N° d'ordre : 119/2017

UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE
Faculté des Sciences et Techniques
Béni Mellal

Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Ahmed KAJOUNI

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques

Contribution à l'étude des équations différentielles fractionnaires : étude de cas d'équations différentielles fractionnaires hybrides

---

Après avis des Rapporteurs :

Pr. Ahmed ZEGHAL	P.E.S.	Université Sultan Moulay Slimane-Beni Mellal
Pr. Said MELLIANI	P.E.S.	Université Sultan Moulay Slimane-Beni Mellal
Pr. Khalil EZZINBI	P.E.S.	Université Cadi Ayyad-Marrakech

Soutenue le 01/07/2017 devant le jury composé de :

Pr. Ahmed ZEGHAL	P.E.S.	Université Sultan Moulay Slimane-Beni Mellal	Président
Pr. Said MELLIANI	P.E.S.	Université Sultan Moulay Slimane-Beni Mellal	Rapporteur
Pr. Khalil EZZINBI	P.E.S.	Université Cadi Ayyad-Marrakech	Rapporteur
Pr. Khalid HILAL	P.E.S.	Université Sultan Moulay Slimane	Directeur de thèse
Pr. Lalla Saadia CHADLI	P.E.S.	Université Sultan Moulay Slimane-Beni Mellal	Examinateur
Pr. Hamid EL MAROUFY	P.H.	Université Sultan Moulay Slimane-Beni Mellal	Examinateur

Liste des publications

Publications dans des journaux :

1. K.Hilal and A.Kajouni ; Boundary value problems for hybrid differential equations : Mathematical Theory and Modeling, ISSN 2224-5804 (Paper) ISSN 2225-0522 (Online), Vol.5, No.1, 2015.
2. Khalid Hilal and Ahmed Kajouni ; Boundary value problems for hybrid differential equations with fractional order : Advances in Difference Equations SpringerOpen Journal (2015) 2015 :183 DOI 10.1186/s13662-015-0530-7.
3. K.Hilal and A.Kajouni ; Existence of solutions for hybrid differential equation with fractional order : Mathematical Theory and Modeling, ISSN 2224-5804 (Paper) ISSN 2225-0522 (Online), Vol.6, No.2, 2016.
4. Khalid Hilal and Ahmed Kajouni ; Existence of the Solution for System of Coupled Hybrid Differential Equations with Fractional Order and Nonlocal Conditions : Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations Volume 2016, Article ID 4726526.

Conférences internationales :

1. Problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire hybride, Mai 2014, Beni Mellal, MAROC.
2. Existence of solutions for hybrid differential equations with fractional order, 20-22 Avril 2016, Beni Mellal, MAROC.

Résumé

Au cours de ces dernières années l'étude des équations différentielles fractionnaires a fait l'objet de divers travaux de recherches. Ces équations concourent dans la modélisation de certains phénomènes physiques présentant des termes mémoire dans leurs structures.

Le but de cette thèse est de contribuer au développement de cette théorie émergente, et ce en s'intéressant au problème de l'existence des solutions de quelques équations différentielles fractionnaires hybrides. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les théorèmes du point fixe de Dhage.

Tout abord, nous présentons les élèments de base de la théorie du calcul fractionnaire, tels que : la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, définitions relatives aux opérateurs d'ordre fractionnaire, l'exponentielle de Mittag-Leffler, sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans cette thèse.

Ensuite, nous nous intéressons à l'étude d'existence de solutions de deux problèmes aux limites concernant une équation différentielle hybride et une autre fractionnaire hybride, nous établissons aussi quelques résultats d'existence des inégalités différentielles hybrides fondamentales liées à ces équations, ce qui nous a permis, dans un premier temps d'avoir des conditions d'existence des solutions maximales et minimales de ces problèmes et par la suite des résultats d'unicité des solutions de ces problèmes.

Finalement, nous traitons les questions d'existence de la solution d'une équation différentielle fractionnaire hybride et à condition non locales et nous exploitons les résultats obtenus pour étudier l'existence et aussi l'unicité de la solution d'un système de couple équations différentielles fractionnaires hybrides.

Remerciements

Les travaux scientifiques présentés dans ce mémoire sont loin d'être le fruit d'un travail solitaire, mais sont plutôt issus d'une réalisation soutenue par un grand nombre de personnes généreuses auxquelles j'adresse ma profonde reconnaissance. Les occasions de remercier publiquement les personnes envers lesquelles on est redevable sont rares, je suis ainsi honoré que ma thèse de Doctorat m'en fournisse une.

Ma première pensée va à mon encadrant de thèse, le professeur Khalid HILAL qui m'a initié à la recherche et m'a fait bénéficier de son expérience et de ses connaissances scientifiques. Je lui serai toujours très reconnaissant.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Mr Ahmed ZEGHAL, Doyen de la Faculté des sciences et Techniques, Université Sultan Moulay Sliman-Beni Mellal pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je tiens à exprimer ma gratitude à :
Mr Ahmed ZEGHAL, professeur à l'Université Sultan Moulay Sliman-Beni Mellal,
Mr Said MELLIANI, professeur à l'Université Sultan Moulay Sliman-Beni Mellal,
Mr Khalil EZZINBI, professeur à l'Université Cadi Ayyad-Marrakech,
qui m'ont fait le très grand honneur d'avoir accepté de juger ce travail et d'en faire la rapport.

J'exprime ma reconnaissance à Mme Lalla Saadia CHADLI, professeur à l'Université Sultan Moulay Sliman-Beni Mellal, et Mr Hamid EL MAROUFY, professeur à l'Université Sultan Moulay Sliman-Beni Mellal, d'avoir accepté de se joindre aux membres du jury.

Mention spéciale et salutations distinguées à tous ceux avec qui j'ai eu le privilège et le plaisir de collaborer, à l'ensemble de mes collègues doctorants membres du Labo-

ratoire de Mathématiques Appliquées et Calculs scientifiques de la Faculté des Sciences et Techniques de Beni Mellal.

Enfin, je remercie tous mes autres amis et les membres de ma famille.

table des matieres generale

Table des matières

Introduction

Le but du calcul fractionnaire est de généraliser les dérivées traditionnelles à des ordres non-entiers. Comme il est bien connu, beaucoup de systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par un modèle dynamique d'ordre fractionnaire, basé en général sur la notion de différentiation ou d'intégration de l'ordre non-entier.
L'étude des systèmes d'ordre fractionnaire est plus délicate que pour leurs homologues d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales et d'autre part ils présentent une dynamique beaucoup plus complexe.
Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier, le concept de calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la "nature" autour de nous.
Plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques [16], thermiques [9] et viscoélastiques [52],[6], sont régis par des équations différentielles à dérivées non-entières. L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée. Par ce fait, des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non-entières ont été développés [15].

Dans la littérature, l'histoire du calcul fractionnaire a commencé par la lettre : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$, adressée par l'Hospital en 1965 à Leibniz qui a introduit avec Newton le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ième}$ dérivée apparemment entière d'une fonction f. Cette lettre était le premier indice d'une nouvelle théorie de dérivation d'ordre arbitraire appelée dérivation fractionnaire et qui unifie et généralise la dérivation d'ordre entier (classique). Et depuis ce temps, cette théorie a attiré l'attention des célèbres mathématiciens comme Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann et Laurent.
Les concepts de dérivation et intégration fractionnaires sont souvent associés aux noms de Riemann et Liouville, alors que l'intérrogation sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne.
Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand

de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhention du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière.
Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés à cette théorie et les champs de ces applications se sont diversifiés, elle a donc connu récemment un grand intéret vue qu'elle possède un effet de mémoire qu'elle partage avec plusieurs matériaux viscoélastiques ou polymères.
Deux raisons principales semblent expliquer cet intérêt grandissant : d'une part, l'utilisation de la dérivation d'ordre non entier dans le cadre d'applications variées (automatique, analyse d'image, viscoélasticité, diffusion fractale, etc...) permet d'améliorer les modèles classiquement utilisés et de créer de nouveaux outils d'ingénierie ([14], [25], [31], [39]...). D'autre part, et d'un point de vue strictement mathématique, les nombreuses propriétés de la dérivation d'ordre généralisé en font un outil d'analyse intéressant [Srivastava et Owa 1989].
L'objectif principal de cette thèse est l'étude de l'existence de solutions de certaines équations différentielles fractionnaires hybrides.
Nous commençons, dans le premier chapitre, par introduire quelques élèments de base du calcul fractionnaire. Un rappel historique et quelques concepts préliminaires seront aussi introduits comme la transformée de Laplace, la fonction gamma et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Trois approches (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo) de la généralisation des notions de dérivation entière seront ensuite considérées et pour voir l'effet de ces opérateurs nous introduisons des exemples concernant surtout les fonctions puissances et des cas particuliers de cette théorie. Ensuite nous proposons quelques propriétés de cette théorie concernant la composition de ces opérateurs et l'opérateur d'intégration frationnaire de Riemann-Liouville, vue que ces propriétés sont les plus utilisées dans les équations différentielles d'ordres fractionnaires.

Dans le deuxième chapitre, Nous étudions des résultats d'existences d'une équation différentielle hybride sous des conditions mixtes de Lipschitz et de Carathéodory et à l'aide d'un théorème de point fixe spéciale à savoir le théorème de point fixe de Dhage. Nous cherchons aussi, des conditions d'existence de la solution maximale et minimale de ce problème, pour cela, nous nous servons de quelques résultats importants à propos des inégalités différentielles (stricte et non stricte) du premier ordre liées à ce problème. Nous profitons ensuite, de ces résultat pour donner des conditions d'unicité de la solution de cette équation différentielle hybride.

Le troisième chapitre est dédié au problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}_0D_c^{\alpha}\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t,x(t)) \quad p.p. \quad t \in J = [0,T], \\ a\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} = c, \end{cases}$$

où : $0 < \alpha < 1$.

Nous étudions des résultats d'existence de ce problème sous des conditions mixtes de Lipschitz sur la fonction f et de Carathéodory sur la fonction g et en employant le théorème de point fixe hybride de Dhage. Dans ce qui suit de ce chapitre et dans le but de démontrer l'unicité de la solution de ce problème, nous prouvons l'existence de sa solution maximale et minimale en donnons deux résultats de base relatifs aux inégalités différentielles fractionnaires hybrides (cette fois ci) liées à ce problème, ensuite nous démontrons que la solution maximale et aussi minimale servent comme bornes pour l'ensemble des solutions de ces inégalités. Enfin nous exploitons et nous profitons de ces résultats pour prouver l'unicité de la solution de ce même problème fractionnaire.

Dans le troisième chapitre de ce travail, nous considérons un autre type d'équations différentielles d'ordres fractionnaires hybrides en changent l'opérateur de dérivation fractionnaire ainsi que l'ordre α de ce dernier. On montre l'existence d'au moins une solution de ce problème sous des conditions mixtes de Lipschitz et de Carathéodory et en exploitons des résultats classiques de cette théorie de dérivation fractionnaire, nous donnons par la suite de ce chapitre deux exemples d'illustrations de nos résultats.

Dans le dernier chapitre de ce travail, et vue que la condition non locale joue aussi un rôle important dans la modilisation de plusieurs phénomènes physiques, nous nous intéressons à l'étude de l'existence de la solution de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire hybride et à condition non locale suivante :

$$\begin{cases} {}_0D_c^{\alpha}\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t,x(t)) \quad p.p. \quad t \in J = [0,T], \\ \frac{x(0)}{f(0,x(0))} = \mathcal{L}(x), \quad \frac{x(T)}{f(T,x(T))} = x_T, \end{cases}$$

où : $1 < \alpha \leq 2$.

Cette solution qu'on utilise pour démontrer l'existence de la solution d'un système de couple équations différentielles d'ordres fractionnaires et sous des conditions spéciales sur la fonction g on prouve l'existence et surtout l'unicité de la solution de ce couple d'équations.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale récapitulant nos principaux résultats et quelques perspectives.

Chapitre 1

Éléments du calcul fractionnaire

1.1 Bases mathématiques du calcul fractionnaire

1.1.1 Fonctions spéciales

Dans ce paragraphe, nous présentons deux fonctions spéciales qui sont très utilisées dans le calcul fractionnaire. Il s'agit des fonctions Euleriennes ainsi que la fonction exponentielle de Mittag-Leffler.

La Fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma et qui généralise la notion du factoriel en la prolongeant aux valeurs réelles et complexes [5].

Définition 1.1.1. La fonction Gamma est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \quad Re(\alpha) > 0.$$

Théorème 1.1.1. La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :

1. La fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ tout entier .
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, on a
$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$
en particulier pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\Gamma(n+1) = n!,$$
et
$$\Gamma(\alpha+m) = \alpha(\alpha+1)...(\alpha+m-1)\Gamma(\alpha). \tag{1.1}$$

Pour plus d'informations sur la fonction Γ , voir [5]

La Fonction Bêta

Définition 1.1.2. La fonction Bêta est definie par :

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

avec $Re(p) > 0$ et $Re(q) > 0$.

La Fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle e^x, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [47] , [46] et désignée par la fonction suivante cf; citeer1, [29], [30] :

$$E_\alpha(z) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \qquad \alpha > 0.$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal [1] , et elle est définie par le développement en série entière suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad \alpha > 0, \beta > 0.$$

- Pour $\beta = 1$, on retrouve la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.
- Pour $\alpha = \beta = 1$, on retrouve la fonction exponentielle :

$$E_{1,1}(z) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, les fonctions de Mittag-Leffler jouent le même rôle que la fonction exponentielle.

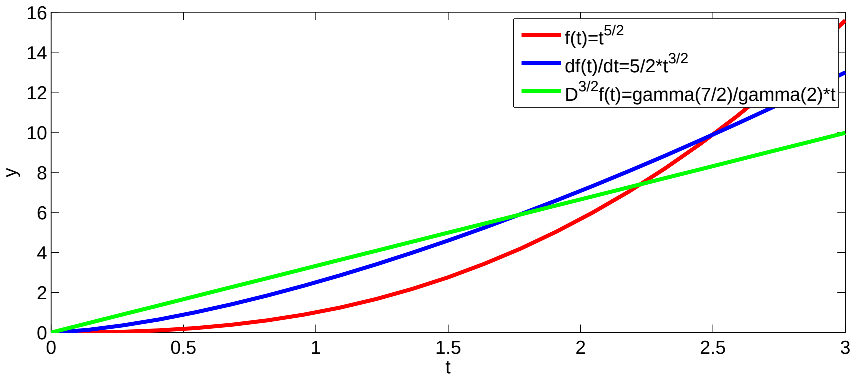

FIGURE 1.1 –

1.2 Intégration et dérivation fractionnaire

Dans cette partie, on va introduire quelques propriétés et définitions qu'on va utiliser dans ce travail (pour plus de précisions et de détails, voir [27, 28, 40, 49, 50, 51]...). Nous commençons par donner la définition d'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville,, puis nous donnons les définitions et quelques propriétés des dérivées fractionnaires les plus courantes. Nous signalons içi que la pluparts des propriétés de la dérivée classique ne peuvent pas être généralisées au cas fractionnaire.

1.2.1 Intégrale fractionnaire

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approche de Riemann pour proposer une première définition de l'intégrale fractionnaire.

Intégrale de Riemann-Liouville :
Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, on note par ${}_aI_t^1$ la primitive de f qui s'annule en a est donnée par :

$$\forall t \in [a,b], \quad ({}_aI_t^1 f)(t) = \int_a^t f(s)ds.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, par récurrence on montre que la $n^{ième}$ itération de ${}_aI_t^1$ est donnée par :

$$({}_aI_t^n f)(t) \quad = \quad \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds. \tag{1.2}$$

Et on a les remarques suivantes :

– La fonction ${}_aI_t^n f$ est l'unique fonction qui vérifie :

$$\begin{cases} ({}_aI_t^n f)^{(k)}(a) = 0, & 0 \leq k \leq n-1 \\ ({}_aI_t^n f)^{(n)} = f. \end{cases}$$

– La $n^{ième}$ itération de l'intégrale ${}_aI_t^1$ est apelée aussi intégrale à gauche d'ordre n de f , la dénomination gauche provient du fait que l'intégrale est évaluée à partir des valeurs à gauche $(s \leq t)$ de f .

– Il est possible d'étendre la relation (1.2) à $n \in \mathbb{R}_+^*$ grace à la fonction Gamma d'Euler comme suit (voir, par exemple, [24] et [49]) :

Définition 1.2.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'opérateur ${}_aI_t^\alpha$ défini sur $L_1[a,b]$ par :

$${}_aI_t^\alpha f(t) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad t \in [a,b]. \tag{1.3}$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α.

On peut écrire ${}_aI_t^\alpha$ sous la forme suivante :

$$ {}_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-a} s^{\alpha-1}f(t-s)ds, \quad t\in[a,b]. $$

On obtient alors, le théorème suivant :

Théorème 1.2.1. [24]
Soit $f \in L_1[a,b]$ et $\alpha > 0$. Alors l'intégrale ${}_aI_t^\alpha f(t)$ existe pour tout $t\in[a,b]$ et la fonction ${}_aI_t^\alpha f$ est un élément de $L_1[a,b]$.

Remarque 1.2.1.
Le tableau suivant montre pour quelles classes de fonctions cette définition a un sens et plus précisément quelles sont les images de ces ensembles par cet opérateur :

	f	${}_aI_t^\alpha f$	conditions
1.	$L^p([a,b])$	$L^q([a,b])$	$0<\alpha<1, \quad 1<p<\frac{1}{\alpha}, \quad 1\le q\le\frac{p}{1-\alpha p}$
2.	$L^1([a,b])$	$L^p([a,b])$	$0<\alpha<1, \quad 1\le q\le\frac{p}{1-\alpha}$
3.	$L^{\frac{1}{\alpha}}([a,b])$	$L^q([a,b])$	$0<\alpha<1, \quad q\ge 1$
4.	$L^p([a,b])$	$H^{\alpha-\frac{1}{p}}([a,b])$	$p>\frac{1}{\alpha}, \quad \alpha-\frac{1}{p}\in\mathbb{N}^*$
5.	$L^\infty([a,b])$	$H^\infty([a,b])$	
6.	$L^p([a,b])$	$H^p([a,b])$	$p\ge 1$
7.	$C^0([a,b])$	$C^0_+([a,b])$	
8.	$AC([a,b])$	$AC([a,b])$	

Pour plus de détails et démonstrations voir [40]

Exemple 1.2.1. – Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=1$, on a

$$ {}_aI_t^\alpha\Big(1\Big) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. $$

– Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=(t-a)^p$, on a

$$ {}_aI_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}(t-a)^{\alpha+p}. $$

• ***Composition des intégrales fractionnaires***

Si f est une fonction intégrable et si α et β sont deux réels strictement positifs, alors on a :

$$ \begin{aligned} {}_aI_t^\alpha\Big({}_aI_t^\beta f(t)\Big) &= {}_aI_t^{\alpha+\beta}f(t) = {}_aI_t^\beta\Big({}_aI_t^\alpha f(t)\Big), \quad p.p. \quad t\in[a,b] \qquad (1.4)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)ds \end{aligned} $$

• ***Intégrale fractionnaire à droite***

On peut remarquer que l'integrale

$$({}_bI_t^1 f)(t) \;=\; \int_b^t f(s)ds = -\int_t^b f(s)ds,$$

est aussi une primitive de f, qui s'annule en b et fait intervenir les valeurs à droite de f. A partir de la relation

$$\int_b^t (t-s)^{n-1} f(s)ds \;=\; (-1)^n \int_t^b (s-t)^{n-1} f(s)ds,$$

on pourrait définir de la même manière que précédemment l'intégrale à droite d'ordre n de f par :

$$({}_bI_t^n f)(t) \;=\; \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_t^b (s-t)^{n-1} f(s)ds.$$

Et de même que l'intégrale fractionnaire à gauche, la fonction ${}_bI_t^n f$ est l'unique fonction qui vérifie :

$$\begin{cases} ({}_bI_t^n f)^{(k)}(b) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1 \\ ({}_bI_t^n f)^{(n)} = f. \end{cases}$$

Définition 1.2.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'opérateur ${}_bI_t^\alpha$ défini sur $L_1[a,b]$ par :

$${}_bI_t^\alpha f(t) \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad t \in [a,b], \tag{1.5}$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α.

On signale içi que la plupart des travaux sur cette théorie utilisent souvent les définitions à gauche, et que les définitions à droite sont rarement utilisées car elles sont anti-causales (vu qu' elles dépendent du futur des fonctions car le s dépasse t).

1.2.2 Dérivation fractionnaire

Nous présentons dans cette partie les approches les plus fréquemment utilisées dans les applications : approches de Grunwald-Letnikov, de Riemann-Liouville et celle de Caputo, ainsi que leurs propriétés. Nous signalons que ces approches ne sont pas toutes équivalentes.

Approche de Grünwald-Letnikov.

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par des différences finies. (Pour plus de détails voir [24, 26, 49]).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$. Notons T_h l'opérateur de translation à gauche défini comme suit :

$$T_h f(t) = f(t-h).$$

On a donc

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(id - T_h)f(t).$$

Ainsi $T_h^2 f(t) = f(t-2h)$, (en notant $T_h^2 = T_h \circ T_h$)
par suite,

$$\begin{aligned} f"(t) &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}(id - T_h)\right)^2 f(t) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}(id - 2T_h + T_h^2)f(t) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}(f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)). \end{aligned}$$

Et par la formule de Newton, on obtient la dérivée $n^{ième}$ de f

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n}(id - T_h)^n f(t) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} id^{n-k}(-T_h)^k f(t) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh), \end{aligned}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Une généralisation naturelle de cette formule consiste à définir la dérivée d'ordre α non entier, avec $0 \leq n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}^*$, par

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} f(t-kh).$$

Comme

$$(-1)^k \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1) = (-\alpha)(1-\alpha)...(k-\alpha-1),$$

et que pour $\alpha > 0$ non entier $\Gamma(-\alpha)$ est bien défini et

$$\frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(-\alpha)} = (-\alpha)(1-\alpha)...(k-\alpha-1).$$

On obtient ainsi, la formule de Grünwald -Letnikov pour $\alpha > 0$ non entier.

Définition 1.2.3. Soit $\alpha > 0$. La dérivée de Grünwald- Letnikov d'ordre α est définie par

$$D_{GL}^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh), \tag{1.6}$$

et

$$D_{GL}^{-\alpha} f(t) \quad = \quad \lim_{h \to 0} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t-kh). \tag{1.7}$$

Il est à noter que la relation (1.6), due à Liouville (1832), puis Grünwald (1863) et Letnikov (1868), est très utilisée pour calculer numériquement une dérivée fractionnaire, et que dans cette relation les nombres $\Gamma(-\alpha+k)$ ne sont pas nuls et que la dérivée fractionnaire d'ordre α pour $0 < \alpha < 1$ dépend de tout le passé, contrairement à la dérivée usuelle (d'ordre $\alpha = 1$) qui ne dépend que de ce qui se passe au voisinage immédiat du point de calcul.

Remarque 1.2.2.

Si f est de classe C^n , alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$$_aD_{GL}^{\alpha} f(t) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \tag{1.8}$$

$$_aD_{GL}^{-\alpha} f(t) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(s) ds. \tag{1.9}$$

Exemple 1.2.2. 1. Soit α non entier et $f(t) = C$ une fonction constante, on a

$$_aD_{GL}^{\alpha} f(t) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} C$$

En général, la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est ni nulle ni constante.

2. Pour α non entier

$$_aD_{GL}^{\alpha} (t-a)^p \quad = \quad \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha}. \tag{1.10}$$

En particulier

$$_aD_{GL}^{\alpha} (t-a)^{\alpha} = \Gamma(\alpha+1).$$

- ***Composition avec les dérivées d'ordre entier***

Soit $m \in \mathbb{N}$ et α non entier avec $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\star \quad \frac{d^m}{dt^m}\Big({}_aD_{GL}^{\alpha} f(t) \Big) \quad = \quad {}_aD_{GL}^{m+\alpha} f(t).$$

$$\star \quad {}_aD_{GL}^{\alpha}\Big(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \Big) \quad = \quad {}_aD_{GL}^{m+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k-m}}{\Gamma(-\alpha+k-m+1)}.$$

Cas particulier : Si $f^k(a) = 0$ pour $k = 0; 1; ...; m-1$, ona

$$ {}_aD^{\alpha}_{GL}\Big(\frac{d^m}{dt^m}f(t)\Big) = \frac{d^m}{dt^m}\Big({}_aD^{\alpha}_{GL}f(t)\Big). $$

C'est à dire que la dérivation fractionnaire et la dérivation usuelle commute dans ce cas .

