Espace métrique floue intuitionistique

M.Elomari

6 juillet 2017

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à l'égard du Professeur **Said MELLIANI**. Ce n'est pas seulement ses qualités mathématiques qui ont l'effet sur ce travail, mais aussi ses qualités humaines qui ont rendu ces années de recherche agréables et enrichissantes. Je lui dois ses conseils, ses encouragements et ses critiques qui m'ont permis de mener à bien cette thèse.

Je remercie également et très sincèrement le professeur Madame **Lalla Saadia CHADLI**. Pour son aide et ses conseils, son exigence et sa rigueur qui m'ont permis d'accomplir cette thèse. Je voudrais lui adresser mes plus profondes reconnaissances et de lui exprimer mon admiration pour sa valeur humaine et professionnelle.

Je remercie le Professeur **Khalid NAJIB** d'avoir bien voulu me faire l'honneur de présider le jury.

Le Professeur **Hassan EL AMRI**, le Professeur **El Houssine AZROUL** et le Professeur **Khalid HILAL** qui m'ont fait le très grand honneur d'avoir accepté de juger et évaluer ce travail.

J'exprime ma reconnaissance au Professeur **Ali BOUTOULOUT** et au Professeur **Adil ABBASSI** d'avoir accepté de se joindre aux membres du jury.

Pendant ces années de la recherche, j'ai eu la chance de travailler avec des mathématiciens qui ont été une source d'inspiration pour moi par la profondeur de leur savoir, la clarté de leurs idées, leur talent ou tout simplement leur grande gentillesse. C'est grâce à eux que j'ai trouvé l'énergie d'attaquer des problèmes qui me paraissaient insurmontables. Je veux en particulier remercier ici le Professeur **Krassimir ATANASSOV** et le Professeur **Gokhan CUVALCIOGLU**.

je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude à tous les amis de l'université de Mersin en Turkey, pour leur hospitalité pendant les jours des conférences.

Introduction

Dans la théorie des ensembles, introduite par G. Cantor en 1880, tout sous-ensemble A d'un ensemble X est caractérisé par une fonction notée χ_A appelée fonction caractéristique de A. Cette fonction ne prend que deux valeurs 0 ou 1, selon l'appartenance de l'élément de X à l'ensemble A.

La recherche dans la théorie floue, durant les quarante-six dernières années, étant basée sur le célèbre article "Fuzzy sets" publié par L.A.Zadeh (1965). Cet article a révélé le pouvoir de cette théorie comme un outil très important pour la modélisation incertaine et le processus vague et subjectif de l'information dans les modèle mathématiques.

Cette théorie nous permet de modéliser le traitement de l'information. Différentes tentatives ont été faites pour établir des théories mathématiques qui sont basées sur les ensembles flous au lieu d'ensembles ordinaires. Les moyens pour comprendre le comportement humain en termes de distribution dans l'espace métrique ont été fournis, et les applications aux différents domaines de traitement de l'information ont été discutées. Cette théorie nous permet aussi d'évaluer l'influence des paramètres imprécis dans les différents modèles que ce soit mathématiques, techniques ou physiques (analyse des données, intelligence artificielle, théorie de la décision, controle, reconnaissance des formes, etc ...)
Un sous-ensemble flou A d'un univers X est caractérisé par une fonction notée μ_A appelée degré d'appartenance, elle peut être regardée comme une généralisation de la fonction caractéristique.

En 1983, K.Atanassov a introduit la théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques. qui est en fait une extension de la théorie des sous-ensembles flous, et chaque sous-ensemble flou intuitionistique A d'un univers X est caractérisée par les deux fonctions μ_A et ν_A appelées respectivement degré d'appartenance et degré de non-appartenance, et vérifient la condition suivante :

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X$$

En 1984 Kaleva et Seikkala [17] ont introduit la notion d'espace métrique flou, en se basant sur le principe d'extension de Zadeh appliqué à la distance de Hausdorff.

Dans notre travail, en s'appuyant sur les études antérieures, nous avons construit une distance sur les sous-ensembles flous qui nous a permis de donner un sens à la notion d'une métrique sur l'espace des sous-ensembles flous intuitionistiques.

Ce travail est composé de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, on introduit les notions de base de la théorie des ensembles flous suite aux différents travaux élaborer par L.Zadeh [43], H. Prade et D. Dubois [9], H. Bandemer [4], S. Miyamoto [28], A. Kaufmann [19], H. Nguyen [30], M.Mizumoto et K. Tanaka [29].

Dans le second chapitre, on présente la notion d'espace métrique flou, donnée par Kaleva et Seikkala [17]. Puis on complète par la notion de convergence dans cet espace selon la topologie induite de cette métrique.

Le troisième chapitre est consacré à la théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques et ses propriétés élaborée par K. Atanassov.

Dans le chapitre quatre on s'intéresse à la construction d'une nouvelle métrique définie sur l'espace des sous-ensembles flous intuitionistiques. Puis on présente quelques propriétés topologiques induites de cette métrique.

Chapitre 1

Sous-ensembles flous

1.1 Notions fondamentales

1.1.1 Définitions et exemples

Dans cette section on va présenter la notion de sous ensemble flou, pour cela soit X un univers.

Définition 1. *On définit un sous-ensemble flou A de X par la donnée d'une fonction*

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$$

Cette fonction est appelée "fonction d'appartenance" de A.
On peut aussi représenter le sous-ensemble flou A par

$$A = \left\{(x, \mu_A(x)),\ x \in X\right\}$$

on note par $\mathbb{F}(X)$ la collection de tous les sous-ensembles flous de X.

Remarque 1. *Un ensemble classique M est un sous-ensemble flou, il suffit de considérer sa fonction d'appartenance égale à sa fonction caractŕistique.*

$$\mu_M = \chi_M$$

Définition 2. *Soit A un sous-ensemble flou d'un univers X.*

— *On appelle support de A noté $S(A)$, (Supp(A)), l'ensemble*

$$S(A) = \Big\{x \in X, \quad \mu_A(x) > 0\Big\}.$$

— *On appelle noyau de A noté $N(A)$ l'ensemble*

$$N(A) = \Big\{x \in X, \quad \mu_A(x) = 1\Big\}.$$

— *On appelle hauteur de A notée $h(A)$ le réel*

$$h(A) = \sup\Big\{\mu_A(x), \quad x \in X\Big\}.$$

— *On dit que A est normal s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\mu_A(x_0) = 1.$$

— *Soit $\alpha \in]0,1]$ On appelle α-coupe de A noté A^α l'ensemble*

$$A^\alpha = \Big\{x \in X, \quad \mu_A(x) \geq \alpha\Big\}.$$

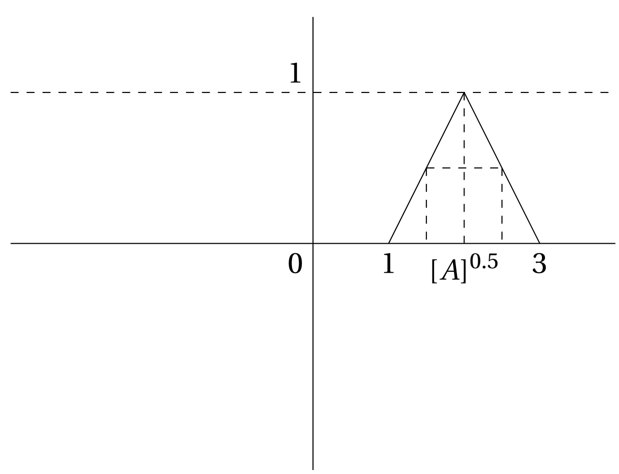
On le note aussi $[A]^\alpha$.

— *Pour $\alpha = 0$, c'est la fermeture du support.*

Exemple 1. *Soit le sous ensemble flou A décrit par sa fontion d'appartenance*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x-1 & \textit{pour } x \in [1,2] \\ -x+3 & \textit{pour } x \in [2,3] \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

A est un ensemble flou de $\mathbb{R}$ dont le support est $Supp(A) =]1,3[$ et $A^1 = \{2\}$.



1.2 Principe d'extension de Zadeh

Le principe d'extension a été décrit par L.A.Zadeh [43]. Il nous permet de donner un sens à l'extension du domaine d'une application ou d'une relation définie sur un ensemble X aux sous ensembles flous de X. On a montré dans [29] que l'approche ensembliste (i.e. l'utilisation des α-coupes d'un ensemble flou) est très simple que l'approche fonctionnelle (i.e. l'utilisation des fonctions d'appartenances).
L'application du principe d'extension aux ensembles flous peut être regardée comme une application de ce principe aux α-coupes de l'ensemble flou en question.
En général si

$$f : X \times Y \longrightarrow Z$$

et si A et B sont des sous ensembles flous respectifs de X et Y, respectivement, on obtient

$$\Big[f(A,B)\Big]^{\alpha} = f\Big([A]^{\alpha}, [B]^{\alpha}\Big)$$

où $[A]^{\alpha}$, $[B]^{\alpha}$ et $[f(A,B)]^{\alpha}$ sont respectivement les α-coupes de A, B et $f(A,B)$.
On veut donner une condition necessaire et suffisante pour obtenir cette égalité, et définir une classe de nombres flous où cette égalité est vérifiée pour toute fonction f continue.

1.2.1 Résolution de l'identité

Pour $\alpha \in]0,1]$, rappellons que l'ensemble α-coupe de A est défini par

$$[A]^{\alpha} = \Big\{x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha\Big\}$$

Si $A, B \in \mathbb{F}(X)$, alors par définition,

$$A = B \text{ si et seulement si } \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in X$$

Si $A, B \in \mathbb{F}(X)$, alors par définition,

$$A = B \text{ si et seulement si } [A]^{\alpha} = [B]^{\alpha}, \quad \forall \alpha \in]0,1]$$

Il est aussi évident que

$$Supp(A) = \bigcup_{\alpha \in]0,1]} [A]^{\alpha}$$

D'autre part, on a

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \left(\alpha \chi_{[A]^\alpha}(x) \right) \tag{1.2.1}$$

Ainsi A peut être représenté comme suit

$$A = \int_0^1 \alpha [A]^\alpha \tag{1.2.2}$$

où $\int_0^1$ represente l'union sur $\alpha \in]0,1]$, et $\alpha[A]^\alpha$ est l'ensemble flou dont la fonction d'appartenance est

$$\chi_{\alpha[A]^\alpha} = \begin{cases} \alpha, & \text{si} \quad x \in [A]^\alpha \\ 0, & \text{si} \quad x \notin [A]^\alpha \end{cases}$$

Proposition 1. *Si $\{B^\alpha\}_{\alpha \in]0,1]}$ est une famille de sous-ensembles de X, tels que*

$$A = \int_0^1 \alpha B^\alpha$$

alors,

1. $B^\alpha \subset [A]^\alpha, \quad \forall \alpha \in]0,1]$.
2. $\bigcup_{\alpha \in]0,1]} B^\alpha = \bigcup_{\alpha \in]0,1]} [A]^\alpha$

Démonstration. 1. Soit $\alpha_0 \in]0,1]$, si $x \in B^{\alpha_0}$, alors $\alpha_0 \chi_{B^{\alpha_0}}(x) = \alpha_0$, et ainsi

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha \chi_{A^\alpha}(x) \\ &= \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha \chi_{[A]^\alpha}(x) \\ &\geq \alpha_0 \end{aligned}$$

Par suite $x \in [A]^{\alpha_0}$.

2. Les deux membres de l'égalité sont exactement égaux à $Supp(A)$.

□

1.2.2 Opérations sur les ensembles flous

Les opérations sur les sous-ensembles flous sont généralement des extensions des opérations connues sur les ensembles classiques (égalité, réunion, intersection, complément, etc.). Elles s'appliquent d'ailleurs aux ensembles classiques lorsque les fonctions d'appartenance se réduisent à des fonctions caractéristiques.

— **Complémentaire** : Soit $A \in \mathbb{F}(X)$ caractérisé par la fonction d'appartenance μ_A.
Le complémentaire de A est un sous-ensemble flou, noté $\overline{A}$, et caractérisé par la fonction d'appartenence $\mu_{\overline{A}}$, définie par :

$$\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A(x), \ \ \forall x \in X$$

— **Réunion** : Pour tout $A, B \in \mathbb{F}(X)$, la réunion de A et B est un sous-ensemble flou de X, noté $A \cup B$, et

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X$$

— **Intersection** Pour tout $A, B \in \mathbb{F}(X)$, l'intersection de A et B est un sous-ensemble flou de X, noté $A \cap B$, et

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X$$

1.2.3 Principe d'extension

Définition 3. *Soit $f : X \longrightarrow Y$, et $A \in \mathbb{F}(X)$, alors l'ensemble flou $f(A)$ est défini, via le principe d'extension, par*

$$f(A) \in \mathbb{F}(Y) \qquad \textit{et} \qquad \mu_{f(A)}(y) = \sup_{x\in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \tag{1.2.3}$$

Remarque 2. *Dans l'ordre d'appliquer ce principe aux applications floues, on reécrit* (1.2.3) *sous la forme équivalente suivante*

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x\in X} \min\Big(\mu_A(x), \chi_{\{f(x)\}}(y)\Big) \tag{1.2.4}$$

Proposition 2. *Soit $A \in \mathbb{F}(X)$ et $f : X \longrightarrow Y$, alors*

$$f(A) = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha) \tag{1.2.5}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mu_{f(A)}(y) &= \sup_{x\in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \\
&= \sup_{x\in f^{-1}(y)} \left[\sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x)\right] \\
&= \sup_{\substack{x\in f^{-1}(y)\\ \alpha\in]0,1]}} \left[\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x)\right]
\end{aligned}$$

D'autre part, soit $B = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha)$. Alors

$$
\begin{aligned}
\mu_B(y) &= \sup_{0<\alpha\leq 1} \alpha \chi_{f([A]^\alpha)} \\
&= \sup_{0<\alpha\leq 1} \left[\alpha \sup_{x\in f^{-1}(y)} \chi_{[A]^\alpha}(x) \right] \\
&= \sup_{0<\alpha\leq 1} \left[\sup_{x\in f^{-1}(y)} \alpha \chi_{[A]^\alpha}(x) \right] \\
&= \sup_{\substack{x\in f^{-1}(y) \\ \alpha\in]0,1]}} \left[\alpha \chi_{[A]^\alpha}(x) \right]
\end{aligned}
$$

□

Remarque 3. *On a*

$$f(A) = \int_0^1 \alpha \Big[f(A) \Big]^\alpha = \int_0^1 \alpha f\Big([A]^\alpha \Big)$$

avec

$$f\Big([A]^\alpha\Big) \subset \Big[f(A) \Big]^\alpha, \quad \forall \alpha \in]0,1].$$

Mais en général

$$f\Big([A]^\alpha\Big) \neq \Big[f(A) \Big]^\alpha.$$

Proposition 3. *Soient $f : X \times Y \longrightarrow Z$, $A \in \mathbb{F}(X)$ et $B \in \mathbb{F}(Y)$, alors*

$$f(A,B) = \int_0^1 \alpha f\Big([A]^\alpha, [B]^\alpha \Big)$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
\mu_{f(A,B)}(z) &= \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(y) \Big) \\
&= \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \left(\min\left(\sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha \chi_{[A]^\alpha}(x), \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha \chi_{[} B]^\alpha(y) \right) \right)
\end{aligned} \tag{1.2.6}
$$

Soit $T = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha, [B]^\alpha)$

$$
\begin{aligned}
\mu_T(z) &= \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha \chi_{f([A]^\alpha, [B]^\alpha)}(z) \\
&= \sup_{\alpha\in]0,1]} \left[\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min\big(\alpha \chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha \chi_{[B]^\alpha}(y) \big) \right] \\
&= \sup_{\substack{\alpha\in]0,1] \\ (x,y)\in f^{-1}(z)}} \Big[\min\big(\alpha \chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha \chi_{[B]^\alpha}(y) \big) \Big]
\end{aligned} \tag{1.2.7}
$$

Pour montrer que (1.2.6) et (1.2.7) sont équivalentes, il suffit de montrer que

$$\min(\alpha_0, \beta_0) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \Big(\min\Big(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y)\Big)\Big), \tag{1.2.8}$$

où

$$\alpha_0 = \sup_{0<\alpha\leq 1} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x)$$
$$\beta_0 = \sup_{0<\alpha\leq 1} \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y)$$

Si $\min(\alpha_0, \beta_0) = 0$, disons $\alpha_0 = 0$, alors $\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x) = 0$ pour tout $\alpha \in]0,1]$ ainsi (1.2.8) est vérifiée.

Supposons maintenant que $\min(\alpha_0, \beta_0) > 0$, alors

$$x \in [A]^\alpha \quad \text{pour tout } \alpha < \alpha_0$$
$$x \notin [A]^\alpha \quad \text{pour tout } \alpha > \alpha_0.$$

En effet

— S'il existe α' telle que

$$\alpha' < \alpha_0 \quad \text{tel que} \quad x \notin [A]^{\alpha'},$$

alors

$$\sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x) = \mu_A(x) < \alpha' < \alpha_0 = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x).$$

ce qui est absurde.

— S'il existe

$$\alpha'' > \alpha_0 \quad \text{tel que} \quad x \in [A]^\alpha,$$

alors $\sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x) \geq \alpha_0$ qui est une contradiction.

