

N° d'ordre

Résumé

Une problématique importante qui touche le domaine de la conception et de la fabrication mécanique de produits de formes complexes est la reconstruction des surfaces gauches à partir d'un nuage de points pour avoir le modèle nominal CAD, servant comme un cahier des charges durant le cycle de vie du produit. Une bonne modélisation surfacique requiert en plus d'un processus de traitement rapide, une connectivité des carreaux au moins d'ordre 2 et une contrôlabilité à effet locale en tout point de la surface.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés, à développer deux nouvelles stratégies de reconstruction des courbes et des surfaces gauches des pièces mécaniques de précision, la première utilise l'approximation tandis que la deuxième utilise l'interpolation.

Pour répondre aux exigences de modélisation de surface gauche, nous avons mené deux études, la première utilise l'approximation B-Splines uniforme algébrique trigonométrique d'ordre 4 associée à un schéma de subdivision tensoriel et la deuxième exploite la méthode d'interpolation, utilisant le modèle B-Spline trigonométrique cubique combiné au modèle d'interpolation d'Hermite par morceau et contrôlée par deux paramètres de forme.

Ces deux approches nous ont permis d'améliorer la finesse du lissage et la qualité du contrôle tout en réduisant les temps de traitements de reconstruction de surface gauche des pièces mécaniques de précision.

Mots clés : Reconstruction, Surface gauche, Interpolation, Approximation, CAD.

Abstract

An important issue that affects the field of design and mechanical manufacture of products of complex shapes is the reconstruction of freeform surfaces on mechanical components from a point cloud to have the CAD model, serving as a specification during the life cycle of product. Good surface modeling requires, in addition to a fast processing process, at least order 2 tile connectivity and local effect controllability at any point on the surface.

In this thesis, we are interested in developing two new strategies for reconstructing freeform curves and surfaces, of mechanical parts, the first uses approximation while the second uses interpolation.

To meet the freeform surface modeling requirements, we have carried out two studies, the first uses the uniform algebraic trigonometric B-Spline approximation of order 4 associated with a tensor subdivision scheme and the second exploits the interpolation method, using the cubic trigonometric B-Spline model combined with the Hermite piecewise interpolation model and controlled by two shape parameters. These two approaches allowed us to improve smoothness and quality of control while reducing the times for freeform surface reconstruction treatments.

Keywords: Reconstruction, Freeform surface, Interpolation, Approximation, CAD.

Said HAJJI

Développement de nouvelles stratégies de
reconstruction des surfaces gauches

Physique et Science de l'Ingénieur
2021/2022



Université Hassan 1^{er}
Centre d'Études Doctorales en Sciences
et Techniques & Sciences Médicales



Faculté des Sciences et Techniques
Settat

THÈSE DE DOCTORAT

Pour l'obtention de grade de Docteur en **Sciences**
et Techniques

Formation Doctorale: **Physique et Sciences de l'Ingénieur**

Spécialité: **Génie Mécanique**

Sous le thème

**Développement de nouvelles stratégies de reconstruction des
surfaces gauches**

Présenté par :

Said HAJJI

Soutenu le: 24/12/2021

A la Faculté des Sciences et Techniques de Settat devant le jury composé de :

Pr. H. FASSI Fihri	P.E.S	FST Settat	Président
Pr. A. MOUSRIJ	P.E.S	FST Settat	Rapporteur
Pr. D. SARSRI	P.E.S	ENSA TANGER	Rapporteur
Pr. M. NASSRAOUI	P.H	EST CASABLANCA	Rapporteur
Pr. M. AROUCH	P.E.S	FST Settat	Examineur
Pr. B.DANOUI	P.E.S	FST Settat	Directeur de thèse

DEDICACE

A

La mémoire de mes Parents Khadouj et Abdesslam que Dieu leur garde dans son vaste paradis.

