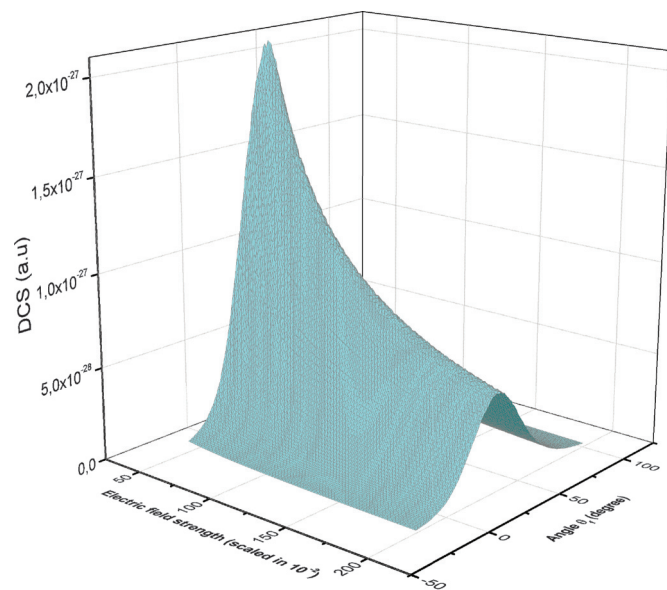


inherent to the presence of ordinary Bessel functions. Such behavior was also found for the non-relativistic regime. This oscillatory behavior holds so long as the number of photons exchanged continues to be zero. These oscillations disappear when DCSs are summed over a very large number of photons exchanged

**Fig. 3.** Relativistic DCS (scaled in  $10^{-29}$ ) for proton impact from hydrogen atoms versus  $\theta_f$  for a fixed proton kinetic energy of (497.3 MeV) and various electrical field strengths (1, 1.5, 2, and 2.5 au). Geometric parameters are  $\theta_i = \phi_i = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ . Process is in the presence of a laser field but without exchanging photons. [Colour online.]

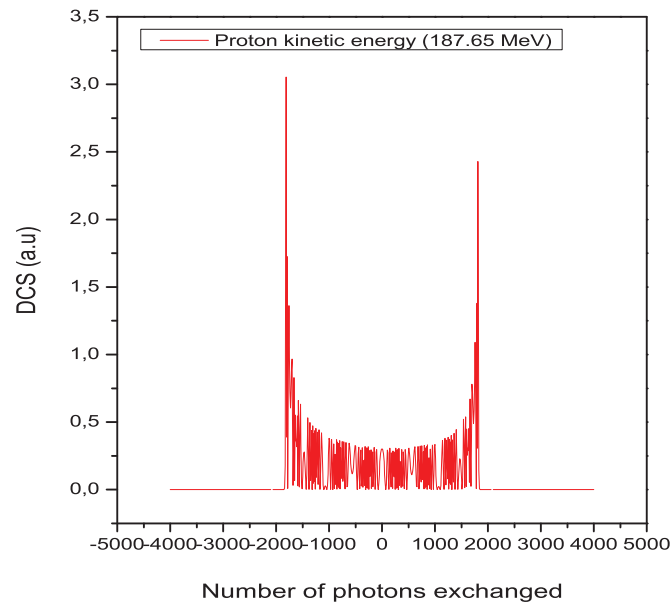


**Fig. 4.** Relativistic DCS for proton impact from hydrogen atoms, for a fixed proton kinetic energy (469.13 MeV), versus  $\theta_f$  ( $-20^\circ \leq \theta_f \leq 100^\circ$ ) and electrical field strength  $\mathcal{E}$  ( $0.5 \text{ au} \leq \mathcal{E} \leq 2 \text{ au}$ ) for a number of photons exchanged  $n = \pm 50$ . Geometric parameters are  $\theta_i = \phi_i = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ . [Colour online.]

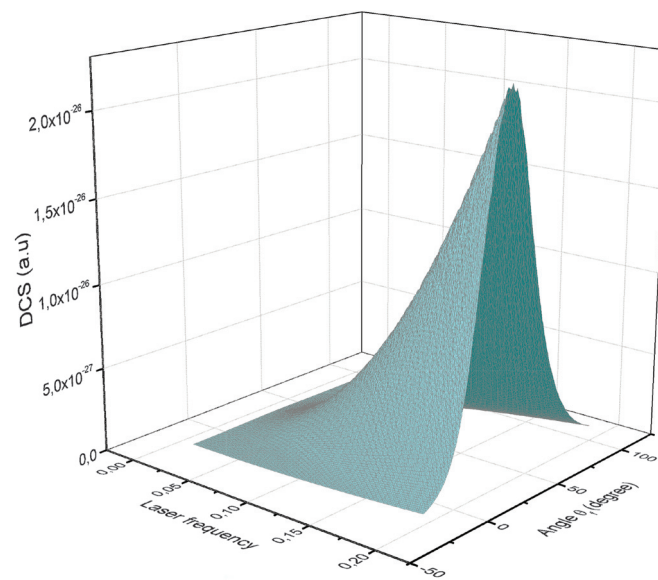


$d\bar{\sigma}/d\Omega_f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (d\sigma^n/d\Omega_f)$ . For more qualitative details, a three-dimensional plot of DCS versus final angle  $\theta_f$  and electric field strength  $\mathcal{E}$  is presented in Fig. 4. Regarding the general shape of the three-dimensional DCS, the qualitative oscillatory behavior observed in both Figs. 2 and 3 completely disappears after the summation over

**Fig. 5.** Envelope of relativistic DCS scaled in units of  $(10^{-26})$  as a function of number of photons exchanged. Proton kinetic energy is 187.65 MeV, electric field strength is  $\mathcal{E} = 0.05 \text{ au}$ , and geometric parameters are  $\theta_i = \phi_i = \theta_f = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ . [Colour online.]