De la même manière, on a

$$y \in [B]^\alpha \quad \text{pour tout} \quad \alpha < \beta_0$$
$$y \notin [B]^\alpha \quad \text{pour tout} \quad \alpha > \beta_0$$

d'où

$$\min\big(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y)\big) = \begin{cases} \alpha & \text{pour} \quad \alpha < \min(\alpha_0, \beta_0) \\ 0 & \text{pour} \quad \alpha > \min(\alpha_0, \beta_0) \end{cases}$$

et

$$\min(\alpha_0,\beta_0)=\sup_{\alpha\in]0,1]}\Big(\min\Big(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x),\alpha\chi_{[B]^\alpha}(y)\Big)\Big) \tag{1.2.9}$$

$\square$

Remarque 4. *On a*

$$f\left([A]^\alpha,[B]^\alpha\right)\subset\Big[f(A,B)\Big]^\alpha,\quad \forall\alpha\in]0,1].$$

Mais en général

$$f\left([A]^\alpha,[B]^\alpha\right)\neq\left[f(A,B)\right]^\alpha.$$

Proposition 4. *Avec les notations de la proposition* (3)*, une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité suivante* $f\left([A]^\alpha,[B]^\alpha\right)=\left[f(A,B)\right]^\alpha,\ \forall\alpha\in]0,1]$ *est* $\forall z\in Z,\ \sup\limits_{(x,y)\in f^{-1}(z)}\min\left(\mu_A(x),\mu_B(y)\right)$ *est atteint.*

Démonstration. (i) condition nécessaire :

Soit $z\in Z$ tel que $\sup\limits_{(x,y)\in f^{-1}(z)}\min\left(\mu_A(x),\mu_B(y)\right)=t\in]0,1]$

$$\begin{aligned}\mu_{f(A,B)}(z)=t&\Longrightarrow z\in\left[f(A,B)\right]^t\\ &\Longrightarrow z\in f\left([A]^t,[B]^t\right)\end{aligned}$$

ainsi il existe $\overline{x}\in[A]^t$ et $\overline{y}\in[B]^t$ tels que $f(\overline{x},\overline{y})=z$

d'où

$$\min\Big(\mu_A(\overline{x}),\mu_B(\overline{y})\Big)\geq t$$

mais

$$\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)}\min\Big(\mu_A(x),\mu_B(y)\Big)\geq\min\Big(\mu_A(x),\mu_B(y)\Big)$$

ce qui montre que

$$\min\left(\mu_A(x),\mu_B(y)\right)=t$$

(ii) condition suffisante :

D'après la proposition 1 et la proposition 3, on a

$$f\left([A]^\alpha,[B]^\alpha\right)\subset\left[f(A,B)\right]^\alpha$$

maintenant soit $z \in [f(A,B)]^\alpha$ c-à-d

$$\mu_{f(A,B)}(z) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(y)\Big) \geq \alpha$$

Si $\mu_{f(A,B)}(z) > \alpha$, par définition du sup il existe $(\overline{x}, \overline{y}) \in f^{-1}(z)$ tel que

$$\alpha < \min\Big(\mu_A(\overline{x}), \mu_B(\overline{y})\Big) \Longrightarrow (\overline{x}, \overline{y}) \in [A]^\alpha \times [B]^\alpha$$

ainsi $z = f\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \in f\left([A]^\alpha, [B]^\alpha\right)$

Si $\mu_{f(A,B)}(z) = \alpha$, alors par hypothèse, il existe $(\overline{x}, \overline{y}) \in f^{-1}(z)$ tel que

$$\alpha = \min\Big(\mu_A(\overline{x}), \mu_B(\overline{y})\Big) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(y)\Big) \Longrightarrow (\overline{x}, \overline{y}) \in [A]^\alpha \times [B]^\alpha$$

ainsi $z = f(\overline{x}, \overline{y}) \in f\Big([A]^\alpha, [B]^\alpha\Big)$ $\square$

Définition 4. *Soit $A_i \in \mathbb{F}(X_i)$ pour tout $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$. On définit*

$$\begin{aligned} \tau : \quad \mathbb{F}(X_1) \times ... \mathbb{F}(X_n) &\longrightarrow \mathbb{F}\left(X_1 \times ... \times X_n\right) \\ \left(\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n}\right) &\longrightarrow \mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n} \end{aligned}$$

où $\mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}$ est le produit cartésien flou des sous-ensembles flous $A_1, ..., A_n$ défini par :

$$\mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}(x_1, ..., x_n) = \min\Big(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\Big)$$

Définition 5. *Soit*

$$\begin{aligned} g : \qquad X_1 \times ... \times X_n &\longrightarrow Y \\ (x_1, ..., x_n) &\longmapsto g(x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

On lui associée la fonction $\widehat{g}$ définie par

$$\widehat{g} : \begin{cases} \mathbb{F}(X_1) \times ... \times \mathbb{F}(X_n) \longrightarrow \mathbb{F}(Y) \\ (A_1, ..., A_n) \longrightarrow \widehat{g}(A_1, ..., A_n) \end{cases}$$

avec

$$\mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) = \sup_{(x_1,...,x_n)\in A_1\times...\times A_n, g(x_1,...,x_n)=y} \min(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n))$$

Si l'ensemble $\Big\{(x_1, ..., x_n),\ g(x_1, ..., x_n) = y\Big\}$ est vide, alors on pose par définition

$$\mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) = 0$$

Remarque 5. *Soit $x = (x_1, ..., x_n)$. D'après la definition 4, on a*

$$\mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}(x_1, ..., x_n) = \min\Big(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\Big)$$

Ainsi le principe d'extension donné par la définition (3)

$$\mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) = \sup \mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}(g^{-1}(y))$$

Remarque 6. *Soit*

$$\underline{g}: \quad \mathbb{F}(X_1) \times .... \times \mathbb{F}(X_n) \longrightarrow \mathbb{F}(Y)$$
$$A = (A_1, ..., A_n) \longrightarrow \underline{g}(A)$$

avec

$$\mu_{\underline{g}(A)}(y) = \sup \mu_A\left(g^{-1}(A)\right)$$

La fonction τ comme dans la définition (4) et $\widehat{g}$ comme dans la définition (5) nous permettent d'obtenir

$$\underline{g} \circ \tau = \widehat{g}$$

En effet

$$\begin{aligned} \mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) \quad &= \sup \mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}\left(g^{-1}(y)\right) \\ &= \sup \mu_{\tau(A_1,...,A_n)}\left(g^{-1}(y)\right) \\ &= \mu_{\underline{g}\circ\tau}(y) \end{aligned}$$

Théorème 1. *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ alors, d'après le principe d'extension on obtient*

$$\widehat{g} \circ \widehat{f} = \widehat{g \circ f}$$

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{F}$ et $z \in Z$, alors on a,

$$\begin{aligned} \mu_{\widehat{g\circ f}}(z) &= \sup \mu_A\left((g \circ f)^{-1}(z)\right) \\ &= \sup \mu_A\left(f^{-1}(g^{-1}(z))\right) \\ &= \sup \bigcup_{y\in g^{-1}(z)} \mu_A\left(f^{-1}(y)\right) \\ \mu_{\widehat{g}\circ\widehat{f}} &= \sup \mu_{\widehat{f}(A)}(g^{-1}(z)) \\ &= \sup \end{aligned}$$

$$Big\{\sup \mu_A\left(f^{-1}(y)\right), \; y \in g^{-1}(z)\Big\}$$

□

1.2.4 Nombres flous

Définition 6. *Soit* $\mathbb{R}$ *la droite réelle, un nombre réel flou* A *est l'ensemble flou représenté par la fonction*

$$\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

qui vérifie les proprietés suivantes

— $[A]^1 \neq \emptyset$ *;*

— $\forall \alpha \in]0,1]$ *les* α*-coupes* $[A]^\alpha$ *sont des intervalles compacts de* $\mathbb{R}$ *;*

Pour un nombre réel flou, on note a (respectivement μ_a et a^α) au lieu de A (respectivement μ_A et A^α), ainsi que les intervalles compacts a^α par

$$a^\alpha = [a_L^\alpha, a_R^\alpha]$$

L'ensemble flou donné par l'exemple (1) représente aussi un nombre réel flou

Définition 7. *Une fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite semi-continue supérierement si pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et pour tout suite* (x_n) *de nombres réels convergente vers* x *, on a*

$$f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \sup f(x_n)$$

Proposition 5. *Soit une fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, alors on a l'équivalence entre*

1. $\forall \alpha \in]0,1]$, $\{x, f(x) \geq \alpha\}$ *est fermé.*

2. f *est continue supérieurement sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2)

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ et $(x_n) \subset \mathbb{R}$ telles que $x_n \longrightarrow x$, avec $f(x) < \lim_{n\to\infty} \sup f(x_n)$

$$\Longrightarrow \exists \delta > 0,\ f(x) < \lim_{n\to\infty} \sup f(x_n) - \delta = r - \delta$$

alors r est un point d'accumulation, donc on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$, avec $f(x_{n_k}) \longrightarrow r$. En particulier $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq k_0,\ f(x_{n_k}) \geq r - \delta/2$$

ainsi à partir du rang k_0 tous les termes de la suite $(x_{n_k})_k$ sont dans l'ensemble $\{x, f(x) \geq r - \delta/2\}$. Or $(x_{n_k})_k \longrightarrow x$, il vient que $r - \delta/2 < r - \delta$ ce qui est absurde.

2) $\Longrightarrow$ 1)

Si $\quad x_n \longrightarrow x$ où $(x_n) \subset \left\{x, f(x) \geq \alpha\right\}$, $\quad$ alors

$$f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \sup f(x_n) \geq \alpha$$

$\square$

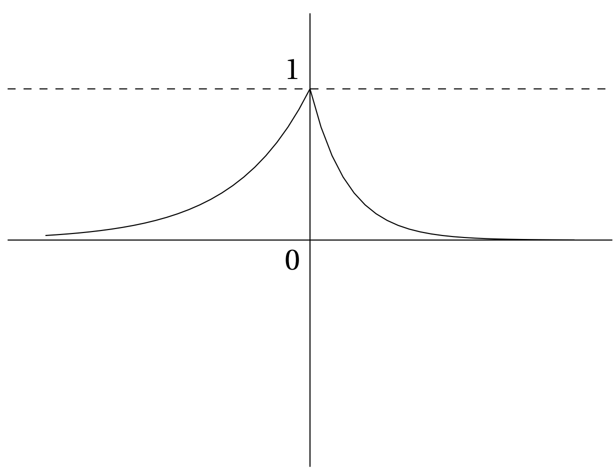
Remarque 7. *Si $A \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ vérifie les conditions suivantes*

1. $[A]^1 \neq \emptyset$
2. μ_A *est semi-continue supérieurement sur* $\mathbb{R}$
3. μ_A *est croissante sur* $]-\infty, A_1]$ *et décroissante sur* $[A^1, \infty[$*, où* $A_1 \in [A]^1$
4. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \mu_A(x) = 0$

Alors l'ensemble A définit un nombre flou.

Exemple 2.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \exp(x) & si \quad x \in]-\infty, 0] \\ \exp(-2x) & si \quad x \in]0, \infty] \end{cases}$$



Si $A \in \mathbb{F}(X)$ On définit l'ensemble $A^{\alpha>}$ par

$$A^{\alpha>} = \left\{x \in X, \quad \mu_A(x) > \alpha\right\}$$

Théorème 2. *Soit la fonction*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) \longrightarrow f(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

et $A_1, ..., A_n$ des ensembles flous, alors pour tout $\alpha \in]0,1]$ on a

1. $\left(\widehat{f}(A_1, ..., A_n)\right)^{\alpha>} = f\left((A_1)^{\alpha>}, ..., (A_n)^{\alpha>}\right)$
2. *en outre si f est continue, alors pour tout $\alpha \in]0,1]$,*

$$\left[\widehat{f}(A_1, ..., A_n)\right]^{\alpha} = f\left([A_1]^{\alpha}, ..., [A_n]^{\alpha}\right)$$

Démonstration. 1. Montrons que $\left(\widehat{f}(A_1, ..., A_n)\right)^{\alpha>} \supset f\left((A_1)^{\alpha>}, ..., (A_n)^{\alpha>}\right)$ On a

$$y \in f\left(A_1^{\alpha>}, ..., A_n^{\alpha>}\right) \Longrightarrow y = f(x_1, ..., x_n) \text{ où } x_i \in A_i^{\alpha_i>}, i = 1, ..., n$$

d'où

$$\min\left(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\right) > \alpha \Longrightarrow \sup_{\substack{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \\ f(x_1,...,x_n)=y}} \min\left(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\right) > \alpha$$

$$\Longrightarrow \mu_{\widehat{f}(A_1,...,A_n)}(y) > \alpha$$

Maintenant montrons que $\left(\widehat{f}(A_1, ..., A_n)\right)^{\alpha>} \subset f\left((A_1)^{\alpha>}, ..., (A_n)^{\alpha>}\right)$
Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_{\widehat{f}(A_1,...,A_n)}(y) > \alpha$, alors $\mu_{\widehat{f}(A_1,...,A_n)}(y) > 0$, d'après le principe d'extension, il existe au moins $\left(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}\right) \in \mathbb{R}^n$ tel que $f\left(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}\right) = y$. D'autre part $\left(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}\right)$ réalise le supremum de la quantité $\min(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n))$ sur l'ensemble $\Big\{(x_1, ..., x_n) : f(x_1, ..., x_n) = y\Big\}$, en particulier pour $(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n})$ donc

$$\min\left(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\right) > \alpha \Longrightarrow y \in \left(\widehat{f}(A_1, ..., A_n)\right)^{\alpha>}$$

2. De la même manière que la première inclusion de (1), on a $\left(\widehat{f}(A_1, ..., A_n)\right)^{\alpha>} \supset f\left([A_1]^{\alpha>}, ..., [A_n]^{\alpha>}\right)$.
Il reste à montrer que

$$\left[\widehat{f}(A_1, ..., A_n)\right]^{\alpha} \subset f\left([A_1]^{\alpha}, ..., [A_n]^{\alpha}\right)$$

Soit $\alpha \in]0,1]$, tel que

$$\mu_{\widehat{f}(A_1,...,A_n)}(y) = \sup_{\substack{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \\ f(x_1,...,x_n)=y}} \min\left(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\right) \geq \alpha$$

d'après la première partie de la démonstration il existe $(x_1^j,...,x_n^j) \in \mathbb{R}^n$ avec $f(x_1^j,...,x_n^j) = y$ tel que

$$\min\left(\mu_{A_1}(x_1^j),...,\mu_{A_n}(x_n^j)\right) \geq \alpha - \frac{1}{j}$$

on prend $\beta \in]0,\alpha[$, A_i est un nombre flou ce qui implique que $[A_i]^\beta$ est compact $\forall i \in I$ d'où $[A_1]^\beta \times ... \times [A_n]^\beta$ est un compact.

D'après théorème de Bolzano-Weirstrass $(x_1^j,...,x_n^j)$ admet une sous-suite $(x_1^{j_k},...,x_n^{j_k})$ convergente vers un élément $(x_1,...,x_n) \in [A_1]^\beta \times ... \times [A_n]^\beta$ et de la continuité de f on obtient

$$f\left((x_1^{j_k},...,x_n^{j_k})\right) \longrightarrow f(x_1,...,x_n) = y$$

alors $\forall i$,

$$\mu_{A_i}(x_i^{j_k}) > \alpha - \frac{1}{j_k} \Longrightarrow \mu_{A_i}\left(\lim_{k\to\infty}\sup x_i^{j_k}\right) \Longrightarrow \mu_{A_i}\left(\lim_{j\to\infty}\sup \alpha - \frac{1}{j}\right) = \alpha$$

□

Remarque 8. *Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow f(x)$ une fonction continue, $A_1,...,A_n$ des nombres flous et $\widehat{f}$ l'extension de f alors $\widehat{f}(A_1,...,A_n)$ est aussi un nombre flou.*

Remarque 9. *Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (x_1,...,x_n) \longrightarrow f(x_1,...,x_n)$ une fonction continue et $a_1,...,a_n$ des nombres flous alors $\forall \alpha \in]0,1]$:*

1. *Si f est monotone croissante par rapport à chaque variable alors*

$$\widehat{f}(a_1,...,a_n)_L^\alpha = f(a_{1L}^\alpha,...,a_{nL}^\alpha)$$

$$\widehat{f}(a_1,...,a_n)_R^\alpha = f(a_{1R}^\alpha,...,a_{nR}^\alpha)$$

2. *Si f est monotone décroissante par rapport à chaque variable alors*

$$\widehat{f}(a_1,...,a_n)_L^\alpha = f(a_{1R}^\alpha,...,a_{nR}^\alpha)$$

$$\widehat{f}(a_1,...,a_n)_R^\alpha = f(a_{1L}^\alpha,...,a_{nL}^\alpha)$$

3. *Si f est croissante (respectivement décroissante) par rapport à x_i pour tout $i \neq j$ et f est décroissante (respectivement croissante) par rapport à x_j alors*

$$\widehat{f}(a_1,..,a_j,..,a_n)_L^\alpha = f(a_{1L}^\alpha,..,a_{j-1L}^\alpha, a_{jL}^\alpha, a_{j+1L}^\alpha,..,a_{nL}^\alpha)$$

$$\widehat{f}(a_1,..,a_j,..,a_n)_R^\alpha = f(a_{1R}^\alpha,..,a_{j-1R}^\alpha, a_{jR}^\alpha, a_{j+1R}^\alpha,..,a_{nR}^\alpha)$$

Chapitre 2

Espace métrique flou

2.1 Introduction

Dans cette introduction on va rappeler la définition de la distance de Hausdorff et quelques propriétés concernant cette métrique.
Soit (X, d) un espace métrique, pour tous A et B parties compactes de X.
On définit la distance de Hausdorff par :

$$d_H(A,B) = \inf\Big\{\epsilon > 0,\ B \subset B_\epsilon(A) \text{ et } A \subset B_\epsilon(B)\Big\} \tag{2.1.1}$$

où

$$B_\epsilon(A) = \Big\{y \in X,\ d(y,A) < \epsilon\Big\} \quad \text{et} \quad d(y,A) = \inf_{a\in A} d(y,a)$$

d_H définit une métrique sur l'espace des parties compactes de X.
On a équivalence entre (2.1.1) et la formule suivante

$$d_H(A,B) = \max\Big\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(A,b)\Big\}.$$

Proposition 6. *[16] d_H définit une métrique sur l'espace des parties fermées bornées de X*

En utilisant la continuité de $d(.,A)$, on a

Lemme 1. *[17] Si A et B sont deux parties compactes d'un espace métrique (X,d). Alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que*

$$d_H(A,B) = d(a,b)$$

2.2 Distance de Kaleva et Seikkala

On note par $P_K(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des parties convexes compactes de $\mathbb{R}^n$.
$P_K(\mathbb{R}^n)$ muni de d_H est un espace métrique.
Tout sous-ensemble floue de $\mathbb{R}^n$ est représenté par une application $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$.
On considère l'ensemble E^n défini par

$$E^n = \Big\{ u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1], \text{ u satisfait les propriétés (1)-(4) suivantes} \Big\}$$

1. u est normal, i.e, $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n, u(x_0) = 1$;
2. u est convexe floue ; i.e.

$$u\big(tx + (1-t)y\big) \geq \min\big(u(x), u(y)\big), \quad \forall x, y \in X, \ \forall t \in [0,1]$$

3. u est semi-continue supérieurement ;
4. $\overline{\Big\{ x \in \mathbb{R}^n, \ u(x) > 0 \Big\}}$ est un compact

On note $u^0 = [u]^0 = \overline{\Big\{ x \in \mathbb{R}^n, \ u(x) > 0 \Big\}}$.