A

Ma très chère épouse

A

Mes chers enfants Abdallah, Chaimaa, Mohammed Reda, Khadija et Yahya qui m'ont toujours soutenu

A

Mes sœurs et mes frères

A

Tous ceux qui me sont chers...

Remerciements

Je tiens à remercier Dieu le tout puissant pour l'accomplissement de ce travail.

Je voudrais vivement remercier Monsieur le Pr Boujemaa Danouj pour toutes ces années d'orientation, de collaboration et d'apprentissage. Je suis très reconnaissant des opportunités qu'il m'a offertes pendant mon parcours de recherche.

Je remercie vivement Monsieur le Pr Hicham Fihri Fassi qui a accepté le rôle de Président du jury. Merci également à Messieurs les Professeurs Ahmed Mousrij, Driss Sarsri et Mohammed Nassraoui d'avoir accepté d'être rapporteurs. Merci pour vos corrections, remarques et suggestions constructives.

En acceptant d'être l'examineur de ce travail, Monsieur le professeur Moha Arouch m'a fait un grand honneur. Qu'il trouve ici toute ma gratitude.

Je tiens aussi à remercier Messieurs les Professeurs Abdellah Lamni, Abdelwahed Ecchatbi, Hassan Gziri et Mounir Lotfi, pour leurs attentions, conseils, ainsi que la confiance qu'ils m'ont faite en mettant toujours à ma disposition les moyens nécessaires afin de mener à bien ce travail de thèse.

Je remercie très vivement tous les membres du laboratoire que j'ai pu côtoyer et qui ont contribué directement, ou indirectement à la réalisation de cette thèse.

Un merci très sincère à Monsieur le Directeur du Pôle d'Etudes Doctorales de l'Université Hassan 1er Settat et à Messieurs le Doyen et le Directeur du Centre d'Etudes Doctorales en Sciences et Techniques & Sciences Médicales de la Faculté des Sciences et Techniques de Settat, et à tout le personnel de la FSTS.

Bien sûr, je n'oublie pas de remercier tous mes amis

Du côté personnel, je souhaite exprimer mes sentiments de gratitude à tous les membres de ma famille pour leur soutien constant et leurs encouragements depuis le début de ce travail jusqu'à son aboutissement.

Développement de nouvelles stratégies de reconstruction des surfaces gauches

Résumé

Une problématique importante qui touche le domaine de la conception et de la fabrication mécanique de produits de formes complexes est la reconstruction des surfaces gauches à partir d'un nuage de points pour avoir le modèle nominal **CAD**, servant comme un cahier des charges durant le cycle de vie du produit. Une bonne modélisation surfacique requiert en plus d'un processus de traitement rapide, une connectivité des carreaux au moins d'ordre 2 et une contrôlabilité à effet locale en tout point de la surface.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés, à développer deux nouvelles stratégies de reconstruction des courbes et des surfaces gauches des pièces mécaniques, la première utilise l'approximation tandis que la deuxième utilise l'interpolation.

Pour répondre aux exigences de modélisation de surface gauche, nous avons mené deux études ; la première utilise l'approximation B-Splines uniforme algébrique trigonométrique d'ordre 4 associée à un schéma de subdivision tensoriel et la deuxième exploite la méthode d'interpolation, utilisant le modèle B-Spline trigonométrique cubique combiné au modèle d'interpolation d'Hermite par morceau et contrôlée par deux paramètres de forme. Ces deux approches nous ont permis d'améliorer la finesse du lissage et la qualité du contrôle tout en réduisant les temps de traitements de reconstruction de surface gauche des pièces mécaniques de précision.

Mots clés : Reconstruction, Surface gauche, Interpolation, Approximation, CAD.

Development of new reconstruction strategies freeform surfaces

Abstract

An important issue that affects the field of design and mechanical manufacture of products of complex shapes is the reconstruction of freeform surfaces on mechanical components from a point cloud to have the CAD model, serving as a specification during the life cycle of product. Good surface modeling requires, in addition to a fast processing process, at least order 2 tile connectivity and local effect controllability at any point on the surface.

