



# THÈSE

PRÉSENTÉE POUR OBTENIR LE GRADE DE  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ HASSAN PREMIER DE SETTAT

*Spécialité : Mathématiques appliquées*

par

CHEIKH MALOUM OULD ABDELLAHI

---

---

## Méthodes sans maillage de type SPH pour la simulation de modèles de Black et Scholes

---

---

soutenue publiquement le 11 Mai 2022

**Devant la commission d'examen composée de :**

|                               |  |                       |
|-------------------------------|--|-----------------------|
| Pr. NAFIDI Ahmed              | Professeur à l'Université Hassan Premier de Settat | Président             |
| Pr. NAJI Ahmed                | Professeur à l'Université Abdelmalek Essaâdi       | Rapporteur            |
| Pr. TAIK Ahmed                | Professeur à l'Université Hassan II de Casablanca  | Rapporteur            |
| Pr. SAKAT Abdeljalil          | Professeur à l'Université Hassan Premier de Settat | Rapporteur            |
| Pr. BOUIHAT Khalid            | Professeur à l'Université Hassan Premier de Settat | Examineur             |
| Pr. QADI EI IDRISSE Abdelmjid | Professeur à l'Université Hassan Premier de Settat | Co-Directeur de Thèse |
| Pr. ACHCHAB Boujemâa          | Professeur à l'Université Hassan Premier de Settat | Directeur de Thèse    |

LABORATOIRE D'ANALYSE ET MODÉLISATION DES SYSTÈMES POUR L'AIDE À LA DÉCISION (LAMSAD)



# Résumé

Les équations aux dérivées partielles jouent un rôle très important dans le monde de la finance puisque la plupart des problèmes de la finance sont modélisés à l'aide d'équations aux dérivées partielles. Ces problèmes sont en général très complexes, de sorte que les solutions analytiques sous forme fermée sont rarement disponibles. Dans cette thèse nous proposons une approche numérique fiable pour résoudre certains problèmes de pricing des options dans le cadre des modèles de Black et Scholes et Heston. Cette approche est essentiellement basée sur la méthode sans maillage SPH pour approximer les dérivées spatiales et la  $\theta$ -méthode pour discrétiser la dérivée temporelle. Dans un premier temps nous concentrons sur le modèle de Black et Scholes. Nous commençons par résoudre les problèmes de pricing d'options européennes. Ensuite nous passons à la résolution de leurs homologues américaines qui impliquent une frontière libre et donc normalement difficiles à évaluer par d'autres méthodes numériques classiques. Les résultats obtenus sont très prometteurs pour les deux types d'options ci-dessus et nous étendons donc le champ d'application de cette approche pour y inclure des options plus complexes, à savoir les options asiatiques, les options à barrières et les options binaires. Finalement nous appliquons la méthode aux problèmes de pricing d'options européennes et américaines dans le modèle à volatilité stochastique de Heston. Ce modèle constitue une extension, à la forme bidimensionnelle (en espace), du modèle de Black et Scholes. Afin de valider l'approche proposée, plusieurs simulations numériques sont effectuées, les résultats obtenus sont comparés à d'autres méthodes numériques couramment utilisées dans le domaine des mathématiques financières, telles que les méthodes de Monte Carlo, différences finis et éléments finis.

**Mots clés:** SPH , méthode sans maillage , pricing d'options, modèle de Black Scholes, Heston

# Abstract

Partial differential equations play a very important role in the world of finance since most problems in finance are modeled using partial differential equations. These problems are in general very complex, thus closed form analytical solutions are rarely obtainable. In this thesis we propose a robust numerical approach to solve some option pricing problems within the framework of Black & Scholes and Heston models. This approach is essentially based on the SPH meshless method to approximate the spatial derivatives and on the  $\theta$ -method to discretize the temporal derivative. As a first step, we focus on the Black-Scholes model. We begin with solving European option pricing problems. Then we move to solve their American counterparts which involve a free boundary and therefore normally difficult to evaluate by other conventional numerical methods. We obtain very promising results for the above two types of options and therefore we extend the scope of this approach to include some more difficult options pricing problems, namely Asian options, barrier options and binary options. Finally, we apply the method to European and American option pricing problems in the Heston stochastic volatility model. This model is an extension of the Black-Scholes model to a two-dimensional form (in space). In order to validate the comprehensiveness of the proposed approach, a series of numerical simulations are performed. The results obtained are compared to other numerical methods commonly used in the field of financial mathematics, such as Monte Carlo, finite difference and finite element methods.

**Keywords:** SPH , Meshless method , option pricing ,finance, BlackScholes model , Heston

# Remerciements

Au terme de ce travail, je voudrais adresser mes plus vifs remerciements et toute ma profonde gratitude à mes Directeurs de thèse Messieurs Boujemâa ACHCHAB, Professeur à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Berrechid et Abdelmjid QADI El IDRISSEI, Professeur à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Berrechid pour la confiance qu'ils m'ont témoignée, pour la qualité de leur encadrement, pour leur totale disponibilité et pour le soutien qu'ils n'ont cessé de m'apporter durant la période de ma thèse.

Tous mes remerciements à Monsieur Ahmed NAFIDI, Professeur à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Berrechid d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance.

Je tiens très sincèrement à remercier les rapporteurs : Monsieur Ahmed NAJI, Professeur à la Faculté des Sciences et Technique de Tanger, Monsieur Ahmed TAIK, Professeur à la Faculté des Sciences et Technique de Mohammedia et Monsieur Abdeljalil SAKAT, Professeur à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Berrechid, de l'honneur et le plaisir qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer ce travail et d'être les rapporteurs de cette thèse.

Mes sincères remerciements s'adressent aussi à Monsieur khalid BOUIHAT, Professeur à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Berrechid, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à tous les membres du Laboratoire d'Analyse et Système de Modélisation pour l'Aide à la Décision de Berrechid, de leur contribution de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Enfin, je ne pourrais finir ces remerciements sans penser à ma famille dont l'affection, l'amour, le soutien et l'encouragement constants m'ont été d'un grand réconfort et ont contribué à l'aboutissement de ce travail.



# Introduction

La théorie d'évaluation des instruments financiers remonte aux travaux de L. Bachelier [17] dans sa thèse intitulée "la Théorie de la spéculation". Il est le premier à avoir introduit le mouvement brownien à des fins financières. De nombreuses contributions ont été apportées à cet égard, les plus notables sont ceux de Norbert Wiener qui donne un formalisme mathématique au mouvement brownien et ceux de Kiyosi Itô dans la théorie mathématique pour la modélisation des processus stochastiques continues. Tout ce développement énorme dans les outils mathématiques allait permettre, plus tard et plus précisément au début des années 70, de Fisher Black et Myron Scholes [3] [16] de faire une percée majeure en proposant un modèle mathématique efficace et simple, qui porte aujourd'hui leurs noms, pour décrire l'évolution possible des cours du marché, sous la forme d'équations aux dérivées partielles. Depuis lors, le développement des marchés financiers a connu une importante croissance. De nombreux produits dérivés de plus en plus compliqués ont vu le jour et leur prix est souvent calculé à partir du modèle proposé par F. Black et M. Scholes. Ce modèle repose sur des hypothèses telles que l'absence d'opportunité d'arbitrage, le cours de l'actif sous-jacent évolue suivant un mouvement brownien géométrique dont la volatilité est constante. Il n'y a pas de coût de transaction et la complétude du marché. Il est clair que certaines de ces hypothèses ne sont souvent pas en très bonne adéquation avec le comportement réel du marché. Des modèles ont été introduits plus tard pour pallier cette lacune, comme le modèle à volatilité stochastique [19] et le modèle exponentiel de Lévy [20]. Malgré ses limites le modèle Black et Scholes s'est imposé, depuis 1973 jusqu'à nos jours, comme la référence en matière de valorisation des options.

Cependant, avec la croissance de la complexité des modèles et des produits financiers suite à la demande des intervenants du marché, et vu que la majorité des équations aux dérivées partielles issues de ces modèles financiers n'admettent pas forcément de solution explicite, l'approximation numérique de ces modèles s'impose de soi. Ainsi, les méthodes numériques liées à la valorisation de ces instruments financiers sont devenues un domaine de recherche important.

On trouve dans la littérature une variété des méthodes, pour résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles issues des modèles mathématiques financiers. Que ces méthodes soient probabilistes comme Monte-Carlo [10] ou déterministe comme différences finies [11], Éléments Finis [12] et Volumes Finis, cette dernière catégorie est connue sous le nom des méthodes numériques avec maillage. Mais dans les dernières décennies une autre catégorie des méthodes ont pu s'imposer comme une alternative viable aux méthodes avec maillage classiques, surtout dans le domaine de l'ingénierie physique et récemment elles sont introduites dans le domaine de mathématiques financières ou ingénierie financière [9],[8]. Cette catégorie des

---

méthodes s'appelle la méthode sans maillage (meshless) ou meshfree.

Les méthodes sans maillages ont été développées dans le but de surmonter les problèmes géométriques et numériques liés à l'utilisation du maillage. La première utilisation des méthodes sans maillages remonte au milieu des années soixante avec l'avènement de la "méthode des Particules et des Forces" (MPEF), développée par Daly [93], pour simuler des impacts de corps fluides. Ensuite Monaghan et Gingold [1] et Lucy [2] ont proposé la méthode SPH "Smoothed Particle Hydrodynamics" (SPH) dans le domaine de l'astrophysique. Depuis lors, ces approches ont suscité l'intérêt de beaucoup de chercheurs. De nombreuses méthodes sans maillage ont été proposées, sous différentes formes et noms, au cours des dernières décennies. D'après Li et Liu [90] ces méthodes peuvent être classées en deux grandes catégories suivant leur formulation forte ou faible.

#### **Méthodes sans maillages basées sur une formulation faible**

Dans la méthode basée sur la forme faible, les EDP d'un problème sont d'abord convertis en équations intégrales. Ensuite, le domaine du problème est subdivisé à fin d'évaluer numériquement les intégrales. Cette catégorie de méthodes sans maillage fait l'objet d'une recherche active de la part des chercheurs depuis le début des années 1990. Elle comprend généralement la méthode des éléments diffus introduite par Nayroles et al [120] en 1992. Dans cette méthode les fonctions de forme sont construites en utilisant une approximation locale de types moindres carrés mobiles [168]. En 1994, Belytschko et al. [156] proposèrent la méthode "Element Free Galerkin" (EFG), qui est une version améliorée de la méthode des éléments diffus dans laquelle les dérivées des fonctions de forme sont calculées de manière exacte [168,169]. En 1996, Liu et al. [86] ont développé, en s'inspirant de la de la méthode "Smoothed Particles Hydrodynamics" (SPH), une nouvelle méthode sans maillage baptisée "Reproducing Kernel Particle Method" (RKPM). Cette méthode introduit une fonction de correction dans le noyau utilisé dans l'interpolation SPH pour obtenir la consistance linéaire ou d'ordre supérieur [169]. Dans cette catégorie, on peut également citer la méthode dit "Meshless Local Petrov-Galerkin" proposée par Atluri et ses collègues [153], la méthode "Partition of Unity Finite Element" développée par Babuska et Melenk [151], la "Natural Element Method" (NEM) [152], la C-NEM [162] etc.

#### **Méthodes sans maillages basées sur une formulation forte**

Dans le cas de méthodes qui utilisent une formulation forte, Les EDP sont discrétisés directement sans qu'il soit nécessaire de recourir à la formulation variationnelle, et aucune intégration numérique n'est donc requise. Les équations discrétisées qui en résultent sont simples et faciles à implémenter. Parmi ces méthodes on trouve la méthode "smoothed particles method" (SPH), elle est considérée comme l'une des plus anciennes méthodes sans maillage. Elle a initialement été développée pour résoudre les problèmes en astrophysique tels que la formation d'étoiles et de galaxies ou encore les mouvements dans les nuages de poussière [168,16]. Ensuite la méthode a connu un développement important à travers son application en plusieurs domaines. Par exemple, elle a été appliquée avec succès, dans le domaine de dynamique des fluides, aux problèmes d'hydrodynamique à surface libre [154, 155] ou les problèmes diphasiques [28]. Nous trouvons également des applications de cette méthode en mécanique des solides avec grande déformation et fracture [157], dans la formation métaux [159], et des glaces [158]. Elle a même été utilisée pour résoudre des problèmes dominés par des phénomènes non linéaires tels que les problèmes d'explosions sous-marine [161] ou les problèmes d'impact [160]. Plus de détails sur les diverses



---

applications de la méthode SPH et ses développements peuvent être trouvés dans le livre de Liu et al. [26].

Aujourd'hui le champ d'application de la méthode SPH a touché pratiquement tous les domaines de physique et mathématiques appliquées. Le présent travail a permis d'élargir encore plus ce champ d'application, puisque c'est la première fois selon nos connaissances, que la méthode SPH est employée pour résoudre les équations aux dérivées partielles issues des modèles financiers.

L'idée principale de la méthode SPH consiste à remplacer le domaine du problème par un ensemble des points arbitrairement distribués et aucune connectivité entre eux n'est nécessaire. Les fonctions et leurs dérivées partielles impliquées dans les équations aux dérivées partielles décrivant le problème sont approchées par des formes intégrales en utilisant des fonctions noyaux (kernels). Ensuite, pour l'utilisation numérique, les formes intégrales sont remplacées au niveau de chaque point du domaine de problème par des approximations utilisant des sommes discrètes sur l'ensemble des points voisins.

L'objectif de cette thèse est de proposer une approche numérique fiable pour résoudre les équations aux dérivées partielles issues des modèles financiers. Cette approche est essentiellement basée sur la méthode sans maillage SPH pour approximer les dérivées spatiales et la  $\theta$ -méthode pour discrétiser la dérivée temporelle. Dans un premier temps nous concentrons sur le modèle de Black et Scholes. Nous commençons par résoudre les problèmes de pricing d'options européennes. Puis nous passons à la résolution de leurs homologues américaines qui impliquent une frontière libre et donc normalement difficiles à évaluer par d'autres méthodes numériques classiques. Les résultats obtenus sont très prometteurs pour les deux types d'options ci-dessus et nous étendons donc le champ d'application de cette approche pour y inclure des options plus complexes, à savoir les options asiatiques, les options à barrières et les options binaires. Par suite nous appliquons la méthode aux problèmes de pricing d'options européennes et américaines dans le modèle à volatilité stochastique de Heston. Ce modèle constitue une extension, à la forme bi-dimensionnelle (en espace), du modèle de Black et Scholes.

La suite de cette thèse est organisée comme suit: dans le **chapitre 1**, nous donnons une présentation générale des principes de la méthode SPH. Le **chapitre 2** est consacré à la résolution numérique du modèle de Black & Scholes pour une option de Call/Put de type européenne. Pour valider nos résultats, nous les avons comparés avec ceux obtenus par la formule analytique de Black & Scholes et la méthode des Différences Finis.

Dans le **chapitre 3**, on reproduit ce qu'on a fait dans le chapitre précédent mais cette fois-ci avec l'option américaine qui donne au propriétaire la possibilité de l'exercer à n'importe quel moment entre la date signature du contrat et sa date d'échéance contrairement à son homologue européen qui n'est exerçable qu'à la date d'expiration. Comme les options américaines n'admettent pas en général de solution analytique exacte, nous nous sommes proposés la solution numérique Binomial, avec  $n = 1000$  ( $n$  étant le nombre de périodes), comme solution référence. Pour valider notre méthode, de nombreuses comparaisons ont été effectuées entre la solution SPH et les résultats obtenus par le modèle binomiale et d'autres approches numériques et quasi-analytiques largement utilisées dans le domaine des mathématiques financières.

Dans le **chapitre 4** nous abordons le problème de pricing d'options exotiques, notamment les

---

options asiatiques et barrières de type européennes. Ces options font partie de la famille des options dites "chemin dépendantes" ou "path-dependent " c'est-à-dire le prix de ces options à l'échéance dépend du chemin suivi par le cours de l'actif sous-jacent pendant toute la durée de vie de l'option. Dans le cas des options asiatiques nous avons adopté la transformation introduite par Roger et Shi [63] afin de réduire la dimension d'EDP du problème. Les dérivées spatiales impliquées dans l'EDP du problème sont approximées à l'aide de la méthode SPH, le système d'équations différentielles ordinaires résultant est ensuite résolu par la  $\theta$ -méthode. La stabilité du schéma numérique résultant est étudiée pour différents paramètres financiers. En plus, l'approche proposée dans ce chapitre est étendue pour résoudre les problèmes d'évaluation des options à double barrière de style européen et des options digitales. Plusieurs simulations numériques ont été établies. Les résultats numériques obtenus sont comparés avec les solutions théoriques ou à ceux fournis par d'autres méthodes numériques dans la littérature.

Dans le **chapitre 5** nous étendons l'approche utilisée dans les chapitres précédents pour évaluer les options européennes et américaines dans le modèle à volatilités stochastique de Heston. Ce modèle constitue une extension, à la forme bidimensionnelle (en espace), du modèle de Black et Scholes. Pour contourner la difficulté due à la présence de la frontière libre dans le problème de pricing des options américaines, ce dernier est reformulé sous la forme du problème de complémentarité linéaire LCP dépendant du temps. Afin de valider numériquement notre approche, plusieurs comparaisons sont effectuées entre nos résultats et ceux fournis par la littérature.

Finalement, nous donnons une conclusion générale de la thèse et quelques propositions sur les travaux à venir.

# Contents

|  |            |
|--|------------|
| <b>Contents</b>  | <b>xi</b>  |
| <b>List of Figures</b>   | <b>xv</b>  |
| <b>List of Tables</b>  | <b>xix</b> |
| <b>1 Méthode Smoothed Particle Hydrodynamic (SPH)</b>                  | <b>1</b>   |
| 1.1 Approximation intégrale . . . . .                                  | 1          |
| 1.2 Approximation des dérivées . . . . .                               | 4          |
| 1.3 Approximation de la dérivée seconde . . . . .                      | 6          |
| 1.4 Approximation discrète . . . . .                                   | 7          |
| 1.5 Fonction noyaux . . . . .  | 9          |
| 1.5.1 Fonction gaussienne . . . . .                                    | 9          |
| 1.5.2 Fonction Spline . . . . .  | 10         |
| 1.5.3 Fonction Wendland . . . . .                                      | 10         |
| 1.5.4 Longueur de lissage . . . . .                                    | 11         |
| 1.6 Consistance de la méthode SPH . . . . .                            | 12         |
| 1.6.1 Cas continu . . . . .  | 12         |
| 1.6.2 Cas discret . . . . .  | 14         |
| 1.6.3 Restauration de consistance . . . . .                            | 15         |
| <b>2 Evaluation des options européennes par methode SPH</b>            | <b>20</b>  |
| 2.1 SPH pour l'équation de la chaleur . . . . .                        | 25         |
| 2.1.1 Discrétisation spatiale . . . . .                                | 25         |
| 2.1.2 Discrétisation temporelle . . . . .                              | 27         |
| 2.1.3 Analyse de stabilité . . . . .                                   | 29         |
| 2.1.4 Erreur de discrétisation . . . . .                               | 32         |
| 2.1.5 Conditions aux limites . . . . .                                 | 35         |
| 2.1.6 Schéma de Fatihi pour l'équation de la chaleur . . . . .         | 35         |
| 2.2 SPH pour l'équation de Black et Scholes . . . . .                  | 38         |
| 2.2.1 Discrétisation spatiale de l'équation de Black-Scholes . . . . . | 40         |
| 2.2.2 Discrétisation temporelle . . . . .                              | 42         |
| 2.2.3 Analyse de stabilité . . . . .                                   | 42         |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 2.2.4    | Erreur de discrétisation pour BS  | 45         |
| 2.3      | Résultats numériques  | 46         |
| 2.4      | Les grecques  | 59         |
| 2.4.1    | Delta   | 59         |
| 2.4.2    | Gamma   | 59         |
| 2.4.3    | Le thêta  | 60         |
| <b>3</b> | <b>La méthode SPH pour pricing d'options américaines</b>                              | <b>64</b>  |
| 3.1      | Introduction  | 64         |
| 3.2      | Position du problème  | 65         |
| 3.3      | Formulation de complémentarité linéaire   | 68         |
| 3.4      | Discrétisation du problème de complémentarité linéaire (PCL)                          | 70         |
| 3.4.1    | Discrétisation spatiale   | 70         |
| 3.4.2    | Discrétisation temporelle   | 71         |
| 3.4.3    | Transformation de coordonnées   | 73         |
| 3.4.4    | Analyse de la stabilité   | 76         |
| 3.5      | Les résultats numériques  | 78         |
| 3.6      | Analyse de l'erreur   | 85         |
| 3.7      | La frontière d'exercice   | 88         |
| 3.8      | Les grecques  | 92         |
| 3.8.1    | Delta   | 92         |
| 3.8.2    | Gamma   | 92         |
| 3.9      | Conclusion  | 97         |
| <b>4</b> | <b>Options exotiques</b>  | <b>98</b>  |
| 4.1      | Introduction  | 98         |
| 4.2      | Formulation du problème à résoudre  | 100        |
| 4.2.1    | Option asiatique  | 100        |
| 4.2.2    | Option à barrière   | 103        |
| 4.2.3    | Option binaire  | 105        |
| 4.3      | Application de la méthode SPH pour évaluer les options exotiques                      | 106        |
| 4.3.1    | Discrétisation du problème asiatique  | 106        |
| 4.3.2    | Discrétisation temporelle   | 108        |
| 4.3.3    | Analyse de stabilité  | 109        |
| 4.3.4    | Discrétisation de l'option à barrière   | 111        |
| 4.4      | Résultat numérique  | 111        |
| 4.5      | Les Grecques  | 121        |
| 4.6      | Conclusion  | 125        |
| <b>5</b> | <b>SPH pour pricing d'options européennes et américaines dans le modèle de Heston</b> | <b>126</b> |
| 5.1      | Introduction  | 126        |
| 5.2      | Le modèle de Heston   | 127        |
| 5.2.1    | Les options européennes   | 129        |

---

|          |                                   |            |
|----------|-----------------------------------|------------|
| 5.2.2    | Les options américaines           | 130        |
| 5.3      | Discrétisation de l'EDP du modèle | 131        |
| 5.3.1    | Discrétisation spatiale           | 131        |
| 5.3.2    | Discrétisation temporelle         | 134        |
| 5.3.3    | Etude de la stabilité             | 135        |
| 5.4      | Résultat numériques               | 136        |
| 5.5      | Les Grecques                      | 142        |
| 5.5.1    | Delta                             | 142        |
| 5.5.2    | Véga                              | 142        |
| 5.5.3    | Gamma                             | 142        |
| <b>6</b> | <b>Conclusion générale</b>        | <b>147</b> |
|          | <b>Bibliography</b>               | <b>151</b> |



# List of Figures

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | (a) interpolation à l'intérieur du domaine. (b) interpolation au voisinage d'une frontière. . . . .  | 5  |
| 1.2  | Le domaine d'influence d'un point $i$ . . . . .  | 8  |
| 1.3  | Comparaison de divers noyaux d'interpolation en dimension 1 . . . . .  | 11 |
| 1.4  | Comparaison de dérivées de différents noyaux en dimension 1 . . . . .  | 12 |
| 2.1  | Visualisation de la structure creuse de la matrice $A$ pour $N = 50$ . $nz$ : désigne le nombre d'éléments non nuls de la matrice $A$ . . . . .  | 27 |
| 2.2  | Représentation graphique des valeurs propres de la matrice $A$ . . . . .   | 32 |
| 2.3  | Visualisation de la structure creuse de la matrice $A'$ pour $N = 50$ . $nz$ : désigne le nombre d'éléments non nuls de la matrice $A'$ . . . . .  | 37 |
| 2.4  | Visualisation de la structure creuse de la matrice $A$ et $B$ pour $N = 50$ . . . . .  | 41 |
| 2.5  | : Représentation graphique de la valeur propre réelle maximale $Re(\lambda)_{max}$ en fonction de la volatilité $\sigma$ pour $N = 100$ , $\Omega = [0, 10]$ , $r = 0.2$ , $q = 0$ (ligne continue), $r = 0.3$ , $q = 0.2$ (ligne pointillée). . . . . | 44 |
| 2.6  | Représentation graphique de la valeur propre réelle maximale $Re(\lambda)_{max}$ en fonction du rapport $h/\Delta x$ , $r = 0.2$ , $q = 0$ (ligne continue), $r = 0.3$ , $q = 0.2$ (ligne pointillée). . . . .   | 44 |
| 2.7  | Représentation graphique de la valeur propre réelle maximale $Re(\lambda)_{max}$ en fonction du nombre de points d'interpolation $N$ , avec les mêmes paramètres financiers ci-dessus. . . . .   | 45 |
| 2.8  | Prix de Call européen obtenu par SPH (En haut) et la formule fermée (En bas) pour différente valeur de volatilité $\sigma$ et avec $K = 10$ et $r = 0.2$ . . . . .   | 48 |
| 2.9  | Prix de Call européen obtenu par SPH et la formule analytique pour différente valeur de volatilité et avec $K = 50$ et $r = 0.2$ . . . . .   | 49 |
| 2.10 | (En haut) Prix de Call européen obtenu par SPH pour différente valeur de volatilité $\sigma$ (En bas) le prix exact. . . . .   | 50 |
| 2.11 | Comparaison entre les solutions exactes et SPH pour une options de Call européennes avec $\theta = 1/2$ , $N = 150$ , $M = 250$ . . . . .  | 51 |
| 2.12 | Comparaison entre les solutions SPH et Différences finies pour une options de Call européennes avec les mêmes paramètres ci-dessous. . . . .   | 51 |
| 2.13 | Valeur de l'option de Put européenne à l'instant $t = 0$ . . . . .   | 53 |

## LIST OF FIGURES

---

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.14 | Comparaison entre les solutions exactes, SPH et Différences Finies pour une option de Put européenne. . . . .   | 54 |
| 2.15 | (a) La norme infinie de l'erreur en fonction du nombre de points d'interpolation $N$ . (b) Erreur RMS en fonction du nombre de points $N$ . . . . .   | 55 |
| 2.16 | (a) : Norme discrète $E_\infty$ de l'erreur commise par SPH pour différentes valeurs du rapport $h/\Delta x$ . (b) : Evolution du temps de calcul en fonction du nombre de points $N$ . . . . . | 55 |
| 2.17 | La valeur d'une option de Call européenne, obtenues par la méthode SPH avec $\theta = 1/2, N = 60, M = 250$ , en comparaison avec celle obtenue par la solution analytique. . . . .             | 57 |
| 2.18 | Une comparaison entre la solution analytique et celle obtenue numériquement par la méthode SPH pour une option de Put avec les mêmes paramètres mentionnés ci-dessus. . . . .                   | 57 |
| 2.19 | Evolution de l'erreur RSM en fonction du nombre de points d'interpolation $N$ . . . . .   | 58 |
| 2.20 | L'erreur résultant de la discrétisation de l'équation de Black et Scholes par les schémas de Brookshaw (2.24) et R.Fatihi (2.54). . . . .   | 58 |
| 2.21 | Comparaison entre les valeurs analytiques du Delta ( $\Delta$ ) et celles obtenues par la méthode SPH pour une option de Call européenne avec $\theta = 1/2, N = 150, M = 250$ . . . . .        | 61 |
| 2.22 | L'erreur commise sur le calcul du Delta $\Delta$ en fonction du cours du sous-jacent ( $S$ ). . . . .   | 62 |
| 2.23 | Variation du Gamma ( $\Gamma$ ) par rapport au cours du sous-jacent pour une option de Call européenne. . . . .   | 62 |
| 2.24 | L'erreur commise sur le calcul du Gamma ( $\Gamma$ ) en fonction du cours du sous-jacent ( $S$ ). . . . .   | 63 |
| 2.25 | Valeurs du Thêta ( $\Theta$ ) calculés par l'équation (2.89), en fonction du cours du sous-jacent. . . . .  | 63 |
| 3.1  | Visualisation de la structure creuse de la matrice $L$ pour $N = 50$ . $nz$ : désigne le nombre d'éléments non nuls de la matrice $L$ . . . . .   | 75 |
| 3.2  | Evolution de la valeur $Re(\lambda_L)_{max}$ en fonction de taux d'intérêt $r$ pour $\sigma = 0.3, N = 100$ et $c = 1$ . . . . .  | 77 |
| 3.3  | Valeurs de l'option de Put américaine calculée par la méthode SPH, avec les paramètres $\theta = 1/2, N = 42$ , et $M = 200$ . . . . .  | 82 |
| 3.4  | Comparaison entre les solutions SPH, Binomial et Différences Finies pour les options de Put américaines avec les paramètres $\theta = 1/2, N = 60$ et $M = 250$ . . . . .                       | 83 |
| 3.5  | Comparaison entre les solutions SPH, Binomial et Différences Finies pour les options de Calls américaines avec les paramètres $\theta = 1/2, N = 60$ et $M = 250$ . . . . .                     | 84 |
| 3.6  | Erreurs absolues pour la transformation hyperbolique sinus et la transformation logarithmique. . . . .  | 86 |
| 3.7  | Evolution de l'erreur en norme RMS en fonction en fonction du rapport $h/\Delta x$ . . . . .  | 87 |
| 3.8  | Frontière d'exercice optimale d'une option américaine dans les deux cas Put (en haut) et Call (en bas). . . . .   | 90 |
| 3.9  | Illustration de la frontière d'exercice d'une option américaine dans les deux cas Put (en haut) et Call (en bas) pour différentes valeurs de la volatilité $\sigma$ . . . . .                   | 91 |



|      |   |     |
|------|---|-----|
| 3.10 | Valeurs du Delta ( $\Delta$ ) obtenues par SPH et modèle Binomial, en fonction du cours du sous-jacent avec les paramètres $\theta = 1/2, N = 100, M = 250$ .   | 94  |
| 3.11 | L'erreur commise sur le calcul du Delta ( $\Delta$ ) en fonction du nombre de points d'interpolation $N$ .  | 95  |
| 3.12 | Une illustration de la façon dont une variation de la volatilité affecte le delta ( $\Delta$ ).   | 95  |
| 3.13 | Variation du Gamma ( $\Gamma$ ) par rapport au cours du sous-jacent pour une option de Put américaine.  | 96  |
| 4.1  | Visualisation de la structure creuse de matrices $A$ et pour $N = 50$ . $nz$ : désigne le nombre d'éléments non nuls.   | 107 |
| 4.2  | Visualisation de la structure creuse de matrices $B$ et pour $N = 50$ . $nz$ : désigne le nombre d'éléments non nuls.   | 108 |
| 4.3  | Représentation graphique de la valeur propre réelle maximale $Re(\lambda)_{max}$ en fonction du rapport $h/\Delta x$ pour $N = 100, \Omega = [0, x_{max}]$ et $K = 100$ .   | 110 |
| 4.4  | Une comparaison entre la solution analytique et celle obtenue par la méthode SPH pour une option de Call de type double knock-out.  | 113 |
| 4.5  | Valeurs de l'option de call "cash or-nothing" obtenues à l'aide de la méthode SPH avec les paramètres $T = 0.25, r = 0.05$ et $\sigma = 0.2$ et $N = 100$ .   | 114 |
| 4.6  | Profile du prix de l'option à l'instant $\tau = 0$ en fonction du Strike $K$ , avec les paramètres $S = 100, T = 1$ et pour différentes valeurs de $r$ : (en haut) $\sigma = 0.1$ , (en bas) $\sigma = 0.2$ .                                       | 117 |
| 4.7  | Profile du prix de l'option à l'instant $\tau = 0$ avec les mêmes paramètres mentionnés ci-dessus et pour $\sigma = 0.3$ .  | 118 |
| 4.8  | Le prix d'une option du Call asiatique en fonction du prix d'exercice $K$ avec les paramètres $S = 100, T = 1, r = 0,09$ et pour différentes valeurs de volatilité $\sigma$ .   | 118 |
| 4.9  | Norme infinie de l'erreur pour une option du Call asiatique avec les paramètres $S = 100, K = 100, T = 1$ et pour différentes valeurs du taux d'intérêt $r$ : (a) $\sigma = 0.2$ , (b) $\sigma = 0.3$ .   | 120 |
| 4.10 | Comparaison entre les valeurs analytiques du Delta (en haut) et gamma (en bas) et celles obtenues par la méthode SPH pour une option de Call de type Down-and-out avec les paramètres $K = 10, \sigma = 0.2, r = 0.05, T = 0.5$ et $\theta = 1/2$ . | 123 |
| 4.11 | Valeurs de Delta (en haut) et gamma (en bas) obtenues par la méthode SPH pour une option à double barrière de type knock-out avec $K = 100, \sigma = 0.2, r = 0.1, T = 0.5$ et $\theta = 1/2$ .   | 124 |
| 5.1  | Visualisation de la structure creuse de la matrice $A$ pour $N = 900$ . $nz$ : désigne le nombre d'éléments non nuls de la matrice $A$ .  | 133 |
| 5.2  | Représentation graphique des valeurs propre de la matrice $A$ pour $N = 100$ .  | 136 |
| 5.3  | Les prix d'un Put européen en fonction du cours du sous-jacents $S$ , pour différentes valeurs de la variance: (en haut) $v = 0.4$ , (en bas) $v = 0.5$ .   | 140 |
| 5.4  | Les prix d'un Call européen en fonction du cours du sous-jacents $S$ , pour différentes valeurs de la variance: (en haut) $v = 0.4$ , (en bas) $v = 0.5$ .  | 141 |



# List of Tables

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Valeurs des paramètres financiers . . . . .  | 47  |
| 2.2 | Les prix d'un Put européen calculé par SPH avec $K = 10, r = 0.05, \sigma = 0.20, T = 0.5$ . . . . .   | 52  |
| 2.3 | Valeurs du Delta ( $\Delta$ ) obtenues par la méthode SPH pour une option de Put européenne avec les paramètres $K = 10, r = 0.2, \sigma = 0.25, T = 0.5, S_{max} = 2K, N = 250$ . . . . .       | 61  |
| 3.1 | Valeurs des paramètres financiers. . . . .   | 78  |
| 3.2 | Comparaison de la performance des deux algorithmes PSOR et direct dans le cas d'un Put américaine. . . . .   | 79  |
| 3.3 | Les valeurs d'un Put américaine calculés par différentes méthodes numériques avec les paramètres $K = 100, T = 1, r = 0.1, \sigma = 0.3, \theta = 1/2, S_{max} = 2K$ . . . . .                   | 79  |
| 3.4 | Comparaison entre les prix d'un Call américain obtenus par notre méthode SPH et ceux fournis par d'autres méthodes avec les paramètres : $\sigma = 0.2, r = 0.03, q = 0.07$ . . . . .            | 80  |
| 3.5 | Comparaison des méthodes analytiques et SPH, pour évaluer un call américain avec les paramètres $\sigma = 0.3, r = 0.03, q = 0.07$ . . . . .   | 81  |
| 3.6 | Les prix d'un Call américain calculés par différentes méthodes numériques avec les paramètres : $\sigma = 0.4, r = 0.03, q = 0.07$ . . . . .   | 81  |
| 3.7 | L'efficacité du schéma SPH, pour évaluer un Put américain. . . . .   | 86  |
| 3.8 | Comparaison des valeurs de la frontière d'exercice $S_f(T)$ . . . . .  | 89  |
| 3.9 | Comparaison de la valeur du Delta ( $\Delta$ ) donnée par la méthode SPH et d'autres approches numériques avec les paramètres $\theta = 1/2, N = 100, M = 250$ . . . . .                         | 94  |
| 4.1 | Valeurs d'une option de Call européenne de type down-and-out calculées par la méthode SPH avec les paramètres financiers mentionnés ci-dessus et $S_{max} = 2K$ . . . . .                        | 112 |
| 4.2 | Comparaison des valeurs exactes avec celles obtenues par SPH pour une option de Call de type "cash or-nothing". . . . .  | 113 |
| 4.3 | Comparaison de la valeur d'option de Call asiatique calculée par différentes méthodes avec $S = 100, T = 1, r = 0.09$ et pour différentes valeurs de volatilité $\sigma$ et strike $K$ . . . . . | 115 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 4.4  | Comparaison entre les prix d'un Call asiatique obtenus par notre méthode SPH et ceux fournis par d'autres méthodes avec $S = 100$ , $T = 3$ , $r = 0.09$ et pour différentes valeurs de volatilité $\sigma$ . . . . .      | 116 |
| 4.5  | Comparaison de la valeur du Call asiatique calculée par différentes méthodes avec les paramètres $S = 100$ , $T = 1$ et pour différentes valeurs de $\sigma, K$ et $r$ . . . . .   | 119 |
| 4.6  | Comparaison de la valeur du Delta d'un Call asiatique donnée par la méthode SPH et d'autres approches numériques avec les paramètres $S = 100$ , $r = 0.15$ et $T = 1$ . . . . .   | 122 |
| 4.7  | Comparaison entre les valeurs du Delta ( $\Delta$ ) obtenues par la méthode SPH et celles obtenues par d'autres méthodes dans la littérature [74,76] avec les paramètres $S = 100, K = 100, r = 0.05$ et $T = 1$ . . . . . | 122 |
| 5.1  | Valeurs des paramètres du modèle de Heston. . . . .  | 137 |
| 5.2  | Comparaison entre les prix d'un Put européen obtenus par notre approche et ceux fournis par la formule semi-fermée avec les paramètres $v = 0.25, N_S = N_V = 120, M = 250$ et $\theta = 1/2$ . . . . .                    | 137 |
| 5.3  | Les prix d'un Call européen calculés par notre méthode et l'approche semi-analytique (exacte) [137] avec les paramètres $v = 0.25, N_S = N_V = 80, M = 250$ et $\theta = 1/2$ . . . . .                                    | 137 |
| 5.4  | Comparaison entre les prix d'un Put américaine obtenus par notre méthode SPH et ceux fournis par les méthodes de la littérature pour différentes valeurs de l'actif sous-jacents $S$ . . . . .                             | 138 |
| 5.5  | Comparaison des méthodes numériques et SPH, pour évaluer un Put américain. . . . .   | 139 |
| 5.6  | Comparaison entre les valeurs analytiques du Delta et celles obtenues par la méthode SPH pour un options de Put européenne avec les paramètres $v = 0.25, N_S = N_V = 80, M = 200$ et $\theta = 1/2$ . . . . .             | 143 |
| 5.7  | Les valeurs du Vega d'un put européen calculées par SPH avec $v = 0.25, N_S = N_V = 100, M = 200$ et $\theta = 1/2$ . . . . .  | 143 |
| 5.8  | Une comparaison des valeurs du Gamma pour un options de Put européenne avec les paramètres $v = 0.25, N_S = N_V = 80, M = 200$ et $\theta = 1/2$ . . . . .   | 144 |
| 5.9  | Une comparaison des valeurs du Delta pour un put américain avec $v = 0.25, N_S = N_V = 150, M = 200$ et $\theta = 1/2$ . . . . .   | 144 |
| 5.10 | Valeurs de Gamma obtenues par la méthode SPH pour une option de Put américain avec les paramètres $v = 0.25, N_S = N_V = 150, M = 200$ et $\theta = 1/2$ . . . . .   | 145 |
| 5.11 | Les valeurs du Vega d'un put américain calculées par SPH avec $v = 0.25, N_S = N_V = 150, M = 200$ et $\theta = 1/2$ . . . . .   | 145 |

# Chapter 1

## Méthode Smoothed Particle Hydrodynamic (SPH)

Dans ce chapitre nous présentons la formulation de la méthode SPH, cette dernière se compose de deux étapes. La première étape consiste à approximer la valeur d'une fonction et ses dérivées par des formes intégrales en utilisant des fonctions noyaux (kernels). Dans la deuxième étape les formes intégrales sont remplacées sur chaque point du domaine de calcul par des approximations utilisant des sommes discrètes sur l'ensemble des points voisins. Nous présentons également quelques exemples des fonctions noyaux les plus fréquemment utilisés dans la littérature SPH.

### 1.1 Approximation intégrale

La méthode SPH repose principalement sur le concept d'interpolation intégrale. Selon laquelle la valeur d'une fonction  $u$ , définie convenablement dans un domaine  $\Omega$ , en un point  $x$ , peut-être écrite d'une manière exacte comme un produit de convolution de  $u$  avec la fonction de Dirac

$$u(x) = \int_{\Omega} u(x') \delta(x - x') dx' \quad (1.1)$$

où  $\delta(x - x')$  est la fonction de Dirac donnée par

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x', \\ 0 & \text{if } x \neq x'. \end{cases}$$

La fonction de Dirac n'est pas suffisamment régulière pour faire le calcul numérique, pour cette raison, elle est remplacée par une fonction noyau (kernel)  $w(x - x', h)$  et par conséquent, on obtient l'interpolation intégrale suivante

$$u(x) = \int_{\Omega} u(x') w(x - x', h) dx'. \quad (1.2)$$

où  $h$  est un paramètre appelé “longueur de lissage”, qui définit le domaine d’influence ou la taille du support du noyau.

Pour bien approximer la fonction de Dirac  $\delta$ , la fonction de noyau devrait satisfaire les propriétés suivantes :

- **Normalisation**

La fonction noyau est normalisée i.e :

$$\int_{\Omega} w(x-x',h)dx' = 1. \quad (1.3)$$

- **Propriété de Dirac**

La fonction noyau doit être convergée vers la fonction de Dirac quand la longueur de lissage tend vers zéros

$$\lim_{h \rightarrow 0} w(x-x',h) \rightarrow \delta(x-x'). \quad (1.4)$$

Cette propriété permet d’assure la convergence de la méthode.

- **Compacité du support**

$$w(x-x',h) = 0 \quad \text{pour} \quad |x-x'| \geq kh, \quad (1.5)$$

où  $k$  est un constant qui dépend de la fonction noyau.

- **Symétrie**

La fonction noyau doit-être symétrique (paire), i.e

$$w(x-x',h) = w(x'-x,h). \quad (1.6)$$

Une conséquence directe de cette condition est l’égalité suivante

$$\int_{\Omega} (x-x')w(x-x',h)dx' = 0. \quad (1.7)$$

Le partie gauche de l’équation est appelée moment d’ordre 1 de la fonction noyau  $w$ .

L'approximation intégrale (1.2) représente une précision de seconde ordre en espace, ce résultat peut être facilement prouvé à l'aide de développement en série de Taylor.

Supposons que  $u$  est suffisamment régulière, en appliquant le développement de Taylor à  $u(x')$  au voisinage de  $x$ . on obtient

$$u(x') = u(x) + (x' - x)u'(x) + O(\|x - x'\|^2). \quad (1.8)$$

On multiplie par le noyau  $w(x - x', h)$  et on intègre, on aura

$$\int u(x')w(x - x')dx' = u(x) \int w(x - x')dx' + u'(x) \int (x' - x)w(x - x')dx' + O(\|x - x'\|^2). \quad (1.9)$$

D'après la condition de normalisation la première intégrale du côté droit vaut 1

$$\int w(x - x')dx' = 1. \quad (1.10)$$

Puisque le noyau est une fonction paire, alors la fonction  $(x' - x)w(x - x')$  est impaire et par conséquent la seconde intégrale du côté droite est nulle

$$\int (x' - x)w(x - x')dx' = 0. \quad (1.11)$$

Grâce aux propriétés (1.10) et (1.11) l'équation (1.9) devient

$$\int u(x')w(x - x')dx' = u(x) + O(\|h\|^2). \quad (1.12)$$

Cela montre que l'approximation intégrale (1.2) est de seconde ordre de précision en espace.

## 1.2 Approximation des dérivées

L'approximation du terme gradient, dans la formulation SPH [26], peut avoir différentes formes. L'une de ces formes est peut être obtenue directement en remplaçant la fonction  $u$  dans l'équation (1.2) par  $\nabla u$  :

$$\nabla u(x) = \int_{\Omega} \nabla_x u(x') w(x-x') dx'. \quad (1.13)$$

En appliquant la formule de Green, on en déduit

$$\nabla u(x) = \int_{\partial\Omega} u(x') w(x-x') \cdot n ds - \int_{\Omega} u(x') \nabla_x w(x-x') dx'. \quad (1.14)$$

Dans le cas où le support du noyau  $\Omega$  centré au point  $x$ , inclut totalement dans le domaine du problème comme illustré à la figure 1.1(a). Alors la valeur de l'intégrale surfacique est nulle et l'approximation intégrale de la dérivée devient :

$$\nabla u(x) = - \int_{\Omega} u(x') \nabla_x w(x-x') dx'. \quad (1.15)$$

En utilisant la propriété d'anti-symétrie du noyau

$$\nabla_x w(x-x') = -\nabla_{x'} w(x-x'), \quad (1.16)$$

on obtient finalement :

$$\nabla u(x) = \int_{\Omega} u(x') \nabla_{x'} w(x-x') dx'. \quad (1.17)$$

Similaire à ce qui a été fait précédemment, il est possible de déterminer l'ordre de précision de l'approximation (1.17). En effectuant le développement de Taylor sur  $u(x')$  autour de  $x$ , on obtient

$$\nabla u(x) = \int_{\Omega} \left( u(x) + (x' - x) \nabla u(x) + O(\|x' - x\|^2) \right) \nabla w(x-x') dx \quad (1.18)$$

$$= \int_{\Omega} u(x) \nabla w(x-x') dx' + \nabla u(x) \int_{\Omega} (x' - x) \nabla w(x-x') dx' + O(\|x' - x\|^2). \quad (1.19)$$



La première intégrale du côté droit de l'équation (1.19) est nulle par symétrie, tandis que la second intégrale vaut 1 d'après la propriété de normalisation. Par conséquent, l'approximation de gradient (1.13) est aussi précise à l'ordre deux en espace.

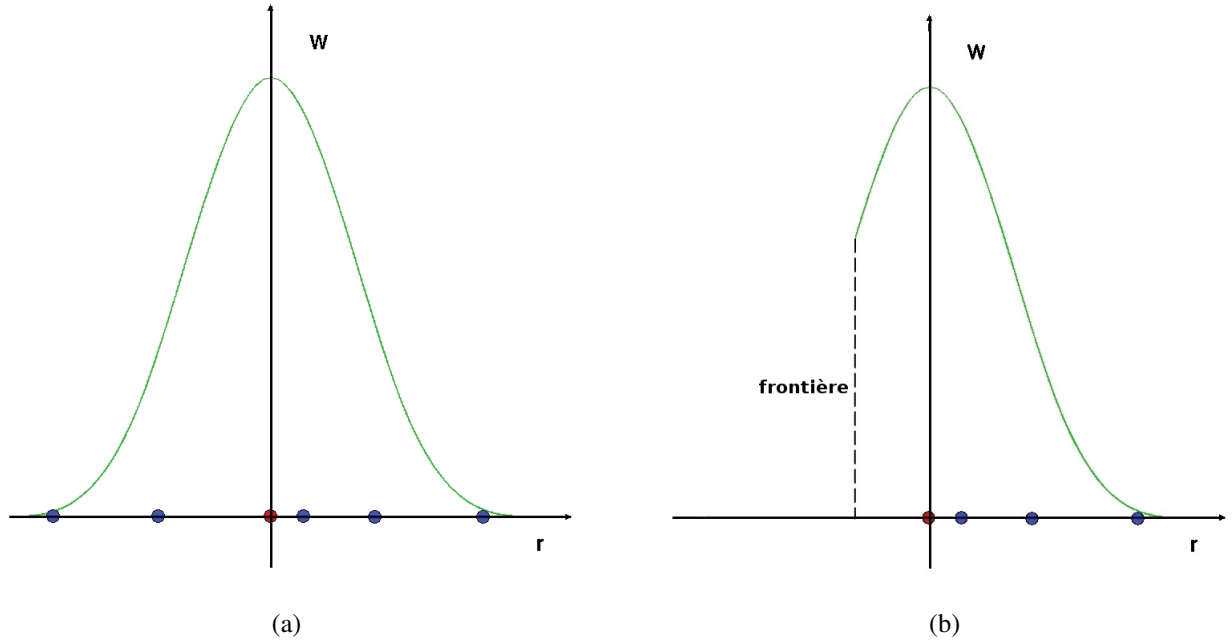


Fig. 1.1: (a) interpolation à l'intérieur du domaine. (b) interpolation au voisinage d'une frontière.

Il existe d'autres formulations alternatives pour décrire le gradient, ces formulations peuvent être construites à partir d'identités suivantes

$$\nabla u(x) = \nabla u(x) + u(x)\nabla(1), \quad (1.20)$$

$$\nabla u(x) = \nabla u(x) - u(x)\nabla(1). \quad (1.21)$$

En injectant (1.20) et (1.21) dans l'équation (1.13) et en appliquant le même raisonnement employé précédemment, on aboutit aux formes suivantes

$$\nabla u(x) = \int_{\Omega} (u(x) + u(x')) \nabla_{x'} w(x - x') dx', \quad (1.22)$$

$$\nabla u(x) = \int_{\Omega} (u(x') - u(x)) \nabla_x w(x - x') dx'. \quad (1.23)$$

la première forme est très utilisée dans la résolution de l'équation de Navier-Stokes, elle assure la conservation de la quantité de mouvement et moment angulaire [18], tandis que la deuxième forme est la plus préférable entre les trois car elle assure une consistance d'ordre zéro c-à-d que la dérivée d'une fonction constante est toujours nulle. Ce n'est pas souvent le cas pour les autres approximations (1.22) et (1.17).

### 1.3 Approximation de la dérivée seconde

Il existe également différentes formes pour approximer la dérivée seconde dans le contexte de SPH. Dans la suite, trois formes sont décrites.

La première forme de l'approximation de la dérivée seconde est peut être obtenue d'une manière analogique à celle faite pour obtenir la dérivée première : on remplace la fonction  $u$  dans l'équation (1.2) par  $\Delta u$  et on applique la formule de Green, on obtient

$$\Delta u(x) = \int_{\Omega} u(x') \Delta w(x - x') dx'. \quad (1.24)$$

Cette expression dépend de la dérivée seconde de la fonction du noyau  $w$ , ce qui la rend très sensible à la distribution des points.

La deuxième forme de laplacien peut être dérivée de l'équation (1.20) en suivant la même procédure réalisée précédemment :

$$\Delta u(x) = \int_{\Omega} (u(x) + u(x')) \Delta w(x - x') dx'. \quad (1.25)$$

Cette approximation souffre également du même problème mention ci-dessus.

La dernière approximation de la dérivée seconde est basée sur le développement en série de Taylor.

Soit  $u$  une fonction différentiable. En dimension 1, le développement en série de Taylor au seconde ordre de  $u(x')$  au voisinage de  $x$ , nous donne

$$u(x') = u(x) + (x' - x)u'(x) + \frac{1}{2}(x' - x)^2 u''(x) + O(\|x' - x\|^2). \quad (1.26)$$

On multiplie les deux membres par  $\frac{w'(x-x')}{(x-x')}$  et on intègre, on trouve

$$\int_{\Omega} \frac{u(x') - u(x)}{x - x'} w'(x - x') dx' = u'(x) \int_{\Omega} w'(x - x') dx' + \frac{u''(x)}{2} \int_{\Omega} (x - x') w'(x - x') dx' + O(\|x' - x\|^2). \quad (1.27)$$

La première intégrale du membre de droite est nulle par symétrie.

En appliquant l'intégration par partie sur la deuxième intégrale du membre de droite, on aura

$$\int_{\Omega} (x - x') w'(x - x') dx' = (x - x') w'(x - x')|_{\delta\Omega} - \int_{\Omega} w(x - x') dx'. \quad (1.28)$$

D'après la compacité du support du noyau et la propriété de normalisation l'intégrale (1.28) réduite à -1 et par conséquent, on obtient

$$u''(x) = 2 \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(x')}{x - x'} w'(x - x') dx'. \quad (1.29)$$

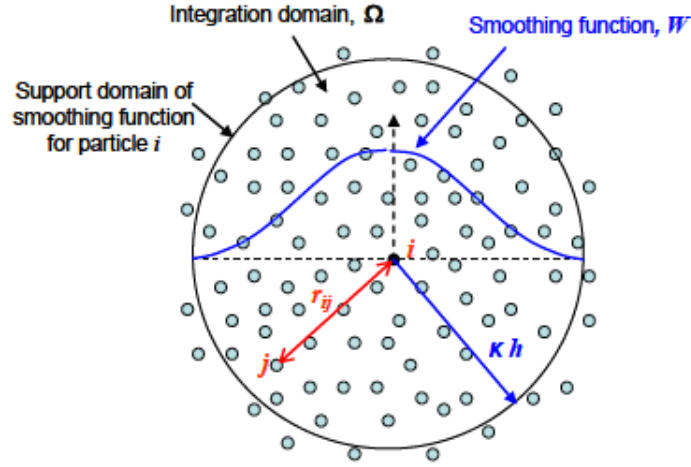
Dans le cas où la dimension est supérieure à un l'expression (1.29) prend la forme suivante :

$$\Delta u(x) = 2 \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(x')}{\|x - x'\|^2} (x - x') \nabla w(x - x') dx'. \quad (1.30)$$

Cette approximation a été introduite par Brookshaw [4], elle combine entre le concept de la méthode différence finis et SPH, de plus elle ne dépend que de la dérivée première du noyau ce qui lui rend insensible de la distribution des points. Basa et al [21] ont montré que cette technique est la meilleure parmi les schémas SPH disponibles pour l'approximation de la dérivée seconde .

## 1.4 Approximation discrète

Dans la méthode SPH, le domaine de simulation est représenté par un ensemble de point fini, distribuées de manière plus-ou-moins aléatoire. Il n'y a pas de topologie reliant ces points les uns aux autres, contrairement aux méthodes classiques comme DF. Les représentations intégrales obtenues, dans les sections précédentes, pour la fonction  $u$  et ses dérivée en un point  $x \in \Omega$ , peuvent être discrétisées sous la forme d'une somme sur tous les points situés dans le support du noyau. La figure 1.2 présente le domaine d'influence du point  $i$ .  $j$  représente un point voisin du point  $i$ .


 Fig. 1.2: Le domaine d'influence d'un point  $i$ .

La représentation intégrale (1.2) peut être approximée par une sommation discrète sur l'ensemble des points situés dans le support du noyau selon l'expression :

$$u(x_i) = \sum_{j=1}^N u(x_j) w(x_i - x_j) V_j. \quad (1.31)$$

Avec  $i$  le point où la variable de champ est approchée et  $j$  est le point voisin dans le domaine d'influence  $i$ .  $N$  et  $V_j$  sont le nombre total de points SPH et le volume associé au nœud  $j$  respectivement. Dans le cas de la dimension un et pour un point intérieur  $V_j = \Delta x_j = (x_{j+1} - x_{j-1})/2$ .

D'une manière similaire, les approximations intégrales de la dérivée première de la fonction  $u$  prennent les formes discrètes suivantes :

$$\nabla u(x_i) = \sum_{j=1}^N u(x_j) \nabla w(x_i - x_j) V_j. \quad (1.32)$$

$$\nabla u(x_i) = \sum_{j=1}^N (u(x_i) + u(x_j)) \nabla w(x_i - x_j) V_j. \quad (1.33)$$

$$\nabla u(x_i) = \sum_{j=1}^N (u(x_j) - u(x_i)) \nabla w(x_i - x_j) V_j. \quad (1.34)$$

La discrétisation des formes intégrales continues de la dérivée seconde (1.24) , (1.25) ,et (1.30) nous amène à l'expression suivante :

$$\Delta u(x_i) = \sum_{j=1}^N u(x_j) \Delta w(x_i - x_j) V_j, \quad (1.35)$$

$$\Delta u(x_i) = \sum_{j=1}^N (u(x_j) + u(x_i)) \Delta w(x_i - x_j) V_j, \quad (1.36)$$

$$\Delta u(x_i) = 2 \sum_{j=1}^N \frac{u(x_i) - u(x_j)}{\|x_i - x_j\|^2} (x_i - x_j) \nabla w(x_i - x_j) V_j. \quad (1.37)$$

## 1.5 Fonction noyaux

La fonction noyau est d'une importance capitale dans la méthode SPH, puisque elle détermine la consistance de l'approximation dans les deux cas intégrale (continue) et discrète (particulaire). l'utilisation d'un noyau approprié à un impact significatif sur le coût du calcul et la stabilité de la méthode. Parfois on compare l'utilisation de différents noyaux dans SPH avec l'utilisation de différents schémas dans la méthode de différences finies.

En générale, les fonctions noyaux sont construites de telle manière qu'elles vérifient les propriétés mentionnées ci-dessus [7,13,25,27]. Dans ce qui suit, nous donnons des exemples de noyaux les plus fréquemment utilisés dans la littérature SPH.

### 1.5.1 Fonction gaussienne

La fonction gaussienne était le premier noyau utilisé dans SPH par Gingold and Monaghan, 1977 [1]. Elle s'écrit sous la forme suivante

$$w(r) = \alpha e^{-r^2}.$$

Avec  $\alpha$  le coefficient de normalisation dont l'expression dépend de la dimension de l'espace, il vaut  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}$  en dimension 1, 2, 3 respectivement.

L'avantage principal de ce noyau est qu'il est de classe  $C^\infty$ , ce qui le rend précis et stable même au cas où les points sont aléatoirement distribués [22],[23], [26]. Mais elle n'est pas à support compact, par conséquent un nombre important de points voisins doit être pris en considération dans le calcul SPH de fonction ou ses dérivées.