• ***Composition avec les dérivées d'ordres fractionnaires***

▷ Si $q < 0$ et $p \in \mathbb{R}$, alors

$$ {}_aD^{p}_{GL}\Big({}_aD^{q}_{GL}f(t)\Big) = {}_a D^{p+q}_{GL}f(t) $$

▷ Si $0 \leq m-1 < q < m$ et $p < 0$ alors

$$ {}_aD^{p}_{GL}\Big({}_aD^{q}_{GL}f(t)\Big) = {}_a D^{p+q}_{GL}f(t). $$

si et seulement si $f^k(a) = 0$ pour $k = 0; 1; ...; m-2$.

▷ Si $0 \leq m-1 < q < m$ et $0 \leq n-1 < p < n$, alors

$$ {}_aD^{p}_{GL}\Big({}_aD^{q}_{GL}f(t)\Big) = {}_a D^{q}_{GL}\Big({}_aD^{p}_{GL}f(t)\Big) = {}_a D^{p+q}_{GL}f(t). $$

si et seulement si $f^k(a) = 0$ pour $k = 0; 1; ...; r-2$ avec $r = max(m, n)$.

Approche de Riemann-Liouville.

La manipulation des dérivées fractionnaires au sens de Grüwald-Letnikov définie comme limite d'une différence d'odre fracionnaire, n'est pas commode. L'expression de la remarque 1.2.2 est bien meilleure grâce à la présence de l'intégrale dedans ; pour se débarasser du terme non intégrale dans cette expression, on le considère comme un cas particulier de l'expression intégro-différentielle suivante :

$$ {}_aD^{\alpha}_{R}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds. \tag{1.11} $$

C'est à dire

$$ {}_aD^{\alpha}_{R}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\Big(I^{n-\alpha}f(t)\Big), \tag{1.12} $$

avec $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Cette expression est la définition la plus connue de la dérivée fractionnaire ; elle est appelée : définition de Riemann-Liouville.

Evidemment, l'expression de la dérivée fractionnaire de Grüwald-Letnikov de la remarque 1.2.2 obtenue sous l'hypothèse que la fonction f(t) doit être n-fois continûment différentiable, peut être obtenue à partir de cette expression sous la même hypothèse en faisant des intégrations par parties et différentiations répétées.

De plus, si on considère une classe de fonctions $f(t)$ admettant (n) dérivées continues pour $t \geq 0$, alors la défnition de Grünwald-Letnikov de la remarque 1.2.2 est équivalente à la définition (1.11) de Riemann-Liouville.

Remarque 1.2.3.
Par ce fait et de point de vue purement mathématique, la classe de fonctions qu'utilise l'approche de Grüwald-Letnikov est réduite ; cependant, la classe de fonctions qu'utilise l'approche de Riemann-Liouville est très importante car le caractère de la majorité des processus dynamiques est assez régulier et ne présente pas des discontinuités.
Ceci caractérise et surtout distingue la propre utilisation de ces deux approches de dérivation fractionnaires dans les applications.
On peut signaler donc, que la définition de Riemann-Liouville donne une excellente opportunité pour affaiblir les conditions sur la fonction f(t). A savoir, il suffit de demander l'intégrabilité de la fonction $f(t)$ et alors l'intégrale (1.11) existe pour $t > a$.

Exemple 1.2.3.

1. Soit α non entier avec $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(t) = C$ une fonction constante, on a : ${}_aD_R^\alpha C = {}_aD_{GL}^\alpha C$ et donc
$$ {}_aD_R^\alpha C = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} C, $$
2. Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $\alpha > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,
$$ {}_aD_R^\alpha (t-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha}. $$
La seule restriction pour $f(t) = (t-a)^p$ est son intégrabilité à savoir : $p > -1$
3. Pour $\alpha = p = \frac{1}{2}$ on a donc : ${}_0D_R^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} = \Gamma(\frac{3}{2})$

- ***Composition à droite avec l'intégrale fractionnaire***

Pour $\alpha > 0$ et $t > a$, on a :
$$ {}_aD_R^\alpha \Big({}_aI_t^\alpha f(t) \Big) = f(t), \tag{1.13} $$
C'est à dire que l'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

- ***Composition à gauche avec l'intégrale fractionnaire***

Pour $n-1 \leq \alpha < n$ et si ${}_aD_R^\alpha f(t)$ est intégrable, alors :
$$ {}_aI_t^\alpha \Big({}_aD_R^\alpha f(t) \Big) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} [\, {}_aD_R^{\alpha-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \tag{1.14} $$
et donc en particulier si $0 < \alpha < 1$ on a
$$ {}_aI_t^\alpha \Big({}_aD_R^\alpha f(t) \Big) = f(t) - \Big[{}_aI_t^{1-\alpha} f(t) \Big]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. $$

- ***Composition à droite avec intégrale fractionnaire d'ordre différent.***

Pour $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$, on a :

$$ {}_aD_R^{\alpha}\Big({}_aI_t^{\beta} f(t)\Big) \;=\; {}_aD_R^{\alpha-\beta} f(t), \tag{1.15}$$

où f est une fonction continue, et que ${}_aD_R^{\alpha-\beta} f(t)$ existe si $\alpha \geq \beta$. (si $\alpha - \beta < 0$, alors : ${}_aD_R^{\alpha-\beta} f(t) = {}_aI_t^{\beta-\alpha} f(t)$).

- ***Composition à gauche avec intégrale fractionnaire d'ordre différent.***

Pour $0 \leq m-1 \leq \beta < m$, on a :

$$ {}_aI_t^{\alpha}\Big({}_aD_R^{\beta} f(t)\Big) \;=\; {}_aD_R^{\beta-\alpha} f(t) - \sum_{k=1}^{m} [\, {}_aD_R^{\beta-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \tag{1.16}$$

- ***Composition avec les dérivées d'ordre entier :***

Pour $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$ \frac{d^k}{dt^k}\Big({}_aD_R^{\alpha} f(t)\Big) \;=\; {}_aD_R^{k+\alpha} f(t), \tag{1.17}$$

$$ {}_aD_R^{\alpha}\Big(\frac{d^k}{dt^k} f(t)\Big) \;=\; {}_aD_R^{k+\alpha} f(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{f^i(a)(t-a)^{i-\alpha-k}}{\Gamma(i-\alpha-k+1)}. \tag{1.18}$$

Remarque 1.2.4.

Comme ce qui se passe avec la dérivée de Grüwald-Letnikov, La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivation usuelle (d'ordre entière) ne commutent que si : $\quad f^{(i)}(a) = 0 \quad$ pour $\quad i = 0, 1, 2, ..., n-1$.

- ***Composition des dérivées fractionnaires.***

Pour $n-1 \leq \alpha < n$ et $m-1 \leq \beta < m$, on a :

$$ {}_aD_R^{\alpha}\Big({}_aD_R^{\beta} f(t)\Big) \;=\; {}_aD_R^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{i=1}^{m} [\, {}_aD_R^{\beta-i} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-i}}{\Gamma(-\alpha-i+1)}, \tag{1.19}$$

$$ {}_aD_R^{\beta}\Big({}_aD_R^{\alpha} f(t)\Big) \;=\; {}_aD_R^{\beta+\alpha} f(t) - \sum_{i=1}^{n} [\, {}_aD_R^{\alpha-i} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-i}}{\Gamma(-\beta-i+1)}. \tag{1.20}$$

En général, les opérateurs de dérivation fractionnaire, au sens de Riemann-Liouville, ne commutent pas.

Mais, on a la propriété essentielle suivante :

$$ {}_aD_R^{\alpha}\Big({}_aD_R^{\beta} f(t)\Big) \;=\; {}_aD_R^{\beta}\Big({}_aD_R^{\alpha} f(t)\Big) =_a D_R^{\alpha+\beta} f(t), \tag{1.21}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} {}_aD_R^{\alpha-i}f(t)]_{t=a} = 0, & \text{i=1,2,...,n ;} \\ {}_aD_R^{\beta-i}f(t)]_{t=a} = 0, & \text{i=1,2,...,m.} \end{cases}$$

Lien avec l'approche de Grünwald-Letnikov

Il existe une relation entre les approches, de différentiation d'ordre réel arbitraire, de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov.

Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur un intervalle $[a,T]$ telle que $f^{(n)}$ est intégrable sur $[a,T]$.

Pour tout α tel que $0 < \alpha < n$, la dérivée ${}_aD_R^{\alpha}f(t)$, au sens de Riemann-Liouville, existe et coïncide avec la dérivée ${}_aD_{GL}^{\alpha}f(t)$ au sens de Grünwald-Letnikov.

Si $0 \leq n-1 \leq \alpha < n \leq m$, on a :

$$\begin{aligned} {}_aD_R^{\alpha}f(t) ={}_a D_{GL}^{\alpha}f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds. \end{aligned} \tag{1.22}$$

- Si f est continue et f' est intégrable sur un intervalle $[a,T]$ alors pour tout α $(0 < \alpha < 1)$, les deux dérivées de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov existent et peuvent s'écrire sous la forme :

$$ {}_aD_R^{\alpha}f(t) = {}_aD_{GL}^{\alpha}f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)ds \tag{1.23}$$

- D'aprés la relation (1.22), l'existence de la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ entraîne l'existence de la dérivée d'ordre tout β tel que $0 < \beta < \alpha$.

  C'est à dire que pour une fonction f continue admettant une dérivée intégrable, la dérivée de Riemann-Liouville (Grünwald-Letnikov) ${}_aD_R^{\alpha}f(t)$ existe et est intégrable, alors pour tout β tel que $0 < \beta < \alpha$ la dérivée ${}_aD_R^{\beta}f(t)$ existe aussi et est intégrable.

- La relation entre les définitions de Grünwald-Letnikov et de Riemann-Liouville a aussi une autre conséquence qui est très importante pour la formulation des problèms appliqués, la manipulation avec des dérivées fractionnaires et la formulation du sens physique des problèmes à valeurs initiales pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

- Sous les mêmes hypothèses sur la fonction f ($f(t)$ est $(n-1)$-fois continûment différentiable et sa $n^{ième}$ dérivée est intégrable dans $[a;T]$) et sur α $(n-1 \leq \alpha < n)$

la condition :

$$\Big[{}_aD_R^{\alpha}f(t)\Big]_{t=a} \quad = \quad 0, \tag{1.24}$$

est équivalente aux conditions :

$$f^{(i)}(a) \quad = \quad 0 \quad ; \quad i = 0, 1, ..., n-1. \tag{1.25}$$

Approche de Caputo.

La première et la plus importante remarque a propos de cette approche est qu'elle prévoit la formulation des conditions initiales pour des problèmes aux valeurs initiales pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire sous une forme faisant apparaître seulement les valeurs limites des dérivées d'ordre entier en la borne inférieure (l'instant initial) $t = a$, comme $y'(a)$; $y''(a)$; etc...

Les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaire autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a)$, $f'(a)$; etc ...

Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville en la borne inférieure $t = a$, par exemple

$$\lim_{t\to a} {}_aD_R^{\alpha-1}f(t) = b_1, \quad \lim_{t\to a} {}_aD_R^{\alpha-2}f(t) = b_2, \quad ..., \quad \lim_{t\to a} {}_aD_R^{\alpha-n}f(t) = b_n,$$

où $b_j, \quad j = 1, 2, ..., n$ sont des constantes données.

Malgré le fait que des problèmes avec des telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement (voir, par exemple, solutions données dans [40]), leurs solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de telle type de conditions initiales : c'est un conflit entre la théorie mathématique bien établie et les besoins pratiques.

Pour remédier à ce problème M.Caputo a proposé la définition suivante :

Pour $\alpha \geq 0$ (avec $n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$) et f une fonction telle que $\frac{d^nf}{dt^n} \in L_1([a,b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par :

$${}_aD_C^{\alpha}f(t) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds, \tag{1.26}$$

c'est à dire que

$${}_aD_C^{\alpha}f(t) \quad = \quad {}_aI_t^{n-\alpha}\Big(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\Big). \tag{1.27}$$

Remarque 1.2.5.
Si $\alpha \to n$, alors ${}_aD_C^\alpha f(t)$ coïncide avec $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$,
(Sous des conditions naturelles sur la fonction f).
L'approche de Caputo fournit donc, une interpolation entre les dérivées d'ordre entier.

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec des dérivées au sens de Caputo accepte la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier.
i.e., contient les valuers limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en la borne inférieure t = a.

Exemple 1.2.4. 1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$${}_aD_C^\alpha C = 0.$$

2. Pour α non entier avec $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $p > n-1$, on a

$${}_aD_C^\alpha (t-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha}.$$

• ***Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville :***
Pour $\alpha \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et f une fonction telle que ${}_aD_R^\alpha f(t)$ et ${}_aD_C^\alpha f(t)$ existent. Alors

$${}_aD_C^\alpha f(t) = {}_aD_R^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}. \tag{1.28}$$

Par conséquent,
Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., n-1$, alors

$${}_aD_C^\alpha f(t) = {}_aD_R^\alpha f(t).$$

• ***Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :***
Si f est continue, alors

$${}_aD_C^\alpha \, {}_aI_t^\alpha f(t) = f(t), \tag{1.29}$$

et

$${}_aI_t^\alpha \, {}_aD_C^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}. \tag{1.30}$$

Ainsi, l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, mais il n'est pas un inverse droit.

Dérivée fractionnaire séquentielle

Le but général des approches de dérivation fractionnaire citées au paravant est la généralisation de l'intégration et de la différentiation d'ordre entier. Cependant, il y'a aussi une autre approche qui est moins connue, mais qui peut être de grande importance pour plusieurs applications. Cette approche est basée sur l'observation que, en fait, une différentiation du n-ième ordre est tout simplement une série de différentiations de premier ordre

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t) \;=\; \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\;\ldots\;\frac{d}{dt}}_{n-fois}f(t). \tag{1.31}$$

Par le fait de remplacer la dérivée d'ordre premier $\frac{d}{dt}$ par la dérivée D^{α} d'ordre non entier α avec : $0 < \alpha < 1$ et par analogie à (1.31), on peut écrire

$$D^{n\alpha}f(t) \;=\; \underbrace{D^{\alpha}D^{\alpha}\;\ldots\;D^{\alpha}}_{n-fois}f(t). \tag{1.32}$$

Dans le cas où la dérivée fractionnaire utilisée dans (1.32) est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville D_R^{α}, K.S. Miller et B. Ross ont appelé cette différentiation généralisée différentiation séquentielle et ont considéré des équations différentielles avec dérivées fractionnaires séquentielles du type (1.32) dans leur livre [45], en prenant au lieu de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville celle de Caputo où bien celle de Grünwald-Letnikov, on obtient d'autres formules des dérivées fractionnaires séquentielles.

Dans (1.32), si on remplace chaque dérivée de premier ordre dans (1.31) par des dérivées fractionnaires d'ordres qui ne sont pas nécessairement égaux, on obtient l'expression plus générale suivante :

$$D^{\alpha}f(t) \;=\; \underbrace{D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}\;\ldots\;D^{\alpha_n}}_{n-fois}f(t), \tag{1.33}$$

avec : $\quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$

appelée aussi dérivée fractionnaire séquentielle.

L'opérateur D^{α} dans (1.33) peut désigner l'opérateur de différentiation de Riemann-Liouville, de Caputo ou tout autre mutation.

Remarque 1.2.6.

la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville peut s'écrire comme

$$_aD_R^{\alpha}f(t) \;=\; \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\;\ldots\;\frac{d}{dt}}_{n-fois}I^{n-\alpha}f(t),$$

et la dérivée fractionnaire de Caputo peut elle aussi s'écrire sous la forme

$$_aD_C^{\alpha}f(t) \;=\; {_aI_t^{n-\alpha}}\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\;\ldots\;\frac{d}{dt}}_{n-fois}f(t).$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont donc, des cas particuliers de la dérivée séquentielle (1.33) .

Dérivation fractionnaire à droite Dans tous les approches considérées au paravant, la borne inférieure a est fixée et la borne supérieure t est variante. il est aussi possible de considérer des dérivées fractionnaires en faisant varier la borne inférieure t tout en fixant la borne supérieure b.
La dérivée fractionnaire avec la borne inférieure à l'extrémité gauche de l'intervalle $[a;b]$, ${}_aD^{\alpha}f(t)$, est appelée la dérivée fractionnaire à gauche.
Et donc la dérivée fractionnaire avec la borne supérieure à l'extrémité droite de l'intervalle $[a;b]$ est appelée la dérivée fractionnaire à droite.
La première différence entre ces deux dérivées est que sur l'intervalle $[a;t]$ et puisque $s \leq t$ alors on s'interesse au passé de $f(t)$, mais sur l'intervalle $[t;b]$ et puisque içi $s \geq t$ alors on s'interesse au futur de $f(t)$.
Comme pour les dérivées fractionnaires à gauhe, la notion des dérivées fractionnaires à droite peut être introduite pour n'importe quelle mutation de différentiation fractionnaire : Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ou Caputo .
Pour $n-1 \leq \alpha < n$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est définie par :

$$ {}_aD_R^{\alpha}f(t) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds. $$

La dérivée à gauche, de Riemann-Liouville, correspondante est définie par [40] :

$$ {}_aD_R^{\alpha}f(t) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(\frac{-d}{dt}\Big)^n\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1}f(s)ds. $$

Les dérivées à droite de Caputo et de Grünwald-Letnikov peuvent être définies de la même manière.

Remarque 1.2.7 (Pourquoi les dérivées fractionnaires à droite)**.**

Si on suppose que t est le temps et que $f(t)$ décrit un certain processus dynamique qui évolue en temps. Si on prend $s < t$, où t est le moment présent, alors l'état $f(s)$ du processus $f(t)$ appartient au passé du processus; si on prend $s > t$, $f(s)$ appartient au futur du processus de f.
De ce point de vue, la dérivée à gauche est une opération exécutée dans les états passés du processus f et la dérivée à droite est une opération exécutée dans les états futurs du processus f.
Comme on n'est pas informé de la dépendance de l'état présent de n'importe quel processus sur les résultats de son évolution dans le futur, la plupart des travaux sur les

dérivées fractionnaires considérent seulement les dérivées à gauche.

Propriétés des dérivées fractionnaires

Linéarité

La différentiation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^{\alpha}\Big(\lambda f(t)+\mu g(t)\Big) \quad = \quad \lambda D^{\alpha}f(t)+\mu D^{\alpha}g(t), \tag{1.34}$$

où D^{α} désigne n'importe quelle mutation de la différentiation fractionnaire considérée dans cette thèse.

Règle de Leibnitz

Pour n entier, la règle bien connue de Leibniz pour calculer la dérivée n-ième du produit de deux fonctions f et g est donnée par :

$$\frac{d^n}{dt^n}\Big(f(t)g(t)\Big) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t).$$

Si on remplace le paramètre entier n par le paramètre réel α, alors la dérivée d'ordre entier $g^{(n-k)}(t)$ sera remplacer par la dérivée d'ordre fractionnaire $D^{(\alpha-k)}g(t)$, et la généralisation de cette formule nous donne :

$$D^{\alpha}\Big(f(t)g(t)\Big) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(t)D^{\alpha-k}g(t)-R_n^{\alpha}(t), \tag{1.35}$$

où $n\geq\alpha+1$ et

$$R_n^{\alpha}(t) \quad = \quad \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)}\int_a^t(t-s)^{-\alpha-1}g(s)ds\int_s^t(s-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau)d\tau,$$

et D^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

Remarque 1.2.8.

1. La somme dans la relation (1.35) peut être considérée comme une somme partielle de séries infinies et $R_n^{\alpha}(t)$ comme un reste de ces séries ($\lim_{n\to+\infty}R_n^{\alpha}(t)=0$).

2. Si $g(s)$ et $f(s)$ avec toutes ses dérivées sont continues dans $[a,t]$, alors la la règle de Leibniz pour la dérivée fractionnaire prend la forme suivante :

$$D^{\alpha}\Big(f(t)g(t)\Big) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(t)D^{\alpha-k}g(t).$$

   On peut donc remarquer que cette propriété est spécialement utile pour le calcul de la dérivée fractionnaire d'un produit d'une fonction g continue et d'une fonction polynomiale f aussi continue et de même pour ses derivées.

Différentiation fractionnaire de Riemann-Liouville d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Dans ce paragraphe, on donnera une propriété analogue à la propriété qui suit, de la différentiation d'une intégrale dépendant d'un paramètre avec la limite supérieure dépendant du même paramètre.

$$\frac{d}{dt}\int_0^t G(t,s)ds \;=\; \int_0^t \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}ds + \lim_{s\to t^-} G(t,s).$$

On considère l'intégrale $\int_0^t G(t,s)ds$ dépendant du paramètre t et telle que la limite supérieure dépend aussi de ce paramètre, pour $0 \leq \alpha < n$, on a :

$$\begin{aligned}
{}_aD_R^{\alpha}\int_0^t G(t,s)ds &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}(\int_0^{\tau} G(\tau,s)ds)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t ds\int_s^{\tau}(t-\tau)^{-\alpha}G(\tau,s)d\tau \\
&= \frac{d}{dt}\int_0^t \widetilde{G}(t,s)ds,
\end{aligned}$$

où $\quad \widetilde{G}(t,s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_s^t (t-\eta)^{-\alpha}G(\eta,s)d\eta.$

D'aprés la propriété de dérivation entière d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on a :

$$ {}_aD_R^{\alpha}\int_0^t G(t,s)ds \;=\; \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{G}(t,s)ds + \lim_{s\to t^-}\widetilde{G}(t,s).$$

Par suite :

$$ {}_aD_R^{\alpha}\int_0^t G(t,s)ds \;=\; \int_0^t {}_sD_R^{\alpha}G(t,s)ds + \lim_{s\to t^-}\; {}_sD_R^{\alpha-1}G(t,s). \tag{1.36}$$

Intérprétations géométriques des opérateurs fractionnaires

Les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des intérprétations physiques et géométriques claires, ce qui simplifie leurs usages pour résoudre plusieurs problèmes appliqués. Cependant, il a fallut plus de 300 ans au calcul fractionnaire pour avoir une intérprétation physique et géométrique accéptable [11, 34].

Le manque de ces intérprétations a été reconnu dans plusieurs conférences intérnationales sur le calcul fractionnaire. Ce problème a été inclus dans la liste des questions ouvertes (New Haven USA en 1974,...) .

L'intégration et la dérivation fractionnaire sont des généralisations de notions d'intégration et de dérivation d'ordre entier, incluent les dérivées d'ordre n et les intégrales répétées n fois comme cas particuliers. Pour ceci, il serait intéréssant d'avoir des intérprétations qui fourniront un lien aux intérprétations classiques de différentiation et d'intégration d'ordre entier connues.

Regardons maitenant le comportement d'une fonction particulière, à savoir la fonction $f(t) = t^{\frac{5}{2}}$, vis-à-vis de sa dérivée classique et sa dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha = \frac{3}{2}$.