In this thesis, we are interested in developing two new strategies for reconstructing curves and freeform surfaces of mechanical parts, the first uses approximation while the second uses interpolation.

To meet the freeform surface modeling requirements, we have carried out two studies, the first uses the uniform algebraic trigonometric B-Spline approximation of order 4 associated with a tensor subdivision scheme and the second exploits the interpolation method, using the cubic trigonometric B-Spline model combined with the Hermite piecewise interpolation model and controlled by two shape parameters. These two approaches allowed us to improve smoothness and quality of control while reducing the times for left surface reconstruction treatments.

Keywords : Reconstruction, Freeform surface, Interpolation, Approximation, CAD.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GENERALE -----	1
CHAPITRE 1 -----	3
GENERALITES SUR LES PIECES DE FORME GAUCHE -----	3
1.1 UTILISATION DES PIECES FREEFORM DANS L'INDUSTRIE -----	4
1.1.1 Les pièces d'ailes et fuselage monocoque-----	5
1.1.2 Pièces de carrosserie automobile-----	5
1.1.3 Les pales de Turbine-----	7
1.1.4 Pièces optiques-----	8
1.2 CLASSIFICATION DES FORMES GAUCHES -----	9
CHAPITRE 2 -----	11
MODELISATION PARAMETRIQUE DES COURBES ET DES SURFACES GAUCHES -----	11
2.1 LES MODELES FERGUSON ET COONS -----	12
2.1.1 Segment de courbe cubique paramétrique de Ferguson-----	12
2.1.2 Carreau (Patch) de surface Ferguson (PSF)-----	15
2.1.3 Le patch de surface Coons (C.S.P.64)-----	16
2.1.4 Les patches de surface Coons 67-----	18
2.2 MODELE SPLINE -----	21
2.2.1 Fonctions Spline-----	22
2.2.1.1 Définition-----	22
2.2.1.2 Équation des fonctions Splines-----	22
2.2.2 Courbes paramétriques Splines cubiques-----	22
2.2.3 Surfaces Splines-----	25
2.3 LE MODELE DE BEZIER -----	27
2.3.1 Courbes-----	27
2.3.2 Formule générale-----	29
2.3.3 Relations récursives entre les fonctions de base de Bernstein-----	29
2.3.3.1 Formule des vecteurs tangents et des vecteurs dérivés secondes-----	29
2.3.3.2 Connexion-----	30
2.3.4 Surfaces-----	31
2.3.4.1 Patch de surface de Bézier-----	31
2.3.4.2 Connexion des patches de surface bi-cubiques de Bézier-----	31

2.4	LE MODELE B-SPLINE	33
2.4.1	Courbes	33
2.4.1.1	Fonctions B-spline	33
2.4.1.2	Dérivation de la courbe B-Spline cubique uniforme	34
2.4.1.3	Type de courbe B-Spline (1) :	36
2.4.1.4	Type de courbe B-Spline (2)	37
2.4.1.5	Type de courbe B-Spline (3)	37
2.4.2	Surfaces B-Spline	40
2.5	MODELE RATIONNEL DE BEZIER ET B-SPLINE	41
2.5.1	Courbe de Bézier rationnelle	41
2.5.1.1	Forme homogène	41
2.5.1.2	Forme rationnelle	41
2.5.1.3	Propriétés	42
2.5.1.3.1	Influence qualitative de la coordonnée homogène sur la forme de la courbe.	42
2.5.1.3.2	Influence quantitative de la coordonnée homogène.	43
2.5.1.4	Représentation du conique.	43
2.5.2	Courbe B-Spline rationnelle	46
2.5.2.1	Forme homogène	46
2.5.2.2	Forme rationnelle	46
2.5.2.3	Propriétés	46
2.5.2.4	Représentation de la conique	46
2.6	SURFACES GÉNÉRÉES ET SURFACES DE REVOLUTION	47
2.6.1	Définition des surfaces générées	47
2.6.2	Cas général	48
2.6.3	Équation générale d'une surface générée	48
2.6.4	Cas particuliers	49
2.6.4.1	Surfaces générées constantes	49
2.6.4.2	Surfaces générées régulières	50
2.6.4.3	Surfaces générées associées	51
2.6.4.4	Surfaces translataées	51
2.6.4.5	Surfaces de révolution	52
CHAPITRE 3		54
PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE		54
3.1	TECHNIQUES DE RECONSTRUCTION PAR INTERPOLATION DISCRETE	54
3.1.1	Interpolation basée sur le diagramme de voronoi	54