### 1.5.2 Fonction Spline

La fonction spline cubique ou également appelée B-Spline est l'un de noyaux les plus utilisés dans la littérature SPH. Il a été introduit par Monaghan et Lattanzio, 1985 [6], sa forme est très similaire à celle de gaussienne mais par contre à support compact, ce qui réduit le nombre de points présent dans le support et par conséquent le temps du calcul, elle est définie par

$$w(x_i - x_j) = \alpha \begin{cases} \frac{2}{3} - q^2 + \frac{1}{2}q^3 & \text{si } 0 \leq q \leq 1, \\ \frac{1}{6}(2 - q)^3 & \text{si } 1 \leq q \leq 2, \\ 0 & \text{si } q > 2. \end{cases}$$

Où  $\alpha$  est un facteur qui assure la condition de normalisation, il prend les valeurs suivantes  $1/h, 15/7h^2\pi, 3/2h^3\pi$  dans la dimension 1, 2 et 3 respectivement,  $q = x_{ij}/h$  et  $x_{ij} = |x_i - x_j|$  est la distance entre les points  $i$  et  $j$ .

### 1.5.3 Fonction Wendland

Wendland [27] a introduit une autre famille de fonctions noyaux à support compact et qui sont définies-positives. La fonction noyau de Wendland Quintic (C2) est donnée par:

$$w(x_i - x_j) = \alpha \begin{cases} (1 + 2q)(1 - \frac{q}{2})^4 & \text{si } 0 \leq q \leq 2, \\ 0 & \text{si } q > 2. \end{cases}$$

Le facteur de normalisation  $\alpha$  prend les valeurs suivantes  $\frac{3}{4h}, \frac{7}{4\pi h^2}, \frac{21}{16\pi h^3}$  dans la dimension 1, 2 et 3 respectivement.

D'après [24], les résultats montrent que le meilleur compromis entre précision et coût de calcul est atteint par l'utilisation du noyau de Wendland.

### 1.5.4 Longueur de lissage

La longueur de lissage  $h$  est un paramètre qui permet de définir la taille du support d'un noyau  $w$ . Ainsi, pour un point donné, cette grandeur permet de déterminer le nombre de points voisins qui doit être pris en considération dans l'interpolation SPH. Il joue le même rôle que le pas de discrétisation spatiale dans les méthodes classiques comme différences finis. La taille de longueur  $h$  a une influence directe sur la précision de la solution. Le choix d'une petite longueur  $h$  conduit à des résultats moins précis et entraîne l'instabilité de la solution obtenue. Par contre lorsque  $h$  est choisie grand, la solution est diffuse et les formes locales de la solution ne sont pas captées correctement [170]. Pour assure une bonne précision de la solution, la longueur  $h$  est généralement choisie de tel sorte que le rapport  $\frac{h}{\Delta x}$ , où  $\Delta x$  la distance initiale entre les points, compris entre 1 et 2 [26].

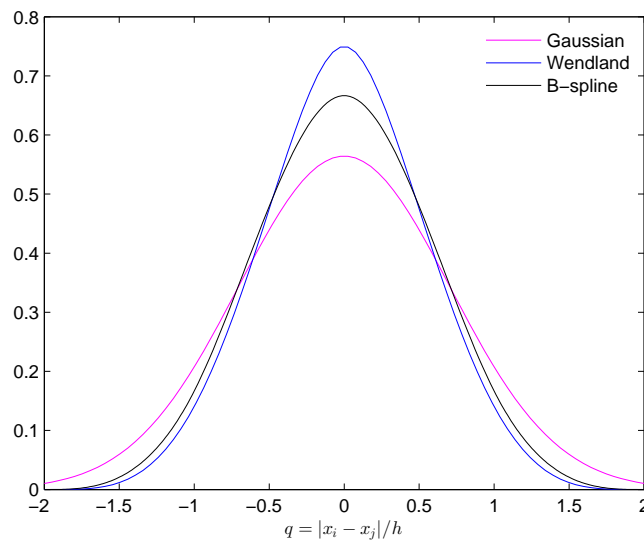


Fig. 1.3: Comparaison de divers noyaux d'interpolation en dimension 1

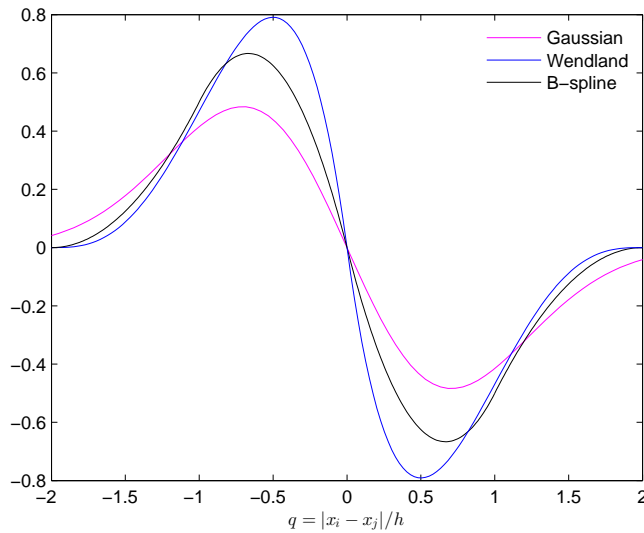


Fig. 1.4: Comparaison de dérivées de différents noyaux en dimension 1

## 1.6 Consistance de la méthode SPH

Le concept de la consistance est très important dans les méthodes numériques, elle assure que la solution numérique des équations discrétisées tend vers la solution exacte des équations continues quand les pas de discrétisations ( $\Delta t, \Delta x$ ) tendent vers zéros.

Dans les méthodes classiques, comme Différences finis (DF), une consistance à l'ordre  $n$  signifie donc que la méthode est capable de reproduire exactement un polynôme de degré inférieur ou égale  $n$  [167]. Le même principe peut s'appliquer aux méthodes sans maillages et notamment la méthode SPH.

### 1.6.1 Cas continu

Pour mieux comprendre la consistance de la méthode SPH, on s'intéresse à l'erreur commise lors de la substitution de la fonction de Dirac par une fonction noyau.

On suppose que la fonction  $u$  est assez régulière pour faire un développement du Taylor de  $u(x')$  au voisinage de  $x$

$$u(x') = u(x) + (x' - x)u'(x) + O(\|x' - x\|^2). \quad (1.38)$$

On multiplie par le noyau  $w(x - x')$  et on intègre, on obtient

$$\int u(x')w(x - x')dx' = u(x) \int w(x - x')dx' + u'(x) \int (x' - x)w(x - x')dx' + O(\|x' - x\|^2). \quad (1.39)$$



L'approximation (1.39) présente un ordre de précision spatial égale à deux, si elle respecte les deux conditions suivantes:

$$\int w(x-x')dx' = 1 \quad (1.40)$$

$$\int (x-x')w(x-x')dx' = 0. \quad (1.41)$$

Et on obtient

$$\int u(x')w(x-x')dx' = u(x) + O(\|x-x'\|^2). \quad (1.42)$$

La première condition est appelée la condition de normalisation, elle représente la capacité de la méthode à reproduire exactement des fonctions constantes. La deuxième est satisfaite si la fonction noyau  $w$  utilisée est symétrique (paire). Elle assure la reproductibilité des fonctions linéaires [167].

On remarque que les conditions ci-dessus ne portent que sur la fonction noyau  $w$ , cela signifie que les propriétés de la consistance de la méthode SPH sont fortement liées aux propriétés du noyau  $w$  [167]. De plus la deuxième condition peut être généralisée afin d'atteindre un ordre de précision quelconque. Pour ce faire, on suppose que  $u \in C^n(\Omega)$  et on fait le développement en série de Taylor de  $u(x')$  au voisinage du point  $x$

$$u(x') = u(x) - (x-x')u'(x) + \frac{(x-x')^2}{2!}u''(x) + \dots + (-1)^n \frac{(x-x')^n}{n!}u^{(n)}(x) + O(\|x-x'\|^n) \quad (1.43)$$

$$u(x') = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(x-x')^k}{k!} u^{(k)}(x) + O(\|x-x'\|^n). \quad (1.44)$$

Par convolution avec la fonction noyau  $w$ , on obtient

$$\langle u(x) \rangle = \sum_{k=0}^n \int_{\Omega} (-1)^k \frac{(x-x')^k}{k!} u^{(k)}(x) w(x-x') dx' + O(\|x-x'\|^n). \quad (1.45)$$

Pour que l'approximation (1.39) soit consistante à l'ordre  $n$ , on doit avoir

$$\begin{cases} M_0 = \int_{\Omega} w(x-x') dx' = 1, \\ M_k = \int_{\Omega} (x-x')^k w(x-x') dx' = 0, \quad \forall 1 \leq k \leq n, \end{cases} \quad (1.46)$$

où  $M_k$  est appelé moment d'ordre  $k$  de la fonction noyau  $w$ . Il est très difficile et même impossible de construire de telle fonction de noyau, car d'après les conditions ci-dessus un ordre paire  $M_k (k = 2, 4, 6, \dots)$  doit-etre nul ce qui est impossible à vérifier avec une fonction positive partout [167].

Il est important de noter que l'approximation (1.41) ne présente plus le même degré de précision dans le cas où le domaine d'intégration est tronqué (figure 1.1 (b)), c'est-à-dire lorsque le point  $x$  évalué se trouve près où sur les frontières du domaine du problème.

## 1.6.2 Cas discret

Les conditions de consistence (1.40) et (1.41) au niveau discrète s'écrivent à la forme suivante:

$$\sum_{j=1}^N w(x_i - x_j) \Delta x_j = 1, \quad (1.47)$$

$$\sum_{j=1}^N (x_i - x_j) w(x_i - x_j) \Delta x_j = 0. \quad (1.48)$$

Satisfaire les conditions de l'étape d'approximation intégrale (cas continu) ne garantit pas le même ordre de consistence dans le cas discret. Par exemple si on prend le cas où le point  $x$  évalué se trouve près où sur la frontière du domaine du problème on trouve que la sommation (1.47) n'égale pas à 1 même si les points sont uniformément distribués à cause de la troncature du support du noyau  $w$ . De plus pour annuler le moment d'ordre 1 (1.48) il faudrait supposer que la répartition des points soit parfaitement symétrique autour du point  $x_i$  [167]. Dans le cas générale, ce n'est pas le cas, et la consistence de consistence (1.48) n'est pas satisfaite et par conséquence la méthode SPH n'est pas consistante à l'ordre un.

### 1.6.3 Restauration de consistance

Différentes modifications et corrections ont proposées pour rétablir la consistance et améliorer la précision de la méthode SPH. Certaines d'entre elles impliquent la reconstruction des nouvelles fonction noyaux de manière à satisfaire les conditions de consistance (1.47), (1.48).

#### 1.6.3.1 Normalisation du noyau

L'idée principale de cette technique consiste à multiplier la fonction du noyau  $w$  par un terme correctif pour conserver la condition de normalisation (1.47):

$$\hat{W}(x_i - x_j) = \alpha_i w(x_i - x_j), \quad (1.49)$$

où  $\alpha_i$  désigne le terme correctif donné par :

$$\alpha_i = \left[ \sum_j^N w(x_i - x_j) V_j \right]^{-1}. \quad (1.50)$$

Le nouveau noyau  $\hat{W}$  est connu sous le nom de noyau Shepard dans la littérature, il vérifie la condition de normalisation (1.47) en tout point  $x_i$  du domaine, qu'il soit proche ou éloigné de la frontière.

Le facteur (1.50) peut être utilisé pour améliorer l'approximation discrète (1.31) de la manière suivante:

$$u(x_i) = \alpha_i \sum_j^N u(x_j) w(x_i - x_j) V_j. \quad (1.51)$$

Cette expression nous permet de reproduire exactement une fonction constante quelque soit la répartition des points.

#### 1.6.3.2 La dérivée première

De manière similaire on peut introduire un terme correctif  $\beta_i$  à l'expression de la dérivée d'une fonction afin de restaurer la consistance d'ordre 1

$$\left( \frac{du}{dx} \right)_i = \beta_i \sum_{j=1}^N (u(x_j) - u(x_i)) \frac{dw}{dx}(x_i - x_j) \Delta x_j. \quad (1.52)$$

Le terme correctif  $\beta_i$  est alors déterminé de manière à garantir l'exactitude du calcul de la dérivée,

dans le cas d'une fonction linéaire  $u(x) = kx$ , on obtient

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = k = \beta_i \sum_{j=1}^N (kx_j - kx_i) \frac{dw}{dx_i}(x_i - x_j) \Delta x_j. \quad (1.53)$$

L'expression de  $\beta_i$  est alors donnée par :

$$\beta_i = - \left[ \sum_j^N (x_i - x_j) \frac{dw}{dx_i}(x_i - x_j) \Delta x_j \right]^{-1}. \quad (1.54)$$

L'approximation SPH (1.52) s'écrit alors

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = - \left[ \sum_{j=1}^N (u(x_j) - u(x_i)) \frac{dw}{dx_i}(x_i - x_j) \Delta x_j \right] \left[ \sum_j^N (x_i - x_j) \frac{dw}{dx_i}(x_i - x_j) \Delta x_j \right]^{-1}. \quad (1.55)$$

Cette approximation assure une consistance à l'ordre 1.

### 1.6.3.3 La dérivée seconde

**1.6.3.3.1 Cas continu** On commence d'abord par le cas continu (étape smoothing) et on se place dans un espace de dimension 1.

En effectuant un développement du Taylor de la fonction  $u(x')$  au voisinage de point  $x$  et en multipliant par la dérivée du noyau  $w'(x - x')$ , on obtient

$$\begin{aligned} \langle u''(x) \rangle = \int_{\Omega} \frac{u(x') - u(x)}{x - x'} w'(x - x') dx' &= u'(x) \int_{\Omega} w'(x - x') dx' + \frac{u''(x)}{2} \int_{\Omega} (x - x') w'(x - x') dx' \\ &\quad + O(\|x - x'\|^2). \end{aligned} \quad (1.56)$$

lorsque le support du noyau  $w$  centré au point  $x$  n'est pas tronqué par la frontière de domaine de calcul (figure 1.1 (a)), alors la premier intégrale de côté droit dans (1.56) est nulle par symétrie et la deuxième vaut -1 et par conséquent, on obtient

$$\langle u''(x) \rangle = 2 \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(x')}{x - x'} w'(x - x') dx' = u''(x) + O(\|x - x'\|^2). \quad (1.57)$$

L'approximation (1.57) présente donc une consistance à l'ordre deux quelle que soit la distribution des points, c'est-à-dire qu'elle est capable de reproduire exactement un polynôme de degré deux.

Soit  $u$  un polynôme de degré 2

$$u(x) = ax^2 + bx + c.$$

En calculant la dérivée seconde de  $u$  à l'aide de l'approximation (1.57), on trouve

$$\langle u''(x) \rangle = 2 \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(x')}{x - x'} w'(x - x') dx' = 2b \int_{\Omega} w'(x - x') dx' + 2a \int_{\Omega} (x + x') w'(x - x') dx'.$$

La première intégrale du membre de droite est nulle car le noyau  $w$  à support compact. En effectuant l'intégration par partie à la deuxième intégrale du membre de droite, on aura

$$\int_{\Omega} (x + x') w'(x - x') dx' = \int_{\Omega} w(x - x') dx' = 1.$$

On obtient finalement :

$$\langle u''(x) \rangle = 2a.$$

On voit que l'approche (1.57) peut approximer exactement la dérivée seconde d'une fonction quadratique est la même chose est vraie pour une fonction linéaire et constante .

Mais quand le support du noyau est tronqué, c'est à dire que l'on est très proche ou sur la frontière de domaine de calcul, alors la première intégrale de (1.56) n'est pas nulle et par conséquence l'approximation (1.57) n'est pas consistante à l'ordre deux

**1.6.3.3.2 Cas discret** On suit la même procédure et on remplace les intégrales dans (1.56) par une sommation sur tous les points voisins de  $x_i$ , on obtient

$$\begin{aligned} \langle u''(x_i) \rangle = & \sum_{j=1}^N \frac{u(x_j) - u(x_i)}{x_i - x_j} w'(x_i - x_j) \Delta x_j = -u'(x_i) \sum_{j=1}^N w'(x - x') \Delta x_j \\ & + \frac{u''(x_i)}{2} \sum_{j=1}^N (x_i - x_j) w'(x_i - x_j) \Delta x_j + O(h^2). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Si les points sont régulièrement distribués et  $x_i$  est un point intérieur, alors le premier terme de côté droit de (1.58) vaut zéro et par conséquence l'approximation discrète:

$$\langle u''(x_i) \rangle = 2 \sum_{j=1}^N \frac{u(x_i) - u(x_j)}{x_i - x_j} w'(x_i - x_j) \Delta x_j. \quad (1.59)$$

est consistante à l'ordre un c'est-à-dire qu'elle est capable de reproduire exactement des fonctions linéaires.

Dans le cas où les points sont aléatoirement distribués ou si on est très proche de la frontière de telle sorte que le support du noyau n'est pas inclus totalement dans le domaine du calcul, le premier terme du côté droit de l'égalité (1.58) n'est pas nul et dans ce cas l'approximation (1.59) n'est même pas consistante d'ordre un.

Si on regarde de près l'équation (1.58) on constate que l'apparition de la dérivée première, dans l'erreur de troncature, affecte la précision du schéma (1.59). Pour remédier à ce problème R.Fatih et M.T.Manzari [5] ont proposé un nouveau schéma en soustrayant le terme  $2 \sum_{j=1}^N \langle u'(x_i) \rangle < u'(x_i) \rangle w'(x_i - x_j) \Delta x_j$  de (1.59). Considérons le cas 1D, on aura

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N 2 \left( \frac{u(x_i) - u(x_j)}{x_i - x_j} - \langle u'(x_i) \rangle \right) w'(x_i - x_j) \Delta x_j &= 2(u'(x_i) - \langle u'(x_i) \rangle) \sum_{j=1}^N w'(x_i - x_j) \Delta x_j \\ &\quad - u''(x_i) \sum_{j=1}^N (x_i - x_j) w'(x_i - x_j) \Delta x_j + O(h^2). \end{aligned} \quad (1.60)$$

En calculant le terme

$$u'(x_i) - \langle u'(x_i) \rangle, \quad (1.61)$$

avec

$$\langle u'(x_i) \rangle = \beta_i \sum_{j=1}^N (u(x_j) - u(x_i)) w'(x_i - x_j) \Delta x_j, \quad (1.62)$$

où  $\beta_i$  est le coefficient de correction, on trouve

$$u'(x_i) - \langle u'(x_i) \rangle = -\frac{1}{2} u''(x_i) \sum_{j=1}^N (x_i - x_j)^2 w'(x_i - x_j) \Delta x_j + \dots + . \quad (1.63)$$

En remplaçant (1.63) dans (1.60) on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N 2 \left( \frac{u(x_i) - u(x_j)}{x_i - x_j} - \langle u'(x_i) \rangle \right) w'(x_i - x_j) \Delta x_j \\ = -u''(x_i) \left[ \sum_{j=1}^N (x_i - x_j) w'(x_i - x_j) \Delta x_j + \beta_i \left( \sum_{j=1}^N w'(x_i - x_j) \Delta x_j \right) \left( \sum_{j=1}^N (x_i - x_j)^2 w'(x_i - x_j) \Delta x_j \right) \right] \\ + O(h^2). \end{aligned} \quad (1.64)$$

De cette manière on a pu débarrasser du terme qui contient la dérivée première et améliorer la précision du schéma

Pour terminer, on définit le nouveau tenseur de normalisation  $\hat{B}_i$  comme suivant

$$\hat{B}_i = - \left[ \sum_{j=1}^N (x_i - x_j) w'(x_i - x_j) \Delta x_j + \beta_i \left( \sum_{j=1}^N w'(x_i - x_j) \Delta x_j \right) \left( \sum_{j=1}^N (x_i - x_j)^2 w'(x_i - x_j) \Delta x_j \right) \right]^{-1}. \quad (1.65)$$

Par conséquent le nouveau schéma prend la forme suivante :

$$\langle u''(x_i) \rangle = 2\hat{B}_i \sum_{j=1}^N \left( \frac{u(x_i) - u(x_j)}{x_i - x_j} - \beta_i \sum_{j=1}^N (u(x_j) - u(x_i)) w'(x_i - x_j) \Delta x_j \right) w'(x_i - x_j) \Delta x_j. \quad (1.66)$$

Dans le cas multidimensionnel, on a

$$\langle \Delta u(x_i) \rangle = 2\hat{B}_i \sum_{j=1}^N \left( \frac{u(x_i) - u(x_j)}{|x_i - x_j|^2} (x_i - x_j) - \beta_i \sum_{j=1}^N (u(x_j) - u(x_i)) \nabla w(x_i - x_j) \Delta x_j \right) \nabla w(x_i - x_j) \Delta x_j. \quad (1.67)$$

ce nouveau schéma est capable de reproduire exactement la dérivée seconde des fonctions constantes, linéaires ou quadratiques, il converge aussi quel que soit le rapport  $\frac{h}{\Delta x}$ . Cela signifie qu'on peut assurer la convergence avec un nombre des voisins faible.

Il est évident que le nouveau schéma a un coût du calcul plus élevé que l'ancien schéma (1.59) dans les mêmes conditions à cause des étapes numériques supplémentaires

- Le calcul de l'approximation de la première dérivée

$$\langle \nabla u(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N (u(x_j) - u(x_i)) \nabla w(x_i - x_j) \Delta x_j. \quad (1.68)$$

- Calcul du tenseur de normalisation  $\hat{B}_i$  qui implique la résolution d'un système d'équations linéaire à 3 inconnues en dimension deux et 6 inconnues en dimension trois.

## Chapter 2

# Evaluation des options européennes par methode SPH

Le modèle de Black et Scholes [3] est une équation aux dérivées partielles (EDP) de second ordre, du type parabolique, satisfaite par le prix d'une option (d'achat, Call) ou (de vente, Put) européenne. On désigne par  $V(S, \tau)$  ce prix, qui dépend du cours de l'actif sous-jacent  $S > 0$  et du temps  $\tau \in ]0, T]$ . L'EDP de Black et Scholes s'écrit

$$\frac{\partial V(S, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, \tau)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(S, \tau)}{\partial S} - rV(S, \tau) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times ]0, T]. \quad (2.1)$$

Avec une condition finale

$$V(S, T) = \begin{cases} \max(S - K, 0) & \text{pour un Call,} \\ \max(K - S, 0) & \text{pour un Put.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Ici, les paramètres  $\sigma, r, K, T$  désignent respectivement la volatilité du sous-jacent  $S$ , le taux d'intérêt sans risque, le prix d'exercice et le temps qui reste à l'option avant son échéance.

Pour être résolu, le problème (2.1)-(2.2) devra être complété par des conditions sur le bord ou des conditions aux limites.

### Cas de call

Si le prix de l'actif sous-jacent est nul ( $S = 0$ ), l'option ne vaut rien et par conséquent son prix est toujours nul. Donc

$$V(0, \tau) = 0, \quad \forall \tau. \quad (2.3)$$

Si, au contraire, le prix de l'actif sous-jacent tend vers l'infini ( $S \rightarrow +\infty$ ), il apparaît clairement que l'option de Call sera exercée et dans ce cas nous avons d'après la parité de Call-Put la condition suivante :



$$V(S, t) \approx S - Ke^{-r(T-t)} \quad \text{quand } S \rightarrow +\infty. \quad (2.4)$$

### Cas de Put

Lorsque le prix du sous-jacent est nul ( $S = 0$ ), alors le gain à terme est  $V(0, T) = K$ , et la valeur de  $V(0, \tau)$  peut être déduite en résolvant l'équation (2.1) dans le cas  $S = 0$  :

$$V(0, \tau) = Ke^{-r(T-\tau)}, \quad \forall \tau. \quad (2.5)$$

Il est possible de généraliser cette condition dans le cas de taux non constants :

$$V(0, \tau) = Ke^{-\int_t^T r(\tau) d\tau}, \quad \forall \tau. \quad (2.6)$$

Si, en revanche, le prix du sous-jacent tend vers l'infini ( $S \rightarrow +\infty$ ), l'option de Put ne sera pas exercée et par conséquent nous avons la condition suivante :

$$V(S, \tau) \rightarrow 0, \quad S \rightarrow +\infty. \quad (2.7)$$

### Equation de Black & Scholes avec dividende

Dans le cas où l'actif sous-jacent verse un dividende continu, le détenteur de l'actif reçoit un flux de dividende de montant  $qS_\tau d\tau$  sur un intervalle de temps infinitésimal  $d\tau$ . La dynamique du prix s'écrit alors

$$dS_\tau = (r - q)S_\tau d\tau + \sigma dW_\tau, \quad (2.8)$$

où  $q$  désigne le taux de dividende.

Le prix d'une option européenne, portant sur un sous-jacent qui paye un dividende continu, doit satisfaire l'équation de Black-Scholes-Merton suivante :

$$\frac{\partial V(S, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, \tau)}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V(S, \tau)}{\partial S} - rV(S, \tau) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times ]0, T]. \quad (2.9)$$

Après l'ajout d'un taux de dividende  $q$ , la solution analytique (formule fermée), de l'équation (2.9) pour un Call et un Put européen à l'instant  $\tau$ , est donnée par :

Pour un Call

$$V(S, \tau) = Se^{-q(T-\tau)}\Phi(\tilde{d}_1) - Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(\tilde{d}_2). \quad (2.10)$$

Pour un Put

$$V(S, \tau) = Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(-\tilde{d}_2) - Se^{-q(T-\tau)}\Phi(-\tilde{d}_1). \quad (2.11)$$

Où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , et

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - q + \frac{1}{2}\sigma)(T - \tau)}{\sigma\sqrt{T - \tau}}, \quad (2.12)$$

$$\tilde{d}_2 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - q - \frac{1}{2}\sigma)(T - \tau)}{\sigma\sqrt{T - \tau}} = \tilde{d}_1 - \sigma\sqrt{T - \tau}. \quad (2.13)$$

Avant de procéder à la résolution numérique de l'équation (2.1), il est important de noter que dans le cas où les coefficients  $\sigma$  et  $r$  sont constants, l'équation de Black-Scholes peut être ramenée par changement de variable exponentiel à l'équation de la chaleur. Cette dernière est plus facile à traiter numériquement que celle de Black et Scholes. Pour cette raison nous allons tout d'abord nous intéresser à la résolution de l'équation de la chaleur.

Pour pouvoir se ramener à la forme de l'équation de la chaleur, nous allons procéder aux changements de variables suivants :

Premièrement on pose

$$S = Ke^x, \tau = T - \frac{2t}{\sigma^2}, \quad V = Kv(x, t). \quad (2.14)$$

En injectant les expressions ci-dessus dans l'équation de Black Scholes (2.1), on obtient l'équation différentielle, en  $v$ , suivante:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k - 1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv, \quad \text{avec } k = \frac{2r}{\sigma^2}. \quad (2.15)$$

En appliquant un deuxième changement de variables :  $u = ve^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2t}$ . On aboutit, donc, à la forme canonique de l'équation de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.16)$$

Après les changements de variables les conditions finales (2.2) transformées en conditions initiales suivantes :

$$u(x, 0) = \begin{cases} \left( e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \right)^+ & \text{Pour un Call,} \\ \left( e^{\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \right)^+ & \text{Pour un Put.} \end{cases} \quad (2.17)$$

Pour résoudre numériquement les systèmes (2.16) - (2.17), il est nécessaire de définir un domaine de calcul sous la forme:

$$\Omega = [a, b] \times \left[0, \frac{\sigma^2}{2}T\right].$$

En utilisant la relation (2.14), les extrémités de cet intervalle peuvent être calculées selon les expressions:

$$a = -\log\left(\frac{S_{max}}{K}\right),$$

$$b = \log\left(\frac{S_{max}}{K}\right).$$

Ici, le terme  $S_{max}$  représente le maximum du cours de l'actif.

En pratique [48], le maximum du cours de l'actif sous-jacent est généralement choisi tel que :  $S_{max} = nK, n = 2, 3, 4$ , alors ça donne:

$$a = -\log(n),$$

$$b = \log(n).$$

Finalement, les conditions aux limites peuvent être formulées comme suit :

**Le cas de Call**

$$u(a,t) = 0 \quad t \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \quad (2.18)$$

$$u(b,t) = e^{\frac{1}{2}(k+1)b + \frac{1}{4}(k+1)^2t} - e^{\frac{1}{2}(k-1)b + \frac{1}{4}(k-1)^2t}. \quad (2.19)$$

**Le cas de Put**

$$u(a,t) = e^{\frac{1}{2}(k-1)a + \frac{1}{4}(k-1)^2t}, \quad (2.20)$$

$$u(b,t) = 0 \quad t \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T]. \quad (2.21)$$

On se place dans le cas d'une option de call européenne de prix d'exercice  $K$  et d'échéance  $T$ , le prix de telle option peut être déterminé en résolvant le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans } [a, b] \times [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \\ u(a,t) = 0 \quad \forall \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \\ u(b,t) = e^{\frac{1}{2}(k+1)b + \frac{1}{4}(k+1)^2t} - e^{\frac{1}{2}(k-1)b + \frac{1}{4}(k-1)^2t} \quad \forall t \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \\ u(x,0) = \left( e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \right)^+. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Dans les sections qui suivent, nous allons procéder à la résolution numérique du problème (2.22) à l'aide de la méthode SPH.

## 2.1 SPH pour l'équation de la chaleur

Le principe de la méthode SPH consiste à approximer la valeur d'une fonction et ses dérivées, impliquées dans les équations différentielles décrivant le problème, en utilisant des convolutions discrètes avec une fonction noyau et ses dérivées respectivement. Autrement dit, une simple connaissance de valeurs d'une fonction, sur un ensemble fini de points, nous permet et suffit pour l'approximer ainsi que ses deux premières dérivées, en tout point de domaine de problème, à l'aide d'un noyau et son gradient.

Il existe en effet différente formulation, comme mentionnée dans le [chapter 1](#), pour approximer la dérivée première et seconde [32, 33, 34]. Dans cette section nous allons adopter les formulations suivantes :

### La première dérivée

$$\nabla u(x_i) = \beta_i \sum_j (u(x_j) - u(x_i)) \nabla w(x_i - x_j) V_j. \quad (2.23)$$

### La seconde dérivée

$$\Delta u(x_i) = 2 \sum_j \frac{u(x_i) - u(x_j)}{|x_i - x_j|^2} (x_i - x_j) \nabla w(x_i - x_j) V_j, \quad (2.24)$$

où  $\beta_i$  un coefficient correctif donné par :

$$\beta_i = - \left[ \sum_j (x_i - x_j) \nabla w(x_i - x_j) V_j \right]^{-1}. \quad (2.25)$$

### 2.1.1 Discrétisation spatiale

Dans la méthode SPH le domaine de calcul  $[a, b]$  est représenté par un ensemble de points finis  $N$ , nous considérons seulement ici le cas où les points soient uniformément distribués c'est-à-dire que  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ , constant pour tout  $i = 1, \dots, N$ , ou  $x_i$  désigne la position de la  $i$ -eme point. puisque les points sont uniformément distribués, nous allons fixer  $V_j = \Delta x = (x_{i+1} - x_i)/2$ .

En remplaçant l'opérateur laplacien dans l'équation de la chaleur (2.22) par la version discrète donnée par l'opérateur laplacien SPH (2.24) on obtient le schéma semi-discret, en  $x_i$ , suivant :



$$\begin{cases} a_{ij} = -2\frac{w'_{ij}}{x_i - x_j}\Delta x & \text{si } i \neq j, \text{ et } j \in N(x_i), \\ a_{ii} = -\sum_k a_{ik} & \text{si } i = j, \\ a_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j, \text{ et } j \notin N(x_i). \end{cases}$$

D'après la construction de la matrice A, nous pouvons constater qu'à la i-ème ligne de A, les coefficients  $a_{ij}, j = 1, 2, \dots, N$  sont non-nuls si et seulement si la distance entre les points  $i$  et  $j$  est inférieure à la longueur de lissage  $2h$ . Ce qui signifie que A est une matrice creuse comme le montre la figure suivante.

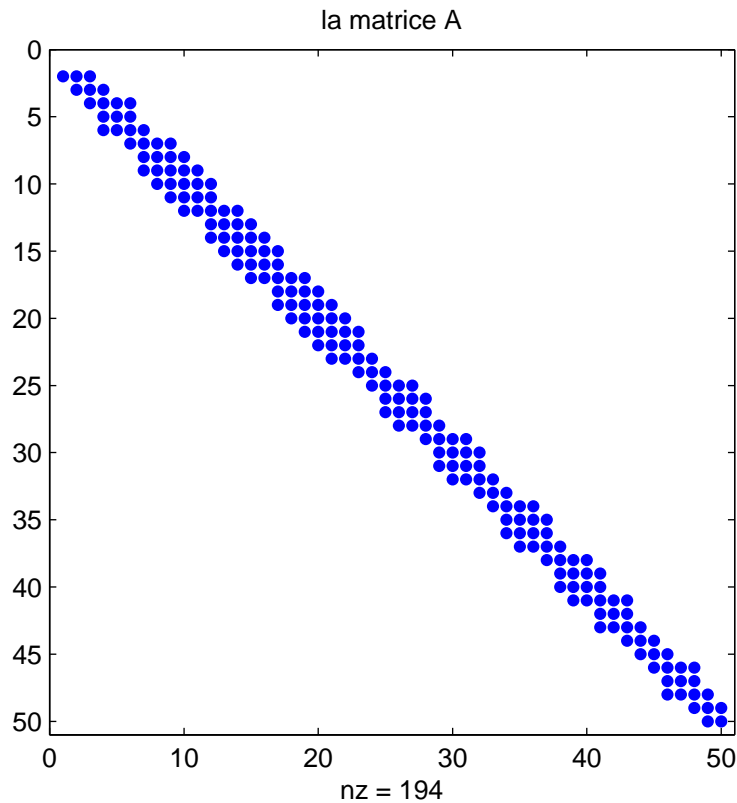


Fig. 2.1: Visualisation de la structure creuse de la matrice A pour  $N = 50$ . nz : désigne le nombre d'éléments non nuls de la matrice A.

### 2.1.2 Discrétisation temporelle

La discrétisation spatiale de l'opérateur laplacien, via la méthode SPH, nous amène au système d'équations différentielles ordinaires (EDO) en temps (2.28), Il existe plusieurs méthode, comme

la méthode d'Euler et Runge-Kutta [41], pour résoudre un tel système, ici nous allons utiliser la  $\theta$ -méthode pour approximer la dérivée temporelle. Pour ce faire, on se donne une discrétisation en temps  $t_k = k\Delta t$ , avec  $k = 1, 2, \dots, M$ , et  $\Delta t = \frac{\sigma^2 T}{2M}$ : le pas de temps. On note  $U^k$  une approximation de  $U(t_k, x)$ .

Pour  $\theta \in [0, 1]$ , on définit le  $\theta$ -schéma par :

$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} = \theta AU^{k+1} + (1 - \theta)AU^k. \quad (2.29)$$

En réorganisant l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$(I - \Delta t \theta A)U^{k+1} = (I + \Delta t(1 - \theta)A)U^k, \quad (2.30)$$

avec  $U^k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_N^k)^T$ ,  $A$  est la matrice résultante de la discrétisation spatiale via SPH et  $I$  est la matrice identité de dimension  $N \times N$ .

On distingue, suivant les valeurs de  $\theta$ , les trois schémas usuels suivants :

- le schéma d'Euler Explicite ( $\theta = 0$ ).
- le schéma d'Euler Implicite ( $\theta = 1$ ).
- le schéma de Crank – Nicolson ( $\theta = 1/2$ ).

Dans le cas du schéma d'Euler Explicite  $\theta = 0$ , le vecteur solution  $U^{k+1}$  s'obtient de manière explicite selon l'expression suivante :

$$U^{k+1} = AU^k. \quad (2.31)$$

Dans les autres cas *i.e*  $\theta > 0$ , on doit résoudre un système linéaire (auquel est associée une matrice constante  $(I - \Delta t \theta A)$ ) à chaque pas de temps.

Pour que l'on puisse résoudre le système linéaire (2.30) dans les cas du schéma d'Euler Implicite et Crank-Nicolson. Nous devons d'abord nous assurer que la matrice constante  $(I - \Delta t \theta A)$  est inversible.

Rappelons qu'une matrice  $M$  est diagonale dominante si  $|M_{ii}| > \sum_{i \neq j} |M_{ij}|, \forall i$ . Si l'inégalité est stricte, alors on dit que  $M$  est diagonal dominante stricte (DDS). Du théorème de Levy–Desplanques, on sait qu'une matrice DDS est automatiquement non-singulière.

Si une matrice est DDS, symétrique et possède une diagonale strictement positive, alors elle est symétrique définie positive (SDP), c'est-à-dire qu'elle satisfait  $v^T M v > 0, \forall v \neq 0$  [166].

On se place dans le cas du schéma d'Euler Implicite  $\theta = 1$ , alors le système (2.30) s'écrit :



$$(I - \Delta t A)U^{k+1} = AU^k. \quad (2.32)$$

Posons  $M = (I - \Delta t A)$ , avec les coefficients suivants:

$$M_{ij} = \begin{cases} -\Delta t a_{ij} & \text{si } i \neq j, \\ 1 - \Delta t a_{ii} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Nous pouvons démontrer, en utilisant les propriétés de la fonction noyau  $w$ , que la matrice  $M$  possède les propriétés suivantes :

Symétrie :  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\} M_{ij} = M_{ji}$

Tous les coefficients non diagonaux de matrice  $A$  sont positives ou nulle  $a_{ij} \geq 0, \forall j \neq i$  par conséquence, nous avons

$$M_{ii} = 1 + \Delta t \sum_{i \neq j} a_{ij} > 0 \quad \forall j.$$

De plus on a

$$\sum_{i \neq j} |M_{ii}| = \sum_{i \neq j} |-\Delta t a_{ij}| = \Delta t \sum_{i \neq j} a_{ij} = -\Delta t a_{ii} < 1 - \Delta t a_{ii} = M_{ii} = |M_{ii}|.$$

Comme la diagonale de  $M$  est strictement positive, on en conclut que  $M$  est une matrice symétrique définie positive. En conséquence, elle est non-singulière et le système linéaire (2.32) admet une unique solution.

En appliquant le même raisonnement on peut montrer que la matrice  $(I - \frac{\Delta t}{2}A)$ , dans le cas du schéma Crank- Nicolson, est aussi non-singulière.

### 2.1.3 Analyse de stabilité

La stabilité: c'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.

Un schéma numérique est dit stable, si les perturbations de la solution numérique ne sont pas amplifiées au cours des itérations.

Pour procéder à l'analyse de stabilité, définissons l'erreur à l'instant  $t_k$  par

$$e^k = U_{Exact}^k - U_{Num}^k, \quad (2.33)$$

où  $U_{Exact}$  est la solution exacte et  $U_{Num}$  la solution numérique obtenue par la méthode SPH.

Pour le schéma donné par (2.30), l'équation d'erreur à l'instant  $t_{k+1}$  peut-être écrite comme suit

$$e^{k+1} = Le^k, \quad (2.34)$$

où  $L$  est la matrice d'amplification donnée par:

$$L = (I - \Delta t \theta A)^{-1} (I + \Delta t (1 - \theta) A). \quad (2.35)$$

Le schéma numérique est stable si  $\rho(L) \leq 1$ , où  $\rho(L)$  est le rayon spectral de la matrice  $L$ . En substituant  $L$  dans l'équation (2.34) et en simplifiant, on obtient

$$e^{k+1} = (I - \Delta t \theta A)^{-1} (I + \Delta t (1 - \theta) A) e^k. \quad (2.36)$$

Il ressort clairement de l'équation (2.36) que le schéma numérique est stable si toutes les valeurs propres de la matrice  $L = (I - \Delta t \theta A)^{-1} (I + \Delta t (1 - \theta) A)$  sont inférieures à l'unité, ce qui signifie que

$$\left| \frac{1 + \Delta t (1 - \theta) \lambda_A}{1 - \Delta t \theta \lambda_A} \right| \leq 1 \quad (2.37)$$

où  $\lambda_A$  représentent les valeurs propres de la matrice  $A$ .

Il est clair que l'inégalité ci-dessous est toujours satisfaite pour  $Re(\lambda_A) \leq 0$ . Or, d'après les propriétés du noyau  $w$  la matrice  $A$  est symétrique et par conséquent toutes ses valeurs propres sont réels  $\lambda_A = Re(\lambda_A)$ .

Comme il est très difficile de trouver une expression explicite de la valeur propre de la matrice  $A$ , nous allons les calculer numériquement à l'aide de la fonction  $eig(A)$  de MATLAB, cette fonction renvoie les valeurs propres (eigenvalues) de toute matrice carrée  $A$  et les vecteurs propres correspondants.

La figure 2.2 montre la distribution des valeurs propres de la matrice  $A$  résultant de la discrétisation spatiale de l'opérateur laplacien via la méthode SPH sur un intervalle  $[a, b] = [-3, 3]$  pour  $N = 100$ . Nous pouvons remarquer que toutes les valeurs propres sont négatives ce qui montre que le schéma (2.30) pour  $\theta \in ]0, 1]$  est inconditionnellement stable, en particulier les schéma d'Euler implicite et Crank-Nicholson.

Nous considérons maintenant le cas du schéma d'Euler explicite i.e  $\theta = 0$ . La condition de stabilité ci-dessus devient:

$$|1 + \Delta t \lambda_A| \leq 1. \quad (2.38)$$

En simplifiant l'expression (2.38), nous trouvons que la méthode d'Euler explicite est stable sous les conditions :

$$\Delta t \geq \frac{1}{\lambda_A} \quad \text{et} \quad \lambda_A < 0. \quad (2.39)$$

Brookshaw [36] a étudié la stabilité du schéma (2.26) au sens de Van Neumann, il est parvenu à la conclusion que le critère de stabilité de la méthode SPH, dans le cas de schéma d'Euler explicite, est similaire à celui de la méthode de Différence finies

$$\Delta t \leq \frac{1}{I(k, h)} \quad (2.40)$$

où

$$I(k, h) = \int \frac{1 - e^{kx_{ij}}}{x_i - x_j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_j} dx_j. \quad (2.41)$$

L'intégrale  $I$  dépend du noyau d'interpolation utilisé. Dans le cas du noyau gaussien, nous avons

$$I(k, h) = \frac{2}{h^2}.$$

Si l'on utilise le noyau B-spline, le terme  $I(k, h)$  devient beaucoup plus compliqué, mais le critère de stabilité le plus restrictif est donné par :  $\max(I(k, h)) = 4 \ln 2 / h^2$ .

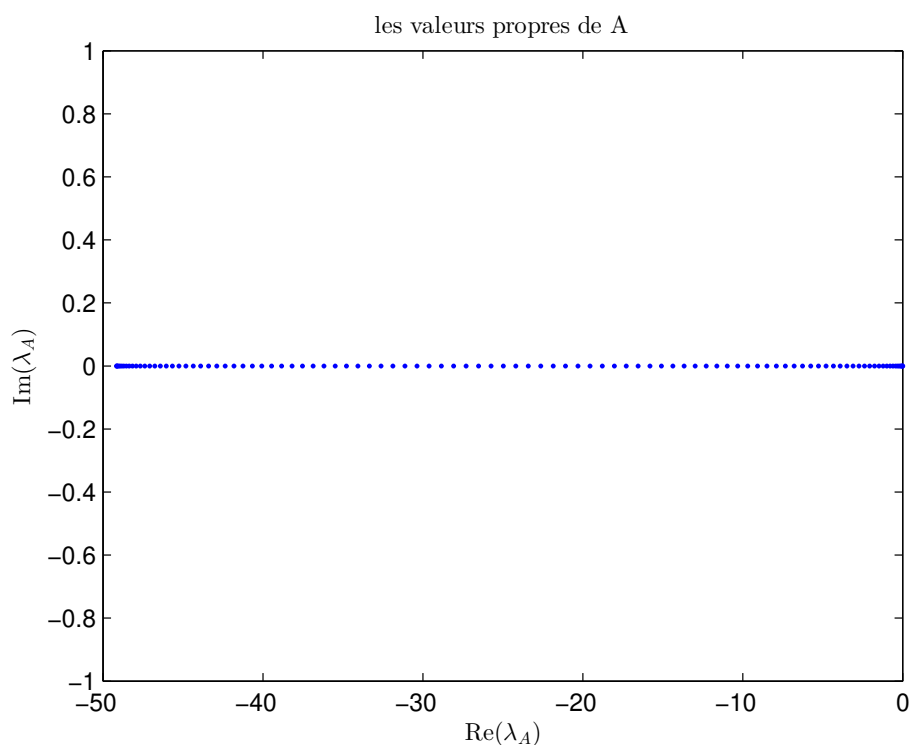


Fig. 2.2: Représentation graphique des valeurs propres de la matrice A.

### 2.1.4 Erreur de discrétisation

L'erreur dans la méthode de SPH se scinde en deux. La première résulte de l'étape Smoothing c'est-à-dire l'interpolation intégrale, lorsque on substitue la fonction de Dirac par un noyau régularisant, elle s'appelle l'erreur d'interpolation intégrale où (Smoothing), et la deuxième est due à l'étape de discrétisation c'est-à-dire lors du passage du cas continu (intégrale) au cas discret. Alors l'erreur totale = l'erreur Smoothing + l'erreur de discrétisation.

Nous considérons toujours le cas où les points sont uniformément distribués. Supposons, pour le moment, que la fonction noyau  $w$  est infiniment différentiable à l'intérieur de son support compact de rayon  $2h$  [166]. On définit la régularité de la frontière d'une fonction noyau comme le plus grand entier  $\beta$  tel que la  $\beta$ -ième dérivée et toutes les dérivées inférieures sont nulles sur la frontière du support compact [15].

En suivant les mêmes démarches fait dans [15], on trouve que l'erreur commise en remplaçant la forme intégrale de l'opérateur laplacien SPH (1.29) par la somme discrète (2.24) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 2 \int \frac{u(x_i) - u(x_j)}{x_i - x_j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} dx - 2 \sum_j \frac{u(x_i) - u(x_j)}{x_i - x_j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} V_j &= \left( \frac{\Delta x}{h} \right)^{\beta+2} \frac{B_{\beta+2}}{(\beta+2)!} (1 - 2^{-\beta-1}) \\
 &\times \left\{ \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_i \left[ 4\hat{w}_{s=2}^{(\beta+2)} + 2(\beta+1)\hat{w}_{s=2}^{(\beta+1)} + O(h^2) \right] \right\} + O \left( \left[ \frac{\Delta x}{h} \right]^{\beta+4} \right)
 \end{aligned} \quad (2.42)$$

où  $\hat{w}$  la forme adimensionnée du noyau  $w$  définie par  $\hat{w}(s) = hw(x - x_i, h)$  où  $s := (x - x_i)/h$ , les exposants enfermés dans les parenthèses représentent les dérivées à l'ordre indiqué.  $B_{\beta+2}$  représente le  $(\beta+2)$ -ième nombre de Bernoulli.

L'expression (2.42) est obtenue en supposant que le nombre  $\beta$  est paire. si  $\beta$  est impaire il suffit de remplacer  $\beta$  dans (2.24) par  $\beta - 1$ .

De plus, nous avons vu, dans le [chapter 1](#), que l'erreur commise dans l'étape smoothing est d'ordre deux en  $h$ , Alors l'erreur totale commise, en utilisant la formulation (2.24) pour approximer l'opérateur Laplacien, au point  $i$ , est donnée par :

$$E_t = \Delta u(x_i) - 2 \sum_j \frac{u(x_i) - u(x_j)}{x_i - x_j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} V_j \cong Ah^2 + B \left( \frac{\Delta x}{h} \right)^{\beta+2}, \quad (2.43)$$

où  $A, B$  sont des constantes positives qui dépendent de  $u$ , le noyau  $w$  et le nombre  $\beta$ . Ces constantes sont donc indépendantes de  $\Delta x$  et de longueur de lissage  $h$ . Il est claire, d'après (2.43), que l'erreur  $E_t$  est de seconde ordre en  $h$  et d'ordre  $(\beta+2)$  en  $\frac{\Delta x}{h}$ .

Dans le cas de la fonction spline cubique, on a  $\beta = 2$ . La relation (2.43) devient alors

$$E_t = Ah^2 + B \left( \frac{\Delta x}{h} \right)^4. \quad (2.44)$$

Le premier terme de droite correspond à l'erreur de lissage, tandis que le second terme de droite correspond à l'erreur de discrétisation.

On constate bien que l'approximation SPH (2.24) converge si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$h \rightarrow 0, \quad (2.45)$$

et

$$\frac{h}{\Delta x} \rightarrow +\infty. \quad (2.46)$$

D'un point de vu numérique. Il est bien sûr impossible de respecter la dernière condition, parce que quand  $\frac{h}{\Delta x}$  diminue le nombre de voisin dans le support va augmenter et par conséquence

le coût du calcul. Il est conseillé, dans la littérature [43,26], de prendre le ratio  $\frac{h}{\Delta x}$  dans la gamme  $1 \leq \frac{h}{\Delta x} \leq 2$  afin d'obtenir le meilleur compromis entre précision et coût de calcul.

Evaluons maintenant l'erreur de troncature associée au schéma de Brookshaw (2.24), dans le cas où les points sont aléatoirement distribués. En effectuant le développement de Taylor de la fonction  $u(x_i)$  autour de  $x_i$ , et après quelques manipulation mathématiques, nous trouvons que l'erreur de troncature est donnée par :

$$2 \sum_j \frac{u(x_i) - u(x_j)}{x_i - x_j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} V_j - \Delta u(x_i) = 2 \nabla u_i \sum_j \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} V_j - \Delta u(x_i) \left( 1 + \sum_j (x_i - x_j) \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} \right) V_j + \frac{1}{3} \nabla^3 u_i \sum_j (x_i - x_j)^2 \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} V_j - \frac{1}{12} \nabla^4 u_i \sum_j (x_i - x_j)^3 \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} V_j + \dots \quad (2.47)$$

Dans le cas où les points sont aléatoirement distribués, nous avons les estimations suivantes [5]:

$$\sum_j \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} V_j \approx O \left( \frac{\tilde{d}_i}{h^2} \left( \frac{\Delta x}{h} \right)^{\beta-1} \right). \quad (2.48)$$

$$1 + \sum_j (x_i - x_j) \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} V_j \approx O \left( \left( \frac{\Delta x}{h} \right)^{\beta+1} \right) + O \left( \frac{\tilde{d}_i}{h^2} \left( \frac{\Delta x}{h} \right)^{\beta+1} \right). \quad (2.49)$$

$$\sum_j (x_i - x_j)^2 \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} V_j \approx O \left( \tilde{d}_i \left( \frac{\Delta x}{h} \right)^{\beta+1} \right). \quad (2.50)$$

$$\sum_j (x_i - x_j)^3 \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} V_j \approx O(h^2) + O \left( \tilde{d}_i \Delta x \left[ \frac{\Delta x}{h} \right]^{\beta+1} \right). \quad (2.51)$$

$\tilde{d}_i$  : désigne la mesure de deviation de points voisins de  $i, 0 \leq \tilde{d} \leq \Delta x$ .

En remplaçant les expressions ci-dessus dans l'égalité (2.47), on trouve que l'erreur de troncature associée au schéma numérique (2.24), dans le cas où les points sont aléatoirement distribués, est donnée par :

$$E_t = 2 \sum_j \frac{u(x_i) - u(x_j)}{x_i - x_j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} V_j - \Delta u(x_i) \approx |\nabla u|_i \times O \left( \frac{\tilde{d}_i}{h^2} \left( \frac{\Delta x}{h} \right)^{\beta-1} \right). \quad (2.52)$$

Il est clair d'après l'expression (2.52) que l'erreur de troncature est d'ordre  $(\beta - 1)$  en  $\frac{\Delta x}{h}$ , du premier ordre pour le paramètre  $\tilde{d}$ , et d'ordre  $1/h^2$  pour la longueur de lissage. Nous pouvons remarquer que l'erreur croît de manière significative lorsque  $h$  tend vers zéro et en maintenant les paramètres  $\tilde{d}$  et  $\frac{\Delta x}{h}$  constants. Cela signifie que le schéma numérique n'est pas consistant même d'ordre un.

Dans la section suivante nous allons aborder les techniques couramment utilisées, dans la méthode SPH pour le traitement de conditions aux limites et la correction d'anomalie causée par le manque des points dans le support de noyau près de la frontière.

### 2.1.5 Conditions aux limites

Le traitement de conditions aux limites dans la méthode SPH demande une attention spéciale, la méthode SPH, comme beaucoup de méthodes sans maillage, ne dispose pas du caractère interpolant, ce qui complique beaucoup l'imposition de conditions aux bords surtout les conditions de type Dirichlet. Lorsqu'on est à proximité d'une limite du domaine du problème, le support de la fonction de noyau nécessaire à l'interpolation de Laplacien (2.24) se retrouve incomplètement rempli. Plusieurs techniques sont proposées pour remédier à ce problème [22,28,55,68,69]. Dans ce travail nous optons pour la méthode de particule fantôme [28], cette méthode consiste à remplacer la partie manquante du support par un rangé des points fictives. Les nombres et la représentation spatiale de ces points (fantômes) sont déterminés de manière à respecter la longueur du support du noyau. la détermination des valeurs associées à ces points fictives est faite par le biais d'extrapolation linéaire.

$$\begin{cases} x_f = 2x_b - x_r, \\ u(x_f) = 2u(x_b) - u(x_r). \end{cases} \quad (2.53)$$

Où  $x_f$  : représente les points fantômes,  $x_r$  les points real et  $x_b$  les points de la frontière du domaine du problème.

### 2.1.6 Schéma de Fatihi pour l'équation de la chaleur

Nous pouvons remarquer que l'apparition de la première dérivée dans l'erreur de troncature (2.47), nuit beaucoup la solution calculée par le schéma (2.24), surtout au niveau de la frontière. Pour surmonter ce problème, Fatihi et Minzari [5] ont proposé de modifier le schéma de Brookshaw (2.24) afin d'éliminer le terme  $2\nabla u_i \sum_j \nabla w_{ij}$ , le nouveau schéma, dans le cas de dimension un, est donné par :

$$\Delta u(x_i) = 2\hat{B}_i \sum_j \left( \frac{u(x_i) - u(x_j)}{x_i - x_j} - \langle \nabla u \rangle_i \right) \nabla w_{ij} V_j, \quad (2.54)$$

où  $\langle \nabla u \rangle_i$  : désigne l'approximation SPH du gradient donné par l'expression (2.23) et  $\hat{B}_i$  représente la tenseur de normalisation donnée par

$$\hat{B}_i = \left( \beta_i^{-1} + \left( \sum_j \nabla w_{ij} V_j \right) \beta_i \left( \sum_j (x_i - x_j)^2 \nabla w_{ij} V_j \right) \right)^{-1}. \quad (2.55)$$

Dans le cas de distribution régulière de points et lorsque nous sommes très loin de la frontière, le terme  $\nabla u_i \sum_j \nabla w_{ij}$  est nul par symétrie, et par conséquence le schéma de Fatih (2.54) se réduit au schéma de Brookshaw (2.24).

Passons maintenant à la discrétisation spatiale de l'équation de la chaleur avec le schéma de Fatihi (2.54). En suivant les mêmes démarches faites dans la section 2.1.1, nous obtenons le schéma semi-discret, en  $x_i$ , suivant :

$$\frac{du(x_i)}{dt} = 2\hat{B}_i \sum_{j \in N(x_i)} \left( \frac{[u(x_i) - u(x_j)]}{x_i - x_j} - \beta_i \sum_{j \in N(x_i)} [u(x_j) - u(x_i)] w'_{ij} \Delta x \right) w'_{ij} \Delta x. \quad (2.56)$$

Appliquer à chaque point  $i$  de domaine du calcul  $[a, b]$ , on obtient le système matriciel suivant :

$$\frac{dU}{dt} = A'U \quad (2.57)$$

où  $A'$  est une matrice de dimensions  $N$  et  $U = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N))^T$ .

Les coefficients de matrices  $A'$ , sont donnés par :

$$\begin{cases} A'_{ij} = -2\hat{B}_i \left( \frac{1}{x_i - x_j} - \beta_i \sum_j w'_{ij} \Delta x \right) w'_{ij} \Delta x & \text{si } i \neq j, \text{ et } j \in N(x_i), \\ A'_{ii} = -\sum_{k \neq i} A_{ik} & \text{si } i = j, \\ A'_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \text{ et } j \notin N(x_i). \end{cases} \quad (2.58)$$

Si  $x_i$  se trouve à l'intérieur de domaine de calcul  $[a, b]$ , on aura

$$\sum_j w'_{ij} \Delta x \rightarrow 0 \quad (2.59)$$

$$\hat{B}_i \rightarrow 1 \quad (2.60)$$



et schéma (2.54) réduit au schéma (2.26)

Il est clair d'après (2.58) qu'à chaque ligne  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , le nombre de coefficients non nuls  $a_{ij}$   $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  dépend du nombre de voisins du point  $i$  qui est très petit devant le nombre total de points d'interpolation  $N$ , ce qui implique que la matrice  $A'$  a une structure creuse comme illustré par la figure suivante :

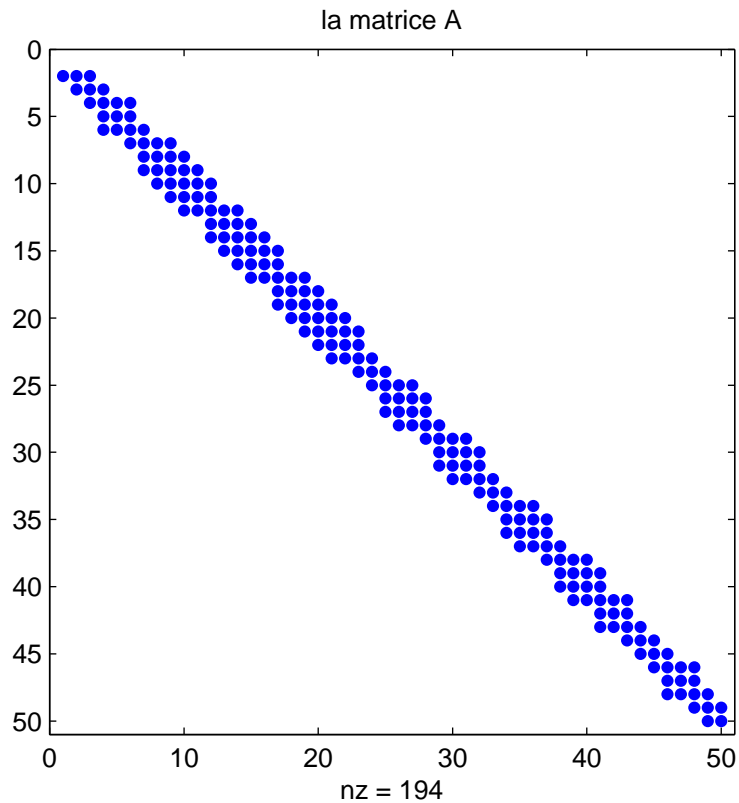


Fig. 2.3: Visualisation de la structure creuse de la matrice  $A'$  pour  $N = 50$ .  $nz$  : désigne le nombre d'éléments non nuls de la matrice  $A'$ .