La dérivée première de $f(t)$ est $f'(t) = \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}$, et sa dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\frac{3}{2}$ est :

$$ {}_0D_R^{\alpha} f(t) \quad = \quad \frac{\Gamma(3.5)}{\Gamma(2)} t, $$

tout cela est regroupé dans la figure suivante :

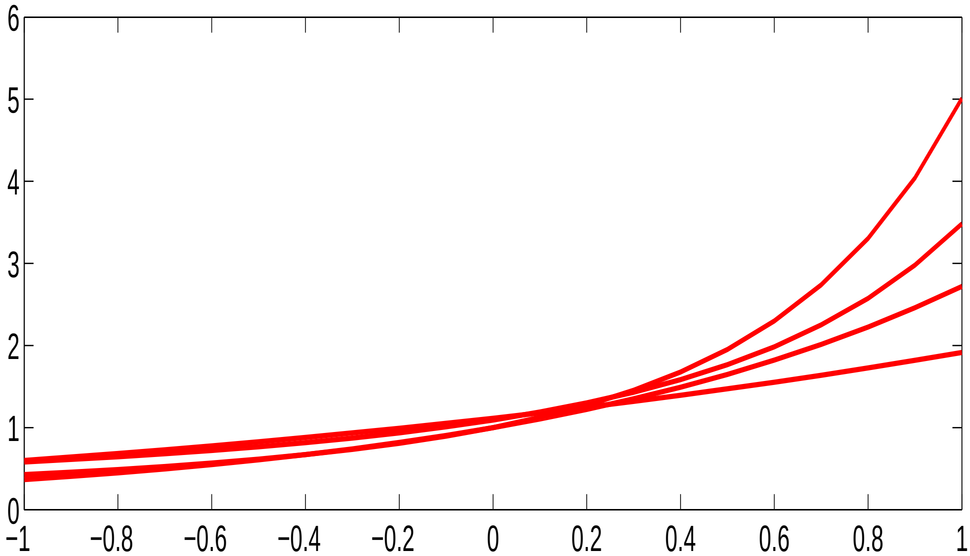

FIGURE 1.2 – comportement de la fonction $t^{\frac{5}{2}}$, sa dérivée première et sa dérivée fractionnaire

En introduisant un autre exemple, nous pouvons complétement changer d'optique :

Considérons maitenant l'exemple de la fonction,

$$ f(t) = t^{\frac{1}{3}}. $$

La dérivée première de $f(t)$ est $f'(t) = \frac{1}{3}t^{\frac{-2}{3}}$, et sa dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\frac{1}{3}$ est :

$$ {}_0D_R^{\alpha} f(t) \quad = \quad \Gamma(\frac{4}{3}). $$

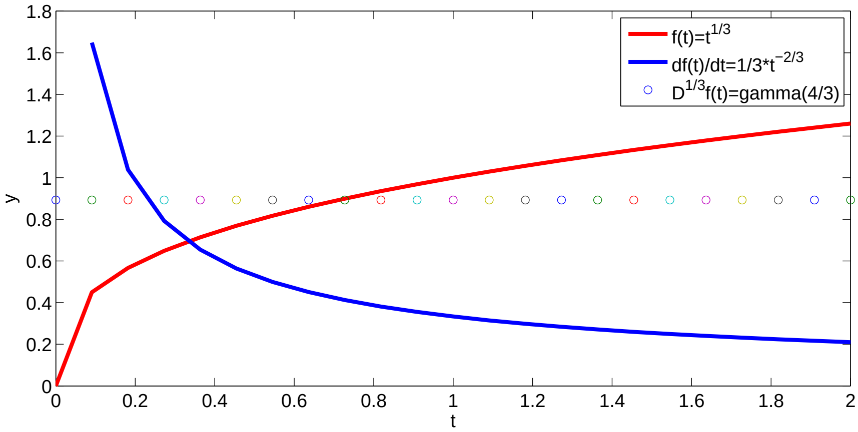

FIGURE 1.3 – comportement de la fonction $t^{\frac{1}{3}}$, sa dérivée première et sa dérivée fractionnaire

Intérprétation géométrique de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est donnée par la formule (1.3) :

$$ {}_0I_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \tag{1.37} $$

peut être réecrite sous la forme :

$$ {}_0I_t^{\alpha} f(t) = \int_0^t f(s) dg_t(s), \tag{1.38} $$

avec

$$ g_t(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big(t^{\alpha} - (t-s)^{\alpha} \Big). $$

Soit t fixé, l'intégrale (1.38) devienne donc une intégrale de Stieltjes.

On peut suivre l'idée de G.L Bullock [13] : considérons les axes s, g et f , dans le plan (s, g) on trace la fonction $g_t(s)$ pour $s \in [0, t]$ et le long de la courbe obtenue on construit une surface "barrière "de la hauteur $f(s)$, alors le bord supérieur de la "barrière" est une ligne tridimensionnelle $(s, g_t(s), f(s))$.

Cette barrière peut être projetée sur deux surfaces (voir figure 1.4) :

$*$ L'aire de la projection de ce "barrière" sur le plan $(s; f)$ correspond à la valeur de l'intégrale

$$ {}_0I_t^1 f(t) = \int_0^t f(s) ds, \quad t \geq 0. $$

$*$ L'aire de la projection du même "barrière" sur le plan $(g; f)$ correspond à la valeur de l'intégrale (1.38) qui est la même valeur de l'intégrale fractionnaire (1.37).

En d'autres termes, notre "barrière" projette deux ombres sur deux murs. La première ombre, qui est sur le mur $(s; f)$, est l'aire de la surface située en dessous de la courbe $f(s)$, lauqelle est une interprétation géométrique standard de l'intégrale $\int_0^t f(s)ds$. L'ombre sur le mur (g ; f) est une interprétaion géométrique de l'intégrale fractionnaire (1.37) pour t fixé.

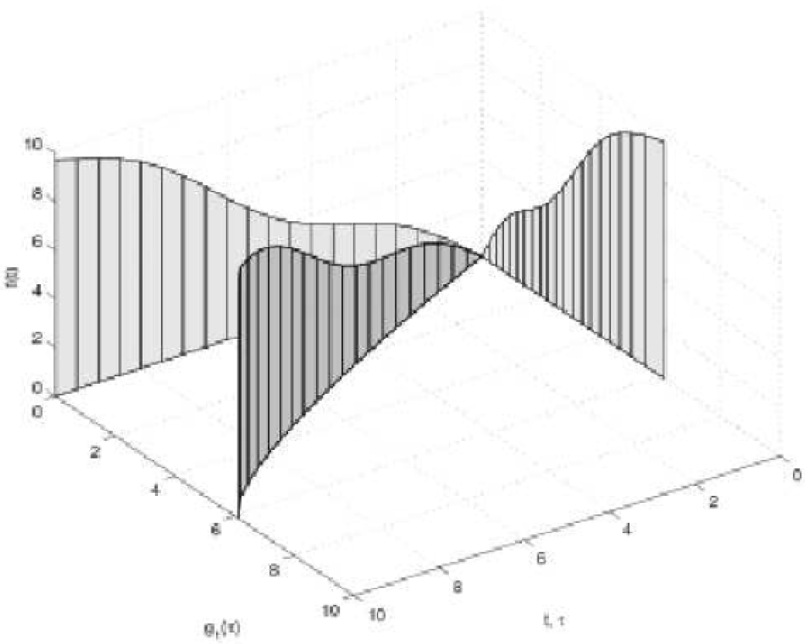

FIGURE 1.4 – La "barrière" et ses ombres ${}_0I_t^1 f(t)$ et ${}_0I_t^{\alpha} f(t)$, pour $\alpha = 0.75$, $f(t) = t + 0.5\sin(t)$, $0 \leq t \leq 10$.

Remarque 1.2.9.

Si $\alpha = 1$, alors $g_t(s) = s$, et les deux ombres sont égaux.
Ceci montre que l'intégrale classique est un cas particulier aussi bien de l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville que du point de vue géométrique.

Chapitre 2

Problème aux limites pour une équation différentielle hybride du premier ordre

Les perturbations quadratiques des équations différentielles non linéaires ont attiré l'attention de plusieurs auteurs. Les équations différentielles perturbées de cette façon sont appelées équations différentielles hybrides. Cette théorie était l'objet, récement, de nombreux travaux. Nous référons les lecteurs aux travaux [22, 23, 19, 21, 41, 53].
La théorie de l'existence de telles équations hybrides peut être développée en utilisant la théorie des points fixes hybrides, voir [22, 23, 19] et puisque la théorie des inégalités différentielles joue un rôle important dans l'étude des solutions extrêmales pour les équations différentielles non linéaires, alors dans ce chapitre nous établissons quelques résultats d'existence et d'unicité et certaines inégalités fondamentales pour ces équations différentielles hybrides.

Dans la suite de ce chapitre, nous étudierons le problème [1] objet de notre premier travail [35] . Pour cela nous introduisons les notations, définitions et préliminaires nécessaires pour cette étude.
Soit $J = [0, T]$, $T > 0$. On note par $X = C(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues de J vers $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|y\| = \sup\{|y(t)|, t \in J\},$$

On note aussi par $Car(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ la classe des fonctions $g : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

1. K.Hilal and A.Kajouni ; Boundary value problems for hybrid differential equations : Mathematical Theory and Modeling, ISSN 2224-5804.

(i) L'application $t \mapsto g(t,x)$ est mesurable pour chaque $x \in \mathbb{R}$,

(ii) L'application $x \mapsto g(t,x)$ est continue pour chaque $t \in J$.

La classe $Car(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ est appelée la classe de Carathéodory des fonctions définie sur $J \times \mathbb{R}$.

De plus, si $g \in Car(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

(iii) pour tout $r > 0$, il existe une fonction $\phi_r \in L_1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}$ avec $|u| \leq r$,

$$|g(t,u)| \leq \phi_r(t) \quad p.p. \quad t \in J,$$

alors, l'application g est dite L_1- Carathéodory.

On munit l'espace $L_1(J;\mathbb{R})$ par la norme qu'on note $\|.\|_{L_1}$ définie par :

$$\|x\|_{L_1} = \int_0^T |x(s)|ds.$$

On note aussi par $AC([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions absolument continues définies sur $[a,b]$ et à valeurs réelles et qui est défini comme suit :

$$AC([a,b],\mathbb{R}) = \{f : \exists \varphi \in L_1([a,b],\mathbb{R}), \quad f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt\},$$

c'est l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables.

2.1 Equation différentielle hybride du premier ordre

Dans cette section, nous considérons le problème aux limites pour l'équation différentielle hybride du premier ordre, (en abréviation PLEDH), suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t,x(t)) \quad p.p. \quad t \in J = [0,T] \\ a\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} = c, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash\{0\})$, $\;g \in Car(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et a, b et c sont des constantes réelles telles que $a + b \neq 0$.

Définition 2.1.1. On appelle solution du PLEDH (2.1) toute fonction $x \in AC(J,\mathbb{R})$ telle que :

(i) la fonction $t \mapsto \frac{x}{f(t,x)}$ est absolument continue pour chaque $x \in \mathbb{R}$,

(ii) x satisfait les équations du problème (2.1).

2.2 Résultat d'existence

Dans cette section, on prouve l'existence de la solution du PLEDH (2.1) dans l'intervalle $J = [0, T]$ sous des conditions mixtes de Lipschitz et Carathéodory.
On définit la multiplication dans X par :

$$(xy)(t) = x(t)y(t), \quad \text{pour} \quad x, y \in X.$$

Il est clair que $X = C(J; \mathbb{R})$ est une algèbre de Banach par rapport à la norme et multiplication définie ci-dessus.
Nous aurons besoin du théorème de point fixe hybride de Dhage suivant :

Théorème 2.2.1. [20]
Soit S un sous ensemble fermé, borné et convexe d'une algèbre de Banach X , et soient $A : X \to X$ et $B : S \to X$ deux opérateurs tels que :
(a) A est Lipschitzien de constante de Lipschitz α ,
(b) B est complétement continu,
(c) $x = AxBy \Rightarrow x \in S$ pour tout $y \in S$.
Alors l'équation

$$x = AxBx$$

admet au moins une solution à condition que $\alpha M < 1$, où $M = \|B(S)\|$,
où $\|B(S)\| = sup\{B(x); x \in S\}$.

Dans le but d'avoir des résultats d'existence concernant le problème (2.1), on considère les hypothèses suivantes :

(H_0) La fonction $x \longmapsto \frac{x}{f(t,x)}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ pour presque tout $t \in J$.
(H_1) Il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$| f(t, x) - f(t, y) | \leq L|x - y|,$$

pour tout $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{R}$.
(H_2) Il existe une fonction $h \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$, telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|g(t, x)| \leq h(t) \quad p.p. \quad t \in J,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Lemme 2.2.1. Supposons que l'hypothèse (H_0) est vérifiée et soient a, b et c des constantes réelles telles que $a + b \neq 0$. Alors pour chaque $h \in L^1(J; \mathbb{R})$:

La fonction $x \in AC(J;\mathbb{R})$ est solution du PLEDH

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{x(t))}{f(t,x(t))}\right) = h(t) \quad p.p. \quad t \in J \\ a\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} = c, \end{cases} \tag{2.2}$$

si, et seulement si, x satisfait l'équation intégrale hybride

$$x(t) = \Big[f(t,x(t)\Big]\left(\int_0^t h(s)ds - \frac{1}{a+b}\Big(b\int_0^T h(s)ds - c\Big)\right). \tag{2.3}$$

Preuve.

Soit $h \in L^1(J;\mathbb{R})$. Supposons que x est solution du problème (2.3).

Par définition, $\frac{x}{f(t,x)}$ est continue, alors par dérivation, nous obtenons la première équation dans (2.2).

Substituons $t = 0$ et $t = T$ dans (2.3), on obtient

$$\frac{x(0)}{f(0,x(0))} = \frac{-1}{a+b}\Big(b\int_0^T h(s)ds - c\Big),$$

$$\frac{x(T)}{f(T,x(T))} = \int_0^T h(s)ds - \frac{1}{a+b}\Big(b\int_0^T h(s)ds - c\Big).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} a\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} &= \frac{-ab}{a+b}\int_0^T h(s)ds + \frac{ac}{a+b} \\ &+ b\int_0^T h(s)ds - \frac{b^2}{a+b}\int_0^T h(s)ds \\ &+ \frac{bc}{a+b}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$a\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} = c.$$

Inversement, soit $h \in L^1(J,\mathbb{R})$. Par définition, $\frac{x(t)}{f(t,x(t))}$ est absolument continue, donc elle est presque partout différentielle.

D'où $\frac{d}{dt}\frac{x(t)}{f(t,x(t))}$ est Lebesgue intégrable sur J.

Intégrons $\frac{d}{dt}\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = h(t)$ entre 0 et t, nous obtenons $\frac{x(t)}{f(t,x(t))} = \frac{x(0)}{f(0,x(0))} + \int_0^t h(s)ds$.

Alors

$$b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} = b\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\int_0^T h(s)ds.$$

Donc

$$a\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} = (a+b)\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\int_0^T h(s)ds.$$

Ce qui implique

$$\frac{x(0)}{f(0,x(0))} = \frac{1}{a+b}\Big(c - b\int_0^T h(s)ds\Big).$$

Par conséquent

$$x(t) = \Big[f(t,x(t)\Big]\Bigg(\int_0^t h(s)ds - \frac{1}{a+b}\Big(b\int_0^T h(s)ds - c\Big)\Bigg).$$

□

Théorème 2.2.2.

Supposons que les hypothèses $(H_0)-(H_2)$ sont vérifiées et soient a, b et c des constantes réelles avec $a+b \neq 0$. Si

$$L\Bigg(\|h\|_{L^1}\Big(1+\frac{|b|}{|a+b|}\Big)+\frac{|c|}{|a+b|}\Bigg) < 1, \tag{2.4}$$

alors, le PLEDH (2.1) admet au moins une solution définie sur J.

Preuve.

On définit le sous ensemble S_1 de X par :

$$S_1 = \Big\{x \in X/\|x\| \leq N_1\Big\}$$

où

$$N_1 = \frac{F_0\Big(\|h\|_{L^1}(1+\frac{|b|}{|a+b|})+\frac{|c|}{|a+b|}\Big)}{1-L\Big(\|h\|_{L^1}(1+\frac{|b|}{|a+b|})+\frac{|c|}{|a+b|}\Big)}$$

et $\quad F_0 = \sup_{t\in J}|f(t,0)|.$

Il est clair que S_1 satisfait les hypothèses du Théorème 2.2.1.

Donc par application du lemme 2.2.1, l'équation (2.1) est équivalente à l'équation intégrale hybride

$$x(t) = \Big[f(t,x(t)\Big]\Bigg(\int_0^t g(s,x(s))ds - \frac{1}{a+b}\Big(b\int_0^T g(s,x(s))ds - c\Big)\Bigg). \tag{2.5}$$

Définissons les deux opérateurs $A_1 : X \longrightarrow X$ et $B_1 : S_1 \longrightarrow X$ par

$$A_1x(t) = f(t,x(t)), \quad t \in J \tag{2.6}$$

et

$$B_1x(t) = \int_0^t g(s,x(s))ds - \frac{1}{a+b}\Big(b\int_0^T g(s,x(s))ds - c\Big). \tag{2.7}$$

Alors l'équation intégrale hybride (2.5) peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = A_1x(t)B_1x(t), \quad t \in J. \tag{2.8}$$

Montrons alors que les opérateurs A_1 et B_1 satisfont les conditions du Théorème 2.2.1.

Etape1, Soit x et $y \in X$. D'aprés l'hypothèse (H_1),

$$|A_1x(t) - A_1y(t)| = |f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \leq L|x(t)-y(t)| \leq L\|x-y\|$$

pour tout $t \in J$. Passons au sup sur t,

$$\|A_1x - A_1y\| \leq L\|x - y\|$$

pour tous $x, y \in X$.

Etape 2, L'opérateur B_1 est continu sur S_1.

Soit $(x_n)_n$ une suite dans S_1 convergente vers un point $x \in S$. Alors par le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t g(s, x_n(s))ds = \int_0^t \lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s))ds$$

et

$$\lim_{n\to\infty} b \int_0^T g(s, x_n(s))ds = b \int_0^T \lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s))ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} B_1x_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^t g(s, x_n(s))ds - \frac{1}{a+b}\Big(b \int_0^T g(s, x_n(s))ds - c \Big) \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^t g(s, x_n(s))ds - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a+b}\Big(b \int_0^T g(s, x_n(s))ds - c \Big) \\
&= \int_0^t g(s, x(s))ds - \frac{1}{a+b}\Big(b \int_0^T g(s, x(s))ds - c \Big) \\
&= B_1x(t),
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Ce qui montre que B_1 est un opérateur continu sur S_1.

Etape 3, B_1 est un opérateur compact dans S_1.

Commençons par voir que $B_1(S_1)$ est sous ensemble borné dans X.

Soit $x \in S_1$ alors, par l'hypothèse (H_2) et pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|B_1x(t)| &\leq \int_0^t |g(s, x(s))|ds + \frac{1}{a+b}\Big(b \int_0^T |g(s, x(s))|ds + |c| \Big) \\
&\leq \int_0^t |h(s)|ds + \frac{|b|}{|a+b|} \int_0^T |h(s)|ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \|h\|_{L^1}\Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|B_1x\| \leq \|h\|_{L^1}\Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) + \frac{|c|}{|a+b|},$$

pour tout $x \in S_1$.

Ce qui montre que B_1 est uniformément borné sur S_1.

Montrons maintenant que $B_1(S_1)$ est un sous ensemble équicontinu dans X.

Posons $\quad p_1(t) = \int_0^t h(s)ds.$

Soit t_1 et $t_2 \in J$, alors pour tout $x \in S$ on a :

$$\begin{aligned}\Big|B_1x(t_1) - B_1x(t_2)\Big| &= \Big|\int_0^{t_1} g(s,x(s))ds - \int_0^{t_2} g(s,x(s))ds\Big| \\ &\leq \Big|\int_{t_1}^{t_2} |g(s,x(s))|ds\Big| \\ &\leq |p_1(t_1) - p_1(t_2)|.\end{aligned}$$

Puisque p_1 est continue sur le compact J, elle est donc uniformément continue.

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \quad : \quad |t_1 - t_2| < \eta \Longrightarrow |B_1x(t_1) - B_1x(t_2)| < \varepsilon,$$

pour tous $t_1, t_2 \in J$ et pour tout $x \in X$.

Ce qui montre que $B_1(S_1)$ est équicontinu dans X.

Alors par le Théorème d'Arzelà-Ascoli, B_1 est un opérateur continu et compact sur S_1.

Etape 4, L'hypothèse (c) du Théorème 2.2.1 est satisfaite. En effet, soit $x \in X$ et $y \in S_1$ tels que $x = A_1xB_1y$. Alors,

$$\begin{aligned}|x(t)| &= |A_1x(t)||B_1y(t)| \\ &\leq \Big|f(t,x(t))\Big|\Big|\int_0^t g(s,x(s))ds - \frac{1}{a+b}\Big(b\int_0^T g(s,x(s))ds - c\Big)\Big| \\ &\leq \Big[|f(t,x(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)|\Big]\Big(\int_0^T h(s)ds + \frac{|b|}{|a+b|}\int_0^T h(s)ds + \frac{|c|}{|a+b|}\Big) \\ &\leq \Big(L|x(t)| + F_0\Big)\Big(\|h\|_{L^1}\Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) + \frac{|c|}{|a+b|}\Big).\end{aligned}$$

Donc,

$$\Big|x(t)\Big| - L\Bigg(\|h\|_{L^1}\Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) + \frac{|c|}{|a+b|}\Bigg)|x(t)| \leq F_0\Bigg(\|h\|_{L^1}\Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) + \frac{|c|}{|a+b|}\Bigg).$$

D'où

$$|x(t)| \leq \frac{F_0\Big(\|h\|_{L^1}\Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) + \frac{|c|}{|a+b|}\Big)}{1 - L\Big(\|h\|_{L^1}\Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) + \frac{|c|}{|a+b|}\Big)}.$$

Passant au sup sur t,

$$\|x\| \leq \frac{F_0\Big(\|h\|_{L^1}\Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) + \frac{|c|}{|a+b|}\Big)}{1 - L\Big(\|h\|_{L^1}\Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) + \frac{|c|}{|a+b|}\Big)} = N.$$

Donc $x \in S_1$.

Finallement, on a :

$$M = \|B_1(S_1)\| = \sup\{\|B_1x\| : x \in S_1\} \leq \|h\|_{L^1}\Big(1 + \Big|\frac{b}{a+b}\Big|\Big) + \frac{|c|}{|a+b|}$$

et alors,

$$\alpha M \leq \Big(\|h\|_{L^1}\Big(1+\mid \frac{b}{a+b}\mid\Big)+\frac{|c|}{|a+b|}\Big)<1.$$

Les hypothèses du Théorème 2.2.1 étant vérifiées, alors l'équation : $A_1xB_1x = x$ admet au moins une solution dans S_1.

Il en résulte que le PLEDH (2.1) admet une au moins une solution définie sur J. □

2.3 Inégalités differentielles hybrides

Les inégalités différentielles sont utiles pour prouver l'existence des solutions extrêmales des équations différentielles ordinnaires et les équations différentielles hybrides. Pour plus de détails sur la théorie des inégalités différentielles strictes et non strictes reliées aux équations différentielles ordinaires voir par exemple [8, 23, 43].

Nous discutons dans le théorème suivant un résultat fondamental relié à l'inégalité différentielle stricte relative au PLEDH (2.1).

Nous nous basons sur le théorème suivant concernant l'inégalié différentielle hybride stricte de Dhage :

Théorème 2.3.1. [23]

On suppose que l'hypothèse (H_0) est vérifiée et qu'il existe des fonctions $y, z \in [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et localement hölderienne telles que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\Big) &\leq g(t,y(t)) \quad p.p. \quad t\in J,\\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{z(t)}{f(t,z(t))}\Big) &\geq g(t,z(t)) \quad p.p. \quad t\in J \end{aligned}$$

et l'une de ces inégalités est stricte. Alors :

$y(0) < z(0)$ implique que $y(t) < z(t)$ pour tout $t \in J$.

Théorème 2.3.2.

Soient a, b et c des constantes réelles avec $a + b \neq 0$, On suppose que l'hypothèse (H_0) est vérifiée et qu'il existe des fonctions $y, z \in [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et localement hölderienne telles que :

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\Big) \leq g(t,y(t)) \quad p.p. \quad t\in J \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{z(t)}{f(t,z(t))}\Big) \geq g(t,z(t)) \quad p.p. \quad t\in J, \tag{2.10}$$

l'une des inégalités est stricte. Si de plus $a > 0$, $b < 0$ et $y(T) < z(T)$, alors

$$a\frac{y(0)}{f(0,y(0))} + b\frac{y(T)}{f(T,y(T))} < a\frac{z(0)}{f(0,z(0))} + b\frac{z(T)}{f(T,z(T))} \tag{2.11}$$

implique

$$y(t) < z(t) \tag{2.12}$$

pour tout $t \in J$.