**Fig. 6.** Relativistic DCS for proton impact from hydrogen atoms, for a fixed proton kinetic energy (469.13 MeV), versus  $\theta_f$  ( $-20^\circ \leq \theta_f \leq 100^\circ$ ), electrical field strength ( $\mathcal{E} = 1.0 \text{ au}$ ), and the frequency varies as  $0.01 \text{ au} \leq \omega \leq 0.2 \text{ au}$  for a number of photons exchanged  $n = \pm 50$ . Geometric parameters are  $\theta_i = \phi_i = 45^\circ$  and  $\phi_f = 90^\circ$ .



the number of photons exchanged,  $n = \pm 50$ . However, the most significant picture is that calculated DCSs decrease with electrical field strength and fall abruptly to zero for small and large angles.

Figure 5 represents the envelope of unpolarized relativistic DCS as a function of photon energy transfer. Relativistic DCS falls abruptly beyond points where arguments of Bessel functions are approximately close to their orders. This cutoff occurs numerically for  $n = \pm 1820$  and an argument  $z$  of ordinary Bessel functions almost

constant and equal to 1819.94. This figure shows also that the well-known Kroll–Watson [19] sum rule will be reached at approximately  $n = \pm 1820$ . The sum rule for free–free transition states is

$$\sum_n \frac{d\sigma^n}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (22)$$

where summation runs over all positive and negative  $n$  and the right-hand side is field-free DCS. It is generally observed that when Dirac particles are scattered from a hydrogen atom in the presence of a laser field, a new effect is observed, which is not accessible in the absence of a laser field. These collisions have the basic peculiarity of being processes in which three subsystems are present: proton, hydrogen atom target, and radiation field. The last one provides intensity, frequency, and degree of polarization. In this work, we have studied scattering of a proton from a hydrogen atom target in the presence of a laser field. DCS of the proton impact depends, in addition to energy and geometric parameters, upon laser intensity and frequency.

From Fig. 6, it is found that DCS increases with increasing laser frequency,  $\omega$ . It is also shown that DCS is zero below frequency equal to 0.05 au. This is a consequence of proton total energy being essentially the sum of proton kinetic energy, proton energy at rest, and the averaged ponderomotive energy gained by the proton in the presence of a laser field. This last quantity is  $U_p = \xi_0^2/(4m_p\omega^2)$  and it is just the cycle-averaged kinetic energy of a free proton wiggling in an oscillating electromagnetic field. This work is somewhat limited by the fact that there are no parallel experiments or theoretical studies for comparison.

#### 4. Conclusion

In this work, the effects of relativity, spin, and laser interaction are investigated for relativistic laser-assisted inelastic proton – hydrogen atom collisions. We concluded that for high proton kinetic energies, Dirac–Volkov states should provide quite reasonable estimates for DCSs. The present theoretical results represent more detailed analytical expression for laser-assisted proton –

hydrogen atom DCSs in complete relativistic description. A sum rule, stating that the DCS summed over all numbers of photons exchanged gives the field-free DCS, is found to be largely satisfied at approximately  $n = \pm 1820$ . These results represent an exciting challenge to test experiments at high energies. It is hoped that the reported results may serve as a stimulus for new observations in this new class of atomic collisions.

#### References

1. B. Manaut, S. Taj, and M. El Idrissi. *Can. J. Phys.* **91**, 696 (2013). doi:10.1139/cjp-2013-0143.
2. M. El Idrissi, S. Taj, B. Manaut, and L. Oufni. *Ind. J. Phys.* **88**, 111 (2014). doi:10.1007/s12648-013-0392-3.
3. S.-M. Li, J. Berakdar, J. Chen, and Z.-F. Zhou. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **37**, 653 (2004). doi:10.1088/0953-4075/37/3/010.
4. J.M.N. Djiokep, H.M.T. Nganso, and M.G.K. Njock. *Phys. Scr.* **75**, 726 (2007). doi:10.1088/0031-8949/75/5/022.
5. C. Szymanowski, V. Véniard, R. Taïeb, A. Maquet, and C.H. Keitel. *Phys. Rev. A*, **56**, 3846 (1997). doi:10.1103/PhysRevA.56.3846.
6. S.-M. Li, J. Berakdar, J. Chen, and Z.-F. Zhou. *Phys. Rev. A*, **67**, 063409 (2003). doi:10.1103/PhysRevA.67.063409.
7. B.H. Bransden and C.J. Noble. *Phys. Lett. A*, **70**, 404 (1979). doi:10.1016/0375-9601(79)90346-3.
8. M.E. Rudd, C.A. Sautter, and C.L. Bailey. *Phys. Rev.* **151**, 20 (1966). doi:10.1103/PhysRev.151.20.
9. S. Geltman and M.B. Hidalgo. *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **4**, 1299 (1971). doi:10.1088/0022-3700/4/10/015.
10. B.R. Junker. *Phys. Rev. A*, **11**, 1552 (1975). doi:10.1103/PhysRevA.11.1552.
11. C.R. Mandal, S. Datta, and S.C. Mukherjee. *Phys. Rev. A*, **24**, 3044 (1981). doi:10.1103/PhysRevA.24.3044.
12. S.A. Elkilany. *J. Theor. Chem.* **2014**, 820672 (2014). doi:10.1155/2014/820672.
13. A.S. Ghosh and N.C. Sil. *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **4**, 836 (1971). doi:10.1088/0022-3700/4/6/013.
14. V. Franco and B.K. Thomas. *Phys. Rev. A*, **4**, 945 (1971). doi:10.1103/PhysRevA.4.945.
15. J. D. Bjorken and S.D. Drell. *Relativistic quantum mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1964; C. Itzykson and J.-B. Zuber. *Quantum field theory*. McGraw-Hill, New York, 1985.
16. Y. Attaourti and B. Manaut. *Phys. Rev. A*, **68**, 067401 (2003). doi:10.1103/PhysRevA.68.067401.
17. A.G. Grozin. *Using REDUCE in high energy physics*. Cambridge University, Cambridge, UK, 1997.
18. I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Tables of integrals, sutures, sets and their products*. Nauka, Moscow, 1971.
19. N.M. Kroll and K.M. Watson. *Phys. Rev. A*, **8**, 804 (1973). doi:10.1103/PhysRevA.8.804.