L'erreur de discrétisation associée à ce nouveau schéma, dans le cas de distribution uniforme des points, est donnée par [5]:

$$E_t = |\nabla^4 u|_i \times \left( O(h^2) + O\left(h^2 \left[\frac{\Delta x}{h}\right]^{\beta+1}\right) \right). \quad (2.61)$$

Dans le cas où les points sont aléatoirement distribués, l'erreur de discrétisation ci-dessus devient [5]

$$E_t = |\nabla^3 u|_i \left[ O \left( \check{d}_i \left[ \frac{\Delta x}{h} \right]^{\beta+1} \right) \right] \quad (2.62)$$

$\check{d}_i$  : désigne la mesure de déviation de points voisins de  $i, 0 \leq \check{d}_i \leq \Delta x$ .

L'algorithme SPH pour l'évaluation de l'option européenne peut être présenté comme suit :

---

**Algorithm 1** SPH Method for for Computing American option

---

**Initialization:**

- variables financières ( $K, T, \sigma, r, q$ )
- discrétisation l'intervalle  $[a,b]$  par  $N$  points uniformément repartis :
- discrétisation l'intervalle de temps avec un pas  $\Delta t = \sigma^2 T / 2M$
- $\Delta x \leftarrow (b - a) / N$  : L'espacement inter points
- $h \leftarrow 2\Delta x$  :Longueur de lissage

Condition initiale

$$U^0 = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N))^T$$

**Construction de matrice A**

On entre les coefficients  $A_{ij}$  selon la formule (2.58)

Time loop:

**for**  $k = 1, 2, \dots, M$  **do**

$$\text{calculate de } L = (I - \Delta t \theta L)^{-1} (I + \Delta t (1 - \theta) L)$$

résolution du système linéaire

$$U^{k+1} \leftarrow LU^k$$

$$\text{Mise à jour : } U^{k+1}(N) \leftarrow u(x_N)$$

$$U^{k+1}(1) \leftarrow u(x_1)$$

**end for**

**final Result:**  $U^M$

---

Il est important de mentionner que dans le cas d'utilisation du schéma fatihi (2.52) nous n'avons pas besoin d'introduire des points fantômes pour imposer la condition aux limites, il suffit de mettre à jour, à chaque pas du temps, la dernière valeur du vecteur  $U(N) = u(b, t)$ .

## 2.2 SPH pour l'équation de Black et Scholes

Il est important de noter que la transformation adoptée dans les sections précédentes n'est valable que dans le cas où les coefficients  $\sigma$  et  $r$  sont constants ou au moins sont déterministes. De plus la transformation logarithmique  $x = \ln S$  pose quelques difficultés. premièrement, l'utilisation d'une discrétisation uniforme, en variable  $x$ , fait qu'on obtienne une discrétisation très fine pour  $S$  proche de zéro et de moins en moins fine pour les valeurs « grandes » de  $S$ , ce qui affecte

la précision surtout autour du prix d'exercice de l'option puisque c'est dans cette région que la fonction  $V(S,t)$  présente la plus grande courbure face à  $S$ . Deuxièmement, cette transformation rend le domaine d'étude en "espace" (variable  $x \in \mathbb{R}$ ) non borné alors qu'avant la variable  $S$  est définie sur l'intervalle  $[0, +\infty]$  avec une condition au point  $S = 0$ , Cela signifie que nous devons introduire deux bornes artificielles, alors que pour l'équation originale (2.1) il suffirait de spécifier une seule borne artificielle  $S = S_{max}$ . Il est donc judicieux d'essayer de résoudre l'équation de Black et Scholes en variables originales  $(S,t)$ .

Dans cette section nous allons résoudre l'équation de Black et Scholes (2.1), avec les coefficients  $\sigma$ ,  $r$  constants et aussi dépend du temps. Nous allons également considérer le cas où l'actif sous-jacent  $S$  paye un dividende continu.

Il convient de souligner [48],[16] que la formule de Black et scholes reste valable, dans le cas où les paramètres  $r$  et  $\sigma$  dépendant du temps, à condition de remplacer  $\sigma^2$  et  $r$  par :

$$\sigma^2 = \Sigma^2(T,t) = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad r = R(T,t) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(\tau) d\tau. \quad (2.63)$$

Cependant, lorsque  $\sigma$ ,  $r$  ou  $q$  dépend de prix de l'actif  $S$ , l'équation de Black et Scholes (2.1), n'admet pas en général de solution analytique exacte. Il faut alors avoir recours aux méthodes numériques

On considère le cas d'une option de call européenne, de prix d'exercice  $K$  et d'échéance  $T$ , écrite sur l'actif  $S$  qui verse un dividende continu  $q$ . Pour des raisons numériques, on se restreint à un intervalle d'espace finie  $\Omega = [0, S_{max}]$  inclut dans  $\mathbb{R}_+$ . Alors le prix d'un call européen  $u(S,t)$  doit vérifier le problème suivant, dans lequel on a fait le changement de variable  $\tau = T - t$  pour se ramener à une condition initiale

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2(t,S) S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + r(t,S) S \frac{\partial u}{\partial S} - r(t,S) u \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ u(0,t) = 0 \quad \forall \tau \in [0, T] \\ u(S_{max},t) = S_{max} - K e^{-rt} \quad \forall \tau \in [0, T] \\ u(S,0) = \max(S - K, 0) \end{array} \right. \quad (2.64)$$

où  $\sigma^2(t,S)$  et  $r(t,S)$  désignent la volatilité et le taux d'intérêt, qui sont en fonction du temps et prix de l'actif  $S$ .

### 2.2.1 Discrétisation spatiale de l'équation de Black-Scholes

Comme réalisé dans la section 2.1.1, on représente l'intervalle d'espace  $\Omega$  par  $N$  points et on suppose toujours que la distance caractéristique entre deux points d'interpolation  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ , est constante pour tout  $i = 1, \dots, N$ , où  $x_i$  désigne la position de la  $i$ -ème point. En remplaçant les dérivées spatiales dans l'équation de Black et Scholes (2.1) par leur approximation SPH (1.51), (2.23), et (2.24), on aboutit au schéma semi-discret, en point  $x_i$ , suivant :

$$\frac{du(x_i)}{dt} = \sigma^2 x_i^2 \sum_{j \in N(x_i)} \frac{u(x_i) - u(x_j)}{x_i - x_j} w'_{ij} \Delta x + (r - q) \beta_i x_i \sum_{j \in N(x_i)} (u(x_j) - u(x_i)) w'_{ij} \Delta x - r \alpha_i \sum_{j \in N(x_i)} u(x_j) w_{ij} \Delta x \quad (2.65)$$

où  $w'_{ij} = \frac{\partial w}{\partial x_i}(x_i - x_j)$  et  $N(x_i) = \{x_j \in \Omega \mid |x_i - x_j| \leq 2h\}$ .

En appliquant la même procédure à chaque point  $i$  de domaine du problème  $\Omega$ , on obtient le système matriciel suivant

$$\frac{dU}{dt} = \sigma^2 AU + (r - q)BU - rCU \quad (2.66)$$

où  $A, B$  et  $C$  sont des matrices de dimensions  $N \times N$  et  $U = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N))^T$  représente le vecteur du prix.

Les coefficients de matrices  $A, B$  et  $C$  sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ij} = -x_i^2 \frac{w'_{ij}}{x_i - x_j} \Delta x \quad \text{si } i \neq j \in N(x_i), \\ A_{ii} = -\sum_{k \neq i} A_{ik}, \\ B_{ij} = \beta_i x_i w'_{ij} \Delta x \quad \text{si } i \neq j \in N(x_i), \\ B_{ii} = -\sum_{k \neq i} B_{ik}, \\ C_{ij} = \alpha_i w_{ij} \Delta x \quad j \in N(x_i). \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Notons qu'à  $i$ -ème ligne, les coefficients  $A_{ij}, B_{ij}$  et  $C_{ij}$  à la  $j$ -ème colonne ne sont pas nuls si et seulement si la distance entre les points  $x_i$  et  $x_j$  est inférieure à la longueur de lissage de  $2h$ , ce qui conduit à des matrices  $A, B$  et  $C$  creuses. Voir les figures 2.4.

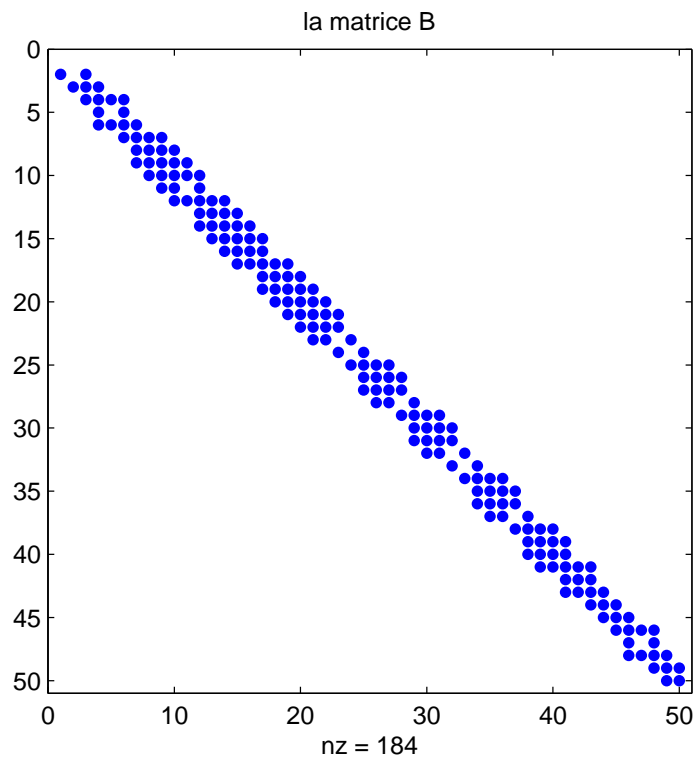
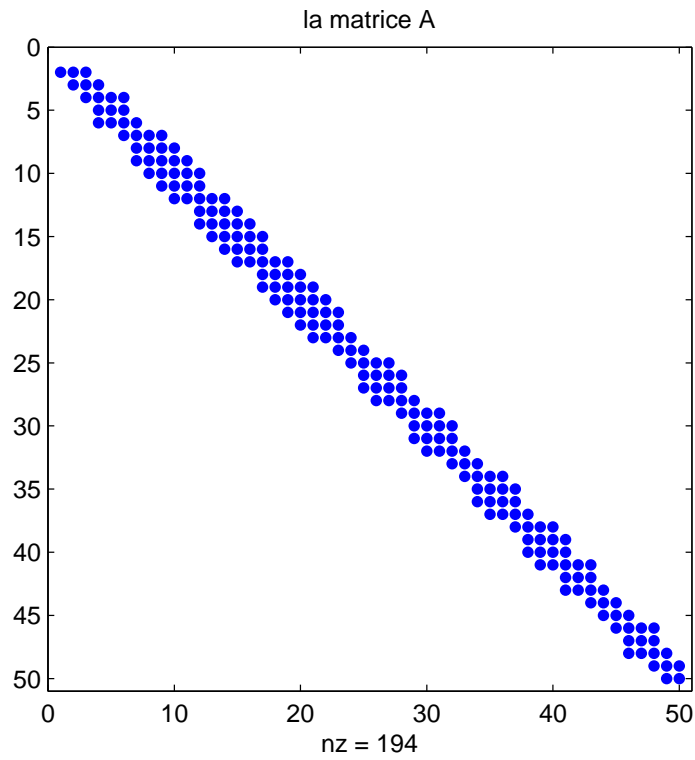


Fig. 2.4: Visualisation de la structure creuse de la matrice A et B pour  $N = 50$ .

## 2.2.2 Discrétisation temporelle

Un schéma temporel doit être ajouté à la discrétisation spatiale, via la méthode SPH, pour obtenir une discrétisation complète de l'équation de Black-Scholes. Pour ce faire, on subdivise l'intervalle de temps  $[0, T]$  en  $M$  sous-intervalles de même longueur  $\Delta t = T/M$  de telle sorte que  $\forall 1 \leq k \leq M \ t_k = k\Delta t$ .

Pour  $\theta \in [0, 1]$ , on définit le  $\theta$ -schéma par :

$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} = \theta LU^{k+1} + (1 - \theta)LU^k \quad (2.68)$$

avec  $L = \sigma A + (r - q)B - rC$ .

En réorganisant l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$(I - \Delta t \theta L)U^{k+1} = (I + \Delta t(1 - \theta)L)U^k \quad (2.69)$$

avec  $U^k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_N^k)^T$ ,  $L$  : la matrice résultante de la discrétisation spatiale via SPH et  $I$  est la matrice identité de dimension  $N \times N$ .

Pour des valeurs particulières de  $\theta$ , on retrouve des schémas usuels. Par exemple, si  $\theta = 0$ , le schéma (2.69) coïncide avec le schéma d'Euler Explicite et le vecteur de prix  $U^{k+1}$  s'obtient de manière explicite, dans les autres cas, il est nécessaire de résoudre un système linéaire à chaque pas de temps.

Dans le cas où les paramètres  $r, \sigma$  dépendent du temps, le schéma (2.69) s'écrit :

$$(I - \Delta t \theta L^{k+1})U^{k+1} = (I + \Delta t(1 - \theta)L^k), \quad (2.70)$$

avec  $L^k = \sigma^k A + (r^k - q)B - r^k C$

Dans ce qui suit nous allons étudier la stabilité du schéma (2.69).

## 2.2.3 Analyse de stabilité

Nous procédons maintenant à l'analyse de stabilité du schéma (2.69). Pour cela, nous définissons l'erreur à l'instant discrète  $t_k$  par

$$e^k = U_{exact}^k - U_{Num}^k, \quad (2.71)$$

où  $U_{exact}$  est la solution exacte et  $U_{Num}$  la solution numérique obtenue par la méthode SPH

En injectant l'expression (2.71) dans le schéma (2.69), on obtient l'équation d'erreur à l'instant  $t_{k+1}$ :

$$e^{k+1} = Re^k \quad (2.72)$$

où  $R$  est la matrice d'amplification donnée par

$$R = (I - \Delta t \theta L)^{-1} (I + \Delta t (1 - \theta) L). \quad (2.73)$$

Le schéma numérique est stable si  $\rho(R) \leq 1$ , où  $\rho(R)$  est le rayon spectral de la matrice  $R$ . En substituant  $R$  dans l'équation (2.72) on obtient

$$e^{k+1} = (I - \Delta t \theta L)^{-1} (I + \Delta t (1 - \theta) L) e^k. \quad (2.74)$$

Il ressort clairement de l'équation (2.74) que le schéma numérique est stable si toutes les valeurs propres de la matrice  $R = (I - \Delta t \theta L)^{-1} (I + \Delta t (1 - \theta) L)$  sont inférieures à l'unité, ce qui signifie que

$$\left| \frac{1 + \Delta t (1 - \theta) \lambda_L}{1 - \Delta t \theta \lambda_L} \right| \leq 1 \quad (2.75)$$

où  $\lambda_L$  représentent les valeurs propres de la matrice  $L$ .

Dans le cas du schéma d'Euler implicite ie  $\theta = 1$ , la condition de stabilité (2.75) devient

$$\left| \frac{1}{1 - \Delta t \lambda_L} \right| \leq 1. \quad (2.76)$$

Lorsque  $\theta = 0.5$ , l'inégalité (2.75) devient

$$\left| \frac{1 + \frac{1}{2} \Delta t \lambda_L}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \lambda_L} \right| \leq 1. \quad (2.77)$$

Il est clair que les inégalités données dans les équations (2.76) et (2.77) sont toujours satisfaites pour  $Re(\lambda) \leq 0$ .

Puisqu'il n'est pas possible de trouver une expression explicite de la valeur propre de matrice  $L$ , Nous allons les calculer numériquement et vérifier si la partie réel de  $\lambda_L$  est bien négative ou nulle, le résultat est présenté dans les figures ci-dessous.

D'après les figures 2.5-2.7 nous constatons bien que la partie réelle de toutes les valeurs propres de  $L$  sont négatives  $Re(\lambda) \leq 0$ , ce qui implique que les relations (2.76) et (2.77) sont toujours vérifiées et par conséquent les schémas d'Euler implicite et Crank-Nicholson sont inconditionnellement stables.

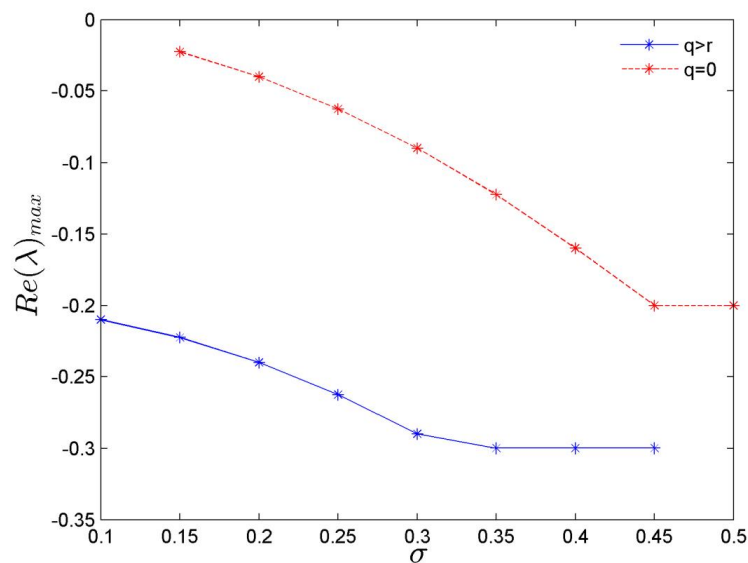


Fig. 2.5: : Représentation graphique de la valeur propre réelle maximale  $Re(\lambda)_{max}$  en fonction de la volatilité  $\sigma$  pour  $N = 100$ ,  $\Omega = [0, 10]$ ,  $r = 0.2$ ,  $q = 0$  (ligne continue),  $r = 0.3$ ,  $q = 0.2$  (ligne pointillée).

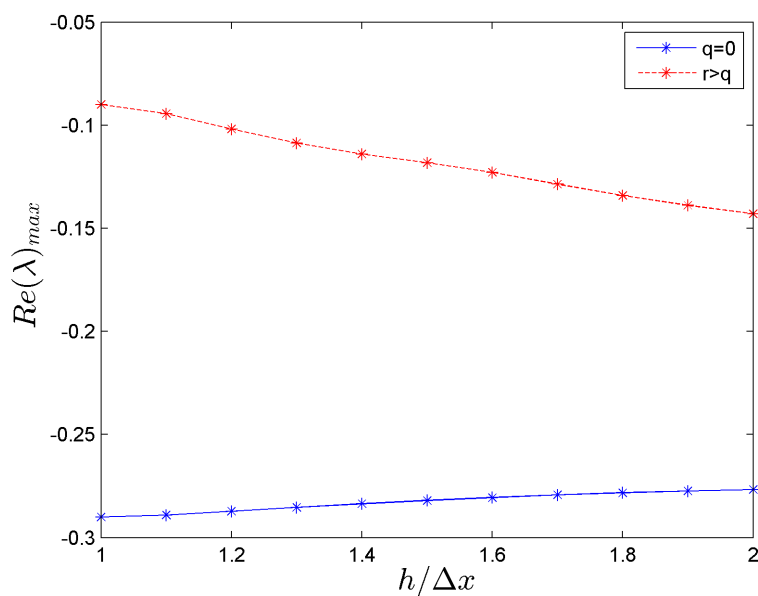


Fig. 2.6: Représentation graphique de la valeur propre réelle maximale  $Re(\lambda)_{max}$  en fonction du rapport  $h/\Delta x$ ,  $r = 0.2$ ,  $q = 0$  (ligne continue),  $r = 0.3$ ,  $q = 0.2$  (ligne pointillée).



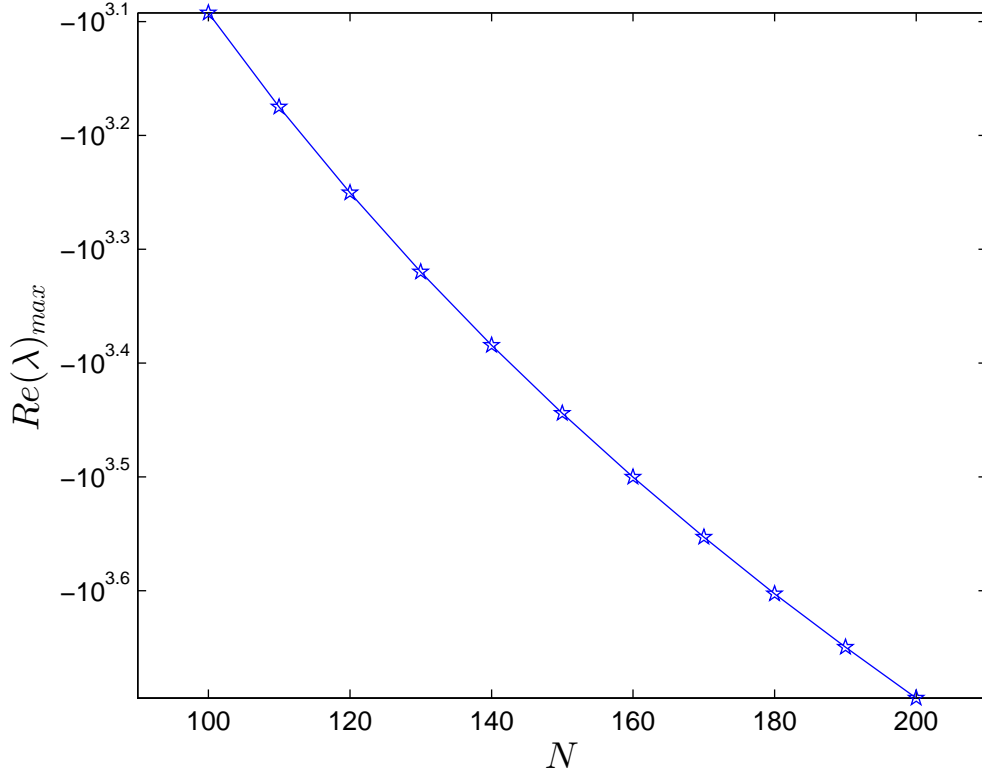


Fig. 2.7: Représentation graphique de la valeur propre réelle maximale  $Re(\lambda)_{max}$  en fonction du nombre de points d'interpolation  $N$ , avec les mêmes paramètres financiers ci-dessus.

#### 2.2.4 Erreur de discrétisation pour BS

On se place toujours dans le cas où les points sont uniformément repartis sur le domaine de calcul  $\Omega$ .

Supposons que la fonction noyau  $w$  est infiniment différentiable à l'intérieur de son support compact de rayon  $2h$  [166], et on désigne par  $\beta$  la régularité de la frontière de ce noyau. Dans telle situation, R.Fatih et M.T.Manzari [5] ont montré que l'erreur totale, de l'approximation discrète SPH (2.22), au point  $i$ , vérifie :

$$\nabla u(x_i) - \beta_i \sum_j^N (u(x_j) - u(x_i)) \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} v_j \approx O(h^2) + |\nabla^3 u|_i \left[ O(h^2) + O\left(h^2 \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^{\beta+2}\right) \right]. \quad (2.78)$$

Le premier terme du côté droit de l'expression (2.78) représente l'erreur smoothing tandis que le deuxième terme du côté droit de (2.78) représente l'erreur de discrétisation.

Nous avons vu dans le [chapter 1](#) que l'approximation d'une fonction  $u$  par la forme intégrale (1.2) génère une erreur d'ordre deux en  $h$ , et d'après [51] l'erreur dû au passage du cas continu (1.2) au discret (1.31), dans le cas où les point sont régulièrement distribués, est également d'ordre deux en  $h$ , alors l'erreur totale associée à l'approximation discrète SPH (1.31) est donnée par :

$$u(x_i) - \alpha_i \sum_j u(x_j) w(x_i - x_j) V_j \approx O(h^2). \quad (2.79)$$

En combinat les erreurs dans (2.78) et (2.79) avec celle introduite par l'approximation (2.43), nous trouvons que l'erreur totale issue de la discrétisation spatiale de l'équation de Black et Scholes (2.1) par la méthode SPH est donnée par :

$$E_t = Ah^2 + B \left( \frac{\Delta x}{h} \right)^{\beta+1}, \quad (2.80)$$

où  $A, B$  sont des constantes positive qui dépendent de  $u$  et la fonction du noyau  $w$ . Le premier terme du côté droit de l'expression (2.80) représente l'erreur smoothing tandis que le second terme du côté droit de (2.80) représente l'erreur de discrétisation.

D'après l'expression ci-dessus, nous pouvons dire que la méthode SPH fournit une précision d'ordre deux en espace. Mais lorsque on est à proximité d'une limite du domaine du problème, la précision de la solution SPH est dégradée et dans ce cas nous allons utiliser la même technique mentionnée dans la section 2.1.5 pour corriger l'erreur provient de l'imposition de condition aux limites.

## 2.3 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques obtenus en appliquant la méthode SPH, décrite dans les sections précédentes, aux problèmes (2.22) et (2.64).

Pour évaluer la performance de la méthode SPH, de nombreuses comparaisons entre la solution analytique et numérique ont été effectuées pour différents paramètres financiers tels que, le prix d'exercice  $K$ , et la volatilité  $\sigma$ . De plus nous avons également comparé notre résultat avec ceux obtenus par les méthodes numériques avec maillage comme la méthode de Différences finis.

Les figures 2.8, 2.9 et 2.10 représentent le prix d'une option de Call européenne, obtenue par la méthode SPH, et la formule analytique de Black-Scholes, avec les paramètres financiers énumérés dans le tableau ci-dessous.

Table 2.1: Valeurs des paramètres financiers

| Paramètre              | Figure 2.8      | Figure 2.9      | Figure 2.10     |
|------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Le prix d'exercice $K$ | 10              | 50              | 100             |
| L'échéance $T$         | 1/2 (6 mois)    | 1/2 (6 mois)    | 1/2 (6 mois)    |
| Le taux d'intérêt $r$  | 0.2             | 0.2             | 0.2             |
| La volatilité $\sigma$ | 0.2,0.3,0.4,0.5 | 0.2,0.3,0.4,0.5 | 0.2,0.3,0.4,0.5 |
| $S_{max}$              | 40              | 200             | 400             |

La figure 2.11 illustre une comparaison des résultats obtenus par la méthode SPH et la solution analytique, en calculant le prix d'un call Européen correspondant à un prix d'exercice de  $K = 10$ , un taux du marché de  $r = 0.2$ , une échéance à 6 mois et une volatilité de  $\sigma = 0.3$ .

La figure 2.12 montre la même comparaison pour les mêmes paramètres financiers mais cette fois-ci entre la méthode SPH et la méthode de Différences finis.

D'après les figures 2.11 et 2.12, nous pouvons constater graphiquement que les résultats fournis par la méthode SPH sont en bonne adéquation avec ceux de la formule analytique de Black Scholes et la méthode Différence finis. Ce qui suggère que notre méthode précise et fonctionne bien pour examiner la performance de la méthodes SPH de façon plus approfondie. Nous allons comparer les deux méthodes, SPH et les différences finis en terme de convergence et du coût de calcul (Le coût de calcul est estimé par le temps de calcul CPU nécessaire à la résolution du modèle en fonction du nombre de points discrétisés l'espace  $N$  et les pas du temps  $M$ ).

Afin d'étudier la précision de notre méthode SPH, nous comparons les solutions obtenues à l'aide de SPH avec la solution exacte au sens de la moyenne quadratique (Root Mean Square (RSM)) et de la norme maximale discrète:

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (U_{exact} - U_{SPH})^2},$$

$$E_{\infty} = \max_{i=1,2,\dots,N} |U_{exact} - U_{SPH}|,$$

où  $U_{SPH}$  désigne la solution numérique obtenue par la méthode SPH et  $U_{exact}$  : la solution analytique de l'équation de Black et Scholes au point  $x_i$ .

Pour l'application numérique nous choisissons les paramètres comme suit

$N = 200$  : les nombres de points d'interpolation.

$\Delta x = (b - a)/N$  : la distance caractéristique entre deux point d'interpolation.

$h = 2\Delta x$  : la longueur de lissage (le rayon du support compact du noyau  $w$ ).

$M = 250$  : les nombres du pas de temps.

Les figures 2.15a et 2.15b montrent la comparaison entre l'erreur commise par les deux méthodes SPH et les Différences finies, en norme infinie et RMS respectivement. Nous pouvons clairement voir que la précision de notre méthode SPH est d'ordre légèrement supérieur à celle de la méthode des Différences finies.

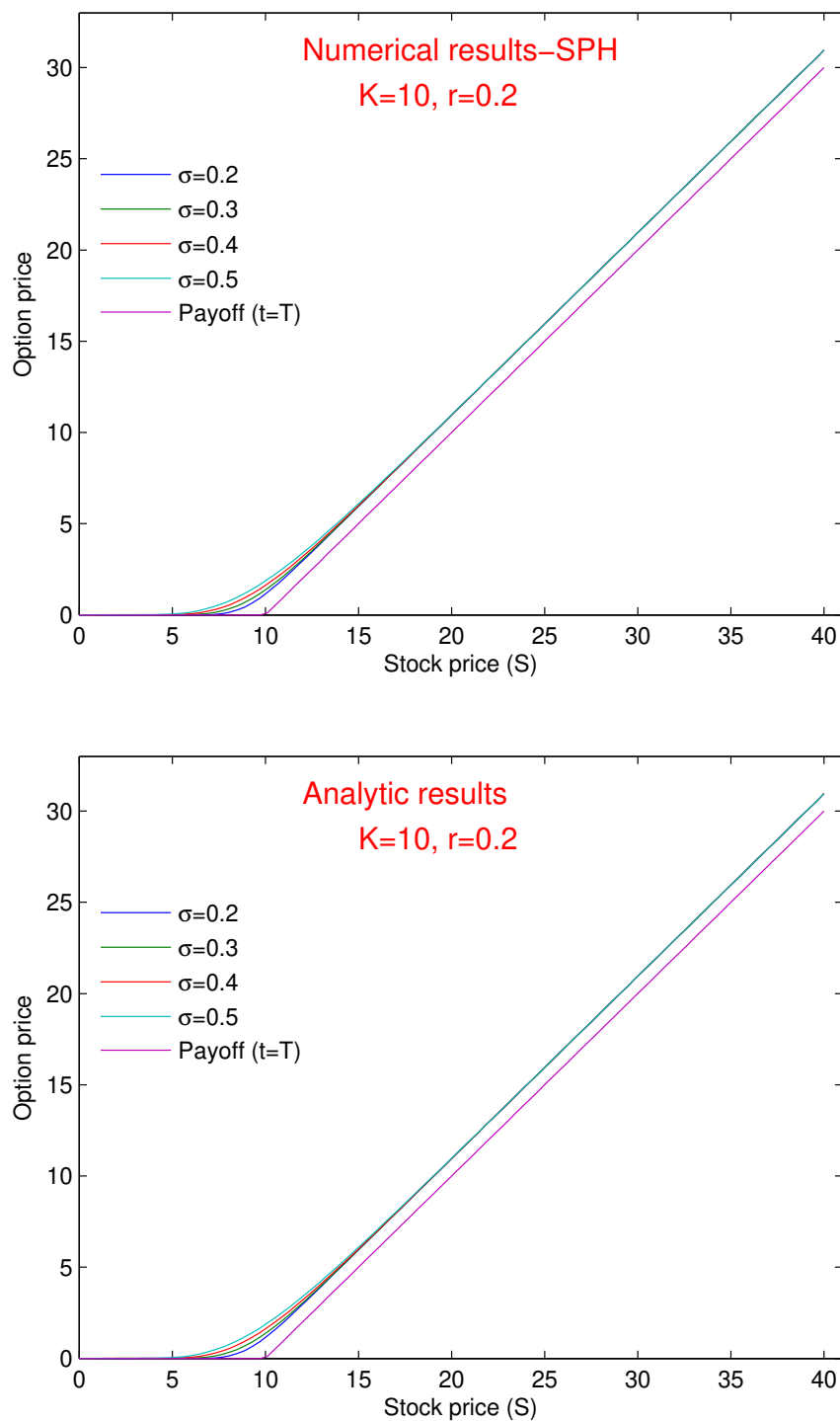


Fig. 2.8: Prix de Call européen obtenu par SPH (En haut) et la formule fermée (En bas) pour différente valeur de volatilité  $\sigma$  et avec  $K = 10$  et  $r = 0.2$ .

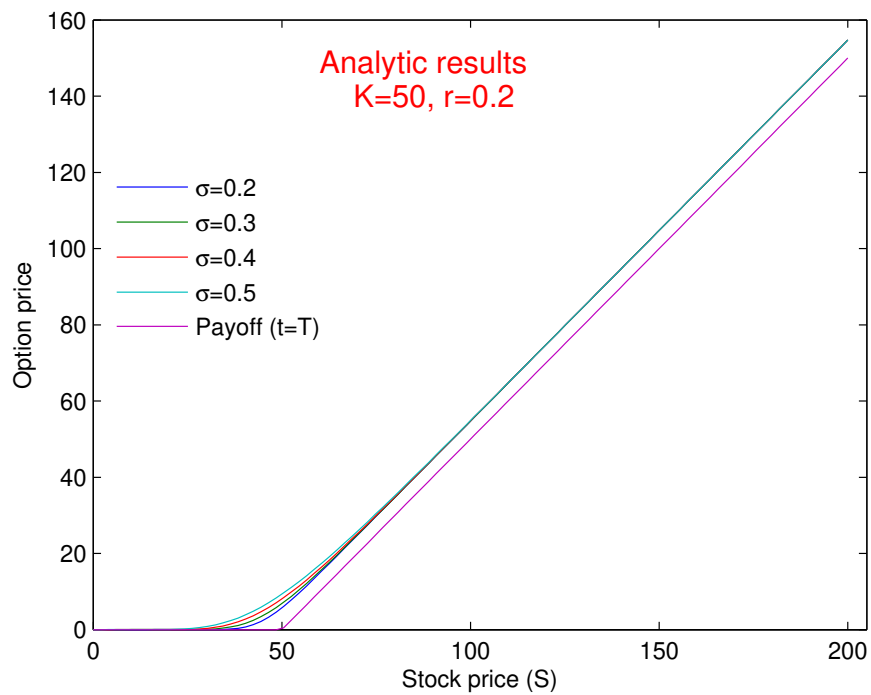
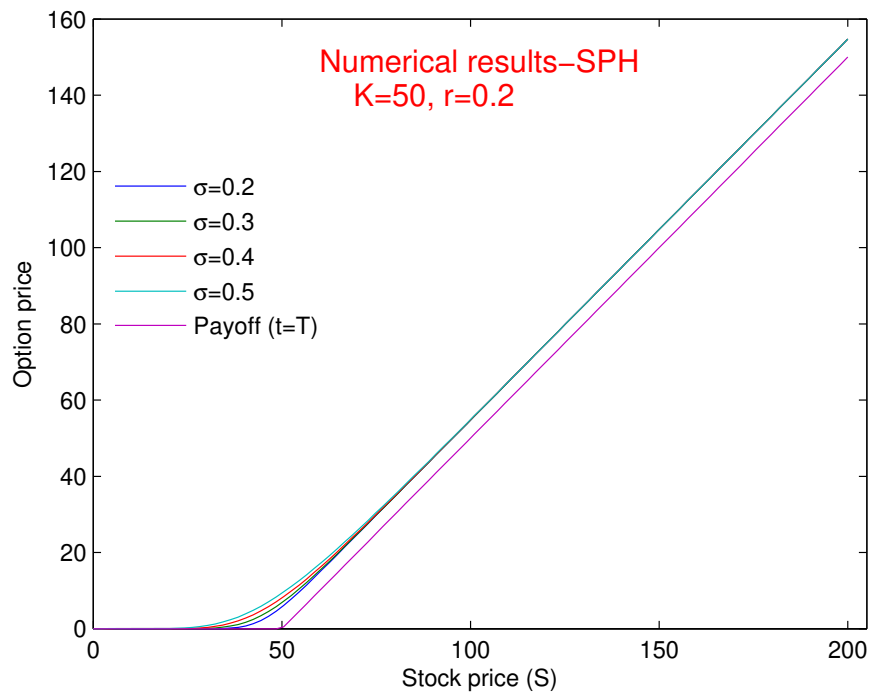


Fig. 2.9: Prix de Call européen obtenu par SPH et la formule analytique pour différente valeur de volatilité et avec  $K = 50$  et  $r = 0.2$ .

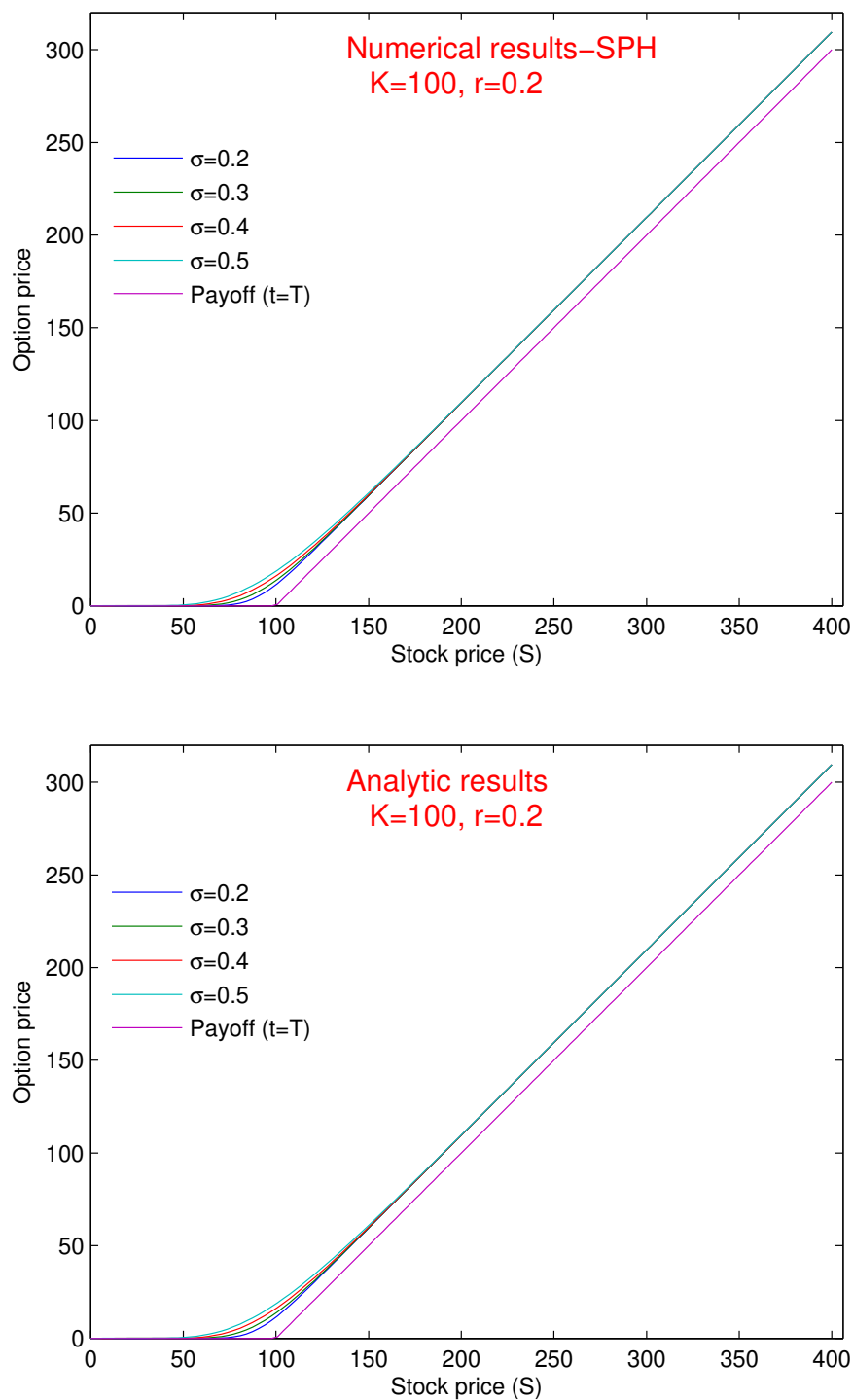


Fig. 2.10: (En haut) Prix de Call européen obtenu par SPH pour différente valeur de volatilité  $\sigma$  (En bas) le prix exact.

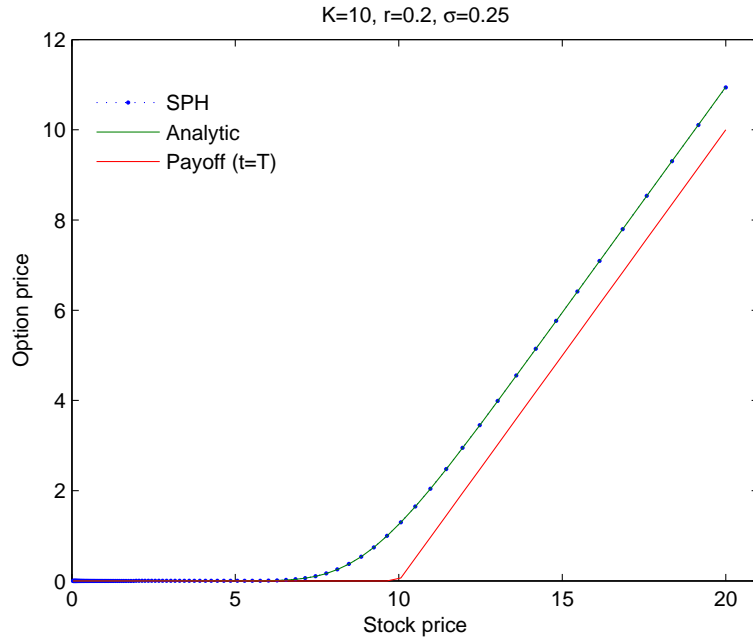


Fig. 2.11: Comparaison entre les solutions exactes et SPH pour une options de Call européennes avec  $\theta = 1/2, N = 150, M = 250$ .

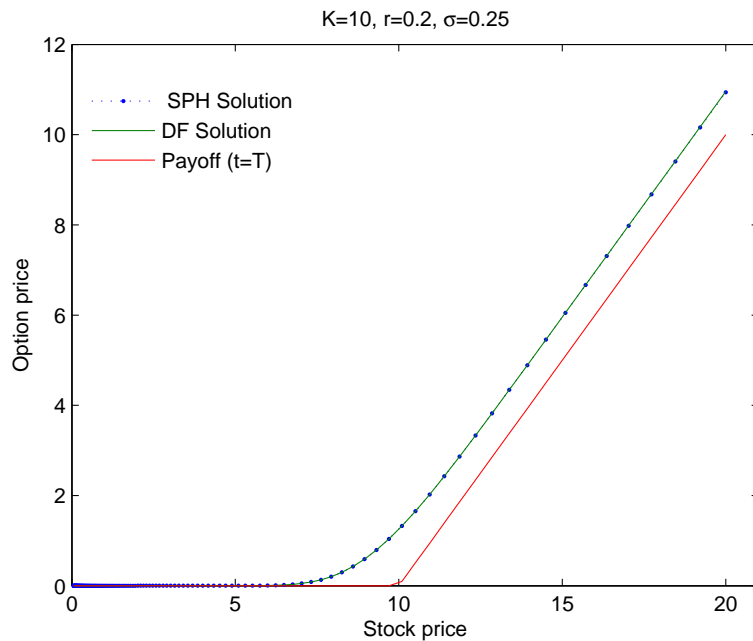


Fig. 2.12: Comparaison entre les solutions SPH et Différences finies pour une options de Call européennes avec les mêmes paramètres ci-dessous.

La figure 2.16a compare la performance de deux méthodes SPH et différences finies en termes de temps de calculs (le test est fait avec les paramètres financiers suivants :  $r = 0.2, \sigma = 0.25, T = 0.5, K = 10, S_{max} = 2K$  et  $N$  varie entre 100 et 200 et nous avons fixé le pas de temps à  $M = 60$ ). Tel qu'on peut remarquer la méthode SPH met plus de temps à s'exécuter par rapport à la méthode différences finies et cela revient au fait que lorsque on calcule laplacien au point  $x_i$ , nous devons parcourir l'ensemble des points discrétisés l'intervalle de l'espace  $[a, b]$  afin de déterminer les points qui ont une contribution non nulle au sommation (2.24).

la figure 2.16b illustre le comportement de l'erreur, commise par la méthode SPH, en fonction du rapport  $h/\Delta x$ . Comme nous pouvons constater la meilleur précision est obtenue pour le cas  $h = \Delta x$ .

Étant donné la valeur d'une option de Call européenne, il est possible de calculer la valeur de l'option de Put correspondante via la relation de parité de PUT-Call [58], nous pouvons également calculer le prix d'un put européen en résolvant l'équation (2.16) avec les conditions aux limites appropriées (2.20) (2.21). La procédure est similaire à celle qui a été utilisée pour évaluer l'option d'un call européenne.

La figures 2.13 représente le prix d'une option de Put européenne, obtenue par la méthode SPH, et la formule analytique de Black-Scholes, avec les paramètres financiers donnés dans le tableau ci-dessus.

Le tableau 2.2. compare les résultats obtenus par notre approche SPH avec ceux obtenus par les autres méthodes sans maillages publiées dans littératures [8,45]. La première colonne donne les valeurs de l'actif tandis que la deuxième colonne contient les valeurs de la solution exacte. Les trois colonnes suivantes représentent les solutions obtenues par les trois méthodes sans maillage SPH, Quasi-RBFs [8] et MQ-RBF [45] respectivement. Comme nous pouvons le constater, les trois méthodes sans maillages sont d'efficacité comparable.

Table 2.2: Les prix d'un Put européen calculé par SPH avec  $K = 10, r = 0.05, \sigma = 0.20, T = 0.5$ .

| S  | Exact  | SPH(N=600) | Quasi-RBFs [9] | MQ-RBF [45] |
|----|--------|------------|----------------|-------------|
| 2  | 7.7531 | 7.7531     | 7.7531         | 7.7531      |
| 4  | 5.7531 | 5.7531     | 5.7531         | 5.7531      |
| 6  | 3.7532 | 3.7532     | 3.7532         | 3.7532      |
| 7  | 2.7568 | 2.7569     | 2.7568,        | -           |
| 8  | 1.7987 | 1.7989     | 1.7988         | 1.7987      |
| 9  | 0.9880 | 0.9882     | 0.9881         | -           |
| 10 | 0.4420 | 0.4420     | 0.4420         | 0.4419      |
| 11 | 0.1606 | 0.1607     | 0.1606         | -           |
| 12 | 0.0483 | 0.0484     | 0.0483         | 0.0483      |
| 13 | 0.0124 | 0.0125     | 0.0124         | -           |
| 14 | 0.0028 | 0.0028     | 0.0028         | 0.0028      |
| 15 | 0.0006 | 0.0006     | 0.0006         | -           |
| 16 | 0.0001 | 0.0001     | 0.0001         | 0.0001      |



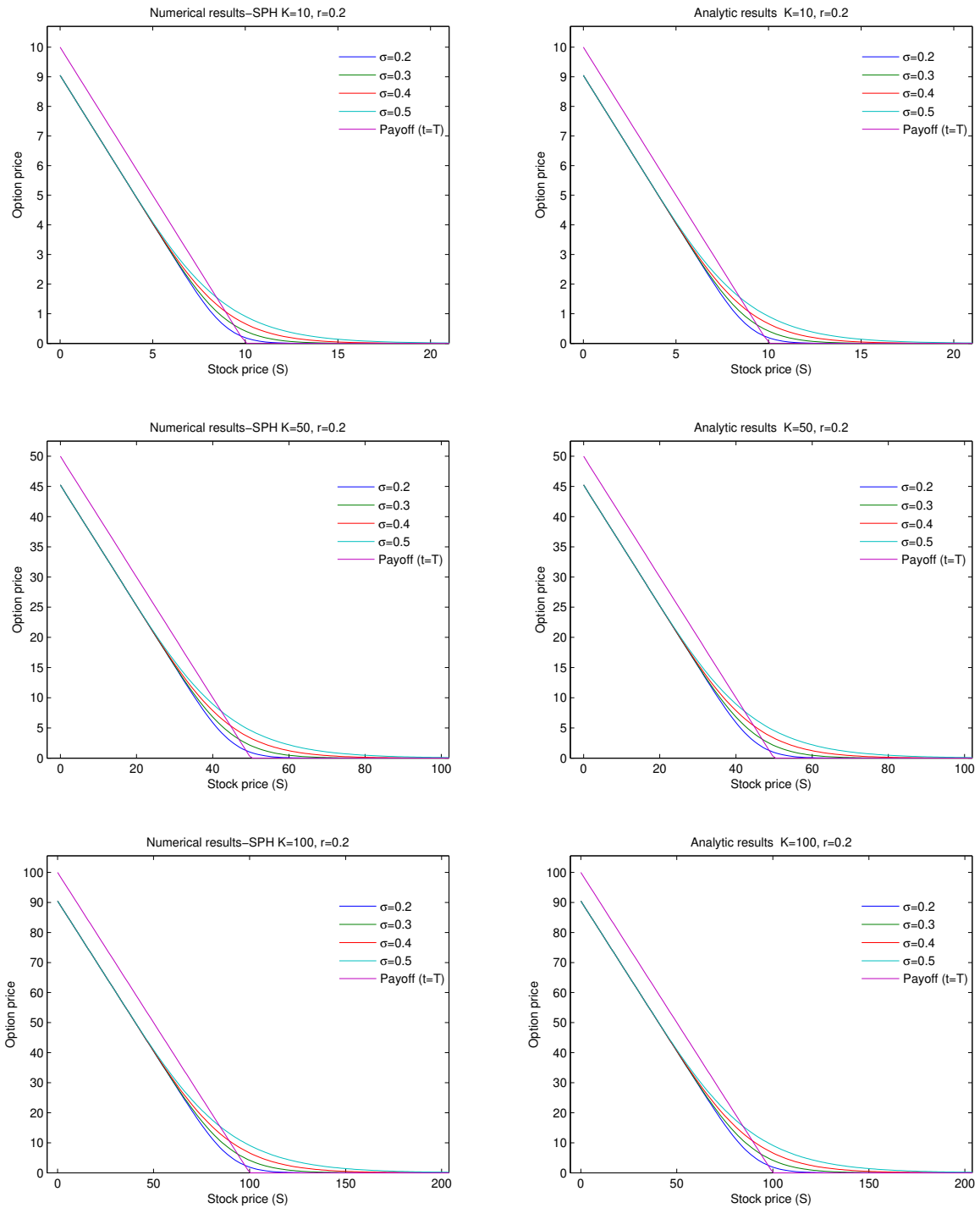


Fig. 2.13: Valeur de l'option de Put européenne à l'instant  $t = 0$ .

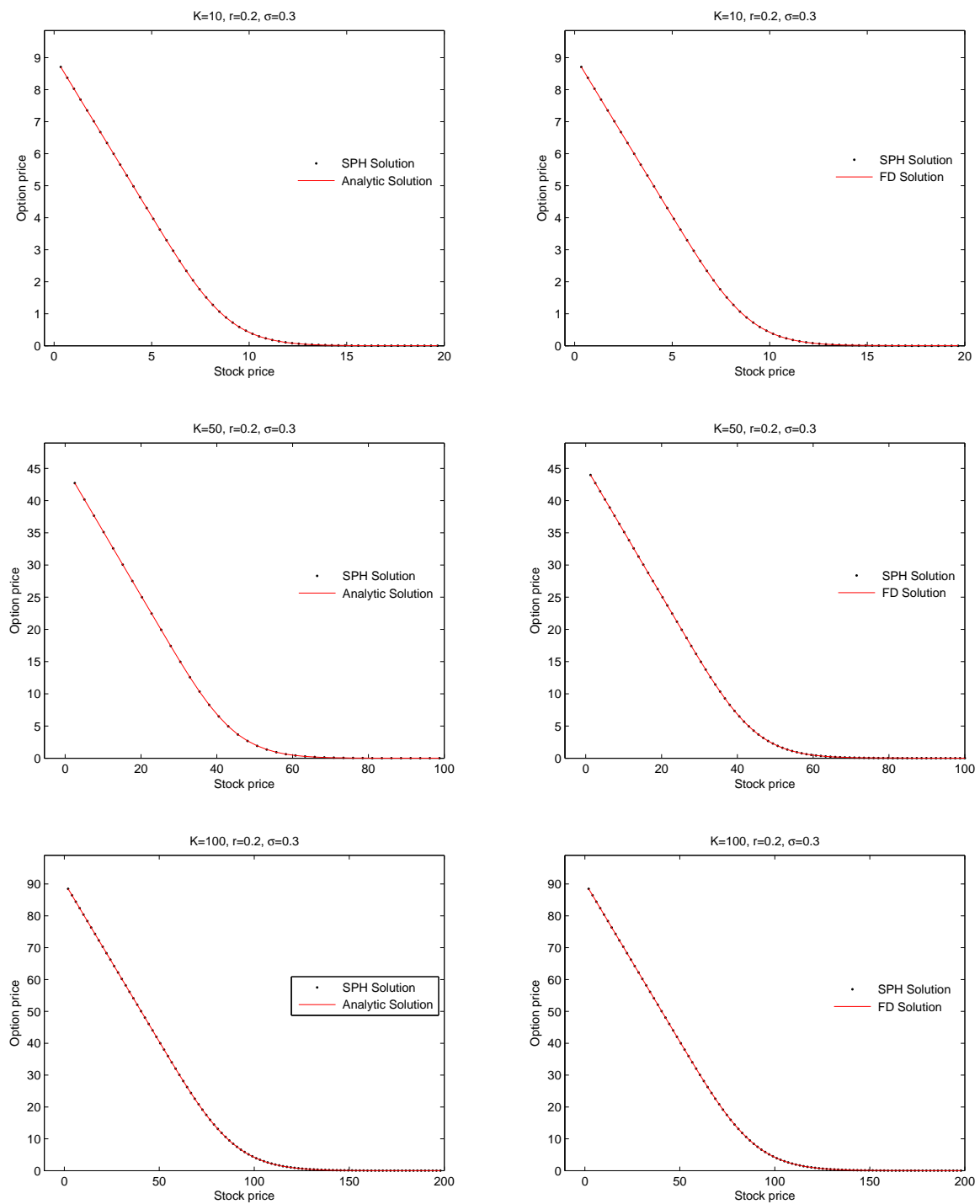


Fig. 2.14: Comparaison entre les solutions exactes, SPH et Différences Finies pour une option de Put européenne.

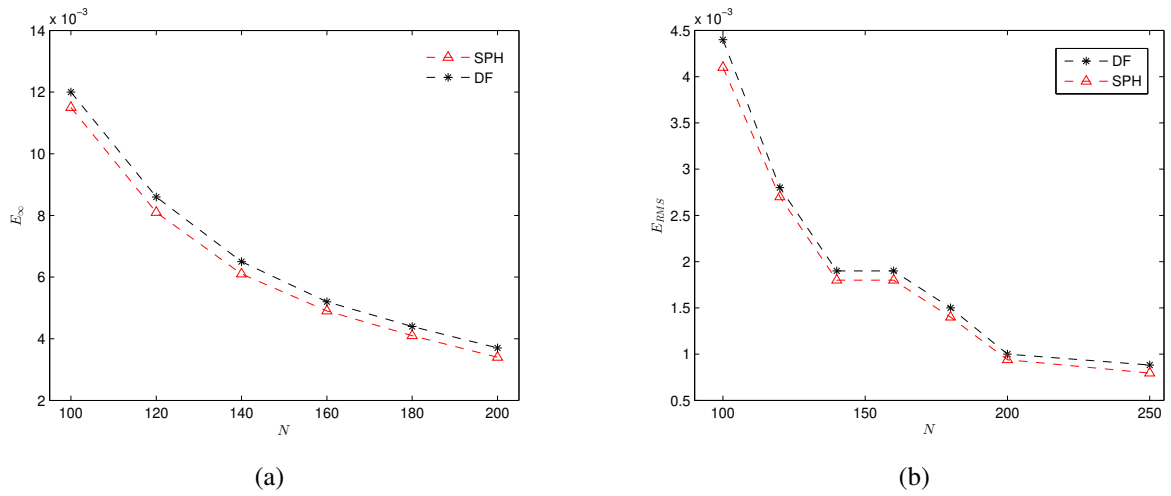


Fig. 2.15: (a) La norme infinie de l'erreur en fonction du nombre de points d'interpolation  $N$ . (b) Erreur RMS en fonction du nombre de points  $N$ .