Preuve.

On a

$$a\frac{y(0)}{f(0,y(0))} + b\frac{y(T)}{f(T,y(T))} < a\frac{z(0)}{f(0,z(0))} + b\frac{z(T)}{f(T,z(T))},$$

ceci implique : $\quad a(\frac{y(0)}{f(0,y(0))} - \frac{z(0)}{f(0,z(0))}) < b(\frac{z(T)}{f(T,z(T))} - \frac{y(T)}{f(T,y(T))})$.

Puisque $b < 0$, $y(T) < z(T)$, on obtient grâce à l'hypothèse (H_0) : $\frac{z(T)}{f(T,z(T))} - \frac{y(T)}{f(T,y(T))} > 0$.

Ce qui montre que $\frac{y(0)}{f(0,y(0))} - \frac{z(0)}{f(0,z(0))} < 0$.

Comme $a > 0$, alors $y(0) < z(0)$.

Par application du Théorème 2.3.1 on obtient $y(t) < z(t)$, pour tout $t \in J$ □

Notre résultat qui suit concerne les inégalités différentielles hybrides non strictes relatives au PLEDH (2.1).

Théorème 2.3.3.

Sous les hypothèses du théorème précédent avec les inégalités (2.9) et (2.10). On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$g(t,x_1) - g(t,x_2) \leq M\Big(\frac{x_1}{f(t,x_1)} - \frac{x_2}{f(t,x_2)}\Big) \qquad p.p. \quad t \in J \tag{2.13}$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 \geq x_2$. Alors

$$a\frac{y(0)}{f(0,y(0))} + b\frac{y(T)}{f(T,y(T))} < a\frac{z(0)}{f(0,z(0))} + b\frac{z(T)}{f(T,z(T))}$$

implique $\quad y(t) < z(t)$ pour tout $t \in J$.

Preuve.

On pose

$$\frac{z_\varepsilon(t)}{f(t,z_\varepsilon(t))} = \frac{z(t)}{f(t,z(t))} + \varepsilon e^{2Mt},$$

pour $\varepsilon > 0$.

On pose $Z_\varepsilon(t) = \frac{z_\varepsilon(t)}{f(t,z_\varepsilon(t))}$ et $Z(t) = \frac{z(t)}{f(t,z(t))}$ pour $t \in J$.

Donc

$$Z_\varepsilon(t) > Z(t) \Longrightarrow z_\varepsilon(t) > z(t).$$

Puisque $g(t,x_1)-g(t,x_2) \leq M\Big(\frac{x_1}{f(t,x_1)}-\frac{x_2}{f(t,x_2)}\Big)$ et $\frac{d}{dt}\big(\frac{z(t)}{f(t,z(t))}\Big) \geq g(t,z(t))$ pour tout $t \in J$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Z_\varepsilon(t) &= \frac{d}{dt}Z(t)+2M\varepsilon e^{2Mt}\\
&\geq g(t,z(t))+2M\varepsilon e^{2Mt}\\
&\geq g(t,z_\varepsilon(t))-M(Z_\varepsilon(t)-Z(t))+2M\varepsilon e^{2Mt}\\
&\geq g(t,z_\varepsilon(t))-M\varepsilon e^{2Mt}+2M\varepsilon e^{2Mt}\\
&> g(t,z_\varepsilon(t)).
\end{aligned}$$

Aussi, on a $z_\varepsilon(0)>z(0)\geq y(0)$.

Donc, par application du Théorème 2.3.1 on a $y(t)<z_\varepsilon(t)$ pour tout $t \in J$.

Par passage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on a $y(t) \leq z(t)$ pour tout $t \in J$. □

2.4 Existence des solutions maximale et minimale

Dans cette section, nous allons prouver l'existence des solutions maximale et minimale du PLEDH (2.1) sur $J=[0,T]$. On introduit la définition suivante :

Définition 2.4.1. Une solution r du PLEDH (2.1) est dite maximale si pour toute autre solution x du PLEDH (2.1) on a $x(t) \leq r(t)$, pour tout $t \in J$. Une solution ρ du PLEDH (2.1) est dite minimale si $\rho(t) \leq x(t)$, pour tout $t \in J$ où x est une solution du PLEDH (2.1) définie sur J.

Nous discutons seulement le cas de solution maximale. Le cas de la solution minimale s'obtient avec des arguments similaires.

Soit $\varepsilon>0$, considérons le problème suivant

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\Big(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\Big)=g(t,x(t))+\varepsilon \quad p.p. \quad t\in J=[0,T]\\ a\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+b\frac{x(T)}{f(T,x(T))}=c+\varepsilon,\end{cases} \tag{2.14}$$

où $f \in C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R}\backslash\{0\})$ et $g \in Car(J\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Un théorème d'existence pour le PLEDH (2.14) peut être énoncé comme suit :

Théorème 2.4.1. On suppose que les hypothèses $(H_0)-(H_2)$ sont vérifiées et soient a, b et c des constantes réelles avec $a+b\neq 0$. Supposons que l'inégalité (2.4) est vérifiée. Alors pour tout $\varepsilon>0$, le PLEDH (2.14) admet une solution définie sur J.

Preuve.

Puisque

$$L\Bigg(\|h\|_{L^1}(1+\frac{|b|}{|a+b|})+\frac{|c|}{|a+b|}\Bigg)<1,$$

alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que :

$$L\left((\|h\|_{L^1} + \varepsilon T)(1 + \frac{|b|}{|a+b|}) + \frac{|c|}{|a+b|} \right) < 1,$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Maintenant le reste de la preuve est similaire à la preuve du Théorème 2.2.2 □

Pour la solution maximale du PLEDH (2.1) on énonce le théorème suivant :

Théorème 2.4.2.
On suppose que les hypothèses $(H_0) - (H_2)$ sont vérifiées ainsi que les conditions du Théorème 2.3.2. En outre, sous la condition (2.4), le PLEDH (2.1) admet une solution maximale définie sur J.

Preuve.
Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite décroissante de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ où ε_0 est réel positif qui vérifie

$$L\left((\|h\|_{L^1} + \varepsilon_0 T)(1 + \frac{|b|}{|a+b|}) + \frac{|c|}{|a+b|} \right) < 1.$$

Le nombre ε_0 existe en vue de l'inégalité (2.4). Par le Théorème 2.4.1, il existe une solution $r(t, \varepsilon_n)$ définie sur J du PLEDH

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t, x(t)) + \varepsilon_n \quad p.p. \quad t \in J \\ a\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} = c + \varepsilon_n. \end{cases} \tag{2.15}$$

Alors pour chaque solution u du PLEDH (2.1) satisfait

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{u(t)}{f(t, u(t))}\Big) \leq g(t, u(t)),$$

et toute autre solution du problème auxiliaire (2.15) satisfait

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{r(t, \varepsilon_n)}{f(t, r(t, \varepsilon_n))}\Big) = g(t, r(t, \varepsilon_n)) + \varepsilon_n > g(t, r(t, \varepsilon_n))$$

où

$$a\frac{u(0)}{f(0, u(0))} + b\frac{u(T)}{f(T, u(T))} = c \leq c + \varepsilon_n = a\frac{r(0, \varepsilon_n)}{f(0, r(0, \varepsilon_n))} + b\frac{r(T, \varepsilon_n)}{f(T, r(T, \varepsilon_n))}.$$

Par le Théorème 2.3.2, on déduit que :

$$u(t) \leq r(t, \varepsilon_n) \tag{2.16}$$

pour tout $t \in J$ et tout $n \in IN$.

Puisque

$$c+\varepsilon_2 = a\frac{r(0,\varepsilon_2)}{f(0,r(0,\varepsilon_2))} + b\frac{r(T,\varepsilon_2)}{f(T,r(T,\varepsilon_2))} \leq a\frac{r(0,\varepsilon_1)}{f(0,r(0,\varepsilon_1))} + b\frac{r(T,\varepsilon_1)}{f(T,r(T,\varepsilon_1))} = c+\varepsilon_1$$

alors par le Théorème 2.3.2, on a $r(t,\varepsilon_2) \leq r(t,\varepsilon_1)$.

Donc $r(t,\varepsilon_n)$ est une suite décroissante de nombre réels, et la limite

$$r(t) = \lim_{n\to\infty} r(t,\varepsilon_n) \tag{2.17}$$

existe.

On montre que la convergence dans (2.17) est uniforme sur J. Pour finir, il suffit de prouver que la suite $r(t,\varepsilon_n)$ est équicontinue dans $C(J,R)$.

Soient t_1 et t_2 deux éléments de J avec $t_1 < t_2$. Alors,

$$\begin{aligned}
|r(t_1,\varepsilon_n) - r(t_2,\varepsilon_n)| &= \Bigg|[f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))]\Bigg(\int_0^{t_1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds \\
&- \frac{1}{a+b}\Big(b\int_0^T(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds - c - \varepsilon_n\Big)\Bigg) \\
&- [f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))]\Bigg(\int_0^{t_2}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds \\
&- \frac{1}{a+b}\Big(b\int_0^T(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds - c - \varepsilon_n\Big)\Bigg)\Bigg|
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
|r(t_1,\varepsilon_n) - r(t_2,\varepsilon_n)| &= \Bigg|[f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))]\Big(\int_0^{t_1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)\Big)ds \\
&- [f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))]\Big(\int_0^{t_2}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds\Big) \\
&- \Big(f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n)) - f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))\Big)\frac{1}{a+b} \\
&\times \Big(b\int_0^T(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds - c - \varepsilon_n\Big)\Bigg|.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|r(t_1,\varepsilon_n)-r(t_2,\varepsilon_n)| &\leq \Big|[f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))]\Big(\int_0^{t_1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds\Big)\\
&- [f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))]\Big(\int_0^{t_1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds\Big)\Big|\\
&+ \Big|\Big(f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))-f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n)\Big)\frac{1}{a+b}\\
&\times \Big(b\int_0^T(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds-c-\varepsilon_n\Big)\Big|\\
&+ \Big|[f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))]\Big(\int_0^{t_1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds\Big)\\
&- [f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))]\Big(\int_0^{t_2}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds\Big)\Big|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq \Big|f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))-f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))\Big|\Big[(\|h\|_{L_1}+\varepsilon_n)T+\frac{|b|(\|h\|_{L_1}+\varepsilon_n)T}{|a+b|}+\frac{|c|+\varepsilon_n}{|a+b|}\Big]\\
+F\Big[|p(t_1)-p(t_2)|+|t_1-t_2|\varepsilon_n\Big]
\end{aligned}$$

où $\quad F=\sup\limits_{(t,x)\in J\times[-N,N]}|f(t,x)| \quad$ et $\quad p(t)=\int_0^t h(s)ds.$

Puisque f est continue sur le compact $J\times[-N,N]$ alors, elle est uniformément continue. Donc $\Big|f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))-f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))\Big|\longrightarrow 0$ quand $t_1\longrightarrow t_2$, uniformémént pour tout $n\in N$.

De la même manière, puisque la fonction p_1 est continue sur le compact J, elle est uniformément continue et $|p(t_1)-p(t_2)|\longrightarrow 0$ quand $t_1\longrightarrow t_2$.

Par conséquent, $|r(t_1,\varepsilon_n)-r(t_2,\varepsilon_n)|\longrightarrow 0$ lorsque $t_1\longrightarrow t_2$ uniformément pour tout $n\in N$. Donc, $r(t,\varepsilon_n)\longrightarrow r(t)$ lorsque $n\longrightarrow\infty$ pour tout $t\in J$.

Montrons maintenant que la fonction $r(t)$ est une solution du PLEDH (2.1).

Puisque $r(t,\varepsilon_n)$ est une solution du PLEDH (2.15), on a

$$\begin{aligned}
r(t,\varepsilon_n) &= [f(t,r(t,\varepsilon_n))]\Bigg(\int_0^t(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds\\
&- \frac{1}{a+b}\Big(b\int_0^T(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds-c-\varepsilon_n\Big)\Bigg),
\end{aligned}$$

pour tout $t\in J$. Par passage à la limite quand $n\longrightarrow\infty$ on aura

$$r(t)=\Big[f(t,r(t))\Big]\Bigg(\int_0^t g(s,r(s))ds-\frac{1}{a+b}\Big(b\int_0^T g(s,r(s))ds-c\Big)\Bigg),$$

pour tout $t\in J$. Donc la fonction r est une solution du PLEDH (2.1) sur J.

Finallement et de l'inégalité (2.16), il s'ensuit que $u(t)\leq r(t)$ pour tout $t\in J$. D'où PLEDH (2.1) admet une solution maximale définie sur J. □

2.5 Théorèmes de comparison

L'objet principale des inégalités différentielles est d'estimer une borne pour l'ensemble des solutions d'une inégalité différentielle reliée à une équation différentielle donnée. Dans cette section, on prouve que la solution maximale et minimale servent comme bornes pour l'ensemble des solutions reliées à l'inégalité différentielle qui provient du PLEDH (2.1).

Théorème 2.5.1.
Supposons que les hypothèses $(H_0) - (H_2)$ et la condition (2.4) sont vérifiées et soient a, b et c des constantes réelles avec $a + b \neq 0$. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$g(t, x_1) - g(t, x_2) \leq M\Big(\frac{x_1}{f(t, x_1)} - \frac{x_2}{f(t, x_2)}\Big) \quad p.p. \quad t \in J,$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 \geq x_2$. Si de plus, il existe une fonction $u \in AC(J, R)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(\frac{u(t)}{f(t,u(t))}\Big) \leq g(t, u(t)) \quad p.p. \quad t \in J \\ a\frac{u(0)}{f(0,u(0))} + b\frac{u(T)}{f(T,u(T))} \leq c. \end{cases} \tag{2.18}$$

Alors,

$$u(t) \leq r(t) \tag{2.19}$$

pour tout $t \in J$ où r est la solution maximale du PLEDH (2.1).

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par le Théorème 2.4.2, $r(t, \varepsilon)$ est la solution maximale du PLEDH (2.14) et la limite

$$r(t) \quad = \quad \lim_{\varepsilon \to 0} r(t, \varepsilon) \tag{2.20}$$

est uniforme sur J et la foncion r est la solution maximale du PLEDH (2.1). Par conséquent

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(\frac{r(t,\varepsilon)}{f(t,r(t,\varepsilon))}\Big) = g(t, r(t, \varepsilon)) + \varepsilon \quad p.p. \quad t \in J \\ a\frac{r(0,\varepsilon)}{f(0,r(0,\varepsilon))} + b\frac{r(T,\varepsilon)}{f(T,r(T,\varepsilon))} = c + \varepsilon, \end{cases} \tag{2.21}$$

et par suite

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(\frac{r(t,\varepsilon)}{f(t,r(t,\varepsilon))}\Big) > g(t, r(t, \varepsilon)) \quad p.p. \quad t \in J \\ a\frac{r(0,\varepsilon)}{f(0,r(0,\varepsilon))} + b\frac{r(T,\varepsilon)}{f(T,r(T,\varepsilon))} > c. \end{cases} \tag{2.22}$$

Maintenant une application du Théorème 2.3.3 aux inégalités (2.18) et (2.22), mène à $u(t) < r(t, \varepsilon)$ pour tout $t \in J$. Et en vue de la limite (2.20), l'inégalité (2.19) est satisfaite. □

Théorème 2.5.2.
Supposons que les hypothèses $(H_0)-(H_2)$ et la condition (2.4) sont vérifiées et soient a, b et c des constantes réelles avec $a+b \neq 0$. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ tele que

$$g(t,x_1) - g(t,x_2) \leq M\Big(\frac{x_1}{f(t,x_1)} - \frac{x_2}{f(t,x_2)}\Big) \quad p.p. \quad t \in J,$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 \geq x_2$. Si de plus il existe une fonction $v \in AC(J,R)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(\frac{v(t)}{f(t,v(t))}\Big) \geq g(t,v(t)) \quad p.p. \quad t \in J \\ a\frac{v(0)}{f(0,v(0))} + b\frac{v(T)}{f(T,v(T))} > c, \end{cases}$$

alors,

$$\rho(t) \leq v(t),$$

pour tout $t \in J$ où ρ est la solution minimale du PLEDH (2.1) .

Notons que le Théorème 2.5.1 est utile pour prouver la bornitude et l'unicité de la solution du PLEDH (2.1). Un résultat dans ce sens est le suivant :

Théorème 2.5.3.
Supposons que les hypothèses $(H_0)-(H_2)$ et la condition (2.4) sont vérifiées et soient a, b et c des constantes réelles avec $a+b \neq 0$. Supposons de plus qu'il existe une fonction $G : J \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

$$g(t,x_1) - g(t,x_2) \leq G\Big(t, \frac{x_1}{f(t,x_1)} - \frac{x_2}{f(t,x_2)}\Big) \quad p.p. \quad t \in J,$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$. Si la fonction nulle est l'unique solution de l'équation :

$$m'(t) = G(t,m(t)) \quad p.p. \quad t \in J, \quad am(0) + bm(T) = 0 \tag{2.23}$$

alors, le PLEDH (2.1) admet une solution unique définie sur J.

Preuve.
Par le Théorème 2.2.2, le PLEDH (2.1) admet une solution définie sur J.
Supposons qu'il existe deux solutions u_1 et u_2 du PLEDH (2.1) avec $u_1 > u_2$.
Définissons la fonction $m : J \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$m(t) = \frac{u_1(t)}{f(t,u_1(t))} - \frac{u_2(t)}{f(t,u_2(t))}.$$

En vu de (H_0), on conclût que $m(t) > 0$.

On a aussi

$$\begin{aligned} m'(t) &= \frac{d}{dt}\Big[\frac{u_1(t)}{f(t,u_1(t))}\Big] - \frac{d}{dt}\Big[\frac{u_2(t)}{f(t,u_2(t))}\Big] \\ &\leq g(t,u_1(t)) - g(t,u_2(t)) \\ &\leq G\Big(t, \frac{u_1}{f(t,u_1(t))} - \frac{u_2(t)}{f(t,u_2(t))}\Big) \\ &= G(t,m(t)), \end{aligned}$$

pour presque tout $t \in J$.

Et puisque $m(0) = \frac{u_1(0)}{f(t,u_1(0))} - \frac{u_2(0)}{f(t,u_2(0))}$ et $m(T) = \frac{u_1(T)}{f(t,u_1(T))} - \frac{u_2(T)}{f(t,u_2(T))}$

et

$$a\frac{u_1(0)}{f(t,u_1(0))} + b\frac{u_1(T)}{f(t,u_1(T))} = a\frac{u_2(0)}{f(t,u_2(0))} + b\frac{u_2(T)}{f(t,u_2(T))},$$

on a donc

$$am(0) + bm(T) = 0.$$

Appliquons le Théorème 2.5.1 avec $f(t,x) = 1$ et $c = 0$ nous obtenons $m(t) \leq 0$ pour tout $t \in J$ où la fonction nulle est la seule solution de l'équation (2.23). Maintenant $m(t) \leq 0$ est en contradiction avec $m(t) > 0$. Alors $u_1 = u_2$. □

Chapitre 3

Problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire hybride

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires. Ils peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie. Il a été prouvé que dans de nombreux cas, ces modèles fournissent des résultats plus appropriés que les modèles analogues avec des dérivées entières. En conséquence, l'étude des équations différentielles fractionnaires gagne beaucoup d'importance et d'attention. Pour plus de détails, on peut par exemple voir les références [2, 3, 4, 7, 10, 42, 44, 48, 54, 55]...
Dans ce chapitre et en s'inspirant du problème précédent et des travaux [12, 54], nous étudions le problème ci dessous, objet du travail [36] , auquel on a considéré le problème aux limites pour l'équation différentielle hybride d'ordre fractionnaire, (en abréviation PLEDHF), suivant [2] :

$$\begin{cases} {}_0D_c^{\alpha}\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t,x(t)) \quad p.p. \quad t \in J = [0,T] \\ a\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} = c \end{cases} \tag{3.1}$$

où $0 < \alpha < 1$, $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash\{0\})$, $g \in Car(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et a, b et c sont des constantes réelles telles que : $a + b \neq 0$ et ${}_0D_c^{\alpha}$ est l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo.

On appelle solution du PLEDHF (3.1) toute fonction $x \in C(J, \mathbb{R})$ telle que :
(i) la fonction $t \mapsto \frac{x}{f(t,x)}$ est absolument continue pour chaque $x \in \mathbb{R}$,
(ii) x satisfait les équations (3.1).

2. Khalid Hilal and Ahmed Kajouni ; Boundary value problems for hybrid differential equations with fractional order : Adv.Diff. Eq. SpringerOpen Journal :183 DOI 10.1186/s13662-015-0530-7.

3.1 Résultat d'existence

Dans cette section, on prouve l'existence de la solution du PLEDHF (3.1) dans l'intervalle fermé borné $J = [0, T]$ sous les conditions de Carathéodory et de Lipschitz.

On considère les hypothèses suivantes :

(H_0) La fonction $x \longmapsto \frac{x}{f(t,x)}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ presque pour tout $t \in J$.

(H_1) Il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$| f(t,x) - f(t,y) | \leq L|x-y|,$$

pour tout $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

(H_2) Il existe une fonction $h \in L^1(J, \mathbb{R})$ telle que

$$|g(t,x)| \leq h(t) \quad p.p. \quad t \in J,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.1.1.
Supposons que l'hypothèse (H_0) est vérifiée et soient a, b et c des constantes telles que $a + b \neq 0$. Alors, pour tout $h \in L^1(J; \mathbb{R})$, la fonction $x \in C(J, \mathbb{R})$ est solution du PLEDHF :

$$\begin{cases} {}_0D_c^{\alpha}\left(\frac{x(t))}{f(t,x(t))}\right) = h(t) \quad p.p. \quad t \in J = [0,T] \\ a\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} = c \end{cases} \tag{3.2}$$

si, et seulement si, x satisfait l'équation intégrale hybride :

$$x(t) = [f(t,x(t)]\Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \frac{1}{a+b}\bigg(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\bigg)\Bigg). \tag{3.3}$$

Preuve.
Supposons que x est une solution du problème (3.3) . Appliquons l'opérateur fractionnaire de Caputo d'ordre α, alors on obtient la première équation dans (3.2). Substituons $t = 0$ et $t = T$ dans (3.3) nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{x(0)}{f(0,x(0))} &= \frac{-1}{a+b}\bigg(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\bigg) \\ \frac{x(T)}{f(T,x(T))} &= \Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &- \frac{1}{a+b}\bigg(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\bigg)\Bigg). \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} a\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} &= \frac{-ab}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &+ \frac{ac}{a+b}+\frac{b}{(\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &- \frac{b^2}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds+\frac{bc}{a+b}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$a\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+b\frac{x(T)}{f(T,x(T))}=c.$$

Inversement, puisque ${}_0D_c^{\alpha}\Big(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\Big)=h(t)$ alors, $\frac{x(t)}{f(t,x(t))}=\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+I^{\alpha}h(t)$.

Donc

$$b\frac{x(T)}{f(T,x(T))}=b\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds,$$

et par conséquent

$$a\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+b\frac{x(T)}{f(T,x(T))}=(a+b)\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds.$$

Donc

$$\frac{x(0)}{f(0,x(0))}=\frac{1}{a+b}\Bigg(c-\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds\Bigg),$$

et par suite

$$x(t)=\Big[f(t,x(t))\Big]\Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds-\frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds-c\Big)\Bigg).$$

□

Théorème 3.1.1.

On suppose que les hypothèses $(H_0)-(H_2)$ sont vérifiées et a,b,c des constantes telles que $a+b\neq 0$. Si de plus

$$L\Bigg(\frac{T^{\alpha-1}\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha)}(1+\frac{|b|}{|a+b|})+\frac{|c|}{|a+b|}\Bigg)<1, \tag{3.4}$$

alors le PLEDHF (3.1) admet une solution définie sur J.

Preuve.