Remarque 10. *Pour tout* $u \in E^n$*, on a* $[u]^\alpha \in P_K(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha \in [0,1]$.

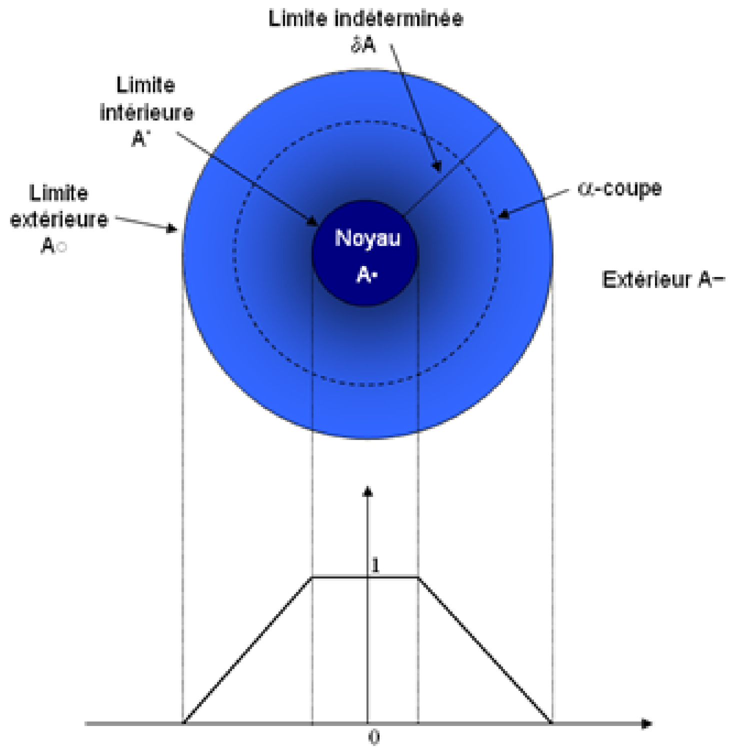


FIGURE 2.1 – Sous-ensemble flou

Soit g une fonction continue

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

on peut l'étendre par

$$\widehat{g} : E^n \times E^n \longrightarrow E^n$$

via le principe d'extension de Zadeh par l'équation

$$\mu_{\widehat{g}(u,v)}(z) = \sup_{z=g(x,y)} \min\Big(\mu_u(x), \mu_u(y)\Big)$$

où $\mu_{\widehat{g}(u,v)}$ est la fonction d'appartenance de l'ensemble flou $\widehat{g}(u,v)$. Ce qui nous permet d'avoir

$$\Big[\widehat{g}(u,v)\Big]^\alpha = g\left([u]^\alpha, [v]^\alpha\right), \; \forall u, v \in E^n, \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

En particulier pour l'addition et la multiplication par un scalaire, on a

$$[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$$

$$[\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha$$

Ce qui permet de munir E^n d'une structure d'espace linéaire (La stabilité de la somme et la multiplication par un scalaire) normé :

$$\|u\| = d(u, 0)$$

Proposition 7. ***(Negoita and Ralescu)***
Soit $u \in E^n$, on a

1. $[u]^\alpha \in P_K(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha \in [0,1]$
2. $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$, *pour* $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ *;*
3. *Si* $(\alpha_n)_n \subset [0,1]$ *est une suite croissante qui converge vers* $\alpha > 0$*, alors*

$$[u]^\alpha = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [u]^{\alpha_n}$$

Inversement, si $\left\{A^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1\right\}$ *est une famille de sous ensembles de* $\mathbb{R}^n$ *qui satisfait* $(1)-(3)$*, alors il existe* $u \in E^n$ *tel que*

$$[u]^\alpha = A^\alpha \quad \forall \alpha \in]0,1]$$

$$u^0 \subset \overline{\bigcup_{0<\alpha \leq 1} A^\alpha} \subset A^0$$

Proposition 8. *Si* $u \in E^n$*, alors* $[u]^\alpha$ *est convexe.*

Démonstration. Soient $x, y \in [u]^\alpha$ et $t \in [0,1]$, on a

$$u\big(tx + (1-t)y\big) \geq \min\Big(u(x), u(y)\Big) \geq \alpha$$

donc $tx + (1-t)y \in [u]^\alpha$. □

On définit l'application

$$\begin{aligned} d : \quad E^n \times E^n & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (u, v) & \longmapsto \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H\Big([u]^\alpha, [v]^\alpha\Big) \end{aligned}$$

Proposition 9. *d est une métrique sur E^n*

Démonstration. Pour tout $\alpha \in [0,1]$, on a

$$d_H\left([u]^\alpha, [v]^\alpha\right) \leq \sup_{\substack{x \in [u]^0 \\ y \in [u]^0}} \|x - y\| < \infty$$

La symétrie et l'inégalité triangulaire sont des conséquence de la métrique de Hausdorff, il ne reste qu'a démontrer

$$d(u,v) = 0 \Longleftrightarrow u = v$$

$\Leftarrow$) Evident

$\Rightarrow$) Si $d(u,v) = 0$, alors $d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) = 0,\ \forall \alpha \in (0,1]$, ce qui implique que $[u]^\alpha = [v]^\alpha\ \forall \alpha \in (0,1]$, et donc $u = v$. $\square$

Dans [33], Ralescu et Adams ont démontré les résultats suivants :

1. (E^n, d) est un espace métrique complet.

   Pour tous $u, v, w \in E^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

2. $d(u+w, v+w) = d(u,v)$

3. $d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u,v)$

2.3 Métrique de Kloeden sur l'espace des sous-ensembles flous

Soit $u \in E^n$.

— On appelle endographe de u, noté $end(u)$, l'ensemble

$$\mathrm{end}(u) = \left\{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^n \times [0,1],\ u(x) \geq \alpha\right\}$$

— On appelle sendographe de u, noté $\mathrm{send}(u)$, l'ensemble

$$\mathrm{send}(u) = \left([u]^0 \times [0,1]\right) \cap \mathrm{end}(u)$$

On définit l'application H par :

$$\begin{aligned} H : \quad E^n \times E^n &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (u,v) &\longmapsto d^*\left(\mathrm{send}(u), \mathrm{send}(v)\right) \end{aligned}$$

où d^* est la distance de Hausdorff définie sur $\mathbb{R}^n \times [0,1]$.

Il est claire que H est bien définie car send(u) est un compact.

Définition 8. *Une suite* (A_p) *d'élément de* $P_K(\mathbb{R}^n)$ *est dite convergente vers* $A \in P_K(\mathbb{R}^n)$ *au sens de Kuratowski si*

$$\lim_{p\to\infty} \sup A_p = \lim_{p\to\infty} \inf A_p = A$$

où

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty} \sup A_p &= \left\{ x \,\middle|\, \quad x = \lim_{n\to\infty} \sup d(x, A_n) \right\} \\ \lim_{p\to\infty} \inf A_p &= \left\{ x \,\middle|\, \quad x = \lim_{n\to\infty} \inf d(x, A_n) \right\} \end{aligned}$$

Remarque 11. *On a*

1. $\lim\limits_{p\to\infty} \inf A_p = \left\{ x,\ x = \lim\limits_{p\to\infty} x_p,\ \ x_p \in A_p \right\}$
2. $\lim\limits_{p\to\infty} \sup A_p = \left\{ x,\ x = \lim\limits_{j\to\infty} x_{p_j},\ \ x_{p_j} \in A_{p_j} \right\}$

Proposition 10. *[?] Soient* (u_p) *une suite d'éléments de* E^n *et* $u \in E^n$.
Alors $H(u_p, u) \longrightarrow 0$ *si et seulement si*

1. $\left\{ u > \alpha \right\} \subset \lim\limits_{p\to\infty} \inf \left\{ u_p \geq \alpha \right\} \quad \forall \alpha \in [0,1],$
2. $\lim\limits_{p\to\infty} \sup \left\{ u_p \geq \alpha \right\} \subset \left\{ u \geq \alpha \right\} \quad \forall \alpha \in [0,1],$
3. $\lim\limits_{p\to\infty} d_H\Big([u_p]^0, [u]^0 \Big) = 0$

2.3.1 Contitnuité de l'extension de Zadeh

Proposition 11. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. Par le principe d'extension de Zadeh on peut étendre* f *par :*

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : \quad \mathbb{F}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \widetilde{f}(A) \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{f}(A)(y) = \sup_{y=f(x)} \mu_A(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\widetilde{f}\left(E^1\right) \subset E^1$$

Démonstration. D'après le théorème 2 du premier chapitre on a $f([u]^\alpha) = \left[\widetilde{f}(u)\right]^\alpha$, car f est continue.

Soit $u \in E^1$. comme $f([u]^\alpha) = \left[\widetilde{f}(u)\right]^\alpha \quad \forall \alpha \in (0,1]$, alors $\left[\widetilde{f}(u)\right]^1 \neq \emptyset$, la convexité de $[u]^\alpha$ implique celle de $\left[\widetilde{f}(u)\right]^\alpha$.

Puisque u est semi-continue supérieurement alors $[u]^\alpha$ est fermé, de la continuité de f, $f([u]^\alpha)$ l'est aussi, mais $\left[\widetilde{f}(u)\right]^\alpha = f([u]^\alpha)$, donc $[\widetilde{f}(u)]^\alpha$ est fermé, d'après la proposition (5), $\widetilde{f}(u)$ est semi-continue supérieurement.

Par le théorème 2 (chapitre 1) on a

$$\left\{y, \widetilde{f}(u)(y) > 0\right\} = f\left(\left\{x, u(x) > 0\right\}\right)$$

puisque $\overline{\left\{x, u(x) > 0\right\}}$ est un compact et f est continue alors

$$f\left(\overline{\left\{x, u(x) > 0\right\}}\right) = \overline{f\left(\left\{x, u(x) > 0\right\}\right)}$$

donc $\overline{\left\{y, \widetilde{f}(u)(y) > 0\right\}}$ est un compact.

ce qui montre bien que

$$\widetilde{f}\left(E^1\right) \subset E^1$$

□

Remarque 12. *On peut démontrer de la même manière que*

$$\widetilde{f}\left(E^n\right) \subset E^n$$

lorsque $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Pour la preuve du théorème suivant voir [16].

Théorème 3. *Soient* $(A_p), A \in P_K(\mathbb{R}^n)$ *alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $d_H(A_p, A) \longrightarrow 0$.
2. *A et A_p sont inclus dans un compact K, et $A_p \longrightarrow A$ au sens de Kuratowski.*

Théorème 4. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction uniformement continue. alors la fonction*

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \quad (E^1, d) &\longrightarrow (E^1, d) \\ u &\longmapsto \widetilde{f}(u) \end{aligned}$$

est uniformement continue .

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. La continuité uniforme de f assure l'existence d'un $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

Maintenant si $d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) \leq \eta$, alors

$$\forall x \in [u]^\alpha \Longrightarrow \inf_{y \in [v]^\alpha} |x - y| \leq \eta$$

la compacité de $[v]^\alpha$ assure l'existence de $\overline{y} \in [v]^\alpha$ tel que

$$|x - \overline{y}| \leq \eta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(\overline{y})| \leq \epsilon$$

ce qui implique que

$$\inf_{y \in [v]^\alpha} |f(x) - f(y)| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \sup_{x \in [u]^\alpha} \inf_{y \in [v]^\alpha} |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

De la même manière on montre l'autre inégalité.
donc

$$d_H\left(f([u]^\alpha), f([v]^\alpha)\right) \leq \epsilon \quad \text{dès que} \quad d_H\left([u]^\alpha, [v]^\alpha\right) \leq \eta$$

Maintenant si

$$d(u, v) \leq \eta$$

alors

$$d_H\left(f\left([u]^\alpha\right), f\left([v]^\alpha\right)\right) \leq \epsilon \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

mais

$$f\left([u]^\alpha\right) = \left[\widehat{f}(u)\right]^\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

alors

$$d_H\left(\left[\widehat{f}(u)\right]^\alpha, \left[\widehat{f}(v)\right]^\alpha\right) \leq \epsilon \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

donc

$$d\left(\left[\widehat{f}(u)\right]^\alpha, \left[\widehat{f}(v)\right]^\alpha\right) \leq \epsilon$$

$\square$

Par les théorèmes (4) et (3) on a la proposition suivante

Proposition 12. *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est uniformément continue, alors l'application*

$$\phi : \quad \Big(P_K(\mathbb{R}^n), d_H\Big) \longrightarrow \Big(P_K(\mathbb{R}^n), d_H\Big)$$
$$k \longmapsto f(K)$$

est uniformément continue.

Proposition 13. *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors l'extension de Zadeh de f*

$$\widehat{f} : \big(E^n, H\big) \longrightarrow \big(E^n, H\big)$$

est aussi continue

Démonstration. Soit u_p une suite d'élément de E^n convergente vers $u \in E^n$, i.e $H(u_p, u) \longrightarrow 0$.
Montrons que $H\Big(\widehat{f}(u_p), \widehat{f}(u)\Big) \longrightarrow 0$.
La continuité de f et la quatrième propriété du théorème (10) implique que

$$\lim_{p\to\infty} d_H\big(f([u_p]^0), f([u]^0)\big) = 0$$

Maintenant soit $\alpha > 0$ on a

$$\Big\{\widehat{f}(u) > \alpha\Big\} = f\Big(\Big\{u > \alpha\Big\}\Big)$$

Puisque $H(u_p, u) \longrightarrow 0$, alors

$$\Big\{u > \alpha\Big\} \subset \lim_{p\to\infty} \inf[u_p]^\alpha \subset \lim_{p\to\infty} \sup[u_p]^\alpha \subset \Big\{u \geq \alpha\Big\}$$

Appliquons f il vient que

$$\Big\{\widehat{f}(u) > \alpha\Big\} \subset f\Big(\lim_{p\to\infty}(\inf[(u_p)]^\alpha)\Big) \subset f\Big(\lim_{p\to\infty}(\sup[u_p]^\alpha)\Big) \subset \Big\{\widehat{f}(u) \geq \alpha\Big\}$$

donc pour compléter la preuve il suffit de montrer que

$$f\Big(\lim_{p\to\infty} \inf[(u_p)]^\alpha\Big) \subset \lim_{p\to\infty} \inf f\Big([(u_p)]^\alpha\Big) \text{ et } f\Big(\lim_{p\to\infty} \sup[u_p]^\alpha\Big) = \lim_{p\to\infty} \sup f\Big([u_p]^\alpha\Big)$$

Soit $y \in f(\lim\limits_{p\to\infty} \inf[(u_p)]^\alpha)$, alors $y = f(x)$ avec $x = \lim_{p\to\infty} x_p$ où chaque x_p appartient à $[(u_p)]^\alpha$, par continuité de f, $y = \lim_{p\to\infty} f(x_p)$, donc $y \in \lim_{p\to\infty} f([u_p]^\alpha)$.
Pour la deuxiṁe égalité on a

$$y \in f\Big(\lim_{p\to\infty} \sup[(u_p)]^\alpha\Big) \Leftrightarrow y = \lim_{j\to\infty} x_{p_j} \text{ et } x_{p_j} \in [u_{p_j}]^\alpha$$

alors

$$y=\lim_{j\to\infty} f(x_{p_j})$$

d'où $y\in \lim_{p\to\infty}\inf f\Big([(u_p)]^{\alpha}\Big)$.

Maintenant si $y\in \lim_{p\to\infty}\inf f\Big([(u_p)]^{\alpha}\Big)$ alors $y=\lim_{j\to\infty} f\Big(x_{p_j}\Big)$, soit x_{p_k} une sous-suite de x_{p_j} telle que $x_{p_k}\longrightarrow x\in y=\lim_{k\to\infty}\sup[u_p]^{\alpha}$, par suite

$$y=\lim_{k\to\infty} f\Big(x_{p_k}\Big)=f(x)$$

$\square$

2.3.2 Comparaison de la convergence

$X=\mathbb{R}^n$ et $\|\|$ est la norme usuelle de $\mathbb{R}^n$.

Lemme 2. *[8] Soit C_n est une suite croissante de parties convexes compactes de X. Si cette suite admet une sous-suite convergente vers C par rapport à d_H, alors*

$$C=\bigcap_{n\geq 1}\overline{\bigcup_{m\geq n} C_m}$$

Définition 9. *Une suite u_p d'éléments de E^n est dite convergente au sens des coupes vers u, si*

$$d_H([u_p]^{\alpha},[u]^{\alpha})\longrightarrow 0,\quad \forall\alpha\in(0,1]$$

Remarque 13. *La convergence dans (E^n,d) implique la convergenece au sens des coupes, mais la réciproque n'est pas vraie.*

Exemple 3.

$$v_n(x)=\begin{cases}(1-x)^n,\ \ 0\leq x\leq 1\\ \\ 0,\ \textit{ailleurs}\end{cases}$$

On a $[v_n]^{\alpha}=[0,1-\alpha^{\frac{1}{n}}]$ et $d_H([v_n]^{\alpha},[v]^{\alpha})=1-\alpha^{\frac{1}{n}}\longrightarrow 0$, mais $d(u,v_n)=1$.

Ce qui prouve bien que la convergence au sens des coupes n'implique pas la convergence dans E^1.

Théorème 5. *La convergence dans (E^n,d) implique la convergence dans (E^n,H)*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, et soient $u, v \in E^n$ tels que $d(u,v) < \epsilon$.

Prenons $(x,\alpha) \in \text{send}(u)$.

Si $\alpha > 0$ alors $x \in [u]^\alpha$, puisque $d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) < \epsilon$ il existe $y \in [v]^\alpha$ tel que $\|x - y\| < \epsilon$ ce qui prouve que $(x,\alpha) \in B_\epsilon(\text{send}(v))$.

Maintenant si $\alpha = 0$.