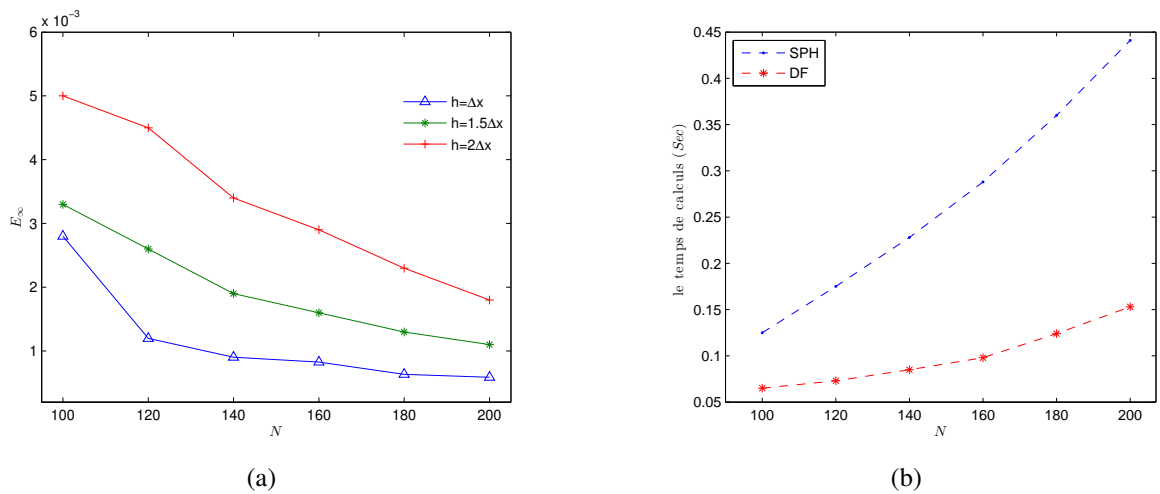


Fig. 2.16: (a) : Norme discrète  $E_\infty$  de l'erreur commise par SPH pour différentes valeurs du rapport  $h/\Delta x$ . (b) : Evolution du temps de calcul en fonction du nombre de points  $N$ .

Dans ce qui précède nous avons appliqué notre méthode SPH à la version log-transformée de l'équation de Black Scholes (2.16), maintenant nous allons l'appliquer à l'équation dans sa forme originale (2.1).

Pour illustration, nous allons utiliser les paramètres financiers suivants :

$K = 10, r = 0.20, \sigma = 0.25, q = 0.15$  et  $T = 0.5$  (6 mois), on prend  $S_{max} = 2K$ .

Les figures 2.17 et 2.18 montrent la résolution de l'EDP (2.1) avec la méthode de SPH et de la formule fermée pour une option de Call et Put respectivement. Il est clairement visible que les résultats des deux solutions, numérique (SPH) et analytique, sont identiques.

Il convient de noter que les résultats, ci-dessus, sont obtenus en utilisant le schéma de Fatihi (2.54). Ici nous allons utiliser les deux schéma fatihi (2.54) et Brooskwiski (2.24) pour approximer la seconde dérivée dans l'équation (2.1). Dans le cas d'utilisation de schéma Brookshaw, nous avons introduit des points fictifs, au niveau de la frontière, afin de compléter la partie manquante du support.

La figure 2.20 montre la comparaison entre l'erreur commise par les deux schemas fatihi (2.54) et Brookshaw (2.24). Nous pouvons voir que les deux schemas donnent le même resultat si on est à l'interieur du domaine de calcul  $[0, S_{max}]$  mais lorsque on s'approche de la frontiere  $S_{max}$ , le schema Fatih devient plus precis que celui de Brookshaw.

La figure 2.19 représente l'erreur RSM en fonction du nombre de points d'interpolation  $N$ , Nous avons pris le nombre de pas de temps très grand  $M = 600$ , afin de rendre l'erreur dépendante de la discrétisation de l'espace. Comme nous pouvons observer que la valeur RSM décroît lorsque le nombre de points de l'espace augmente pour  $N$  entre 100 et 500. Ce qui indique la convergence de la méthode SPH en tant qu'approximation spatiale des valeurs de l'option.

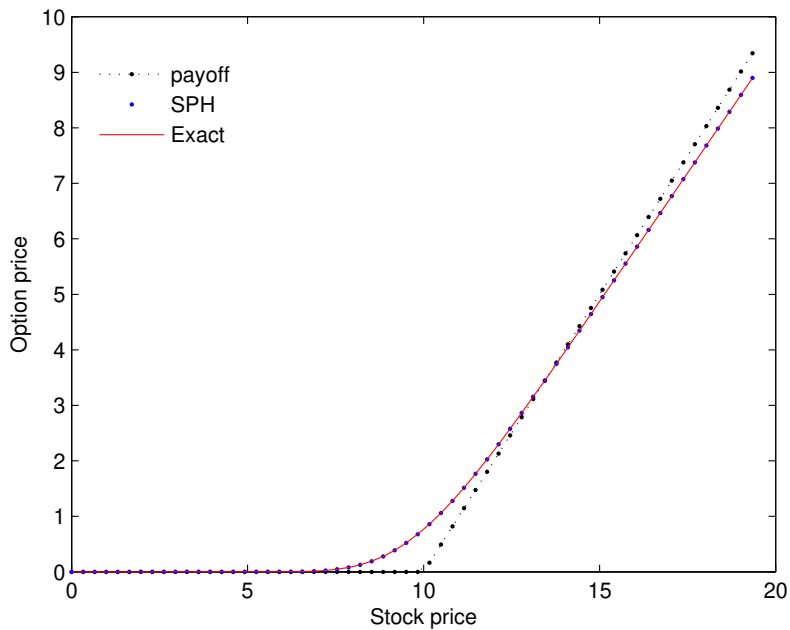


Fig. 2.17: La valeur d'une option de Call européenne, obtenues par la méthode SPH avec  $\theta = 1/2, N = 60, M = 250$ , en comparaison avec celle obtenue par la solution analytique.

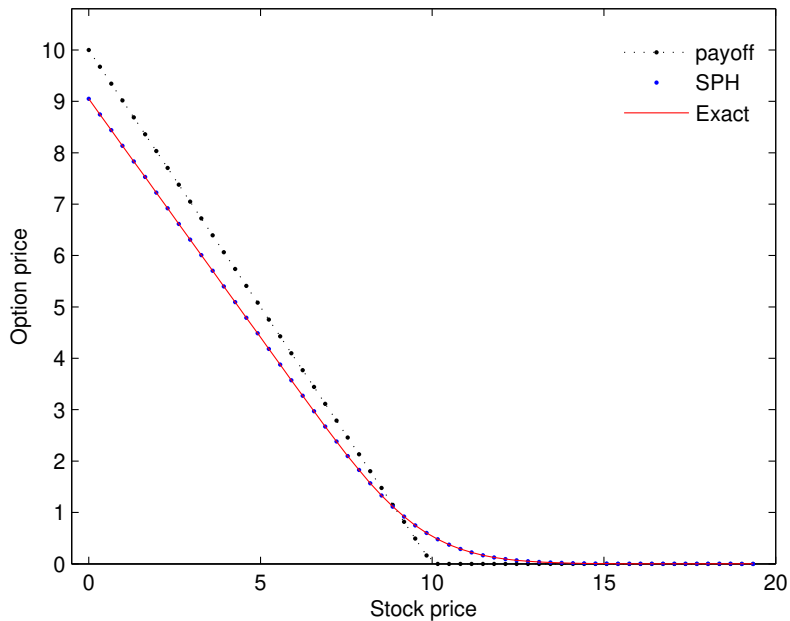


Fig. 2.18: Une comparaison entre la solution analytique et celle obtenue numériquement par la méthode SPH pour une option de Put avec les mêmes paramètres mentionnés ci-dessus.

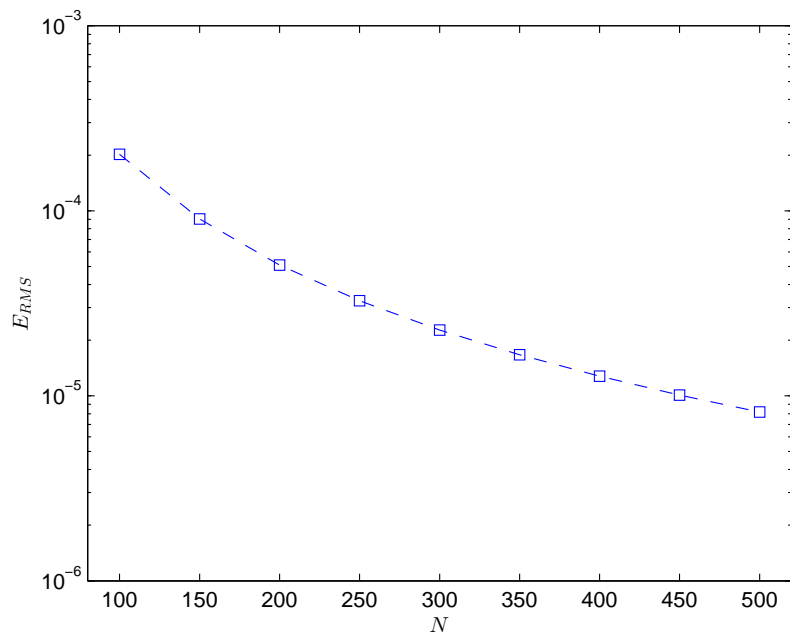


Fig. 2.19: Evolution de l'erreur RSM en fonction du nombre de points d'interpolation  $N$ .

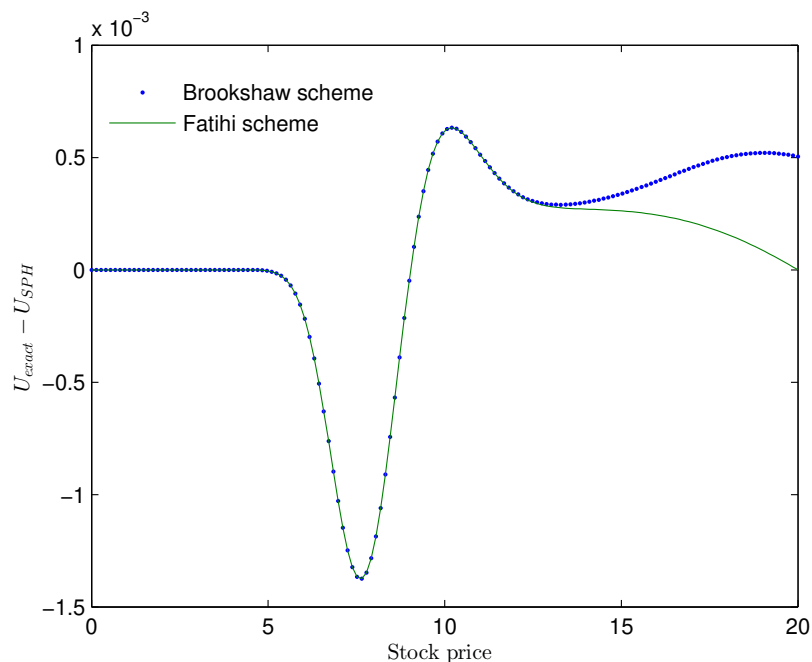


Fig. 2.20: L'erreur résultant de la discrétisation de l'équation de Black et Scholes par les schémas de Brookshaw (2.24) et R.Fatihi (2.54).

## 2.4 Les grecques

La valeur d'une option dépend de différents facteurs, notamment de l'actif sous-jacent et de sa volatilité, la date d'échéance et le taux d'intérêt. Les grecques sont un ensemble de mesures décrivant la sensibilité du prix de l'option à ces facteurs [53]. Elles interviennent aussi bien dans les stratégies de couverture que de trading.

### 2.4.1 Delta

Le Delta d'une option se définit comme le taux de variation du prix de cette option par rapport au cours de l'actif sous-jacent, i.e

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial S}, \quad (2.81)$$

où  $u$  représente le prix de l'option et  $S$  : prix de l'actif sous-jacent.

La valeur de Delta peut être approximée en utilisant la formulation SPH suivante:

$$\Delta = \beta_i \sum_j (u(S_j) - u(S_i)) \frac{\partial w_{ij}}{\partial S_i} V_j, \quad (2.82)$$

où  $\beta_i$  est donné par l'expression (1.54).

### 2.4.2 Gamma

Le gamma ( $\Gamma$ ) est défini comme le taux de variation du delta de l'option par rapport au prix de l'actif. Il s'agit de la dérivée partielle seconde du prix de l'option par rapport au prix de l'actif

$$\Gamma = \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}. \quad (2.83)$$

Dans le cas de l'option européenne, on a

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (2.84)$$

La valeur du gamma ( $\Gamma$ ) peut être obtenue en approximant la dérivée de Delta ( $\Delta$ ) par rapport au prix de l'actif, par l'expression SPH suivante :

$$\Gamma = \sum_j (\Delta(S_j) - \Delta(S_i)) \frac{\partial w_{ij}}{\partial S_i} V_j, \quad (2.85)$$

ou en calculant la dérivée seconde du prix de l'option par rapport au prix de l'actif, en utilisant la formulation SPH (2.24) :

$$\Gamma = 2 \sum_j \frac{u(S_i) - u(S_j)}{S_i - S_j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial S_i} V_j. \quad (2.86)$$

### 2.4.3 Le thêta

Le thêta ( $\Theta$ ) représente la sensibilité du prix de l'option à l'écoulement du temps. Mathématiquement parlant, le thêta est égal à la dérivée partielle première du prix de l'option par rapport au temps, i.e

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2.87)$$

Pour calculer la dérivée du prix de l'option par rapport au temps, nous allons utiliser le schéma d'Euler décentré à droite

$$\Theta = -\frac{\partial u}{\partial t} \approx -\frac{u(t + \Delta t, S) - u(t, S)}{\Delta t}. \quad (2.88)$$

Il est également possible de calculer Thêta ( $\Theta$ ), à l'aide de notre approche SPH, grâce à la relation ci-dessous, qui unit les trois grecques (Delta, Gamma et Thêta) et le prix de l'option

$$\Theta + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \Gamma + rS\Delta = ru. \quad (2.89)$$

Pour l'application numérique nous allons calculer les grecques (Delta, Gamma, et Thêta) d'une option européenne correspondant à un prix d'exercice  $K = 10$ , un taux d'intérêt  $r = 0.2$ , une volatilité  $\sigma = 0.25$  et une échéance  $T = 0.5$  (6 mois). On prend  $S_{max} = 2K$ .

Les figures 2.21 et 2.23 illustrent les valeurs des Grecques (delta et gamma respectivement) pour une options de Call européenne calculées à l'aide de notre approche SPH et la formules analytique. Comme nous pouvons le voir les valeurs des Grecques sont très stables et qu'il n'y a pas d'oscillation au niveau ou autour du prix d'exercice  $K$ . ce qui montre que les Grecques sont efficacement évalués à l'aide de la méthode proposée.

Dans la figure 2.22 nous présentons l'erreur commise par la méthode SPH en calculant les valeurs du Delta pour une option de Call européenne avec les paramètres  $\theta = 1/2, N = M = 250$

La Figure 2.24 décrit l'évolution de l'erreur commise sur l'approximation du Gamma d'un Call européenne, en utilisant la méthode SPH avec les mêmes paramètres.

La figure 2.25 montre une comparaison entre les valeurs exactes du Thêta ( $\Theta$ ) et celles obtenues par la méthode SPH pour une option de Call européenne avec  $\theta = 1/2, N = M = 250$ .

Le tableau 2.3 donne les valeurs du delta pour une options de Put européennes en utilisant la méthode SPH. Il ressort clairement des résultats présentés dans ce tableau que les valeurs numériques du delta de l'option sont comprises entre -1 et 0, ce qui est en accord avec la théorie [58].



Table 2.3: Valeurs du Delta ( $\Delta$ ) obtenues par la méthode SPH pour une option de Put européenne avec les paramètres  $K = 10, r = 0.2, \sigma = 0.25, T = 0.5, S_{max} = 2K, N = 250$ .

| S  | Valeur analytique du Delta $\Delta$ | Valeur Numérique du Delta $\Delta$ |
|----|-------------------------------------|------------------------------------|
| 4  | -1                                  | -1.000                             |
| 6  | -0.9873                             | -0.9871                            |
| 7  | -0.9136                             | -0.9135                            |
| 8  | -0.7284                             | -0.7284                            |
| 9  | -0.4769                             | -0.4770                            |
| 10 | -0.2566                             | -0.2567                            |
| 11 | -0.1164                             | -0.1165                            |
| 12 | -0.0460                             | -0.0460                            |
| 13 | -0.0163                             | -0.0163                            |
| 14 | -0.0053                             | -0.0053                            |
| 15 | -0.0016                             | -0.0016                            |
| 16 | -0.0004                             | -0.0004                            |

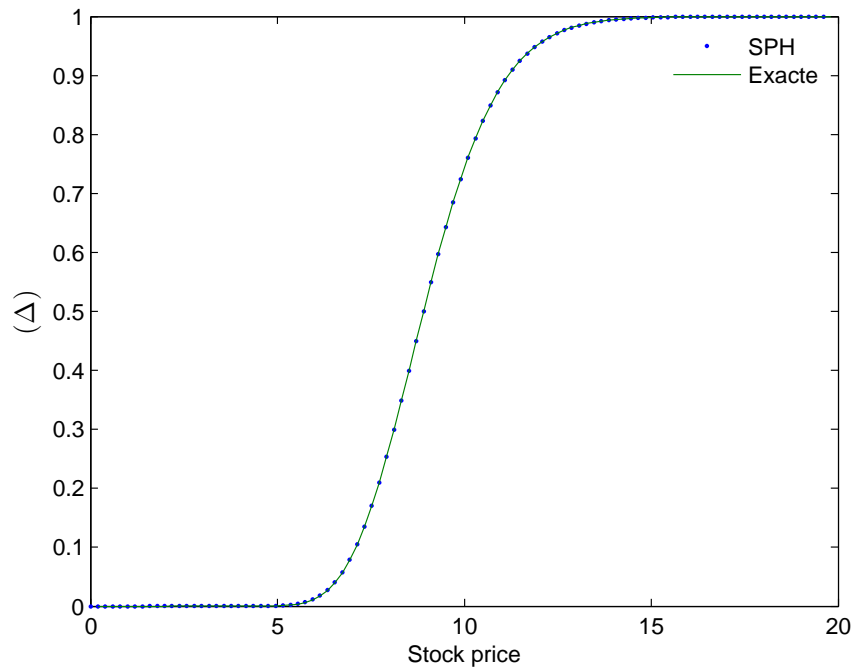


Fig. 2.21: Comparaison entre les valeurs analytiques du Delta ( $\Delta$ ) et celles obtenues par la méthode SPH pour une option de Call européenne avec  $\theta = 1/2, N = 150, M = 250$ .

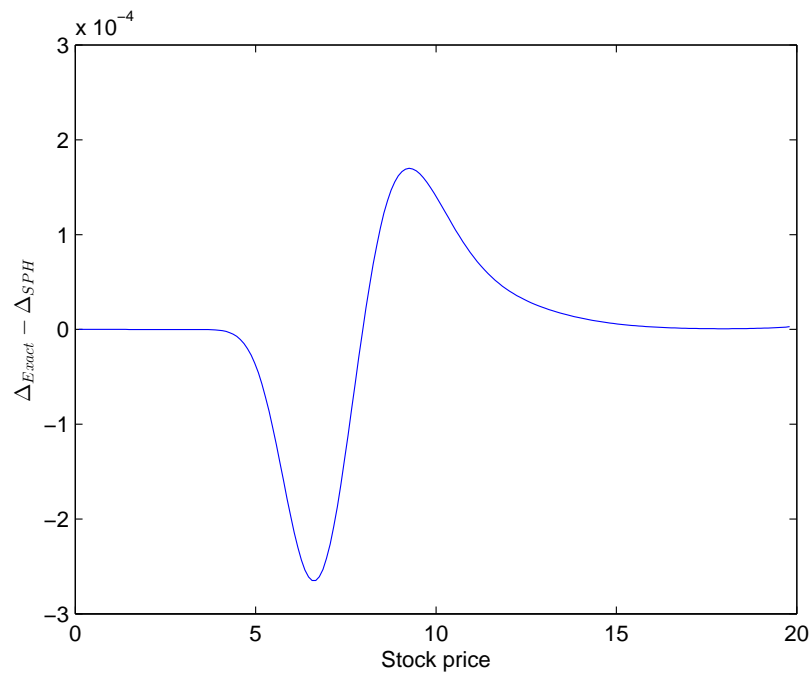


Fig. 2.22: L'erreur commise sur le calcul du Delta  $\Delta$  en fonction du cours du sous-jacent ( $S$ ).

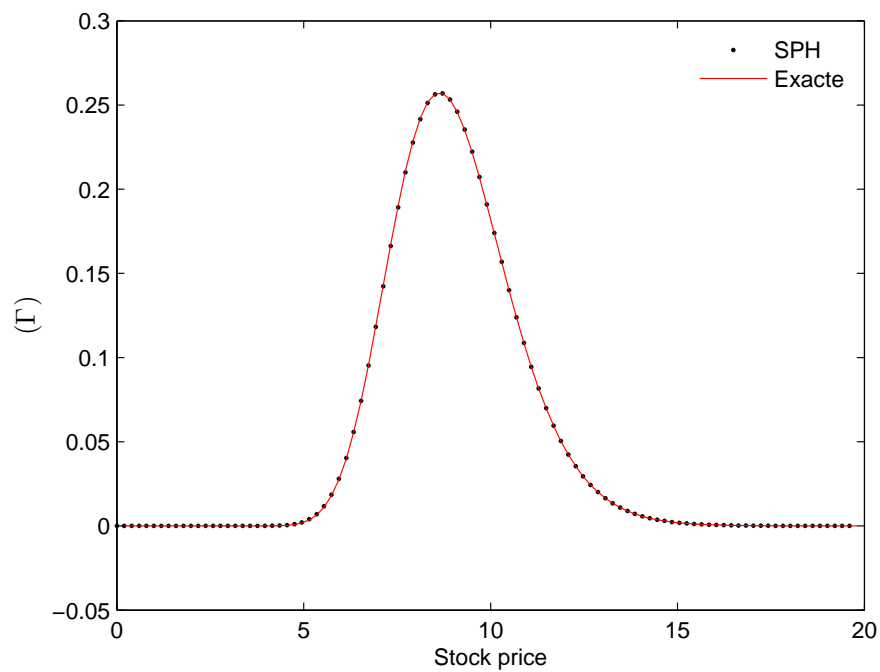


Fig. 2.23: Variation du Gamma ( $\Gamma$ ) par rapport au cours du sous-jacent pour une option de Call européenne.

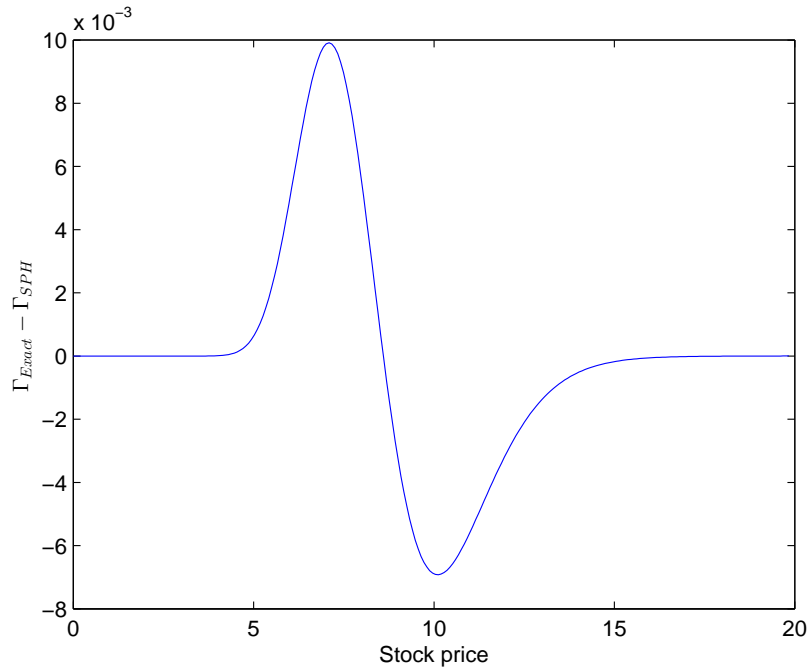


Fig. 2.24: L'erreur commise sur le calcul du Gamma ( $\Gamma$ ) en fonction du cours du sous-jacent ( $S$ ).

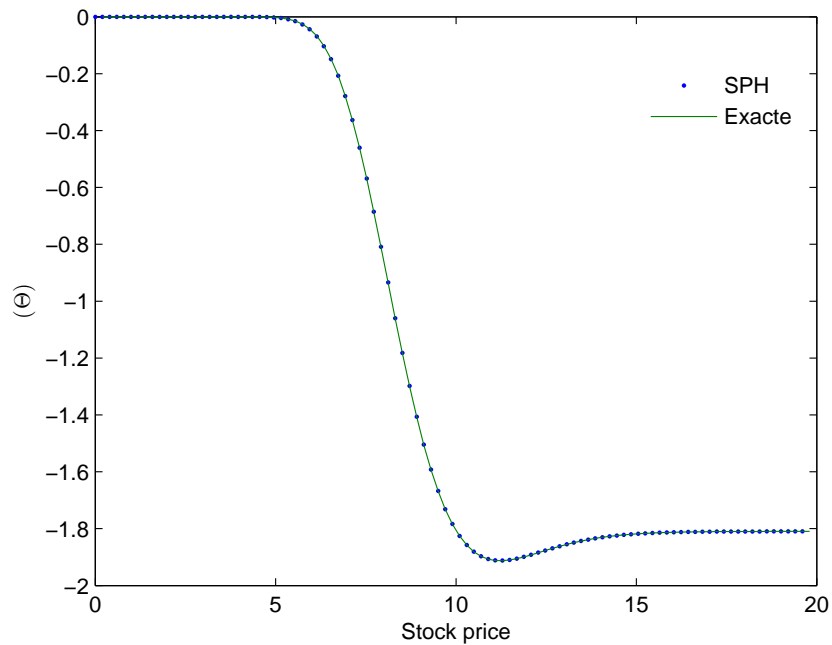


Fig. 2.25: Valeurs du Thêta ( $\Theta$ ) calculés par l'équation (2.89), en fonction du cours du sous-jacent.

## Chapter 3

# La méthode SPH pour pricing d'options américaines

### 3.1 Introduction

La majorité des options standardisées échangées, aujourd'hui, sur les marchés organisés sont des options de style américain. Une option américaine est, comme une option européenne, un droit. Celui de pouvoir acheter ou vendre un actif à un prix préalablement fixé. Dans le cadre des options européennes, ce prix est fixé pour un exercice de l'option à la maturité  $T$ . Dans le cadre des options américaines, l'option peut être exercée à n'importe quel moment entre la date de signature de contrat et sa date d'échéance.

Dans des cas particulier les options américaines sont équivalente à celles européennes, par exemple lorsque l'actif sous-jacent ne paye aucun dividende, le prix d'un Call américain est égal à celui d'un Call européen ayant le même prix d'exercice et la même date d'échéance, et si on suppose que le taux d'intérêt sans risque est nul (ce qui serait loin d'être réaliste), alors la valeur d'un put américain est équivalente à celle d'un put européen de mêmes caractéristiques.

Le droit de pouvoir exercer une option avant son expiration rend son évaluation très compliquée. Puisque à chaque instant, nous devons déterminer non seulement la valeur de l'option mais également, pour chaque valeur de  $S$ , si celle-ci doit être exercée ou pas. C'est ce qu'on appelle un problème à frontière libre [163,164]. A chaque date  $t$ , il existe une valeur spécifique de l'actif sous-jacent, notée  $S_f(t)$ , qui représente la frontière entre une région où il est optimale de maintenir l'option et une autre où il est optimale de l'exercer. Comme nous ne connaissons pas, selon le modèle de Black et Scholes, une formule explicite pour le prix des options américaines même dans les cas les plus simples. Nous devons donc employer des méthodes numériques pour les évaluer. Mais la présence de la frontière libre peut poser une grande difficulté à la résolution numérique et conduit parfois à des solutions moins précises. Pour contourner cette difficulté, on reformule le problème sous forme du problème de complémentarité linéaire (PLC). Cette formulation nous permet de nous débarrasser de la borne libre et par conséquent facilite le traitement numérique. Afin de présenter notre approche numérique de résolution, nous introduisons

dans ce chapitre la méthode sans maillage SPH combinée avec une  $\theta$ - méthode pour solutionner le problème de complémentarité linéaire issue de pricing des options américaines. Le système discrétisé est résolu, par suite, à l'aide des algorithmes dédiés à ce genre de problème, à savoir l'algorithme de PSOR. Afin de valider notre approche, plusieurs comparaisons sont effectuées entre nos résultats et ceux obtenus à l'aide d'autres méthodes numériques comme le modèle de Binomial et la méthode des différences finies.

## 3.2 Position du problème

Le problème d'évaluation d'option américaine est caractérisé par un ensemble des contraintes. Premièrement, la valeur de l'option doit être supérieur ou égale sa valeur intrinsèque (la fonction payoff). Cette contrainte découle de l'hypothèse de l'absence d'opportunité d'arbitrage. Par exemple, si le prix d'un put américain est strictement inférieur à la fonction payoff i.e.

$$V < \max(K - S, 0). \quad (3.1)$$

Alors deux scénarios se présentent la première si la valeur de l'actif  $S$  est supérieur au prix d'exercice  $K$  dans ce cas on a  $V < 0$  ceci contredit la définition d'une option.

La deuxième si  $S < K$  et  $0 < V < K - S$ . Ce scénario offre une opportunité d'arbitrage : emprunter un montant égal à  $S + V$  et acheter à la fois le sous-jacent  $S$  et l'option de put. Il suffit alors d'exercer immédiatement l'option en vendant l'actif sous-jacent à un prix égal à  $K$ . On réalise alors un profit sans risque de  $K - S - V > 0$ , ce qui contredit l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. On en déduit que

$$V_{Put} \geq \max(K - S, 0). \quad (3.2)$$

De manière similaire

$$V_{Call} \geq \max(S - K, 0). \quad (3.3)$$

La deuxième contrainte concerne la valeur de l'option : la valeur de l'option doit être une fonction continue de  $S$ .

Cette contrainte découle simplement du principe d'arbitrage : s'il existait une discontinuité dans la valeur de l'option en tant que fonction du sous-jacent  $S$ , si cette discontinuité persistait pendant plus d'un temps infinitésimal, un portefeuille composé uniquement d'options réaliserait un profit sans risque si le cours de l'actif sous-jacent n'atteignait jamais la valeur à laquelle la discontinuité s'est produite [29,164].

Notre troisième contrainte s'appelle smooth pasting [14,44], expression que l'on peut traduire par « collage en douceur ». Selon cette contrainte, au prix optimal d'exercice  $S_f(t)$ , la dérivée de

la valeur de l'option par rapport au cours du sous-jacent doit être égale à la dérivée de la fonction du payoff par rapport au cours du sous-jacent.

Pour prouver la contrainte du smooth pasting, considérons le cas d'une option de put Américaine, En supposant que  $S_f(t) < K$ , la pente de la fonction du payoff  $\max(K - S, 0)$  au niveau du point de contact est de  $-1$ . Il existe trois possibilités pour la pente de la fonction du prix de l'option,  $\partial V / \partial S$ , au point  $S = S_f(t)$  [29,163]:

- $\partial V / \partial S < -1$ .
- $\partial V / \partial S > -1$ .
- $\partial V / \partial S = -1$ .

• Si  $\partial V / \partial S < -1$ , alors une augmentation de  $S$  à partir de  $S_f(t)$  ferait passer la valeur de l'option  $V(S, t)$  sous la fonction du payoff, ce qui est en contradiction avec la borne d'arbitrage précédente  $V(S, t) \geq \max(K - S, 0)$ , et donc, c'est impossible [163,165].

• Dans le cas où  $\partial V / \partial S > -1$ , le prix de l'option est sous-estimé. Afin de maximiser son profit, le détenteur de l'option doit pousser la borne d'exercice de l'option le plus loin possible, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on ait  $\partial V / \partial S = -1$  puisque au-delà de ce point, on se retrouve avec le cas discuté précédemment [163,165]. Alors on en conclut que la pente de la courbe du prix d'option doit satisfaire à la condition du *smooth pasting*.

Pour une démonstration détaillée, on renvoie le lecteur à la référence [29,163].

La dernière contrainte porte sur l'équation de Black-Scholes, Dans le cas de l'option américaine cette équation est remplacée par une inéquation.

Pour montrer cette contrainte nous procédons comme dans le cas européen . Nous construisons un portefeuille dont la valeur à la date  $t$  est  $\Pi_t$ , qui comprend une unité de l'option et  $-\Delta$  unité de l'actif sous-jacent. La valeur de ce portefeuille s'écrit alors

$$\Pi_t = V - \Delta S. \quad (3.4)$$

En choisissant  $\Delta = \partial V / \partial S$  la variation de ce portefeuille sera égale

$$d\Pi_t = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (3.5)$$

Dans l'argument de Black-Scholes pour les options européennes, nous avons mis cette expression égale au rendement sans risques  $r\Pi_t dt$ , afin d'éliminer l'opportunité l'arbitrage. Cependant, dans le cas américain, il existe des moments où l'exercice est optimal. Le simple argument d'arbitrage employé pour le cas des options européennes ne mène plus à une valeur unique pour le rendement du portefeuille mais à un ensemble de valeurs. Nous pouvons seulement dire que le rendement du portefeuille est inférieur au taux de rendement sans risque [29,164], soit

$$d\Pi_t \leq r\Pi_t dt \quad (3.6)$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \leq r \left( V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt. \quad (3.7)$$

Par conséquent cela nous conduit à l'inégalité variationnelle suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0. \quad (3.8)$$

Lorsqu'il est optimale de maintenir l'option, l'inégalité ci-dessus devient une égalité, c'est-à-dire l'équation de Black et Scholes, est valide, avec la condition que la valeur de l'option est supérieur ou égale à la valeur de la fonction du payoff, c'est le cas, par exemple, d'une option européenne. Par contre, quand il est optimale d'exercer l'option l'inégalité devient une inégalité stricte avec le prix  $V$  égal à la fonction du payoff ( $\max(S - K, 0)$  pour le cas d'une option de call et  $\max(K - S, 0)$  pour une option de Put) [163,165].

En combinant toutes ces contraintes, nous pouvons donc écrire le problème de la valorisation d'une option américaine comme suit :

Pour le cas du Put. Nous avons deux régions distinctes: la première,  $0 \leq S \leq S_f(t)$ , lorsque l'exercice de l'option est optimal. Nous avons donc

$$V(S, t) = K - S. \quad (3.9)$$

Et

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV < 0. \quad (3.10)$$

La deuxième  $S_f(t) < S < +\infty$ , lorsqu'il est optimal de maintenir l'option

$$V(S, t) > K - S. \quad (3.11)$$

Et

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (3.12)$$

Les conditions aux bords

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} V(S, t) = 0. \quad (3.13)$$

Au point  $S = S_f(t)$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = -1 \quad \text{et} \quad V(S_f(t), t) = \max(K - S_f(t), 0). \quad (3.14)$$

Le cas d'une option de **Call**

Soit  $0 \leq S \leq S_f(t)$  : la région où il est optimal de conserver l'option et on a alors

$$V(S,t) > S - K. \quad (3.15)$$

Et

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (3.16)$$

Soit  $S_f(t) < S < +\infty$  : la région où il est optimal d'exercer l'option

$$V(S,t) = S - K. \quad (3.17)$$

Et

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV < 0. \quad (3.18)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$V(0,t) = 0. \quad (3.19)$$

Au point  $S = S_f(t)$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = 1 \quad \text{et} \quad V(S_f(t),t) = \max(S_f(t) - K, 0). \quad (3.20)$$

Condition finale :

$$V(S,T) = \max(S - K, 0). \quad (3.21)$$

### 3.3 Formulation de complémentarité linéaire

Le problème du pricing d'option américain ci-dessus peut être reformulé comme un problème de complémentarité linéaire [39,52,72] (3.22). Le grand avantage de cette formulation est qu'il nous permet de nous débarrasser de la borne libre  $S_f(t)$  et donc de se retrouver en présence d'un problème de borne fixe, très facile à résoudre numériquement.

Le problème d'évaluation du Put américain (3.9)-(3.14) s'écrit d'une manière équivalente au système suivant :



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial u}{\partial S} - ru \leq 0, \\ u(S, t) \geq g(S), \\ (u - g) \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial u}{\partial S} - ru \right) = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Avec les conditions terminale et aux bords

$$V(S, T) = g(S) = \max(K - S, 0). \quad (3.23)$$

$$V(0, t) = K. \quad (3.24)$$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} V(S, t) = 0. \quad (3.25)$$

Les deux possibilités dans cette nouvelles formulation correspondent aux situations dans lesquelles il est optimal d'exercer l'option ( $V = g$ ) et celles dans lesquelles ça ne l'est pas ( $V > g$ ).

L'emplacement de la frontière libre  $S_f(t)$  pourra être déterminé, à partir de la solution obtenue  $V(S, t)$ , grâce à la condition (3.14).

En appliquant les mêmes changement variable effectués dans le [chapter 2](#) et en notant  $g$  la fonction de payoff, on trouve que le problème de complémentarité linéaire (3.22) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq 0, \\ u(x, \tau) \geq g(x), \\ (u - g) \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Avec

$$S = Ke^x, t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, V(S, t) = Ku(x, \tau)e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}.$$

Après le changement de variable les conditions aux limites (3.23)-(3.25) deviennent

$$u(x, 0) = g(x) = \max(e^{\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k+1)x}, 0), \quad (3.27)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \quad \forall \tau \in [0, \frac{\sigma^2 T}{2}], \quad (3.28)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, \tau) = 0. \quad (3.29)$$

Pour des raisons numérique, on se restreint à un intervalle d'espace finie  $\Omega = [a, b]$  inclut dans  $\mathbb{R}$ . Les bornes  $a$  et  $b$  sont choisi comme dans le [chapter 2](#). Les conditions (3.28).et (3.29) deviennent

$$u(a, \tau) = e^{\frac{1}{2}(k-1)a + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau}, \quad (3.30)$$

$$u(b, \tau) = 0 \quad \forall \tau \in [0, \frac{\sigma^2 T}{2}]. \quad (3.31)$$

### 3.4 Discrétisation du problème de complémentarité linéaire (PCL)

Dans la section suivante, nous allons proposer une approche numérique basée sur la méthode SPH et  $\theta$ -méthode pour résoudre le problème de pricing d'options américaines.

#### 3.4.1 Discrétisation spatiale

On discrétise le domaine de calcul  $\Omega$  par un ensemble de points finis  $N$  uniformément repartis, avec un espacement inter-points  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ , pour tout  $i = 1, \dots, N$ , ou  $x_i$  désigne la position de la  $i$ -ème point. Dans la méthode SPH l'opérateur laplacien, au point  $x_i$ , peut être calculé selon l'expressions suivante [4]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_i) = 2 \sum_{j=1}^N \frac{u(x_i) - u(x_j)}{x_i - x_j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} \Delta x. \quad (3.32)$$

Ici, le terme  $w_{ij} = w(x_i - x_j)$  désigne la fonction du noyau.

En utilisant l'approximation SPH (3.32), la discrétisation spatiale du problème (3.26) peut être réalisée comme suit:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial \tau} - 2 \sum_{j=1}^N \frac{u_i - u_j}{x_i - x_j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} \Delta x \geq 0, \\ u_i \geq g_i, \\ (u - g_i) \left( \frac{\partial u_i}{\partial \tau} - 2 \sum_{j=1}^N \frac{u_i - u_j}{x_i - x_j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} \Delta x \right) = 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

où  $u_i = u(x_i, \tau)$  et  $g_i$ : la valeur de la fonction du payoff au point  $x_i$ .

La version semi-discrète du problème de complémentarité linéaire (3.33), peut être représentée sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau} - AU \geq 0, \\ U \geq G, \\ (U - G)^T \left( \frac{\partial U}{\partial \tau} - AU \right) = 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

où  $A$  est une matrice de dimension  $N \times N$  et  $U = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N))^T$ .

### 3.4.2 Discrétisation temporelle

Pour compléter la discrétisation du problème (3.26), on introduit la  $\theta$ -methode afin de discrétiser la dérivée temporelle impliquée dans (3.34). Pour cela, on subdivise l'axe de temps en  $M$  intervalles  $[\tau_k, \tau_{k+1}]$  régulière, avec  $\tau_k = k\Delta\tau$ ,  $k = 1, \dots, M$ , où  $\Delta\tau = \frac{\sigma^2 T}{2M}$  représente la longueur du pas de temps. On note  $U^k$  une approximation de  $U(x, \tau_k)$ . Pour tout  $\theta \in [0, 1]$ , le problème (3.34) se réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{trouver } U^{k+1} \text{ tel que pour } k = 1, 2, \dots, M, \\ (I - \Delta\tau\theta A)U^{k+1} - (I + \Delta\tau(1 - \theta)A)U^k \geq 0, \\ U^{k+1} \geq G, \\ (U^{k+1} - G)^T ((I - \Delta\tau\theta A)U^{k+1} - (I + \Delta\tau(1 - \theta)A)U^k) = 0, \end{cases} \quad (3.35)$$

où  $U^k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_N^k)^T$ ,  $A$  : la matrice résultant de la discrétisation spatiale,  $I$  la matrice d'identité de dimension  $N \times N$  et  $G = (g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_N))^T$  la fonction de payoff.

Il existe de nombreux algorithmes directs et itératives, qui permettent de résoudre le problème de la complémentarité linéaire (CPL) (3.35) [35,60,54]. L'un des algorithmes itératifs le plus utilisé pour la résolution du problème (3.35) est celui de PSOR (projected successive over-relaxation). Il a été introduit par D. Tavella et C. Randall [14] pour évaluer le prix des options américaines. Dans ce qui suit nous représentons une brève description de l'algorithme dite PSOR. Pour plus de détails, sur l'algorithme, nous renvoyons à voir par exemple [66] ou [48].

En introduisant les notations suivantes  $M = (I - \Delta\tau\theta A)$ ,  $w^k = -(I + \Delta\tau(1 - \theta)A)U^k$ . Le problème (3.35) peut être écrit d'une manière équivalente au problème de minimisation suivante [50]. :

$$\min(MU^{k+1} + w^k, U^{k+1} - G) = 0. \quad (3.36)$$

le "min" étant pris composante par composante.

Comme montré dans le [chapter 2](#) section 2.1.2 la matrice  $M$  est définie positive, alors elle admet une décomposition triangulaire unique suivante  $M = D - L - P$  où  $D := \text{diag}(M)$  et  $L$  et  $P$  sont respectivement les parties triangulaires inférieure et supérieure de  $M$ . Puisque  $D$  est diagonale définie positive, alors le problème de minimisation (3.36) est équivalent à

$$\min \left\{ D^{-1} \left( DU^{k+1} - PU^{k+1} - LU^{k+1} + w^k \right), U^{k+1} - G \right\} = 0, \quad (3.37)$$

$$\Leftrightarrow \min \left\{ U^{k+1} - D^{-1} \left( PU^{k+1} + LU^{k+1} - w^k \right), U^{k+1} - G \right\} = 0, \quad (3.38)$$

$$\Leftrightarrow U^{k+1} = \max \left\{ D^{-1} \left( LU^{k+1} + PU^{k+1} - w^k \right), G \right\}. \quad (3.39)$$

L'algorithme PSOR, pour résoudre le problème (3.35), peut être décrit comme suit : pour faciliter la notation, nous omettons la référence à l'indice de temps  $k$ :

---

**Algorithm 2** Algorithme itérative "PSOR"

---

initialisation:

On fixe l'indice d'itération  $l = 1$  et  $U^{(1)} \geq 0$  donné (le point de départ de l'algorithme).

$\varepsilon$  fixé (seuil de tolérance).

Boucle

1. pour  $i = 1, 2, \dots, N$  calculer  $U^{(l+1)}$

$$\Delta U_i = \frac{1}{M_{ii}} \left( w_i + \sum_{j < i} M_{ij} U_j^{(l+1)} + \sum_{j \geq i} M_{ij} U_j^{(l)} \right)$$

$$z_i = (1 - \omega) U_i^{(l)} + \omega (U_i^{(l)} - \Delta U_i)$$

$$U_i^{(l+1)} = \max \{ z_i, G_i \}$$

Fin pour

2. si  $\left| U^{(l+1)} - U^{(l)} \right| < \varepsilon$  arrêter. La solution est  $U^{(l+1)}$ . Sinon, fixer  $l = l + 1$  et retourner à l'étape 1.

---

Où  $0 < \omega < 2$  représente le paramètre sur-relaxions, il est toujours choisi de façon à améliorer la convergence d'itération [65].

Le problème (3.35) peut également résoudre par une méthode directe [57]. A chaque pas de temps on résout le système d'équation linéaire  $MU^{k+1} + w^k = 0$ , satisfait par le prix d'une option européenne, à l'aide d'un algorithme de type pivotale après on vérifie la possibilité d'exercice prématurée en comparant la solution  $U^{k+1}$  avec la fonction de payoff  $G$ . L'algorithme peut être décrit comme suit :

---

**Algorithm 3** Algorithme direct

---

initialisation de  $U^0$  par la donnée initiale  
 pour  $k = 0, 2, \dots, M - 1$   
 Calcul de  $w^k = -(I + \Delta\tau\theta(1 - \theta)A)U^k$   
 Calculer  $U^{k+1}$  en résolvant le système linéaire suivant :  
 $(I - \Delta\tau\theta A)U^{k+1} + w^k = 0$   
 $U^{k+1} = \max(U^{k+1}, G)$   
 Fin pour

---

La différence entre les deux algorithmes itérative et direct est que dans le premier la contrainte  $U^{k+1} \geq G$  est appliquée pendant la résolution du système d'équation linéaire  $MU^{k+1} + w^k = 0$  quant au deuxième, l'ajustement pour la contrainte  $U^{k+1} \geq G$  est imposé après la résolution du système.

### 3.4.3 Transformation de cordonnée

Comme mentionné précédemment dans le [chapter 2](#). La discrétisation uniforme de l'espace transformée  $[a, b]$ , conduit à une discrétisation non uniforme, de l'espace du sous-jacent  $S$ , très concentrée autour des petites valeurs de  $S$  et moins en moins fine pour les grands valeurs de  $S$  ce qui donne des résultats moins bons autour de  $S = K$  ( la singularité de la fonction du payoff). Pour remédier à cela, il est possible de prendre une discrétisation irrégulière, qui soit trop fine autour de prix d'exercice  $K$  et moins fine aux extrémités. Pour ce faire, on introduit la transformation de cordonnée suivante, proposé par Tavella et Randall [14] :

$$S = s(\zeta) \quad (3.40)$$

$$\text{avec } s(\zeta) = \frac{1}{c} \sinh(\zeta \sinh^{-1}(c(S_{max} - K)) - (1 - \zeta) \sinh^{-1}(cK)) + K. \quad (3.41)$$

Rappelons l'équation de Black-Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (3.42)$$

On définit  $\psi(\zeta, t) = V(s(\zeta), \tau)$ , avec  $t = T - \tau$ . Calculons maintenant les dérivées partielles de la fonction  $\psi(\zeta, t)$  par rapport à la variable  $\zeta$  et  $t$ .

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{1}{s'(\zeta)}, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \frac{1}{s'(\zeta)^2} - \frac{s''(\zeta)}{s'(\zeta)^3} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = - \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (3.45)$$

En remplaçant les expressions (3.43), (3.44) et (3.45) dans l'équation (3.42), nous obtenons la forme modifiée de l'équation de Black-Scholes suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + a(\zeta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + b(\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - r\psi = 0. \quad (3.46)$$

Où les coefficients  $a(\zeta)$  et  $b(\zeta)$  sont donnés par :

$$a(\zeta) = \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{s(\zeta)}{s'(\zeta)} \right)^2, \quad (3.47)$$

$$b(\zeta) = r \frac{s(\zeta)}{s'(\zeta)} - \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{s(\zeta)}{s'(\zeta)} \right)^2 \frac{s''(\zeta)}{s'(\zeta)}. \quad (3.48)$$

La condition initiale (3.23) , après le changement de variable prend la forme suivante:

$$\phi(\zeta) = \psi(\zeta, 0) = \max(K - s(\zeta)). \quad (3.49)$$

On définit l'application inverse de (3.41) par:

$$\varphi(S) = \frac{\sinh^{-1}(c(S - K)) - \sinh^{-1}(cK)}{\sinh^{-1}(c(S_{max} - K)) - \sinh^{-1}(cK)}. \quad (3.50)$$

L'application  $\varphi$ , transforme l'espace du cours du sous-jacent  $[0, S_{max}]$  à un intervalle fermé  $[0, 1]$ . Comme expliqué par Tavella et Randall [14], le choix du paramètre  $c$  a une grande influence sur la distribution des points autour de  $S = K$ . Pour obtenir une discrétisation très concentrée autour du prix d'exercice de l'option  $K$ , la valeur de paramètre  $c$  doit être choisi plus petite que  $S_{max}$ .

En appliquant la même procédure de discrétisation faite dans la section précédente, on trouve que la version discrète de l'équation (3.46) écrit sous la forme matricielle suivante :

$$(I - \Delta t \theta L) \Psi^{k+1} = (I + \Delta t (1 - \theta) L) \Psi^k, \quad (3.51)$$

où  $k$  réfère à l'indice de temps,  $\theta \in [0, 1]$ ,  $\Psi^{k+1} = (\psi(\zeta_1), \psi(\zeta_2), \dots, \psi(\zeta_N))^T$ : le vecteur du prix et  $L$  la matrice provient de la discrétisation de dérivées spatiales impliquées dans (3.46) par la méthode SPH. Et  $I$  la matrice d'identité de dimension  $N \times N$ .

Les coefficients de la matrice  $L$  sont donnés par :

$$\begin{cases} l_{ij} = d_{ij} - r\alpha_i w_{ij} & i \neq j = 1, 2, \dots, N, \\ l_{ii} = -\sum_{j \neq i}^N d_{nj} - r\alpha_i w_{ii}, \end{cases} \quad (3.52)$$

avec

$$d_{ij} = \beta_i b(\zeta_i) w'(\zeta_i - \zeta_j) \Delta\zeta - 2 \frac{a(\zeta_i) w'(\zeta_i - \zeta_j)}{\zeta_i - \zeta_j} \Delta\zeta. \quad (3.53)$$

Les expressions de  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont respectivement données par (1.50) et (1.54).

Il est convenit de noter que la matrice  $L$ , définit ci-dessus, est creuse grâce aux propriétés de la fonction du noyau  $w$ . Ceci est illustré dans la figure suivante :

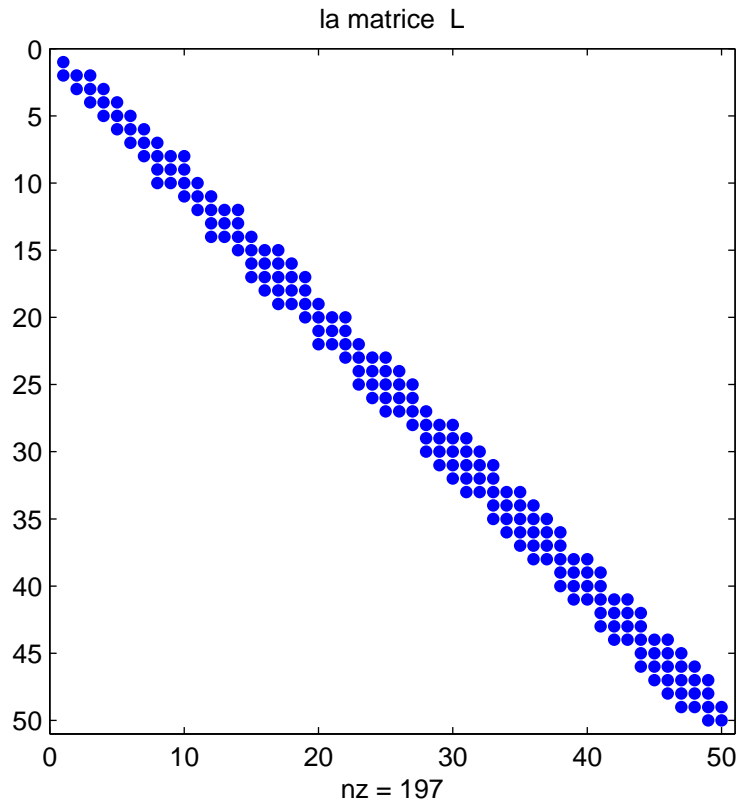


Fig. 3.1: Visualisation de la structure creuse de la matrice  $L$  pour  $N = 50$ .  $nz$  : désigne le nombre d'éléments non nuls de la matrice  $L$ .

La version discrète du problème de complémentarité linéaire (3.22) devient, par le changement de variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \Psi^{k+1} \text{ tel que pour } k = 1, 2, \dots, M, \\ (I - \Delta t \theta L) \Psi^{k+1} - (I + \Delta t (1 - \theta) L) \Psi^k \geq 0, \\ \Psi^{k+1} \geq \Phi, \\ (\Psi^{k+1} - \Phi) ((I - \Delta t \theta L) \Psi^{k+1} - (I + \Delta t (1 - \theta) L) \Psi^k) = 0, \end{array} \right. \quad (3.54)$$

où  $\Phi = (\phi(\zeta_1), \phi(\zeta_2), \dots, \phi(\zeta_N))^T$  représente la fonction du payoff donnée par la relation (3.49).

### 3.4.4 Analyse de la stabilité

Dans cette section nous présentons une analyse de la stabilité du schéma (3.51). Pour cela, nous définissons l'erreur à l'instant  $t_k$  par

$$E^k = \Psi_{Exact}^k - \Psi_{Num}^k \quad (3.55)$$

où  $\Psi_{Exact}^k$  est la solution exacte et  $\Psi_{Num}^k$  la solution numérique obtenue par la méthode SPH.

En remplaçant l'expression (3.55) dans le schéma (3.51), on obtient l'équation d'erreur à l'instant  $t_{k+1}$

$$E^{k+1} = RE^k, \quad (3.56)$$

où  $R$  est la matrice d'amplification donnée par :

$$R = (I - \Delta t \theta L)^{-1} (I + \Delta t (1 - \theta) L). \quad (3.57)$$

Le schéma numérique (3.51) est dite stable si l'erreur  $E^k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Ceci peut être assuré si  $\rho(R) \leq 1$ , où  $\rho(R)$  désigne le rayon spectral de la matrice  $R$ .

En substituant  $R$  dans l'équation (3.56) on obtient

$$E^{k+1} = (I - \Delta t \theta L)^{-1} (I + \Delta t (1 - \theta) L) E^k. \quad (3.58)$$

Il est clair d'après l'équation (3.58) que la stabilité de schéma numérique (3.51) est assurée si toutes les valeurs propres de la matrice  $L$  satisfont l'inégalité suivante :

$$\left| \frac{1 + \Delta t (1 - \theta) \lambda_L}{1 - \Delta t \theta \lambda_L} \right| \leq 1. \quad (3.59)$$



Dans le cas des schémas d'Euler implicite ( $\theta = 1$ ) et Crank-Nicholson ( $\theta = 0.5$ ) la condition (3.59) est toujours satisfaite si  $Re(\lambda_L) \leq 0$ .

On peut voir d'après (3.52) que les valeurs propres de la matrice  $L$  dépendent fortement de paramètres financiers  $\sigma$  et  $r$  et la longueur de lissage  $h$ , puisque il très difficile de trouver une expression explicite de valeurs propres de la matrice  $L$ , nous avons étudié cette dépendance numériquement et cela est illustré dans la figure 3.2.

La figure 3.2 représente la plus grande partie réelle des valeurs propres  $Re(\lambda_L)_{max}$  de la matrice  $L$  pour différentes valeurs du taux d'intérêt  $r$  ( en gardant les paramètres  $\sigma$  et  $h$  constants ). Comme nous pouvons le constater la partie réel de toutes les valeurs propres de  $L$  sont strictement négatives  $Re(\lambda_L) < 0$ , ce qui implique que les conditions (3.59) est toujours satisfaite et par conséquent les schémas d'Euler implicite et Crank-Nicholson sont inconditionnellement stables.