3.1.2	Le Crust	57
3.1.3	Le Cocone	58
3.1.4	Le Powercrust	59
3.2	DESCRIPTION EXPLICITE / IMPLICITES	60
3.3	DESCRIPTION PARAMETRIQUE	60
CHAPITRE 4		65
LA RECONSTRUCTION PAR APPROXIMATION DES COURBES ET DES SURFACES GAUCHES PAR LA METHODE B-SPLINES UAT D'ORDRE 4		65
4.1	LES B-SPLINES TRIGONOMETRIQUES ALGEBRIQUES UNIFORMES D'ORDRE	66
4.2	LES COURBES B-SPLINE TRIGONOMETRIQUES	67
4.3	LA SURFACE B-SPLINE TRIGONOMETRIQUE D'ORDRE 4	71
4.4	LA SUBDIVISION DES COURBES ET DES SURFACES	75
4.5	APPLICATION INDUSTRIELLE	81
CHAPITRE 5		85
L'INTERPOLATION D'HERMITE PAR MORCEAUX BASEE SUR LES B-SPLINES TRIGONOMETRIQUE CUBIQUE AVEC PARAMETRES DE FORME		85
5.1	FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES DE LA BASE B-SPLINE CUBIQUE	85
5.2	COURBE SPLINE CUBIQUE TRIGONOMETRIQUE AVEC UN PARAMETRE DE FORME:	86
5.2.1	Définition et propriétés	86
5.2.2	Exemples numériques	87
5.3	INTERPOLATION D'HERMITE BASEE SUR B-SPLINE CUBIQUE TRIGONOMETRIQUE	88
5.3.1	Bases d'interpolation d'Hermite des B-spline cubique trigonométrique	88
5.3.2	Interpolation trigonométrique Spline Hermite cubique avec paramètres de forme	90
5.3.3	Courbe Spline trigonométrique Hermite	91
5.4	SURFACES SPLINES D'HERMITE TRIGONOMETRIQUES CUBIQUES	92
5.5	APPLICATION INDUSTRIELLE	95
CONCLUSION ET PERSPECTIVES		100
BIBLIOGRAPHIE		102
ANNEXE1		107
ANNEXE 2		109