## ARTICLE 3

Relativistic elastic scattering of hydrogen atoms  
by positron impact with anomalous magnetic  
moment effects

# Relativistic elastic scattering of hydrogen atoms by positron impact with anomalous magnetic moment effects

E Hrou , M El Idrissi , S Taj and B Manaut\*

Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Sciences et Techniques, Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane, Boite Postale 523, 23000 Béni Mellal, Morocco

Received: 30 October 2014 / Accepted: 16 December 2014 / Published online: 22 January 2015

**Abstract:** Elastic scattering of hydrogen atoms by positron impact is studied at various values of incident positron energy and laser intensities. A discussion of differential cross-sections for positron scattering by hydrogen atoms in presence of laser field is presented along with anomalous magnetic moment of both electrons and positrons fully included. Differential cross sections for electrons and positrons remain almost equal in absence of anomalous magnetic moment effects. A comparison is also made with introduction of anomalous magnetic moment effects of both electrons and positrons. At intensities equal to 0.05 a.u. and above significant discrepancies in differential cross section is found even in first Born approximation.

**Keywords:** Laser assisted; QED calculations; AMM effects; Relativistic scattering theory

**PACS Nos.:** 34.80.Dp

## 1. Introduction

Scattering of electrons and positrons by hydrogen atoms is a most fundamental process in relativistic atomic collisions. Since hydrogen is only atom for which, non relativistic and relativistic wave functions are known exactly, relativistic  $e^\pm$ - $H$  collision processes including relativistic effects provide an attractive testing ground for scattering theories in quantum electrodynamics (QED). Most precise and specific tests of QED consist of measurements of electromagnetic fine structure constant  $\alpha$ , which is proportional to anomalous magnetic moment. At the zeroth order of perturbation, QED predicts that  $g$  is equal to 2 for an electron and a positron. Interaction of an electron (or a positron) with vacuum, as described by QED, yields a value of  $g$  for an electron (or a positron) that is slightly greater than 2 by roughly one part-per-thousand. This deviation from 2 is called anomalous magnetic moment,  $a_{e^\pm}$ , defined by  $g/2 = 1 + a_{e^\pm}$ . A measurement of electron  $g$ -value provides a precise test of Dirac theory and QED. For almost 20 years, best measured value of anomalous magnetic moment for free electron is [1, 2]

$$a_{e^-} = 0.00115965218073(28).$$

For free positron and according to the most accurate demonstration of charged particle-antiparticle symmetry  $g_{e^-}/g_{e^+} = 1 + (0.5 \pm 2.1) \times 10^{-12}$ , is

$$a_{e^+} = 0.00115965218068(28).$$

Interaction of antimatter with matter is an interesting and active field of research [3–6]. One of simplest of these types of interactions is between positron-atom [7–12] and positron-molecule [13, 14]. Such interactions are important in atomic and molecular physics. A seminal book “Positron physics” by Charlton and Humberston [15] has given the main advances in the field of positron physics. It addresses a comprehensive account of the field of low energy positron and positronium within atomic and molecular physics. Availability of intense mono-energetic positron beams and recent improvements in measurement techniques now routinely provide new evidence on such topics as  $Ps$  formation or positron annihilation and scattering.

At first, this paper sets basics of theory needed for such a comparison between Differential Cross Sections (DCSs) of positron and electron, enouncing frame in which, relativistic positron theory has been built in. Then, we have discussed Dirac equation for positron, in absence and presence of Anomalous Magnetic Moment (AMM) effects. This is

\*Corresponding author, E-mail: b.manaut@usms.ma



followed by a brief relativistic theory to describe hydrogen atom. Role of spin and relativity as an internal degree of freedom has been discussed. We have developed a theoretical formalism and discussed results we have obtained, followed by conclusions. Units with  $\hbar = m = e = 1$  and space-time metric  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  are employed throughout this work. In many equations of this paper, Feynman ‘slash notation’ is used. For any 4-vector  $A$ ,  $\not{A} = A^\mu \gamma_\mu = A^0 \gamma_0 - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ , where matrices  $\gamma$  are well known Dirac matrices.

## 2. Outline of the theory

The goal of this contribution is to generalize the process of laser assisted positron–hydrogen atom scattering by taking into account anomalous magnetic moment effects of positron. Anomalous magnetic moment of positron, which arises from the fact that it can emit or absorb virtual photons, can be taken care of in a phenomenological manner by adding so-called Pauli anomalous moment interaction term  $ia_{e^+} \left( \not{p} - \frac{\not{A}}{c} + c \right) F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$  to usual Dirac equation in presence of an external electromagnetic field.

$$\left[ \left( \not{p} - \frac{\not{A}}{c} \right)^2 - c^2 - \frac{i}{2c} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + ia_{e^+} \left( \not{p} - \frac{\not{A}}{c} + c \right) F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \times \psi(x) = 0, \quad (1)$$

To that end one replaces Dirac–Volkov function, which originates from Dirac equation without AMM effects with more general solution of Dirac equation with AMM effects. We may also observe that positron Dirac wave function is obtained from that of electron by replacing  $[\psi^{electron}(-p_f, -s_f) \rightarrow v(p_f, s_f)]$ , which is a general feature of positron theory called “substitution rule”. Thus, this is not real particle and correctly normalized wave function for positron is given by

$$\Psi(x) = [1 - (\alpha \not{k} \not{A} + \beta \not{k} + \delta \not{p} \not{k} \not{A})] \frac{v(p, s)}{\sqrt{2VQ_0}} \exp \left[ -i(q^\mu x_\mu) - i \int_0^{kx} \frac{(A^\mu p_\mu)}{c(k^\mu p_\mu)} d\phi \right], \quad (2)$$

with

$$\alpha = \frac{1}{(k^\mu p_\mu)} \left( ca_{e^+} - \frac{1}{2c} \right); \quad \beta = \frac{a_{e^+} A^2}{c(k^\mu p_\mu)}; \quad \delta = \frac{a_{e^+}}{(k^\mu p_\mu)}. \quad (3)$$