On considère le sous ensemble S de X défini par :

$$S=\Big\{x\in X/\|x\|\leq N\Big\}$$

où

$$N=\frac{F_0\Big(\frac{T^{\alpha-1}\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha)}(1+\frac{|b|}{|a+b|})+\frac{|c|}{|a+b|}\Big)}{1-L\Big(\frac{T^{\alpha-1}\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha)}(1+\frac{|b|}{|a+b|})+\frac{|c|}{|a+b|}\Big)}.$$

et

$$F_0 = \sup_{t\in J}|f(t,0)|.$$

Il est clair que S satisfait les hypothèses du Théorème 2.2.1.

Par application du lemme 3.1.1, l'équation (3.1) est équivalente à l'équation intégrale hybride non linéaire suivante :

$$x(t) = [f(t,x(t)]\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds - \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds - c\Big)\Big), \quad t\in J. \tag{3.5}$$

Définissons les deux opérateurs $A : X \longrightarrow X$ et $B : S \longrightarrow X$ par :

$$Ax(t) = f(t,x(t)), \quad t\in J \tag{3.6}$$

et

$$Bx(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds - \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds - c\Big). \tag{3.7}$$

On écrit alors l'équation intégrale hybride (3.5) sous la forme :

$$x(t) = Ax(t)Bx(t), \quad t\in J. \tag{3.8}$$

Montrons que les opérateurs A et B satisfont les conditions du Théorème 2.2.1.

Soient $x, y \in X$. En utilisant l'hypothèse (H_1) on obtient

$$|Ax(t) - Ay(t)| = |f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \le L|x(t)-y(t)| \le \|x-y\|$$

et ceci c'est pour tout $t \in J$.

Par passage au sup sur t, on obtient

$$\|Ax - Ay\| \le L\|x-y\|,$$

pour tout $x, y \in X$.

Montrons que l'opérateur B est continu sur S.

Soit (x_n) une suite dans S qui converge vers un point $x \in S$. Alors par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,x_n(s))ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\lim_{n\to\infty}g(s,x_n(s))ds,$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,x_n(s))ds = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\lim_{n\to\infty} g(s,x_n(s))ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Bx_n(t) &= \lim_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,x_n(s))ds \\
&- \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,x_n(s))ds - c\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds \\
&- \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds - c\Big) \\
&= Bx(t)
\end{aligned}$$

et ceci c'est pour tout $t\in J$. Ce qui montre que B est un opérateur continu sur S.

Montrons maintenant que B est un opérateur compact sur S.

Commençons par montrer que $B(S)$ est un sous ensemble uniformément borné de X.

Soit $x\in S$. Par l'Hypothèse (H_2), et pour tout $t\in J$ on a :

$$\begin{aligned}
|Bx(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))|ds \\
&+ \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T |(T-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))|ds + |c|\Big) \\
&\leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |h(s)|ds + \frac{bT^{\alpha-1}}{|a+b|\Gamma(\alpha)}\int_0^T |h(s)|ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|h\|_{L^1}\Big(1+\frac{|b|}{|a+b|}\Big) + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|Bx\| \leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|h\|_{L^1}\Big(1+\mid\frac{b}{a+b}\mid\Big) + \frac{|c|}{|a+b|},\quad \text{pour tout} x\in S.$$

Ce qui montre que B est uniformément borné sur S.

Montrons, maintenant que $B(S)$ est un sous ensemble équicontinu de X.

Posons $\quad p(t)=\int_0^t h(s)ds$.

Soient $t_1,t_2\in J$. Pour tout $x\in S$ ona

$$\begin{aligned}
|Bx(t_1)-Bx(t_2)| &= |\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds| \\
&\leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big|\int_{t_1}^{t_2}|g(s,x(s))|ds\Big| \\
&\leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|p(t_1)-p(t_2)|.
\end{aligned}$$

La fonction p est continue sur le compact J, donc il est uniformément continue, et par conséquent

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \quad : \quad |t_1 - t_2| < \eta \Longrightarrow |Bx(t_1) - Bx(t_2)| < \varepsilon,$$

pour tous $t_1, t_2 \in J$ et pour tout $x \in X$. Ce qui montre que $B(S)$ est un sous ensemble équicontinue de X.

Alors par le théorème Arzelà-Ascoli , B est un opérateur compact sur S.

Finallement vérifions que l'hypothèse (c) du Théorème 2.2.1 est satisfaite.

Soit $x \in X$ et $y \in S$ tels que $x = AxBy$. Alors,

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |Ax(t)||By(t)| \\ &\leq |f(t, x(t))| \Big| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \\ &- \frac{1}{a+b} \Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds - c \Big) \Big| \\ &\leq \Big[|f(t, x(t)) - f(t, 0)| + |f(t, 0)| \Big] \Big(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T h(s) ds \\ &+ \frac{|b| T^{\alpha-1}}{|a+b| \Gamma(\alpha)} \int_0^T h(s) ds + \frac{|c|}{|a+b|} \Big) \\ &\leq \Big(L|x(t)| + F_0 \Big) \Big(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \Big) + \frac{|c|}{|a+b|} \Big). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |x(t)| - L \Big(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \Big) + \frac{|c|}{|a+b|} \Big) |x(t)| \\ \leq F_0 \Big(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \Big) + \frac{|c|}{|a+b|} \Big), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$|x(t)| \leq \frac{F_0 \Big(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \Big) + \frac{|c|}{|a+b|} \Big)}{1 - L \Big(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \Big) + \frac{|c|}{|a+b|} \Big)}.$$

Par passage au sup sur t on aura

$$\|x\| \leq \frac{F_0 \Big(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \Big) + \frac{|c|}{|a+b|} \Big)}{1 - L \Big(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \Big) + \frac{|c|}{|a+b|} \Big)} = N.$$

Alors $x \in S$ et donc l'hypothèse (c) du Théorème 2.2.1 est vérifiée.

Finallement, on a :

$M = \|B(S)\| = \sup\{\|Bx\| : x \in S\} \leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \Big(1 + \mid \frac{b}{a+b} \mid \Big) + \frac{|c|}{|a+b|}$

et alors,
$\alpha M \leq \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|h\|_{L^1}\left(1+ \mid \frac{b}{a+b} \mid\right) + \frac{|c|}{|a+b|}\right) < 1$
D'où, tous les conditions du Théorème 2.2.1 sont vérifiées et l'équation $AxBx = x$ admet une solution dans S.
Il en résulte que le PLEDHF (3.1) admet une solution définie sur J. Ce qui achève la preuve. $\square$

3.2 Inégalités différentielles hybrides

Dans cette section on discute un résultat relatif aux inégalités strictes du PLEDHF (3.1). On commence par la définition et le lemme fondamental suivants :

Définition 3.2.1.
On note par $C_p([0,T],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions m qui vérifient :

$$\begin{cases} m \in C((0,T],\mathbb{R}) \\ t^p m(t) \in C([0,T],\mathbb{R}) \end{cases}$$

Lemme 3.2.1. [18]
Soient p et q deux réels tels que $p+q=1$ et soit $m \in C_p([0,T],\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $t_1 \in [0,T]$ on a $m(t_1)=0$ et $m(t)<0$ pour $0 \leq t < t_1$,alors :

$$D^q m(t_1) \geq 0$$

Fixons dans toute la suite deux réels α et p tels que $\alpha + p = 1$

Théorème 3.2.1.
Supposons que l'hypothèse (H_0) est vérifiée et qu'il existe deux fonctions $y, z \in C_p([0,T],\mathbb{R})$ telles que :

$${}_0D_c^{\alpha}\Big(\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\Big) \leq g(t,y(t)) \quad p.p. \quad t \in J \tag{3.9}$$

et

$${}_0D_c^{\alpha}\Big(\frac{z(t)}{f(t,z(t))}\Big) \geq g(t,z(t)), \quad p.p. \quad t \in J \tag{3.10}$$

avec l'une des inégalités est stricte. Alors, $y^0 < z^0$ où $y^0 = t^{1-\alpha}y(t) \mid_{t=0}$ et $z^0 = t^{1-\alpha}z(t) \mid_{t=0}$ impliquent que

$$y(t) \quad < \quad z(t), \tag{3.11}$$

pour tout $t \in J$.

Preuve.

Supposons que l'inégalité (3.10) est stricte et que l'inégalité (3.11) est fausse. Alors, puisque $y^0 < z^0$ et $t^{1-\alpha}y(t)$ et $t^{1-\alpha}z(t)$ sont des fonctions continues, il existe t_1 tel que $0 < t_1 \leq T$ avec $y(t_1) = z(t_1)$ et $y(t) < z(t)$, $0 \leq t < t_1$.

On définit les deux fonctions :

$$Y(t) = \frac{y(t)}{f(t, y(t))} \quad \text{et} \quad Z(t) = \frac{z(t)}{f(t, z(t))}.$$

Alors nous avons $Y(t_1) = Z(t_1)$ et en vertu de l'hypothèse (H_0), nous obtenons $Y(t) < Z(t)$ pour tout $0 \leq t < t_1$.

Notons $m(t) = Y(t) - Z(t)$, $0 \leq t \leq t_1$. Nous avons $m(t) < 0$, $0 \leq t < t_1$ et $m(t_1) = 0$, avec $m \in C_p([0, T], \mathbb{R})$. Alors par le lemme 3.2.1, on a ${}_0D^\alpha m(t_1) \geq 0$. Par les équations (3.9) et (3.10), nous obtenons

$$g(t_1, y(t_1)) \geq {}_0D^\alpha Y(t_1) \geq {}_0D^\alpha Z(t_1) > g(t_1, z(t_1)).$$

Ce qui contredit le fait que : $y(t_1) = z(t_1)$. Ce qui achève la preuve du théorème. □

Théorème 3.2.2.

Supposons que l'hypothèse (H_0) est vérifiée et qu'il existe deux fonctions $y, z \in C_p([0, T], \mathbb{R})$ telles que :

$$D_c^\alpha\Big(\frac{y(t)}{f(t, y(t))}\Big) \leq g(t, y(t)), \quad p.p. \quad t \in J, \tag{3.12}$$

et

$$D_c^\alpha\Big(\frac{z(t)}{f(t, z(t))}\Big) \geq g(t, z(t)), \quad p.p. \quad t \in J, \tag{3.13}$$

avec l'une des inégalité est stricte. On suppose de plus que $a > 0$, $b < 0$ et $y(T) < z(T)$. Alors, la condition

$$a\frac{y(0)}{f(0, y(0))} + b\frac{y(T)}{f(T, y(T))} < a\frac{z(0)}{f(0, z(0))} + b\frac{z(T)}{f(T, z(T))} \tag{3.14}$$

implique que

$$y(t) < z(t), \tag{3.15}$$

pour tout $t \in J$.

Preuve.

On a

$$a\frac{y(0)}{f(0, y(0))} + b\frac{y(T)}{f(T, y(T))} < a\frac{z(0)}{f(0, z(0))} + b\frac{z(T)}{f(T, z(T))}$$

ce qui implique que

$$a(\frac{y(0)}{f(0,y(0))}-\frac{z(0)}{f(0,z(0))})<b(\frac{z(T)}{f(T,z(T))}-\frac{y(T)}{f(T,y(T))}),$$

et puisque $b<0$ et $y(T)<z(T)$, on obtient par l'hypothèse (H_0)

$$\frac{z(T)}{f(T,z(T))}-\frac{y(T)}{f(T,y(T))}>0.$$

Donc

$$\frac{y(0)}{f(0,y(0))}-\frac{z(0)}{f(0,z(0))}<0, \quad (a>0).$$

Et par l'hypothèse (H_0) : $y(0)<z(0)$. Les fonctions $t^{1-\alpha}y(t)$ et $t^{1-\alpha}z(t)$ étant continues, alors $y^0<z^0$. Donc par le Théorème 3.2.1 on a $y(t)<z(t)$. □

Théorème 3.2.3.

Supposons que les conditions du Théorème 3.2.2 sont vérifiées ainsi que les inégalités (3.9) et (3.10) et qu'il existe un réel $M>0$ tel que

$$g(t,x_1)-g(t,x_2)\leq\frac{M}{1+t^\alpha}\Big(\frac{x_1}{f(t,x_1)}-\frac{x_2}{f(t,x_2)}\Big) \qquad p.p. \quad t\in J, \tag{3.16}$$

pour tout $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ avec $x_1\geq x_2$. Alors

$$a\frac{y(0)}{f(0,y(0))}+b\frac{y(T)}{f(T,y(T))}<a\frac{z(0)}{f(0,z(0))}+b\frac{z(T)}{f(T,z(T))}$$

implique $\quad y(t)<z(t)$ pour tout $t\in J$, à condition que $\quad M\leq\Gamma(1+\alpha)$.

Preuve.

On définit

$$\frac{z_\varepsilon(t)}{f(t,z_\varepsilon(t))}=\frac{z(t)}{f(t,z(t))}+\varepsilon(1+t^\alpha),$$

pour $\varepsilon>0$.

Et on note $\quad Z_\varepsilon(t)=\frac{z_\varepsilon(t)}{f(t,z_\varepsilon(t))} \quad$ et $\quad Z(t)=\frac{z(t)}{f(t,z(t))} \quad$ pour $t\in J$.

Alors nous avons

$$Z_\varepsilon(t)>Z(t)\Longrightarrow z_\varepsilon(t)>z(t).$$

Puisque

$$g(t,x_1)-g(t,x_2)\leq\frac{M}{1+t^\alpha}\Big(\frac{x_1}{f(t,x_1)}-\frac{x_2}{f(t,x_2)}\Big),$$

et $\quad D_c^\alpha\Big(\frac{z(t)}{f(t,z(t))}\Big)\geq g(t,z(t))$ pour tout $t\in J$, et $M\leq\Gamma(1+\alpha)$ on a

$$\begin{aligned} D_c^\alpha Z_\varepsilon(t) &= D_c^\alpha Z(t)+\varepsilon D_c^\alpha t^\alpha \\ &\geq g(t,z(t))+\varepsilon\Gamma(\alpha+1) \\ &\geq g(t,z_\varepsilon(t))-\frac{M}{1+t^\alpha}(Z_\varepsilon-Z)+\varepsilon\Gamma(1+\alpha) \\ &\geq g(t,z_\varepsilon(t))+\varepsilon(\Gamma(1+\alpha)-M) \\ &> g(t,z_\varepsilon(t)). \end{aligned}$$

Nous avons $z_\varepsilon(0) > z(0) \geq y(0)$ et les fonctions $t^{1-\alpha}y(t)$ et $t^{1-\alpha}z(t)$ sont continues, alors $y^0 < z_\varepsilon^0$. Donc par application du Théorème 3.2.1 on a bien $y(t) < z_\varepsilon(t)$ pour tout $t \in J$. Ceci pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, alors par passeage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on a $y(t) \leq z(t)$ pour tout $t \in J$. □

Remarque 3.2.1.
Les fonctions f et g définies par $f(t,x) = 1$ et $g(t,x) = x$ vérifient bien la condition (3.16).

3.3 Existence des solutions maximale et minimale

Dans cette section, nous allons prouver l'existence des solutions maximale et minimale du PLEDHF (3.1) dans $J = [0,T]$.
Pour cela nous introduisons la définition suivante

Définition 3.3.1.
Une soltution r du PLEDHF (3.1) est dite maximale si pour toute autre solution x de PLEDHF (3.1) on a

$$x(t) \leq r(t),$$

pour tout $t \in J$.
De même, une solution ρ du PLEDHF (3.1) est dite minimale si

$$\rho(t) \leq x(t),$$

pour tout $t \in J$ et pour toute solution x du PLEDHF dans J.

Nous discutons seulement le cas de la solution maximale, ce lui de la solution minimale se fait d'une manière analogue et avec des arguments similaires et des modifications appropriées.
Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, considérons le problème aux limites suivant du PLEDHF d'ordre $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{cases} D_c^\alpha\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t,x(t)) + \varepsilon \quad p.p. \quad t \in J = [0,T] \\ a\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} = c + \varepsilon \end{cases} \tag{3.17}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash\{0\})$ et $g \in Car(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et a, b et c sont des constantes réelles telles que : $a + b \neq 0$.
Le problème d'existence de la solution pour le PLEDHF (3.17) est établi dans le théorème suivant :

Théorème 3.3.1.

Supposons que les hypothèses $(H_0) - (H_2)$ sont vérifiées ainsi que l'inégalité (3.4) et soient a, b, c des réels tels que $a + b \neq 0$. Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$ le PLEDHF (3.17) admet une solution dans J.

Preuve.

Il suffit de remarquer, d'après (3.4), qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$L\left(\frac{T^{\alpha-1}\|h\|_{L^1} + \varepsilon\frac{T}{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(1 + \frac{|b|}{|a+b|}) + \frac{|c| + \varepsilon}{|a+b|}\right) < 1,$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Le reste de la preuve se fait par les mêmes techniques dans la preuve du Théorème 3.1.1. □

Nous donnons maintenant un théorème principal concernant de l'existence de la solution maximale du PLEDHF (3.1).

Théorème 3.3.2.

Supposons que les hypothèses (H_0)-(H_2) sont vérifiées ainsi que les conditions du Théorème 3.2.2 et que $a+b \neq 0$. Si de plus la condition (3.4) est satisfaite, alors le PLEDHF (3.1) admet une solution maximale.

Preuve.

Soit $\{(\varepsilon_n)_n\}_0^\infty$ une suite décroissante de nombres réels positifs telle que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, où ε_0 est un nombre réel positif vérifiant :

$$L\left(\frac{T^{\alpha-1}\|h\|_{L^1} + \varepsilon_0\frac{T}{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(1 + \frac{|b|}{|a+b|}) + \frac{|c| + \varepsilon_0}{|a+b|}\right) < 1.$$

Le nombre ε_0 existe d'aprés l'inégalité (3.4).

Par le Théorème 3.1.1, il existe une solution $r(t, \varepsilon_n)$ définie sur J du PLEDHF

$$\begin{cases} D_c^\alpha\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t, x(t)) + \varepsilon_n \quad p.p. \quad t \in J, \\ a\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\frac{x(T)}{f(T,x(T))} = c + \varepsilon_n. \end{cases} \tag{3.18}$$

Alors toute solution u du PLEDHF (3.1) satisfait

$$D_c^\alpha\left(\frac{u(t)}{f(t, u(t))}\right) \leq g(t, u(t)),$$

et toute solution du problème auxiliaire (3.18) satisfait :

$$D_c^\alpha\left(\frac{r(t, \varepsilon_n)}{f(t, r(t, \varepsilon_n))}\right) = g(t, r(t, \varepsilon_n)) + \varepsilon_n > g(t, r(t, \varepsilon_n))$$

où

$$a\frac{u(0)}{f(0,u(0))}+b\frac{u(T)}{f(T,u(T))}=c\leq c+\varepsilon_n=a\frac{r(0,\varepsilon_n)}{f(0,r(0,\varepsilon_n))}+b\frac{r(T,\varepsilon_n)}{f(T,r(T,\varepsilon_n))}.$$

Par le Théorème 3.2.2, on déduit que

$$u(t)\leq r(t,\varepsilon_n), \tag{3.19}$$

pour tout $t\in J$ et $n\in IN$. Puisque

$$c+\varepsilon_2=a\frac{r(0,\varepsilon_2)}{f(0,r(0,\varepsilon_2))}+b\frac{r(T,\varepsilon_2)}{f(T,r(T,\varepsilon_2))}\leq a\frac{r(0,\varepsilon_1)}{f(0,r(0,\varepsilon_1))}+b\frac{r(T,\varepsilon_1)}{f(T,r(T,\varepsilon_1))}=c+\varepsilon_1,$$

alors, par le Théorème 3.2.2, on déduit que $r(t,\varepsilon_2)\leq r(t,\varepsilon_1)$. Donc, $r(t,\varepsilon_n)$ est une suite décroissante de nombres réels, et la limite

$$r(t)=\lim_{n\to\infty}r(t,\varepsilon_n), \tag{3.20}$$

existe.

Montrons, maintenant que cette convergence est uniforme dans J.

Pour cela il suffit de prouver que la suite $r(t,\varepsilon_n)$ est équicontinue dans $C(J,R)$.

Soient $t_1,t_2\in J$ avec $t_1<t_2$, Alors

$$\begin{aligned}|r(t_1,\varepsilon_n)-r(t_2,\varepsilon_n)| &= \Big|[f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))]\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds\\ &- \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds-c-\varepsilon_n\Big)\Big)\\ &- [f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))]\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds\\ &- \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds-c-\varepsilon_n\Big)\Big)\Big|,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}|r(t_1,\varepsilon_n)-r(t_2,\varepsilon_n)| &= \Big|[f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))]\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)\Big)ds\\ &- [f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))]\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds\Big)\\ &- \Big(f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))-f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))\Big)\frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\\ &\times \int_0^T(T-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds-c-\varepsilon_n\Big)\Big|.\end{aligned}$$

Donc

$$\Big|r(t_1,\varepsilon_n)-r(t_2,\varepsilon_n)\Big| \leq \Big|[f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))]\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds\Big)$$

$$\begin{aligned}
&- \quad [f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))]\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds\Big)\Big| \\
&+ \quad \Big|\Big(f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))-f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n)\Big)\frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n)) \\
&+ \quad \varepsilon_n)ds-c-\varepsilon_n\Big)\Big|+\Big|[f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))]\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n)) \\
&+ \quad \varepsilon_n)ds\Big)-[f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))]\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds\Big)\Big|,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Big|r(t_1,\varepsilon_n)-r(t_2,\varepsilon_n)\Big| &\leq \Big|f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))-f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))\Big|\Big[\frac{(\|h\|_{L_1}+\varepsilon_n)T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \frac{|b|(\|h\|_{L_1}+\varepsilon_n)T^\alpha}{|a+b|\Gamma(\alpha+1)}+\frac{|c|+\varepsilon_n}{|a+b|}\Big] \\
&+ F\frac{(\|h\|_{L_1}+\varepsilon_n)}{\Gamma(\alpha+1)}\Big[|t_2^\alpha-t_1^\alpha-(t_2-t_1)^\alpha|+(t_2-t_1)^\alpha\Big],
\end{aligned}$$

où $\quad F=\sup\limits_{(t,x)\in J\times[-N,N]}|f(t,x)|.$

Puisque f est continue sur le compact $J\times[-N,N]$, elle est donc uniformément continue, et $\Big|f(t_1,r(t_1,\varepsilon_n))-f(t_2,r(t_2,\varepsilon_n))\Big| \longrightarrow 0$ lorsque $t_1 \longrightarrow t_2$ uniformément pour tout $n\in N$.

De plus, des inégalités précédentes, il s'ensuit que

$|r(t_1,\varepsilon_n)-r(t_2,\varepsilon_n)| \longrightarrow 0$ lorsque $t_1\longrightarrow t_2$ uniformément pour tout $n\in N$. Donc $r(t,\varepsilon_n)\longrightarrow r(t)$ lorsque $n\longrightarrow\infty$ pour tout $t\in J$.

Montrons que la fonction $r(t)$ est une solution du PLEDHF (3.1) définie sur J.

Puisque $r(t,\varepsilon_n)$ est solution de PLEDHF (3.18), alors

$$\begin{aligned}
r(t,\varepsilon_n) &= [f(t,r(t,\varepsilon_n))]\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds \\
&- \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-1}(g(s,r(s,\varepsilon_n))+\varepsilon_n)ds-c-\varepsilon_n\Big)\Big),
\end{aligned}$$

pour tout $t\in J$.

Passons à la limite quand $n\longrightarrow\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
r(t)=[f(t,r(t))]\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t-s)^{\alpha-1}g(s,r(s))ds \\
-\frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-1}g(s,r(s))ds-c\Big)\Big),
\end{aligned}$$

pour tout $t\in J$. Donc r est une solution PLEDHF (3.1) définie sur J.

Par suite, de l'inégalité (3.19), on déduit que $u(t)\leq r(t)$ pour tout $t\in J$. D'où le PLEDHF (3.1) admet une solution maximale définie sur J. Ce qui achève la démonstration.