LISTE DES FIGURES

Figure 1. 1 Modèle complet d'un A380 dans la soufflerie allemande d'Emmerloord (NL) (Reckzeh 2003).....	5
Figure 1. 2 : Exemple de composants de voiture.....	6
Figure 1. 3 : Partie d'un outil de formage de tôle avec des parties contenant des formes gauches	6
Figure 1. 4 : usinage d'une pale d'après document Sandvick Coromant	7
Figure 1. 5 : Valeurs typiques des tolérances par rapport aux dimensions pour les exemples d'application traités (Savio,2007).....	9
Figure 1. 6 : Tableau 1 Classification des formes en fonction de la complexité et de la tolérance des formes selon (Savio et al,2007). (légende : ×× : cas typique ; ×: cas moins fréquent).	10
Figure 2. 1 : Segment de courbe paramétrique cubique de Ferguson	14
Figure 2. 2 : Données pour générer un segment de courbe du 5 ^{eme} degré.....	15
Figure 2. 3 : Segment de courbe de Ferguson	15
Figure 2. 4 : Données pour générer le carreau de surface Ferguson.....	16
Figure 2. 5 : Patch de surface Ferguson.....	16
Figure 2. 6 : Patch de surface Coons (C.S.P.64)	18
Figure 2. 7 : Patches de surface Coons 67	21
Figure 2. 8 : Une courbe Spline cubique paramétrique.....	22
Figure 2. 9 : Courbe Spline.....	25
Figure 2. 10 : Génération de surface spline.....	25
Figure 2. 11 : Surface Spline	27
Figure 2. 12 : modification du Segment de courbe de Ferguson	28
Figure 2. 13 : Courbe de Bézier	30
Figure 2. 14 : Surface de Bézier ($m = n = 6$)	31
Figure 2. 15 : Surface de Bézier.....	32
Figure 2. 16 : Dérivation d'une courbe B-Spline ($M = 4$).....	35
Figure 2. 17 : B-spline courbe ouverte Type (1).....	36
Figure 2. 18 : Courbe fermée B-spline type (1).....	37
Figure 2. 19 : Courbe B-Spline (3).....	38
Figure 2. 20 : Relation entre les valeurs des nœuds de courbe	39
Figure 2. 21 : Courbe ouverte B-Spline de type (3).....	39
Figure 2. 22 : Courbe fermée B-Spline de type (3)	39
Figure 2. 23 : Surface bi-cubic Bspline uniforme	40

Figure 2. 24 : Influence de la coordonnée homogène (cas) ($h_2 \rightarrow +\infty$)	42
Figure 2. 25 : Influence de la coordonnée homogène (cas $h_2 \rightarrow 0$)	42
Figure 2. 26 : Influence dans le cas de coordonnées homogènes $h_2 < 0$ et $h_0, h_1, h_3 > 0$	43
Figure 2. 27 : Courbe de Bézier rationnelle quadratique	44
Figure 2. 28 : Génération d'un arc.....	45
Figure 2. 29 : Génération du cercle.....	47
Figure 2. 30 : Principe des surfaces générées.....	47
Figure 2. 31 : barycentre et rayon barycentrique	48
Figure 2. 32 : Exemples de surfaces générées constantes.....	49
Figure 2. 33 : Exemples de surfaces générées	50
Figure 2. 34 : Exemples de surfaces associées	51
Figure 2. 35 : Quelques formes dérivées de la méthode de génération	52
Figure 2. 36 : Rotation d'un point M autour d'un axe Δ	53
Figure 2. 37 : Exemples de surfaces de révolution	53
Figure 3. 1: Le diagramme de Voronoï d'un ensemble de points dans le plan $Vor(P)$ (cellule de Voronoï de P).....	55
Figure 3. 2 : Triangulation de Delaunay 2D (vert) et diagramme de Voronoï (bleu) des points du plan (rouge) (CGAL). Le triangle en surbrillance est inscrit dans le cercle (en pointillés) centré sur un sommet de Voronoï B.....	56
Figure 3. 3 : Le point x , entourées des sommets des cellules de Voronoï et les pôles p^+ et p^- D et 3 D..	58
Figure 3. 4 : Le test Cocone en un point donné de sa cellule de Voronoï.....	59
Figure 3. 5 : Points de contrôle et nœuds d'une courbe B-spline	61
Figure 4. 1: SADT A-0 d'un modèle de reconstruction des courbes et des surfaces gauches	65
Figure 4. 2: la courbe de $C4t$ à l'intérieur de son polygone de contrôle	68
Figure 4. 3: Modification locale de la forme de la courbe $C4t$	69
Figure 4. 4 : Les neuf courbes B-splines trigonométriques d'ordre 4.....	69
Figure 4. 5 : La courbe B-spline trigonométriques d'ordre 4 avec 9 points de contrôle.....	70
Figure 4. 6 : Courbes B-splines trigonométriques d'ordre 4.....	70
Figure 4. 7 : La Courbe B-spline trigonométrique d'ordre 4 avec 9 sommets du polygone de contrôle..	71
Figure 4. 8 : Polygone de contrôle d'une surface.....	72
Figure 4. 9 : La surface reconstruite	72
Figure 4. 10 : Influence de la modification locale sur la surface	73
Figure 4. 11 : Polygone de contrôle de la surface à reconstruire.....	74
Figure 4. 12 : Surface reconstruite B-spline trigonométriques et son polygone de contrôle	74
Figure 4. 13 : Surface reconstruite B-spline trigonométriques	74