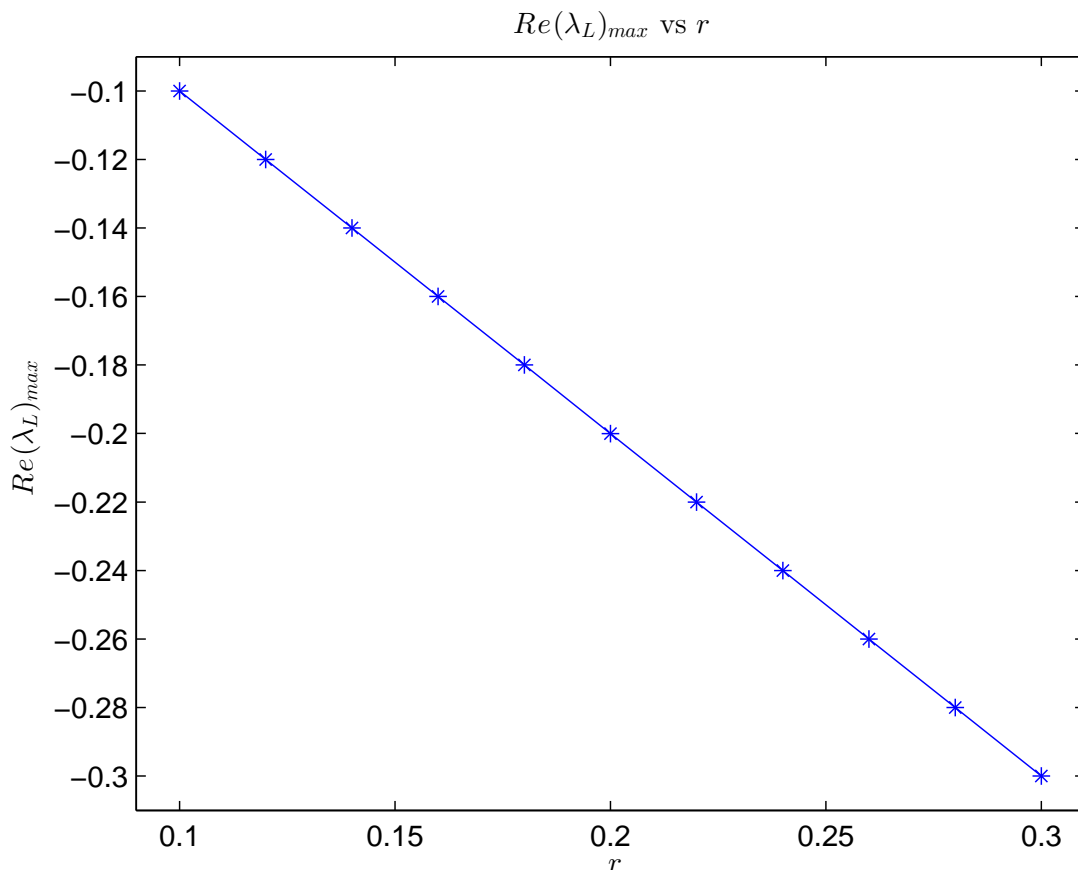


Fig. 3.2: Evolution de la valeur  $Re(\lambda_L)_{max}$  en fonction de taux d'intérêt  $r$  pour  $\sigma = 0.3, N = 100$  et  $c = 1$ .

### 3.5 Les résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques obtenus en appliquant notre méthodes SPH aux problèmes de pricing d'options américaines (3.9)- (3.14) et (3.15)-(3.21).

Pour évaluer la performance de cette méthode numérique, de nombreuses comparaisons ont été effectuées entre la solution SPH et les résultats obtenus par le modèle binomiale et d'autres approches numériques et analytiques largement utilisées dans le domaine de la finance.

Les calculs ont été effectués pour différents paramètres financiers tels que le prix d'exercice  $K$  et la volatilité  $\sigma$ . L'objectif principal est d'examiner l'influence de ces paramètres sur le comportement du prix d'option.

Les figures 3.3a- 3.3d représentent le prix d'une option de Put américaine, obtenue par la méthode SPH, avec les paramètres financiers énumérés dans le tableau ci-dessous.

Table 3.1: Valeurs des paramètres financiers.

| Paramètre              | Figure 3.3a     | Figure 3.3b     | Figure 3.3c     | Figure 3.3d     |
|------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Le prix d'exercice $K$ | 10              | 20              | 50              | 100             |
| L'échéance $T$         | 1/2 (6 mois)    | 1/2 (6 mois)    | 1/2 (6 mois)    | 1/2 (6 mois)    |
| Le taux d'intérêt $r$  | 0.2             | 0.2             | 0.2             | 0.2             |
| La volatilité $\sigma$ | 0.2,0.3,0.4,0.5 | 0.2,0.3,0.4,0.5 | 0.2,0.3,0.4,0.5 | 0.2,0.3,0.4,0.5 |
| $S_{max}$              | 20              | 40              | 100             | 200             |

Les figures 3.3a- 3.3d montrent le peu d'influence de la volatilité sur le prix des options. Ce qui n'est pas le cas pour le prix d'exercice. On constate en effet qu'une augmentation du prix d'exercice entraîne une augmentation du prix d'option de vente (Put). Cela s'explique par le fait que les conditions initiales et aux limites dépendent fortement du prix d'exercice.

La figure 3.4 illustre une comparaison des résultats obtenus par la méthode SPH, le modèle binomiale et la méthode des différences finis, en calculant le prix d'une options de Put américains, correspondant à un prix d'exercice de  $K = 10$ , un taux du marché de  $r = 0.2$ , une échéance à 6 mois, une volatilité de  $\sigma = 0.25$ . et un dividende  $q = 0.3$ .

La figure 3.5 montre la même comparaison pour les mêmes paramètres financières mais pour le cas d'un Call américain.

D'après les figures 3.4 à 3.5, nous pouvons constater graphiquement que les résultats fournis par les trois méthodes SPH, Binomiale et différences finis sont pratiquement identiques, Cela confirme la robustesse de la méthode SPH.

Le tableau 3.2 résume la comparaison de la performance des deux algorithmes de résolutions, itérative 'PSOR' et direct, du problème de complémentarité linéaire (3.26) issue de la discrétisation par la méthode SPH. Les résultats donnés par les deux algorithmes sont pratiquement identiques mais comme nous pouvons le constater l'algorithme "PSOR" nécessite un temps de calcul (CPU) dix fois supérieur que celui de l'algorithme pivotale.

Nous précisons que nous avons effectué plusieurs tests numériques afin de déterminer la valeur optimale du paramètre de sur-relaxation  $\omega$ . Qui assure à la fois la précision et la rapidité de l'algorithme.

Les résultats présentés dans le tableau 3.2 sont calculés avec les paramètres suivants :  $K = 10, T = 0.5, r = 0.05, \sigma = 0.25, M = N = 250, S_{max} = 2K, \theta = 1/2$ .

$\omega = 1.88$  : Le paramètre de sur-relaxions.

Le nombre d'itération est 65.

Le seuil de tolérance  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

Table 3.2: Comparaison de la performance des deux algorithmes PSOR et direct dans le cas d'un Put américaine.

| S   | Exact  | SPH(PSOR)     | SPH          |
|-----|--------|---------------|--------------|
| 7   | 3      | 3             | 3            |
| 8   | 2.0014 | 2.0007        | 2.0007       |
| 9   | 1.1641 | 1.1641        | 1.1640       |
| 10  | 0.6021 | 0.6022        | 0.6022       |
| 11  | 0.2781 | 0.2780        | 0.2781       |
| 12  | 0.1159 | 0.1163        | 0.1164       |
| 13  | 0.0443 | 0.0445        | 0.0445       |
| CPU | -      | 10.8317 (sec) | 0.8536 (sec) |

Le tableau 3.3 compare les résultats obtenus par notre approche SPH avec ceux obtenus à l'aide d'autres méthodes sans maillages publiées dans littératures [8,9,75]. La première colonne du tableau donne les valeurs de l'actif sous-jacent tandis que la deuxième colonne contient les valeurs de la solution exacte (Binomiale). La troisième colonne contient ceux de la méthode de front-fixing [70] et les quatre dernières colonnes représentent les solutions obtenues par les quatre méthodes sans maillage Global-RBF [8], Quasi-RBFs [9], MLPG [75] et SPH respectivement. On remarque bien que les prix obtenus par la méthode SPH sont très proche de ceux fournis par la solution exacte (Binomiale) et on constate aussi que nos résultats sont très similaires à ceux générés par la méthode de Local Petrov–Galerkin [75], cela confirme bien l'efficacité et la performance de la méthode SPH.

Table 3.3: Les valeurs d'un Put américaine calculés par différentes méthodes numériques avec les paramètres  $K = 100, T = 1, r = 0.1, \sigma = 0.3, \theta = 1/2, S_{max} = 2K$ .

| S   | Binomial [71] | F-F-F [70] | Global RBF [8] | Quasi-RBF [9] | MLPG [75] | SPH     |
|-----|---------------|------------|----------------|---------------|-----------|---------|
| 80  | 20.2689       | 20.2662    | 20.2777        | 20.2655       | 20.2646   | 20.2644 |
| 85  | 16.3467       | 16.3396    | 16.3378        | 16.3427       | 16.3417   | 16.3415 |
| 90  | 13.1228       | 13.1124    | 13.1142        | 13.1185       | 13.1175   | 13.1172 |
| 95  | 10.4847       | 10.4733    | 10.4752        | 10.4813       | 10.4803   | 10.4800 |
| 100 | 8.3348        | 8.3277     | 8.3338         | 8.3363        | 8.3353    | 8.3331  |
| 105 | 6.6071        | 6.5936     | 6.6010         | 6.6020        | 6.6012    | 6.6011  |
| 110 | 5.2091        | 5.2004     | 5.2092         | 5.2079        | 5.2071    | 5.2071  |
| 115 | 4.0976        | 4.0872     | 4.0965         | 4.0935        | 4.0928    | 4.0927  |
| 120 | 3.2059        | 3.2023     | 3.2108         | 3.2072        | 3.2066    | 3.2064  |

Les tableaux 3.4-3.6 présentent une comparaison entre les prix d'une option de Call américaine obtenus à l'aide de notre méthode SPH et ceux fournis par le modèle binomiale (avec  $n = 10000$  le nombres de périodes) et d'autres approches numériques et quasi-analytiques publiées dans la littérature [30,38,40,42,49,61,67,78]. Suite aux résultats présentés dans les tableaux 3.4-3.6, nous pouvons dire que l'approche SPH génère des prix plus précis que ceux fournis par les autres approches analytiques. Les trois exemple presentés dans les tableaux 3.4-3.6 sont tirés de l'article [78].

Les simulations numeriques sont efectuées avec les prametres suivants :  $T = 0.5$  (6 mois),  $K = 100$ ,  $S_{max} = 2K$ , et  $N = M = 250$ .

Table 3.4: Comparaison entre les prix d'un Call americain obtenus par notre méthode SPH et ceux fournis par d'autres méthodes avec les parametres :  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.03$ ,  $q = 0.07$ .

| S        | 80     | 90     | 100    | 110     | 120     |
|----------|--------|--------|--------|---------|---------|
| Binomial | 0.2194 | 1.3864 | 4.7825 | 11.0978 | 20.0004 |
| SPH      | 0.2201 | 1.3860 | 4.7831 | 11.0955 | 20.0003 |
| Ref[67]  | 0.2300 | 1.4050 | 4.7821 | 11.0409 | 20.0000 |
| Ref[47]  | 0.2191 | 1.3849 | 4.7851 | 11.0889 | 20.0073 |
| ref[49]  | 0.2186 | 1.3818 | 4.7862 | 11.2553 | 20.0000 |
| Ref[42]  | 0.2199 | 1.3898 | 4.8044 | 11.0686 | 20.0531 |
| Ref[30]  | 0.2195 | 1.3862 | 4.7821 | 11.0976 | 20.0000 |
| Ref[61]  | 0.2188 | 1.3802 | 4.7728 | 11.0893 | 20.0000 |
| Ref[38]  | 0.2196 | 1.3872 | 4.7837 | 11.0993 | 20.0005 |
| Ref[40]  | 0.2216 | 1.3857 | 4.7682 | 11.0794 | 20.0000 |
| Ref[78]  | 0.2185 | 1.3851 | 4.7835 | 11.1120 | 20.0000 |

Table 3.5: Comparaison des méthodes analytiques et SPH, pour évaluer un call américain avec les paramètres  $\sigma = 0.3, r = 0.03, q = 0.07$ .

| S        | 80     | 90     | 100     | 110     | 120     |
|----------|--------|--------|---------|---------|---------|
| Binomial | 2.6889 | 5.7223 | 10.2385 | 16.1812 | 23.3598 |
| SPH      | 2.6892 | 5.7212 | 10.2383 | 16.1794 | 23.3582 |
| Ref[67]  | 2.7108 | 5.7416 | 10.2417 | 16.1520 | 23.2883 |
| Ref[47]  | 2.6864 | 5.7212 | 10.2451 | 16.1831 | 23.3419 |
| ref[49]  | 2.6827 | 5.7163 | 10.2351 | 16.2107 | 23.4771 |
| Ref[42]  | 2.6897 | 5.7361 | 10.2752 | 16.2012 | 23.3288 |
| Ref[30]  | 2.6893 | 5.7231 | 10.2402 | 16.1817 | 23.3574 |
| Ref[61]  | 2.6787 | 5.7113 | 10.2205 | 16.1629 | 23.3389 |
| Ref[38]  | 2.6899 | 5.7237 | 10.2404 | 16.1831 | 23.3622 |
| Ref[40]  | 2.6871 | 5.7110 | 10.2143 | 16.1456 | 23.3211 |
| Ref[78]  | 2.6788 | 5.7195 | 10.2265 | 16.1756 | 23.3828 |

Table 3.6: Les prix d'un Call américain calculés par différentes méthodes numériques avec les paramètres :  $\sigma = 0.4, r = 0.03, q = 0.07$ .

| s        | 80     | 90     | 100    | 110     | 120     |
|----------|--------|--------|--------|---------|---------|
| Binomial | 1.6644 | 4.4947 | 9.2504 | 15.7977 | 23.7061 |
| SPH      | 1.6657 | 4.4948 | 9.2517 | 15.7970 | 23.7045 |
| Ref[67]  | 1.6645 | 4.4950 | 9.2513 | 15.7988 | 23.7086 |
| Ref[47]  | 1.6644 | 4.4946 | 9.2509 | 15.7973 | 23.7082 |
| ref[49]  | 1.6644 | 4.4947 | 9.2506 | 15.7975 | 23.7062 |
| Ref[42]  | 1.6644 | 4.4947 | 9.2506 | 15.7975 | 23.7062 |
| Ref[30]  | 1.6644 | 4.4947 | 9.2506 | 15.7975 | 23.7062 |
| Ref[61]  | 1.6604 | 4.4959 | 9.2513 | 15.7994 | 23.7027 |
| Ref[38]  | 1.6644 | 4.4947 | 9.2506 | 15.7975 | 23.7062 |
| Ref[40]  | 1.6644 | 4.4947 | 9.2507 | 15.7977 | 23.7066 |
| Ref[78]  | 1.6644 | 4.4947 | 9.2506 | 15.7980 | 23.7060 |

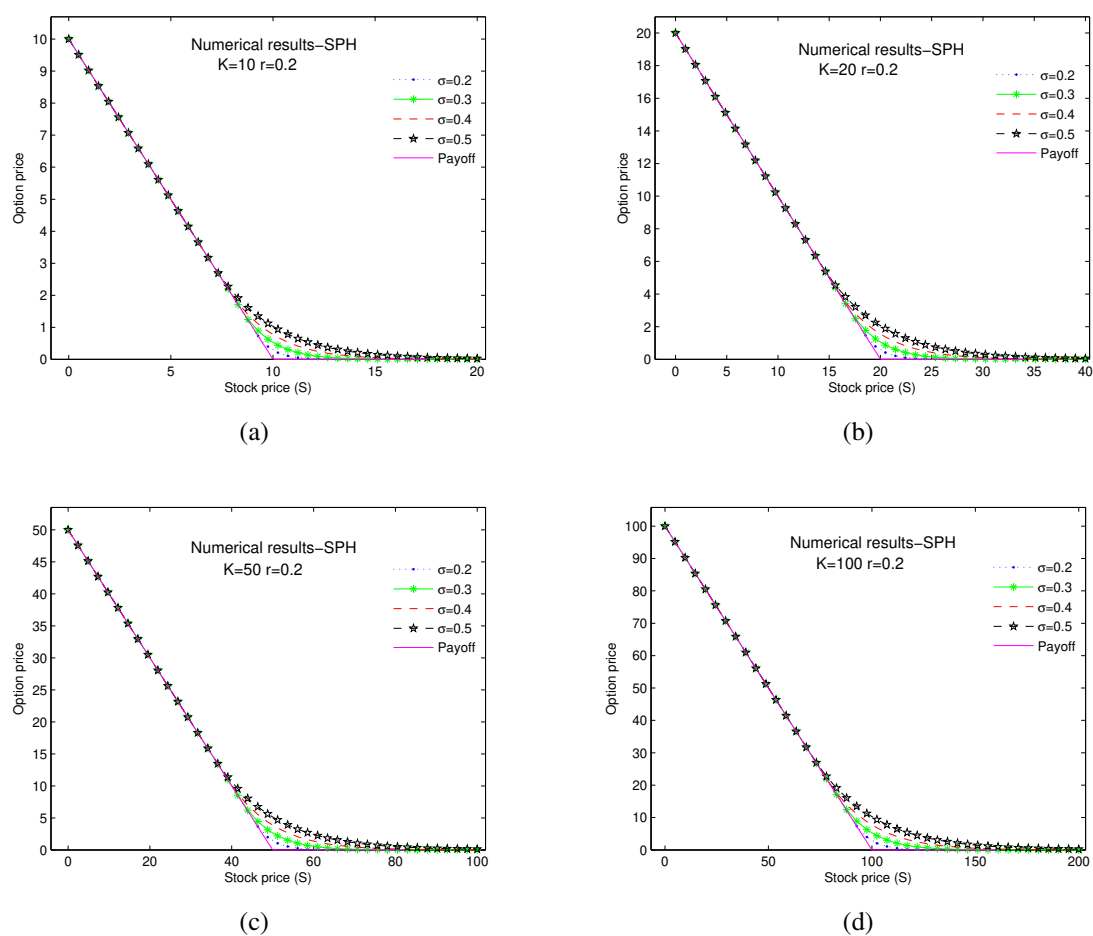


Fig. 3.3: Valeurs de l'option de Put américaine calculée par la méthode SPH, avec les paramètres  $\theta = 1/2$ ,  $N = 42$ , et  $M = 200$ .

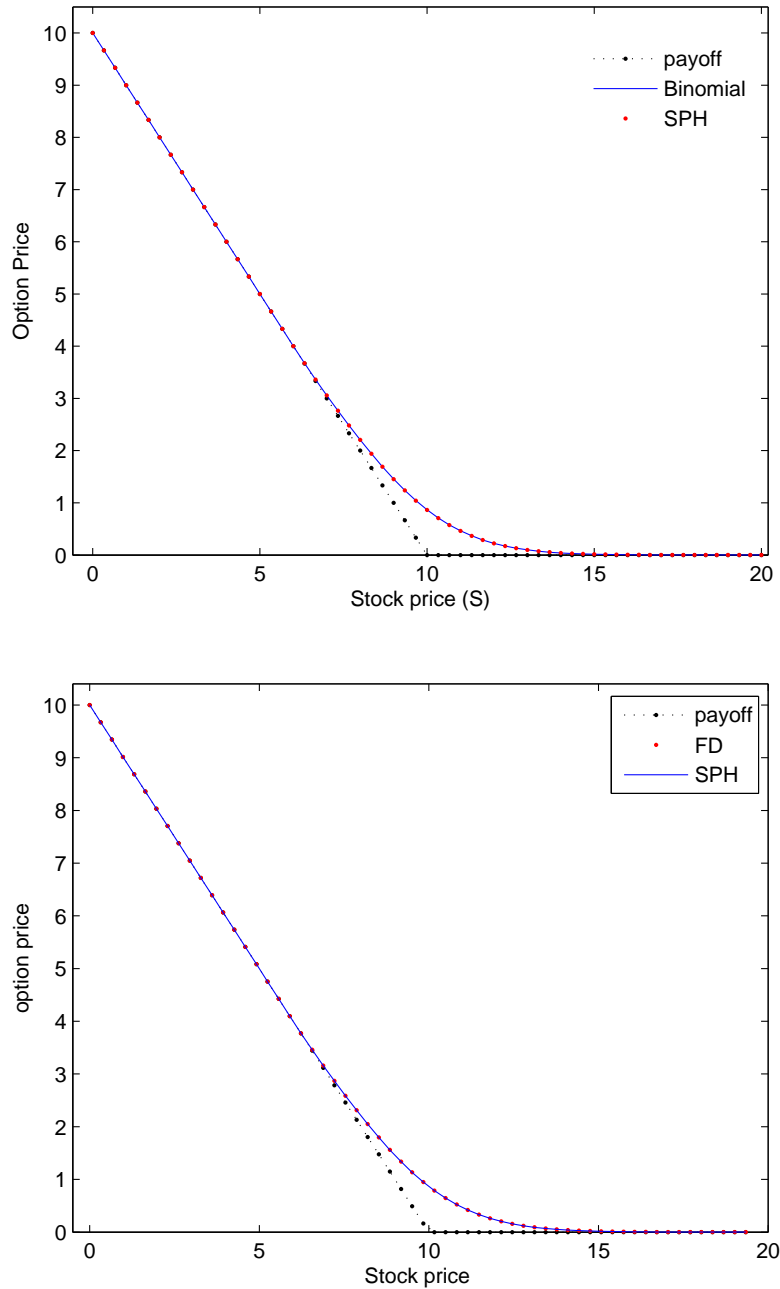


Fig. 3.4: Comparaison entre les solutions SPH, Binomial et Différences Finies pour les options de Put américaines avec les paramètres  $\theta = 1/2, N = 60$  et  $M = 250$ .

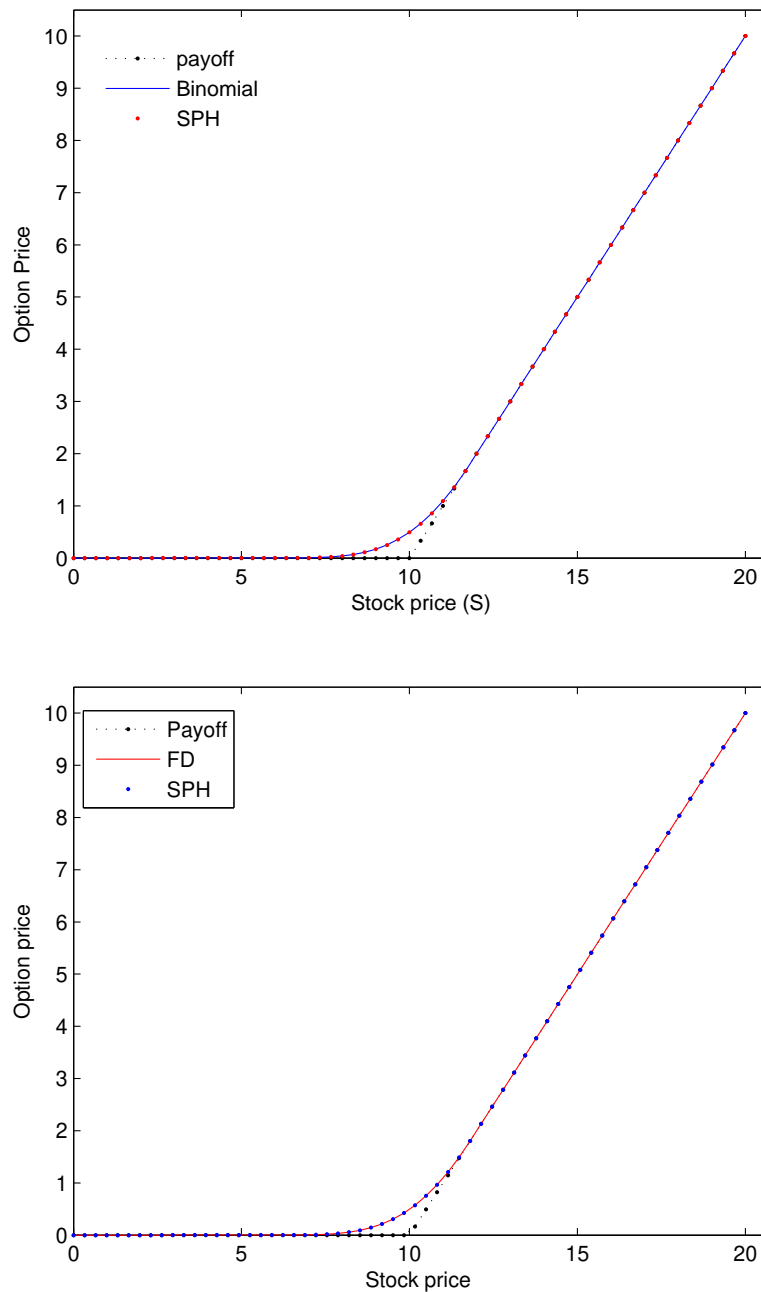


Fig. 3.5: Comparaison entre les solutions SPH, Binomial et Différences Finies pour les options de Calls américaines avec les paramètres  $\theta = 1/2$ ,  $N = 60$  et  $M = 250$ .



### 3.6 Analyse de l'erreur

Comme il n'existe pas une solution analytique exacte pour les problèmes d'options américaines, nous nous sommes proposés la solution numérique Binomial, avec  $n = 1000$  ( $n$  étant le nombre de périodes), comme solution référence. Afin d'étudier la précision et la convergence de la méthode SPH, nous comparons les solutions obtenues à l'aide de SPH avec la solution exacte (Binomial) au sens de la moyenne quadratique (*Root Mean Square* (RSM)) et de la norme maximale discrète :

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (U_{exact}(x_i, 0) - U_{SPH}(x_i, 0))^2}. \quad (3.60)$$

$$E_{\infty} = \max_{i=1,2,..,N} |U_{exact}(x_i, 0) - U_{SPH}(x_i, 0)|. \quad (3.61)$$

Où  $U_{SPH}$  désigne la solution numérique obtenue par la méthode SPH et  $U_{exact}$  : la solution exacte (Binomial) au point  $i$ .

Pour simulation numériques, on considère le cas d'une option de Put américain de maturité  $T = 0.5$ , un prix d'exercice  $K = 10$ , un taux d'intérêt  $r = 0.05$  et une volatilité  $\sigma = 0.25$ , on prend  $S_{max} = 2K$ .

Pour déterminer l'ordre de la convergence de notre approche SPH, c'est-à-dire l'ordre d'approximation par rapport à l'espace du sous-jacent, nous prenons différentes valeurs de  $N = 16, 32, 64, 128$  et  $256$  et en fixant la subdivision en temps  $t, M = 1024$ . L'ordre est calculé selon la formule suivante, les résultats ont été rapportés au le tableau 3.7.

$$Ratio = \log_2 \left( \frac{E_{\infty}^{N,M}}{E_{\infty}^{2N,M}} \right). \quad (3.62)$$

La figure 3.6 représente les erreurs proviennent de la discrétisation des problèmes (3.35) et (3.54) par la méthode SPH. Nous pouvons aisément remarque que la version sinh-transformée de l'équation de Black-Scholes (3.42) fournit des résultats plus précis que la version logarithmique, cela est dû au raffinement autour du prix d'exercice de l'option  $K$ .

Dans la figure 3.7 nous représentons l'erreur commise, en norme RMS, par la méthode SPH en fonction du rapport  $h/\Delta x$ . Comme nous pouvons remarquer l'erreur est fortement liée au choix de la longueur de lissage  $h$ , la meilleure précision est atteinte dans le cas  $h = \Delta x$ .

Le tableau 3.7 évalue la précision et la performance de la méthode SPH. Les deux premières colonnes contiennent les nombres des points de discrétisation en espace de sous-jacents et de temps, les deux colonnes au milieu représentent l'erreur en norme, infinie et RMS, et les deux derniers contiennent l'ordre de la convergence et le temps de calcul (CPU). Les résultats donnés au tableau 3.7 montrent bien que la méthode SPH fournit des prix d'options qui converge vers le bon prix et nous avons atteint une précision de l'ordre de  $10^{-4}$  pour la norme RMS, avec  $N = 32$  points comme base pour l'espace du sous-jacent.

Table 3.7: L'efficacité du schéma SPH, pour évaluer un Put américain.

| M    | N   | $E_\infty$  | $E_{RMS}$   | Ratio  | CPU time (s) |
|------|-----|-------------|-------------|--------|--------------|
| 1024 | 16  | 4.50000e-03 | 8.95809e-04 | -      | 0.2077       |
|      | 32  | 2.57000e-03 | 5.22527e-04 | 0.8082 | 0.2664       |
|      | 64  | 4.1000e-04  | 8.52085e-05 | 2.6481 | 0.4255       |
|      | 128 | 1.2000e-04  | 2.68282e-05 | 1.7726 | 1.03863      |
|      | 256 | 4.0000e-05  | 6.28539e-06 | 1.5850 | 1.096528     |

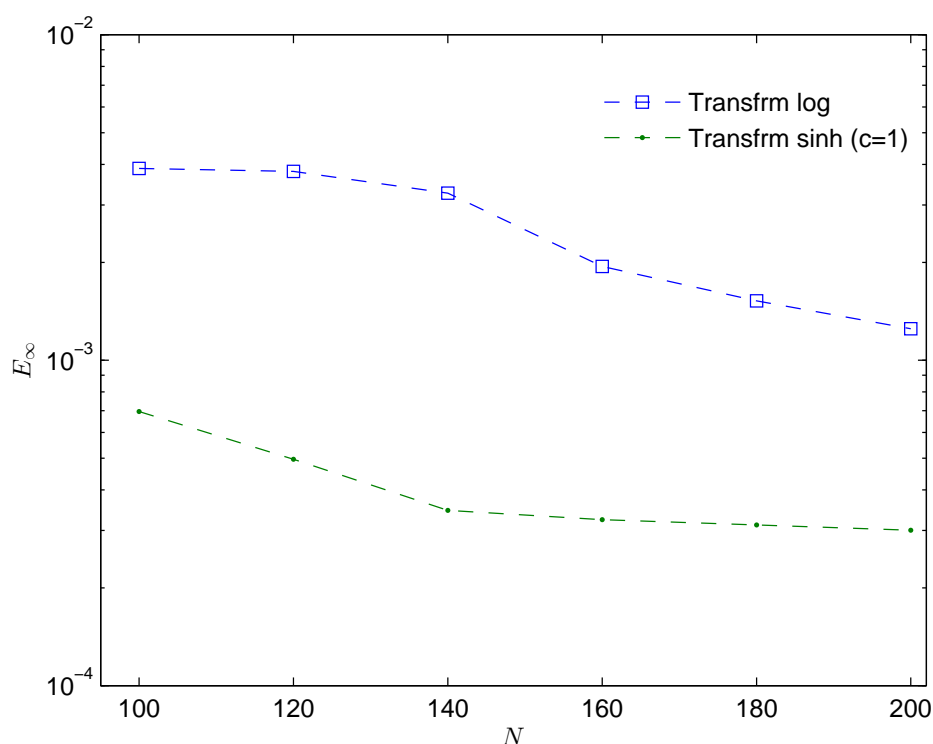


Fig. 3.6: Erreurs absolues pour la transformation hyperbolique sinus et la transformation logarithmique.

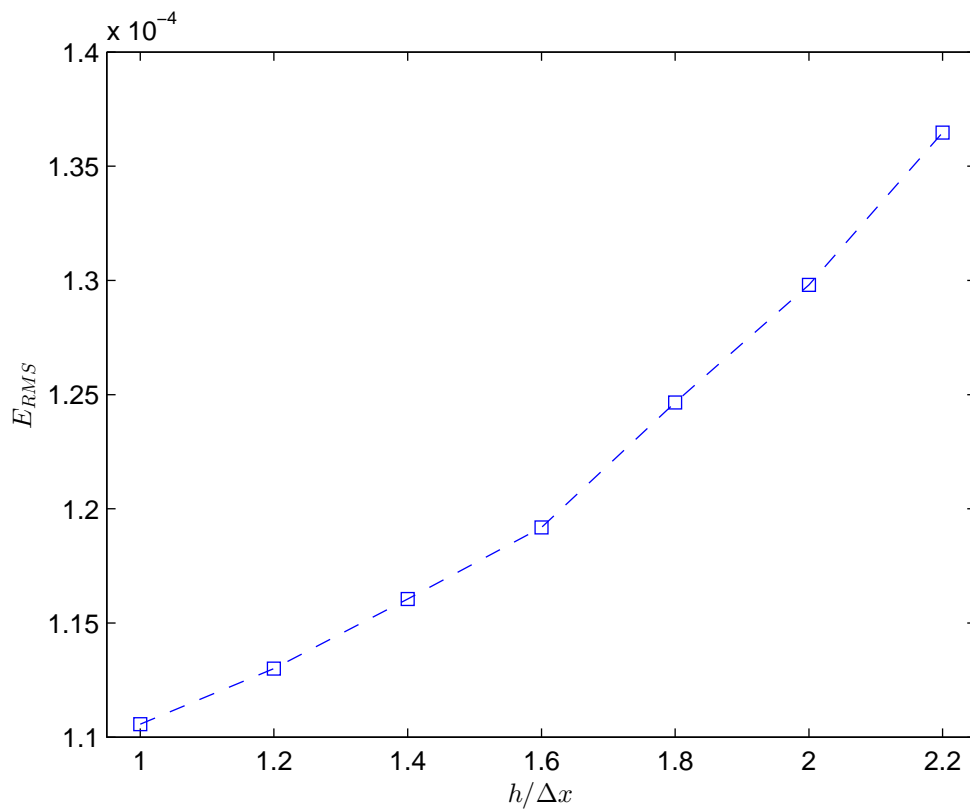


Fig. 3.7: Evolution de l'erreur en norme RMS en fonction du rapport  $h/\Delta x$ .

### 3.7 La frontière d'exercice

La détermination de la frontière d'exercice (où la frontière libre) d'une option américaine a une importance capitale, puisque à tout instant, le détenteur de l'option doit décider s'il est optimal d'exercer ou non son option. Cette frontière, noté  $S_f(t)$ , varie en générale avec le temps  $t$ . A chaque point de l'intervalle de temps  $0 \leq t \leq T$ , il existe une valeur spécifique  $S_f(t)$  (le prix critique de l'actif sous-jacent  $S$ ), au quelle il est optimal d'exercer l'option. Dans le cas d'une option de Put Américaine  $S_f(t)$  est donnée par

$$S_f(t) = \sup \{S_t \in \mathbb{R} : (S_t, t) \in \mathcal{E}_p\} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.63)$$

où  $\mathcal{E}_p$  représente la région de l'exercice définit par :

$$\mathcal{E}_p = \{(S_t, t) : V(S_t, t) = \max(K - S_t)\}. \quad (3.64)$$

Dans le cas d'une option de Call américaine écrite sur un actif sous-jacent qui paye un dividende la frontière  $S_f(t)$  est donnée par :

$$S_f(t) = \inf \{S_t \in \mathbb{R} : (S_t, t) \in \mathcal{E}_c\} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.65)$$

avec

$$\mathcal{E}_c = \{(S_t, t) : V(S_t, t) = \max(S_t - K)\}. \quad (3.66)$$

Si l'on connaît cette frontière, valoriser une option américaine revient alors à valoriser une option européenne car la date d'exercice est bien déterminée.

Dans ce qui suit, nous donnons quelques propriétés de la frontière  $S_f(t)$

- continue, dérivable [64,46].
- monotone (croissante pour un put, décroissant pour un call) [46,31].
- Pour un Put, la valeur de  $S_f(t)$  à un moment proche de l'expiration est donnée par [37,58]:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S_f(t) = \min(K, \frac{r}{q}K), \quad (3.67)$$

où  $q$  représente le taux de dividende.

- Pour un Call, la borne inferieure de la frontière  $S_f(t)$  est donnée par [31,58] :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S_f(t) = \max(K, \frac{r}{q}K). \quad (3.68)$$

Comme il n'existe pas une formule explicite décrivant la frontière libre même dans les cas les plus simples. Nous allons recourir aux méthodes numériques pour l'approximer.

Pour le cas d'un Put, La frontière libre  $S_f(t)$  peut-être extraite de la solution  $V(S, t)$  à partir de la condition  $V(S_f(t), t) = K - S_f(t)$ . A chaque instant  $t_k \quad k = 1, \dots, M$  et après avoir calculé numériquement la solution  $V(S, t_k)$ , on teste si  $V(S_i, t_k)$  vaut pour la fonction payoff pour  $i$  allant

de 1 à  $N$  et le premier indice  $i$  pour lequel  $V(S_i, t_k) >$  fonction payoff donne une approximation  $S_f(t)$ . D'une manière similaire, nous pouvons calculer la frontière d'exercice  $S_f(t)$  associée à une option de Call américaine.

Pour illustration, nous choisissons pour nos tests numériques les paramètres financiers suivants : un prix d'exercice  $K = 100$ , une volatilité  $\sigma = 0.3$ , un taux d'intérêt  $r = 0.1$  et une échéance de 12 mois  $T = 1$  (une année). Le motive de ce choix est de pouvoir comparer nos résultats avec ceux fournis par la littérature [8,70,59].

La figure 3.8a représente la frontière d'exercice optimale pour le cas d'un Put américain qui paye pas de dividende tandis que la figure 3.8b représente la frontière d'exercice d'une option de Call écrit sur un actif sous-jacent qui verse un dividende  $q = 0.2$ . D'après les figures, nous pouvons clairement constater que nos résultats numériques sont en bon accord avec ceux calculés à l'aide de la méthode des différences finis.

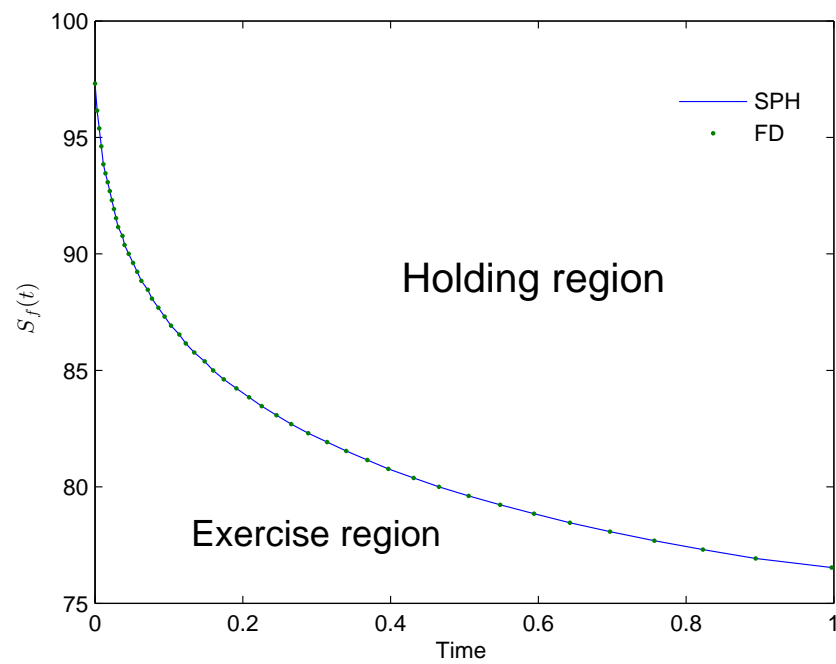
La figure 3.9a illustre l'influence de la volatilité  $\sigma$  sur la frontière d'exercice optimale pour le cas d'un Put américain. On constate en effet qu'une augmentation de la valeur de la volatilité entraîne une baisse du prix de la frontière d'exercice  $S_f(t)$ .

La figure 3.9b décrit le comportement de la frontière d'exercice d'une option de Call américaine pour différentes valeurs de la volatilité  $\sigma$ . Comme le montre la figure 3.9b, lorsque la volatilité de l'actif sous-jacente augmente, le prix de la frontière d'exercice optimale  $S_f(t)$  associé augmente également.

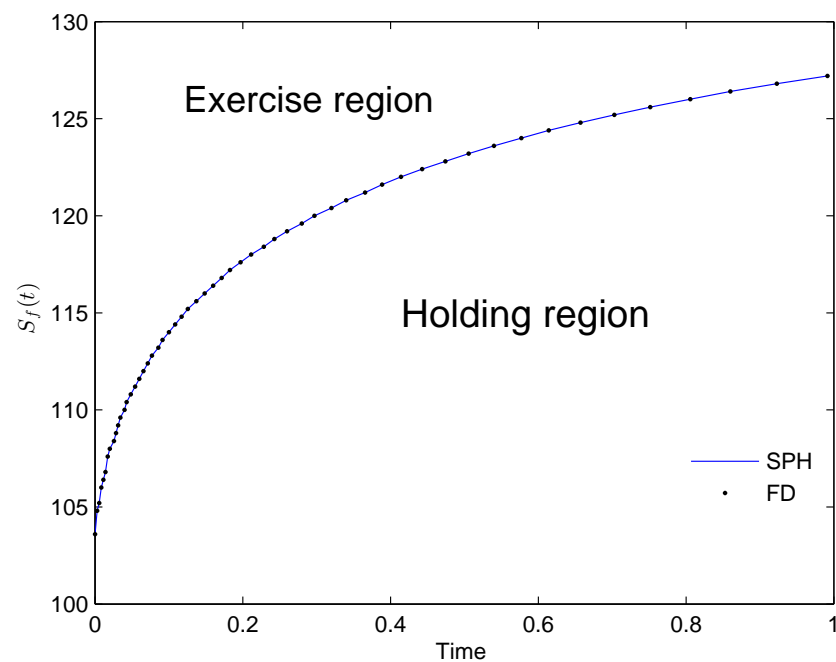
Dans le tableau 3.8 nous comparons la valeur de la frontière d'exercice  $S_f(t)$  (à l'instant  $t = T$ ) calculée par la méthode SPH, et celle fournie par d'autres différentes méthodes [8,59,62,70]. D'après les résultats numériques du tableau 3.8, nous pouvons voir que la valeur  $S_f(T)$  calculée par notre approche SPH est très proche de la valeur optimale 'exacte'  $S_f(T)=76.25$

Table 3.8: Comparaison des valeurs de la frontière d'exercice  $S_f(T)$ .

| Méthode               | frontière d'exercice optimale $S_f(T)$ |
|-----------------------|--|
| Binomial[62] (n=1000) | 76.51                                  |
| Ref[59]               | 76.11                                  |
| F-F-F [70]            | 76.25                                  |
| Quasi-RBFs [8]        | 76.33                                  |
| SPH                   | 76.22                                  |

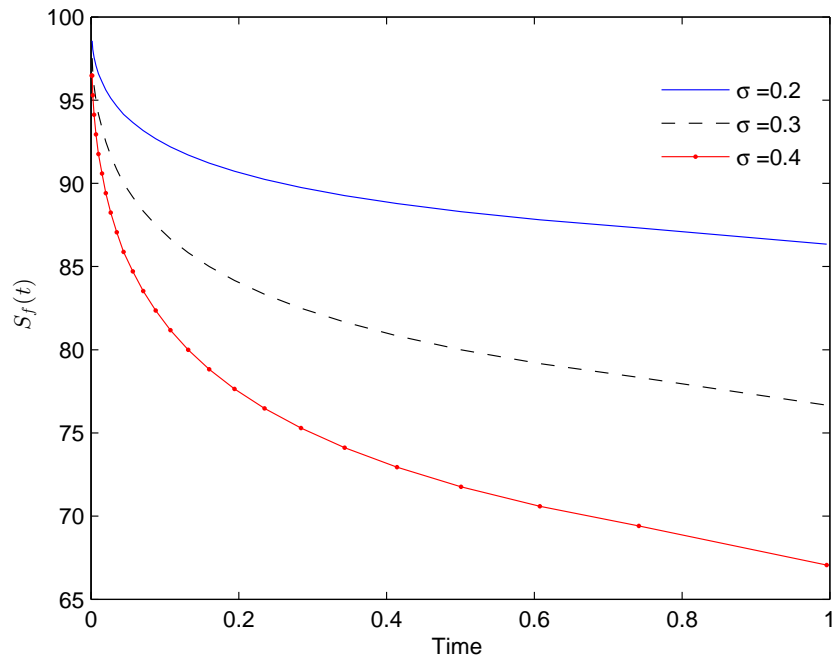


(a)

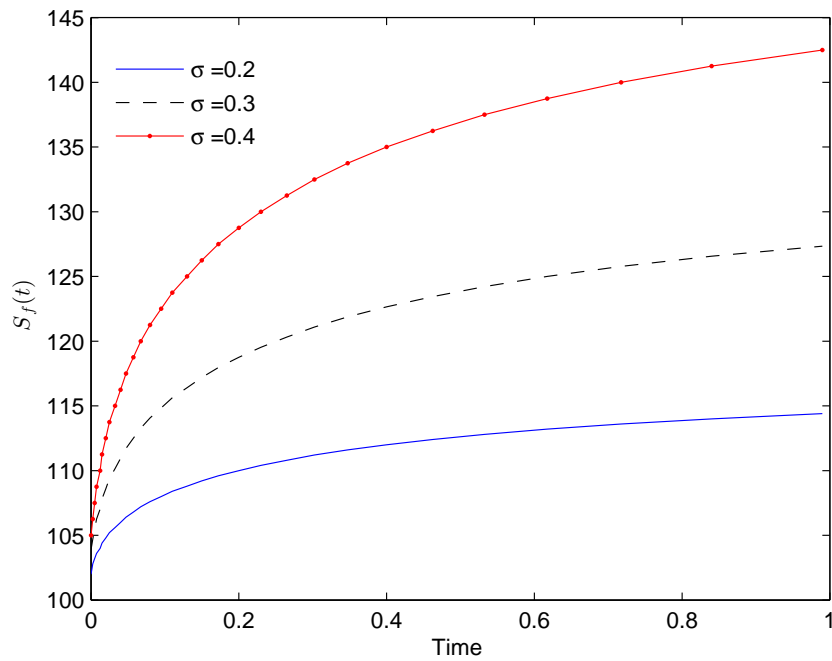


(b)

Fig. 3.8: Frontière d'exercice optimale d'une option américaine dans les deux cas Put (en haut) et Call (en bas).



(a)



(b)

Fig. 3.9: Illustration de la frontière d'exercice d'une option américaine dans les deux cas Put (en haut) et Call (en bas) pour différentes valeurs de la volatilité  $\sigma$ .

## 3.8 Les grecques

Dans cette section nous calculons les grecques (Delta et Gamma) associés à une option américaine.

### 3.8.1 Delta

Le Delta ( $\Delta$ ) d'une option correspond à la dérivée du prix de cette option en regard du prix de l'actif sous-jacent  $S$ .

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (3.69)$$

Dans les versions transformées, l'expression ci-dessus prend les formes suivantes:

$$\Delta = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)x - \frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)^2\tau} \left( -\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)u + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (3.70)$$

$$\Delta = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{1}{s'(\zeta)}, \quad (3.71)$$

où  $u$  et  $\psi$  les solutions des problèmes (3.35) et (3.54) respectivement.

En remplaçant les dérivées dans (3.70) et (3.71) par leur approximation SPH, on trouve que la valeur du Delta ( $\Delta$ ) est donnée par :

$$\Delta(x_i) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)x_i - \frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)^2\tau} \left( -\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)u_i + \beta_i \sum_j u_{ji} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_{ij}} \right), \quad (3.72)$$

$$\Delta(\zeta_i) = \frac{1}{s'(\zeta)} \beta_i \sum_j \psi_{ji} \frac{\partial w_{ij}}{\partial \zeta_{ij}}, \quad (3.73)$$

où  $w_{ij}$  et  $\beta_i$  désigne la fonction du noyau et le coefficient de correction.

### 3.8.2 Gamma

Gamma mesure le changement du delta ( $\Delta$ ) par rapport à un changement infinitésimal du cours du sous-jacent  $S$ . Le gamma ( $\Gamma$ ) de l'option correspond à la dérivée seconde du prix de l'option par rapport au prix du sous-jacent  $S$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}. \quad (3.74)$$

Dans la méthode SPH, l'expression du Gamma (3.74) peut être approximée par l'expression SPH (3.32) ou en calculant directement la dérivée première du Delta ( $\Delta$ ) comme suit :

$$\Gamma(S_i) = \frac{\partial \Delta_i}{\partial S_i} = \beta_i \sum_j (\Delta(S_j) - \Delta(S_i)) \frac{\partial w_{ij}}{\partial S_{ij}} \Delta S. \quad (3.75)$$



En injectant les expressions du Delta (3.72), et (3.73) dans l'équation (3.75), on trouve que Gamma ( $\Gamma$ ) réécrit comme suit :

$$\Gamma(x_i) = \frac{1}{K} e^{-\frac{1}{2}(\frac{2r}{\sigma^2}+2)x_i - \frac{1}{4}(\frac{2r}{\sigma^2}+1)^2\tau} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{4r^2}{\sigma^4} - 1 \right) u_i - \frac{2r}{\sigma^2} \beta_i \sum_j u_{ji} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_{ij}} \Delta x + 2 \sum_j \frac{u_{ij}}{x_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_{ij}} \Delta x \right), \quad (3.76)$$

$$\Gamma(\zeta_i) = \frac{1}{s'(\zeta_i)^2} \sum_j \frac{\psi_{ij}}{\zeta_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial \zeta_{ij}} - \frac{s''(\zeta_i)}{s'(\zeta_i)^3} \beta_i \sum_j \psi_{ji} \frac{\partial w_{ij}}{\partial \zeta_{ij}}, \quad (3.77)$$

où  $u$  et  $\psi$  désignent les solutions des problèmes (3.35) et (3.54).

Pour illustration numérique, on calcule les paramètres de sensibilité (Delta et Gamma) pour une option de put américaine correspondant à un prix d'exercice  $K = 100$ , un taux d'intérêt  $r = 0.1$ , une échéance  $T = 1$  (12 mois), et une volatilité  $\sigma = 0.3$ .

Le tableau 3.9 représente une comparaison des valeurs du delta données par la méthode SPH, le modèle de Binomiale, Quasi-RBFs [9], Global-RBF [8] et la méthode de front-fixing (F-F-F) [70]. Comme on peut le voir d'après le tableau 3.9, nos résultats sont en très bon accord avec ceux obtenus à l'aide de la méthode binomiale.

La figure 3.10 compare les valeurs de delta, calculés à l'aide de la méthode SPH et le modèle binomial ( $n = 1000$ ), pour une option de Put américaine écrit sur un actif sous-jacent  $S$  qui paye un dividende  $q = 0.05$  avec les mêmes paramètres financiers mentionnés ci-dessous. Nous constatons bien que les deux méthodes donnent des résultats très similaires.

La figure 3.11 représente la différence entre les valeurs du delta obtenues par la méthode SPH et celles fournies par la méthode binomiale ( $n = 2000$ ) pour une option de Put américaine.

Dans la figure 3.13 nous comparons les valeurs du gamma ( $\Gamma$ ) calculées par la méthode SPH et celles obtenues par la méthode des différences finies. nous pouvons constater graphiquement que les résultats fournis par la méthode SPH sont en bons adéquats avec ceux de la méthode des Différences finis.

La figure 3.12 représente les valeurs du delta ( $\Delta$ ) calculées à l'aide de la méthode SPH pour différentes valeurs de la volatilité  $\sigma$ , pour une option de Put américaine. Comme l'illustre la figure 3.12, le delta est très sensibles aux changements de la volatilité  $\sigma$ . Ces changements nécessitent un rebalancement périodique du portefeuille de couverture.

Table 3.9: Comparaison de la valeur du Delta ( $\Delta$ ) donnée par la méthode SPH et d'autres approches numériques avec les paramètres  $\theta = 1/2, N = 100, M = 250$ .

| S   | Binomial | SPH      | F-F-F [70] | Global RBF [8] | Quasi-RBF [9] |
|-----|----------|----------|------------|----------------|---------------|
| 80  | -0.8631  | - 0.8629 | -0.8661    | -0.8707        | -0.8630       |
| 85  | -0.7109  | - 0.7105 | -0.7133    | -0.7101        | -0.7106       |
| 90  | -0.5829  | - 0.5827 | -0.5848    | -0.5836        | -0.5827       |
| 95  | -0.4755  | - 0.4755 | -0.4769    | -0.4748        | -0.4753       |
| 100 | -0.3856  | - 0.3858 | -0.3866    | -0.3849        | -0.3854       |
| 105 | -0.3108  | - 0.3111 | -0.3116    | -0.3104        | -0.3107       |
| 110 | -0.2491  | -0.2498  | -0.2497    | -0.2485        | -0.2490       |
| 115 | -0.1986  | - 0.1998 | -0.1990    | -0.1983        | -0.1985       |
| 120 | -0.1575  | - 0.1596 | -0.1578    | -0.1573        | -0.1575       |

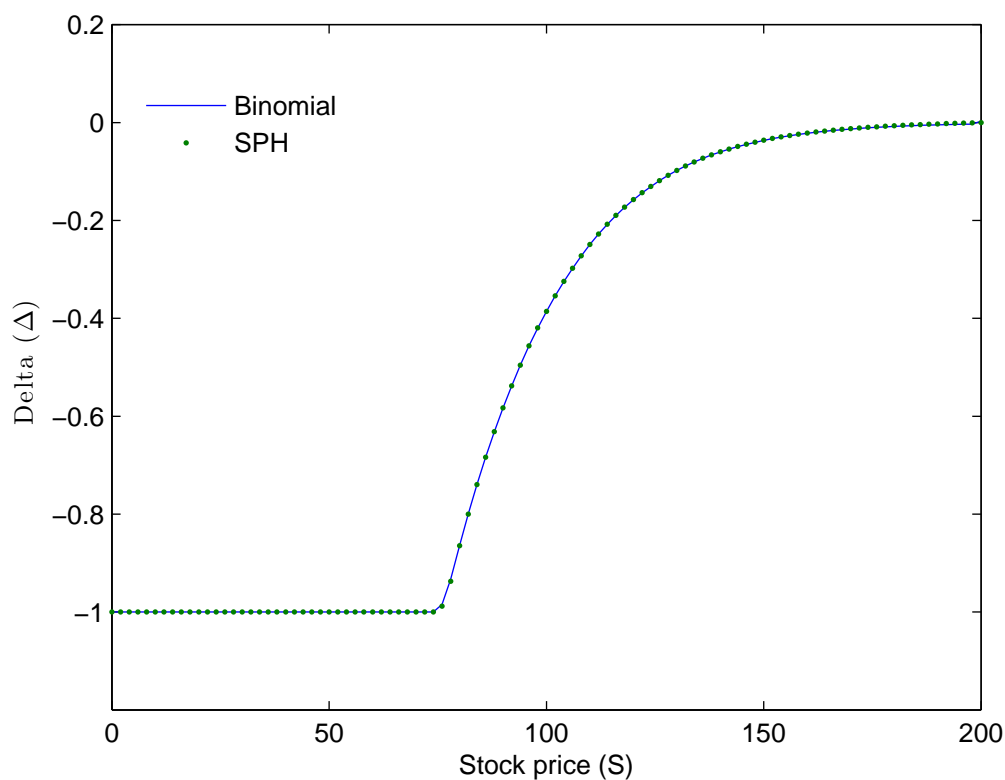


Fig. 3.10: Valeurs du Delta ( $\Delta$ ) obtenues par SPH et modèle Binomial, en fonction du cours du sous-jacent avec les paramètres  $\theta = 1/2, N = 100, M = 250$ .

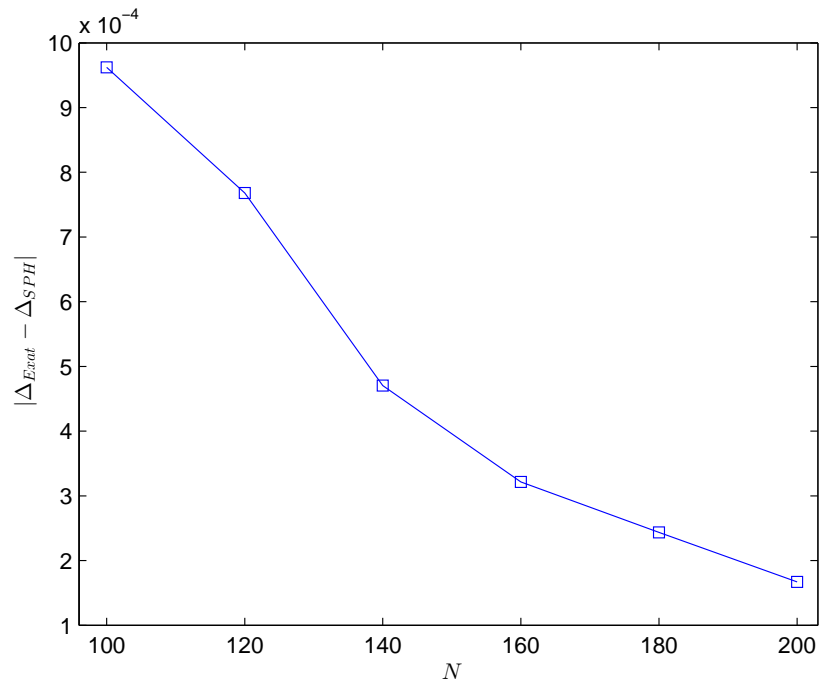


Fig. 3.11: L'erreur commise sur le calcul du Delta ( $\Delta$ ) en fonction du nombre de points d'interpolation  $N$ .