$\square$

3.4 Théorèmes de comparaison

Dans cette section, nous allons prouver que la solution maximale et minimale servent comme bornes pour l'ensemble de solutions de l'inégalité différentielle reliée au PLEDHF (3.1) dans l'intervalle $J = [0, T]$.

Théorème 3.4.1.
Supposons que les hypothèses $(H_0) - (H_2)$ sont vérifiées ainsi que la condition (3.4) et soient a, b et c des réels tels : que $a + b \neq 0$. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$g(t, x_1) - g(t, x_2) \leq \frac{M}{1 + t^\alpha}\Big(\frac{x_1}{f(t, x_1)} - \frac{x_2}{f(t, x_2)}\Big) \quad p.p. \quad t \in J,$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 \geq x_2$ où $M \leq \Gamma(1 + \alpha)$. Alors s'il existe une fonction $u \in C(J, \mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} D_c^\alpha\Big(\frac{u(t)}{f(t,u(t))}\Big) \leq g(t, u(t)) \quad p.p. \quad t \in J, \\ a\frac{u(0)}{f(0,u(0))} + b\frac{u(T)}{f(T,u(T))} \leq c, \end{cases} \tag{3.21}$$

alors

$$u(t) \leq r(t), \tag{3.22}$$

pour tout $t \in J$ où r est la solution maximale du PLEDHF (3.1) sur J.

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$. Par le Théorème 3.3.2, $r(t, \varepsilon)$ est une solution maximale du PLEDHF (3.17) et la limite

$$r(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} r(t, \varepsilon) \tag{3.23}$$

est uniforme dans J et la fonction r est une solution maximale du PLEDHF (3.17) dans J. Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{cases} D_c^\alpha\Big(\frac{r(t,\varepsilon)}{f(t,r(t,\varepsilon))}\Big) = g(t, r(t, \varepsilon)) + \varepsilon \quad p.p. \quad t \in J \\ a\frac{r(0,\varepsilon)}{f(0,r(0,\varepsilon))} + b\frac{r(T,\varepsilon)}{f(T,r(T,\varepsilon))} = c + \varepsilon. \end{cases} \tag{3.24}$$

Donc

$$\begin{cases} D^\alpha\Big(\frac{r(t,\varepsilon)}{f(t,r(t,\varepsilon))}\Big) > g(t, r(t, \varepsilon)) \quad p.p. \quad t \in J \\ a\frac{r(0,\varepsilon)}{f(0,r(0,\varepsilon))} + b\frac{r(T,\varepsilon)}{f(T,r(T,\varepsilon))} = c + \varepsilon. \end{cases} \tag{3.25}$$

En appliquant le Théorème 3.2.3 aux inégalités (3.21) et (3.25) on conclut que $u(t) < r(t, \varepsilon)$ pour tout $t \in J$.
De plus en vue de la limite (3.23) on obtient alors l'inégalité (3.22). □

Théorème 3.4.2.
Supposons que les hypothèses $(H_0)-(H_2)$ et la condition (3.4) sont vérifiées et soient a, b et c des constantes réelles avec $a+b \neq 0$. De plus, supposons qu'il existe un réel $M>0$ tel que

$$g(t,x_1)-g(t,x_2) \leq \frac{M}{1+t^\alpha}\Big(\frac{x_1}{f(t,x_1)}-\frac{x_2}{f(t,x_2)}\Big) \quad p.p. \quad t \in J$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 \geq x_2$ où $M \leq \Gamma(1+\alpha)$. Donc s'il existe une fonction $v \in C(J,\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} D_c^\alpha\Big(\frac{v(t)}{f(t,v(t))}\Big) \geq g(t,v(t)) \quad p.p. \quad t \in J \\ a\frac{v(0)}{f(0,v(0))}+b\frac{v(T)}{f(T,v(T))} > c, \end{cases}$$

alors,

$$\rho(t) \leq v(t)$$

pour tout $t \in J$ où ρ est la solution minimale du PLEDHF (3.1) sur J.

Notons que le théorème 3.4.1 est utile pour prouver la bornitude et l'unicité de la solution du PLEDHF (3.1) sur J.
Un résultat dans ce sens est le suivant :

Théorème 3.4.3.
Supposons que les hypothèses $(H_0)-(H_2)$ sont vérifiées ainsi que la condition (3.4) et soient a, b et c des réels tels que $a+b \neq 0$ et qu'il existe un réel $M>0$ tel que

$$g(t,x_1)-g(t,x_2) \leq \frac{M}{1+t^\alpha}\Big(\frac{x_1}{f(t,x_1)}-\frac{x_2}{f(t,x_2)}\Big) \quad p.p. \quad t \in J$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 \geq x_2$ où $M \leq \Gamma(1+\alpha)$. Si la fonction identiquement nulle est l'unique solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} D_c^\alpha m(t) = \frac{M}{1+t^\alpha}m(t) \quad p.p. \quad t \in J, \\ am(0)+bm(T)=0 \end{cases} \tag{3.26}$$

alors le PLEDHF (3.1) admet une unique solution.

Preuve.
Par le Théorème 3.1.1, le PLEDHF (3.1) admet une solution définie sur J.
Supposons que le PLEDHF (3.1) admet deux solutions u_1 et u_2 avec $u_1 > u_2$.
Définissons une fonction $m : J \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$m(t) = \frac{u_1(t)}{f(t,u_1(t))}-\frac{u_2(t)}{f(t,u_2(t))}.$$

En vue de l'hypothèse (H_0), on conclût que $m(t) > 0$. on a

$$\begin{aligned} D^\alpha m(t) &= D^\alpha\Big[\frac{u_1(t)}{f(t,u_1(t))}\Big] - D^\alpha\Big[\frac{u_2(t)}{f(t,u_2(t))}\Big] \\ &= g(t,u_1(t)) - g(t,u_2(t)) \\ &\leq \frac{M}{1+t^\alpha}\Big(\frac{u_1}{f(t,u_1(t))} - \frac{u_2(t)}{f(t,u_2(t))}\Big) \\ &= \frac{M}{1+t^\alpha}m(t), \end{aligned}$$

pour presque tout $t \in J$. Puisque
$m(0) = \frac{u_1(0)}{f(0,u_1(0))} - \frac{u_2(0)}{f(0,u_2(0))}$ et $m(T) = \frac{u_1(T)}{f(T,u_1(T))} - \frac{u_2(T)}{f(T,u_2(T))}$
et

$$a\frac{u_1(0)}{f(0,u_1(0))} + b\frac{u_1(T)}{f(T,u_1(T))} = a\frac{u_2(0)}{f(0,u_2(0))} + b\frac{u_2(T)}{f(T,u_2(T))},$$

alors

$$am(0) + bm(T) = 0.$$

Appliquons le théorème 3.4.1 avec $f(t,x) = 1$ et $c = 0$, ce qui donne que $m(t) \leq 0$ pour tout $t \in J$ où la fonction identiquement nulle est l'unique solution l'équation différentielle (3.26). Ceci contredit le fait que $m(t) > 0$ et donc $u_1 = u_2$. □

3.5 Existence des solutions extrémales

Parfois il est souhaitable d'étudier l'existence des solutions extrémales positives d'une équation différentielle. C'est pour cela dans cette section, nous allons prouver l'existence des solutions positives maximale et minimale du PLEDHF (3.1). Nous utiliserons le théorème de point fixe hybride de Dhage [22] dans un espace de Banach ordonné.
Nous aurons besoin du préliminaire suivant :
Un sous-ensemble non vide, fermé K dans une algèbre de Banach X est appelé cône de sommet 0, si
(i) $K + K \subseteq K$,
(ii) $\lambda K \subseteq K$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$,
(iii) $(-K) \cap K = 0$ où 0 est l'élèment neutre de X,
(iv) le cône K est dit positif si $K \circ K \subseteq K$ où $\circ$ est la composée de multiplication dans X.
Définissons la relation d'ordre $\leq$ dans X comme suit :
Soient $x, y \in X$. Alors, $x \leq y$ si, et seulement si, $y - x \in K$.
Un cône K est dit normal si la norme $\|.\|$ est semi-monotone croissante sur K, c.à.d. qu'il existe une constante $N > 0$ telle que $\|x\| \leq N\|y\|$ pour tous $x, y \in K$ avec $x \leq y$.

Il est connu que si un cône K est normal dans X, Alors chaque ensemble borné par rapport à l'ordre dans X est borné en norme dans X. Pour plus de détails sur les cônes et leurs propriétés voir [32].

Lemme 3.5.1. [21]
Soient K un cône positive dans une algèbre de Banach X, et $u_1, u_2, v_1, v_2 \in K$ tels que $u_1 \leq v_1$ et $u_2 \leq v_2$. Alors, $u_1 u_2 \leq v_1 v_2$.

Pour tous $a, b \in X$, l'intervalle ordonné $[a, b]$ est un ensemble de X défini par

$$[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}.$$

Définition 3.5.1. Une application $Q : [a, b] \longrightarrow X$ est dite croissante si $x \leq y$ implique $Qx \leq Qy$
pour tous $x, y \in [a, b]$.

Nous introduisons le Théorème 3.5.1 pour prouver l'existence d'une solution extrémale du problème (3.1) sous certaines conditions de monotonie.

Théorème 3.5.1. [20]
Soit K un cône dans une algèbre de Banach X et soient $a, b \in X$ tels que $a \leq b$.
Si $A, B : [a, b] \to K$ sont deux opérateurs croissants tels que
(a) A est Lipschitzian de constante de Lipschitz α,
(b) B est complet,
(c) $AxBx \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$.
De plus, si le cône K est positive et normal,
alors l'équation $AxBx = x$ admet au moins une solution minimale et maximale, positive dans $[a, b]$.
Et ceci si $\alpha M < 1$, où $M = \|B([a, b])\| = \sup\{\|Bx\| : x \in [a, b]\}$.

Equipons l'espace $C(J, R)$ de la relation d'ordre $\leq$ à l'aide du cône K defini par

$$K = \{x \in C(J, R) : x(t) \geq 0, \forall t \in J\} \tag{3.27}$$

Il est clair que le cône K est positif et normal dans $C(J, R)$.
On aura besoin de la définition suivante

Définition 3.5.2.
Une fonction $a \in C(J, R)$ est appelée solution inférieure du PLEDHF (3.1) définie sur J si elle satisfait l'équation (3.12).
De même, une fonction $a \in C(J, R)$ est appelée solution supérieure du PLEDHF (3.1) définie sur J s'elle satisfait l'équation (3.13).

Une solution du PLEDHF (3.1) est une solution inférieure et aussi supérieure du PLEDHF (3.1) définie sur J ; la réciproque est aussi vraie. Considérons les hypothèses suivantes :

(B_0) $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $g : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

(B_1) Le PLEDHF (3.1) admet une solution inférieure a et une solution supérieure b définies sur J avec $a \leq b$.

(B_2) La fonction $x \longrightarrow \frac{x}{f(t,x)}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[\min_{t\in J} a(t), \max_{t\in J} b(t)]$ pour presque tout $t \in J$.

(B_3) Les fonctions $f(t,x)$ et $g(t,x)$ sont croissantes par rapport à x pour presque tout $t \in J$.

(B_4) Il existe une fonction $k \in L^1(J,\mathbb{R})$ telle que $g(t,b(t)) \leq k(t)$.

On peut remarquer que l'hypothèse (B_4) est vérifiée en particulier, si f est continue et g est L^1-Carathéodory sur $J \times \mathbb{R}$.

Théorème 3.5.2.

On suppose que les hypothèses (H_1) et $(B_0) - (B_4)$ sont vérifiées et soient a, b et c des constantes réelles avec $a + b \neq 0$. De plus, si

$$L\left(\frac{T^{\alpha-1}\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha)}(1+\frac{|b|}{|a+b|})+\frac{|c|}{|a+b|}\right) < 1 \quad et \quad \frac{b}{a+b} \leq 0, \tag{3.28}$$

alors, le PLEDHF (3.1) admet une solution minimale et une maximale positives définies sur J.

Preuve.

Le PLEDHF (3.1) est équivalent à l'équation intégrale (3.5).

Définissons les deux opérateurs A et B sur X respectivement par (3.6) et (3.7) .

Alors l'équation intégrale (3.5) s'écrit donc

$$Ax(t)Bx(t) = x(t)$$

sur l'algèbre de Banach X. Notons que hypothèse (B_0) implique que $A, B : [a,b] \longrightarrow K$. Puisque le cône K de X est normal, alors d'après ce qui précède $[a,b]$ est un ensemble borné en norme de X.

Comme dans la preuve du Théorème 3.1.1, A est Lipschitzien de constante L et B est un opérateur complétement continu sur $[a,b]$.

D'autre part l'hypothèse (B_3) implique que A et B sont croissant sur $[a,b]$. En effet, soient $x, y \in [a,b]$ tels que $x \leq y$. Alors, par hypothèse (B_3),

$$Ax(t) = f(t,x(t)) \leq f(t,y(t)) = Ay(t),$$

pour tout $t \in J$.

De même, on a

$$\begin{aligned}
Bx(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds - \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds - c\Big)\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,y(s))ds - \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,y(s))ds - c\Big)\\
&= By(t),
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$.

Ainsi A et B sont des opérateurs croissants sur $[a,b]$.

Par le Lemme 3.5.1 et l'hypothèse (B_3) nous obtenons

$$\begin{aligned}
a(t) &\leq f(t,a(t))\Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds\\
&- \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds - c\Big)\Big]\\
&\leq f(t,x(t))\Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds\\
&- \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds - c\Big)\Big]\\
&\leq f(t,b(t))\Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds\\
&- \frac{1}{a+b}\Big(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds - c\Big)\Big]\\
&\leq b(t),
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$ et $x \in [a,b]$.

Par conséquent

$$a(t) \leq Ax(t)Bx(t) \leq b(t),$$

pour tout $t \in J$ et $x \in [a,b]$.

D'où, $AxBx \in [a,b]$ pour tout $x \in [a,b]$. Aussi,

$$M = \|B([a,b])\| = \sup\{\|Bx\| : x \in [a,b]\} \leq L\Big(\frac{T^{\alpha-1}\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha)}(1+\frac{|b|}{|a+b|}) + \frac{|c|}{|a+b|}\Big),$$

et alors,

$$\alpha M \leq L\left(\frac{T^{\alpha-1}\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha)}(1+\frac{|b|}{|a+b|}) + \frac{|c|}{|a+b|}\right) < 1$$

Par suite, appliquons le Théorème 3.5.1 à l'équation $AxBx = x$, ce qui donne que le PLEDHF (3.1) admet une solution minimale et maximale positives définie sur J. Ce qui achève la preuve. $\square$

Chapitre 4

Existence de solutions d'une équation différentielle fractionnaire hybride

Dans cette section on étudie l'existence des solutions de l'équation différentielle hybride et d'ordre fractionnaire [3], objet du travail [37], suivante :

$$\begin{cases} {}_0D_R^{\alpha}\left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] = g(t,x(t)) \quad p.p. \quad 0 \leq t < 1, \\ x(1) = x'(1) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $1 < \alpha \leq 2$, $f \in C^1(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash\{0\})$ et $g \in Car(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On étudiera alors l'existence des solutions sous les conditions mixtes, de Lipschitz et de Carathéodory.

4.1 Résultat d'existence

Dans cette section, nous allons prouver l'existence de la solution de l'équation différentielle hybride d'ordre fractionnaire (4.1) définie sur l'intervalle $J = [0, 1]$ sous des conditions mixtes de Lipschitz et de Carathéodory ; on suppose les hypothèses sous mentioner, au paravant, dans la section 2.2

Les deux Lemmes classiques suivants seront utiles

Lemme 4.1.1. [41]
Soit $\alpha > 0$. On suppose que $x \in C(0, 1) \cap L^1(0, 1)$, alors l'équation différentielle fraction-

3. K.Hilal and A.Kajouni ; Existence of solutions for hybrid differential equation with fractional order : Mathematical Theory and Modeling, ISSN 2224-5804.

naire

$$_0D_R^{\alpha}x(t) = 0$$

admet

$$x(t) = c_1t^{\alpha-1} + c_2t^{\alpha-2} + ... + c_nt^{\alpha-n},$$

$c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, comme unique solution où n est le plus petit entier supérieur ou égal à α.

Lemme 4.1.2. [41]
On suppose que $x \in C(0,1) \cap L^1(0,1)$ et que sa dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ est dans $C(0,1) \cap L^1(0,1)$. Alors

$$I_0^{\alpha}\ {}_0D_R^{\alpha}x(t) = x(t) + c_1t^{\alpha-1} + c_2t^{\alpha-2} + ... + c_nt^{\alpha-n}$$

pour certains $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n$ où n est le plus petit entier supérieur ou égal à α.

Par l'application de ces deux lemmes, on obtient le résultat suivant :

Lemme 4.1.3.
Soit $h \in C[0,1] \cap L^1[0,1]$ et $1 < \alpha \leq 2$. Alors l'unique solution du problème

$$\begin{cases} {}_0D_R^{\alpha}\Big(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\Big) = h(t) \quad p.p. \quad 0 \leq t < 1, \\ x(1) = x'(1) = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

est

$$x(t) = f(t, x(t)) \int_0^1 H(t,s)h(s)ds$$

où

$$H(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{s(1-t)t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{-t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{s(1-t)t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Preuve.
Appliquons l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α à la première équation du problème (4.2), on obtient

$$\frac{x(t)}{f(t,x(t))} = I^{\alpha}h(t) + c_1t^{\alpha-1} + c_2t^{\alpha-2}$$

pour certains constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, la solution général de (4.2) est :

$$x(t) = f(t,x(t))\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + c_1t^{\alpha-1} + c_2t^{\alpha-2}\Big). \tag{4.4}$$

Puisque $x(1) = 0$, alors

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

De la relation (4.4), on a

$$\frac{x'(t)f(t,x(t)) - x(t)f_t(t,x(t))}{f^2(t,x(t))} = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} h(s) ds + (\alpha-1)c_1 t^{\alpha-2} + (\alpha-2)c_2 t^{\alpha-3}. \tag{4.5}$$

Comme $x'(1) = 0$, donc

$$(\alpha-1)c_1 + (\alpha-2)c_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds.$$

Alors

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 ((1-s)^{\alpha-2} - (1-s)^{\alpha-1}) h(s) ds$$

$$c_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 ((1-s)^{\alpha-1} - (1-s)^{\alpha-2}) h(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}
x(t) &= f(t,x(t))\Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \int_0^1 \Big(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}((1-s)^{\alpha-1} \\
&- (1-s)^{\alpha-2}) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}((1-s)^{\alpha-1} + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}((1-s)^{\alpha-2} - (1-s)^{\alpha-1})\Big) h(s) ds\Bigg) \\
&= f(t,x(t))\Big(\int_0^t \Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1} + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}((1-s)^{\alpha-1} - (1-s)^{\alpha-2}) \\
&- \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(1-s)^{\alpha-1} + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}((1-s)^{\alpha-2} - (1-s)^{\alpha-1})\Big) h(s) ds \\
&+ \int_t^1 \Big(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}((1-s)^{\alpha-1} - (1-s)^{\alpha-2}) \\
&- \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(1-s)^{\alpha-1} + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}((1-s)^{\alpha-2} - (1-s)^{\alpha-1})\Big) h(s) ds\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(t,x(t))\Big(\int_0^t \Big(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{s(1-t)t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big) h(s) ds \\
&+ \int_t^1 \Big(\frac{s(1-t)t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big) h(s) ds\Big) \\
&= f(t,x(t)) \int_0^1 H(t,s) h(s) ds,
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. □

Lemme 4.1.4.

La fonction $H(t,s)$ définie par (4.3) vérifie la condition suivante :

$$\Gamma(\alpha-1)H(t,s) \leq q(t)k(s) \tag{4.6}$$

où $q(t)=(1-t)t^{\alpha-2}$ et $k(s)=s(1-s)^{\alpha-2}$.

Dans la suite, on note par

$$K=\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 k(s)ds. \tag{4.7}$$

Théorème 4.1.1.

Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées. De plus, si

$$LK\|h\|_{L^1}<1, \tag{4.8}$$

alors le problème (4.1) admet au moins une solution définie sur J.

Preuve.

On défini le sous ensemble S de X par

$$S=\Big\{x\in X/\|x\|\leq N\Big\},$$

où

$$N=\frac{F_0T\|h\|_{L^1}}{1-LT\|h\|_{L^1}} \quad \text{et} \quad F_0=\sup_{t\in J}|f(t,0)|.$$

Il est clair que S satisfait les hypothèses du Théorème 2.2.1, donc par application du Lemme 4.1.3 , l'équation (4.1) est équivalente à l'équation intégrale hybride non lineaire suivante :

$$x(t)=f(t,x(t))\int_0^1 H(t,s)g(s,x(s))ds, \quad t\in J. \tag{4.9}$$

Maintenant, considérons les opérateurs suivants : $A:X\longrightarrow X$ et $B:S\longrightarrow X$ tels que

$$Ax(t)=f(t,x(t)), \quad t\in J, \tag{4.10}$$

et

$$Bx(t)=\int_0^1 H(t,s)g(s,x(s))ds. \tag{4.11}$$

Avec ces deux arguments l'équation intégrale hybride (4.9) peut s'ecrire sous la forme

$$x(t)=Ax(t)Bx(t), \quad t\in J. \tag{4.12}$$

Montrons que les opérateurs A et B satisfont les conditions du Théorème 2.2.1. Nous allons le faire en 4 étapes.

Etape 1. Soient $x, y \in X$ alors par l'hypothèse (H_1),

$$|Ax(t) - Ay(t)| = |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq L|x(t) - y(t)| \leq L\|x - y\|,$$

pour tout $t \in J$. Passons au sup par rapport à t.

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|,$$

pour tous $x, y \in X$.

Etape 2. Montrons que l'opérateur B est continu sur S.

Pour se faire, soit (x_n) une suite dans S qui converge vers un point $x \in S$. Alors le théorème de la convergence dominée entraine que,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Bx_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 H(t,s)g(s, x_n(s))ds \\
&= \int_0^1 H(t,s) \lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s))ds \\
&= \int_0^1 H(t,s)g(s, x(s))ds \\
&= Bx(t),
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Ce qui montre que B est un opérateur continu sur S.

Etape 3. Montrons que B est un opérateur compact sur S.

Soit $x \in S$ arbitraire. Du Lemme 4.1.4, on déduit que

$$\begin{aligned}
|Bx(t)| &= |\int_0^1 H(t,s)g(s, x(s))ds| \\
&\leq q(t)\frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^1 k(s)h(s)ds \\
&\leq K\|h\|_{L^1},
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$.

Passant au sup par rapport à t, on obtient

$$\|Bx\| \leq K\|h\|_{L^1},$$

pour tout $x \in S$. Ce qui donne que B est uniformément borné sur S.

Montrons maintenant que $B(S)$ est un sous ensemble équi-continu dans X.

On se donne maintenant un $\varepsilon > 0$ et soit

$$\delta < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\Gamma(\alpha + 1)\varepsilon}{12\|h\|_{L^1}}\right\}.$$

Soient $x \in S$ et $t_1, t_2 \in [0,1]$ avec $t_1 < t_2$, $0 < t_2 - t_1 < \delta$. On a

$$\begin{aligned}
|Bx(t_2) - Bx(t_1)| &= \Big| \int_0^1 H(t_2,s)g(s,x(s))ds - \int_0^1 H(t_1,s)g(s,x(s))ds \Big| \\
&\leq \|h\|_{L^1} \Big| \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1} - t_2^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \\
&+ \int_0^{t_2} \frac{s(1-t_2)t_2^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} ds - \int_{t_2}^1 \frac{t_2^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \int_{t_2}^1 \frac{s(1-t_2)t_2^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} ds - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \\
&- \int_0^{t_1} \frac{s(1-t_1)t_1^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} ds + \int_{t_1}^1 \frac{t_1^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \\
&- \int_{t_1}^1 \frac{s(1-t_1)t_1^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} ds \Big|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq \|h\|_{L^1} \Big(&\int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds + (t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \\
&+ (t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} ds + (t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} ds \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|h\|_{L^1} \Big(\frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha + t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Big) \\
&\leq \frac{\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1)} \Big(t_2^\alpha - t_1^\alpha + (1+\alpha)(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}) + \alpha(t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}) \Big) \\
&\leq \frac{\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1)} \Big(t_2^\alpha - t_1^\alpha + 3(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}) + 2(t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}) \Big).
\end{aligned}$$

En vue, de majorer les quantités : $t_2^\alpha - t_1^\alpha$, $t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}$ et $t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}$, on distingue les cas suivants :

1^{er} Cas : $0 \leq t_1 < \delta$, $t_2 < 2\delta$.