Soit (α_n) une suite décroissante d'éléments de $[0,1]$ convergente vers 0. Alors $([u]^{\alpha_n})$ est une suite croissante de compactes de $[u]^0$, d'après [16] page 172, cette suite admet une sous-suite convergente au sens de d_H et d'après le lemme (2), on a

$$\lim_{n\to\infty} d_H\Big([u]^{\alpha_n}, \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n}[u]^{\alpha_m}\Big) = 0$$

puisque $\alpha_n \longrightarrow 0$ et $\Big([u]^{\alpha_n}\Big)$ est croissante, alors

$$[u]^0 = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n}[u]^{\alpha_m} \tag{2.3.1}$$

de même pour v, on a

$$[v]^0 = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n}[u]^{\alpha_m} \tag{2.3.2}$$

Par suite,

$$d_H\Big([u]^0,[v]^0\Big) \leq d_H\Big([u]^0,[u]^{\alpha_n}\Big) + d_H\Big([u]^{\alpha_n},[v]^{\alpha_n}\Big) + d_H\Big([v]^{\alpha_n},[v]^0\Big)$$

ce qui montre bien que

$$d_H\Big([u]^0,[v]^0\Big) \leq \lim_{n\to\infty}\sup d_H\Big([u]^\alpha,[v]^\alpha\Big) \leq \sup_{\alpha\in(0,1]} d_H\Big([u]^\alpha,[v]^\alpha\Big) \leq d(u,v) < \epsilon$$

donc $\text{send}(u) \subset B_\epsilon\Big(\text{send}(v)\Big)$, de la même manière on a $\text{send}(v) \in B_\epsilon\Big(\text{send}(u)\Big)$.

Par suite $H(u,v) \leq \epsilon$ dès que $d_H(u,v) \leq \epsilon$. □

Remarque 14. *la réciproque de la proposition précedente n'est pas vraie.*

Démonstration.

$$u(x) = \begin{cases} 1, \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \ \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-1}{n}, \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \ \text{ailleurs} \end{cases}$$

Il est claire que $H(u_n,u) \longrightarrow 0$, mais $d_H\Big([u_n]^1,[u]^1\Big) = 1$. □

Maintenant soit

$$\mathscr{S} = \Big\{ u \in E^n, \text{ la fonction } x \mapsto u(x) \text{ est concave sur } [u]^0 \Big\}$$

Lemme 3. *Si u_n est une suite de $\mathscr{S}$ convergente au sens des coupes vers $u \in \mathscr{S}$, alors*

$$d_H\Big([u_n]^0, [u]^0\Big) \longrightarrow 0$$

Démonstration. A partir de la formule (2.3.1), on a

$$\lim_{\alpha \to 0^+} d_H\Big([u]^\alpha, [u]^0\Big) = 0.$$

Soit $\epsilon > 0$. On choisit α tel que

$$d_H\Big([u_n]^\alpha, [u]^0\Big) \le \frac{\epsilon}{2}.$$

Puisque

$$d_H\Big([u_n]^\alpha, [u]^\alpha\Big) \longrightarrow 0$$

Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d_H\Big([u_n]^\alpha, [u]^\alpha\Big) < \frac{\epsilon}{2}$ dès que $n > n_0$.
D'où

$$d_H\Big([u_n]^\alpha, [u]^0\Big) < \epsilon,$$

Ce qui implique que

$$[u]^0 \subset B_\epsilon\Big([u_n]^\alpha\Big) \subset B_\epsilon\Big([u_n]^0\Big).$$

Maintenant on va démontrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \ge n_1 \Longrightarrow [u_n]^0 \subset B_\epsilon\Big([u]^0\Big).$$

Supposons qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $[u_n]^0 \not\subset B_\epsilon\Big([u]^0\Big)$. On a $[u_n]^0 \cap B_\epsilon\Big([u]^0\Big) \neq \emptyset$ pour n assez grand. Puisque $[u]^0$ est un compact on peut construire une suite $x_n \in [u_n]^0$ tel que $d\Big(x_n, [u]^0\Big) = \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Maintenant, soit $y \in [u]^1$, puisque $d_H\Big([u_n]^1, [u]^1\Big) \longrightarrow 0$ alors d'après [16] page 171, on peut construire une suite $y_n \in [u_n]^1$ telle que $y_n \longrightarrow y$ telle que $y_n \in [u_n]^1 \subset [u_n]^0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque $y_n \longrightarrow y$ et $\|y - x_n\| \ge \epsilon$ pour $n \ge 1$ alors il existe une suite $t_n \in [0,1]$ et un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ telles que

$$n \ge n_2 \Longrightarrow \|y_n - y\| \le \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \|z_n - x_n\| = \frac{\epsilon}{2},$$

avec $z_n = x_n + t_n(y_n - x_n)$, donc

$$n \geq n_2 \Longrightarrow \epsilon/2 = t_n \|y_n - x_n\| \leq t_n\Big(\|y_n - y\| + \|y - x_n\|\Big) < t_n\Big(\frac{3}{2}\epsilon + \rho\Big).$$

Ce qui implique

$$n \geq n_2 \Longrightarrow t_n > \frac{\epsilon}{3\epsilon + 2\rho} = \beta > 0,$$

où $\rho = diam\Big([u]^0\Big)$.
mais pour $n \geq n_2$, on a

$$d\Big(z_n, [u]^\beta\Big) \geq d\Big(z_n, [u]^0\Big) \geq d\Big(x_n, [u]^0\Big) - \|x_n - z_n\| = \epsilon/2$$

Or $x \longrightarrow u_n(x)$ est une fonction concave, alors

$$u_n(z_n) \geq t_n u_n(y_n) + (1 - t_n) u_n(x_n) \geq t_n > \beta$$

Ce qui contredit le fait que $d_H\Big([u_n]^\beta, [u]^\beta\Big) \longrightarrow 0$ □

Lemme 4. *Si $u \in \mathscr{S}$ et $\alpha \in [0,1]$ (fixé), alors la fonction $g(\beta) = d\Big([u]^\beta, [u]^\alpha\Big)$ est continue en α.*

Démonstration. Par la formule (2.3.1), on a la continuité en 0^+.
Maintenant $\alpha > 0$. Soit (α_n) une suite décroissante convergente vers α, alors $([u]^{\alpha_n})$ est une suite croissante de compacts dans $[u]^0$ d'où $d_H\Big([u]^{\alpha_n}, \bigcap_{n\geq 1}\overline{\bigcup_{m\geq n}[u]^{\alpha_k}}\Big) \longrightarrow 0$, puisque $[u]^{\alpha_k} \subset [u]^\alpha$ alors $B = \bigcap_{n\geq 1}\overline{\bigcup_{m\geq n}[u]^{\alpha_k}} \subset [u]^\alpha$.
Inversement : Montrons au départ que $\forall x \in [u]^\alpha \setminus B$, on a $u(x) = \alpha$.
Sinon, alors $x \in [u]^{\alpha_k}$ pour k assez grand, donc $x \in B$ ce qui est absurde.
si $x \in [u]^\alpha \setminus B$ puisque B est un fermé et alors $M = d(x, B) > 0$. Soit $y \in B$ tel que $u(y) > \alpha$, (possible car $[u]^1 \subset B$), par la convexité de $[u]^\alpha$ on peut choisir $t \in (0,1]$ tel que $z = tx + (1-t)y \in [u]^\alpha$ et $\|z - x\| = (1-t)\|y - x\| = M/2$, par suite $z \in [u]^\alpha \setminus B$ et donc $u(z) = \alpha$, de la concavité de la fonction $x \longrightarrow u(x)$ on a

$$\alpha = u(z) \geq t u(x) + (1-t) u(y) > \alpha,$$

ce qui est impossible donc $B = [u]^\alpha$, par conséquent g est continue à droite en α.
Maintenant si (α_n) est une suite croissante convergente vers α, dans ce cas on a $\overline{\bigcup_{m\geq n}}[u]^{\alpha_m} = [u]^{\alpha_n}$ on obtient $B = \bigcap_{n\geq 1}[u]^{\alpha_n}$ et d'après le lemme 9.2 [32] on a $B = [u]^\alpha$.
ce qui montre la continuité de g en α. □

Corollaire 1. *La fonction* $g(\beta) = d([u]^\beta, [u]^\alpha)$ *est continue*

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$d\Big([u]^\beta, [u]^\alpha\Big) - d\Big([u]^\beta, [u]^\gamma\Big) \leq d\Big([u]^\gamma, [u]^\alpha\Big) \leq d\Big([u]^\beta, [u]^\alpha\Big) + d\Big([u]^\beta, [u]^\gamma\Big).$$

On obtient le résultat en utilisant le lemme 4. □

Théorème 6. *Si* $u_n \in \mathscr{S}$ *est convergente au sens des coupes vers* $u \in \mathscr{S}$*, alors* u_n *est convergente vers u dans* $(\mathscr{S}, d)$

Pour la démonstration utilisons, le lemme suivant qui a lieu dans [17]

Lemme 5. *Soit* $(\alpha_n)_n$ *une suite d'éléments de* $[0,1]$ *convergente vers* α*, alors sous les conditions du lemme 3, on a*

$$d_H\Big([u_n]^{\alpha_n}, [u]^\alpha\Big) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in [0,1]$ tel que $\alpha_n \longrightarrow \alpha$,
Considérons la suite de fonctions suivante

$$\begin{aligned} f_n : \quad [0,1] \quad &\longrightarrow (0, \infty) \\ \alpha \quad &\longmapsto d_H\Big([u_n]^\alpha, [u]^\alpha\Big), \end{aligned}$$

alors par l'inégalité triangulaire on a

$$f_n(\alpha_n) = d_H\Big([u_n]^{\alpha_n}, [u]^{\alpha_n}\Big) \leq d_H\Big([u_n]^{\alpha_n}, [u]^\alpha\Big) + d_H\Big([u]^{\alpha_n}, [u]^\alpha\Big),$$

D'après les lemmes (4) et (5), on obtient $f_n(\alpha_n) \longrightarrow 0$.
Alors $\{f_n\}$ est une suite de fonctions continues et convergentes sur le compact $[0,1]$ alors f_n converge uniformement (voir [36]).
Ce qui est équivalent à la convergence dans $\Big(\mathscr{S}, d\Big)$ □

Remarque 15. *La convergence au sens des coupes n'entraîne pas la convergence dans* $\Big(E^n, H\Big)$

Exemple 4.

$$v(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

$$v_n(x) = \begin{cases} (1-x)^n, & x =\in [0,1] \\ 0, & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

On a $[v_n]^\alpha = \left[0, 1-\alpha^{\frac{1}{n}}\right]$ *et* $d_H\Big([v_n]^\alpha, [v]^\alpha\Big) = 1 - \alpha^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha \in (0,1]$.
Donc

$$d_H\Big([v_n]^\alpha, [v]^\alpha\Big) \longrightarrow 0.$$

et

$$d\Big(v_n, v\Big) = 1$$

puisque u_n *et* v_n *sont dans* $\mathscr{S}$ *alors* $H(v_n, v)$ *ne tend pas vers* 0.

Maintenant notons $\mathscr{S}_1 = \Big\{u \in \mathscr{S},\ [u]^1 \text{ contient un seul point}\Big\}$

Théorème 7. *Soit* (u_n) *une suite d'éléments de* $\mathscr{S}_1$. *Si* u_n *est convergente vers* u *dans l'espace* $\Big(\mathscr{S}_1, H\Big)$, *alors elle est convergente au sens des coupes vers* u

Démonstration. Puisque (u_n) converge dans $\Big(\mathscr{S}_1, H\Big)$ alors d'après théorème de Koelden [20]

$$\begin{aligned} &\forall \eta > 0, \exists n(\eta) \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall 0 < \alpha \leq 1 \text{ et } n \geq n(\eta) \\ &\text{on a } \ [u]^\alpha \subset B_\eta\Big([u_n]^{\alpha-\eta}\Big) \ \text{ et } \ [u_n]^\alpha \subset B_\eta\Big([u]^{\alpha-\eta}\Big) \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. le lemme (4) assure qu'il existe $\delta \in]0, \epsilon]$ tel que

$$[u]^{\alpha-\delta} \subset B_\eta\Big([u]^\alpha\Big) \tag{2.3.3}$$

Donc

$$[u_n]^\alpha \subset B_\delta\left(B_\epsilon\Big([u]^\alpha\Big)\right) \subset B_{2\epsilon}\Big([u]^\alpha\Big), \tag{2.3.4}$$

pour n assez grand, ainsi $d_H\Big([u_n]^1, [u]^1\Big) \longrightarrow 0$,
Maintenant soit $\alpha \in (0,1)$. Montrons que

$$[u]^\alpha \subset B_{2\epsilon}\Big([u_n]^\alpha\Big) \tag{2.3.5}$$

pour n assez grand.

Supposons qu'il existe une sous-suite $\{n_k\}$ pour laquelle (2.3.5) n'est pas vraie, alors on peut construire une suite x_{n_i} dans $[u]^\alpha$ telle que $d\Big(x_{n_i}, [u_{n_i}]^\alpha\Big) \geq 2\epsilon$ et puisque $[u]^\alpha$ est un compact cette suite admet une sous-suite x_{n_i} convergente vers $x \in [u]^\alpha$ et par (2.3.4) $x \notin [u]^1$.

Soit $y \in [u]^1$. Considérons le segment $tx + (1-t)y$, $t \in [0,1]$, de la concavité de u on peut trouver z de ce segment tel que $\|x - z\| = \epsilon/2$ et $u(z) = \beta > \alpha$. Posons $\eta = \min\left\{\beta - \alpha, \epsilon\right\}$, alors d'après (2.3.3) on a

$$[u]^\beta \subset B_\eta\Big([u_n]^{\beta-\eta}\Big) \subset B_\eta\Big([u_n]^\alpha\Big) \text{ pour n assez grand}$$

soit i_0 tel que n_{i_0} soit assez grand alors pour $i \geq i_0$

$$\|z - x_{n_i}\| \geq d\Big(x_{n_i}, [u_{n_i}]^\alpha\Big) - d\Big(z, [u_{n_i}]^\alpha\Big) \geq \epsilon$$

ce qui contredit le fait que $\|x - z\| = \epsilon/2$ et $x_{n_i} \longrightarrow x$.

donc (2.3.5) est valide et par (2.3.4) et (2.3.5) on a $d_H\Big([u_n]^\alpha, [u]^\alpha\Big) \longrightarrow 0$ □

D'après les théorèmes précedents on a le théorème suivant

Théorème 8. *Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathscr{S}_1$ qui converge au sens des coupes, alors on a équivalence entre d-convergence et H-convergence.*

Chapitre 3

Théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques

Le développement de la théorie des ensembles flous, a été spectaculaire dans les trois dernières décennies. Néanmoins, il y a des problèmes qui pour une meilleure analyse exigent une philosophie semblable à la notion floue,dans lequel non seulement le degré d'appartenance d'un élément à un ensemble est pris en considération, mais aussi bien son degré de non-appartenance à cet ensemble. Dans cette direction, en 1984, La notion des ensembles flous intuitionistiques (IFS) a été introduite par K.Atanassov dans [1] comme une généralisation de la notion des ensembles flous (FS) qui a été décrite par Zadeh [43].

3.1 Exemples et motivations

Premier Exemple :
Deux personnes "x" et "y" ont acheté une boîte de chocolat, cette boîte contient 10 pièces. 7 ont été mangés par "y", deux par "x" et une pièce de chocolat tombé sous la table.
à ce moment là "z" un ami de "x", est venu, et "x" déclare.

"Nous ne pouvons pas te donner de chocolat, parce que "y" a mangé toutes les pièces "

Donnons une estimation de la valeur de vérité de cette déclaration avant qu'on ait une connaissance des évènements ultérieurs. Puisque "y" n'a pas été le seul qui a mangé le chocolat, alors à partir du point de vue classique qui utilise 0 et 1 pour les estimations, la déclaration de "x" a une valeur de vérité nulle.

D'autre part, on est convaincu d'une façon intuitive que la déclaration est plus vraie que fausse. Parce qu'il ne reste plus de chocolat.

Si on estime la déclaration de "x" dans les termes de logiques ternaires, introduite par Jan Lukasiewicz en 1926 [19], qui prend l'ensemble $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ comme ensemble des estimations, sa valeur de vérité devra être $\frac{1}{2}$.

Lukasiewicz a généralisé son idée à la notion de plusieurs valeurs logiques [19]. Par exemple, si on utilise onze valeurs logiques, en prenant comme estimations l'ensemble des éléments $\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, ..., 1\}$, et dans ce cas, notre problème est à nouveau facile à résoudre : la vérité de l'estimation de la déclaration est exactement $\frac{1}{7}$. Mais si nous prenons six valeurs logiques, l'estimation est décrit par l'ensemble $\{0, \frac{1}{5}, .., 1\}$, maintenant, on ne saura pas évaluer correctement la valeur de vérité de la déclaration précèdente. On hésitera entre $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, mais aucune de ces deux valeurs ne sera correcte, parce que

$$\frac{4}{5} - \frac{7}{10} = \frac{7}{10} - \frac{3}{5}$$

Ces deux valeurs seraient éloignées de la valeur $\frac{7}{10}$.

Il y a plusieurs façons pour évaluer l'estimation de vérité, pour gérer le même problème, ainsi on aboutit à l'idée d'ensemble flou élaborée par Lotfi Zadeh, qui utilise $[0, 1]$ comme ensemble d'évaluation.

Maintenant il est claire que la valeur de vérité est égale à 0.7. Cependant, dans le prochain moment "y" peut prendre le chocolat tombé et le placé dans la boîte, en conservant la valeur de vérité qui est égale à 0.7, et le reste c'est 0.3. Mais il peut aussi manger le dérnier morceau, et dans ce cas la valeur de vérité prend 0.8 et le reste c'est 0.2. Dans ce sens, la déclaration dépend essentiellement aux actions de "y". Donc l'appareil des ensembles flous intuitionistiques nous donne la réponse la plus précise $< 0.7, 0.2 >$, et maintenant le degré d'incertitude c'est 0.1.

Deuxième Exemple :

Dans cette sous-section on va présenter un exemple d'un sous-ensemble intuitionistique propre, c'est à dire : n'est pas floue.

Soient A,B,C et D quatre parties compactes, fermées et convexes du plan (O, x_1, x_2), telles que

$$A \cap B = A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset$$

Dans le même plan considèrons $P \cup R \cup Q$, $Q \cup R \cup S$, $R \cup S \cup T$ et V leurs projections orthogonales sur Ox_1.