Dirac bispinor  $v(p, s)$  is normalized according to  $\bar{v}(p, s) v(p, s) = v(p, s) \gamma^0 v(p, s) = -2c^2$ . In case of a circularly polarized electromagnetic potential such that  $A^\mu = a_1^\mu \cos(\varphi) + a_2^\mu \sin(\varphi)$  with  $k_\mu A^\mu = 0$  (Lorentz condition) and  $A^2 = a_1^2 = a_2^2 = a^2$ ,  $a_1^\mu a_{2\mu} = 0$ , and  $k_\mu a_1^\mu = k_\mu a_2^\mu = 0$ .

Four-vector  $q^\mu = p^\mu - a^2 k^\mu / [2(k^\mu p_\mu) c^2]$  is four-momentum of positron inside laser field with wave four-vector  $k^\mu$ . In atomic unites, energy eigenvalues are given by

$$E_n = c^2 \left[ 1 + \left( \frac{Z\alpha}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - Z^2 \alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (4)$$

where quantum number  $n = 1, 2, \dots, \infty$  is a positive integer and angular-momentum eigenvalues range from 0 to  $j + 1/2 \leq n$ , with restriction  $0 \leq l \leq n - 1$ . Expanding Eq. (4) in powers of  $(Z\alpha)^2$  we see that  $n$  corresponds to the principal quantum number of nonrelativistic theory

$$E_n = c^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \left[ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left( \frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right] + O((Z\alpha)^6) \right\} \quad (5)$$

With  $n = 1$  and  $j = 1/2$  ground state energy reduces to

$$E_1 = c^2 \sqrt{1 - Z^2 \alpha^2} \quad (6)$$

The corresponding spin-up and spin-down normalized eigenfunctions found in [16, 17] reads in atomic units as

$$\Phi_{n=1, j=1/2, \uparrow}(\mathbf{r}, \theta', \phi') = \frac{(2Z)^{\gamma_H+1/2}}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{1 + \gamma_H}{2\Gamma(1 + 2\gamma_H)}} \times e^{-Zr} r^{\gamma_H-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{i(1-\gamma_H)}{Z\alpha} \cos(\theta') \\ \frac{i(1-\gamma_H)}{Z\alpha} \sin(\theta') e^{i\phi'} \end{pmatrix} \quad (7)$$

and

$$\Phi_{n=1, j=1/2, \downarrow}(\mathbf{r}, \theta', \phi') = \frac{(2Z)^{\gamma_H+1/2}}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{1 + \gamma_H}{2\Gamma(1 + 2\gamma_H)}} \times e^{-Zr} r^{\gamma_H-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{i(1-\gamma_H)}{Z\alpha} \sin(\theta') e^{i\phi'} \\ -\frac{i(1-\gamma_H)}{Z\alpha} \cos(\theta') \end{pmatrix} \quad (8)$$

with  $\gamma_H = \sqrt{1 - Z^2 \alpha^2}$ . In the nonrelativistic limit  $\gamma_H \rightarrow 1$  and  $(1 - \gamma_H)/Z\alpha \rightarrow 0$  and they are reduced to the Schrodinger wave functions multiplied by two-component Pauli spinors.

We now turn to the evaluation of transition matrix elements for elastic scattering  $e^+ - H$  process, using general wave functions for positron, as shown in Eq. (2) and hydrogen atom in its ground state for spin up, as shown in Eq. (7).

$$S_{fi} = \frac{i}{c} \int d^4x_1 \bar{\psi}_f(\mathbf{r}_1, t) \gamma^0 \psi_i(\mathbf{r}_1, t) \langle \Phi_f(\mathbf{r}_2) | V_d | \Phi_i(\mathbf{r}_2) \rangle \quad (9)$$

In Eq. (9),  $V_d$  is direct interaction potential

$$V_d = -\frac{1}{r_{12}} + \frac{Z}{r_1} \quad (10)$$

where  $\mathbf{r}_1$  is positron coordinate and  $\mathbf{r}_2$  is atomic electron coordinate and  $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Using notations and conventions of Bjorken and Drell [16, 17] and proceeding along the lines of standard calculations in QED, one has for the unpolarized DCS

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f} \quad (11)$$

The sum over  $n$  in Eq. (11) stems from the well-known relation of ordinary Bessel functions  $\exp[-iz \sin(\varphi)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) \exp(-in\varphi)$  and this physically corresponds to the number of photons exchanged. The derived expression for laser assisted differential cross section for  $e^\pm - H$  scattering is rather cumbersome, which is due to the fact that scattering process involves both laser and anomalous magnetic moment effects.

Differential cross section for scattering of hydrogen atom by positron impact, evaluated for  $Q_f = Q_i + n\omega$ , is given by

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f} &= \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|(4\pi c^2)^2} \frac{1}{2} \sum_{si, sf} |\bar{v}(p_f, s_f) \Gamma_n v(p_i, s_i)|^2 |H_{el}(\Delta_n)|^2 \\ &= \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|(4\pi c^2)^2} \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_f c - c^2) \Gamma_n (\not{p}_i c - c^2) \bar{\Gamma}_n \right\} |H_{el}(\Delta_n)|^2 \end{aligned} \quad (12)$$

and differential cross section for scattering of hydrogen atom by electron impact, evaluated for  $Q_f = Q_i + n\omega + E_{1s1/2} - E_{2s1/2}$ , is given by