$t_2^\alpha - t_1^\alpha \leq t_2^\alpha < (2\delta)^\alpha \leq 2^\alpha \delta \leq 4\delta$, $\quad t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1} \leq t_2^{\alpha-1} < (2\delta)^{\alpha-1} \leq 2^{\alpha-1}\delta \leq 2\delta$

$t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2} \leq t_2^{\alpha-2} < (2\delta)^{\alpha-2} \leq 2^\alpha \delta \leq \delta$

2^{eme} Cas : $\quad 0 < t_1 < t_2 \leq \delta$.

$t_2^\alpha - t_1^\alpha \leq t_2^\alpha < \delta^\alpha \leq \alpha\delta \leq 4\delta$, $\quad t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1} \leq t_2^{\alpha-1} < \delta^{\alpha-1} \leq (\alpha-1)\delta \leq 2\delta$

$t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2} \leq t_2^{\alpha-2} < \delta^{\alpha-2} \leq (\alpha-2)\delta \leq \delta$

3^{eme} Cas : $\quad \delta \leq t_1 < t_2 \leq 1$.

$t_2^\alpha - t_1^\alpha \leq \alpha\delta \leq 4\delta$, $\quad t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1} \leq (\alpha-1)\delta < 2\delta$

$t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2} \leq (\alpha-2)\delta < \delta$
On obtient donc

$$|Bx(t_2) - Bx(t_1)| < \varepsilon,$$

pour tout $t_1, t_2 \in J$ et pour tout $x \in X$. Ce qui montre que $B(S)$ est sous ensemble équi-continu dans X. Finalement, selon le théorème d'Arzelá-Ascoli, B est un opérateur compact sur S.

Etape 4. L'hypothèse (c) du Théorème 2.2.1 est satisfaite. En effet,
soient $x, y \in X$ tels que $x = AxBy$. Alors,

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= |Ax(t)||By(t)| \\
&= |f(t,x(t)) - f(t,0) + f(t,0)|| \int_0^1 H(t,s)g(s,x(s))ds| \\
&\leq [L|x(t)| + F_0]\Big(q(t)\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 k(s)h(s)ds\Big) \\
&\leq [L|x(t)| + F_0]K\|h\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$|x(t)| \leq \frac{F_0K\|h\|_{L^1}}{1 - LK\|h\|_{L^1}},$$

en passant au sup par rapport à t, on obtient

$$\|x\| \leq \frac{F_0K\|h\|_{L^1}}{1 - LK\|h\|_{L^1}}.$$

Alors $x \in S$ et l'hypothèse (c) du Théorème 2.2.1 est donc satisfaite. Par suite, on a

$$M = \|B(S)\| = \sup\{\|Bx\| : x \in S\} \leq K\|h\|_{L^1}\},$$

et donc,

$$LM \leq LK\|h\|_{L^1} < 1.$$

D'où, les conditions du Théorème 2.2.1 sont vérifiées et l'équation $AxBx = x$ admet une solution définie sur S. Il en résulte que, le problème (4.1) admet une solution définie sur J. □

4.2 Exemples

Nous proposons dans cette section deux exemples pour illustrer nos résultats ci-dessus.

Exemple 4.2.1. On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} D_R^{\frac{3}{2}} x(t) = \sin x(t) \quad p.p. \quad 0 \leq t < 1 \\ x(1) = x'(1) = 0, \end{cases} \tag{4.13}$$

où $\quad f(t,x) = 1, \quad g(t,x) = \sin x \quad$ et $\quad h(t) = 1.$

Alors les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées. En effet

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^1 k(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 s(1-s)^{\frac{-1}{2}} ds \\ &= \frac{4}{35\sqrt{\pi}}, \end{aligned}$$

en choisissant $L = 1$, on obtient

$$LK\|h\|_{L^1} < 1.$$

Donc, l'équation différentielle fractionnaire (4.13) admet une solution définie sur $[0, 1]$.

Exemple 4.2.2.

On considère l'équation différentielle fractionnaire hybride suivante :

$$\begin{cases} D_R^{\frac{3}{2}} \left[\frac{x(t)}{\sin x(t) + 2} \right] = \cos x(t) \quad p.p. \quad 0 \leq t < 1 \\ x(1) = x'(1) = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

où $\quad f(t,x) = \sin x + 2, \quad g(t,x) = \cos x \quad$ et $\quad h(t) = 1.$

Alors les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées. En effet

$$K = \frac{4}{35\sqrt{\pi}},$$

en choisissant $\quad L = 1$, on obtient

$$LK\|h\|_{L^1} < 1.$$

Donc, l'équation différentielle fractionnaire hybride (4.14) admet une solution définie sur $[0, 1]$.

Chapitre 5

Existence des solutions d'une équation différentielle fractionnaire hybride à condition non locale

Dans ce chapitre et vue qu la condition non locale joue un rôle remarquable dans la modélisation de plusieurs phénomènes physiques comme en éléctronique, en mécanique des matériaux, ou en biomathématiques, on considère l'équation différentielle hybride, d'ordre fractionnaire et à condition non locale (en abréviation EDHFCNL) [38] [4], suivante :

$$\begin{cases} D_c^{\alpha}\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t,x(t)) \quad p.p. \quad t \in J = [0,T], \\ \frac{x(0)}{f(0,x(0))} = \mathcal{L}(x), \quad \frac{x(T)}{f(T,x(T))} = x_T, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $1 < \alpha \leq 2$, $f \in C^1(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash\{0\})$, $g \in Car(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x_T \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{L} : C(J,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Nous signalons aussi que la condition non locale signifie que la condition initiale dépend de $x(0)$ et des valeurs de la solution. Cela montre que la condition initiale n'est pas définie et n'est pas connue, la seule information qu'on a sur $x(0)$ est qu'elle dépend de la solution dans certains instants futurs voir [33, 48].

Dans un premier temps on étudiera l'existence de la solution de ce problème et dans un deuxième temps, on discute l'existence et l'unicité de la solution du système suivant,

4. K. Hilal and A. Kajouni ; Existence of the solution for system of coupled hybrid differential equations with fractional order and nonlocal conditions : Int. J. Diff. Eq., 2016, Article ID 4726526

formé par un couple d'équations différentielles hybrides :

$$\begin{cases} D_c^{\alpha}\left(\frac{x(t)}{f_1(t,x(t),y(t))}\right) = g_1(t,x(t),y(t)) \quad p.p. \quad t \in J_1 = [0,1], \quad 1 < \alpha \leq 2, \\ D_c^{\beta}\left(\frac{y(t)}{f_2(t,x(t),y(t))}\right) = g_2(t,x(t),y(t)) \quad p.p. \quad t \in J_1 = [0,1], \quad 1 < \beta \leq 2, \\ \frac{x(0)}{f_1(0,x(0),y(0))} = \mathcal{L}_1(x,y), \quad x(1) = 0, \\ \frac{y(0)}{f_2(0,x(0),y(0))} = \mathcal{L}_2(x,y), \quad y(1) = 0, \end{cases}$$

où $\quad f_i \in C^1(J_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash\{0\}), \quad g_i \in Car(J_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$

et $\quad \mathcal{L}_i : C(J_1,\mathbb{R}) \times C(J_1,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, $(i = 1, 2)$.

De la définition de la dérivée de Caputo, on a d'abord les résultats suivants :

Lemme 5.0.1. [53]. Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle fractionnaire

$${}_0D_c^{\alpha}h(t) \quad = \quad 0,$$

admet les solutions

$$h(t) \quad = \quad c_0 + c_1 t + ... + c_{n-1}t^{n-1} \text{ avec } c_i \in \mathbb{R} \text{ et } i = 1,2,...,n-1,\ \ n = [\alpha] + 1.$$

Lemme 5.0.2. [53]. Soit $\alpha > 0$, alors

$$I_0^{\alpha}\ {}_0D_c^{\alpha}h(t) \quad = \quad h(t) + c_0 + c_1 t + ... + c_{n-1}t^{n-1},$$

pour certains $c_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,...,n-1$ et $n = [\alpha] + 1$.

On appelle solution du EDHFCNL (5.1) une fonction $x \in C^2(J,\mathbb{R})$ telle que :

(i) $\frac{d^2u}{dt^2} \in L^1(J,\mathbb{R})$ où $u : t \mapsto \frac{x}{f(t,x)}$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$, et

(ii) x satisfait l'équation (5.1).

5.1 Résultat d'existence

Dans cette section, nous allons prouver l'existence des solutions de EDHFCNL (5.1) sur l'intervalle fermé borné $J = [0, T]$.

On le faira à l'aide du Théorème 2.2.1.

En vue de ça, on suppose que les hypothèses (H_0)-(H_2) postulées dans la section 2.2 sont satisfaites, ainsi que l'hypothèse suivante :

(H_3) Il existe $M > 0$ tel que

$$|\mathcal{L}(y)| \leq M \text{ pour tout } y \in C(J;\mathbb{R}).$$

Comme conséquence des Lemmes 5.0.1 et 5.0.2, on a le résultat suivant :

Lemme 5.1.1. Supposons que l'hypothèse (H_0) est satisfaite. Pour tout $h \in L^1(J;\mathbb{R})$, la fonction $x \in C^2(J;\mathbb{R})$ est solution de l'EDHFCNL suivant :

$$\begin{cases} D_c^\alpha\Big(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\Big) = h(t) \quad p.p. \quad t \in J = [0,T], \quad 1 < \alpha \leq 2, \\ \frac{x(0)}{f(0,x(0))} = \mathcal{L}(x), \quad \frac{x(T)}{f(T,x(T))} = x_T, \end{cases} \tag{5.2}$$

si, et seulement si, x satisfait l'équation intégrale :

$$x(t) = f(t,x(t)\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ - (\frac{t}{T}-1)\mathcal{L}(x) + \frac{t}{T}x_T\Bigg]. \tag{5.3}$$

Preuve.
Supposons que x est solution du problème (5.3). Appliquons l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo d'ordre α, on obtient la première équation de (5.2). D'autre part, substituons $t=0$ et $t=T$ dans (5.3) nous obtenons les conditions aux limites dans (5.2).
Inversement, puisque $D^\alpha\Big(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\Big) = h(t)$, alors par le Lemme 5.0.2

$$\frac{x(t)}{f(t,x(t))} + c_0 + c_1 t = I^\alpha h(t),$$

et donc $\frac{x(0)}{f(0,x(0))} + c_0 = 0$ et $c_0 = -\mathcal{L}(x)$.
On a aussi

$$\frac{x(T)}{f(T,x(T))} + c_0 + c_1 T = \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds,$$

donc

$$c_1 = \frac{1}{T}\Big(\mathcal{L}(x) - x_T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds\Big),$$

ce qui implique que

$$\frac{x(t)}{f(t,x(t)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ - (\frac{t}{T}-1)\mathcal{L}(x) + \frac{t}{T}x_T.$$

□

Théorème 5.1.1.
Supposons que les hypothèses $(H_0)-(H_3)$ sont vérifiées. Si de plus,

$$L\left(\frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1} + M + |x_T|\right) < 1, \tag{5.4}$$

alors EDHFCNL (5.1) admet au moins une solution définie sur J.

Preuve.

Considérons le sous ensemble de X, S défini par :

$$S = \Big\{ x \in X / \|x\| \leq N \Big\},$$

où

$$N = \frac{F_0\Big(\frac{2T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1} + M + |x_T|\Big)}{1 - L\Big(\frac{2T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1} + M + |x_T|\Big)} \quad \text{et} \quad F_0 = \sup_{t \in J}|f(t,0)|.$$

Il est clair que S satisfait les hypothèses du Théorème 2.2.1.

Par application du Lemme 5.1.1, l'équation EDHFCNL (5.1) est équivalente à l'équation intégrale hybride non-lineaire

$$\begin{aligned} x(t) = f(t, x(t)\Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \\ - (\frac{t}{T} - 1)\mathcal{L}(x) + \frac{t}{T} x_T \Big], \end{aligned} \tag{5.5}$$

Soient, maintenant, les opérateurs $A : X \longrightarrow X$ et $B : S \longrightarrow X$ tels que

$$Ax(t) \;=\; f(t, x(t)), \quad t \in J, \tag{5.6}$$

et

$$\begin{aligned} Bx(t) \;=\; & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \\ & -(\frac{t}{T} - 1)\mathcal{L}(x) + \frac{t}{T} x_T. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Alors, l'équation intégrale hybride (5.5) peut s'écrire

$$x(t) = Ax(t)Bx(t), \quad t \in J. \tag{5.8}$$

Nous allons montrer que les opérateurs A et B satisfont les conditions du Théorème 2.2.1.

Soient $x, y \in X$, par l'hypothèse (H_1) on a

$$|Ax(t) - Ay(t)| = |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq L|x(t) - y(t)| \leq \|x - y\|,$$

pour tout $t \in J$. Par passage au sup sur t, on obtient

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|,$$

pour tout $x, y \in X$.

Montrons que B est continu sur S. En effet

Soit (x_n) une suite dans S convergente vers un point $x \in S$. Alors par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s))ds,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))ds = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s))ds.$$

Et puisque la fonction $\mathcal{L}$ est continue, alors $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(x_n) = \mathcal{L}(x)$, et donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Bx_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))ds \\
&- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))ds - (\frac{t}{T} - 1)\mathcal{L}(x_n) + \frac{t}{T} x_T\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))ds
\end{aligned}$$

$$- \lim_{n\to\infty} \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))ds - \lim_{n\to\infty} (\frac{t}{T} - 1)\mathcal{L}(x_n) + \frac{t}{T} x_T$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s))ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s, x(s))ds \\
&- (\frac{t}{T} - 1)\mathcal{L}(x) + \frac{t}{T} x_T \\
&= Bx(t),
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Ce qui montre que B est continu sur S.

Montrons que B est un opérateur compact .

Commençons par voir que $B(S)$ est uniformément borné dans X.

Soit $x \in S$. Alors, par l'hypothèse (H_2) et pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|Bx(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s))|ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |(T-s)^{\alpha-1} g(s, x(s))|ds \\
&+ |\mathcal{L}(x)| + |x_T| \\
&\leq \frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} + \frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} + |\mathcal{L}(x)| + |x_T| \\
&\leq \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1} + M + |x_T|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|Bx\| \leq \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1} + M + |x_T|,$$

pour tout $x \in S$, ce qui montre que B est uniformément borné sur S.

En suite montrons que $B(S)$ est un sous ensemble équi-continu dans X.

Posons

$$p(t) = \int_0^t h(s)ds.$$

Soient $t_1, t_2 \in J$. Alors, pour chaque $x \in S$ on a

$$\begin{aligned}
|Bx(t_1) - Bx(t_2)| &= |\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s))ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s))ds \\
&- (t_1 - t_2)\frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T |(T - s)^{\alpha-1} g(s, x(s))|ds \\
&- \frac{1}{T}(t_1 - t_2)\mathcal{L}(x) + \frac{1}{T}(t_1 - t_2)x_T|
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
|Bx(t_1) - Bx(t_2)| &\leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |\int_{t_1}^{t_2} |g(s, x(s))|ds| + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |t_1 - t_2| \int_0^T |g(s, x(s))|ds \\
&+ \frac{M + |x_T|}{T} |t_1 - t_2| \\
&\leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |p(t_1) - p(t_2)| + \Big(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{M + |x_T|}{T}|\Big)|t_1 - t_2|.
\end{aligned}$$

Puisque la fonction p est continue sur le compact J, elle est uniformément continue et alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \quad : \quad |t_1 - t_2| < \eta \Longrightarrow |Bx(t_1) - Bx(t_2)| < \varepsilon,$$

pour tout $t_1, t_2 \in J$ et pour tout $x \in X$.

Ce qui montre que $B(S)$ est sous ensemble équi-continu dans X.

Alors, par le théorème d'Arzelá-Ascoli, B est un opérateur compact sur S.

Vérifions maintenant l'hypothèse (c) du Théorème 2.2.1.

Soient $x \in X$ et $y \in S$ tels que $x = AxBy$. Alors,

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= |Ax(t)||By(t)| \\
&\leq |f(t, x(t))| \Big| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} g(s, x(s))ds \\
&- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} g(s, x(s))ds - (\frac{t}{T} - 1)\mathcal{L}(x) + \frac{t}{T} x_T \Big| \\
&\leq \Big[|f(t, x(t)) - f(t, 0)| + |f(t, 0)|\Big] \Big(\frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|h\|_{L^1} + M + |x_T|\Big) \\
&\leq \Big(L|x(t)| + F_0\Big)\Big(\frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|h\|_{L^1} + M + |x_T|\Big).
\end{aligned}$$

Donc

$$|x(t)| - L\Big(\frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1} + M + |x_T|\Big)|x(t)| \le F_0\Big(\frac{2T^\alpha}{(\alpha+1)}\|h\|_{L^1} + M + |x_T|\Big).$$

Ce qui implique que

$$|x(t)| \le \frac{F_0\Big(\frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1} + M + |x_T|\Big)}{1 - L\Big(\frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1} + M + |x_T|\Big)},$$

Ainsi que

$$\|x\| \le \frac{F_0\Big(\frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1} + M + |x_T|\Big)}{1 - L\Big(\frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1} + M + |x_T|\Big)} = N.$$

Ce qui prouve que x est dans S, et donc l'hypothèse (c) du Théorème 2.2.1 est satisfaite. Par suite, on a

$$M = \|B(S)\| = \sup\{\|Bx\| : x \in S\} \le \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1} + M + |x_T|,$$

et alors,

$$\alpha M \le L\Big(\frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1} + M + |x_T|\Big) < 1.$$

Donc l'équation $AxBx = x$ admet au moins une solution définie dans S et par conséquent, l'EDHFCNL (5.1) admet au moins une solution définie sur J. □

5.2 Exemple d'illustration

Pour illustrer les résultats obtenus ci-dessus, on considère l'exemple suivant :

$$\begin{cases} D_c^\alpha\Big(\frac{(2+ln(t+1))(x(t)+x^2(t))}{e^{1-t}}\Big) = \frac{e^{-x^2(t)}}{x^2(t)+t^2+1} \quad p.p. \quad t \in J = [0,1], 1 < \alpha \le 2, \\ \frac{x(0)}{f(0,x(0))} = \sum_{i=1}^n c_i x(t_i), \quad \frac{x(1)}{f(1,x(1))} = 1, \end{cases} \tag{5.9}$$

où $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < 1$ et $c_i, i = 1, 2, ..., n$ sont des constantes positives données. On suppose que $\sum_{i=1}^n c_i < \frac{1-\pi}{2\overline{M}}$ où $\overline{M} = \max_{1\le i\le n} \mathcal{L}(t_i)$, on note

$$f(t,x) \quad = \quad \frac{e^{t-1}}{(2+ln(1+t))(1+x)}, \quad (t,x) \in [0,1] \times [0,+\infty),$$

et

$$g(t,x) \quad = \quad \frac{e^{-x^2}}{x^2+t^2+1}, \quad (t,x) \in [0,1] \times [0,+\infty),$$

et on pose

$$\mathcal{L}(x(t)) \quad = \quad \sum_{i=1}^n c_i x(t_i).$$

Soientt $x, y \in [0, +\infty)$ et $t \in J$. On a

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^{t-1}}{2 + ln(1+t)}\Big|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\Big| \\ &\leq \frac{1}{2}\Big|\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}\Big| \\ &\leq \frac{1}{2}|x-y|, \end{aligned}$$

donc l'hypothèse (H_1) est vérifiée avec $L = \frac{1}{2}$.

D'autre part, (H_2) est satisfaite, en effet,

$$\begin{aligned} |g(t,x)| &= \frac{e^{-x^2}}{x^2 + t^2 + 1} \\ &\leq h(t), \end{aligned}$$

où $\quad h(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et

$$\int_0^1 h(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

De plus, puisque $\mathcal{L} \in C(J, \mathbb{R})$ alors, en posant $\overline{M} = \max_{1 \leq i \leq n} \mathcal{L}(t_i)$ on obtient

$$|\mathcal{L}(t_i)| = |\sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{L}(t_i)| \leq \overline{M} \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Puisque $\quad \sum_{i=1}^{n} c_i < \frac{1-\pi}{2\overline{M}}, \quad$ alors $\quad \pi + 2\overline{M} \sum_{i=1}^{n} c_i < 1$. Donc,

$$\frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)} + 2\overline{M} \sum_{i=1}^{n} c_i < 1,$$

pour tout $\alpha \in (1, 2]$ d'où (5.4). Alors par le Théorème 5.1.1 le problème (5.9) admet au moins une solution définie sur $[0, 1]$.

5.3 Système d'équations différentielles fractionnaires hybrides

Notre but dans cette section est d'obtenir des résultats d'existence, par l'application du théorème de point fixe de Banach, pour le système formé par le couple d'équations différentielles fractionnaires hybrides suivant :

$$\begin{cases} D_c^{\alpha}\Big(\frac{x(t)}{f_1(t,x(t),y(t))}\Big) = g_1(t, x(t), y(t)) \quad p.p. \quad t \in J = [0,1], 1 < \alpha \leq 2, \\ D_c^{\beta}\Big(\frac{y(t)}{f_2(t,x(t),y(t))}\Big) = g_2(t, x(t), y(t)) \quad p.p. \quad t \in J = [0,1], 1 < \beta \leq 2, \\ \frac{x(0)}{f_1(0,x(0),y(0))} = \mathcal{L}_1(x, y), \quad x(1) = 0, \\ \frac{y(0)}{f_2(0,x(0),y(0))} = \mathcal{L}_2(x, y), \quad y(1) = 0, \end{cases} \tag{5.10}$$

où D_c^α est l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo, $f_i \in C^1(J\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R}\backslash\{0\})$, $g_i \in Car(J\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, et $\mathcal{L}_i : C(J,\mathbb{R})\times C(J,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ des fonctions continues , $(i=1,2)$.

Résultats principaux

On considère l'espace de Banach $\mathcal{U} = \{u \setminus u(t) \in C^1([0,1])\}$ muni de la norme $\|u\| = sup\{|u(t)|, t \in [0,1]\}$ et l'espace produit $\mathcal{W} = \mathcal{U}\times\mathcal{U}$ muni de la norme $\|(u,v)\|$ avec $\|(u,v)\| = \|u\| + \|v\|$. Notons que cet espace produit est un espace de Banach.

À l'aide du Lemme 5.1.1, on definit l'opérateur $\theta : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ par :

$$\theta(x,y)(t) = \Big(\theta_1(x,y)(t), \theta_2(x,y)(t)\Big), \tag{5.11}$$

où

$$\begin{aligned}\theta_1(x,y)(t) &= f_1(t,x(t),y(t))\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_1(s,x(s),y(s))ds \\ &- \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} g_1(s,x(s),y(s))ds - (t-1)\mathcal{L}_1(x,y)\Bigg], \\ \theta_2(x,y)(t) &= f_2(t,x(t),y(t))\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_2(s,x(s),y(s))ds \\ &- \frac{t}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} g_2(s,x(s),y(s))ds - (t-1)\mathcal{L}_2(x,y)\Bigg].\end{aligned} \tag{5.12}$$

Dans ce qui suit, on supposera les hypothèses suivantes :

(H_1') Les fonctions f_i sont continues et bornées ; c.à.d qu'il existe des constantes réelles positives L_i telle que $|f_i(t,u,v)| \le L_i$ pour tout $(t,u,v) \in [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(i=1,2)$.

(H_2') Il existe des constantes $\rho_0, \delta_0 > 0$ et $\rho_i, \delta_i \ge 0$, $(i=1,2)$ telles que $|g_1(t,x,y)| \le \rho_0 + \rho_1|x| + \rho_2|y|$ et $|g_2(t,x,y)| \le \delta_0 + \delta_1|x| + \delta_2|y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $(i=1,2)$.