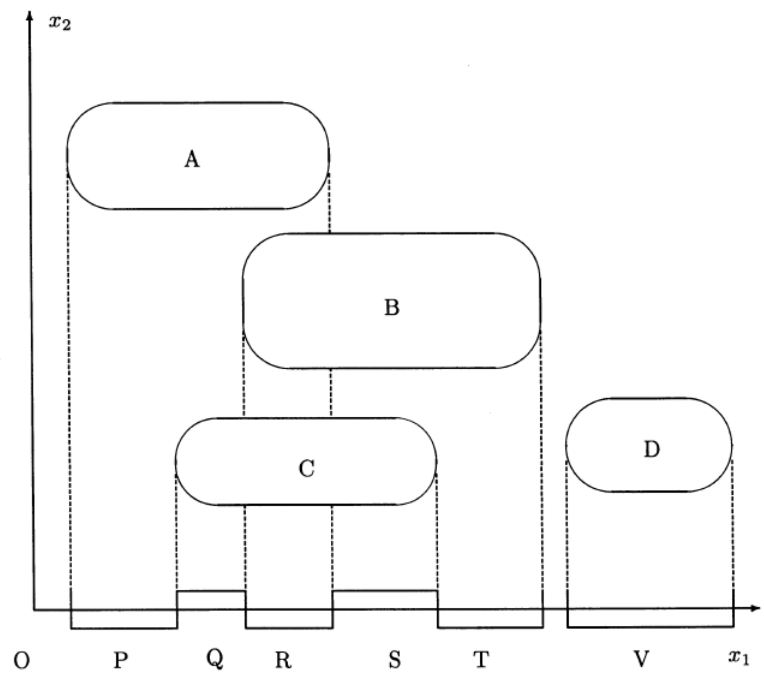
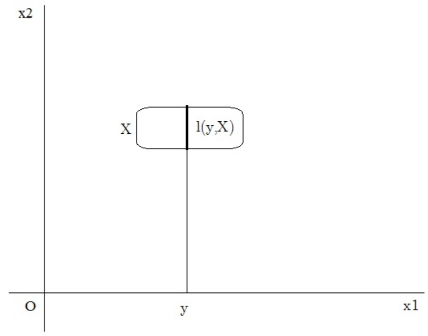


FIGURE 3.1 –

Soit aussi $X = A \cup B \cup C \cup D$, considèrons les parties F et G telles que.

- $A \subset F \subset A \cup C \cup D$
- $B \subset G \subset B \cup C \cup D$
- $F \cap G = \emptyset$
- $F \cup G \subset X$

Remarquons que la partie F est incluse dans le complémentaire de la partie G dans X.
On suppose qu'on peut seulement observer les projections des points de X sur (Ox_1), et pour $x \in X$. On ne connait $l(y, X)$ que si X est l'une des parties A, B, C ou D.
On note $l(y, X)$ la longueur d'un segment dans X construit sur une ligne perpendiculaire à (Ox_1), incident d'un point y de (Ox_1)(voir figure).



Notre objectif est d'expliquer le degré d'appartenance et non-appartennace d'un élément x par rapport à la partie F, en respectant la position des quatre parties.

Si $y \in P$, il est clair que y est la projection orthogonale d'un point $x \in F$, donc dans ce cas

$$\mu_F(x) = 1$$

Si $y \in Q$, alors $x \in A$ ou $x \in C$.

Si $x \in A$, alors $x \in F$. Mais si $x \in C$, alors on n'est pas sûr que $x \in F$ ou $x \in G$. Donc

$$\mu_F(x) = \frac{l(y,A)}{l(y,A)+l(y,C)}$$

On en déduit que

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } y \in P \\ \frac{l(y,A)}{l(y,A)+l(y,C)}, \; si \; y \in Q \\ \frac{l(y,A)}{l(y,A)+l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in R \\ 0, \text{ si } y \in S \cup T \cup V \end{cases}$$

De la même manière

$$\nu_F(x) = \mu_G(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } y \in P \cup Q \cup V \\ \\ \frac{l(y,B)}{l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in S \\ \\ \frac{l(y,B)}{l(y,A)+l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in R \\ \\ 1, \text{ si } y \in T \end{cases}$$

Alors

$$\mu_F(x) + \nu_G(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } y \in P \cup T \\ \\ \frac{l(y,A)}{l(y,A)+l(y,C)}, \; si \; y \in Q \\ \\ \frac{l(y,A)+l(y,B)}{l(y,A)+l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in R \\ \\ \frac{l(y,B)}{l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in S \\ \\ 0, \text{ si } y \in V \end{cases}$$

Il est clair que $0 \le \mu_F(x) + \nu_F(x) < 1$.

La valeur d'incertitude est donnée par

$$\pi(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } y \in P \cup T \\ \\ \frac{l(y,C)}{l(y,A)+l(y,C)},\ si\ y \in Q \\ \\ \frac{l(y,C)+l(y,B)}{l(y,A)+l(y,B)+l(y,C)},\ si\ y \in R \\ \\ \frac{l(y,C)}{l(y,B)+l(y,C)},\ si\ y \in S \\ \\ 1, \text{ si } y \in V \end{cases}$$

3.2 Notions fondamentales

Définition 10. *On définit un sous-ensemble flou intuitionistique A d'un univers X par la donnée de deux fonctions*

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$$

et

$$\nu_A : X \longrightarrow [0,1]$$

appelées respectivement fonction d'appartenance et fonction de non-appartenance de A, qui vérifient

$$0 \le \mu_A(x) + \nu_A(x) \le 1, \quad \forall x \in X$$

On peut représenter A sous la forme suivante :

$$A = \left\{ < x, \mu_A(x), \nu_A(x) >, \quad 0 \le \mu_A(x) + \nu_A(x) \le 1, \quad \forall x \in X \right\}$$

On note $\mathbb{F}(X)$ l'espace de sous-ensembles floues intuitionistiques de X.

Remarque 16. *Tout sous-ensemble flou est un sous-ensemble flou intuitionistique.*
En effet, on a

$$0 \leq \mu_A + \nu_A = 1$$

Soit X un univers.

Définition 11. *Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de X. On appelle support de A l'ensemble*

$$S(A) = \left\{ x \in X, \nu_A(x) < 1 \right\}$$

Définition 12. *Soient n sous-ensembles flous intuitionistiques $A_1, ..., A_n$ respectivement de $X_1, ..., X_n$. Le produit cartésien de $A_1, ..., A_n$ est un sous-ensemble flou intuitionistique de $X_1 \times ... \times X_n$, défini par*

$$\mu_{A_1 \times ... \times A_n}(x_1, ..., x_n) = \min\left(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\right)$$
$$\nu_{A_1 \times ... \times A_n}(x_1, ..., x_n) = \max\left(\nu_{A_1}(x_1), ..., \nu_{A_n}(x_n)\right)$$

$\forall x_i \in A_i, \ i = 1, 2, ...$

3.3 Opérations de base sur les sous-ensembles flous intuitionistiques

On définit les opérations sur l'espace des sous-ensembles flous intuitionistiques comme suit :

— **Egalité**

$$A = B \Longleftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \text{et} \quad \nu_B(x) = \nu_A(x), \quad \forall x \in X$$

— **Inclusion**

$$A \subset B \Longleftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \text{et} \quad \nu_B(x) \leq \nu_A(x), \quad \forall x \in X$$

— **Complémentaire**

Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de X caractérisé par μ_A et ν_A. Le complémentaire de A est un sous-ensemble flou intuitionistique caractérisé par :

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \nu_A(x) \quad \text{et} \quad \nu_{\overline{A}}(x) = \mu_A(x), \quad \forall x \in X$$

— **Intersection**

L'intersection de deux sous-ensembles flous intuitionistiqus A et B de X est un sous-ensemble flou intuitionistique défini par :

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \quad \text{et} \quad \mu_{A\cap B}(x) = \max\Big(\nu_A(x), \nu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X$$

— **Réunion**

La réunion de deux sous-ensembles flous intuitionistiques A et B de X est un sous-ensemble flou intuitionistique défini par :

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \quad \text{et} \quad \nu_{A\cup B}(x) = \min\Big(\nu_A(x), \nu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X$$

D'après [2] on a pour $A, B \in \mathbb{F}(X)$.On a les assertions suivantes

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$$

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$$

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$$

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$$

3.4 Interprétations géométriques

3.4.1 interprétation géométrique d'un sous-ensemble flou intuitionistique

Dans cette section, plusieurs interprétations géométriques des $\mathbb{F}(X)$ sont représentées.

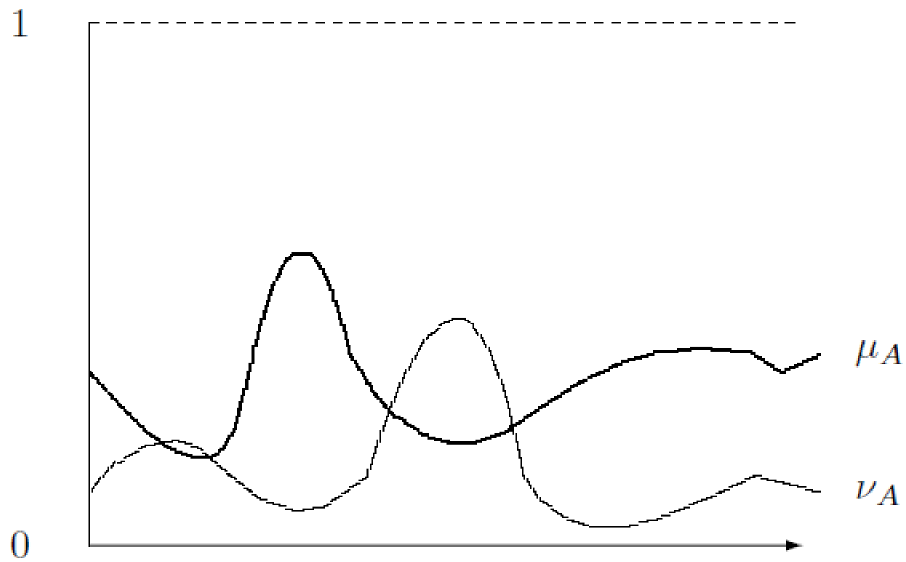


FIGURE 3.2 – L'interprétation géométrique la plus largement acceptée

Son analogue est donné en figure 3.3

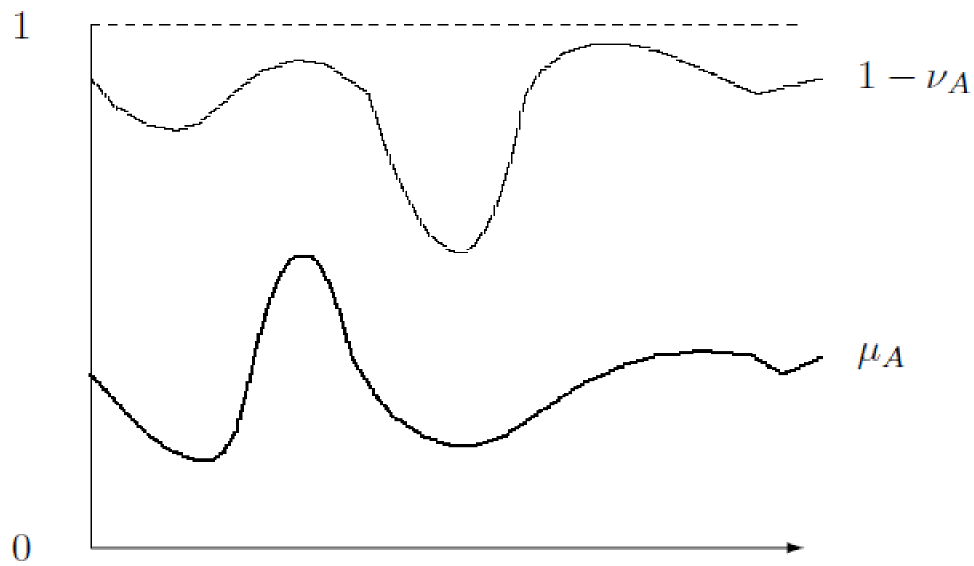


FIGURE 3.3 – Équivalente à la figure 3.2

On peut aussi donner une interprétation géométrique par un segment de longueur 1.

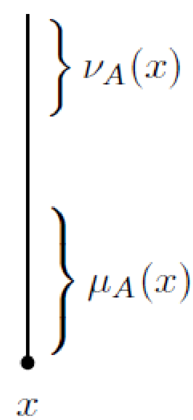


FIGURE 3.4 – présentation sur un segment de longueur 1

Les interprétations suivantes sont impossibles car on peut remarquer que $\mu(x) + \nu(x) \geq 1$ pour un x de $\mathbb{R}$.

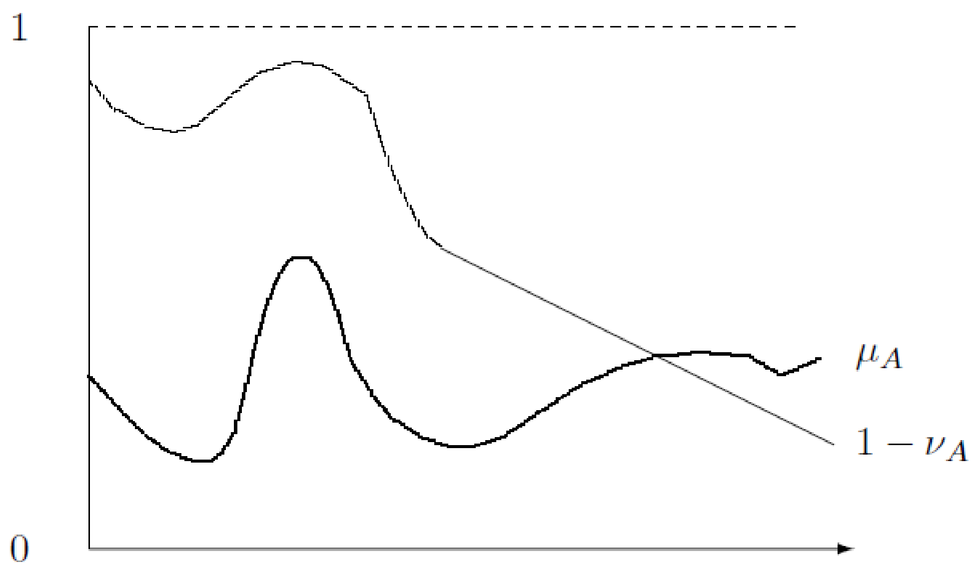


FIGURE 3.5 – Situation impossible

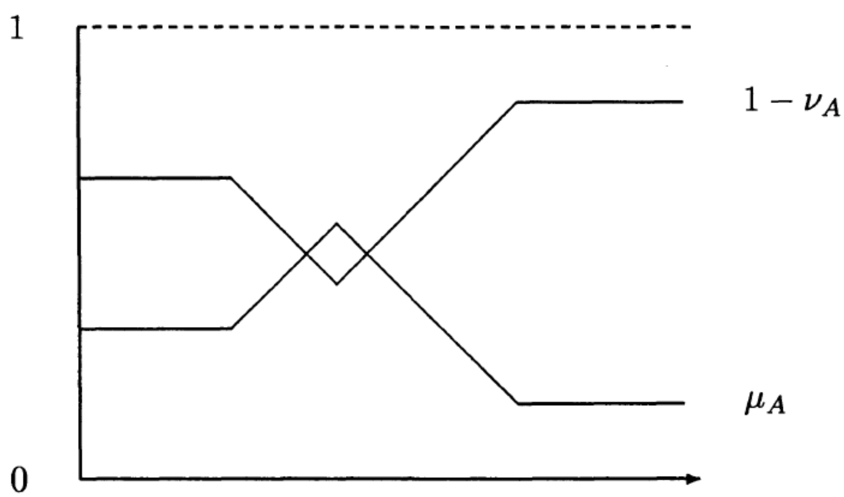


FIGURE 3.6 – Intérprétation impossible

3.4.2 Interprétation géométrique des opérations

Si $A, B \in \mathbb{IF}(X)$, on note $f_{A\cup B}$ la fonction qui à tout $x \in X$ fait associer $f_{A\cup B}(x)$ point du plan (O, x_1, x_2) de coordonnées $< \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\nu_A(x), \nu_B(x)\} >$

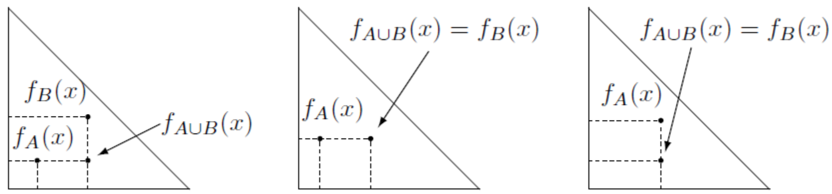


FIGURE 3.7 –

Si $A, B \in \mathbb{IF}(X)$, on note $f_{A\cap B}$ la fonction qui à tout $x \in X$ fait associer $f_{A\cap B}(x)$ point du plan (O, x_1, x_2) de coordonnées $< \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\nu_A(x), \nu_B(x)\} >$

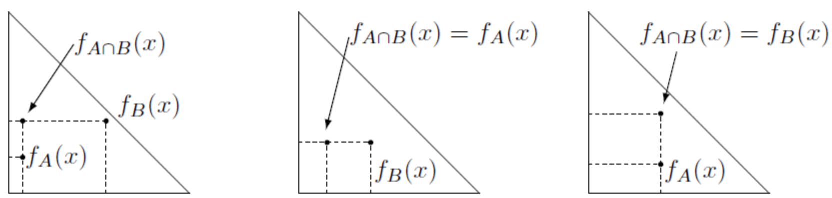


FIGURE 3.8 –

3.5 Transformation de $\mathbb{IF}(X)$ dans $\mathbb{F}(X)$

On introduit les deux opérateurs suivants $\Box$ et $\diamond A$ qui transforment un sous-ensemble flou intuitionistique en un sous-ensemble flou.