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega_f} &= \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|(4\pi c^2)^2} \frac{1}{2} \sum_{si, sf} |\bar{u}(p_f, s_f) \Gamma_n u(p_i, s_i)|^2 |H_{el}(\Delta_n)|^2 \\ &= \frac{|\mathbf{q}_f|}{|\mathbf{q}_i|(4\pi c^2)^2} \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_f c + c^2) \Gamma_n (\not{p}_i c + c^2) \bar{\Gamma}_n \right\} |H_{el}(\Delta_n)|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Operator  $\bar{\Gamma}_n$  is such that  $\bar{\Gamma}_n = \gamma_0 \Gamma_n^\dagger \gamma_0$  and  $\Gamma_n$  is explicitly given by

$$\Gamma_n = C_0 B_{0n} + C_1 B_{1n} + C_2 B_{2n} + C_3 B_{3n} + C_4 B_{4n} \quad (14)$$

with  $C_0, C_1, C_2, C_3$  and  $C_4$  are explicitly detailed in our previous works [18, 19] and  $B_{0n}, B_{1n}, B_{2n}, B_{3n}$  and  $B_{4n}$  are given by

$$\begin{pmatrix} B_{0n} \\ B_{1n} \\ B_{2n} \\ B_{3n} \\ B_{4n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_n(z) e^{in\phi_0} \\ (J_{n+1}(z) e^{i(n+1)\phi_0} + J_{n-1}(z) e^{i(n-1)\phi_0}) / 2 \\ (J_{n+1}(z) e^{i(n+1)\phi_0} - J_{n-1}(z) e^{i(n-1)\phi_0}) / 2i \\ (J_{n+2}(z) e^{i(n+2)\phi_0} + J_{n-2}(z) e^{i(n-2)\phi_0}) / 2 \\ (J_{n+2}(z) e^{i(n+2)\phi_0} - J_{n-2}(z) e^{i(n-2)\phi_0}) / 2i \end{pmatrix} \quad (15)$$

In Eqs. (12) and (13),  $|H_{el}(\Delta_n)|$  is Fourier transform of average (static) potential explicitly detailed in our previous work [20].

Before presenting our analytical results, we would like to emphasize that REDUCE code, we have written, gave very long analytical expressions. Thus, we prefer to give below, for example, just the coefficient multiplying Bessel functions ( $J_{n+1}^2(z) + J_{n-1}^2(z)$ ) which appears in trace calculations

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \{ &-16(a_2 p_f)^2 (k p_i)^2 a_{e^+}^2 c^6 + 32(a_2 p_f)^2 (k p_i) a_{e^+}^2 c^4 E_i \omega \\ &+ 32(a_2 p_f)^2 a_{e^+}^3 |a|^2 c^4 \omega^2 \\ &- 16(a_2 p_f)^2 a_{e^+}^2 |a|^2 c^2 \omega^2 - 8(a_2 p_f)^2 a_{e^+} c^4 \omega^2 \\ &+ 32(a_2 p_f)(a_2 p_i)(k p_f)(k p_i) a_{e^+}^2 c^6 \\ &- 32(a_2 p_f)(a_2 p_i)(k p_f) a_{e^+}^2 c^4 E_i \omega \\ &- 32(a_2 p_f)(a_2 p_i)(k p_i) a_{e^+}^2 c^4 E_f \omega + 64(a_2 p_f) \\ &\times (a_2 p_i) a_{e^+}^4 |a|^4 c^2 \omega^2 + 64(a_2 p_f)(a_2 p_i) a_{e^+}^3 |a|^2 c^4 \omega^2 \\ &+ 32(a_2 p_f)(a_2 p_i) a_{e^+}^2 c^6 \omega^2 - 32 \\ &\times (a_2 p_f)(a_2 p_i) a_{e^+}^2 c^4 \cos(\widehat{p_i p_f}) \omega^2 |p_f| |p_i| \\ &+ 32(a_2 p_f)(a_2 p_i) a_{e^+}^2 c^2 E_f E_i \omega^2 - 16 \\ &\times (a_2 p_f)(a_2 p_i) a_{e^+} c^4 \omega^2 + 4(a_2 p_f)(a_2 p_i) c^2 \omega^2 \\ &- 16(a_2 p_i)^2 (k p_f)^2 a_{e^+}^2 c^6 + 32 \\ &\times (a_2 p_i)^2 (k p_f) a_{e^+}^2 c^4 E_f \omega + 32(a_2 p_i)^2 a_{e^+}^3 |a|^2 c^4 \omega^2 \\ &- 16(a_2 p_i)^2 a_{e^+}^2 |a|^2 c^2 \omega^2 - 8 \\ &\times (a_2 p_i)^2 a_{e^+} c^4 \omega^2 + 16(k p_f)^2 a_{e^+}^4 |a|^5 c^4 \\ &+ 8(k p_f)^2 a_{e^+}^2 |a|^4 c^4 + (k p_f)^2 |a|^2 c^4 - 32 \\ &\times (k p_f)(k p_i) a_{e^+}^4 |a|^5 c^4 - 16(k p_f)(k p_i) a_{e^+}^2 |a|^4 c^4 \\ &- 2(k p_f)(k p_i) |a|^2 c^4 - 32(k p_f) \\ &\times a_{e^+}^4 |a|^5 c^2 E_f \omega + 32(k p_f) a_{e^+}^4 |a|^5 c^2 E_i \omega \\ &- 16(k p_f) a_{e^+}^2 |a|^4 c^2 E_f \omega + 16(k p_f) a_{e^+}^2 |a|^4 \\ &\times c^2 E_i \omega - 2(k p_f) |a|^2 c^2 E_f \omega + 2(k p_f) |a|^2 c^2 E_i \omega \\ &+ 16(k p_i)^2 a_{e^+}^4 |a|^5 c^4 + 8(k p_i)^2 a_{e^+}^2 \\ &\times |a|^4 c^4 + (k p_i)^2 |a|^2 c^4 + 32(k p_i) a_{e^+}^4 |a|^5 c^2 E_f \omega \\ &- 32(k p_i) a_{e^+}^4 |a|^5 c^2 E_i \omega + 16(k p_i) \times a_{e^+}^2 |a|^4 c^2 E_f \omega \\ &- 16(k p_i) a_{e^+}^2 |a|^4 c^2 E_i \omega + 2(k p_i) |a|^2 c^2 E_f \omega \\ &- 2(k p_i) |a|^2 c^2 E_i \omega + 32 \times a_{e^+}^4 |a|^5 c^4 \omega^2 \\ &+ 32 a_{e^+}^4 |a|^5 c^2 \cos(\widehat{p_i p_f}) \omega^2 |p_f| |p_i| - 32 a_{e^+}^4 |a|^5 E_f E_i \omega^2 \\ &+ 16 a_{e^+}^2 |a|^4 c^4 \omega^2 + 16 a_{e^+}^2 |a|^4 c \cos(\widehat{p_i p_f}) \omega^2 |p_f| |p_i| \\ &- 16 a_{e^+}^2 |a|^4 E_f E_i^2 \omega^2 + 2 |a|^2 c^4 \omega^2 + 2 |a|^2 c^2 \cos(\widehat{p_i p_f}) \\ &\times \omega^2 |p_f| |p_i| - 2 |a|^2 E_f E_i \omega^2 \} \times \frac{1}{(4(k p_f)(k p_i) c^4)} \end{aligned}$$