(H_3') Il existe $M_1, M_2 > 0$ telles que $|\mathcal{L}_1(x,y)| \le M_1$ et $|\mathcal{L}_2(x,y)| \le M_2$ pour chaque $x, y \in C([0,1])$.

(H_4') Il existe des réels $\gamma_1, \gamma, \gamma_1', \gamma_2'$ tels que $|\mathcal{L}_1(x_1,y_1) - \mathcal{L}_1(x_2,y_2)| \le \gamma_1|x_1-x_2| + \gamma_2|y_1-y_2|$ et $|\mathcal{L}_2(x_1,y_1) - \mathcal{L}_2(x_2,y_2)| \le \gamma_1'|x_1-x_2| + \gamma_2'|y_1-y_2|$.

Pour simplifier les calculs, on pose

$$\mu_1 = \frac{2L_1}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \mu_2 = \frac{2L_2}{\Gamma(\beta+1)}, \tag{5.13}$$

$$\mu_0 = \min\{1-(\mu_1\rho_1+\mu_2\delta_1), 1-(\mu_1\rho_2+\mu_2\delta_2)\}. \tag{5.14}$$

Présentons maintenant un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (5.10). Le résultat suivant est basé sur le théorème de point fixe de Banach.

Théorème 5.3.1. Supposons que les conditions (H_1'),(H_3') et (H_4') sont vérifiées, les fonctions $g_1, g_2 : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont continues et qu'il existe des constantes positives $\eta_i, \zeta_i, i = 1, 2$ telles que :

$$\begin{aligned} |g_1(t,x_1,y_1) - g_1(t,x_2,y_2)| &= \eta_1|x_1 - x_2| + \eta_2|y_1 - y_2|, \\ |g_2(t,x_1,y_1) - g_2(t,x_2,y_2)| &= \zeta_1|x_1 - x_2| + \zeta_2|y_1 - y_2|, \\ &\quad \forall t \in [0,1], \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Si

$$\mu_1(\eta_1 + \eta_2) + \mu_2(\zeta_1 + \zeta_2) + L_1(\gamma_1 + \gamma_2) + L_2(\gamma_1' + \gamma_2') < 1,$$

alors, le problème (5.10) admet une solution unique.

Preuve.

On pose $\sup_{t\in[0,1]} g_1(t,0,0) = \kappa_1 < \infty$ et $\sup_{t\in[0,1]} g_2(t,0,0) = \kappa_2 < \infty$, et on définit la boule fermé $B_r = \{(x,y) \in \mathcal{W} : \quad \|(x,y)\| \leq r\}$ où

$$r \geq \frac{\mu_1\kappa_1 + \mu_2\kappa_2 + M_1L_1 + M_2L_2}{1 - \mu_1(\eta_1 + \eta_2) - \mu_2(\zeta_1 + \zeta_2)} \tag{5.16}$$

Le reste de la preuve est fait en deux étapes : **Etape 1 :** Montrons que $\theta B_r \subset B_r$.
Soit $(x,y) \in B_r$, on a

$$\begin{aligned} \Big|\theta_1(x,y)(t)\Big| &\leq M_1\Bigg[\sup_{t\in[0,1]}\Big\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|g_1(s,x(s),y(s))|ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}|g_1(s,x(s),y(s))|ds\Big\} \\ &+ |\mathcal{L}_1(x,y)|\Bigg] \\ &= M_1\Bigg[\sup_{t\in[0,1]}\Big\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(|g_1(s,x(s),y(s)) - g_1(s,0,0)| \\ &+ |g_1(s,0,0)|)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-s)^{\alpha-1}(|g_1(s,x(s),y(s)) \\ &- g_1(s,0,0)| + |g_1(s,0,0)|)ds\Big\} + |\mathcal{L}_1(x,y)|\Bigg], \end{aligned}$$

et alors,

$$\begin{aligned} \Big|\theta_1(x,y)(t)\Big| &\leq M_1\left[\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}(\eta_1\|x\| + \eta_2\|y\| + \kappa_1) + L_1\right] \\ &\leq M_1\left[\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}((\eta_1 + \eta_2)r + \kappa_1) + L_1\right] \\ &\leq \mu_1[(\eta_1 + \eta_2)r + \kappa_1] + M_1L_1. \end{aligned}$$

Donc

$$\|\theta_1(x,y)\| \leq \mu_1[(\eta_1+\eta_2)r+\kappa_1]+M_1L_1, \tag{5.17}$$

et

$$\|\theta_2(x,y)\| \leq \mu_2[(\zeta_1+_2)r+\kappa_2]+M_2L_2. \tag{5.18}$$

De (5.17) et (5.18) , il s'ensuit que :

$$\|\theta(x,y)\| \leq r.$$

Etape 2 : Pour $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ et pour tout $t\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}|\theta_1(x_2,y_2)(t)-\theta_1(x_1,y_1)(t)| &\leq L_1\Bigg[\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big|g_1(s,x_2(s),y_2(s))\\ &- g_1(s,x_1(s),y_1(s))\Big|ds+\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big|g_1(s,x_2(s),y_2(s))\\ &- g_1(s,x_1(s),y_1(s))\Big|ds+|\mathcal{L}_1(x_2,y_2)-\mathcal{L}_1(x_1,y_1)|\Bigg].\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|\theta_1(x_2,y_2)(t)-\theta_1(x_1,y_1)(t)| &\leq L_1\Bigg[\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}(\eta_1|x_2(t)-x_1(t)|+\eta_2|y_2(t)-y_1(t)|)\\ &+ \gamma_1|x_2(t)-x_1(t)|+\gamma_2|y_2(t)-y_1(t)|\Bigg]\\ &\leq \mu_1\Big(\eta_1\|x_2-x_1\|+\eta_2\|y_2-y_1\|\Big)\\ &+ L_1\Big(\gamma_1\|x_2-x_1\|+\gamma_2\|y_2-y_1\|\Big)\\ &\leq \Big[\mu_1(\eta_1+\eta_2)+L_1(\gamma_1+\gamma_2)\Big]\Big(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\Big),\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\|\theta_1(x_2,y_2)-\theta_1(x_1,y_1)\| \leq [\mu_1(\eta_1+\eta_2)+L_1(\gamma_1+\gamma_2)](\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|).$$

Par la même manière, on montre que

$$\|\theta_2(x_2,y_2)-\theta_2(x_1,y_1)\| \leq [\mu_2(\zeta_1+\zeta_2)+L_2(\gamma_1'+\gamma_2')](\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|\theta(x_2,y_2)-\theta(x_1,y_1)\| &\leq [\mu_1(\eta_1+\eta_2)+\mu_2(\zeta_1+\zeta_2)+L_1(\gamma_1+\gamma_2)\\ &+ L_2(\gamma_1'+\gamma_2')](\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|).\end{aligned}$$

De la condition $\mu_1(\eta_1+\eta_2)+\mu_2(\zeta_1+\zeta_2)+L_1(\gamma_1+\gamma_2)+L_2(\gamma_1'+\gamma_2')<1$, il s'ensuit que θ est une contraction. Donc θ admet un unique point fixe. Ce qui implique que le problème (5.10) admet une unique solution dans $[0,1]$. □

Dans le résultat suivant, on discute l'existence de la solution du problème (5.10) par l'utilisation du théorème de point fixe suivant :

Théorème 5.3.2. (Alternative non linéaire de Leray-Schauder) [17]
Soit X un espace de Banach et $\mathfrak{F} : X \to X$ un opérateur complétement continu (i.e. sa restriction à tout borné de X est un compact) et soit

$$\mathcal{P}(\mathfrak{F}) = \{x \in X : x = \lambda \mathfrak{F} x, \quad 0 < \lambda < 1\}.$$

Alors, $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$ est non borné ou bien $\mathfrak{F}$ admet au moins un point fixe.

À l'aide de ce théorème on obtient le résultat suivant :

Théorème 5.3.3.
On suppose que les conditions $(H_1') - (H_3')$ sont vérifiées et que $\mu_1\rho_1 + \mu_2\delta_1 < 1$ et $\mu_1\rho_2 + \mu_2\delta_2 < 1$. Alors, le problème (5.10) admet au moins une solution.

Preuve.
Nous allons montrer que l'opérateur $\theta : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ satisfait les hypothèses du Théorème 5.3.2.
On commence par prouver que l'opérateur θ est complétement continu. Il est clair d'après la continuité des fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2 que l'opérateur θ est continu.
Soit $\mathcal{M}$ un sous ensemble borné de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Il existe donc des constantes N_1 et N_2 telles que

$$|g_1(t, x(t), y(t))| \leq N_1 \quad ; \quad |g_2(t, x(t), y(t))| \leq N_2, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{M}. \tag{5.19}$$

Ainsi pour tous $x, y \in \mathcal{M}$, on a

$$\begin{aligned} |\theta_1(x,y)(t)| &\leq L_1 \Bigg[\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |g_1(s, x(s), y(s))| ds \\ &+ t \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |g_1(s, x(s), y(s))| ds + (1-t)\mathcal{L}_1(x,y) \Bigg] \\ &\leq L_1 N_1 \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} + M_1. \end{aligned}$$

Par suite

$$\|\theta_1(x,y)\| \leq N_1\mu_1 + M_1,$$

et de la même manière, on a

$$\|\theta_2(x,y)\| \leq N_2\mu_2 + M_2.$$

D'où l'opérateur θ est uniformément borné. Maintenant, montrons que l'opérateur θ est équicontinu.

Soient $\tau_1, \tau_2 \in [0,1]$ avec $\tau_1 < \tau_2$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|\theta_1(x(\tau_2), y(\tau_2)) - \theta_1(x(\tau_1), y(\tau_1))| &\leq L_1 N_1 \Big| \int_0^{\tau_2} \frac{(\tau_2 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - \int_0^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \Big| \\
&+ L_1 N_1 |\tau_2 - \tau_1| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds + M_1 |\tau_2 - \tau_1| \\
&\leq L_1 N_1 \Big| \int_0^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - s)^{\alpha-1} - (\tau_2 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \\
&- \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{(\tau_2 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \Big| \\
&+ L_1 N_1 |\tau_2 - \tau_1| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds + M_1 |\tau_2 - \tau_1|.
\end{aligned}$$

Aussi, on a

$$\begin{aligned}
|\theta_2(x(\tau_2), y(\tau_2)) - \theta_2(x(\tau_1), y(\tau_1))| &\leq L_2 N_2 \Big| \int_0^{\tau_2} \frac{(\tau_2 - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds - \int_0^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds \Big| \\
&+ L_2 N_2 |\tau_2 - \tau_1| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds + M_2 |\tau_2 - \tau_1| \\
&\leq L_2 N_2 \Big| \int_0^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - s)^{\beta-1} - (\tau_2 - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds \\
&- \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{(\tau_2 - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds \Big| \\
&+ L_2 N_2 |\tau_2 - \tau_1| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds + M_2 |\tau_2 - \tau_1|,
\end{aligned}$$

et donc lorsque $\tau_1 \to \tau_2$, on a

$$\begin{aligned}
|\theta_1(x(\tau_2), y(\tau_2)) - \theta_1(x(\tau_1), y(\tau_1))| &\to 0 \\
|\theta_2(x(\tau_2), y(\tau_2)) - \theta_2(x(\tau_1), y(\tau_1))| &\to 0,
\end{aligned}$$

et ceci indépendement de (x, y). Ce qui implique que l'opérateur $\theta(x, y)$ est équicontinu et donc complétement continu.

Dans l'étape suivante, on va établir que l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} / (x, y) = \lambda \theta(x, y), \quad 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

est borné.

Soit $(x, y) \in \mathcal{P}$, i.e. $(x, y) = \lambda \theta(x, y)$. Par conséquent, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$x(t) = \lambda \theta_1(x, y)(t), \quad y(t) = \lambda \theta_2(x, y)(t).$$

Alors

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \frac{2L_1}{\Gamma(\alpha+1)}(\rho_0+\rho_1\|x\|+\rho_2\|y\|)+M_1, \\ |y(t)| &\leq \frac{2L_2}{\Gamma(\beta+1)}(\delta_0+\delta_1\|x\|+\delta_2\|y\|)+M_2, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \mu_1(\rho_0+\rho_1\|x\|+\rho_2\|y\|)+M_1, \\ \|y\| &\leq \mu_2(\delta_0+\delta_1\|x\|+\delta_2\|y\|)+M_2. \end{aligned}$$

Ainsi que

$$\|x\|+\|y\| \leq (\mu_1\rho_0+\mu_2\delta_0+M_1+M_2)+(\mu_1\rho_1+\mu_2\delta_1)\|x\|+(\mu_1\rho_2+\mu_2\delta_2)\|y\|,$$

et donc par la relation (5.16), on a

$$\|(x,y)\| \leq \frac{\mu_1\rho_0+\mu_2\delta_0+M_1+M_2}{\mu_0}.$$

D'où l'ensemble $\mathcal{P}$ est borné.

Donc toutes les conditions du Théorème 5.3.2 sont satisfaites et par conséquent l'opérateur θ admet au moins un point fixe qui est bien une solution du problème (5.10). Ce qui achève la preuve. □

Conclusions et Perspectives

Nous rappelons les points principaux de ce travail et nous signalons quelques directions pour des recherches futures. De façon générale, dans cette thèse, nous avons abordé quelques résultats d'existence des solutions de quelques équations différentielles d'ordre fractionnaire particulières à savoir celles qui sont nommées hybrides. Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé quelques théorèmes de point fixe de Dhage.

Le premier chapitre nous a permis de nous familiariser avec l'outils fractionnaires et nous a fournit quelques résultats élémentaires utiles pour l'étude de ces équations. Nous avons commencé par un rappel historique du calcul fractionnaire, puis nous avons exposé la théorie de la dérivation fractionnaire : différents types de dérivation fractionnaire (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo) et quelques exemples et propriétés.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour une équation différentielle hybride du premier ordre. Sous des conditions mixtes de Lipschitz et Carathéodory on a montré les résultats d'existence de ce problème et par la théorie des inégalités différentielles, on a montré l'existence des solutions extrêmales et quelques résultats de comparaison et aussi l'unicité de ce même problème.

Dans le troisième chapitre, on a travaillé cette fois ci sur un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire hybride en moyennant l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$. On a donné des conditions assurant l'existence d'au moins d'une solution de ce problème et dans le but d'avoir des conditions qui garantie l'unicité de cette solution on a prouvé des résultats importants concernant la théorie des inégalités différentielles fractionnaires hybrides liées a ce problème.

Dans le quatrième chapitre de ce travail, on a considéré une équation différentielle fractionnaire hybride en moyennant l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-

Liouville d'ordre $1 < \alpha < 2$. En se basant sur des résultats classiques de cette théorie on a prouvé l'existence d'au moins d'une solution de cette équation sous des conditions mixtes de Lipschitz et Carathéodory.

Le dernier chapitre de ce travail est consacré à l'étude d'une équation différentielle fractionnaire hybride et à condition non locale, on a donné un résultat d'existence de la solution de ce problème et à l'aide de ce résultat on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un couple d'équations différentielles fractionnaires hybrides à conditions non locales et en utilisant des différents théorèmes de la théorie de point fixe.

Enfin, ce domaine est très riche en questions ouvertes, par conséquent différentes perspectives peuvent être lancées à la suite de ce travail, ces perspectives qui vont constituer des orientations possibles pour des travaux futurs que l'on peut envisager, au moyen terme, nous pouvons citer :

- Dans les problèmes d'équations différentielles fractionnaires hybrides, la diversité de la nature des conditions impulsives qui peuvent être de type intégral ou multi-points, en nombre fini ou infini de moments d'impulsion, fixes ou variables, nous incite à l'étude d'une classe d'équations différentielles d'ordres fractionnaires hybrides soumises à des conditions impulsives de type intégral. Nous prévoyons ensuite, l'établissement de conditions nécessaires et suffisantes d'admissibilité (régularité, stabilité...) pour ces equations.
- Dans les inclusions différentielles, nous avons l'intention d'étudier ultérieurement des inclusions différentielles hybrides d'ordre fractionnaire α avec $0 < \alpha < 1$ ou $1 < \alpha < 2$ et à divers conditions aux limites.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal. A propos d'une note de m. pierre humbert. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 236(21) :2031–2032, 1953.

[2] R.P. Agarwal, Y. Zhou, and Y. He. Existence of fractional neutral functional differential equations. *Comp. Math. Appl.*, 59(3) :1095–1100, 2010.

[3] B. Ahmad and J.J. Nieto. Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2009. Hindawi Publishing Corporation, 2009.

[4] B. Ahmad and J.J. Nieto. Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions. *Computers Mathematics with Applications*, 58(9) :1838–1843, 2009.

[5] E. Artin. Einführung in die theorie der gammafunktion. *Holt, Rinehart and Winston, New York*, 1931.

[6] L.R. Bagley and J. Torvik. Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA journal*, 21(5) :741–748, 1983.

[7] K. Balachandran and J.J. Trujillo. The nonlocal cauchy problem for nonlinear fractional integrodifferential equations in banach spaces. *Nonlinear Anal.*, 72(12) :4587–4593, 2010.

[8] P. Baras and M. Pierre. Critère d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones. In *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*, volume 2, pages 185–212, 1985.

[9] J.L. Battaglia, L.L. Lay, J. Batsale, A. Oustaloup, and O. Cois. Utilisation de modèles d'identification non entiers pour la résolution de problèmes inverses en conduction. *International journal of thermal sciences*, 39(3) :374–389, 2000.

[10] M. Belmekki, J. Nieto, and R. Rodriguez-Lopez. Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation. *Bound. Value Probl.*, 2009(1) :18, Article ID 324561, 2009.

[11] F. Ben Adda. Interprétation géométrique de la différentiabilité et du gradient d'ordre réel. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 326(8) :931–934, 1998.

[12] M. Benchohra and S.K. Ntouyas. Boundary value problems for differential equations with fractional order. *Surveys in Mathematics and its Appl.*, 3 :1–12, 2008.

[13] G.L. Bullock. A geometric interpretation of the riemann-stieltjes integral. *The American Mathematical Monthly*, 95(5) :448–455, 1988.

[14] M. Caputo. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent. *Annals of Geophysics*, 19(4) :383–393, 1966.

[15] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia, and J.L. Battaglia. Non integer model from modal decomposition for time domain system identification. *Proc.IFAC SYSID*, pages 21–23, 2000.

[16] R. Darling and J. Newman. On the short-time behavior of porous intercalation electrodes. *J.Elect. Soc.*, 144(9) :3057–3063, 1997.

[17] K. Deimling. Nonlinear functional analysis. *Am. Math. Soc.*, Germany, 1985.

[18] J.V. Devi, F.A. Mc Rae, and Z. Drici. Variational lyapunov method for fractional differential equations. *Comp. Math. Appl.*, 64(10) :2982–2989, 2012.

[19] B.C. Dhage. On a α-condensing mappings in banach algebras. *Math. Student*, 63(1) :146–152, 1994.

[20] B.C. Dhage. Fixed point theorems in ordered banach algebras and applications. *Panam. Math. J.*, 9 :83–102, 1999.

[21] B.C. Dhage. A nonlinear alternative in banach algebras with applications to functional differential equations, nonlinear funct. *Anal. Appl.*, 8(40) :563–575, 2004.

[22] B.C. Dhage. On a fixed point theorem in banach algebras with applications. *Appl. Math. Lett.*, 18(3) :273–280, 2005.

[23] B.C. Dhage and V. Lakshmikantham. Basic results on hybrid differential equations. *Nonlinear Anal. Hybrid*, 4(3) :414–424, 2010.

[24] K. Diethelm. Fractional differential equations, theory and numerical treatment. *Techn. Univ. Braunschweig*, 93, 2003.

[25] K. Diethelm and A.D. Freed. On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity. *Sc. Comp. Chem. Eng.*, 39(3) :217–224, 1999.

[26] F. Dubois, A.C. Galucio, and N. Point. Introduction à la dérivation fractionnaire. théorie et applications. *Techn. Ing. AF510*, 2010.

[27] A. El-Sayed. Fractional order evolution equations. *J. Fract. Calc*, 7(1) :995, 1995.

[28] A. El-Sayed and A.G. Ibrahim. Multivalued fractional differential equations. *Appl. Math. Comp.*, 68(1) :15–25, 1995.

[29] A. Erdélyi. Higher transcendental functions. *McGraw-Hill New York*, 2, 1955.

[30] A. Erdélyi. Higher transcendental functions. *McGraw-Hill New York*, 3, 1955.

[31] V. Gafiychuk, B. Datsko, and V. Meleshko. Mathematical modeling of time fractional reaction–diffusion systems. *Comp.Appl.Math.*, 220(1) :215–225, 2008.

[32] S. Heikkila and V. Lakshmikantham. Monotone iterative technique for nonlinear discontinuous differential equations, Dekker Inc., New York, 1994.

[33] E. Hernández. Existence of solutions to a second order partial differential equation with nonlocal condition. *Electr. J. Differ. Equ.*, 51 :1–10, 2003.

[34] N. Heymans and I. Podlubny. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with riemann-liouville fractional derivatives. *Rheologica Acta*, 45(5) :765–771, 2006.

[35] K. Hilal and A. Kajouni. Boundary value problems for hybrid differential equations. *Mathematical Theory and Modeling*, 5(1), 2015.

[36] K. Hilal and A. Kajouni. Boundary value problems for hybrid differential equations with fractional order. *Adv. Diff. Eq.*, 2015(1) :1–19, 2015.

[37] K. Hilal and A. Kajouni. Existence of solutions for hybrid differential equation with fractional order. *Mathematical Theory and Modeling*, 6(2), 2016.

[38] K. Hilal and A. Kajouni. Existence of the solution for system of coupled hybrid differential equations with fractional order and nonlocal conditions. *Int. J. Diff. Eq.*, 2016, 2016.

[39] R. Hilfer. *Applications of fractional calculus in physics*. World Scientific, 2000.

[40] A.A. Kilbas, O.I. Marichev, and S.G. Samko. Fractional integrals and derivatives : Theory and applications. *Gordon and Breach*, 93, 1993.

[41] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. *Elsevier Science B.V, Amsterdam*, 2006.

[42] V. Lakshmikantham and J.V. Devi. Theory of fractional differential equations in a banach space. *Eur. J. Pure Appl. Math*, 1(1) :38–45, 2008.

[43] V. Lakshmikantham and S. Leela. *Differential and integral inequalities.* Academic press, 1969.

[44] V. Lakshmikantham and A.S. Vatsala. Basic theory of fractional differential equations. *Nonlinear Anal. : Th. Meth.Appl.*, 69(8) :2677–2682, 2008.

[45] K.S. Miller and B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *J.Wiley Inter., New York*, 1993.

[46] G.M. Mittag-Leffler. Sur la nouvelle fonction $e_\alpha(x)$. *CR Acad. Sci. Paris Ser*, 2(137) :554–558, 1903.

[47] G.M. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène. *Acta Mathematica*, 2(29) :101–182, 1905.

[48] G.M. Mophou and G.M. N'Guérékata. Existence of the mild solution for some fractional differential equations with nonlocal conditions. *Adv. Diff. Eq.*, 18 :315–322, 2008.

[49] K.B. Oldham and J. Spanier. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.* Elsevier, 1974.

[50] I. Podlubny. Fractional differential equations : An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. *Math. Sc. Engineering*, 198, 1999.

[51] B. Ross. Fractional calculus. *Mathematics Magazine*, 50(3) :115–122, 1977.

[52] C.R. Serment. Synthèse d'un isolateur vibratoire d'ordre non entier fondée sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques. *PhD thesis, Université Bordeaux 1, France*, 2001.

[53] S. Zhang. Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations. *Electronic J. Diff. Eq.*, 36 :1–12, 2006.

[54] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, and Q. Li. Theory of fractional hybrid differential equations. *Comp. Math. Appl.*, 62(3) :1312–1324, 2011.

[55] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, and M. Zhang. Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations. *Comp. Math. Appl.*, 217(16) :6950–6958, 2011.