Soit $A \in \mathbb{IF}(X)$

$$\Box A = \left\{ < x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) >, x \in X \right\}$$

et

$$\diamond A = \left\{ < x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x) >, x \in X \right\}$$

Si A est un sous-ensemble flou alors

$$\Box A = A = \diamond A$$

Remarque 17. *La dernière égalité montre que $\Box$ et $\diamond$ n'admettent pas une analogie sur l'espace des sous-ensembles flous, ce qui entraine aussi que $\mathbb{IF}(X)$ est une extension propre de l'ensemble des sous-ensembles flous.*

On a les propriétés suivantes

— $\overline{\square \overline{A}} = \diamond A$

— $\overline{\diamond \overline{A}} = \square A$

— $\square A \subset A \subset \diamond A$

— $\square \square A = \square A$

— $\diamond \square A = \square A$

— $\diamond \diamond A = \diamond A$

On note $\subset_{\square}$, $\subset_{\diamond}$ et [, trois opérations définies sur $\mathbb{F}(X)$ par

$$A \subset_{\square} B \Longleftrightarrow \square A \subset \square B$$

,

$$A \subset_{\diamond} B \Longleftrightarrow \diamond A \subset \diamond B$$

et

$$A \sqsubseteq B \Longleftrightarrow \pi_A(x) \leq \pi_B(x),\ \forall x \in X$$

On obtient

— Si $A \subset_{\square} B$ et $A \subset_{\diamond} B$, alors $A \sqsubseteq B$

— Si $A \subset_{\square} B$ et $A \sqsubseteq B$, alors $A \sqsubseteq B$

— Si $A \subset_{\diamond} B$ et $A \sqsubseteq B$, alors $A \sqsubseteq B$

L'interprétation géométrique pour les deux opérateurs est donnée par :

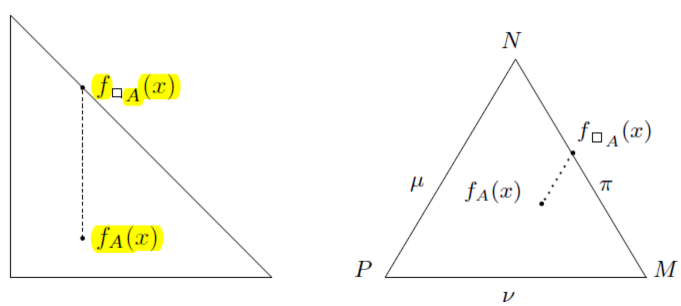


FIGURE 3.9 –

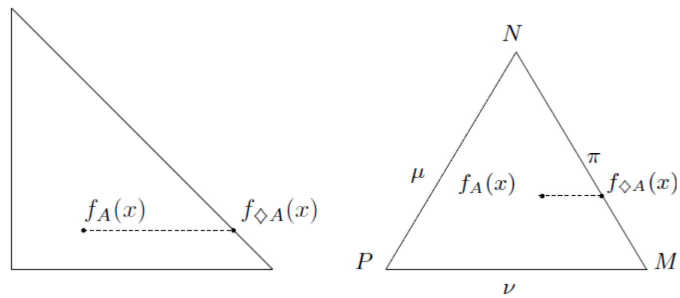


FIGURE 3.10 –

3.6 (α, β)-coupe d'un ensemble flou intuitionistique

Dans cette section on va donner une généralisation de la notion de α-coupe utilisée dans le cas d'un ensemble flou.

Définition 13. *Une* (α, β)*-coupe d'un sous-ensemble flou intuitionistique*

$$A = \left\{< x, \mu_A(x), \nu_A(x) >, x \in X\right\}$$

est définie par

$$A^{\alpha,\beta} = \left\{x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha, \quad \& \quad \nu_A(x) \leq \beta\right\}$$

où $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ *et* $\alpha + \beta \leq 1$

On définit aussi

$$A^{\beta} = \left\{x \in X, \quad \nu_A(x) \leq \beta\right\}$$

et

$$A_{\alpha} = \left\{x \in X, \quad \mu_A(x) \geq \alpha\right\}$$

On obtient la proposition suivante

Proposition 14. *[**?**]*

$$A^{\alpha,\beta}(A) = A_{\alpha} \cap A^{\beta}(A)$$

Exemple 5. $X = \{a, b, c, d, e\}$ *et* $A = \{< a, 0.5, 0.3 >, < b, 0.1, 0.7 >, < c, 1, 0 >, < d, 0, 0 >, < e, 0, 1 >\}$.
$A_{0.3,0.4} = \{a, c\}$, $\quad A_{0.3} = \{a, c\}$, $\quad A^{0.4} = \{a, c, d\}$

Chapitre 4

Espace métrique flou intuitionistique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous construisons une nouvelle métrique sur l'espace des sous-ensembles flous intuitionistiques, ce travail se pose essentiellement sur les travaux de Kaleva et Seikkala [17] et en s'inspirant de la distance définie par Professeur Melliani.

4.2 Distances de Szmidt et Kacprzyk

L'objectif de cette section est de présenter les distances étendues par Szmidt et Kacprzyk [37] du cas flou au cas flou intuitionistique.

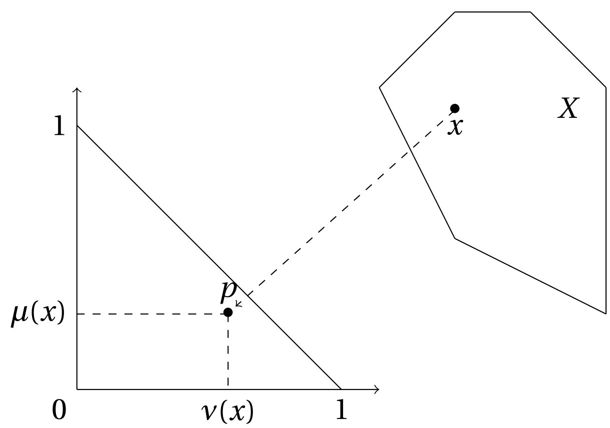
4.2.1 Interprétation géométrique

Un sous-ensemble flou A de X est caractérisé par sa fonction d'appartenance
$\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$, (sa fonction de non-appartenance $\nu_A : 1-\mu_A$).
Un sous-ensemble flou intuitionistique A de X est caractérisé par sa fonction d'appartenance $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$, fonction de non-appartenance $\nu_A : X \longrightarrow [0,1]$, et fonction d'incertitude $\pi_A : X \longrightarrow [0,1]$, avec $\mu_A + \nu_A \in [0,1]$ et $\pi_A = 1-\mu_A-\nu_A$.
Chaque sous-ensemble flou peut représenter comme un sous-ensemble flou intuitionistique

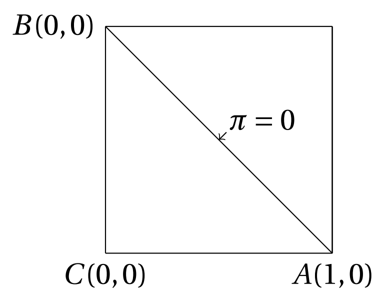
$$\left\{ < x, \mu_A(x), 1-\mu_A(x) >, x \in X \right\}$$

et dans ce cas $\pi_A = 0$.

Si $x \in X$, alors x peut se représenter comme un point du plan complexe de cordonnées $\Big(\mu(x), \nu(x)\Big)$ où μ et ν sont respectivement les fonctions d'appartenance et de non-appartenance à un sous-ensemble flou intuitionistique.



Lorsque le degré d'incertitude est nul alors on est dans le cas flous comme dans la figure suivante



Puisque chaque sous-ensemble flou intuitionistique est caractérisé par les trois paramètres, degré d'appartenance (μ), degré de non-appartenance (ν) et degré d'incertitude (π), il est, donc nécessaire, de faire une représentation gémétrique en dimension trois.

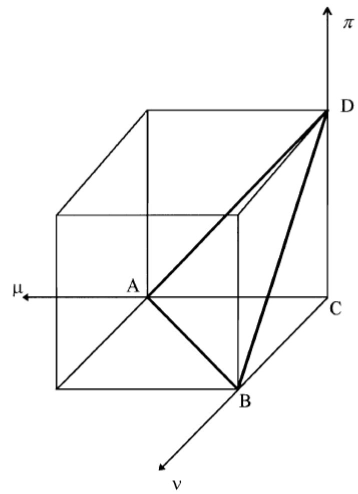


FIGURE 4.1 –

Remarquons que la deuxième figure est une projection orthogonale de la troisième figure.

4.2.2 Distances dans l'espace des sous-ensembles flous

Soit $X = \left\{x_1, ..., x_n\right\}$ et $A, B \in \mathbb{F}(X)$. Les distances les plus utilisées pour les sous-ensembles flous sont :

— **Distance de Hamming**
$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \tag{4.2.1}$$

— **Distance de Hamming normalisée**
$$l(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \tag{4.2.2}$$

— **Distance Euclidienne**
$$e(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.2.3}$$

— **Distance Euclidienne normalisée**
$$q(A,B) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.2.4}$$

Dans les formules précédentes (4.1) – (4.4) les distances sont calculées par la fonction d'appartenance seulement, sans utiliser le degré de non-appartenance car $\mu + \nu = 1$.
Maintenant considérons ces distances pour les sous-ensembles flous mais avec la représention dans le cadre flou intuitionistique, c-à-d en prenant en compte le degré de non-appartenance.

— **Distance de Hamming**

$$d'(A,B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|$$

— **Distance de Hamming normalisée**

$$l'(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|$$

— **Distance Euclidienne**

$$e'(A,B) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

— **Distance Euclidienne normalisée**

$$q'(A,B) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Remarquons que

$$d'(A,B) = 2d(A,B)$$

$$l'(A,B) = 2l(A,B)$$

$$e'(A,B) = \sqrt{2}e(A,B)$$

$$q'(A,B) = \sqrt{2}q(A,B)$$

Exemple 6. *Soit A,B,L,M,N des sous-ensembles flous de $X = \Big\{1\Big\}$, on écrit $A(\mu_A,\nu_A)/1$ pour chaque sous-ensemble.*

$$A = (1,0)/1,\ \ B = (0,1)/1,\ \ L = (1/3,2/3)/1,\ \ N = (2/3,1/3)/1,\ \ M = (1/2,1/2)/1.$$

L'interprétation géométrique de ces sous-ensembles est donnée par :

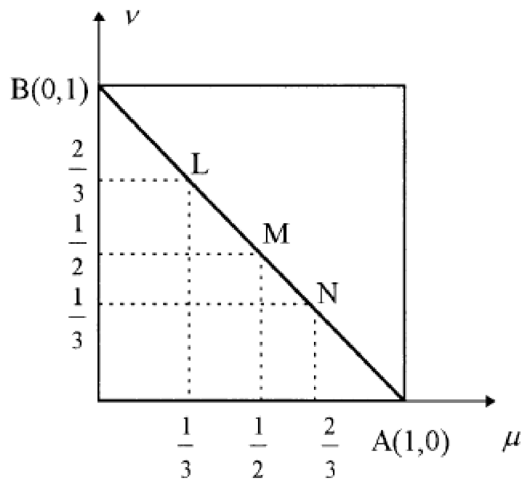


FIGURE *4.2* –

$$e(L,N)=\sqrt{(\frac{1}{3}-\frac{2}{3})^2}=\frac{1}{3}$$

$$e(L,M)=\sqrt{(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{6}$$

$$e(N,M)=\sqrt{(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{3}$$

$$e(L,A)=\sqrt{(\frac{1}{3}-1)^2}=\frac{2}{3}$$

$$e(M,A)=\sqrt{(1-\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}$$

$$e(B,A)=\sqrt{1^2}=1$$

Maintenant calculons les distances avec la représentation flou intuitionistique.

$$e'(L,N)=\sqrt{(\frac{1}{3}-\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})^2}=\frac{\sqrt{2}}{3} \tag{4.2.5}$$

$$e'(L,M)=\sqrt{(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})^2+(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{6} \tag{4.2.6}$$

$$e'(N,M)=\frac{\sqrt{2}}{6} \tag{4.2.7}$$

$$e'(L,A)=\sqrt{(\frac{1}{3}-1)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3} \tag{4.2.8}$$

$$e'(M,A)=\sqrt{(1-\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{4.2.9}$$

$$e'(B,A)=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}. \tag{4.2.10}$$

Remarque 18. *Les résultats* (4.5) − (4.10) *sont compatibles avec leurs interprétations géométrique, et on a*

— $0 \leq d(A, B) \leq n$;

— $0 \leq l(A, B) \leq 1$;

— $0 \leq e(A, B) \leq \sqrt{n}$;

— $0 \leq q(A, B) \leq 2$

— $0 \leq d'(A, B) \leq 2n$;

— $0 \leq l'(A, B) \leq 2$;

— $0 \leq e'(A, B) \leq \sqrt{2n}$;

— $0 \leq q'(A, B) \leq \sqrt{2}$

4.2.3 Distances dans l'espace des sous-ensembles flous intuitionistiques

Soit $X = \left\{x_1, ..., x_n\right\}$ un univers et $A, B \in \mathbb{IF}(X)$. La distance de Hamming est donnée par :

$$d_{\mathbb{IF}}(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)| \tag{4.2.11}$$

Puisque

$$\pi_A(x_i) = 1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i) \quad \text{et} \quad \pi_B(x_i) = 1 - \mu_B(x_i) - \nu_B(x_i)$$

On obtient

$$|\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)| \leq |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| \tag{4.2.12}$$

Remarque 19. *L'inégalité* (4.2.12) *montre bien que le degré d'incertitude* π *ne peut être pas omis dans la formule* (4.2.11) *comme dans le cas flou, pour lequel la prise en compte du second paramètre ne donnerait lieu qu'à la multiplication par une valeur constante.*

La distance Euclidienne est donnée par :

$$e_{\mathbb{IF}}(A, B) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2 + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}(\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^2 = &\Big(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\Big)^2 + \Big(\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)\Big)^2 \\ &+ 2\Big(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\Big)\Big(\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)\Big)\end{aligned}$$

Remarque 20. *D'après* (4.29) *si on omet le degré d'incertitude π, on démontre aussi qu'il s'agit d'une distance, mais dans ce cas on va tomber sur des résultats érronés, c-à-d des résultats qui ne sont pas compatibles avec l'interprétation géométrique. Pour contourner le problème.*

On définit

— **Distance de Hamming**

$$d^1_{\mathbb{IF}}(A,B) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|$$

— **Distance de Hamming normalisée**

$$l^1_{\mathbb{IF}}(A,B) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|$$

— **Distance Euclidienne**

$$e^1_{\mathbb{IF}}(A,B) = \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2 + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

— **Distance Euclidienne normalisée**

$$e^1_{\mathbb{IF}}(A,B) = \Big(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2 + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Il est clair que les formules précédentes définissent des distances.

Exemple 7. $X = \{1\}$, $A = (1,0,0)/1$, $B = (0,1,0)/1$, $D = (0,0,1)/1$, $A = (1/2,1/2,0)/1$, $E = (1/4,1/4,1/2)/1$. *L'interprétation géométrique de ces sous-ensembles est donnée par la figure suivante :*

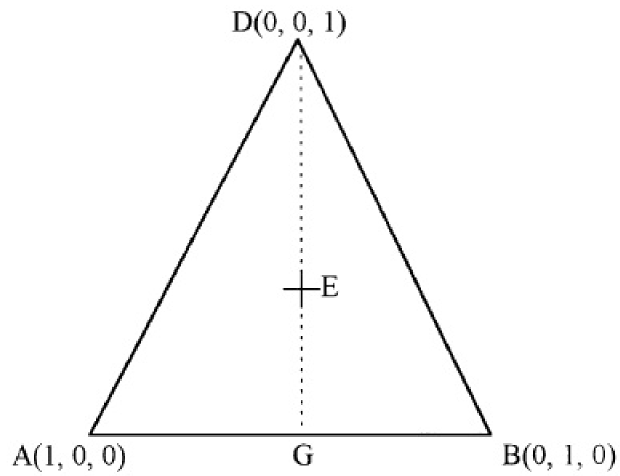


FIGURE *4.3* –

Dans un premier temps on calcule avec la distance Euclidienne sans utiliser le degré d'incertitude π

$$e(A,B) = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2} \tag{4.2.13}$$

On a

$$e(A,D) = \frac{1}{2} \tag{4.2.14}$$

$$e(B,D) = \frac{1}{2} \tag{4.2.15}$$

$$e(A,B) = 1 \tag{4.2.16}$$

$$e(A,G) = \frac{1}{2} \tag{4.2.17}$$

$$e(B,G) = \frac{1}{2} \tag{4.2.18}$$

$$e(E,G) = \frac{1}{4} \tag{4.2.19}$$

$$e(D,G) = \frac{1}{4} \tag{4.2.20}$$

Remarque 21. *Les résultats précédents ne sont pas compatibles avec l'interprétation géométrique, i.e. ne sont pas égaux aux mésures données par la figure géométrique.*

Mais si on ajoute le degré d'incertitude π *on obtient*

$$e^1_{\mathbb{F}}(A,B) = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2 + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|^2}$$

On a

$$e^1_{I\!F}(A,D) = 1$$

$$e^1_{I\!F}(B,D) = 1$$

$$e^1_{I\!F}(A,B) = 1$$

$$e^1_{I\!F}(A,G) = \frac{1}{2}$$

$$e^1_{I\!F}(B,G) = \frac{1}{2}$$

$$e^1_{I\!F}(E,G) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$e^1_{I\!F}(D,G) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Remarque 22. *Dans ce cas les résultats sont compatibles avec l'interprétation géométrique, ce qui fait que l'omission du degré d'incertitude à un effet sur les calculs qui sera incompatible avec celles données géométriquement.*

4.3 Distance de Melliani et Chadli

Dans la section précedente on a présenté quelques distances données dans le cas où X est discrèt.

Dans cette section on va présenter la distance construite par Les professeurs Melliani et L.S.Chadli dans [7], en utilisant la norme euclidienne et l'approche fonctionnelle.