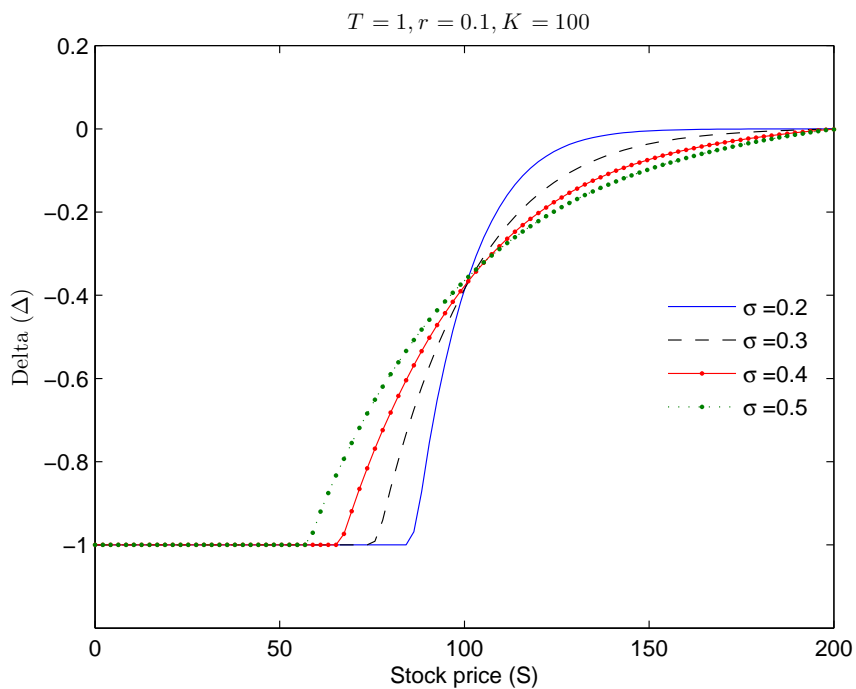


Fig. 3.12: Une illustration de la façon dont une variation de la volatilité affecte le delta ( $\Delta$ ).

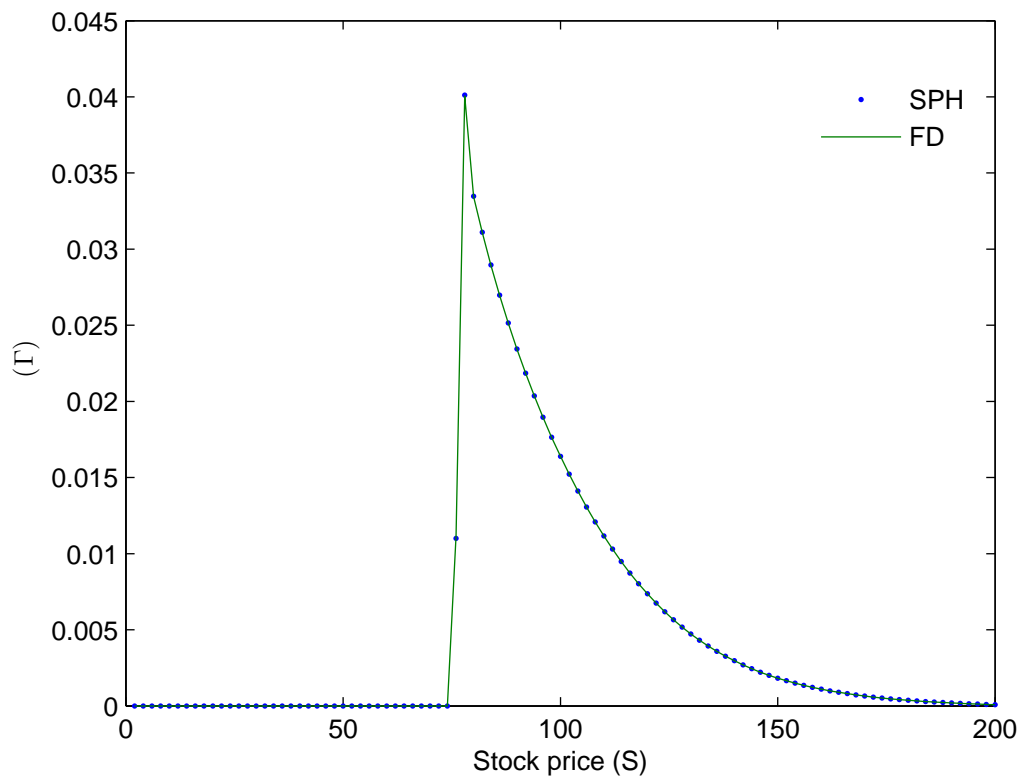


Fig. 3.13: Variation du Gamma ( $\Gamma$ ) par rapport au cours du sous-jacent pour une option de Put américaine.

### 3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réintroduit la méthode SPH pour pricing les options américaines dans le cadre du modèle de Black-Scholes. Le problème de pricing d'options a été formulé sous forme d'un problème de complémentarité linéaire.

Nous avons utilisés deux transformations de coordonnées: la première c'est logarithmique, qui nous a permis de transformer l'équation de Black-Scholes en une équation de la chaleur. Mais celle-ci a un effet de dispersion. Pour cela, et pour des raisons comparatives, nous avons utilisés une deuxième transformation, à savoir  $\sinh$  hyperbolique, qui permet de raffiner la discrétisation au point de singularité ( $S = K$ ).

Les systèmes linéaires résultants sont discrétisés par la méthode SPH (Spatial) combinée avec une  $\theta$ -méthode (espace-temps). Alors nous avons adaptés deux algorithmes de résolution, un algorithme itérative PSOR, qui est très recommandé dans la littérature pour ce genre de problèmes, et un algorithme direct (solveur direct), du problème de complémentarité linéaire (3.35). Les deux algorithmes sont comparés en terme de précision et de coût de calcul (le temps d'exécution). Pour valider notre approche plusieurs comparaisons sont effectuées entre la solution SPH et les résultats obtenus par le modèle binomiale et d'autres approches numériques et quasi-analytiques largement utilisées en mathématiques financières. Les résultats obtenus sont très encourageants et montrent bien les capacités numériques remarquables de la méthode SPH.

Nous avons également comparé nos résultats avec ceux fournis par les méthodes sans maillage, à savoir Quasi-RBFs [9], Global-RBF [8] et MLG [75]. Nous avons trouvé que la méthode SPH et la méthode MLG (avec des paramètres égaux tel que le nombre des points discrétisant les deux espaces temps et sous-jacent) génèrent des résultats identiquement similaires, cela suggère que la méthode proposée et IMLG[75] sont d'efficacité comparables.

Pour terminer nous avons également calculé les paramètres de sensibilité ( $\Delta$  et  $\Gamma$ ) du prix de l'option par rapport à la variation du cours de sous-jacents, ces paramètres sont très importants dans les stratégies de couverture que de trading. Les résultats numériques que nous avons obtenus sont en très bon accord avec ceux obtenus par d'autres méthodes comme celle du modèle Binomiale et la méthode des différences finies.

# Chapter 4

## Options exotiques

### 4.1 Introduction

Depuis les années 1970, et grâce aux travaux remarquables de Black, Scholes et Merton [3] sur l'évaluation des produits dérivés, les marchés financiers ont connu une impressionnante expansion. Pour se couvrir contre des risques de plus en plus nombreux et répondre aux besoins spécifiques des investisseurs les institutions financières se trouvent dans l'obligation de développer et proposer des produits de plus en plus complexes. Ces nouveaux produits financiers sont connus sous le nom d'options exotiques, leur nom vise surtout à les différencier des options standards européennes ou américaines. Les options exotiques se répartissent en deux grandes catégories.

- Les options "non-path-dependent" : ce sont les options dont la valeur finale ne dépend pas du chemin suivi par le cours de l'actif sous-jacent pendant toute la durée de vie de l'option.
- Les options "path-dependent" : le prix de ces options dépend du chemin suivi par le cours de l'actif sous-jacent pendant toute la durée de vie de l'option.

Les options asiatiques [89], l'une des exemples d'options exotiques, sont apparues pour la première fois en 1987 sur le marché des changes de Tokyo, d'où leur nom d'asiatiques. Une option asiatique est un contrat qui promet à son détenteur, un capital à maturité lorsque la moyenne (arithmétique, parfois pondérée ou encore géométrique) du cours du sous-jacent, depuis l'émission de l'option jusqu'au jour de son exercice est en dessous ou au-dessus d'un certain niveau prédéterminé à l'avance (le strike). Un autre type de produits exotiques, qui sont probablement les plus anciennes de toutes les options exotiques, à savoir les options à barrière. Ces options sont considérées comme les plus simples des options dites "chemin dépendantes" ou "path-dependent". La caractéristique distinctive de l'option à barrière réside dans le fait que la fonction de paiement (Payoff) dépend non seulement du prix final de l'actif sous-jacent, mais également de la question de savoir si le prix de l'actif a franchi un certain niveau de barrière pendant la durée de vie de l'option.

Les options à barrière peuvent être classées en deux catégories [77]

- **L'option à barrière activante (knock-in option):** à une valeur à l'échéance dépendant du fait que le sous-jacent atteigne ou non un certain niveau du cours appelé barrière, pendant la durée

de vie de l'option. L'option n'est active que si elle atteint la barrière. Parmi ces options, appelées "Knock-in", nous distinguons celles où le niveau de départ du sous-jacent se situe en-dessous de la barrière "up and in" de celles dont le niveau initial du sous-jacent se situe au-dessous du niveau de la barrière "down and in".

- **L'option à barrière désactivante (knock-out option)** : fonctionne de la même manière que l'option à barrière "knock-in" sauf que l'option à barrière est désactivée lorsque l'actif sous-jacent atteint un certain niveau. Ces options sont généralement séparées en deux groupes. Celle où la barrière se situe au-dessus du niveau du sous-jacent se nomme "up and out", alors que celles où la barrière se situe en-dessous du sous-jacent sont nommées "down and out".

Ces nouvelles options apportent avec elle le problème de leur tarification. En effet la complexité des fonctions de payoff rend difficile la valorisation de ces options par des formules fermées ou semi-fermées comme le formule de Black-Scholes pour les options européennes. Par conséquent, diverses stratégies et techniques numériques ont été proposées dans la littérature pour l'évaluation de ces options. Thompson [92] a donné des bornes supérieures et inférieures pour le prix d'option asiatique. Geman et Yor [83] ont obtenu une expression analytique du prix du call asiatique européen en utilisant la transformation de Laplace, mais son inversion numérique créait des difficultés comme le montrent Fu et al [94]. Les méthodes de simulation de Monte-Carlo [95,102] donnent de bons résultats en matière d'évaluation des options, mais sont très coûteuses en termes de calcul.

Une autre approche pour évaluer l'option asiatique consiste à résoudre des équations aux dérivées partielles en deux dimensions spatiales, qui sont généralement assujetties à des solutions oscillatoires. Ingersoll [89] a montré que l'option asiatique à strike flottant bidimensionnel peut être transformée en EDP unidimensionnel. Rogers et Shi [63] ont fourni une nouvelle transformation pour modéliser l'option asiatique à strike flottant et fixé dans un cadre unidimensionnel, et ont étudié de nouvelles bornes pour les deux types d'options. Chen et Lyuu [82] ont réussi à étendre le concept de Rogers et Shi pour une maturité générale. Plusieurs efforts indépendants ont été faits pour valoriser les options asiatiques ces dernières années voir par exemple Zvan et al [104], Vecer [99], Benhamou et Duguet [105], Zhang [80,81], et Mudzimbabwe et al. [103].

Malgré qu'ils existent des formules analytiques fermées pour la plupart des options à barrière standard, cependant il n'y a toujours pas de formules analytiques disponibles pour une grande catégorie d'options à barrière de type européen et américain. Nous donnons ci-dessous quelques-unes des techniques utilisées pour résoudre les problèmes de pricing des options à barrière. Boyle et Lau [108] et Reimer et Sandmann [109] ont chacun étudié l'application du modèle binomial standard aux options à barrière. La conclusion fondamentale de ces études est que la convergence peut être très lente si le nombre de pas de temps n'est pas choisi de manière à ce que la barrière se trouve sur une rangée de nuds dans l'arbre binomial. Zvan et al [106] emploient la méthode des différences finies implicites pour évaluer les options à barrière en temps discret et continu sous les hypothèses de modèle de Black et Scholes. Leur technique semble assez flexible pour évaluer des options à double barrière en temps discret et des options à barrières dépendant de deux actifs sous-jacents. Geman et Yor [107] fournissent une formule semi-analytique permettant d'évaluer les options à double barrière. Cette formule fait intervenir des transformées de Laplace inverses. Une approche basée sur la méthode des fonctions à base radiale (FBR) couplées avec le schéma Crank-Nicholson a été proposée dans [90] pour pricer le prix des options à barrières et asiatique

de type européennes.

D'autres travaux liés aux méthodes numériques sur l'évaluation des options exotiques peuvent être trouvés dans [88,109, 110, 111, 112,113,114, 115,116, 117, 118, 119].

Dans ce chapitre, nous étendons la méthode sans maillage SPH développée dans les chapitres précédents pour résoudre les problèmes de pricing d'options de types exotiques, à savoir les options à barrières européenne et les options asiatiques. Les dérivées partielles impliquées dans les équations différentielles gouvernantes le prix d'options asiatiques et barrières sont approximées à l'aide de la méthode SPH, tandis que la  $\theta$ -méthode est utilisée pour discrétiser la dérivée temporelle. Plusieurs simulations numériques ont été établies sous différentes conditions afin d'examiner l'efficacité de notre méthode. Les résultats numériques obtenus sont comparés avec les solutions théoriques ou à celles fournies par d'autres méthodes numériques.

## 4.2 Formulation du problème à résoudre

Dans cette section, nous décrivons les problèmes de pricing pour deux types d'options exotiques, à savoir les options à barrière et les options asiatiques.

### 4.2.1 Option asiatique

Comme mentionné précédemment, les options asiatique, ou options sur moyenne, ont la particularité que le paiement terminal (le payoff) dépend d'une moyenne du prix du sous-jacent calculée sur la durée de vie de l'option. Il existe différentes manières de calculer la moyenne, ce qui entraîne différentes formes de la fonction de payoff et donc différents types d'options (voir Fusai [97] et Higham [101]). Dans le cas d'une option de Call asiatique à moyenne arithmétique, écrit sur un actif sous-jacent de prix  $K$  et de maturité  $T$ , le payoff est alors de la forme pour un strike fixe

$$\left( \frac{1}{T} \int_0^T S_\tau d\tau - K \right)^+. \quad (4.1)$$

Pour une option asiatique à strike flottant, la fonction de payoff est donnée par :

$$\left( \frac{1}{T} \int_0^T S_\tau d\tau - S_T \right)^+, \quad (4.2)$$

où l'intégrale divisée par  $T$  représente la moyenne continue de l'option. Nous pouvons également considérer la moyenne géométrique continue [79], dans ce cas le payoff s'écrit

$$\left( \exp \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_\tau d\tau \right) - K \right)^+. \quad (4.3)$$



Il est possible de remplacer les moyennes continues (4.1). et (4.3) par des moyennes discrètes, dans ce cas les fonctions payoff, pour un strike fixe  $K$ , prennent les formes suivantes :

$$\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{\tau_i} - K \right)^+, \quad (4.4)$$

$$\left( \frac{1}{N} \left( \prod_{i=1}^N S_{\tau_i} \right)^{\frac{1}{N}} - K \right), \quad (4.5)$$

avec  $0 < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_N = T$  et  $N$  le nombre d'observations, les observations peuvent être journalières, hebdomadaires, etc.

Nous présentons ici une brève dérivation des équations différentielle gouvernante le prix des options asiatiques à moyennes arithmétiques et géométriques. Nous choisissons de travailler dans le cas continu pour cela nous considérons la moyenne du prix de l'actif sous-jacent suivante:

$$A = \int_0^t f(S, \tau) d\tau, \quad (4.6)$$

où  $\tau$  est le temps et  $t$  l'instant donné.

ici  $f = S$  si  $A$  est une moyenne continue arithmétique, et  $f = \ln S$  si  $A$  représente une moyenne continue géométrique.

Le prix d'option asiatique est une fonction de trois variables indépendantes, à savoir le cours de l'actif sous-jacent  $S$ , la moyenne du prix de l'actif  $A$  et le temps  $\tau$ , nous pouvons constater que  $dA = f(S, \tau) d\tau$  est déterministe, donc une couverture sans risque pour l'option asiatique ne nécessite que l'élimination du risque induit par l'actif  $S$ . Considérons un portefeuille qui contient une unité d'option asiatique et  $-\Delta$  unités de l'actif sous-jacent. Nous choisissons ensuite la quantité  $\Delta$  de telle sorte que les composantes stochastiques associées à l'option et à l'actif sous-jacent s'annulent.

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix de l'actif sous-jacent  $S_\tau$  satisfait l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_\tau = \mu S_\tau d\tau + \sigma S_\tau dB_\tau, \quad (4.7)$$

où  $\mu$  représente le rendement instantané de  $S$ ,  $\sigma$  la volatilité et  $B_\tau$  désigne le mouvement brownien standard.

Soit  $V(S, A, \tau)$  la valeur de l'option asiatique et  $\Pi$  la valeur du portefeuille ci-dessus. Alors on a

$$\Pi_\tau = V - \Delta S. \quad (4.8)$$

En appliquant le lemme d'Ito à la fonction  $V(S, A, \tau)$ , on trouve que la variation de ce portefeuille sera égale

$$d\Pi_\tau = \left( \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + f(S, \tau) \frac{\partial V}{\partial A} \right) d\tau + \frac{\partial V}{\partial S} dS - \Delta dS. \quad (4.9)$$

Pour annuler la composante aléatoire du notre portefeuille on choisit

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (4.10)$$

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) nous donne

$$d\Pi_\tau = r\Pi_\tau dt = r \left( V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) d\tau, \quad (4.11)$$

où  $r$  est le taux d'intérêt sans risque. En égalant les deux expressions pour  $d\Pi_\tau$ , nous obtenons l'équation différentielle suivante qui décrit l'évolution de prix d'options asiatique  $V(S, A, \tau)$ .

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + f(S, \tau) \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0. \quad (4.12)$$

Il est convient à noter que cette équation est identique à l'équation de Black-Scholes classique, sauf qu'elle comporte un terme supplémentaire, la dérivée de la valeur de l'option  $V$  par rapport à la moyenne  $A$ . La spécification des conditions auxiliaires dépend des détails spécifiques du contrat d'option asiatique.

Dans le cas d'une option à moyenne arithmétique. L'équation différentielle partielle gouvernante est donnée par :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + S \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0 \quad (4.13)$$

avec la condition terminale

$$V(S, A, T) = \begin{cases} \max\left(\frac{A}{T} - K, 0\right) & \text{pour un call,} \\ \max\left(K - \frac{A}{T}, 0\right) & \text{pour un put.} \end{cases} \quad (4.14)$$

L'équation différentielle partielle pour une option géométrique est

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \ln S \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0. \quad (4.15)$$

Étant donné que les options asiatiques à moyenne géométrique, possèdent une expression analytiques pour le prix [73,79], nous nous intéressons ici uniquement au pricing de l'option asiatique à moyenne arithmétique.

Il est important de noter que le problème ci-dessus est une EDP bidimensionnelle (en espace) dont la résolution est très coûteuse en termes de calcul. Pour cela plusieurs tentatives ont été faites pour réduire la dimension du problème afin de le rendre plus facile à résoudre numériquement [48, 89, 99,100]. Rogers et Shi [63] ont réussi à réduire la dimension de l'EDP (4.13) en introduisant les changements de variable suivants:

$$\begin{cases} V = Su(x, \tau), \\ x = \frac{K - \frac{1}{T} \int_0^T S_\tau d\tau}{S}. \end{cases} \quad (4.16)$$

Après le changement de variable l'équation (4.13) prend la forme suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{1}{T} + rx \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.17)$$

Avec la condition terminale

$$u(x, T) = \max(-x, 0) = x^-. \quad (4.18)$$

Dans le cas où  $A \geq KT$  c'est-à-dire  $x \leq 0$  la valeur de l'option est donnée par [83]:

$$u = \frac{1}{rT} (1 - e^{-r(T-\tau)}) - x e^{-r(T-\tau)}. \quad (4.19)$$

Nous devons donc résoudre l'EDP ci-dessus (4.17) seulement pour  $x \geq 0$  en utilisant l'expression (4.19) pour la condition aux limites en  $x = 0$ . En posant  $t = T - \tau$ , nous avons l'EDP suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{T} + rx \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (x, t) \in [0, +\infty[ \times [0, T] \quad (4.20)$$

avec comme conditions aux bords

$$u(x, 0) = \max(-x, 0) = x^-, \quad (4.21)$$

$$u(0, t) = \frac{1}{rT} (1 - e^{-rt}), \quad t \in [0, T], \quad (4.22)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (4.23)$$

Pour des raisons numériques on se restreint à un intervalle d'espace finie  $\Omega = [0, x_{max}] \subset [0, \infty[$  avec  $u(x_{max}, t) = 0$ .

Dans ce qui suit nous allons utiliser une technique basée sur la méthode SPH pour résoudre le système (4.20)-(4.23) numériquement. Une fois la solution  $u(x, \tau)$  est obtenue, le prix de l'option asiatique est déterminé par  $V(S, I, \tau) = Su(x, \tau)$ .

## 4.2.2 Option à barrière

Il existe différents types d'options à barrières [92], ici on considère le cas d'une option de call de type "down-and-out", de prix d'exercice  $K$ , de maturité  $T$ , et de barrière  $B$ , c'est-à-dire le droit d'acheter le sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$  si celui-ci ne dépasse jamais la valeur de  $B$

avant l'expiration du contrat. L'équation décrivant l'évolution de la valeur d'une telle option est identique à celle d'une option européenne classique.

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (4.24)$$

Avec les conditions aux limites suivantes

$$V(S, T) = \begin{cases} 0 & \text{Si } S \geq B, \\ S - K & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (4.25)$$

$$V(0, \tau) = 0, \quad V(S_{max}, \tau) = S_{max} - Ke^{-r(T-\tau)}. \quad (4.26)$$

Il est convenit de noter que les fonctions de payoff, associées à ce type d'options, sont discontinues à la barrière, cette discontinuité dégrade la précision de la solution numérique surtout au voisinage de point critique  $S = B$ . Pour remédier à cela nous adopter la même transformation introduite dans le chapitre précédent [14]. Pour avoir une distribution plus fine des points autour de la valeur de barrière  $B$ , on définit le changement de variables suivant:

$$s(\zeta) = B + \frac{1}{c} \sinh(\zeta \sinh^{-1}(c(S_{max} - B)) - (1 - \zeta) \sinh^{-1}(cB)), \quad (4.27)$$

avec

$$s(0) = 0, \quad (4.28)$$

$$s(1) = S_{max}. \quad (4.29)$$

La valeur de  $\zeta$  qui correspond à  $B$ ,  $s(\zeta_B) = B$ , est donnée par:

$$\zeta_B = \frac{\sinh^{-1}(cB)}{\sinh^{-1}(cB) - \sinh^{-1}(c(S_{max} - B))}. \quad (4.30)$$

En posant  $\psi(\zeta, t) = V(s(\zeta), \tau)$  et  $t = T - \tau$ . On trouve que l'équation (4.24) prenne la forme suivante:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + a(\zeta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + b(\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - r\psi = 0 \quad (4.31)$$

où les coefficients  $a(\zeta)$  et  $b(\zeta)$  sont donnés par :

$$a(\zeta) = \frac{1}{2}\sigma^2 \left( \frac{s(\zeta)}{s'(\zeta)} \right)^2, \quad (4.32)$$

$$b(\zeta) = r \frac{s(\zeta)}{s'(\zeta)} - \frac{1}{2}\sigma^2 \left( \frac{s(\zeta)}{s'(\zeta)} \right)^2 \frac{s''(\zeta)}{s'(\zeta)}. \quad (4.33)$$

Les conditions aux limites (4.25)-(4.26), après le changement de variable, prennent la forme suivante :

$$\psi(\zeta, 0) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \zeta \geq s(\zeta_B), \\ s(\zeta) - K & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\psi(0, t) = 0, \quad \psi(1, t) = 1 - Ke^{-r(T-t)}. \quad (4.35)$$

### 4.2.3 Option binaire

L'option binaire ou également appelée digitale confère à son acheteur une somme fixe d'argent si le cours du sous-jacent atteint ou franchit le prix d'exercice préalablement fixé. Ce prix est le prix d'exercice de l'option binaire.

L'option cash or-nothing call, est une option binaire dont le payoff est nul si le sous-jacent est en dessous du prix d'exercice  $K$  et égal à un (ou tout montant fixe) si le prix de l'actif est au-dessus du strike  $K$ . Ceci est modélisée par l'EDP de Black-Scholes(4.24), avec comme condition finale [98]:

$$V(S, T) = \begin{cases} 1 & \text{pour } S > K, \\ 0, & \text{pour } S < K. \end{cases} \quad (4.36)$$

Les conditions aux limites sont données par:

$$V(0, \tau) = 0, \forall \tau \in [0, T], \quad (4.37)$$

$$V(S, \tau) = e^{-r(T-\tau)}, S \mapsto +\infty. \quad (4.38)$$

La solution analytique pour une option de Call de type cash or-nothing est donnée par [96]:

$$V(S, \tau) = e^{-r(T-\tau)} \mathcal{N}(d), \quad (4.39)$$

où  $\mathcal{N}$  représente la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0; 1)$ , avec

$$d = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - \tau)}{\sigma\sqrt{T - \tau}}. \quad (4.40)$$

### 4.3 Application de la méthode SPH pour évaluer les options exotiques

Dans cette section nous appliquons la méthode SPH pour approximer les dérivées partielles spatiales impliquées dans les équations différentielles modélisant le prix d'options exotiques, le système des équations différentielles ordinaires résultant est discrétisé par suite à l'aide de la  $\theta$ -méthode.

Dans ce chapitre nous utilisons les approximations SPH suivantes pour calculer la première et la seconde dérivée.

#### La dérivée première

$$\nabla u(x_i) = \beta_i \sum_j (u(x_j) - u(x_i)) \nabla w(x_i - x_j) V_j. \quad (4.41)$$

#### La dérivée seconde

$$\Delta u(x_i) = 2\hat{B}_i \sum_j \left( \frac{u(x_i) - u(x_j)}{|x_i - x_j|^2} (x_i - x_j) - \nabla u(x_i) \right) \nabla w(x_i - x_j) V_j. \quad (4.42)$$

Où  $\beta_i$  et  $\hat{B}_i$  représente le coefficient correctif et le tenseur de normalisation donnés par les expressions (2.25) et (1.65) respectivement.

#### 4.3.1 Discrétisation du problème asiatique

Dans la méthode SPH le domaine de calcul  $\Omega$  est représenté par un ensemble de points finis  $N$ , nous considérons seulement ici le cas où les points soient uniformément distribués c'est-à-dire que  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ , constant pour tout  $i = 1 \dots N$ , où  $x_i$  désigne la position du  $i$ -ième point.

En remplaçant les dérivées spatiales dans l'équation (4.20) par leur approximation SPH (4.40) et (4.40), on aboutit au schéma semi-discret, en point  $x_i$ , suivant:

$$\frac{du(x_i)}{dt} = \sigma^2 x_i^2 \hat{B}_i \sum_j \left( \frac{[u(x_i) - u(x_j)]}{x_i - x_j} - \beta_i \sum_j [u(x_j) - u(x_i)] w'_{ij} \right) w'_{ij} - \left( \frac{1}{T} + rx_i \right) \beta_i \sum_j [u(x_j) - u(x_i)] w'_{ij}. \quad (4.43)$$

En appliquant la même procédure à chaque point  $i$  de domaine du problème  $\Omega$ , on obtient le système matriciel suivant:

$$\frac{dU}{dt} = AU + BU \quad (4.44)$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices de dimensions  $N \times N$  et  $U = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N))^T$  représente le vecteur du prix.

Les coefficients de matrices  $A$  et  $B$ , sont donnés par :

$$\begin{cases} A_{ij} = -\sigma^2 x_i^2 \hat{B}_i \left( \frac{1}{x_i - x_j} + \beta_i \sum_j w'_{ij} \Delta x \right) w'_{ij} \Delta x & \text{Si } i \neq j = 1, \dots, N, \\ A_{ii} = -\sum_{i \neq j} A_{ij}, \\ B_{ij} = -\left( \frac{1}{T} + r x_i \right) \beta_i w'_{ij} \Delta x & \text{Si } i \neq j = 1, \dots, N, \\ B_{ii} = -\sum_{i \neq j} B_{ij}. \end{cases} \quad (4.45)$$

Notons qu'à  $i$ -ème ligne, les coefficients  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  à la  $j$ -ième colonne ne sont pas nuls si et seulement si la distance entre les points  $x_i$  et  $x_j$  sont inférieurs à la longueur de lissage  $2h$ , ce qui conduit à des matrices  $A$  et  $B$  creuses. Voir les figures 4.1 et 4.2.

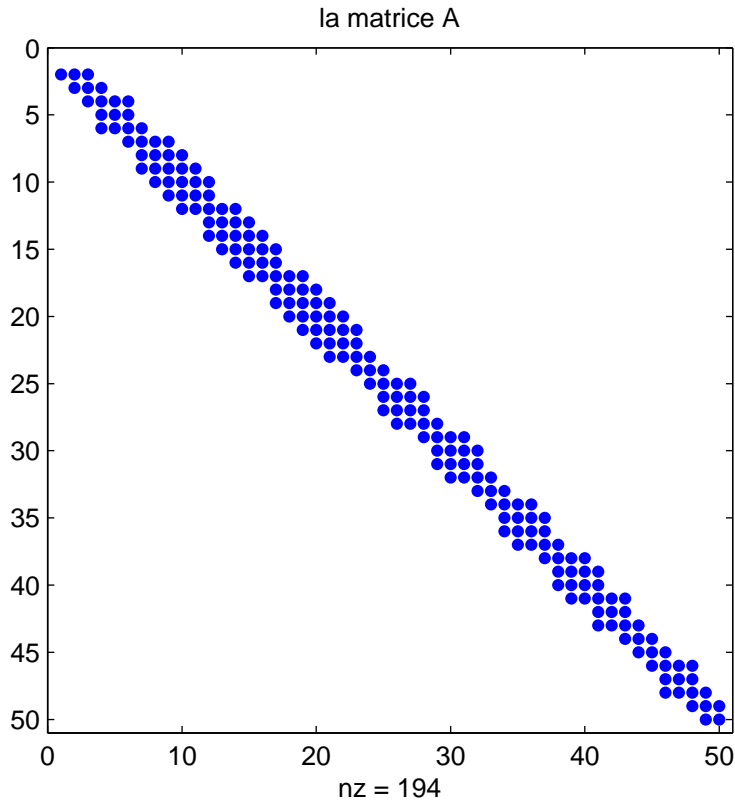


Fig. 4.1: Visualisation de la structure creuse de matrices  $A$  et pour  $N = 50$ .  $nz$  : désigne le nombre d'éléments non nuls.

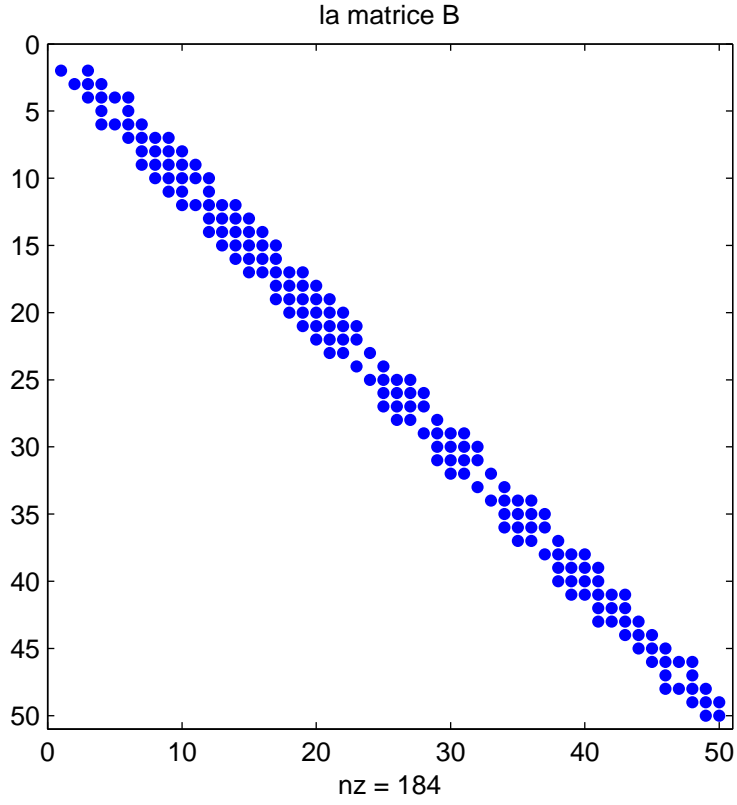


Fig. 4.2: Visualisation de la structure creuse de matrices  $B$  et pour  $N = 50$ .  $nz$  : désigne le nombre d'éléments non nuls.

### 4.3.2 Discrétisation temporelle

Dans cette section nous allons utiliser la  $\theta$ -méthode pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires (EDO) en temps (4.44). Pour ce faire, on subdivise l'intervalle de temps  $[0, T]$  en  $M$  sous-intervalles de même longueur  $\Delta t = \frac{T}{M}$  de telle sorte que  $\forall 1 \leq k \leq M$   $t_k = k\Delta t$ .

Pour  $\theta \in [0, 1]$ , on définit le  $\theta$ -schéma par :

$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} = \theta LU^{k+1} + (1 - \theta)LU^k. \quad (4.46)$$

En réorganisant l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$(I - \Delta t \theta L)U^{k+1} = (I + \Delta t(1 - \theta)L)U^k \quad (4.47)$$

avec  $U^k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_N^k)^T$ ,  $L = A + B$ : la matrice résultant de la discrétisation spatiale via SPH et  $I$  est la matrice identité de dimension  $N \times N$ .



Prendre la valeur de  $\theta$  égal à 0, 0.5 ou 1, dans l'équation ci-dessus (4.47), donne respectivement le schéma explicite d'Euler, implicite d'Euler, ou schéma de Crank-Nicolson.

### 4.3.3 Analyse de stabilité

Dans cette section nous allons étudier la stabilité du schéma (4.47). Pour cela, nous définissons l'erreur à l'instant discrète  $t_k$  par

$$e^k = U_{exact}^k - U_{Num}^k \quad (4.48)$$

où  $U_{exact}^k$  est la solution exacte et  $U_{Num}^k$  la solution numérique obtenue par la méthode SPH. En injectant l'expression (4.48) dans le schéma (4.47), on obtient l'équation d'erreur à l'instant  $t_{k+1}$  :

$$e^{k+1} = R e^k, \quad (4.49)$$

où  $R$  est la matrice d'amplification donnée par:

$$R = (I - \Delta t \theta L)^{-1} (I + \Delta t (1 - \theta) L). \quad (4.50)$$

Le schéma numérique (4.47) est dit stable si  $\rho(R) \leq 1$ , où  $\rho(R)$  est le rayon spectral de la matrice  $R$ . On peut voir que la stabilité est assurée si toutes les valeurs propres de la matrice  $(I - \Delta t \theta L)^{-1} (I + \Delta t (1 - \theta) L)$  satisfont à la condition suivante:

$$\left| \frac{1 + \Delta t (1 - \theta) \lambda_L}{1 - \Delta t \theta \lambda_L} \right| \leq 1, \quad (4.51)$$

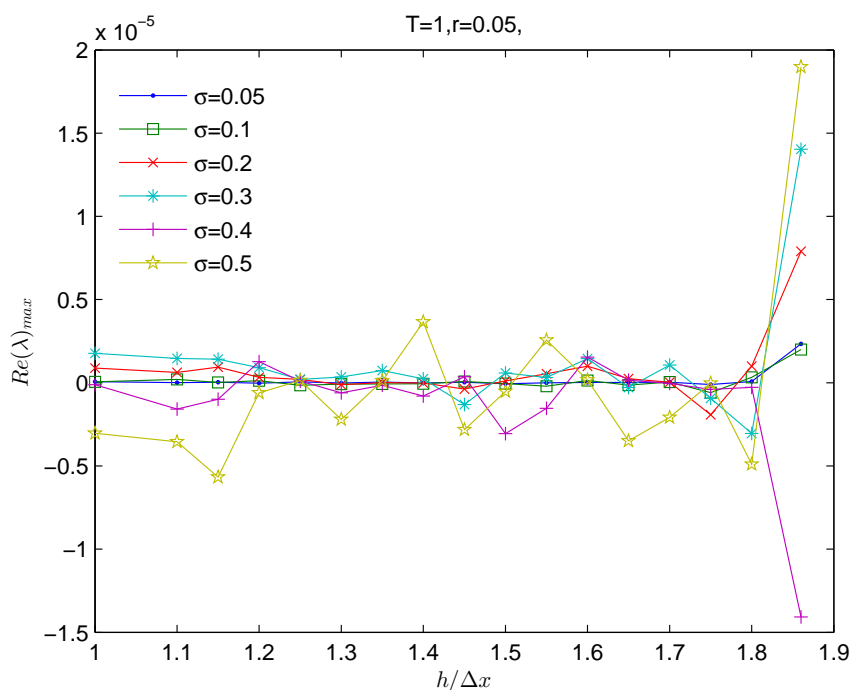
où  $\lambda_L$  représentent les valeurs propres de la matrice  $L$ .

Dans le cas du schéma Crank-Nicolson ( $\theta = \frac{1}{2}$ ), l'inégalité (4.51) est toujours satisfaite à condition que  $Re(\lambda_L) \leq 0$ . Cela montre que le schéma (4.46) est inconditionnellement stable si  $Re(\lambda_L) \leq 0$ .

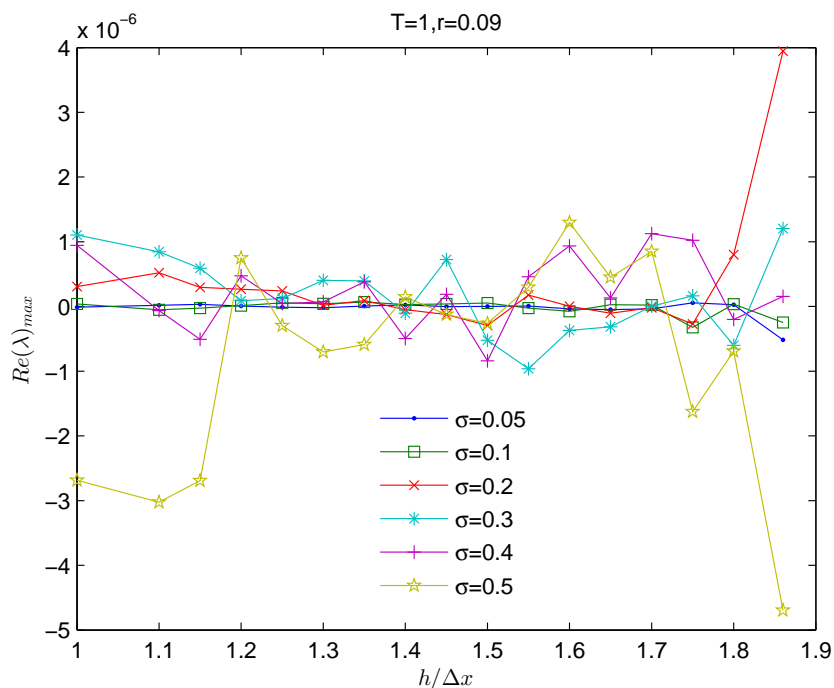
Puisqu'il n'est pas possible de trouver une expression explicite de la valeur propre de la matrice  $L$ , nous allons les calculer numériquement et vérifier si la partie réelle de  $\lambda_L$  est bien négative ou nulle, le résultat est présenté dans les figures ci-dessous.

La figure 4.3a et la figure 4.3b montrent comment la valeur propre maximale  $Re(\lambda_L)_{max}$  de la matrice  $L$  varie en fonction du rapport  $h/\Delta x$  pour différentes valeurs de la volatilité  $\sigma$ .

Comme nous pouvons le constater, la partie réelle de toutes les valeurs propres de  $L$  sont négatives  $Re(\lambda_L) \leq 0$ , ce qui implique que la relation (4.51) est toujours vérifiée et par conséquent le schéma de Crank-Nicolson est inconditionnellement stable.



(a)



(b)

Fig. 4.3: Représentation graphique de la valeur propre réelle maximale  $Re(\lambda)_{max}$  en fonction du rapport  $h/\Delta x$  pour  $N = 100$ ,  $\Omega = [0, x_{max}]$  et  $K = 100$ .

### 4.3.4 Discrétisation de l'option à barrière

En appliquant la même procédure de discrétisation effectuée dans la section précédente au cas d'option à barrière, on trouve que la version discrète de l'équation (4.31) s'écrit sous la forme matricielle suivant :

$$(I - \Delta t \theta L) \Psi^{k+1} = (I + \Delta t (1 - \theta) L) \Psi^k \quad (4.52)$$

où  $k$  réfère à l'indice de temps,  $\theta \in [0, 1]$ ,  $\Psi^k = (\psi^k(\zeta_1), \psi^k(\zeta_2), \dots, \psi^k(\zeta_N))^T$  : le vecteur du prix et  $L$  la matrice provient de la discrétisation de dérivées spatiales impliquées dans (4.31) par la méthode SPH. Et  $I$  la matrice d'identité de dimension  $N \times N$ .

Les coefficients de la matrice  $L$  sont donnés par :

$$\begin{cases} l_{ij} = d_{ij} - r\alpha_i w_{ij} & i \neq j = 1, 2, \dots, N, \\ l_{ii} = \sum_{j \neq i}^N d_{nj} - r\alpha_i w_{ii}, \end{cases} \quad (4.53)$$

avec

$$d_{ij} = \beta_i b(\zeta_i) w'(\zeta_i - \zeta_j) \Delta \zeta - 2 \frac{a(\zeta_i) w'(\zeta_i - \zeta_j)}{\zeta_i - \zeta_j} \Delta \zeta. \quad (4.54)$$

Les expressions de  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont données par (1.50) et (4.42) respectivement.

La stabilité du schéma (4.52) a été étudiée au chapitre précédent. Nous avons trouvé que pour le cas où  $\theta \geq 1/2$  le schéma (4.52) est inconditionnellement stable, en particulier les schémas d'Euler implicite et Crank-Nicholson.

## 4.4 Résultat numérique

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques obtenus en appliquant la méthode SPH, décrite dans les section précédentes, au problème de pricing d'options exotiques notamment les options à barrières, asiatique et les options binaire.

Pour évaluer la performance de la méthode SPH, nous avons effectuées de nombreuses comparaisons entre la solution numérique obtenue par notre approche et celle fournie par d'autres méthodes dans la littérature [74,80-82,91] pour différents paramètres financiers tels que, le prix d'exercice  $K$ , le taux d'intérêt  $r$  et la volatilité  $\sigma$ .

Pour les options à barrière simple nous considérons l'exemple d'une option de Call européenne de type Down-and-out de barrière  $B = 9$ , un prix de exercice  $K = 10$ , un taux d'intérêt  $r = 0.05$ , une volatilité  $\sigma = 0.2$  et de maturité  $T = 0.5$ .

Dans le tableau 4.1 nous comparons les prix d'option que nous avons obtenu par notre approche avec les prix analytiques donnés par la formule fermée de Merton [16] et ceux fournis

par la méthode sans maillage RBF [90]. La première colonne donne les valeurs de l'actif tandis que la deuxième colonne contient les valeurs de la solution exacte. Les deux colonnes suivantes représentent les solutions obtenues par les méthodes RBF et SPH respectivement, et la colonne restante montre l'erreur commise par la méthode SPH. Nous pouvons bien constater que les résultats obtenus en utilisant la méthode SPH sont en très bon accord avec les résultats théoriques.

Pour les options à double barrière nous considérons le cas du Call européen du type double knock-out. Cette option est conditionnée par deux barrières limites. Ainsi, si le prix du sous-jacent franchit l'une de ces barrières à la hausse ou à la baisse, l'option s'annule. Nous prenons pour cette évaluation le niveau bas de la barrière égal à 95 et le niveau supérieur égal à 125, les autres paramètres de l'option sont choisis comme suit :  $K = 100, \sigma = 0.25, r = 0.05, T = 0.5$ .

La figure 4.4 présente et compare les prix du call double "knock-out" obtenus avec la méthode SPH et ceux fournis par la formule analytique avec les paramètres ci-dessus. D'après la figure 4.4, nous pouvons constater graphiquement que les résultats fournis par la méthode SPH sont en bonne adéquation avec ceux de la formule analytique de Ikeda et Kunimoto [91].

Table 4.1: Valeurs d'une option de Call européenne de type down-and-out calculées par la méthode SPH avec les paramètres financiers mentionnés ci-dessus et  $S_{max} = 2K$ .

| S  | Exact  | RBF    | SPH    | Ereur  |
|----|--------|--------|--------|--------|
| 1  | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3  | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5  | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7  | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 9  | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 11 | 1.3998 | 1.3985 | 1.3993 | 0.0005 |
| 13 | 3.2591 | 3.2589 | 3.2592 | 0.0001 |
| 15 | 5.2475 | 5.2474 | 5.2475 | 0.0000 |
| 17 | 7.2469 | 7.2465 | 7.2469 | 0.0000 |
| 19 | 9.2469 | 9.2383 | 9.2469 | 0.0000 |

La figure 4.5 et le tableau 4.2 contiennent les résultats de l'option de Call de type "cash or-nothing", de prix d'exercice  $K = 0,5$ , calculés par la méthode SPH.

Les paramètres utilisés sont les suivants :

$$S_{max} = 1, T = 0.25, r = 0.05 \text{ et } \sigma = 0.2.$$

La première colonne de ce tableau représente le prix de l'actif sous-jacents  $S$ , la deuxième colonne représente le prix exact calculé selon la formule (4.39), la troisième colonne représente la valeur de l'option calculée à l'aide de la méthode SPH, et la dernière colonne représente les erreurs.

Table 4.2: Comparaison des valeurs exactes avec celles obtenues par SPH pour une option de Call de type “cash or-nothing”.

| S      | Exact  | SPH    | Ereur  |
|--------|--------|--------|--------|
| 0.1000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.2000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.3000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.4000 | 0.0153 | 0.0155 | 0.0002 |
| 0.5    | 0.5233 | 0.5233 | 0.0000 |
| 0.6    | 0.9591 | 0.9591 | 0.0000 |
| 0.7    | 0.9873 | 0.9873 | 0.0000 |
| 0.8    | 0.9876 | 0.9876 | 0.0000 |
| 0.9    | 0.9876 | 0.9876 | 0.0000 |
| 1      | 0.9876 | 0.9876 | 0.0000 |

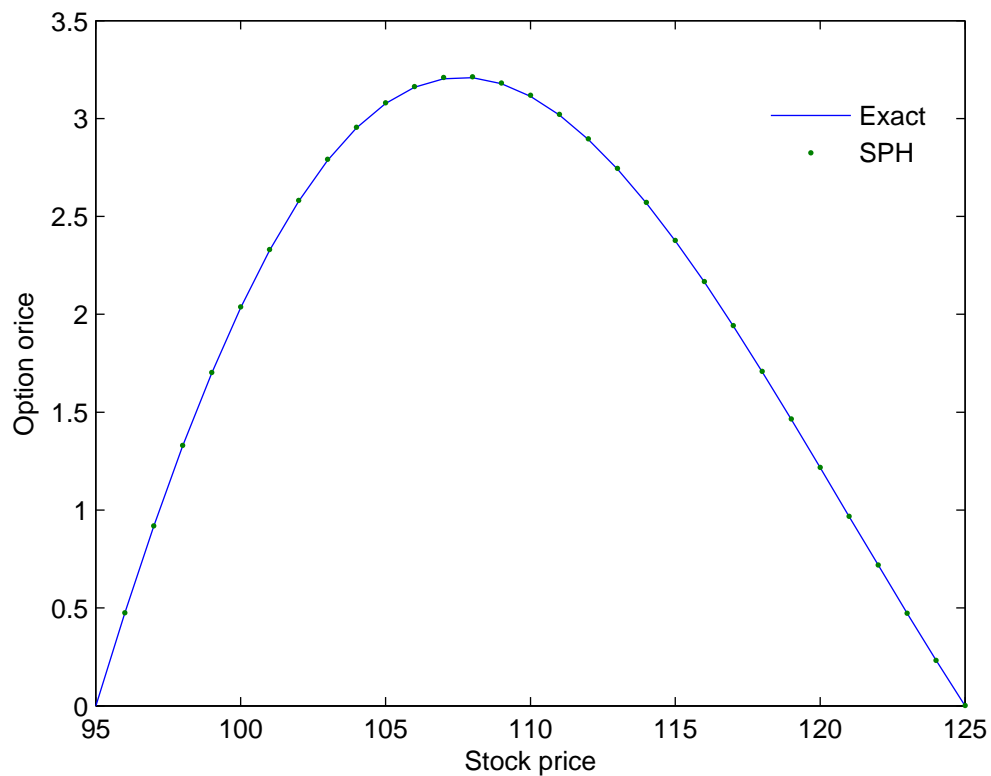


Fig. 4.4: Une comparaison entre la solution analytique et celle obtenue par la méthode SPH pour une option de Call de type double knock-out.

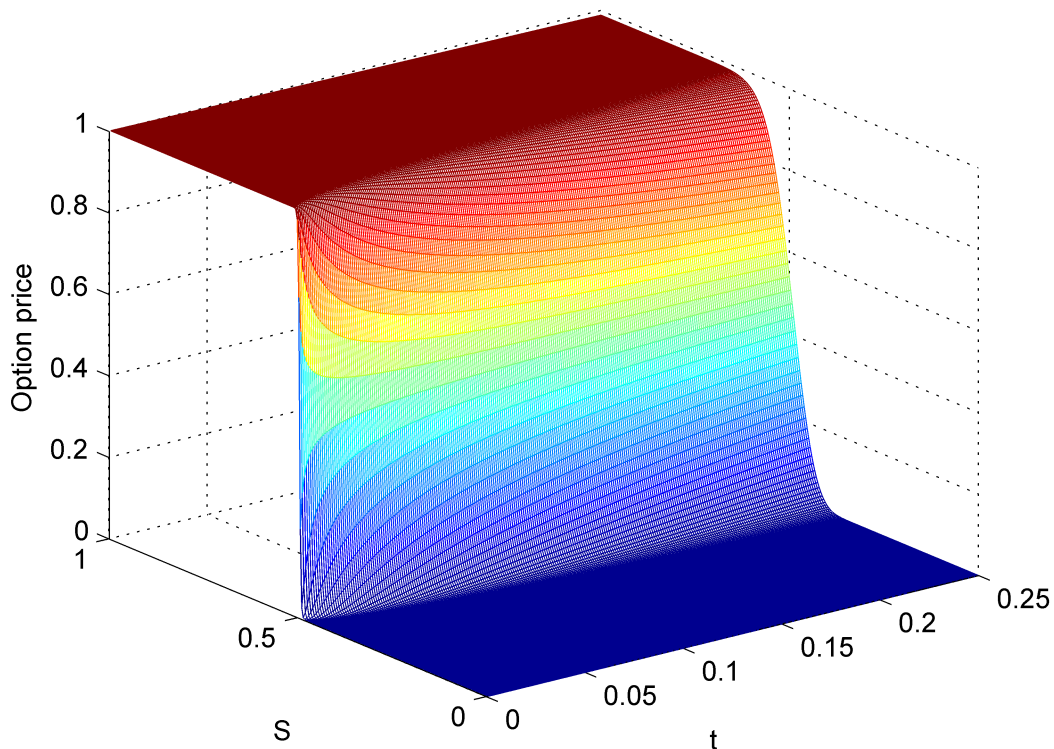


Fig. 4.5: Valeurs de l'option de call "cash or-nothing" obtenues à l'aide de la méthode SPH avec les paramètres  $T = 0.25$ ,  $r = 0.05$  et  $\sigma = 0.2$  et  $N = 100$ .

Dans le cas des options asiatiques nous avons considéré l'exemple d'une option de Call asiatique à strike fixe de type européen. Plusieurs simulations numériques sont effectuées pour différentes valeurs de volatilité  $\sigma$ , prix d'exercice  $K$  et la maturité  $T$ . Les résultats sont rapportés dans les tableaux 4.3-4.5.

Pour l'application numérique nous choisissons,  $h = \Delta x$  et  $x_{max} = 3K/S$ .

Les figures 4.6a , 4.6b et 4.7 montrent l'évolution du prix de l'option du call asiatique en fonction du prix de l'exercice  $K$  avec les paramètres  $S = 100$  ,  $T = 1$  et pour différentes valeurs de la volatilité  $\sigma$  et taux d'intérêt  $r$ .

La figure 4.8 présente le prix d'une options de Call asiatiques à moyen arithmétique par rapport au prix d'exercice  $K$  pour différentes valeurs de volatilités et avec  $S = 100$  ,  $T = 1$  et  $r = 0.09$ .

Tableau 4.3 présente une comparaison entre les résultats obtenus par notre méthode SPH et ceux de la méthode Zhang [80,81] et Chen-Lyuu [82]. D'après le tableau, nous observons que nos résultats ne sont jamais éloignés de plus de 0,37% de ceux de la méthode de Zhang [80]. Ces erreurs sont observées à une faible valeur de la volatilité ( $\sigma = 0.05$ ) en raison de la nature dominante de la convection du problème.

Le tableau 4.4 compare la méthode SPH avec la méthode d'approximation de Ju[77], la méthode EDP de Zhang[80] et l'algorithme de l'arbre binomial de Hsu et Lyuu[87] pour une maturité longue  $T = 3$  ans. Comme nous pouvons le constater, nos résultats ne sont pas à plus de 0,020% loin de ceux de Zhang[80] et 0,030% de Hsu et Lyuu[87].

Dans le tableau 4.5, nous avons comparé notre approche SPH avec Zhang[80] et Chen-Lyuu[82] et les bornes inférieure et supérieure fournies par Rogers et Shi[63] pour différentes valeurs du taux d'intérêt  $r$ . on peut voir à partir de ces comparaisons que l'écart entre nos résultats et ceux de Zhang[80] ne dépassent pas 0,060%.

Les figures 4.9a et 4.9b montrent l'influence du paramètre  $h$  (la longueur de lissage) sur l'erreur commise par la méthode SPH en calculant le prix d'une option du Call asiatique avec les paramètres  $S = 100$ ,  $K = 100$  et  $T = 1$ . Comme les options asiatiques n'admettent pas en général de solution analytique exacte, nous nous sommes proposés ici la solution obtenue par Zhang [80] comme solution référence.