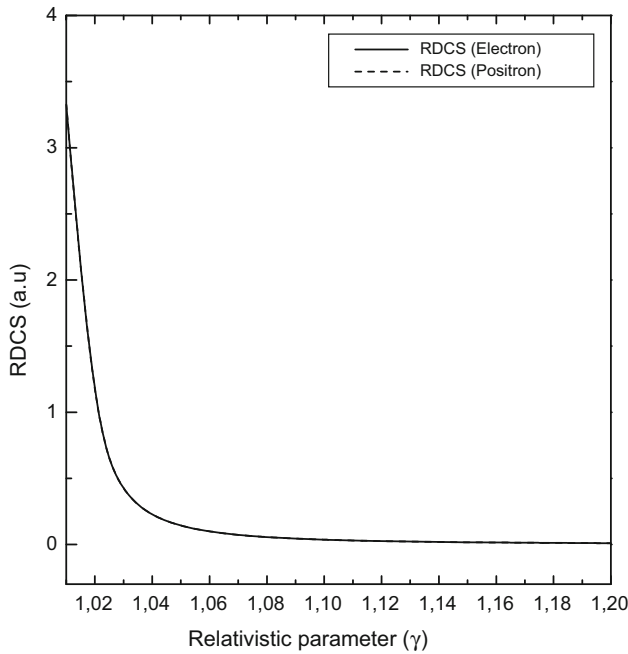
In absence of anomalous magnetic moment effects  $a_{e^+} = 0$ , coefficient  $\mathcal{B}$  reduces to

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \left\{ 4(a_2.p_f)(a_2.p_i)c^2\omega^2 + (k.p_f)^2|a|^2c^4 \right. \\ & - 2(k.p_f)(k.p_i)|a|^2c^4 - 2(k.p_f)|a|^2c^2E_f\omega \\ & + 2(k.p_f)|a|^2c^2E_i\omega + (k.p_i)^2|a|^2c^4 \\ & + 2(k.p_i)|a|^2c^2E_f\omega - 2(k.p_i)|a|^2c^2E_i\omega \\ & + 2|a|^2c^4\omega^2 + 2|a|^2c^2\cos(\widehat{p_i, p_f})\omega^2|p_i||p_f| \\ & \left. - 2|a|^2E_fE_i\omega^2 \right\} \times \frac{1}{(4(k.p_f)(k.p_i)c^4)} \end{aligned}$$

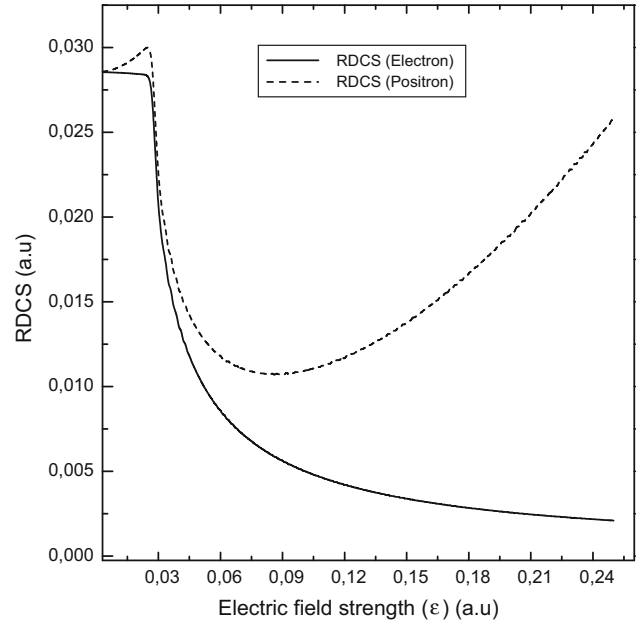
Once again, when no radiation field is present, coefficient  $\mathcal{B}$  vanishes, since laser potential  $|a| = 0$  a.u. and laser frequency  $\omega = 0$  a.u.