Soit X un univers. Considèrons l'application

$$d_{\mathbb{F}} : \begin{cases} \mathbb{F}(X) \times \mathbb{F}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (A,B) \longrightarrow \|\mu_A - \mu_B\|_2 \end{cases}$$

où

$$\|\mu_A\|_2 = \sqrt{\int_X \left(\mu_A(x)\right)^2 dx}$$

Il est clair que

Lemme 6. *$d_{\mathbb{F}}$ définie une distance sur $\mathbb{F}(X)$.*

Maintenant soit

$$d_{\mathbb{F}}:\begin{cases}\mathbb{F}(X)\times\mathbb{F}(X)\longrightarrow\mathbb{R}^+\\(A,B)\longrightarrow\sqrt{\|\mu_A-\mu_B\|_2^2+\|\nu_A-\nu_B\|_2^2+\|\pi_A-\pi_B\|_2^2}\end{cases}$$

Théorème 9. *$d_{\mathbb{F}}$ définie une distance sur $\mathbb{F}(X)$.*

Démonstration. Par l'inégalité de Minkowski

$$\|\mu_A-\mu_C\|_2^2\leq\Big(\|\mu_A-\mu_B\|_2+\|\mu_B-\mu_C\|_2\Big)^2\quad\forall A,B,C\in\mathbb{F}(X)$$

puis par l'inégalité de H*ö*lder

$$\|\mu_A-\mu_C\|_2^2\leq\|\mu_A-\mu_B\|_2^2+\|\mu_B-\mu_C\|_2^2\quad\forall A,B,C\in\mathbb{F}(X)$$

de même

$$\|\nu_A-\nu_C\|_2^2\leq\|\nu_A-\nu_B\|_2^2+\|\nu_B-\nu_C\|_2^2\quad\forall A,B,C\in\mathbb{F}(X)$$

et

$$\|\pi_A-\pi_C\|_2^2\leq\|\pi_A-\pi_B\|_2^2+\|\pi_B-\pi_C\|_2^2\quad\forall A,B,C\in\mathbb{F}(X)$$

Ce qui montre l'inégalité triangulaire.

En utilisant le lemme 6, on obtient le résultat. □

Exemple 8. *Soient A et B deux sous-ensembles flous intuitionistiques définis par :*

$$\mu_A(x)=\begin{cases}x-1 & \textit{pour } x\in[1,2]\\-x+3 & \textit{pour } x\in[2,3]\\0 & \textit{ailleurs}\end{cases}$$

$$\nu_A(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+1 & \textit{pour } x\in[0,2]\\\frac{1}{2}x-1 & \textit{pour } x\in[2,4]\\0,\ \textit{ailleurs}\end{cases}$$

$$\pi_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \textit{pour } x \in [0,1] \\ -\frac{1}{2}x+1 & \textit{pour } x \in [0,2] \\ \frac{1}{2}x-1 & \textit{pour } x \in [2,3] \\ -\frac{1}{2}x+2 & \textit{pour } x \in [3,4] \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} x+3 & \textit{pour } x \in [-3,-2] \\ -x-1 & \textit{pour } x \in [-2,-1] \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

$$\nu_B(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x-1 & \textit{pour } x \in [-4,-2] \\ \frac{1}{2}x+1 & \textit{pour } x \in [-2,0] \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

$$\pi_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+2 & \textit{pour } x \in [-4,-3] \\ -\frac{1}{2}x-1 & \textit{pour } x \in [-3,-2] \\ \frac{1}{2}x+1 & \textit{pour } x \in [-2,-1] \\ -\frac{1}{2}x & \textit{pour } x \in [-1,0] \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

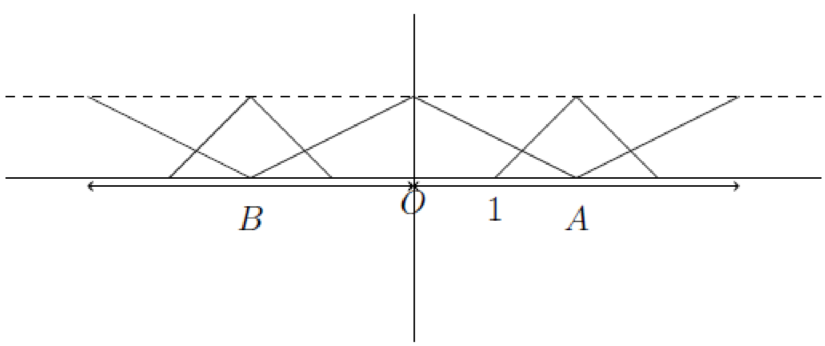


FIGURE *4.4* –

$$
\begin{aligned}
d_{\mathbb{IFS}}(A,B) &= \int_{-3}^{-1} |\mu_B(x)|^2 dx + \int_{1}^{3} |\mu_A(x)|^2 dx \\
&+ \int_{-4}^{0} |\nu_B(x)|^2 dx + \int_{0}^{4} |\nu_A(x)|^2 dx \\
&+ \int_{0}^{4} |\pi_A(x)|^2 dx + \int_{-4}^{0} |\pi_B(x)|^2 dx \\
&= \sqrt{\frac{49}{12}}
\end{aligned}
$$

4.4 Distance sur $\mathbb{F}_1$

Dans cette section on va construire une nouvelle métrique sur l'espace des sous-ensembles flous intuitionistiques vérifiant certaines propriétés. Le travail sur $\mathbb{F}_1$ permet de généraliser le travail de Kaleva et Seikkala [17].

4.4.1 Généralités

Introduison l'ensemble $\mathbb{F}_1$ défini comme suit.

$$
\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_1(\mathbb{R}) = \left\{ < u, v >: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]^2, \quad 0 \leq u + v \leq 1 \right\}
$$

Vérifiant les conditions suivantes :

1. Chaque $< u, v > \in \mathbb{F}_1$ est normal, i.e, $\exists x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, tel que $u(x_0) = 1$ et $v(x_1) = 1$.
2. Chaque $< u, v > \in \mathbb{F}_1$ est convexe intuitionistique, i.e, u est convexe au sens flou et v concave au sens flou.

   Autrement dit $\quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad$ et $\quad \forall t \in [0,1]$

$$
u(tx + (1-t)y) \geq \min\big(u(x), u(y)\big)
$$
$$
v(tx + (1-t)y) \leq \min\big(v(x), v(y)\big)
$$

3. Chaque $< u, v > \in \mathbb{F}_1$, u est semi-continue inférieurement, et v est semi-continue supérieurement.
4. $\overline{\left\{ x \in \mathbb{R}, \quad v(x) \leq \alpha \right\}}$ est bournée.

Chaque élément de $\mathbb{F}_1$ est dit un nombre flou intuitionistique.

Remarque 23. *Lorsque $u+v=1$, on trouve les mêmes propriétés de la définition d'un élément de E^1.*

Définition 14. *Pour $\alpha \in [0,1]$, on définit la α-coupe supérieure par :*

$$\Big[< u, v > \Big]^{\alpha} = \Big\{ x \in \mathbb{R},\ v(x) \leq 1-\alpha \Big\}$$

et la α-coupe inférieure par :

$$\Big[< u, v > \Big]_{\alpha} = \Big\{ x \in \mathbb{R},\ u(x) \geq \alpha \Big\}$$

Définition 15. *On définit l'élément neutre pour l'addition comme suit,*

$$\widetilde{0}(x) = \begin{cases} (1,0) & , x = 0 \\ (0,1) & , x \neq 0 \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Remarque 24. *Dans le cas flou on écrit $\Big[< u, v > \Big]_{\alpha} = [u]^{\alpha}$ et $\Big[< u, v > \Big]^{\alpha} = [1-v]^{\alpha}$.*

D'après les propriétés vérifiées par un élément de $\mathbb{F}_1$, on a

Proposition 15. *On peut écrire*

$$\Big[< u, v > \Big]_{\alpha} = \Big[[< u, v >]_l^+(\alpha), [< u, v >]_r^+(\alpha) \Big]$$

$$\Big[< u, v > \Big]^{\alpha} = \Big[[< u, v >]_l^-(\alpha), [< u, v >]_r^-(\alpha) \Big]$$

Proposition 16. *Pour tout $< u, v >, < u', v' > \in \mathbb{F}_1$, on a*

$$< u, v > = < u', v' > \Longleftrightarrow \begin{cases} \Big[< u, v > \Big]_{\alpha} = \Big[< u', v' > \Big]_{\alpha} \\ \Big[< u, v > \Big]^{\alpha} = \Big[< u', v' > \Big]^{\alpha} \end{cases} , \forall \alpha \in [0,1]$$

Dans $\mathbb{F}_1$, on définit l'addition et la multiplication par un scalaire par :

$$< u, v > \oplus < u', v' > = < u \vee u', v \wedge v' >,\ \forall < u, v >, < u', v' > \in \mathbb{F}_1$$

avec

$$(u \vee u')(z) = \sup_{z=x+y} \min\big(u(x), u'(y)\big)$$

et

$$(v \wedge v')(z) = \inf_{z=x+y} \max\big(v(x), v'(y)\big)$$

$$\lambda < u, v >=< \lambda u, \lambda v >, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall < u, v > \in \mathbb{F}_1$$

souvent on note + à la place de $\oplus$.

Par l'extension de Zadeh on a

$$\Big[< u, v > \oplus < u', v' > \Big]_\alpha = \Big[< u, v > \Big]_\alpha + \Big[< u', v' > \Big]_\alpha$$

$$\Big[< u, v > \oplus < u', v' > \Big]^\alpha = \Big[< u, v > \Big]^\alpha + \Big[< u', v' > \Big]^\alpha$$

$$\Big[\lambda < u, v > \Big]_\alpha = \lambda \Big[< u, v > \Big]_\alpha$$

$$\Big[\lambda < u, v > \Big]^\alpha = \lambda \Big[< u, v > \Big]^\alpha$$

Théorème 10. *Soit* $\mathscr{M} = \Big\{ M_\alpha, M^\alpha, \alpha \in [0,1] \Big\}$ *une famille de sous parties de* $\mathbb{R}$ *vérifiant,*

1. $\alpha \leq s \Longrightarrow M_s \subset M_\alpha$ *et* $M^s \subset M^\alpha$*, pour chaque* $\alpha, s \in [0,1]$..
2. M_α *et* M_s *compactes convexes et non vide dans* $\mathbb{R}$ *pour tout* $\alpha \in [0,1]$.
3. *Pour toute suite croissante* $\alpha_i \longrightarrow \alpha$ *sur* $[0,1]$*, on a* $M_\alpha = \bigcap_i M_{\alpha_i}$ *et* $M^\alpha = \bigcap_i M^{\alpha_i}$.

On définit u et v par

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin M_0 \\ \sup\limits_{\alpha \in [0,1]} M_\alpha & x \in M_0 \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1, & x \notin M^0 \\ 1 - \sup\limits_{\alpha \in [0,1]} M_\alpha & x \in M^0 \end{cases}$$

Alors

$$< u, v > \in \mathbb{F}_1$$

où $M_\alpha = [< u, v >]_\alpha$ *et* $M^\alpha = [< u, v >]^\alpha$.

Remarques 1.

1. *La famille* $\Big\{ [< u, v >]_\alpha, [< u, v >]^\alpha, \ \alpha \in [0,1] \Big\}$ *satisfaite* $(1-3)$ *du théorème précedent.*
2. *Pour tout* $\alpha \in [0,1]$,

$$[< u, v >]_\alpha \subset [< u, v >]^\alpha$$

4.4.2 Exemples

Un nombre intuitionistique triangulaire (TIFN) $< u, v >$, est défini sur $\mathbb{R}$, par

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

et

$$u(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a'_1} & \text{si } a'_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{x-a_2}{a'_3-a_2} & \text{si } a_2 \leq x \leq a'_3 \\ 1 & ailleurs \end{cases}$$

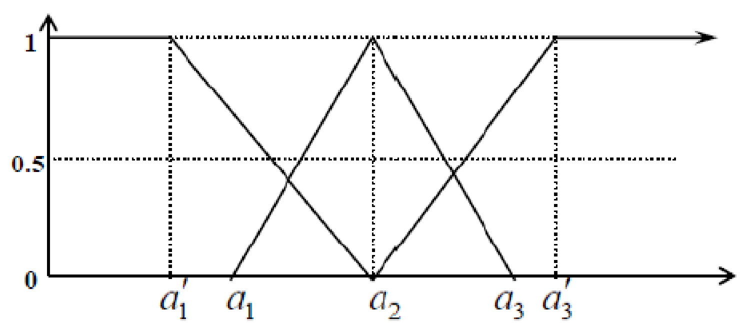


FIGURE 4.5 –

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & \text{si } a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

et

$$v(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a'_1} & \text{si } a'_1 \leq x \leq a_2 \\ 0 & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{x-a_3}{a'_4-a_3} & \text{si } a_3 \leq x \leq a'_4 \\ 1 & ailleurs \end{cases}$$

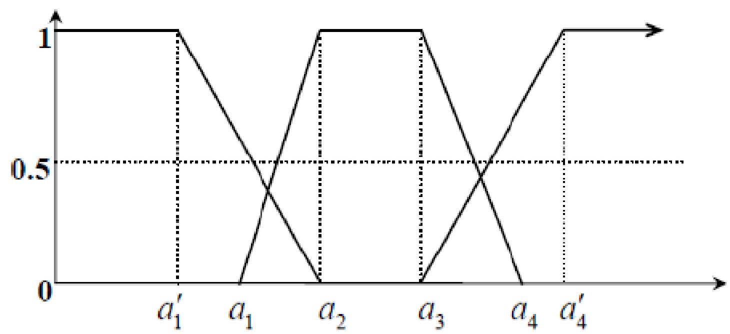


FIGURE 4.6 –

4.4.3 Métrique sur $\mathbb{F}_1$

Commençons par un lemme important dans ce qui suit.

Lemme 7. *Soient* $<u,v>, <u',v'> \in \mathbb{F}_1$.
Si $[<u,v>]^{\alpha} = [<u',v'>]^{\alpha}$ *et* $[<u,v>]_{\alpha} = [<u',v'>]_{\alpha}$ *pour tout* $\alpha \in I$, *où* I *est une partie dense dans* $[0,1]$, *alors* $<u,v> = <u',v'>$.

Démonstration. Soit $\alpha \in [0,1]$, puisque I est dense dans $[0,1]$, il existe $(\alpha_i)_i$ une suite croissante sur I, tendant vers α, mais

$$[<u,v>]^{\alpha} = \bigcap_i [<u,v>]^{\alpha_i} = \bigcap_i [<u',v'>]^{\alpha_i} = [<u',v'>]^{\alpha}$$

et

$$[<u,v>]_{\alpha} = \bigcap_i [<u,v>]_{\alpha_i} = \bigcap_i [<u',v'>]_{\alpha_i} = [<u',v'>]_{\alpha}$$

□

Maintenant, soient $<u,v>, <u',v'> \in \mathbb{F}_1$, et $p \in [1,\infty]$
Considérons l'application

$$\begin{aligned} d_p\left(<u,v>, <u',v'>\right) = \Big(\frac{1}{4}\int_0^1 &|[<u,v>]_l^+(\alpha) - [<u',v'>]_l^+(\alpha)|^p d\alpha \\ + \frac{1}{4}\int_0^1 |[<u,v>]_r^+(\alpha) - [<u',v'>]_r^+(\alpha)|^p d\alpha &+ \frac{1}{4}\int_0^1 |[<u,v>]_l^-(\alpha) - [<u',v'>]_l^-(\alpha)|^p d\alpha \\ &+ \frac{1}{4}\int_0^1 |[<u,v>]_r^-(\alpha) - [<u',v'>]_r^-(\alpha)|^p d\alpha\Big)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Si $p \in [1, \infty[$

et

$$d_\infty\left(<u,v>,<u',v'>\right) = \frac{1}{4}\Big(|[<u,v>]_l^+(\alpha) - [<u',v'>]_l^+(\alpha)|$$
$$+ |[<u,v>]_r^+(\alpha) - [<u',v'>]_r^+(\alpha)| + |[<u,v>]_l^-(\alpha) - [<u',v'>]_l^-(\alpha)|$$
$$+ |[<u,v>]_r^-(\alpha) - [<u',v'>]_r^-(\alpha)|\Big)$$

Pour $p = \infty$.

Lemme 8. *Pour tout $p \in [1, \infty]$, l'application d_p est bien définie.*

Démonstration. Le point essentiel de la démonstration est que $[<u,v>]^\alpha$ et $[<u,v>]_\alpha$ sont des fonctions mesurables. Pour cela soit $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_i < ..$ une suite d'éléments de $[0,1]$, telle que $\alpha_i \longrightarrow \alpha \in]0,1]$, d'où $[<u,v>]^\alpha = \bigcap_i [<u,v>]^{\alpha_i}$ et $[<u,v>]_\alpha = \bigcap_i [<u,v>]_{\alpha_i}$, ce qui montre bien la mesurabilité de ces deux fonctions. □

Théorème 11. *Pour tout $p \in [1, \infty]$, $\left(\mathbb{F}_1, d_p\right)$ est un espace métrique.*

Démonstration. La symétrie et l'inégalité triangulaire sont des conséquences de celles de la distance de Hausdorff et quelques propriétés de l'intégrale.
Il reste à démontrer que $d_p\left(<u,v>,<u',v'>\right) = 0$, alors $<u,v>=<u',v'>$.
Si $d_p\left(<u,v>,<u',v'>\right) = 0$, pour $p \neq \infty$, il vient que

$$[<u,v>]^\alpha = [<u',v'>]^\alpha \text{ et} [<u,v>]_\alpha = [<u',v'>]_\alpha$$

presque partout, la densité de la partie où cette égalité est réalisée, montre l'égalité partout.
L'égalité est assez claire dans le cas de $p = \infty$. □

Exemple 9.