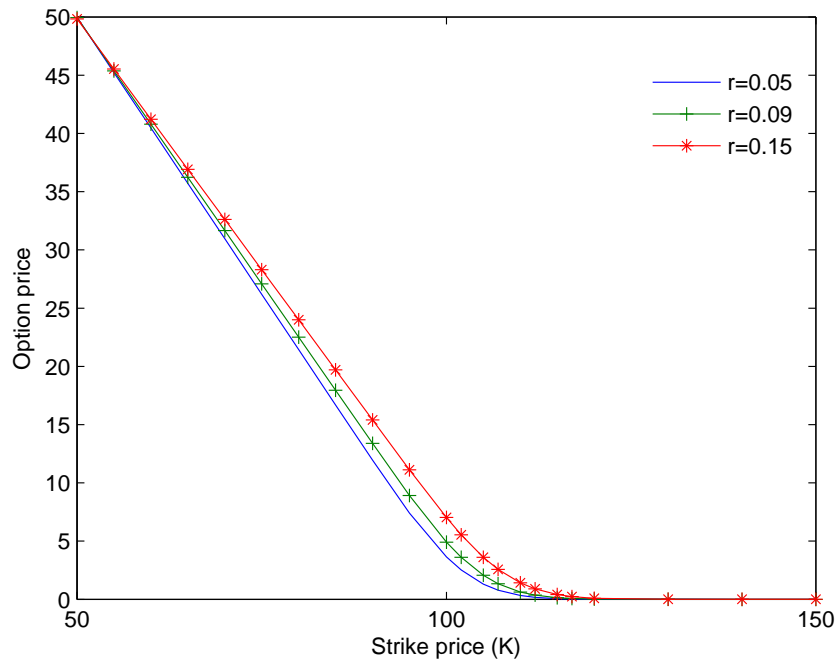
Table 4.3: Comparaison de la valeur d'option de Call asiatique calculée par différentes méthodes avec  $S = 100$ ,  $T = 1$ ,  $r = 0.09$  et pour différentes valeurs de volatilité  $\sigma$  et strike  $K$ .

| Strick K | $\sigma$ | Zhang[80]  | Zhang-AA2 [81] | Chen-Lyuu [82] | SPH       |
|----------|----------|------------|----------------|----------------|-----------|
| 95       | 0.05     | 8.8088392  | 8.80884        | 8.808839       | 8.8086    |
| 100      |          | 4.3082350  | 4.30823        | 4.308231       | 4.2921    |
| 105      |          | 0.9583841  | 0.95838        | 0.958331       | 0.95999   |
| 95       | 0.1      | 8.9118509  | 8.91171        | 8.911836       | 8.910747  |
| 100      |          | 4.9151167  | 4.91514        | 4.915075       | 4.9103    |
| 105      |          | 2.0700634  | 2.07006        | 2.069930       | 2.070187  |
| 95       | 0.2      | 9.9956567  | 9.99597        | 9.995362       | 9.995246  |
| 100      |          | 6.7773481  | 6.77758        | 6.776999       | 6.77758   |
| 105      |          | 4.2965626  | 4.29643        | 4.295941       | 4.2964    |
| 95       | 0.3      | 11.6558858 | 11.65747       | 11.654758      | 11.655726 |
| 100      |          | 8.8287588  | 8.82942        | 8.827548       | 8.82865   |
| 105      |          | 6.5177905  | 6.51763        | 6.516355       | 6.5177    |
| 95       | 0.4      | 13.5107083 | 13.51426       | 13.507892      | 13.51063  |
| 100      |          | 10.9237708 | 10.92507       | 10.920891      | 10.92372  |
| 105      |          | 8.7299362  | 8.72936        | 8.726804       | 8.7299    |
| 95       | 0.5      | 15.4427163 | 15.44890       | 15.437069      | 15.4426   |
| 100      |          | 13.0281555 | 13.03015       | 13.022532      | 13.02812  |
| 105      |          | 10.9296247 | 10.92800       | 10.923750      | 10.9296   |

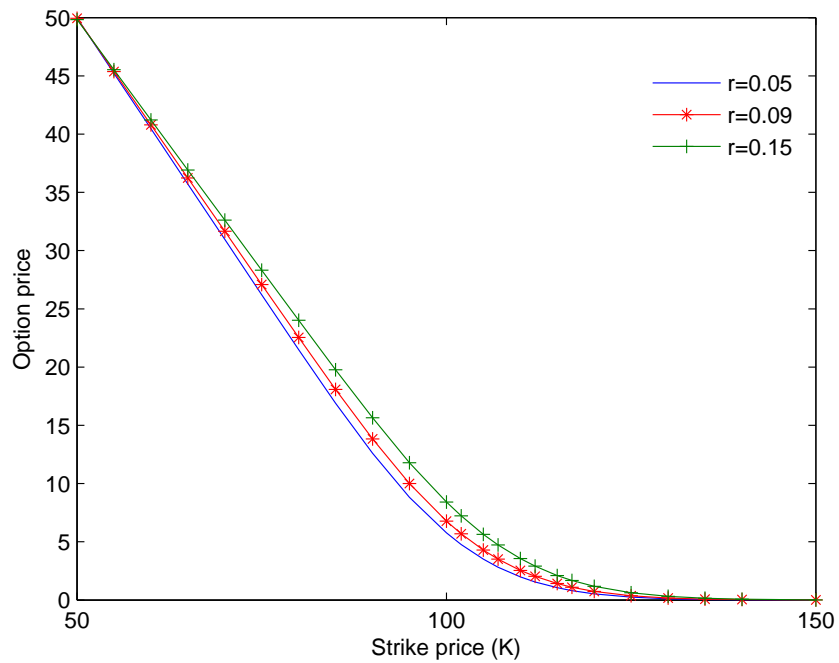
Table 4.4: Comparaison entre les prix d'un Call asiatique obtenus par notre méthode SPH et ceux fournis par d'autres méthodes avec  $S = 100$ ,  $T = 3$ ,  $r = 0.09$  et pour différentes valeurs de volatilité  $\sigma$ .

| Strick K | $\sigma$ | Zhang[80]  | Ju [77]  | Hsu-Lyuu [87] | SPH      |
|----------|----------|------------|----------|---------------|----------|
| 95       | 0.05     | 15.1162646 | 15.11626 | 15.116230     | 15.11625 |
| 100      |          | 11.3036080 | 11.30360 | 11.304036     | 11.30335 |
| 105      |          | 7.5533233  | 7.550559 | 7.554073      | 7.55174  |
| 95       | 0.1      | 15.2138005 | 15.21396 | 15.213921     | 15.21353 |
| 100      |          | 11.6376573 | 11.63798 | 11.637813     | 11.63714 |
| 105      |          | 8.3912219  | 8.39140  | 8.391189      | 8.39058  |
| 95       | 0.2      | 16.6372081 | 16.63942 | 16.637276     | 16.63707 |
| 100      |          | 13.7669267 | 13.76770 | 13.766921     | 13.76678 |
| 105      |          | 11.2198706 | 11.21879 | 11.220047     | 11.21975 |
| 95       | 0.3      | 19.0231619 | 19.02652 | 19.023236     | 19.02310 |
| 100      |          | 16.5861236 | 16.58509 | 16.586222     | 16.58607 |
| 105      |          | 14.3929780 | 14.38751 | 14.393083     | 14.39293 |
| 95       | 0.4      | 21.7409242 | 21.74461 | 21.740973     | 21.74089 |
| 100      |          | 19.5882516 | 19.58355 | 19.588307     | 19.58822 |
| 105      |          | 17.6254416 | 17.61269 | 17.625501     | 17.62541 |
| 95       | 0.5      | 24.5718705 | 24.57740 | 24.571913     | 24.57160 |
| 100      |          | 22.6307858 | 22.62276 | 22.630828     | 22.63056 |
| 105      |          | 20.8431853 | 20.82213 | 20.843226     | 20.84299 |





(a)



(b)

Fig. 4.6: Profile du prix de l'option à l'instant  $\tau = 0$  en fonction du Strike  $K$ , avec les paramètres  $S = 100$ ,  $T = 1$  et pour différentes valeurs de  $r$  : (en haut)  $\sigma = 0.1$ , ( en bas)  $\sigma = 0.2$ .

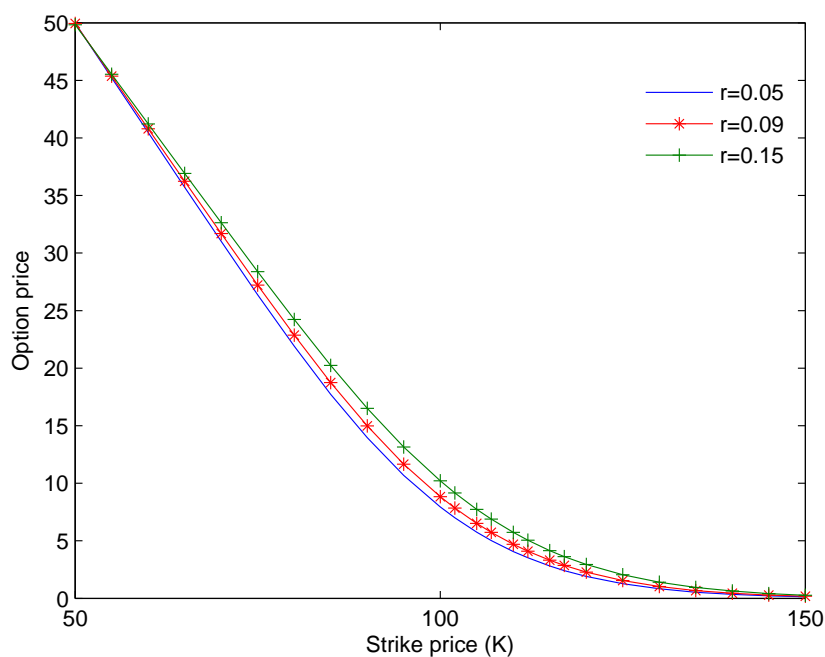


Fig. 4.7: Profile du prix de l'option à l'instant  $\tau = 0$  avec les mêmes paramètres mentionnés ci-dessus et pour  $\sigma = 0.3$ .

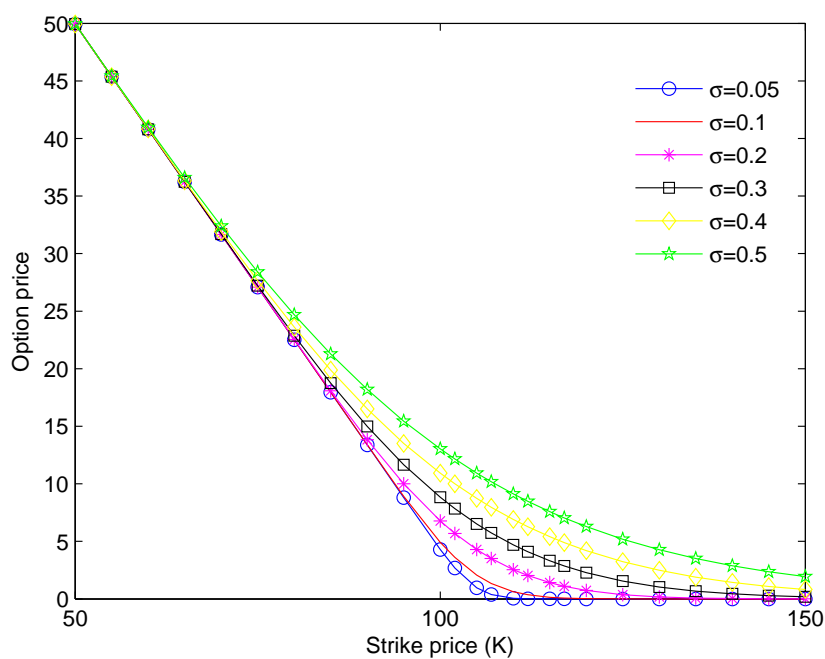
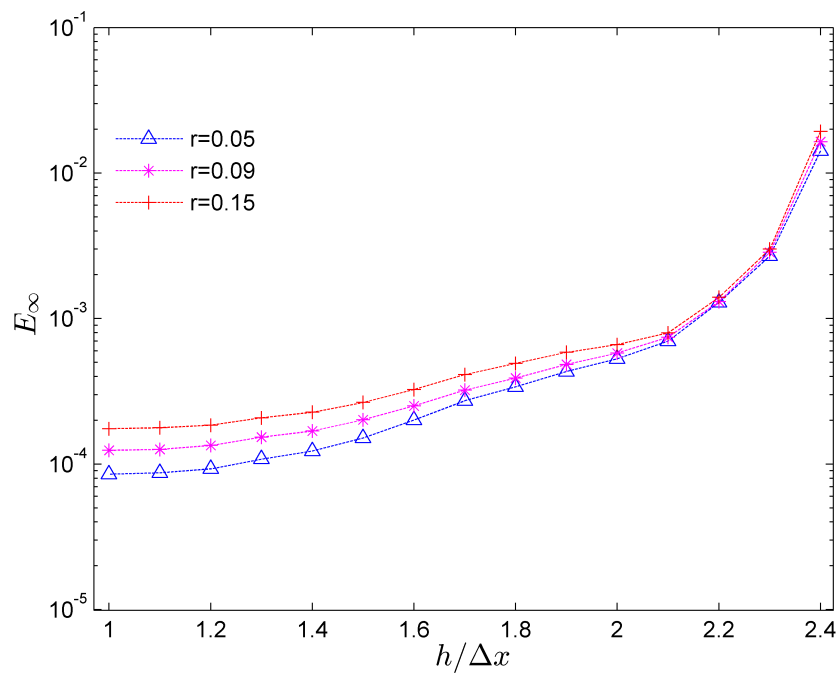


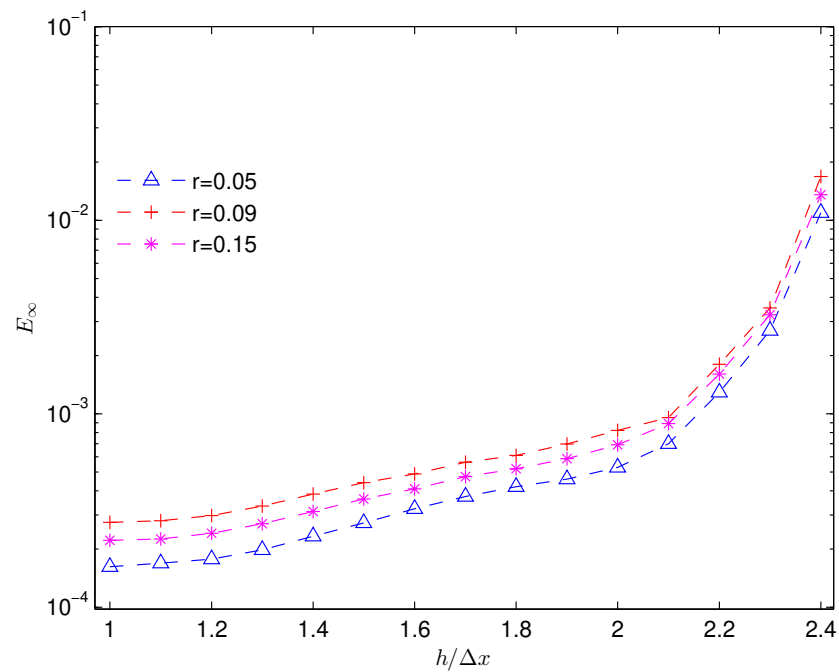
Fig. 4.8: Le prix d'une option du Call asiatique en fonction du prix d'exercice  $K$  avec les paramètres  $S = 100, T = 1, r = 0,09$  et pour différentes valeurs de volatilité  $\sigma$ .

Table 4.5: Comparaison de la valeur du Call asiatique calculée par différentes méthodes avec les paramètres  $S = 100$ ,  $T = 1$  et pour différentes valeurs de  $\sigma, K$  et  $r$ .

| Strick K | $\sigma$ | $r$  | Zhang[80]  | Chen-Lyuu [82] | LB[63] | UB [63] | SPH      |
|----------|----------|------|------------|----------------|--------|---------|----------|
| 90       | 0.2      | 0.05 | 12.5959916 | 12.595602      | 12.595 | 12.687  | 12.5950  |
| 100      |          |      | 5.7630881  | 5.762708       | 5.762  | 5.854   | 5.7626   |
| 110      |          |      | 1.9898945  | 1.989242       | 1.989  | 2.080   | 1.9911   |
| 90       | 0.2      | 0.09 | 13.8314996 | 13.831220      | 13.831 | 13.927  | 13.83116 |
| 100      |          |      | 6.7773481  | 6.776999       | 6.777  | 6.872   | 6.77705  |
| 110      |          |      | 2.5462209  | 2.545459       | 2.545  | 2.641   | 2.54654  |
| 90       | 0.2      | 0.15 | 15.6417575 | 15.641598      | 15.641 | 15.748  | 15.64149 |
| 100      |          |      | 8.4088330  | 8.408519       | 8.408  | 8.515   | 8.40843  |
| 110      |          |      | 3.5556100  | 3.554687       | 3.554  | 3.661   | 3.55571  |
| 90       | 0.3      | 0.05 | 13.9538233 | 13.952421      | 13.952 | 14.161  | 13.95366 |
| 100      |          |      | 7.9456288  | 7.944357       | 7.944  | 8.153   | 7.94556  |
| 110      |          |      | 4.0717942  | 4.070115       | 4.070  | 4.279   | 4.07192  |
| 90       | 0.3      | 0.09 | 14.9839595 | 14.982782      | 14.983 | 15.194  | 14.98379 |
| 100      |          |      | 8.8287588  | 8.827548       | 8.827  | 9.039   | 8.82865  |
| 110      |          |      | 4.6967089  | 4.694902       | 4.695  | 4.906   | 4.69679  |
| 90       | 0.3      | 0.15 | 16.5129113 | 16.512024      | 16.512 | 16.732  | 16.51274 |
| 100      |          |      | 10.2098305 | 10.208724      | 10.208 | 10.429  | 10.20968 |
| 110      |          |      | 5.7301225  | 5.728161       | 5.728  | 5.948   | 5.73014  |



(a)



(b)

Fig. 4.9: Norme infinie de l'erreur pour une option du Call asiatique avec les paramètres  $S = 100$ ,  $K = 100$ ,  $T = 1$  et pour différentes valeurs du taux d'intérêt  $r$ : (a)  $\sigma = 0.2$ , (b)  $\sigma = 0.3$ .

## 4.5 Les Grecques

Notre approche SPH peut également être utilisée pour calculer les grecques ou les paramètres de sensibilité de ces options comme le delta ( $\Delta$ ) et le gamma ( $\Gamma$ ). Il est important que ces paramètres soient calculés avec précision car la composition du portefeuille de couverture dépend beaucoup de ces paramètres.

Dans cette section nous montrons la précision et l'efficacité de notre méthode SPH, en matière d'évaluation des grecques, en calculant le delta ( $\Delta$ ) et le gamma ( $\Gamma$ ) (les deux premières dérivées du prix de l'option par rapport au cours de l'actif sous-jacent) associée aux options à barrière simple européenne de type Down-and-out et options à double barrière de type knock-and-out. Les résultats sont présentés dans les figures 4.10a-4.10b et 4.11a-4.11b.

Dans le cas d'une option asiatique les valeurs de Delta ( $\Delta$ ) à l'instant  $\tau = 0$  peuvent être calculées comme suit :

$$\Delta = u\left(\frac{K}{S}, 0\right) - \frac{K}{S} \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{K}{S}, 0\right). \quad (4.55)$$

La dérivée du prix de l'option par rapport  $x$  est calculée par l'expression SPH (4.41). Les résultats sont présentés dans les tableau 4.6 et 4.7.

les Figure 4.10a et 4.10b Comparent les valeurs exactes du delta et gamma avec celles obtenues à l'aide de la méthode SPH pour un Call européen de type Down-and-out. Les résultats présentés aux figures 4.10a et 4.10b montrent que les Grecques (delta et gamma) sont efficacement évaluées à l'aide de la présente méthode.

Les figures 4.11a et 4.11b illustrent les valeurs des Grecques (delta et gamma respectivement), pour une options du Call européenne de type knock-and-out avec deux barrières  $B_1 = 95$  et  $B_2 = 125$ , calculées à l'aide de notre approche SPH et la formules analytique. Il est clair, d'après les figures, que les résultats fournis par notre méthode sont stables et en parfaite accord avec les résultats analytiques.

Dans le tableau 4.6 nous comparons la valeur du delta calculée par notre méthode SPH et celle fournie par les méthodes Fast Moving Least Squares (FMLS) [85] et éléments finis [84]. Les deux premières colonnes de ce tableau représentent les valeurs de volatilité  $\sigma$  et le prix d'exercice  $K$  tant dit que les trois dernières colonnes contiennent les valeurs du delta obtenues par les trois méthodes SPH, FMLS et éléments finis respectivement. Nous pouvons constater que nos résultats sont très proches de ceux générés par la méthode sans maillage FMLS, ce qui indique que les deux méthodes SPH et FMLS sont d'efficacité comparables.

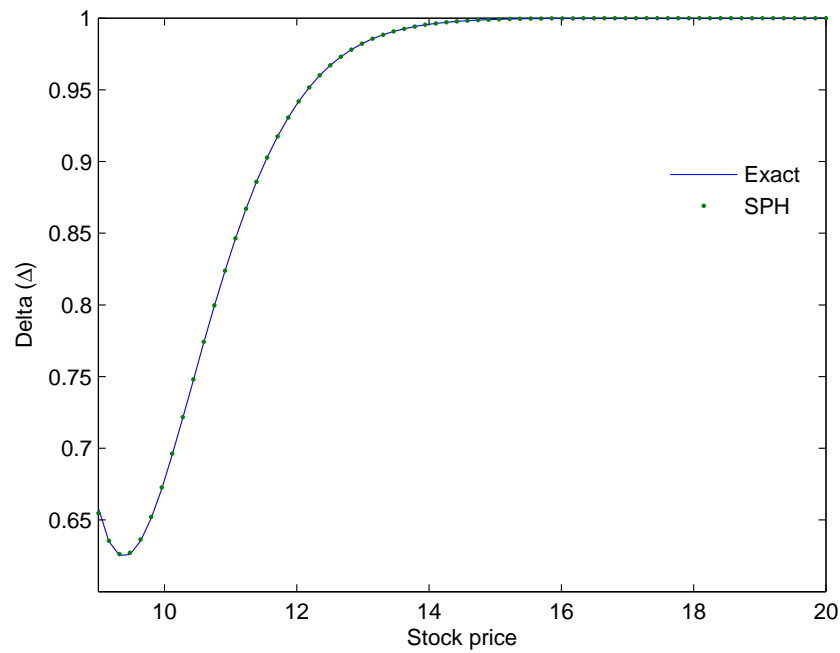
Le tableau 4.7 contient les valeurs de Delta ( $\Delta$ ) pour une option du Call asiatique obtenues par les méthodes SPH, Compact Finite Difference, différences fines (FD), finite difference with control variate (FD with CV), path-wise derivatives (PW estimate) et path-wise derivatives with control variate (PW with CV). Les résultats présentés dans ce tableau montrent bien l'efficacité et la précision de notre méthode SPH pour le calcul des paramètres de couverture (Delta).

Table 4.6: Comparaison de la valeur du Delta d'un Call asiatique donnée par la méthode SPH et d'autres approches numériques avec les paramètres  $S = 100$ ,  $r = 0.15$  et  $T = 1$ .

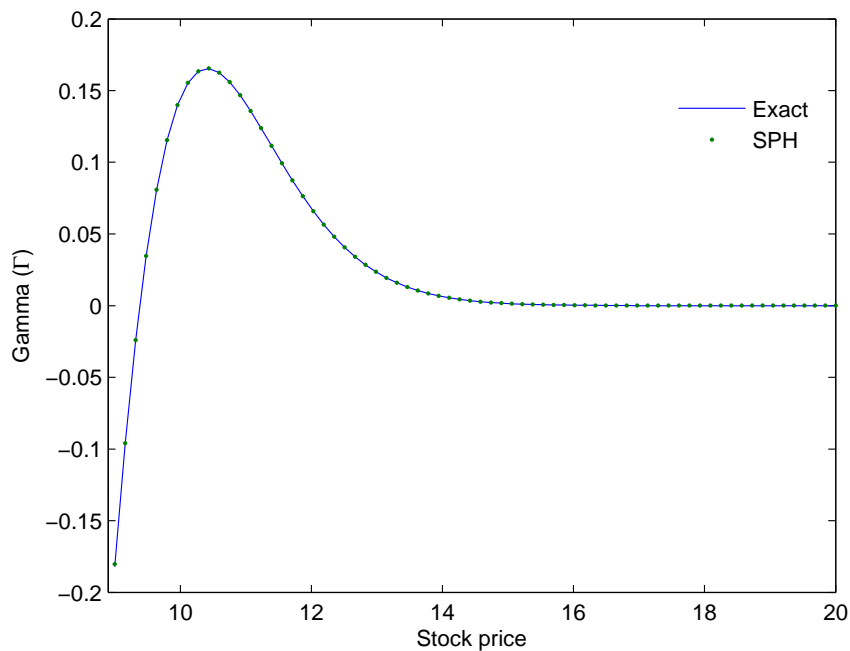
| $\sigma$ | K   | SPH    | Kim et al [85] | FEM [84] |
|----------|-----|--------|----------------|----------|
| 0.05     | 90  | 0.9281 | 0.9285         | 0.929    |
|          | 100 | 0.9287 | 0.9221         | 0.925    |
|          | 105 | 0.7644 | 0.7530         | 0.764    |
| 0.1      | 90  | 0.9280 | 0.9277         | 0.928    |
|          | 100 | 0.8374 | 0.8392         | 0.842    |
|          | 105 | 0.3506 | 0.3548         | 0.355    |
| 0.2      | 90  | 0.8795 | 0.8787         | 0.879    |
|          | 100 | 0.7030 | 0.7023         | 0.703    |
|          | 110 | 0.4206 | 0.4213         | 0.422    |
| 0.3      | 90  | 0.8058 | 0.8054         | 0.806    |
|          | 100 | 0.6433 | 0.6431         | 0.644    |
|          | 110 | 0.4500 | 0.4501         | 0.451    |

Table 4.7: Comparaison entre les valeurs du Delta ( $\Delta$ ) obtenues par la méthode SPH et celles obtenues par d'autres méthodes dans la littérature [74,76] avec les paramètres  $S = 100, K = 100, r = 0.05$  et  $T = 1$ .

| Méthode                | $\sigma = 0.1$ | $\sigma = 0.3$ | $\sigma = 0.5$ |
|------------------------|----------------|----------------|----------------|
| SPH                    | 0.6590         | 0.5704         | 0.5958         |
| Compact FD [74]        | 0.6587         | 0.5694         | 0.5923         |
| Finite difference (FD) | 0.6599         | 0.5668         | 0.5919         |
| FD with CV [76]        | 0.6592         | 0.5662         | 0.5936         |
| PW estimate [76]       | 0.6585         | 0.5680         | 0.5960         |
| PW with CV [76]        | 0.6593         | 0.5663         | 0.5928         |

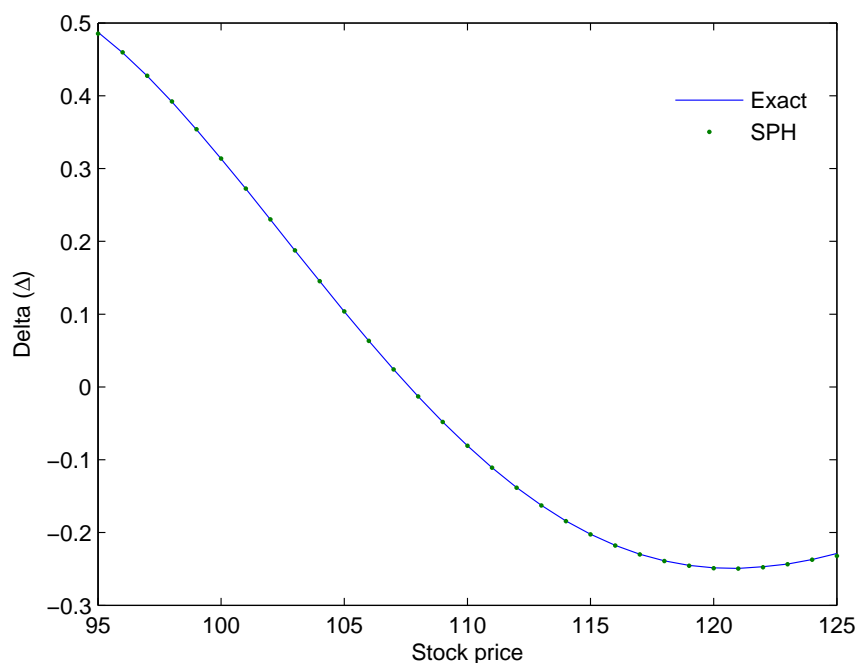


(a)

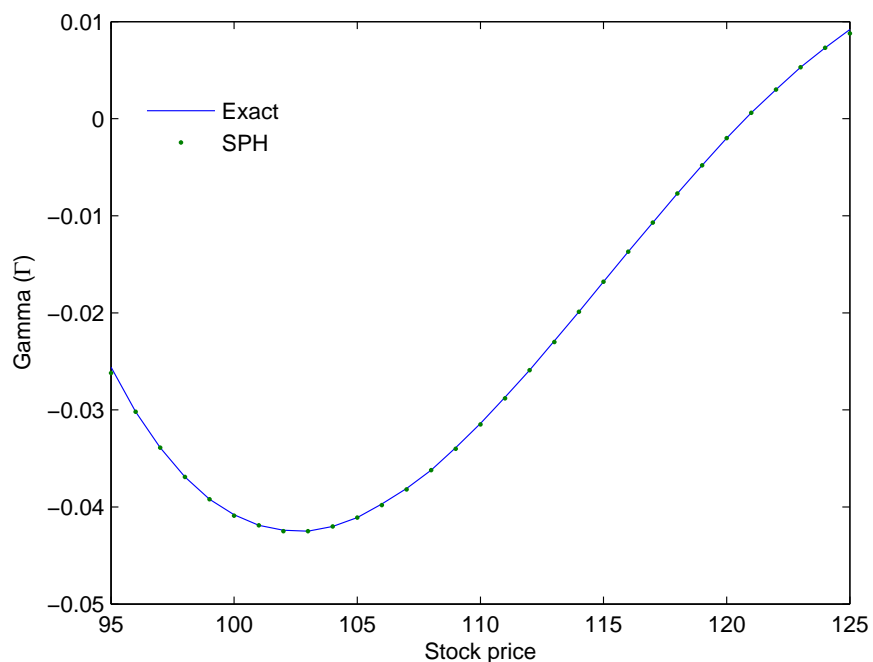


(b)

Fig. 4.10: Comparaison entre les valeurs analytiques du Delta (en haut) et gamma (en bas) et celles obtenues par la méthode SPH pour une option de Call de type Down-and-out avec les paramètres  $K = 10, \sigma = 0.2, r = 0.05, T = 0.5$  et  $\theta = 1/2$ .



(a)



(b)

Fig. 4.11: Valeurs de Delta (en haut) et gamma (en bas) obtenues par la méthode SPH pour une option à double barrière de type knock-out avec  $K = 100$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.1$ ,  $T = 0.5$  et  $\theta = 1/2$ .



## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu la méthode SPH pour valoriser les options exotiques, notamment les options, asiatiques, à barrière et binaires, dans le cadre du modèle de Black et Scholes. Pour les options asiatiques, nous avons adopté la transformation introduite par Roger et Shi [63] afin de réduire la dimension du problème.

La nouvelle EDP est discrétisée par la suite à l'aide de la méthode SPH (Spatial) combinée avec une thêta-méthode (espace-temps).

La stabilité du schéma résultant a été étudiée pour différentes valeurs de paramètres financières, à savoir la volatilité  $\sigma$  et le taux d'intérêt  $r$ .

Pour valider numériquement notre approche, nous avons effectué plusieurs simulations numériques, pour différentes valeurs de volatilité  $\sigma$ , prix d'exercice  $K$  et la maturité  $T$ . Les résultats numériques obtenus sont en parfait accord avec ceux fournis par d'autres méthodes dans la littérature [63,77,74,-80-82,87], ce qui montre l'efficacité et la précision de l'approche proposée en matière d'évaluation d'options.

La présente méthode a également été appliquée au problème de pricing d'options à barrière (simple et double barrières) et aux options « non-path-dependent », à savoir les options binaires. Les solutions numériques SPH obtenues sont comparées avec des solutions analytiques et également à celles issues de la méthode sans maillage RFB [90].

Comparés aux solutions analytiques, ces résultats numériques permettent d'affirmer que l'approche proposée est très robuste et fournissent des résultats très fiables.

Pour terminer, nous avons calculé les paramètres de couverture telle que le Delta et le Gamma. Ces paramètres sont très importants en finance puisqu'ils permettent au vendeur de l'option de se couvrir. Les grecques (Delta et Gamma) calculés à l'aide de la méthode SPH sont en très bon accord avec ceux obtenus par d'autres méthodes numériques couramment utilisées en finance, telles que la méthode de Monte Carlo, différences finis et éléments finis.

## Chapter 5

# SPH pour pricing d'options européennes et américaines dans le modèle de Heston

### 5.1 Introduction

Le modèle Black-Scholes[3], porte sur les problèmes d'évaluation des options, a connu un grand succès auprès des chercheurs et des professionnels de la finance, notamment en ce qui concerne l'évaluation des options sur actions. Il a dérivé une EDP parabolique de second ordre pour la valeur d'une option sur actions. Cependant, il est bien connu que sur les marchés réels, les hypothèses de Black-Scholes sont souvent violées. La violation la plus apparente est que la volatilité de l'actif sous-jacent n'est pas constante durant la vie de l'option mais elle évolue comme un processus stochastique. Plusieurs modèles mathématiques à volatilité stochastique [129, 121] sont développés afin de pallier ce problème, l'un des modèles à volatilité stochastique les plus populaires pour l'évaluation des produits dérivés portes le nom de Heston. Ce modèle conduit à une évaluation plus réaliste du prix des options que le modèle célèbre de Black-Scholes et constitue son extension à la forme bidimensionnelle [140, 148]. Dans [137], Heston a développé une solution semi-analytique pour les prix des options européennes dans un modèle à volatilité stochastique, cependant, son implémentation n'est pas un exercice simple en raison du comportement oscillatoire de l'intégrale complexe qui entre en jeu par la formule d'inversion de type Fourier. Le recours aux méthodes numériques s'avère donc indispensable pour résoudre ces problèmes d'évaluation des options. De nombreuses tentatives ont été menées pour résoudre ce modèle dans le passé. Nous présentons ci-dessous quelques documents sur les approches utilisées pour résoudre les problèmes décrits par le modèle de Heston.

In't Hout et Foulon [145] ont appliqué les méthodes des différences finies pour discrétiser en espace l'EDP de Heston, en utilisant une grille non uniforme pour capturer la région importante autour du prix d'exercice. Ensuite, ils ont intégré le problème semi-discret résultant par rapport au temps en utilisant les trois différentes méthodes des directions alternées implicites (DAI), à savoir les schémas de Douglas [134, 147], Craig-Sneyd [133], Craig-Sneyd modifié [133, 144] et Hundsdorfer-Verwer [141, 142]. Ils ont démontré l'efficacité de leur approche à travers divers exemples numériques avec des données concrètes tirées de la littérature, où ils ont abordé les

options de call européennes ainsi que les options à barrière de type down-and-out.

Dans [149], Zhu et Chen ont appliqué des techniques de perturbation singulière pour évaluer des options de type européens dans le cadre d'un modèle à volatilité stochastique, et ils ont dérivé une formule analytique simple et élégante pour calculer le prix des options de put européennes.

Dans [131], Ikonen et Toivanen ont étudié la précision des méthodes de splitting des opérateurs pour résoudre les problèmes des options américaines à volatilité stochastique. Leurs expériences numériques montrent que les méthodes de splitting des opérateurs n'augmentent pas l'erreur liée à la discrétisation temporelle. Ils ont également démontré l'efficacité de leur approche lorsqu'une méthode de type multigrilles est utilisée pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

Zvan et Forsyth [139] ont proposé une méthode des pénalités pour pricing les options américaines dans le modèle de Heston. Ils ont décrit plusieurs méthodes pour imposer la contrainte d'exercice anticipé en utilisant un terme source de pénalité dans les équations discrètes. Les équations algébriques non linéaires résultantes sont résolues à l'aide d'une méthode de Newton.

D'autres travaux liés aux méthodes numériques sur l'évaluation des options sous le modèle à volatilité stochastique de Heston peuvent être trouvés dans [126,127,128,135,136,143,146].

Dans ce chapitre nous appliquons notre méthode au problème de pricing d'options européennes et américaines dans le cadre du modèle à volatilité stochastique de Heston. Nous suivons les mêmes procédures réalisées dans les chapitres précédents. Les dérivées partielles spatiales impliquées dans l'équation différentielle bidimensionnelles (en espace) sont approximées à l'aide de la méthode sans maillage SPH, le système linéaire (EDO) résultant est discrétisé par la méthode du  $\theta$ -schéma. Pour valider la méthode proposée, plusieurs simulations numériques ont été effectuées. Les résultats numériques obtenus sont comparés avec ceux donnés par la formule semi-analytique de Heston [137] et également avec ceux fournis par les méthodes numériques publiées dans la littérature [125, 130, 131, 132, 135, 138, 139].

## 5.2 Le modèle de Heston

Dans cette section nous présentons une brève dérivation de l'équation différentielle décrivant l'évolution du prix d'une option dans les cas particuliers où le sous-jacent suit un processus stochastique sous le modèle de Heston.

Le modèle de Heston suppose que le sous-jacent  $S_\tau$  suit un processus stochastique de type Black-Scholes, mais avec une variance stochastique  $v_\tau$  qui suit un processus de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross).

$$\begin{cases} dS_\tau = \mu S_\tau d\tau + \sqrt{v_\tau} S_\tau dW_{1,\tau}, \\ dv_\tau = \kappa(\eta - v_\tau) d\tau + \sigma \sqrt{v_\tau} dW_{2,\tau}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Avec

$$E[dW_{1,\tau}, dW_{2,\tau}] = \rho d\tau. \quad (5.2)$$

Ici  $\mu$  représente le taux de rendement du sous-jacent,  $\eta$  la moyenne de la volatilité à long

terme,  $\kappa$  correspond à la rapidité à laquelle la volatilité converge vers  $\eta$  et  $\sigma$  désigne la volatilité de la variance  $v_\tau$ .  $(W_{1,\tau})_{\tau \geq 0}$  et  $(W_{2,\tau})_{\tau \geq 0}$  sont deux mouvements browniens standards corrélés, de paramétré de corrélation  $\rho$ .

Dans la suite de la section, nous avons en grande partie repris la démarche de Jim Gatheral [150].

Dans le modèle de Black-Scholes il n'y avait qu'une seule source d'incertitude, à savoir le prix du sous-jacent, qui pouvait être couvert avec une obligation. Dans le cas du modèle de Heston, une deuxième source d'incertitude venant du caractère stochastique de la volatilité doit aussi être couverte dans le but de construire un portefeuille sans risque. Soit  $\Pi$  un portefeuille contenant l'option dont on cherche à déterminer le prix noté  $V(S, v, \tau)$ , la quantité  $-\Delta$  de sous-jacents et la quantité  $-\Delta_1$  d'un autre actif, de valeur  $U$  dépendant de la volatilité. On a ainsi

$$\Pi = V - \Delta S - \Delta_1 U. \quad (5.3)$$

En appliquant le lemme d'Itô aux fonctions  $V(S, v, \tau)$  et  $U(S, v, \tau)$ , on trouve que l'évolution du portefeuille pour  $d\tau$  est donnée par :

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left\{ \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} \right\} d\tau \\ & - \Delta_1 \left\{ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} \right\} d\tau + \left\{ \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial U}{\partial S} - \Delta \right\} dS \\ & + \left\{ \frac{\partial V}{\partial v} - \Delta_1 \frac{\partial U}{\partial v} \right\} dv. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Pour rendre le portefeuille sans risque, nous devons choisir

$$\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial U}{\partial S} - \Delta = 0, \quad (5.5)$$

pour éliminer le terme en  $dS$ , et

$$\frac{\partial V}{\partial v} - \Delta_1 \frac{\partial U}{\partial v} = 0 \quad (5.6)$$

pour éliminer le terme en  $dv$ . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left\{ \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} \right\} d\tau \\ & - \Delta_1 \left\{ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} \right\} d\tau \\ & = r_d \Pi d\tau \\ & = r_d (V - \Delta S - \Delta_1 U) d\tau. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Cette dernière égalité provient de l'évolution sans risque du portefeuille en l'absence d'arbitrage. Nous avons ici supposé que le taux sans risque  $r_d$  est constant au cours du temps. En rassemblant les termes en  $V$  d'un côté et ceux en  $U$  de l'autre et en utilisant les équations (5.5) et (5.6) nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial v}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + r_d S \frac{\partial V}{\partial S} - r_d V \right\} = \\ \frac{1}{\frac{\partial U}{\partial v}} \left\{ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + r_d S \frac{\partial U}{\partial S} - r_d U \right\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

On constate que la première partie de l'équation (5.8) est une fonction de  $V$  seulement et la deuxième de  $U$  uniquement. Nous pouvons déduire que chaque côté de l'équation est égal à une fonction  $f$  des variables indépendante  $S, v$  et  $\tau$ . On peut ainsi écrire que

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + r_d S \frac{\partial V}{\partial S} - r_d V = f(S, v, \tau) \frac{\partial V}{\partial v}. \quad (5.9)$$

Soit encore

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + r_d S \frac{\partial V}{\partial S} - r_d V = -(\kappa(\eta - v) - \lambda(S, v, \tau)) \frac{\partial V}{\partial v}. \quad (5.10)$$

Le terme  $\lambda(S, v, \tau)$  désigne la prime de risque de volatilité.

Dans son article [137], Heston suppose que le prix de marché pour risque de volatilité est proportionnel à la variance  $v$ :  $\lambda(S, v, \tau) = \lambda v$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

En posant  $t = T - \tau$ , on trouve que le prix de toute option  $V(S, v, T - \tau)$ , Sous le modèle de Heston, doit vérifier l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + r_d S \frac{\partial V}{\partial S} - r_d V + (\kappa(\eta - v) - \lambda v) \frac{\partial V}{\partial v} \quad (5.11)$$

où  $0 < t < T, S \geq 0$  et  $v > 0$ .

Pour des raisons numériques, nous nous restreignons à un domaine de calcul borné  $\Omega \times [0, T] = [0, S_{max}] \times [0, v_{max}] \times [0, T]$  inclut dans  $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ , les valeurs  $S_{max}$  et  $v_{max}$  sont choisis de tel sorte que l'erreur liée à la troncature du domaine de calcul soit négligeable.

### 5.2.1 Les options européennes

Un call européen de prix d'exercice  $K$  et de maturité  $T$  satisfait l'équation aux dérivées partielles (5.11) avec les conditions suivantes :

$$V(S, v, 0) = \max(S - K, 0), \quad (5.12)$$

$$V(0, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_{max}, \mathbf{v}, t) = 1, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, 0, t) = r_d S \frac{\partial V}{\partial S}(S, 0, t) + \kappa \eta \frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}}(S, 0, t) - r_d V(S, 0, t), \quad (5.15)$$

$$V(S, \mathbf{v}_{max}, t) = S. \quad (5.16)$$

Dans le cas d'une option de put les conditions aux limites prennent les formes suivantes

$$V(S, \mathbf{v}, 0) = \max(K - S, 0), \quad (5.17)$$

$$V(0, \mathbf{v}, t) = Ke^{-r_d t}, \quad (5.18)$$

$$V(S_{max}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, 0, t) = r_d S \frac{\partial V}{\partial S}(S, 0, t) + \kappa \eta \frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}}(S, 0, t) - r_d V(S, 0, t), \quad (5.20)$$

$$V(S, \mathbf{v}_{max}, t) = Ke^{-r_d t}. \quad (5.21)$$

## 5.2.2 Les options américaines

Contrairement à leurs homologues européens, les options américaines offrent à leurs détenteurs la possibilité de les exercer à tout moment jusqu'à la date d'échéance du contrat, ce qui entraîne la contrainte d'exercice anticipé  $V(S, \mathbf{v}, t) \geq g(S, \mathbf{v})$ . où  $g$  représente la fonction de payoff, Dans la région de continuation où l'exercice anticipé n'est pas optimale,  $V$  satisfait le même EDP que l'option européenne, comme donné par l'équation (5.11). En combinant ces relations, nous pouvons écrire le problème du pricing des options américaines comme un problème de complémentarité linéaire LCP dépendant du temps

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \mathbf{v} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{1}{2} \sigma^2 \mathbf{v} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{v}^2} - \rho \sigma \mathbf{v} S \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{v} \partial S} - r_d S \frac{\partial V}{\partial S} + r_d V - (\kappa(\eta - \mathbf{v}) - \lambda \mathbf{v}) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} \geq 0, \\ \\ V(S, \mathbf{v}, t) \geq g(S, \mathbf{v}), \\ \\ \left( \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \mathbf{v} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{1}{2} \sigma^2 \mathbf{v} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{v}^2} - \rho \sigma \mathbf{v} S \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{v} \partial S} - r_d S \frac{\partial V}{\partial S} + r_d V - (\kappa(\eta - \mathbf{v}) - \lambda \mathbf{v}) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} \right) (V - g) = 0. \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Avec la condition initiale

$$V(S, \mathbf{v}, 0) = g(S, \mathbf{v}). \quad (5.23)$$

Pour une option de Call ou put américaine, les conditions aux limites sont les mêmes que celles de l'option de Call ou put européenne donnée par les équations (5.12)-(5.16) ou (5.17)-(5.21).

## 5.3 Discrétisation de l'EDP du modèle

La discrétisation du problème (5.11) se fait en deux étapes. Premièrement, l'EDP est discrétisée en espace à l'aide de la méthode sans maillage SPH, générant ainsi un système d'équation différentielle ordinaire (EDO) en temps. Deuxièmement, le problème semi-discret qui en découle est résolu en suite par la méthode du  $\theta$ -schéma.

### 5.3.1 Discrétisation spatiale

Dans cette section nous étendons la méthode sans maillage SPH développée dans les chapitres précédents pour discrétiser en espace le problème (5.11). Dans le cas de deux dimensions les approximations SPH pour les dérivées partielles d'ordre un et deux prennent les formes suivantes [122,123,124]:

#### Les dérivées partielles d'ordre 1

Soit  $i$  un point donné et  $(S_i, \mathbf{v}_i) \in \Omega$  sa position associée, d'après [122] les dérivées partielles de  $V(S_i, \mathbf{v}_i)$  suivant les variables  $S_i$  et  $\mathbf{v}_i$  sont données par:

$$\frac{\partial V}{\partial S_i} = \alpha_{S,i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (V(S_j, \mathbf{v}_j) - V(S_i, \mathbf{v}_i)) \frac{S_i - S_j}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}_i} = \alpha_{\mathbf{v},i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} (V(S_j, \mathbf{v}_j) - V(S_i, \mathbf{v}_i)) \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j. \quad (5.25)$$

$r_{ij} = \|(S_i, \mathbf{v}_i) - (S_j, \mathbf{v}_j)\|$ ,  $w_{ij} = w(r_{ij}, h)$  désigne la fonction de noyau et  $h$  son rayon du support,  $\omega_j$  le volume associé au nœud  $j$  et  $\mathcal{D}_i = \{(S_j, \mathbf{v}_j) \in \Omega \text{ tel que } r_{ij} \leq kh\}$ : l'ensemble des points voisins de  $i$ .

$\alpha_{S,i}$  et  $\alpha_{\mathbf{v},i}$  sont des coefficients de correction donnés par :

$$\alpha_{S,i} = - \left[ \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \frac{(S_i - S_j)^2}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j \right]^{-1}, \quad (5.26)$$

$$\alpha_{\mathbf{v},i} = - \left[ \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \frac{(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j \right]^{-1}. \quad (5.27)$$

### Les dérivées partielles d'ordre 2

D'après [123,124] les dérivées partielles d'ordre deux de la fonction  $V(S_i, v_i)$  peuvent être calculées selon les expressions SPH suivantes :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_i^2} = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \frac{V_{ij}}{r_{ij}} \left( 4 \frac{(S_i - S_j)^2}{r_{ij}^2} - 1 \right) \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j, \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_i^2} = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \frac{V_{ij}}{r_{ij}} \left( 4 \frac{(v_i - v_j)^2}{r_{ij}^2} - 1 \right) \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j, \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial v_i} = 4 \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \frac{V_{ij}}{r_{ij}} \frac{(S_i - S_j)(v_i - v_j)}{r_{ij}^2} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j. \quad (5.30)$$

En discrétisant le domaine de calcul  $\Omega = [0, S_{max}] \times [0, v_{max}]$  en ensemble de points finis  $N = N_S \times N_v$ , où  $N_S$  et  $N_v$  représentent le nombre des points d'interpolation dans les directions  $S$  et  $v$  respectivement, et en remplaçant les dérivées spatiales dans l'EDP du modèle de Heston (5.11) par leur approximation SPH (5.24)-(5.25) et (5.28)-(5.30), on aboutit au schéma semi-discret, en point  $(S_i, v_i)$ , suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} = & \frac{1}{2} v_i S_i^2 \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \frac{V_{ij}}{r_{ij}} \left( 4 \frac{S_{ij}^2}{r_{ij}^2} - 1 \right) \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j + \frac{1}{2} \sigma^2 v_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \frac{V_{ij}}{r_{ij}} \left( 4 \frac{v_{ij}^2}{r_{ij}^2} - 1 \right) \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j + \rho \sigma v_i S_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} 4 \frac{V_{ij}}{r_{ij}} \frac{S_{ij} v_{ij}}{r_{ij}^2} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j \\ & + r_d S_i \alpha_{S,i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} V_{ji} \frac{S_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j + [\kappa(\eta - v_i) - \lambda v_i] \alpha_{v,i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} V_{ji} \frac{v_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j - r_d \alpha_i \sum_{j \in \mathcal{D}_i} V_j w_{ij} \omega_j. \end{aligned} \quad (5.31)$$

En appliquant la procédure à chaque point  $i$  de domaine  $\Omega$ , nous obtenons la forme matricielle suivante :

$$\frac{dV}{dt} = AV. \quad (5.32)$$

Les coefficients de la matrice  $A$  sont donnés par :

$$A_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - r_d \alpha_i w_{ij} \omega_j & \text{si } i \neq j \in \mathcal{D}_i, \\ 0 & \text{si } i \neq j \notin \mathcal{D}_i, \\ -\sum_{l \neq i \in \mathcal{D}_i} a_{il} - r_d \alpha_i w_{ii} & \text{si } i = j. \end{cases}$$



Avec

$$\begin{aligned}
 a_{ij} = & -\frac{1}{2} \frac{v_i S_i^2}{r_{ij}^2} \left(4 \frac{S_{ij}^2}{r_{ij}^2} - 1\right) \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 v_i}{r_{ij}} \left(4 \frac{v_{ij}^2}{r_{ij}^2} - 1\right) \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j - 4 \frac{\rho \sigma v_i S_i}{r_{ij}} \frac{S_{ij} v_{ij}}{r_{ij}^2} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j \\
 & + r_d S_i \alpha_{S,i} \frac{S_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j + [\kappa(\eta - v_i) - \lambda v_i] \alpha_{v,i} \frac{v_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

D'après la construction de la matrice  $A$ , nous pouvons bien constater que lorsque un point  $j$  n'est pas dans le voisinage du point  $i$ , la fonction de noyau évaluée en  $i$  sera nulle et par conséquent  $a_{ij}$  sera égale 0. Ce qui implique que  $A$  est une matrice creuse, comme illustré dans la figure ci-dessous.

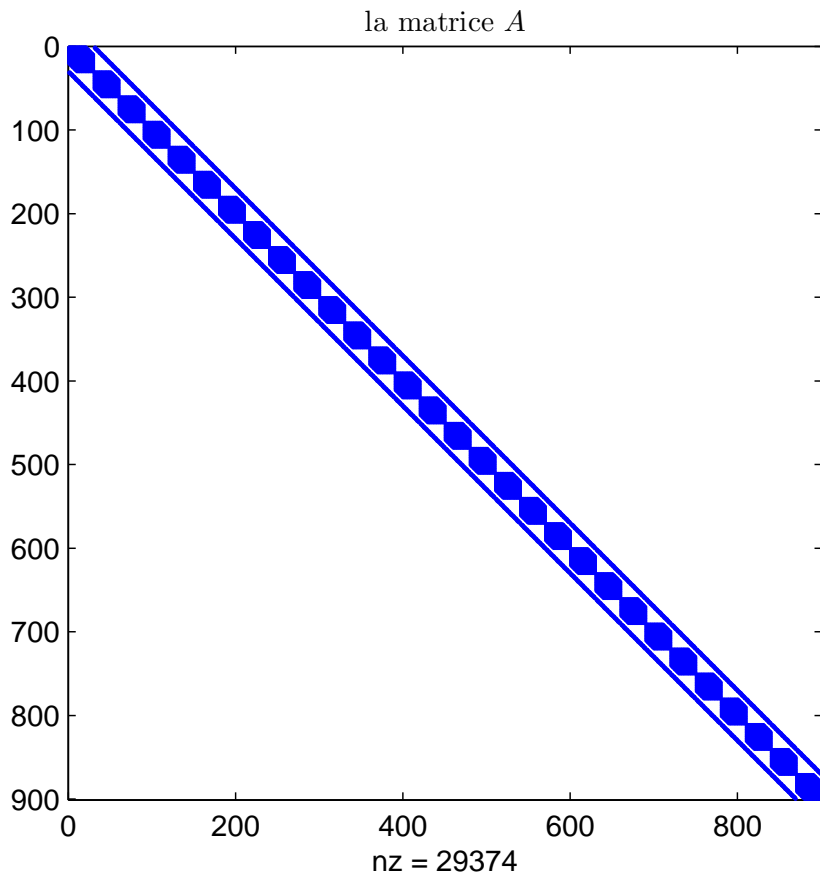


Fig. 5.1: Visualisation de la structure creuse de la matrice  $A$  pour  $N = 900$ .  $nz$  : désigne le nombre d'éléments non nuls de la matrice  $A$ .

### 5.3.2 Discrétisation temporelle

Il existe plusieurs méthodes d'intégration temporelle pour résoudre le système d'EDO (5.32) sortant de la discrétisation spatiale SPH. Dans cette section nous allons utiliser le  $\theta$ -schéma pour discrétiser la dérivée temporelle. Pour ce faire, on suppose que l'intervalle de temps  $[0, T]$  sur lequel on résout le système (5.32) est discrétisé en plusieurs instants  $t_k$  séparés par un pas de temps constant  $\Delta t$  :  $t_k = k\Delta t$   $k = 1, \dots, M$ . on note  $V^k$  une approximation de  $V(S, \mathbf{v}, t_k)$ .

Pour tout  $\theta \in [0, 1]$ , on définit le  $\theta$ -schéma par :

$$\frac{V^{k+1} - V^k}{\Delta t} = \theta AV^{k+1} + (1 - \theta)AV^k. \quad (5.34)$$

En réorganisant l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$(I - \theta\Delta tA)V^{k+1} = (I + (1 - \theta)\Delta tA)V^k, \quad (5.35)$$

avec  $V^k = (V_1^k, V_2^k, \dots, V_N^k)^T$  le vecteur du prix,  $A$  : la matrice résultant de la discrétisation spatiale via SPH et  $I$  est la matrice identité de dimension  $N \times N$ .

Suivant les valeurs de  $\theta$  nous nous retrouvons dans l'un des schémas suivants:

Si  $\theta = 0$  on se retrouve dans le schéma d'Euler Explicite.

Si  $\theta = 1$  on se retrouve dans le schéma d'Euler Implicite.

Si  $\theta = 1/2$ , on se retrouve dans le schéma de Crank – Nicolson.

En appliquant la même procédure de discrétisation effectuée dans la section précédente au cas européen, on trouve que la version discrète du problème de complémentarité linéaire (5.22) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - \theta\Delta tA)V^{k+1} - (I + (1 - \theta)\Delta tA)V^k \geq 0, \\ V^{k+1} \geq G, \\ \left( (I - \theta\Delta tA)V^{k+1} - (I + (1 - \theta)\Delta tA)V^k \right) (V^{k+1} - G) = 0, \end{array} \right. \quad (5.36)$$

où  $G = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T$  représente la fonction du payoff.

### 5.3.3 Etude de la stabilité

Dans cette section nous étudions la stabilité du schéma numérique (5.34). Pour cela on définit l'erreur à l'instant discret  $t_k$  par

$$e^k = V_{Exact}^k - V_{Num}^k \quad (5.37)$$

où  $V_{Exact}^k$  et  $V_{Num}^k$  sont les solutions exactes et numériques du modèle de Heston.

En remplaçant l'expression (5.37) dans le schéma (5.34), on trouve que l'erreur à l'instant  $t_{k+1}$  satisfait l'équation suivante :

$$e^{k+1} = L e^k, \quad (5.38)$$

où  $L$  désigne la matrice d'amplification donnée par :

$$L = (I - \theta \Delta t A)^{-1} (I + (1 - \theta) \Delta t A). \quad (5.39)$$

Le schéma numérique (5.34) est dit stable si et seulement si  $\rho(L) \leq 1$ , où  $\rho(L)$  est le rayon spectral de la matrice  $L$ . Ce qui implique

$$\left| \frac{1 + \Delta t (1 - \theta) \lambda_A}{1 - \Delta t \theta \lambda_A} \right| \leq 1 \quad (5.40)$$

où  $\lambda_A$  représentent les valeurs propres de la matrice  $A$ .

Dans le cas des schémas d'Euler implicite ( $\theta = 1$ ) et Crank-Nicholson ( $\theta = 0.5$ ), l'inégalité (5.40) est toujours satisfaite à condition que  $Re(\lambda_A) \leq 0$ .

La figure 5.2 représente la distribution des valeurs propres de la matrice  $A$  résultant de la discrétisation spatiale SPH. Comme nous pouvons le constater l'ensemble de valeurs propres de  $A$  se trouve dans le demi-plan complexe gauche, ce qui montre que la partie réel de toutes les valeurs propres  $\lambda_A$  sont strictement négatives  $Re(\lambda_A)_{max} = -0.1 < 0$ , et par conséquent les schémas d'Euler implicite et Crank-Nicholson sont inconditionnellement stables.

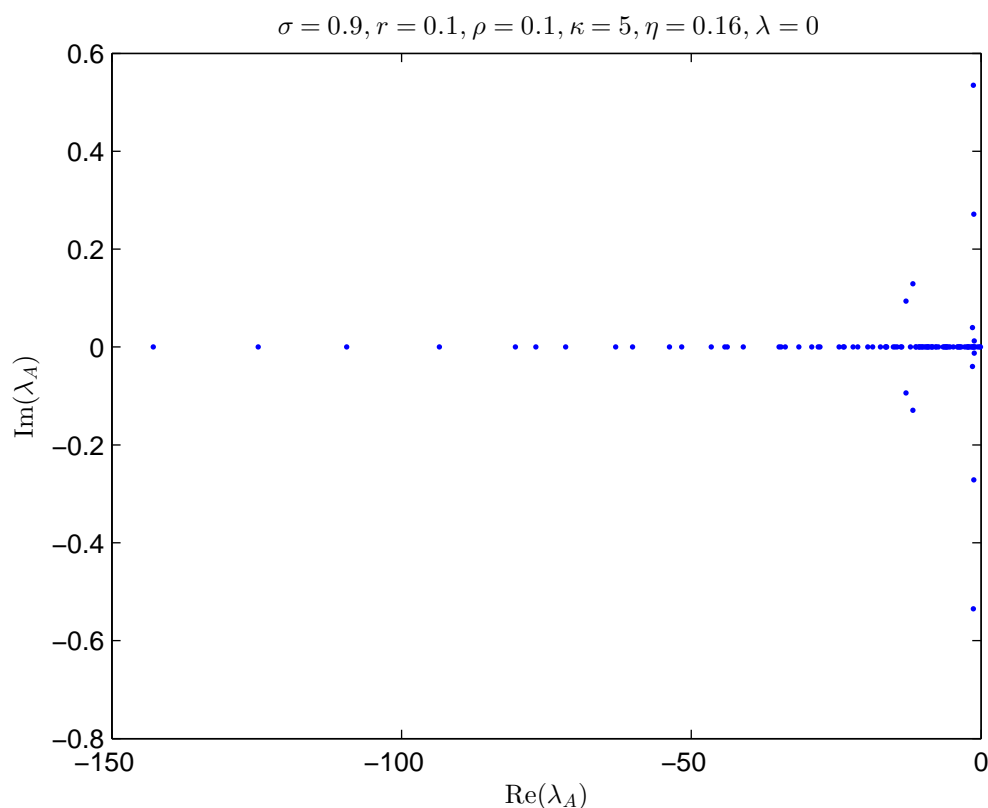


Fig. 5.2: Représentation graphique des valeurs propre de la matrice  $A$  pour  $N = 100$ .

## 5.4 Résultat numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques obtenus en appliquant la méthode SPH, décrite dans la section précédente, aux problèmes d'options européennes (5.12)-(5.22) et américaines (5.23) dans le cadre du modèle de Heston.