### 3. Results and discussion

In our recent work [20], laser-assisted processes has been discussed. In particular, we have investigated positron–atom collisions in a laser field and below threshold ionization ( $\varepsilon_{\text{Threshold}} = 0.25$  a.u.: Threshold field strength at which, laser field could ionize the hydrogen atom). We therefore concentrate our discussion on comparison of two processes  $e^\pm$ –hydrogen atom scattering in presence of laser field and with anomalous magnetic moment effects of both positron and electron. Considering  $e^\pm$ –atom interaction in presence of laser field with anomalous magnetic moment effects, this field brings into game several new parameters, variation of which permits to get a deeper insight into the



**Fig. 1** DCSS of  $e^\pm$ – $H$  scaled in ( $10^{-4}$ ) as a function of the relativistic parameter  $\gamma$  in the absence of laser field. The final angle is  $\theta_f = 45^\circ$



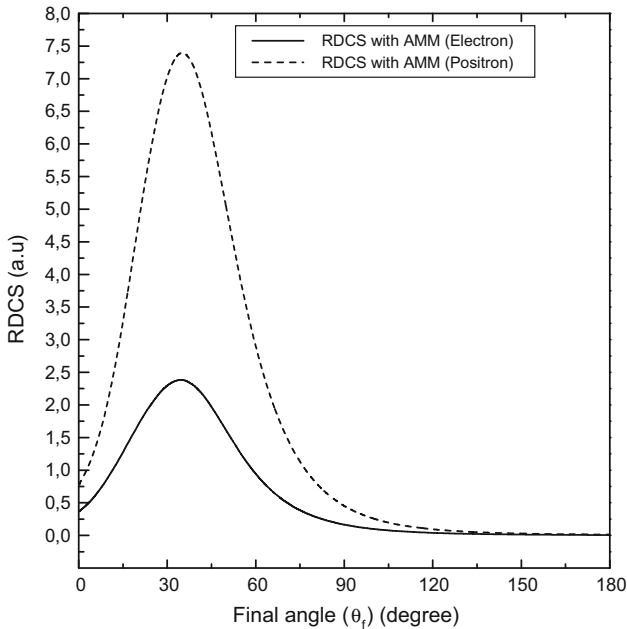
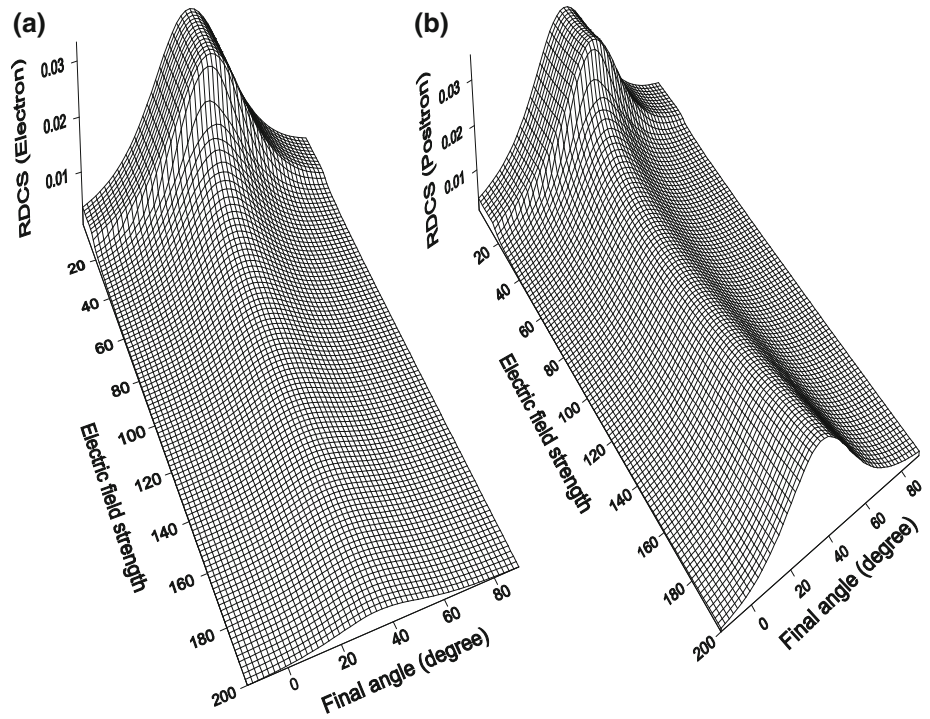
**Fig. 2** RDCSs of  $e^\pm$ – $H$  as a function of the electric field strength  $\varepsilon$  for relativistic parameter  $\gamma = 1.001$  (kinetic energy  $\simeq 511$  eV) and geometric parameters  $\theta_i = \phi_i = 45^\circ$ ,  $\phi_f = 90^\circ$  and  $\theta_f = 45^\circ$ . The corresponding number of photons exchanged is  $\pm 50$

fundamental process. For description of scattering geometry, we work in a coordinate system in which  $\mathbf{k} \parallel \hat{e}_z$ . This means that direction of laser propagation is along  $Oz$  axis. In our system, angular coordinates of incoming positron are such that  $\theta_i = 45^\circ$  and  $\phi_i = 90^\circ$ . For scattered positron, angular coordinates are such that  $\phi_f = 90^\circ$  and  $0^\circ \leq \theta_f \leq 180^\circ$ . Our results for laser assisted elastic scattering of electrons and positrons from hydrogen atom with anomalous magnetic moment effects are presented in Figs. 1–4.

Figure 1 depicts variation of relativistic differential cross sections as a function of relativistic parameter  $\gamma$  for elastic scattering of both electron and positron from hydrogen atom. It is observed that differential cross sections decreases rapidly by increasing energy and remains almost constant at relativistic parameter  $\gamma$  beyond value  $\gamma = 1.08$  (kinetic energy  $\simeq 40880$  eV). In addition, to check the consistency of our computations, we have given in this figure, differential cross sections for  $e^\pm$ – $H$  in the absence of the laser field. It is clear from comparison that there is a very good agreement between two theoretical approximations, particularly in absence of AMM effects and in first Born approximation. In our previous work [20], it is shown that there is no difference at all between differential cross sections for both electron and positron in first Born approximation. We have plotted in Fig. 2, two relativistic differential cross section versus electrical field strength. By adding anomalous magnetic moment effect, it appears that difference between two approaches (RDCS for