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & si \;\; a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & si \;\; a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & si \;\; a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

et

$$v(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a'_1} & si\ \ a'_1 \le x \le a_2 \\ 0 & si\ \ a_2 \le x \le a_3 \\ \frac{x-a_3}{a'_4-a_3} & si\ \ a_3 \le x \le a'_4 \\ 1 & ailleurs \end{cases} \tag{4.4.2}$$

$$[< u, v >]_\alpha = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_3 - \alpha(a_3 - a_2)]$$

$$[< u, v >]^\alpha = [a_2 - (1-\alpha)(a_2 - a'_1), a_2 + (1-\alpha)(a_3 - a_2)]$$

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x-b_1}{b_2-b_1} & si\ \ a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & si\ a_2 \le x \le a_3 \\ \frac{b_4-x}{b_4-b_3} & si\ \ b_3 \le x \le a_4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

et

$$v(x) = \begin{cases} \frac{b_2-x}{b_2-b'_1} & si\ \ b'_1 \le x \le a_2 \\ 0 & si\ \ b_2 \le x \le b_3 \\ \frac{x-b_3}{b'_4-b_3} & si\ \ b_3 \le x \le b'_4 \\ 1 & ailleurs \end{cases}$$

$$[< u', v' >]_\alpha = [b_1 + \alpha(b_2 - b_1), b_3 - \alpha(b_3 - b_2)]$$

$$[< u', v' >]^\alpha = [b_2 - (1-\alpha)(b_2 - b'_1), b_2 + (1-\alpha)(b'_3 - b_2)]$$

Pour $a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = 1,\ a'_1 = -2, a_2 = 0, a'_3 = 2,\ b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2$ *et* $b'_1 = 1, b_2 = 1, b'_3 = 4$, *on obtient, si* $p \in [1, \infty)$

$$d_p\left(< u, v >, < u', v' >\right) = \left(1 + \frac{2 \times 5^{p+1} - 2 \times 4^{p+1} + 3^{p+2} - 3}{8(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$d_\infty\left(< u, v >, < u', v' >\right) = \frac{5}{2}$$

4.4.4 Topologie induite par la distance d_p

Définition 16. *Soit $< u, v > \in \mathbb{F}_1$ et $r > 0$. On appelle boule ouverte de centre $< u, v >$ et de rayon r, l'ensemble noté $B_o(< u, v >, r)$, des éléments $< u', v' > \in \mathbb{F}_1$, tels que $d_p\left(< u, v >, < u', v' >\right) < r$. Lorsque $d_p\left(< u, v >, < u', v' >\right) \leq r$ la boule est dite fermée.*

Définition 17. *Soit $< u, v > \in \mathbb{F}_1$ et $r > 0$. On appelle voisinage de $< u, v >$ une partie de $\mathbb{F}_1$ contient une boule ouverte de centre $< u, v >$.*

Définition 18. *Un ouvert de $\mathbb{F}_1$, est une partie de $\mathbb{F}_1$ voisinage de chacun de ses points.*

Définition 19. *Soit $(< u_n, v_n >)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{F}_1$.*
On dit que cette suite est convergente vers $< u, v > \in \mathbb{F}_1$, si

$$\lim_{n\to\infty} d_p\left(< u, v >, < u_n, v_n >\right) = 0$$

Définition 20. *Une suite $(< u_n, v_n >)_n$ d'éléments de $\mathbb{F}_1$, est dite de Cauchy, si*

$$\lim_{n,m\to\infty} d_p\left(< u_m, v_m >, < u_n, v_n >\right) = 0$$

Complétude

Théorème 12. *Pour tout $p \in [1,\infty]$, $\left(\mathbb{F}_1, d_p\right)$ est un espace métrique complet.*

Démonstration. Soient $\epsilon > 0$ et $(< u_n, v_n >)_n$, une suite de Cauchy dans $\mathbb{F}_1$, on discutera la démonstration suivant l'indice p :
(i). Cas $p = \infty$, on a

$$\sup_{\alpha\in(0,1]} \left|[< u_n, v_n >]_l^+(\alpha) - [< u'_m, v'_m >]_l^+(\alpha)\right| \leq \epsilon$$

et

$$\sup_{\alpha\in(0,1]} \left|[< u_n, v_n >]_r^+(\alpha) - [< u'_m, v'_m >]_r^+(\alpha)\right| \leq \epsilon$$

dès que n, m assez grands. La complétude de $\mathbb{R}$, assure que $[< u_n, v_n >]_l^+(\alpha) \longrightarrow \phi_l(\alpha)$ et $[< u_n, v_n >]_r^+(\alpha) \longrightarrow \phi_r(\alpha)$, par application du théorème 10 $\left([\phi_l(\alpha), \phi_r(\alpha)]\right)_{\alpha\in(0,1]}$ définit un nombre flou, de même $\left([\phi^l(\alpha), \phi^r(\alpha)]\right)_{\alpha\in(0,1]}$ définit un nombre flou, où $\phi^l(\alpha) = \lim_{n\to\infty} [< u_n, v_n >]_l^-(\alpha)$ et $\phi^r(\alpha) = \lim_{n\to\infty} [< u_n, v_n >]_r^-(\alpha)$.
D'autre part ce qui précede, montre que $\left\{\left([\phi_l(\alpha), \phi_r(\alpha)]\right), \left([\phi^l(\alpha), \phi^r(\alpha)]\right), \alpha \in [0,1]\right\}$ définit

un élément de $\mathbb{F}_1$.

(ii). Cas $p \neq \infty$, dans ce cas

$$\int_0^1 \left|[< u_n, v_n >]_l^+(\alpha) - [< u'_m, v'_m >]_l^+(\alpha)\right|^p d\alpha \leq \epsilon$$

et

$$\int_0^1 \left|[< u_n, v_n >]_r^+(\alpha) - [< u'_m, v'_m >]_r^+(\alpha)\right|^p d\alpha \leq \epsilon$$

Par le théorème de Frechet-Riesz dans [5] page 94.

$$[< u_n, v_n >]_l^+(\alpha) \longrightarrow \phi_l(\alpha) \quad \text{dans } L^p((0,1])$$

et

$$[< u_n, v_n >]_r^+(\alpha) \longrightarrow \phi_r(\alpha) \quad \text{dans } L^p((0,1])$$

.

Il existe une sous-suite $(< u_{n_k}, v_{n_k} >)_k$ telle que

$$[< u_{n_k}, v_{n_k} >]_l^+(\alpha) \longrightarrow \phi_l(\alpha) \quad \text{p.p dans } [0,1]$$

et

$$[< u_{n_k}, v_{n_k} >]_r^+(\alpha) \longrightarrow \phi_r(\alpha) \quad \text{p.p dans } [0,1]$$

Par application du théorème 10, il existe $< u, v >\in \mathbb{F}_1$ tel que

$$[< u, v >]^\alpha = [\phi_l^-(\alpha), \phi_r^-(\alpha)]$$

et

$$[< u, v >]_\alpha = [\phi_l^+(\alpha), \phi_r^+(\alpha)]$$

□

Remarque 25. *Puisque il s'agit d'un espace métrique complet, on peut appliquer le lemme de Baire.*

Séparabilité

Définition 21. *On dit qu'un espace métrique* (X,d) *est separable s'il existe une partie* D *de* X*, au plus dénombrable et dense.*

Théorème 13. *L'espace* $(\mathbb{F}_1, d_p)$*, est séparable pour* $p \in [1,\infty)$

Démonstration. La preuve est donnée en plusieurs étapes.

Soient $\epsilon > 0$ et $< u, v > \in \mathbb{F}_1$.

1. Construction de $< \phi_1, \phi_2 > \in \mathbb{F}_1$.

   Puisque $supp\{< u, v >\}$ est un compact, il existe $S_i = [a_i, b_i]$, $i = 1,..,r$ où $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, tels que $0 < b_i - a_i = O(\epsilon)$, et $supp\{< u, v >\} \subset \bigcup_{1\leq i\leq r} S_i$.

   Considérons $T_i = a_i$, et définissons $< \phi_1, \phi_2 > \in \mathbb{F}_1$, par

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in\overline{S_i}} u(x),\ si\ x = T_i \\ 0,\ ailleurs \end{cases} \tag{4.4.3}$$

   et

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x\in\overline{S_i}} v(x),\ si\ x = T_i \\ 0,\ ailleurs \end{cases} \tag{4.4.4}$$

   Il est claire que $< \phi_1, \phi_2 > \in \mathbb{F}_1$. Pour $i = 1,...,r$, posons $\alpha_i = \phi_1(T_i)$ et $\beta_i = 1 - \phi_2(T_i)$. On arrange $S_1,...,S_r$ et $T_1,...,T_r$, en sorte que

$$0 \leq \alpha_1 \leq ... \leq \alpha_r,\ et\ 0 \leq \beta_1 \leq ... \leq \beta_r$$

2. Montrons que $d_\infty\big(< u, v >, < \phi_1, \phi_2 >\big) = O(\epsilon)$.

   On choisit $0 < \alpha < 1$. Puisque $\alpha_{i_{0-1}} \leq \alpha \leq \alpha_{i_0}$, pour un certain $1 \leq i_0 \leq r$, on obtient $[< u, v >]_{\alpha_{i_0}} \subset [< u, v >]_\alpha$ et $[< u, v >]^{\alpha_{i_0}} \subset [< u, v >]^\alpha$, mais $[< \phi_1, \phi_2 >]_{\alpha_{i_0}} = \{T_{i_0},...,T_r\}$ et $[< \phi_1, \phi_2 >]^{\alpha_{i_0}} = \{T_{i_0},...,T_r\}$, alors $x \in [< u, v >]_\alpha \subset [< u, v >]^\alpha$, ce qui implique $x \in S_{i_1}$, pour $i_1 \geq i_0$, il vient que

$$\min_{1\leq i\leq r} |x - T_i| \leq |x - T_{i_1}| = O(\epsilon)$$

   D'autre part, pour tout $i \geq i_0$, on a

$$\phi_1(T_i) \geq \alpha\ et\ \phi_2(T_i) \leq 1 - \alpha$$

Aussi u est semi-continue supérieurement, et v semi-continue inférieurement, alors il existe x_0 et x_1 tels que $\phi_1(T_i) = u(x_0)$ et $\phi_2(T_i) = u(x_1)$, on obtient

$$\inf_{x\in[<u,v>]_\alpha} |T_i - x_0| = O(\epsilon)$$

et

$$\inf_{x\in[<u,v>]^\alpha} |T_i - x_1| = O(\epsilon)$$

donc

$$d_\infty\left(<u,v>,<\phi_1,\phi_2>\right) \leq \sup_{\alpha\in(0,1]} d_H\left([<u,v>]^\alpha,[<\phi_1,\phi_2>]^\alpha\right)$$
$$+ \sup_{\alpha\in(0,1]} d_H\left([<u,v>]_\alpha,[<\phi_1,\phi_2>]_\alpha\right)$$

3. Construction de $<\psi_1,\psi_2>$.

   On réordone $0<\alpha_1<...<\alpha_s$, $s\leq r$.

   Si $\alpha_k \notin \mathbb{Q}$, on choisit α'_k, en sorte que $\max\{\alpha_{k-1},\alpha_k-\frac{\epsilon}{M}\}<\alpha'_k<\alpha_k$, où

$$M \geq 2(r-1)diam\left(supp(<u,v>)\right)$$

   mais si $\alpha_k\in\mathbb{Q}$, on prend $\alpha'_k=\alpha_k$. Définissons $<\psi_1,\psi_2>\in \mathbb{F}_1$, par

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \alpha'_k & \text{si } \phi_1(x)=\alpha_k \\ 0 & ailleurs \end{cases} \tag{4.4.5}$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} \beta'_k & \text{si } \phi_1(x)=1-\alpha_k \\ 0 & ailleurs \end{cases} \tag{4.4.6}$$

   Il vient que

$$d_p\left(<\psi_1,\psi_2>,<\phi_1,\phi_2>\right) \leq 2diam\left(supp(<u,v>)\right)[(\sum_{i=0}^{s}\alpha'_i-\alpha_i)^{\frac{1}{p}}]$$

   ce qui entraîne que

$$d_p\left(<\psi_1,\psi_2>,<\phi_1,\phi_2>\right) = O(\epsilon^{\frac{1}{p}})$$

   Enfin

$$d_p\left(<\psi_1,\psi_2>,<u,v>\right) \leq d_p\left(<\psi_1,\psi_2>,<\phi_1,\phi_2>\right) + d_\infty\left(<u,v>,<\phi_1,\phi_2>\right)$$

$$= O(\epsilon)$$

$\square$

Théorème 14. *L'espace* $(\mathbb{F}_1, d_p)$, *n'est pas séparable pour* $p = \infty$

Démonstration. Pour $\alpha \in [0,1]$, considèrons les deux fonctions suivantes

$$\phi_{\alpha,1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \alpha & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & ailleurs \end{cases} \tag{4.4.7}$$

$$\phi_{\alpha,2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 1-\alpha & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & ailleurs \end{cases} \tag{4.4.8}$$

Pour $\alpha \neq \beta$, on obtient

$$d_\infty\big(<\phi_{1,\alpha}, \phi_{2,\alpha}>, <\phi_{1,\beta}, \phi_{2,\beta}>\big) \geq 1$$

$\square$

Conclusion et perspectives

La construction de cette métrique entre les sous-ensembles flous intuitionistiques va nous permettre de développer certains axes importants tels que :

1. L'étude des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles avec des paramètres incertains,
2. La notion de Semi-groupe pour des opérateurs à coefficients flous intuitionistiques,
3. L'étude de certaines équations fractionnaires.

D'autres voies sont en cours d'exploitation :

1. Etendre cette notion aux résultats de l'analyse fonctionnelle,
2. De résoudre numériquement certaines équations qui contiennent des données imprécises.

Bibliographie

[1] K. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy sets and systems, 20 (1) (1986), $87--96$.

[2] K. Atanassov, On Intuitionistic Fuzzy Sets Theory, Springer, Berlin (2012).

[3] K. Atanassov, A new topological operator over intuitionistic fuzzy sets. Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 21 (3) (2015) $90--96$.

[4] H. Bandemer, Fuzzy sets, fuzzy logic, fuzzy methods with applications, John Wiley (1996)

[5] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer (2010).

[6] L. Bolk, P. Borowik, Many-Valued Logics. Springer, Berlin (1992).

[7] L. S. Chadli and S. Melliani, On distance between intuitionistic fuzzy sets. Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 8 (3) (2002) $34--36$.

[8] C. Castaing and M. Valadier, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Springer, Berlin. 1977.

[9] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy sets and systems, Academic Press, New York, (1980).

[10] P. Diamond and P. E. Kloeden, Metric Spaces of Fuzzy Sets, World Scientific, Singapore, 1994.

[11] M. Elomari, S. Melliani, R. Ettoussi and L. S. Chadli, Intuitionistic fuzzy semigroup, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 21(2) (2015) $43--50$.

[12] M. Elomari, S. Melliani, I. Bakhadach and L. S. Chadli, Intuitionistic fuzzy soft generalized superconnectedness, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 22 (2) (2016) $44--51$.

[13] M. Elomari, S. Melliani and L. S. Chadli, Evolution problem with intuitionistic fuzzy fractional derivative, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 22 (3) (2016) $80--90$.

[14] H. Y. Goo and J. Park, On the continuity of the Zadeh extensions, J. Chungcheong Math.Soc. 20 (4) (2007) 525 – –533.

[15] R. Goetschel and W. Voxman, A pseudometric for fuzzy sets and certain related results, J. Math. Anal. Appl. 81 (1981) 507 – –523.

[16] F. Haussdorf, Set Theory, Chelsea Press, New York (1957).

[17] O. Kaleva and S. Seikkala, On The Convergence of Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems, North-Holland, 17 (1985) 53 – –65.

[18] O. Kaleva, The Cauchy problem for fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems, 35 (1990), 389 – –396.

[19] A. Kaufmann and M. Gupta, Introduction to fuzzy arithmetic : theory and applications, Van Nostran d Rehinold, New York, NY, (1985).

[20] P. E. Kloeden, Compact Supported Endographs and Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems, 4 (1980) 193 – –201 .

[21] S. Melliani, M. Elomari, L. S. Chadli, R. Ettoussi, Intuitionistic fuzzy metric space, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 21 (1) (2015) 43 – –53.

[22] S. Melliani, M. Elomari, L. S. Chadli and R. Ettoussi, Extension of Hukuhara difference in intuitionistic fuzzy set theory, Notes on Intuitionistic fuzzy sets 21 (4) (2015) 34 – –47.

[23] S. Melliani, R. Ettoussi, M. Elomari, L. S. Chadli, Characterization of compact subset, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 22 (2) (2016) 13 – –21.

[24] S. Melliani, M. Elomari, L. S. Chadli and R. Ettoussi, Intuitionistic fuzzy fractional equation, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 21 (4) (2015) 76 – –89.

[25] S. Melliani, M. Elomari, M. Atraoui and L. S. Chadli, Intuitionistic fuzzy differential equation with nonlocal condition, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets Vol. 21 (4) (2015) 58 – –68.

[26] S. Melliani, R. Ettoussi, M. Elomari, L. S. Chadli, Solution of intuitionistic fuzzy differential equations by successive approximations method, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets. 21 (2) (2015) 51 – –62.

[27] S. Melliani, Semi linear equation with fuzzy parameters, Lecture Notes in Computer Sciences, 1711 (1999) 271 – –275.

[28] S. Miyamoto, Fuzzy sets in information retrieval and cluster analysis, Kluwer academic publishers, (1990).

[29] M. Mizumoto and K. Tanaka, Algebraic proprerties of fuzzy numbers, Comminication in Inter. Conf. on Cybernetics and Society, Washington D.C, (1976).

[30] H. T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl, 64 (1978) $369--380$.

[31] M. L. Puri and D. A. Ralescu, Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl. 114 (1986) $409--422$.

[32] M. L. Puri and D. A. Ralescu, Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl. 91 (1983) $552--558$.

[33] D. Ralescu and G. Adams, The fuzzy intergral, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980) $562--570$.

[34] M. Stoeva, Intuitionistic fuzzy numbers, M. Sc. thesis, Section of Mathematical Analysis, Departement of Mathematics and Computer Science,Sofia University, (1999).

[35] H. Randstrom, An embedding theorem theorem for spaces of convex sets, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952) $165--169$.

[36] H. L. Royden, Real Analysis, Macmillan, London, (1968).

[37] E. Szmidt, J. Kacprzyk, Distance between intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 114 (2000) $505--518$.

[38] E. Szmidt, J. Kacprzyk, Entropy for intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 118 (2001), $467--477$.

[39] A. E. Taylor, Introduction to Functional Analysis Wiley, New York, (1964).

[40] P. Vassilev, A metric approach to Fuzzy Sets and intuitionistic Fuzzy Sets, Comminication in First Int. Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Knowledge Engineering, Sept. 2006, London, $31--38$.

[41] P. Vassilev, A note on distance and similarity measures between intuitionistic fuzzy sets. Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 17 (2) (2011) $68--74$.

[42] P. Vassilev, On a class of d-Fuzzy Sets and d-Intuitionistic Fuzzy Sets, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 12 (3) 2006 $55--59$.

[43] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8 (1965) 338 − −353.

[44] H. J. Zimmermann, Fuzzy sets theory and its applications, Kluwer, Dardrecht, (1993).

[45] H. J. Zimmermann, Fuzzy sets, decesion marketing and expert systems, Kluwer, Dardrecht, (1993).