Pour évaluer la performance et la précision de notre approche, nous comparons nos résultats numériques avec ceux fournis par la formule semi-analytique de Heston [137] pour le prix d'options européennes et également à ceux obtenus par les méthodes numériques de la littérature [125, 130, 131, 132, 135, 138, 139].

Les valeurs des paramètres utilisés dans les simulations numériques sont présentées dans le tableaux ci-dessous, le domaine du calcul est choisit comme suit :

$$\Omega \times [0, T] = [0, 20] \times [0, 1] \times [0, 25].$$

Table 5.1: Valeurs des paramètres du modèle de Heston.

| Paramètres | Valeurs       |
|------------|---------------|
| $r_d$      | 0.1           |
| $\sigma$   | 0.9           |
| $\rho$     | 0.1           |
| $\kappa$   | 5             |
| $\eta$     | 0.16          |
| $\lambda$  | 0             |
| T          | 0.25 (3 mois) |
| K          | 10            |

Dans le tableau 5.2 nous comparons les prix d'une option de Put européenne obtenus par notre approche avec ceux donnés par la formule semi-analytique (Exacte). Dans la première colonne, nous avons les valeurs de l'actif  $S$ , la deuxième colonne contient les valeurs exactes [137], la troisième colonne contient les valeurs obtenues à l'aide de notre approche SPH et la dernière colonne représente l'erreur estimée.

Le tableau 5.3 présente la même comparaison pour les mêmes paramètres financiers mais pour le cas d'un Call européen. Il ressort clairement des résultats présentés dans ces tableaux que les prix calculés par notre approche sont en bon accord avec les prix analytiques issus de la formule semi-fermée de Heston [137].

Table 5.2: Comparaison entre les prix d'un Put européen obtenus par notre approche et ceux fournis par la formule semi-fermée avec les paramètres  $\nu = 0.25, N_S = N_V = 120, M = 250$  et  $\theta = 1/2$ .

| Sous-jacent | Exact  | SPH    | Erreur |
|-------------|--------|--------|--------|
| 8           | 1.9776 | 1.9790 | 0.0014 |
| 9           | 1.2814 | 1.2825 | 0.0011 |
| 10          | 0.7718 | 0.7727 | 0.0009 |
| 11          | 0.4382 | 0.4389 | 0.0007 |
| 12          | 0.2391 | 0.2394 | 0.0003 |

Table 5.3: Les prix d'un Call européen calculés par notre méthode et l'approche semi-analytique (exacte) [137] avec les paramètres  $\nu = 0.25, N_S = N_V = 80, M = 250$  et  $\theta = 1/2$ .

| Sous-jacent | Exact  | SPH    | Erreur |
|-------------|--------|--------|--------|
| 8           | 0.2265 | 0.2291 | 0.0026 |
| 9           | 0.5303 | 0.5339 | 0.0036 |
| 10          | 1.0207 | 1.0239 | 0.0032 |
| 11          | 1.6871 | 1.6882 | 0.0011 |
| 12          | 2.4880 | 2.4842 | 0.0038 |

Les figure 5.3 et 5.4 comparent la solution semi-analytique et celle obtenue par la présente méthode, pour une option européenne (dans les deux cas Call et Put). D'après ces figures, nous pouvons constater graphiquement que les résultats fournis par la méthode SPH sont en bonne adéquation avec ceux donnés par la formule semi-analytique de Heston [137].

Pour les options américaines, nous considérons le cas d'un put américain avec les paramètres financiers mentionnés dans le tableau 5.1. Comme il n'existe pas une solution analytique exacte pour les problèmes d'options américaines dans le cadre du modèle de Heston, nous nous sommes proposés la solution numérique de Toivanen et Ikonen [130], calculée sur un maillage très fin  $(N_S, N_v, M) = (4096, 2048, 4098)$ , comme solution référence. Pour valider les solutions obtenues, nos résultats numériques sont comparés aux résultats donnés par Clarke et Parrott [125], Yousuf et Khaliq [138], Ito et Toivanen [132], Oosterlee [135] et Zvan et al [139]. Nos résultats sont présentés dans le tableau 5.4 (pour  $v = 0,25$ ) et le tableau 5.5 (pour  $v = 0,0625$ ). Nous pouvons observer à partir de ces comparaisons que l'écart entre nos résultats et ceux de la solution exacte [130] ne dépassent pas 0.14% dans le cas  $v = 0,25$  et 1.72% pour le cas  $v = 0,0625$ .

Table 5.4: Comparaison entre les prix d'un Put américaine obtenus par notre méthode SPH et ceux fournis par les méthodes de la littérature pour différentes valeurs de l'actif sous-jacents  $S$ .

| Reference                       | $(N_S, N_v, M)$  | $v$  | S=8     | S=9     | S=10    | S=11    | S=12    |
|---------------------------------|------------------|------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Toivanen et Ikonen (Exact)[130] | (4096,2048,4098) | 0.25 | 2.07837 | 1.33364 | 0.79598 | 0.44827 | 0.24281 |
| SPH                             | (155, 155,200)   | 0.25 | 2.0784  | 1.3338  | 0.7961  | 0.4489  | 0.2432  |
| Clarke et Parrott[125]          | (513, 193, -)    | 0.25 | 2.0733  | 1.3290  | 0.7992  | 0.4536  | 0.2502  |
| Zvan,Forsyth [139]              | (177, 103, -)    | 0.25 | 2.0784  | 1.3337  | 0.7961  | 0.4483  | 0.2428  |
| Oosterlee [135]                 | (257, 257, -)    | 0.25 | 2.079   | 1.334   | 0.796   | 0.449   | 0.243   |
| Toivanen et Ito [132]           | (2049,1025,1025) | 0.25 | 2.07836 | 1.33363 | 0.79597 | 0.44827 | 0.24281 |
| Yousuf et Khaliq[138]           | (400, 80, 20)    | 0.25 | 2.0760  | 1.3316  | 0.7945  | 0.4473  | 0.2423  |
| Toivanen et Ikonen[131]         | (320, 128, 64)   | 0.25 | 2.07829 | 1.33351 | 0.79583 | 0.44815 | 0.24273 |

Table 5.5: Comparaison des méthodes numériques et SPH, pour évaluer un Put américain.

| Reference                       | $(N_S, N_V, M)$  | $v$    | $S = 8$ | $S=9$   | $S=10$  | $S=11$  | $S=12$  |
|---------------------------------|------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Toivanen et Ikonen (Exact)[130] | (4096,2048,4098) | 0.0625 | 2.0000  | 1.10762 | 0.52003 | 0.21368 | 0.08204 |
| SPH                             | (179, 179,200)   | 0.0625 | 2.0000  | 1.1158  | 0.5347  | 0.2254  | 0.0885  |
| Clarke et Parrott[125]          | (513, 193, -)    | 0.0625 | 2.0000  | 1.1080  | 0.5316  | 0.2261  | 0.0907  |
| Zvan,Forsyth [139]              | (177, 103, -)    | 0.0625 | 2.0000  | 1.1076  | 0.5202  | 0.2138  | 0.0821  |
| Oosterlee [135]                 | (257, 257, -)    | 0.0625 | 2.000   | 1.107   | 0.517   | 0.212   | 0.0815  |
| Toivanen et Ito [132]           | (2049,1025,1025) | 0.0625 | 2.00000 | 1.10762 | 0.52003 | 0.21367 | 0.08204 |
| Yousuf et Khaliq[138]           | (400, 80, 20)    | 0.0625 | 1.9958  | 1.1051  | 0.5167  | 0.2119  | 0.0815  |
| Toivanen et Ikonen[131]         | (320, 128, 64)   | 0.0625 | 2.00000 | 1.10749 | 0.51985 | 0.21354 | 0.08198 |

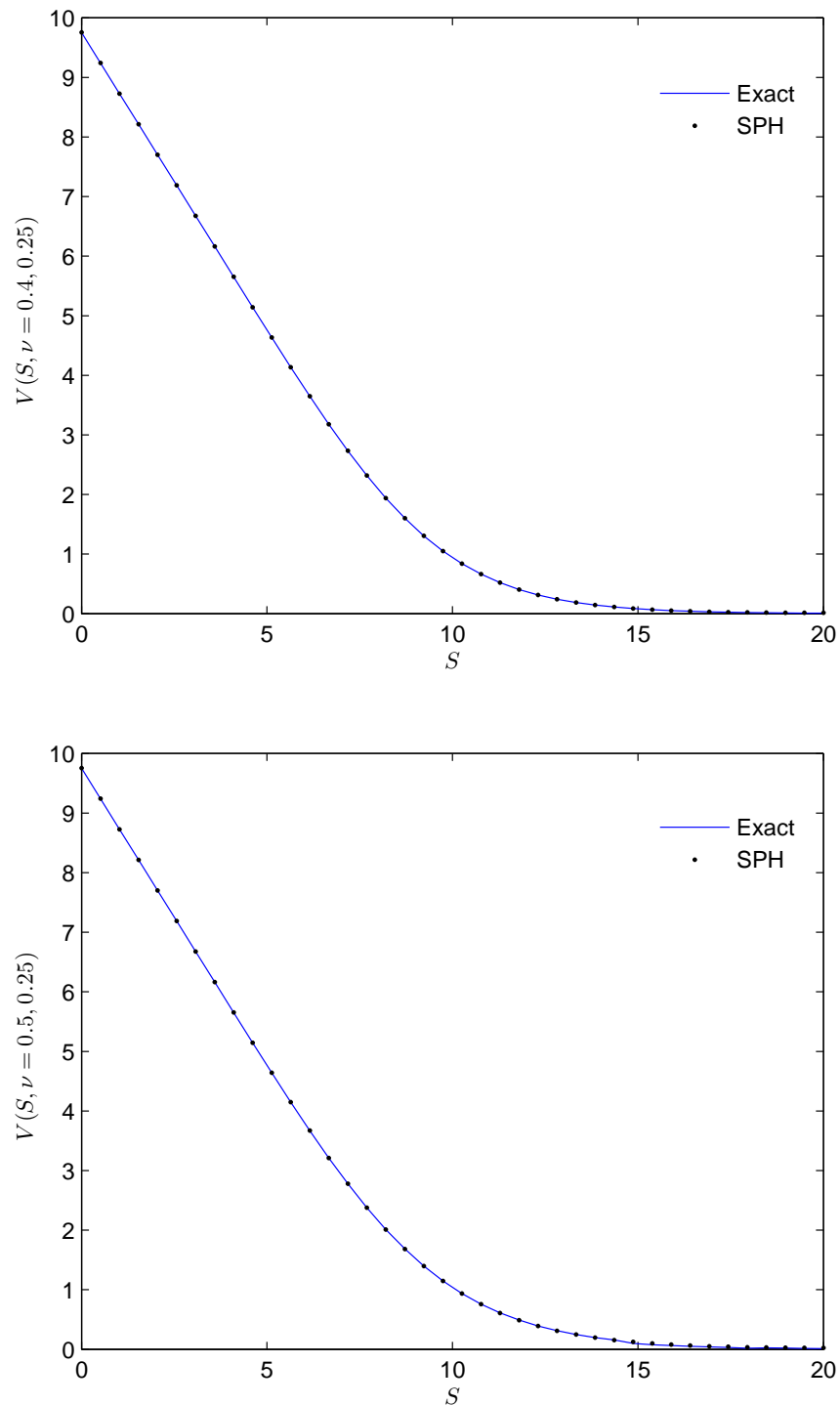


Fig. 5.3: Les prix d'un Put européen en fonction du cours du sous-jacents  $S$ , pour différentes valeurs de la variance: (en haut)  $\nu = 0.4$ , (en bas)  $\nu = 0.5$ .



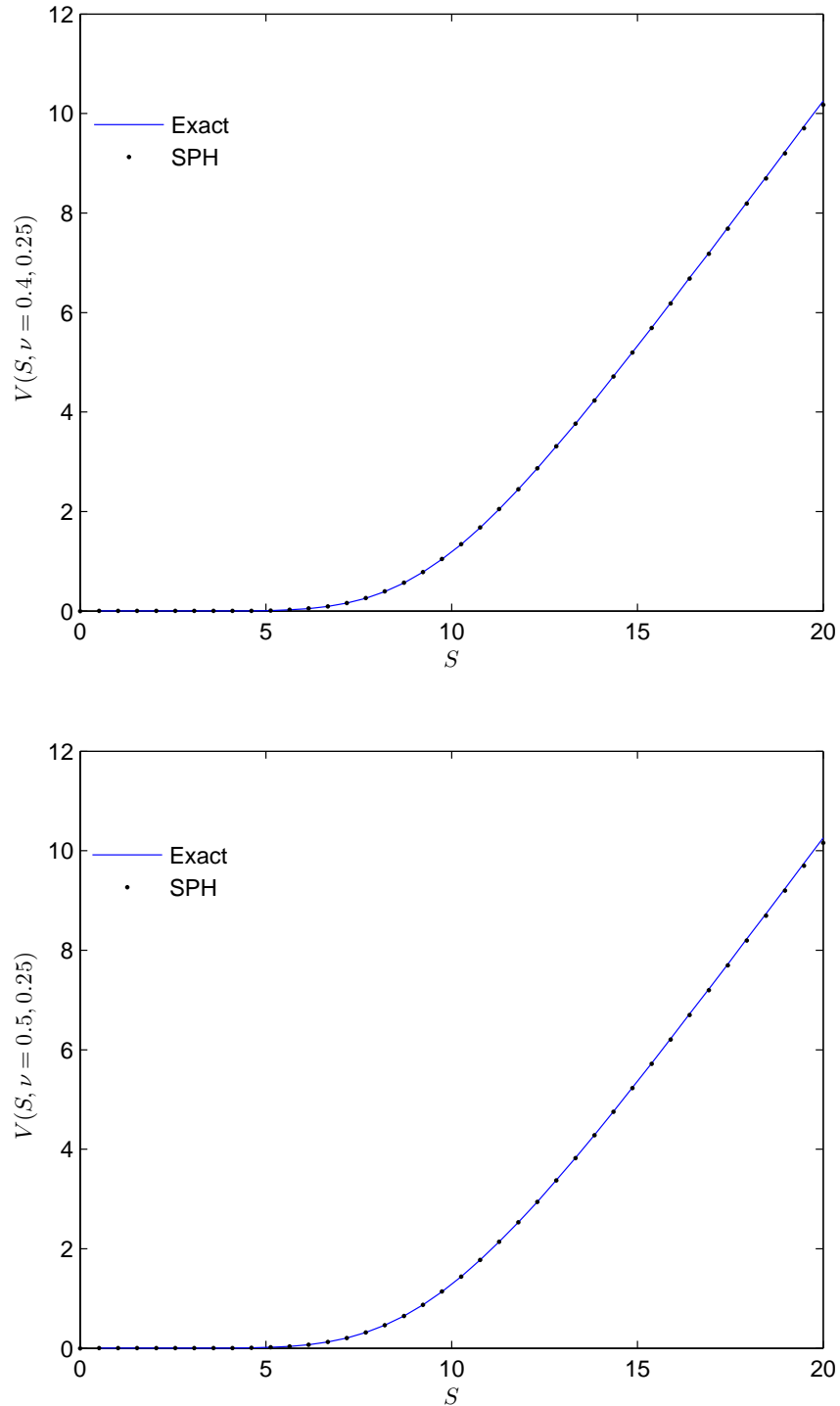


Fig. 5.4: Les prix d'un Call européen en fonction du cours du sous-jacents  $S$ , pour différentes valeurs de la variance: (en haut)  $\nu = 0.4$ , (en bas)  $\nu = 0.5$ .

## 5.5 Les Grecques

Les Grecques mesurent une dimension différente du risque inhérent à l'option. Chacun des Grecs représente un type de la sensibilité de la valeur de l'option par rapport à un paramètre donné. Les grecques les plus courantes sont Delta, Vega, Thêta, Rho et Gamma. Dans cette section, nous entendons la méthode SPH pour calculer le Delta, le Gamma et le Vega associés aux options européenne et américaines dans le modèle Heston.

### 5.5.1 Delta

Le Delta représente la variation du prix de l'option en fonction du cours de l'actif sous-jacent  $S$ . Dans SPH le Delta au point  $(S_i, v_i)$  peut être exprimé comme suit

$$\Delta_i = \frac{\partial V}{\partial S_i} = \alpha_{S,i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} V_{ji} \frac{S_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j. \quad (5.41)$$

### 5.5.2 Véga

Le Véga mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport à la volatilité. Suivant la méthode SPH l'expression du Véga est donnée par :

$$\frac{\partial V}{\partial v_i} = \alpha_{v,i} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} V_{ji} \frac{v_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j. \quad (5.42)$$

### 5.5.3 Gamma

Le gamma ( $\Gamma$ ) représente la variation du delta en fonction de la valeur de l'actif sous-jacent, ce qui correspond à la dérivée seconde du prix de l'option par rapport au prix du sous-jacent  $S$ . La valeur du gamma ( $\Gamma$ ) peut être calculée par l'expression SPH suivante :

$$\Gamma_i = \frac{\partial^2 V}{\partial S_i^2} = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \frac{V_{ij}}{r_{ij}} \left( 4 \frac{S_{ij}^2}{r_{ij}^2} - 1 \right) \frac{\partial w_{ij}}{\partial r_{ij}} \omega_j. \quad (5.43)$$

Ici  $w_{ij}$  désigne la fonction du noyau et  $\alpha_{S,i}$ , et  $\alpha_{v,i}$  sont les coefficients de correction donnés par les expressions (5.26) et (5.27) respectivement.

Pour illustration numérique nous allons calculer les grecques (Delta, Gamma, et Vega) d'une option de Put de type européen et américain avec les paramètres de Heston donnés dans le tableau 5.1. Les résultats obtenus sont rapportés dans les tableaux 5.6-5.11.

Les tableaux 5.6, 5.7 et 5.8 donnent les valeurs des Grecques (delta, Vega et gamma respectivement) pour une option de Put européenne calculées à l'aide de notre approche SPH et la formules analytique. Comme nous pouvons le constater les valeurs des Grecques sont très stables et en parfaite accord avec les résultats analytiques. Ce qui montre que les Grecques sont efficacement

évalués à l'aide de la méthode proposée.

Nous comparons dans les tableaux 5.9, 5.10 et 5.11 les valeurs des Grecques (delta, gamma et Vega respectivement) pour une option de Put américaine calculées à l'aide de notre approche SPH avec celles issues de la méthode des différences finis. Les résultats de ces tableaux montrent que les valeurs de nos simulation est très proche de celles générés par la méthode des différences finis. Ce qui indique que les deux méthodes sont d'efficacité comparable.

Table 5.6: Comparaison entre les valeurs analytiques du Delta et celles obtenues par la méthode SPH pour un options de Put européenne avec les paramètres  $\nu = 0.25, N_S = N_V = 80, M = 200$  et  $\theta = 1/2$ .

| Sous-jacent | Exact   | SPH     | Erreur |
|-------------|---------|---------|--------|
| 4           | -0.9992 | -0.9992 | 0.0000 |
| 5           | -0.9938 | -0.9934 | 0.0004 |
| 6           | -0.9706 | -0.9694 | 0.0012 |
| 7           | -0.9062 | -0.9039 | 0.0023 |
| 8           | -0.7815 | -0.7789 | 0.0026 |
| 9           | -0.6049 | -0.6036 | 0.0013 |
| 10          | -0.4164 | -0.4169 | 0.0005 |
| 11          | -0.2582 | -0.2600 | 0.0018 |
| 12          | -0.1482 | -0.1505 | 0.0023 |
| 13          | -0.0808 | -0.0829 | 0.0021 |
| 14          | -0.0430 | -0.0444 | 0.0014 |
| 15          | -0.0226 | -0.0234 | 0.0008 |

Table 5.7: Les valeurs du Vega d'un put européen calculées par SPH avec  $\nu = 0.25, N_S = N_V = 100, M = 200$  et  $\theta = 1/2$ .

| Sous-jacent | Exact  | SPH    | Erreur |
|-------------|--------|--------|--------|
| 4           | 0.0031 | 0.0033 | 0.0002 |
| 5           | 0.0263 | 0.0263 | 0.0000 |
| 6           | 0.1227 | 0.1196 | 0.0031 |
| 7           | 0.3622 | 0.3488 | 0.0134 |
| 8           | 0.7361 | 0.7063 | 0.0298 |
| 9           | 1.0865 | 1.0438 | 0.0427 |
| 10          | 1.2236 | 1.1759 | 0.0477 |
| 11          | 1.1113 | 1.0652 | 0.0461 |
| 12          | 0.8620 | 0.8253 | 0.0367 |
| 13          | 0.6007 | 0.5767 | 0.0240 |
| 14          | 0.3911 | 0.3779 | 0.0132 |
| 15          | 0.2445 | 0.2386 | 0.0049 |

Table 5.8: Une comparaison des valeurs du Gamma pour un options de Put européenne avec les paramètres  $\nu = 0.25, N_S = N_V = 80, M = 200$  et  $\theta = 1/2$ .

| Sous-jacent | Exact  | SPH    | Erreur |
|-------------|--------|--------|--------|
| 4           | 0.0031 | 0.0033 | 0.0002 |
| 5           | 0.0263 | 0.0263 | 0.0000 |
| 6           | 0.1227 | 0.1196 | 0.0031 |
| 7           | 0.3622 | 0.3488 | 0.0134 |
| 8           | 0.7361 | 0.7063 | 0.0298 |
| 9           | 1.0865 | 1.0438 | 0.0427 |
| 10          | 1.2236 | 1.1759 | 0.0477 |
| 11          | 1.1113 | 1.0652 | 0.0461 |
| 12          | 0.8620 | 0.8253 | 0.0367 |
| 13          | 0.6007 | 0.5767 | 0.0240 |
| 14          | 0.3911 | 0.3779 | 0.0132 |
| 15          | 0.2445 | 0.2386 | 0.0049 |

Table 5.9: Une comparaison des valeurs du Delta pour un put américain avec  $\nu = 0.25, N_S = N_V = 150, M = 200$  et  $\theta = 1/2$ .

| Sous-jacent | DF      | SPH     | Erreur |
|-------------|---------|---------|--------|
| 7           | -0.9610 | -0.9920 | 0.0310 |
| 8           | -0.8337 | -0.8418 | 0.0081 |
| 9           | -0.6415 | -0.6420 | 0.0005 |
| 10          | -0.4428 | -0.4362 | 0.0066 |
| 11          | -0.2765 | -0.2678 | 0.0087 |
| 12          | -0.1596 | -0.1523 | 0.0073 |
| 13          | -0.0873 | -0.0825 | 0.0048 |
| 14          | -0.0463 | -0.0435 | 0.0028 |
| 15          | -0.0243 | -0.0227 | 0.0016 |

Table 5.10: Valeurs de Gamma obtenues par la méthode SPH pour une option de Put américain avec les paramètres  $v = 0.25, N_S = N_V = 150, M = 200$  et  $\theta = 1/2$ .

| Sous-jacent | DF     | SPH    | Erreur |
|-------------|--------|--------|--------|
| 7           | 0.0773 | 0.1107 | 0.0334 |
| 8           | 0.1772 | 0.1800 | 0.0028 |
| 9           | 0.2072 | 0.2116 | 0.0044 |
| 10          | 0.1912 | 0.1923 | 0.0011 |
| 11          | 0.1397 | 0.1421 | 0.0024 |
| 12          | 0.0915 | 0.0903 | 0.0012 |
| 13          | 0.0530 | 0.0519 | 0.0011 |
| 14          | 0.0289 | 0.0282 | 0.0007 |
| 15          | 0.0152 | 0.0148 | 0.0004 |

Table 5.11: Les valeurs du Vega d'un put américain calculées par SPH avec  $v = 0.25, N_S = N_V = 150, M = 200$  et  $\theta = 1/2$ .

| Sous-jacent | DF     | SPH    | Erreur |
|-------------|--------|--------|--------|
| 7           | 0.0708 | 0.0459 | 0.0249 |
| 8           | 0.5981 | 0.5923 | 0.0058 |
| 9           | 1.0627 | 1.0542 | 0.0085 |
| 10          | 1.2449 | 1.2310 | 0.0139 |
| 11          | 1.1371 | 1.1225 | 0.0146 |
| 12          | 0.8789 | 0.8681 | 0.0108 |
| 13          | 0.6089 | 0.6028 | 0.0061 |
| 14          | 0.3938 | 0.3913 | 0.0025 |
| 15          | 0.2446 | 0.2445 | 0.0001 |



# Chapter 6

## Conclusion générale

Dans cette thèse nous avons introduit une approche numérique basée sur la méthode numérique sans maillage SPH couplée avec la méthode de  $\theta$ -schème pour résoudre les équations aux dérivées partielles issues de la modélisation mathématiques des marchés financiers. Dans un premier temps, nous avons appliqué notre approche pour résoudre certains problème de pricing options dans le cadre du modèle de Black & Scholes, puis nous l'avons étendue pour résoudre le modèle de Heston.

Le **chapitre 2** est consacré à l'évaluation des options européennes dans le cadre du modèle de Black et Scholes. Les dérivées impliquées dans l'EDP du problème sont approximées à l'aide de la méthode SPH, le système d'équations différentielles ordinaires résultant est ensuite résolu par la méthode du Thêta-schéma. La stabilité du schéma numérique résultant est étudiée pour différents paramètres financiers. De nombreuses simulations numériques ont été effectuées pour différents paramètres financiers tels que, le prix d'exercice, et la volatilité. Les résultats obtenus mettent en évidence un très bon accord entre notre solution numérique et la solution analytique de Black et Scholes.

La comparaison effectuée, en termes de précision et du coût de calcul, entre la méthode des différences finies et notre approche a montré que cette dernière donne des résultats plus précis mais avec des coûts de calculs relativement élevés comparé à ceux des différences finies.

Nous avons également comparé nos résultats avec ceux fournis par les méthodes sans maillage, à savoir Quasi-RBFs et Global-RBF . Nous avons trouvé que les trois méthodes sont d'efficacité comparable.

La méthode SPH a été utilisée pour calculer les grecques, telle que le Delta et le Gamma des options (les deux premières dérivées du prix de l'option par rapport au cours de l'actif sous-jacents). Il est important que ces paramètres soient calculés avec précision car la composition du portefeuille de couverture dépend beaucoup de ces paramètres. Les résultats obtenus sont stable et en parfait accord avec les résultats théoriques et aucune oscillation n'a été observée au niveau ou autour du prix d'exercice, ce qui indique la précision et l'efficacité de la méthode SPH en matière d'évaluation des grecques.

Dans le **chapitre 3**, nous avons abordé le problème du pricing d'options américaines dans le modèle de Black et Scholes. La principale difficulté de l'évaluation des options américaines réside dans le fait que ces options peuvent être exercées à tout moment avant leur expiration.

Un tel droit d'exercice anticipé acquis par le détenteur de l'option se traduit par un problème à frontière libre. Pour contourner cette difficulté, nous avons reformulé le problème du pricing sous la forme du problème de complémentarité linéaire PCL. Cette formulation facilite beaucoup les calculs, dans le sens où nous n'avons pas besoin de suivre l'emplacement de la frontière libre. Pour réduire la perte de précision due à la discontinuité de la dérivée de la fonction de Payoff au prix d'exercice ( $S = K$ ), nous avons utilisé le changement de variable proposée par Tavella.

Les systèmes linéaires résultants sont discrétisés par la méthode SPH (Spatial) combinée avec une thêta-méthode (espace-temps). Alors nous avons adapté deux algorithmes de résolution, un algorithme itératif PSOR, qui est très recommandé dans la littérature pour ce genre de problèmes, et un algorithme direct (solveur direct), du problème de complémentarité linéaire (3.35). Les deux algorithmes sont comparés en termes de précision et de coût de calcul (le temps d'exécution). Pour valider notre approche plusieurs comparaisons sont effectuées entre la solution SPH et les résultats obtenus par le modèle binomiale et d'autres approches numériques et quasi-analytiques largement utilisées en mathématiques financières. Les résultats obtenus sont très encourageants et montrent bien les capacités numériques remarquables de la méthode SPH. Nous avons également comparé nos résultats avec ceux fournis par les méthodes sans maillage, à savoir Quasi-RBFs, Global-RBF et MLPG. Nous avons trouvé que la méthode SPH et la méthode LPG (avec des paramètres égaux tel que le nombre des points discrétisant les deux espaces temps et sous-jacent) génèrent des résultats identiquement similaires, cela suggère que la méthode proposée et MLPG sont d'efficacité comparables.

Nous avons également étendu la méthode SPH afin de calculer les paramètres de sensibilité (Delta et Gamma) du prix de l'option par rapport à la variation du cours de sous-jacents, ces paramètres sont très importants dans les stratégies de couverture que de trading. Les résultats numériques que nous avons obtenu sont en très bon accord avec ceux obtenus par d'autres méthodes comme celle du modèle Binomial et la méthode des différences finies.

Dans le **chapitre 4**, nous avons traité le problème d'évaluation d'options exotiques, notamment les options asiatiques et barrières de type européennes. Les fonctions de Payoffs, associées à ces options, dépendent beaucoup du chemin suivi par le cours de l'actif sous-jacent pendant toute la durée de vie de l'option.

Dans le cas des options asiatiques, nous avons adopté la transformation introduite par Roger et Shi afin de réduire la dimension du problème. La nouvelle EDP est discrétisée par la suite à l'aide de la méthode SPH (Spatial) combinée avec une thêta-méthode (espace-temps). La stabilité du schéma résultant a été étudiée pour différentes valeurs de paramètres financiers, à savoir la volatilité  $\sigma$  et le taux d'intérêt  $r$ .

Pour valider numériquement notre approche, nous avons effectué plusieurs simulations numériques, pour différentes valeurs de volatilité  $\sigma$ , prix d'exercice  $K$  et la maturité  $T$ . Les résultats numériques obtenus sont en parfait accord avec ceux fournis par d'autres méthodes dans la littérature, ce qui montre l'efficacité et la précision de l'approche proposée en matière d'évaluation d'options financières.

La présente méthode a ensuite été étendue pour résoudre les problèmes d'évaluation des options à double barrière de style européen et des options digitales. Les résultats obtenus ont montré que notre approche est très précise et fiable pour évaluer la classe d'options présentée dans ce chapitre.



Pour terminer, nous avons calculé les paramètres de couverture telle que le Delta et le Gamma. Ces paramètres sont très importants en finance puisqu'ils permettent au vendeur de l'option de se couvrir. Les grecques (Delta et Gamma) calculés à l'aide de la méthode SPH sont en très bon accord avec ceux obtenus par d'autres méthodes numériques couramment utilisées en finance, telles que la méthode de Monte Carlo, différences finies et éléments finis.

Enfin, dans le **chapitre 5**, nous avons étendu l'approche développée dans les chapitres précédents pour résoudre les problèmes des options européennes et américaines dans le cadre du modèle de Heston. Les comparaisons effectuées pour les options européenne et américaines ont indiqué un excellent accord entre nos résultats numériques et ceux fournis par la formule semi-analytique de Heston et les méthodes numériques publiées de la littérature. Nous avons effectué quelques simulations pour les grecques, en particulier, le delta, le vega et le gamma des options. En plus, la méthode proposée est analysée pour la stabilité et nous avons trouvé qu'elle est inconditionnellement stable.

Dans l'ensemble, nous avons trouvé que l'approche numérique proposée dans cette thèse est très robuste et fiable pour résoudre les problèmes d'évaluation des options en finance computationnelle. Une perspective à ce présent travail, c'est l'extension de la présente méthode aux cas intéressants de l'équation non linéaire de Black et Scholes et des options multi-sous-jacents dans le cadre des modèles de Black et Scholes et Heston.



# Bibliography

- [1] R. Gingold, J. Monaghan. Smoothed Particle Hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars , *Astrophysical Journal* 181 275-389, 1977.
- [2] L. Lucy. A numerical approach to the testing of fission hypothesis, *Astrophysical Journal* 82 1013-1020,1977.
- [3] F. Black, and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities *Journal of Political Economy* 81, 637-659,1973.
- [4] L. Brookshaw A method of calculating radiative heat diffusion in particle simulations, *Astronomical Society of Australia, Proceedings* 6,207–210, 1985.
- [5] Fatehi R, Manzari M. Error estimation in smoothed particle hydrodynamics and a new scheme for second derivatives, *Comput Math Appl* ;61(2):482-98,2011.
- [6] J. J. Monaghan. And J. J.C. Lattanzio A refined particle method for astrophysical problems, *Astronomy and Astrophysics* , 149(1), 135-143, 1985.
- [7] Fulk DA, Quinn DW. An analysis of 1-D smoothed particle hydrodynamics kernels. *J Comput Phys* , 126(1):165-180,1996.
- [8] Hon YC, Mao X. A radial basis function method for solving options pricing models. *Finance Eng* ,8:31–49,1999.
- [9] Hon YC. A quasi-radial basis functions method for American options pricing. *Comput Math Appl* , 43:513-24,2002.
- [10] Phelim P.Boyle. Options: A Monte Carlo approach , *J. Finan. Econ* , 4:323–338, 1977.
- [11] M. Brennan and E. Schwartz. Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis *Financial and Quantitative Analysis*,13 (3), 461-474, 1978.

- [12] Y. Achdou, O.Pironneau. Numerical Methods for Option Pricing Frontiers in Applied Mathematics, *SIAM, Philadelphia, PA*, Vol. 30, 2005.
- [13] Liu MB, Liu GR and Lam KY. Constructing smoothing functions in smoothed particle hydrodynamics with applications, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 155 (2): 263-284, 2003.
- [14] D.Tavella,C.R and all. Pricing Financial Instruments: The Finite Difference Method , *Wiley, NewYork* ,2000.
- [15] N. Quinlan, M. Basa, M. Lastiwka. Truncation error in mesh-free particle methods, *Internat. J. Numer. Methods Engrg* . 66 2064-2085,2006.
- [16] R. Merton. Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*,4(1):141-183,1973.
- [17] L. BACHELIER Théorie de la spéculation, *Annales scientifiques de l' E.N.S 3e série*, tome 17 , 21-86,1900.
- [18] Monaghan JJ. Smoothed Particle Hydrodynamics, *Annual review of astronomy and astrophysics*,30: 543-574 , 1992.
- [19] Barndorff-Nielsen. . Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling, *Scandinavian Journal of Statistics*,,24(1), 1–13 ,1997.
- [20] Applebaum, D. Levy Processes and Stochastic Calculus *Cambridge University Press*, 2009.
- [21] M. Basa, N. Quinlan, M. Lastiwka. Robustness and accuracy of SPH formulations for viscous flow, , *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60, 1127–1148, 2009.
- [22] J. Morris, P. Fox, Y. Zhu. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH, *J. Comput. Phys*, 136 (1), 214-226,1997.
- [23] J. Morris. Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics with Applications Ph. D. Dissertation *Monash University, Melbourne* 1996.
- [24] Panizzo.A, Capone, T, and Dalrymple, R. A. Accuracy of kernel derivatives and numerical schemes in SPH, *In: SPHERIC. Second international workshop, Madrid, Spain*,2007.
- [25] Monaghan JJ. An introduction to sph *Computer Physics Communications*, 48 :89– 96, 1988.

- 
- [26] Liu G.R. and Liu M.B. Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method, *World Scientific*, 2007.
- [27] W. Dehnen and H. Aly. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability, *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 425(2), 1068-1082, 2012.
- [28] A. Colagrossi and M. Landrini. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics, *J. Comp. Phys*, 191, 448-475, 2003.
- [29] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne. The Mathematics Financial Derivatives, A Student Introduction, *Cambridge University Press*, 1995.
- [30] M. Broadie, J. Detemple. American option valuation: approximations, and a comparison of existing methods *Rev. Finance Stud*, 9, 1211-1250, 1996.
- [31] I. J. Kim, The Analytic Valuation of American Options , *Review of Financial Studies*, 3(4), 547-572, 1990.
- [32] T. Ye, D. Pan, C. Huang, and M.B. Liu. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) for complex fluid flows: Recent developments in methodology and applications *Physics of Fluids* , 31(1), 011301, 2019.
- [33] A.M. Zhang, P.N. Sun, F.R. Ming, A. Colagrossi. Smoothed particle hydrodynamics and its applications in fluid-structure interactions. *Journal of Hydrodynamics*, 29 (2), 187-216, 2017.
- [34] H. Schwaiger. An implicit corrected SPH formulation for thermal diffusion with linear free surface boundary conditions *Internat. J. Numer. Methods Engrg*, 75 (6) , 647–671, 2008.
- [35] CE. Lemke. On Complementary Pivot Theory, in: *Mathematics of the decision sciences*, Part I, Eds. G.B. Dantzig and A.F. Veinott, Jr. (A.M.S., Providence, R.I., 1968).
- [36] Brookshaw, L. Solving the Heat Diffusion Equation in SPH (Invited paper), *Memorie della Società Astronomia Italiana*, 65, 1033, 1994.
- [37] Kimura, T. Alternative randomization for valuing American options, *Asia-Pacific Journal of Opemntional Research*, 27, 167-187, 2010.
- [38] N. Ju Pricing an American option by approximating its early exercise boundary as a multipiece exponential function, *Rev. Finance Stud*, 11 , 627-646, 1998.

- [39] J. Huang and J.-S. Pang , Option pricing and linear complementarity, *Journal of Computational Finance*, 2 ,pp. 31-60,1998.
- [40] N. Ju, R. Zhong An approximate formula for pricing American options *J. Deriv*, 1999.
- [41] Serles A, A first course in the numerical analysis of differential equations, *Cambridge University Press*, 1996.
- [42] J. Huang, M. Subrahmanyam, G. Yu. Pricing and hedging American options: a recursive integration method *Rev. Finance Stud.*, 9 , 277-300,1996.
- [43] G. Oger. Aspects théoriques de la méthode sph et applications à l'hydrodynamique à surface libre, *Ph.D. dissertation, Nantes*, 2006.
- [44] Racicot, François-Éric Théoret, Raymond. Finance computationnelle et gestion des risques : Ingénierie financière avec applications Excel (Visual Basic) et Matlab. *Presses de l'Université du Québec*, 2006.
- [45] Yumi Goto, Zhai Fei, Shen Kan, Eisuke Kita. Options valuation by using radial basis function approximation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31,836-843, 2007.
- [46] S. D. Jacka, Optimal Stopping and the American Put *Mathematical Finance*, 1(1), 1-14,1991.
- [47] R. Geske, H. Johnson. The American put option valued analytically *J. Finance*, 39,1511-1524,1984.
- [48] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison. Option Pricing: Mathematical Models and Computation, *C Oxford Financial Press, Oxford* 1993.
- [49] Johnson A. simple and numerically efficient valuation method for American puts using a modified Geske-Johnson approach *J. Finance*, 47,809-816,1992.
- [50] R. Seydel. Tools for Computational Finance, , *Springer-Verlag, Berlin*, 2002.
- [51] ] Li, Shaofan, Liu, Wing Kam Meshfree Particle Methods *Berlin, Germany: Springer-Verlag*, 2004.
- [52] Alain Bensoussan and Jacques-Louis Lions. Impulse control and quasivariational inequalities, *Gauthier-Villars, Paris*, 1984.
- [53] A. Kamara and T. W. Miller Jr. Daily and intradaily tests of european put-call parity. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30(4), 519–539, 1995.

- 
- [54] C.W.Cryer. The Solution of Quadratic Programming Problem Using Systematic Overrelaxation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1997.
- [55] H. Takeda, S. M. Miyama, and M. Sekiya. Numerical simulation of viscous flow by Smoothed Particle Hydrodynamics *Progress of Theoretical Physics*, 92, 5, 939-960, 1994.
- [56] Peter Leoni. The Greeks and Hedging Explained , *Print.Financial Engineering Explained*, 2014.
- [57] S. Ikonen, J. Toivanen, Pricing American options using LU decomposition *Appl. Math. Sci.* 1 (49-52), 2529-2551,2007.
- [58] Kwok, Y.-K. Mathematical Models of Financial Derivatives, *2nd ed, Springer, Berlin (2008)*.
- [59] S.-P. Zhu. An exact and explicit solution for the valuation of American put options, *Quantitative Finance* 6(3), 229-242, 2006.
- [60] A. Boriçi, H.-J, Lutithi. Pricing American Put Options by Linear Scaling Algorithms Computational Methods in Decision-Making, *Economics and Finance. Applied Optimization*, 2001.
- [61] P. Carr. Randomization and the American put , *Rev. Finance Stud*, 11 ,597-626,1998.
- [62] Zhu SP. On various quantitative approaches for pricing American options, *New Math Nat Comput* ;7:313-32, 2011.
- [63] L. Rogers and Z. Shi. The Value of an Asian Option. *Journal of Applied Probability*, 32 (4), 1077 – 1088,1995.
- [64] Van Moerbeke, P. On optimal stopping and free-boundary problems *Arch. Ration. Mech. Anal.* 60,101-148,1976.
- [65] Gilli M, Maringer D, Schumann, E. Numerical methods and optimization in finance, *Amsterdam: Elsevier 2011*.
- [66] W.H. Press, S.A. Teukolsky. W.T. Vetterling. B.P Fiannery. Numerical recipes in C, The art of scientific computing, *second edition* , *Cambridge University Press,1992*.
- [67] G. Barone-Adesi, R. Whaley. Efficient analytic approximation of American option values, *J. Finance*, 42, 301-320, 1987.

- [68] Bonet. J. Kulasegraram. S. Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulation. *International journal for numerical methods in engineering*, 47, 1189-1214, 1999.
- [69] Randles, P.W., Liberski, L.D. Smoothed Particle Hydrodynamics: some recent improvements and applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 139:375–408,1996.
- [70] L. Wu and Y.-K. Kwok. A front-fixing method for the valuation of American option, *The Journal of Financial Engineering*, 6(2) ,83-97, 1997.
- [71] Cox JC, Ross SA, Rubinstein M Option pricing: a simplified approach *J Financ Econ*, 7:229-263, 1979.
- [72] Patrick Jaillet, Damien Lamberton, and Bernard Lapeyre. Variational inequalities and the pricing of American options. *ActaAppl. Math*, 21:263-289, 1990.
- [73] Jiang, L. Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing, *World Scientific.2005*.
- [74] Patel, K.S, Mehra, M. High-Order Compact Finite Difference Scheme for Pricing Asian Option with Moving Boundary Condition. *Differ Equ Dyn Syst*, 27, 39–56 2019.
- [75] A. Rad, K. Parand, S. Abbasbandy Pricing European and American Options Using a Very Fast and Accurate Scheme: The Meshless Local Petrov-Galerkin Method, *P. Natl Acad. Sci. India Section A: Phys. Sci*, 85(3),337-351, 2015.
- [76] Boyle, P, Potapchik, A. Prices and sensitivities of Asian options: a survey.*Insur. Math. Econ.* 42, 189-211 2008.
- [77] Ju N. Pricing Asian and basket options via Taylor expansion. *J Comput Finance* ,5(3):79–103, 2002.
- [78] R. Frontczak, R. Schobel. On modified Mellin transforms, Gauss–Laguerre quadrature, and the valuation of American call options, *J. Comput. Appl. Math.* 234,1559–1571, 2010.
- [79] J. Baz and G. Chacko. Financial Derivatives Pricing, Applications, and Mathematics, *Cambridge University Press, third edition, 2004*.
- [80] Zhang JE. A semi-analytical method for pricing and hedging continuously sampled arithmetic average rate options.*J Comput Finance*,5(1):59-79, 2001.



- 
- [81] Zhang JE. Pricing continuously sampled Asian options with perturbation method. *J Futures Mark*, 23(6):535-60, 2003.
- [82] Chen Kuan-Wen, Lyuu Yuh-Dauh. Accurate pricing formulas for Asian options. *Appl Math Comput* ,188:1711-24, 2007.
- [83] Geman Hályette, Yor Marc. Bessel processes, Asian options, and perpetuities. *Math Finance*,3(4):349-75, 1993.
- [84] Foufas, G. and Larson, M.G. Valuing Asian options using the finite element method and duality techniques. *J. Comput. Appl. Math*, 222, 144-158, 2008.
- [85] Y. Kim, H. Bae, H. K. Koo. Option pricing and greeks via a moving least square meshfree method. *Quantitative Finance*, 14,1753-1764, 2014.
- [86] W. K. Liu, S. Jun, and Y. F. Zhang. Reproducing kernel particle methods,*International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20 :1081–1106, 1995.
- [87] Hsu William Wei-Yuan, Lyuu Yuh-Dauh. A convergent quadratic-time lattice algorithm for pricing European-style Asian options. *Appl Math Comput* ,189:1099-123, 2007.
- [88] S. Sanfelici. Galerkin infinite element approximation for pricing barrier options and options with discontinuous payoff. *Decisions in Economics and Finance*, 27, 125–151, 2004.
- [89] J.E. Ingersoll, Jr. Theory of Financial Decision Making. *Rowman & Littlefield Publishers, Inc, New Jersey, 1987*.
- [90] Li, S. and W. Liu. Meshfree and particle methods and their applications. *Applied Mechanics Reviews*, 55 ,1-34,2002.
- [91] KUNIMOTO N. et IKEDA M. Pricing Options with Curved Boundaries *Mathematical Finance*, 2,275-298, 1992.
- [92] Thompson GWP. Fast narrow bounds on the value of Asian option, *Centre for Financial Research. Judge Institute of Management, University of Cambridge*, 1998.
- [93] DALY B., H. H., J. W. Numerical fluid dynamics using the particle and force method : part I-The method and its applications. *Report LA-3144, Los Alamos Scientific Laboratory,1965*.

- [94] Fu Michael C, Madan Dilip B, Wang Tong. Pricing continuous asian options a comparison of Monte Carlo and Laplace transform inversion methods. *J Comput Finance*, 2(2):49-74,1999.
- [95] Kubendran, N. et al. Quasi-Monte Carlo Approach to Asian Options Pricing. *Asia Pacific Journal of Management Research and Innovation*, 10 : 67-78,2014.
- [96] A.Q.M. Khaliq, D.A. Voss and M. Yousuf. Pricing exotic options with L-stable Padé schemes. *Journal of Banking and Finance*, 31(11) , 3438-3461,2007.
- [97] F. Gianluca, M. Marena, and A. Roncoroni. Analytical pricing of discretely monitored Asian-style options: Theory and application to commodity markets. *Journal of Banking & Finance*, 32:2033-2045, 2008.
- [98] D. M. Pooley, K. Vetzal, and P. A. Forsyth. Remedies for non-smooth payoffs in option pricing, *J Comput Finance*, 6, 25-40,2003.
- [99] J. Vecer. A new PDE approach for pricing arithmetic average Asianoptions. *Journal of Computational Finance*, 4(4), 105-113. 50,2001.
- [100] J. Vecer. Unified pricing of Asian options. *Risk*, 15(6):113-116, 2002.
- [101] D. J. Higham. An Introduction to Financial Option Valuation Mathematics, Stochastics and Computation. *Cambridge University Press, third edition, 2005.*
- [102] Kemna AGZ, Vorst ACF. A pricing method for option based on average asset values. *J. Bank Finance*,14:113-29, 1990.
- [103] Mudzimbabwe W, Patidar KC, Witbooi PJ. A reliable numerical method to price arithmetic Asian options. *Appl Math Comput*, 218:10934-42, 2012.
- [104] Zvan R, Forsyth P, Vetzal K. Robust numerical methods for PDE models of Asian options. *J Comput Finance*, 1(2):39-78, 1998.
- [105] Benhamou E, Duguet A. Small dimension PDE for discrete Asian options. *J. Econ Dyn Control*,27(12):2095-114, 2003.
- [106] R. Zvan, K.R. Vetzal and P.A. Forsyth, PDE methods for pricing barrier options. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24,1563-1590, 2000.
- [107] Geman, H., Yor, M. Pricing and hedging double-barrier options: a probabilistic approach. *Mathematical Finance*, 6, 365-378, 1996.
- [108] Boyle, P.P, Lau, S.H. Bumping up against the barrier with the binomial method. *Journal of Derivatives*,1, 6-14, 1994.

- 
- [109] Reimer, M, Sandmann, K. A discrete time approach for European and American barrier options. *Working Paper, Department of Statistics, Rheinische Friedrich-Wilhelms-UniversitaKt, Bonn*, 1995.
- [110] J. Barraquand and D. Martineau. Numerical valuation of high dimensional multivariate American securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30, 383-405, 1995.
- [111] S. Chao, Y. Jing-Yang and L. Sheng-Hong. On barrier option pricing in binomial market with transaction costs. *Applied Mathematics and Computation*, 189, 1505-1516, 2007.
- [112] M. Costabile, I. Massab and E. Russo. An adjusted binomial model for pricing Asian options. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 27, 285-296, 2006.
- [113] G. Fusai and M. C. Recchioni, Analysis of quadrature methods for pricing discrete barrier options. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31 (3), 826-860, 2007.
- [114] G. Ökten, E. Salta and A. Göncü, On pricing discrete barrier options using conditional expectation and importance sampling Monte Carlo. *Mathematical and Computer Modelling*, 47, 484-494, 2008.
- [115] A. Pelsser. Pricing double barrier options using Laplace transforms. *Finance and Stochastics*, 4, 95-104, 2000.
- [116] G. Petrella and S. Kou. Numerical pricing of discrete barrier and lookback options via Laplace transforms. *The Journal of Computational Finance*, 8 (1), 1-37, 2004.
- [117] D. Rich. The mathematical foundations of barrier option pricing theory. *Advances in Futures and Options Research*, 7, 267-311, 1994.
- [118] P. Ritchken. On pricing barrier options. *Journal of Derivatives*, 3, 9-28, 1995.
- [119] H. Sak, S. Ozekici and I. Boduroglu. Parallel computing in Asian option pricing. *Parallel Computing*, 33 (2), 92-108, 2007.
- [120] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon. Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10 :307-318, 1992.
- [121] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S. A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53 :385, 1985.

- [122] SH Sadek. Modeling die swell of second-order fluids using SPH Modeling die swell of second-order fluids using SPH. Mémoire de D.E.A, Sabanci University, Istanbul, Turkey, 2010.
- [123] Yildiz, M., Rook, R. A., and Suleman, A. SPH With the Multiple Boundary Tangent Method. *Int. J. Numer. Meth. Eng*, 77(10),1416-1438, 2009.
- [124] MS Shadloo, A Zainali, SH Sadek et M Yildiz . Improved incompressible smoothed particle hydrodynamics method for simulating flow around bluff bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9):1008-1020, 2011.
- [125] ] N. Clarke, K. Parrott. The Multigrid Solution of Two-factor American Put Options. *Technical Report 96-16, Oxford Comp. Lab, Oxford*, 1996.
- [126] E. Ngounda, K.C. Patidar, E. Pindza. A robust spectral method for solving Heston's model. *J. Optim. Theory Appl*, 161, 164–178, 2014.
- [127] J. Persson and L. Sydow, Pricing American options using a space-time adaptive finite difference method. *Math Comput Simul*,80, 1922-1935, 2010.
- [128] ] M. Dehghan. Fully implicit finite differences methods for two-dimensional diffusion with a non-local boundary condition. *Journal of Computational and Applied*,106(2),255-269,1999.
- [129] E. M. Stein and J. C. Stein. Stock price distribution with stochastic volatility : An analytic approach. *Review of Financial Studies*, 4 :727, 1991.
- [130] S. Ikonen, J. Toivanen. Efficient numerical methods for pricing American options under stochastic volatility. *Numer. Methods Partial Differ. Equ*, 24 , 104–126,2008.
- [131] S. Ikonen and J. Toivanen. Operator splitting methods for pricing American options under stochastic volatility. *Numerische Mathematik*, 113, 299-324,2009.
- [132] K. Ito, J. Toivanen. Lagrange multiplier approach with optimized finite difference stencils for pricing American options under stochastic volatility. *SIAM J. Sci. Comput*, 31,2646-2664,2009.
- [133] I.J.D. Craig and A.D. Sneyd. An alternating-direction implicit scheme for parabolic equations with mixed derivatives. *Computational Mathematics and Applications*,16, 341-350,1988.

- 
- [134] J. Douglas and H.H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, *Transaction of the American Mathematical Society* 82 ,421-439,1956.
- [135] C.W. Oosterlee. On multigrid for linear complementarity problems with application to American-style options.*Electron. Trans. Numer. Anal.* 15, 165-185,2003.
- [136] Gunter Winkler, Thomas Apel, and Uwe Wystup. Valuation of options in Hestons stochastic volatility model using finite element methods. *Foreign Exchange Risk*, 283–303, 2001.
- [137] S.L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6 (2), 327-343, 1993.
- [138] M. Yousuf, A.Q.M. Khaliq, B. Kleefeld. An efficient ETD method for pricing American options under stochastic volatility with nonsmooth payoffs. *Numer. Methods Partial Differ. Equ*, 29,1864-1880, 2013.
- [139] R. Zvan, P.A. Forsyth, K.R. Vetzal. Penalty methods for American options with stochastic volatility. *J. Comput. Appl. Math*,91,199-218, 1998.
- [140] J.C. Hull and A. White. The pricing of options on assets with stochastic volatility. *The Review of Financial Studies*, 42,281-300,1987.
- [141] W. Hundsdorfer. Accuracy and stability of splitting with stabilizing corrections. *Applied Numerical Mathematics*,42,213-233, 2002.
- [142] W. Hundsdorfer and J.G. Verwer. Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations, *Springer, Berlin, 2003*.
- [143] K.J. In't Hout and J.A.C. Weideman. Appraisal of a contour integral method for the Black-Scholes and Heston equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*,33 , 763-785, 2011.
- [144] K.J. In't Hout and B.D. Welfert. Unconditional stability of second-order ADI schemes applied to multi-dimensional diffusion equations with mixed derivative. *Applied Numerical Mathematics*, 59(3-4), 677–692, 2009.
- [145] K.J. In't Hout and S. Foulon. ADI finite difference schemes for option pricing in the Heston model with correlation, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 7(2) ,303-320, 2010.

- [146] Bertram Doring and James Miles. High-order ADI scheme for option pricing in stochastic volatility models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 316:109 -121, 2017.
- [147] S. McKee, D.P. Wall and S. K. Wilson. An alternating direction implicit scheme for parabolic equations with mixed derivative and convective terms. *Journal Computational Physics*, 126(1),64-76, 1996.
- [148] R.C. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3, 125-144, 1976.
- [149] S.P. Zhu and W.T. Chen. A new analytical approximation for European puts with stochastic volatility. *Applied Mathematics Letters*,23, 687-692, 2010.
- [150] Gatheral, J. The Volatility Surface: A Practitioner's Guide. *John Wiley & Sons: Hoboken, NJ*,357, 2006.
- [151] J. M. Melenk and I. Babuska. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications.*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289-314, 1996.
- [152] N. Sukumar, B. Moran, and T. Belytschko. The natural element method in solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,43:839-887, 1998.
- [153] S. N. Atluri and T. Zhu. A new meshless local Petrov-Galerkin approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22 :117-127, 1998.
- [154] J.J. Monaghan. Simulating free surface flows with sph. *Journal of Computational Physics*, 1994.
- [155] A. Colagrossi. A meshless Lagrangian method for free-surface and interface flows with fragmentation. PhD thesis, Universita di Roma, La Sapienza, 2004.
- [156] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu. Element free Galerkin Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :229-256, 1994.
- [157] W. Benz and E. Asphaug. Simulations of brittle solids using smooth particle hydrodynamics. *Computer Physics Communications*, 87(1-2) :253-265, 1995
- [158] Joseph J. Monaghan, Herbert E. Huppert, and M. Grae Worster. Solidification using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 206(2):684- 705, 2005.

- 
- [159] Paul W. Cleary and Joseph Ha. Three-dimensional smoothed particle hydrodynamics simulation of high pressure die casting of light metal components. *Journal of Light Metals*, 2(3) :169-183, 2002.
- [160] Gordon R. Johnson, Robert A. Stryk, and Stephen R. Beissel. Sph for high velocity impact computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4) :347-373, 1996.
- [161] J. W. Swegle and S. W. Attaway. On the feasibility of using smoothed particle hydrodynamics for underwater explosion calculations. *Computational Mechanics*, 17 :151-168, 1995.
- [162] J. Yvonnet, F. Chinesta, Ph. Lorong, and D. Ryckelynck. The constrained natural element method (C-NEM) for treating thermal models involving moving interfaces. *International Journal of Thermal Sciences*, 44 :559-569, 2005.
- [163] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne . The Mathematics Financial Derivatives, A Student Introduction. *Cambridge University Press*, 1995.
- [164] A. Verraux. Résolution de l'équation de Black et Scholes. *Université de Technologie de Tampere*, 2008.
- [165] Benoit Pigeon. Résolution numérique de problèmes de complémentarité linéaire et évaluation d'options américaines. *Mémoire de M.Sc. Université de Montréal*, 2008.
- [166] Damien Rioux Lavoie. Méthode SPH implicite d'ordre 2 appliquée à des fluides incompressibles munis d'une frontière libre. *Mémoire de M.Sc. Université de Montréal*, 2017.
- [167] Jean-Christophe Marongiu. Méthode numérique lagrangienne pour la simulation d'écoulements à surface libre : application aux turbines Pelton. *Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon*, 2007
- [168] Yendoubouam Tampango. Développement d'une méthode sans maillage basée sur les approximations de Taylor. *Thèse de doctorat, Université de Lorraine*, 2012.
- [169] Julien Yvonnet. Nouvelles approches sans maillage basées sur la méthode des éléments naturels pour la simulation numérique des procédés de mise en forme. *Thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech*, 2004.
- [170] Mounif. E. Résines époxy/amine pour le rotomoulage réactif : étude de la rhéocinétique et simulation numérique de l'écoulement. *Thèse de doctorat, Université de Paris VI*. 2008.