**Fig. 3** RDCSs of  $e^+ - H$  and RDCSs of  $e^- - H$  as a function of electric field strength  $\varepsilon$  (scaled in  $10^{-3}$ ) and a final angle  $\theta_f$  for relativistic parameter  $\gamma = 1.001$  (kinetic energy  $\simeq 511$  eV) and geometric parameters  $\theta_i = \varphi_i = 45^\circ$  and  $\varphi_f = 90^\circ$ . The corresponding number of photons exchanged is  $\pm 50$ : (a) for electron–hydrogen atoms with AMM effects, (b) for positron–hydrogen atoms with AMM effects



**Fig. 4** RDCSs of  $e^+ - H$  and  $e^- - H$  (scaled in  $10^{-9}$ ) as a function of final angle  $\theta_f$  for relativistic parameter  $\gamma = 1.5$  (kinetic energy  $\simeq 255501$  eV), electric field strength  $\varepsilon = 0.1$  a.u. and geometric parameters  $\theta_i = \varphi_i = 45^\circ$  and  $\varphi_f = 90^\circ$ . The corresponding number of photons exchanged is  $\pm 100$

positron and RDCS for electron) is important particularly for high intensities. It is obtained that differential cross sections with very high values are for an electrical field strength close to zero. RDCSs for electron and positron

decrease rapidly with increase in electric field strength  $\varepsilon$  up to about 0.09 a.u. Beyond this value, RDCS for electron continues in decreasing slowly up to about 0.24 a.u. and RDCS for positron increases rapidly by increasing intensities. Comparison between two RDCSs indicates that RDCS for positron is larger in magnitude than RDCS for electron by about 12 times in vicinity of electrical field strength  $\varepsilon = 0.25$  a.u. This reflects the fact that introduction of anomalous magnetic moment effects in wave functions of both electron and positron are indispensable, which may be important for comparison between  $e^\pm - H$  scattering especially at high intensities. Three-dimensional representation in Fig. 3, allows for a more complete investigation for relativistic differential cross section versus both electrical field strength  $\varepsilon$  and final angle  $\theta_f$ . In a global view, behavior in Fig. 3 is basically the same as the one before, with the only difference that in Fig. 2 final angle  $\theta_f$  is fixed for value  $45^\circ$ . In both 1D and 3D plots, as shown in Figs. 2 and 3, respectively, relativistic differential cross section for positron shows a minimum in vicinity of  $\varepsilon = 0.09$  a.u. Significant increasing in RDCS for positron impact in 3D plot with increasing intensity is obtained qualitatively similar to 1D plot.

We have shown in Fig. 4, RDCSs for electron and positron with introduction of anomalous magnetic moment effects in the relativistic regime  $\gamma = 1.5$  (kinetic energy  $\simeq 255501$  eV). On the basis of the present calculations positron elastic differential cross section is 3 times larger than the corresponding electron differential cross section at  $35^\circ$ .

It is appropriate to conclude by the fact that: in first Born approximation, relativistic  $e^\pm-H$  collisions are affected differently by taking into account of AMM effects of both electron and positron.

#### 4. Conclusions

Present study is devoted to relativistic computations, which includes laser interaction and anomalous magnetic moment effects, to provide detailed information on relativistic elastic scattering of hydrogen atom by electron and positron impact. Here we have used the same approximation to study positron-hydrogen scattering. Even if there were no experimental impetus for this work, there would still be a theoretical interest in seeing how positron and electron cross sections compare when calculated in a similar approximation. It is demonstrated that, specifically within high intensities, differential cross-section for positron is several orders of magnitude higher than the differential cross-section for electron in presence of anomalous magnetic moment effects. It is hoped that the observation of this important result for positron and electron scattering by hydrogen atom will stimulate further theoretical works in this area. However, in absence of reliable theoretical predictions and experimental observations, our present results may give us some indication of the shape and qualitative features of the differential cross sections curve.

#### References

- [1] D Hanneke, S Fogwell and G Gabrielse *Phys. Rev. Lett.* **100** 120801 (2008)
- [2] D Hanneke, S Fogwell Hoogerheide, G Gabrielse *Phys. Rev. A* **83** 052122 (2011)
- [3] W E Kauppila and T S Stein *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **26** 1 (1990)
- [4] O Sueoka and A Hamada *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** 2669(1993)
- [5] A Hamada and O Sueoka *J. Phys. B* **27** 5055 (1994)
- [6] G Laricchia and M Charlton *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A* **357** 2259 (1999)
- [7] M Kimura, M Takekawa, Y Itikawa, H Takaki and O Sueoka *Phys. Rev. Lett.* **80** 3936 (1998)
- [8] K Iwata, G F Gribakin, R G Greaves, C Kurz and C M Surko *Phys. Rev. A* **61** 022719 (2000)
- [9] K Iwata, R G Greaves, T J Murphy, M D Tinkle and C M Surko *Phys. Rev. A* **51** 473 (1995)
- [10] G F Gribakin *Phys. Rev. A* **61** 022720 (2000)
- [11] S Zhou, H Li, W E Kauppila, C K Kwan and T S Stein *Phys. Rev. A* **55** 361 (1997)
- [12] S A Elkilany *Indian J. Phys.* **88** 19 (2014)
- [13] G F Gribakin, J A Young and C M Surko *Rev. Mod. Phys.* **83** 2577 (2010)
- [14] C M Surko, G F Gribakin and S J Buckman *J. Phys. B* **38** R57 (2005)
- [15] M Charlton and J W Humberston *Positron Physics* (Cambridge: Cambridge University) (2000)
- [16] J D Bjorken and S D Drell *Relativistic Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill) (1964)
- [17] C Itzykson and J-B Zuber *Quantum Field Theory* (New York: McGraw-Hill) (1985)
- [18] S Elhandi, S Taj, Y Attaourti, B Manaut and L Oufni *Phys. Rev. A* **81** 043422 (2010)
- [19] M El Idrissi, S Taj, B Manaut and L Oufni *Indian J. Phys.* **88** 111 (2014)
- [20] B Manaut, S Taj and M El Idrissi *Can. J. Phys.* **91** 696 (2013)