Figure 4. 14 : Surface B-spline trigonométrique avec son polygone de contrôle La surface est forcée de coïncider avec les quatre bords du polygone de contrôle.....	75
Figure 4. 15 : Surface B-spline trigonométriques sans son polygone de contrôle La surface est forcée de coïncider avec les quatre bords du polygone de contrôle.....	75
Figure 4. 16 : La subdivision de la base B-spline trigonométrique d'ordre 4. Les courbes en pointillées en noires montrent la somme des bases Splines (courbes en points bleus)	78
Figure 4. 17 : La courbe de subdivision produite par la formule de raffinement.....	79
Figure 4. 18 : Reconstruction de la courbe par UATB d'ordre 4 avec schéma de subdivision	80
Figure 4. 19 : Deux étapes de la subdivision des surfaces produites par la formule de raffinement (4.10).....	81
Figure 4. 20 : Nuage des points du capot.....	82
Figure 4. 21 : Polygone de contrôle du capot.....	82
Figure 4. 22 : La reconstruction du capot avec UAT B-spline.....	83
Figure 4. 23 : 1 ^{ère} opération du lissage du capot.....	83
Figure 4. 24 : 2 ^{ème} opération du lissage du capot.....	83
Figure 5. 1 : Effet de la variation du paramètre de forme λ sur la forme de la courbe fermée ou ouverte....	88
Figure 5. 2 : Fonctions de base trigonométrique Hermite $TBi\alpha, i = 0, \dots, 3$ avec différents choix de λ et α	89
Figure 5. 3 : (a) Courbe Spline Hermite trigonométrique cubique créée avec quatre points de contrôle. (b) Courbes Spline Hermite trigonométrique cubique reconstruites avec différents choix de λ et α	90
Figure 5. 4 : Courbes d'interpolation spline d'Hermite trigonométriques cubique ouverte et fermée avec les différentes valeurs de λ et α	92
Figure 5. 5 : Carreau de surface bi-cubique trigonométrique et bi-trigonométrique Hermite B-spline avec les différents paramètres.....	94
Figure 5. 6 : Patch de surface bicubique B-spline avec différentes valeurs du paramètre de λ	95
Figure 5. 7 : Patch de surface bicubique B-spline avec les différents paramètres de forme λ et α	95
Figure 5. 8 : Polygone de contrôles.....	96
Figure 5. 9 : Reconstruction d'aile avec le paramètre de forme $\lambda = 0$	96
Figure 5. 10 : Reconstruction d'aile avec le paramètre de forme $\lambda = 1$	97
Figure 5. 11 : Reconstruction d'aile avec notre modèle des deux paramètres de forme $\lambda = 0.3$ et $\alpha = 0.4$	97
Figure 5. 12 : Reconstruction d'aile avec notre modèle des deux paramètres de forme $\lambda = 1$ et $\alpha = 0.45$	98
Figure 5. 13 : Reconstruction d'aile avec notre modèle des deux paramètres de forme $\lambda = 1 - \sqrt{2}$ et $\alpha = 1/4$	98

INTRODUCTION GENERALE

Les problèmes de reconstruction par les stratégies, d'interpolation et d'approximation constituent un vaste sujet de recherche qui servait surtout à relier ou approcher des mesures. La reconstruction trouve son application dans plusieurs disciplines aussi bien scientifiques que techniques telles que l'analyse numérique, l'ingénierie mécanique, les industries automobiles et aéronautiques, et l'imagerie médicale, etc.

Les stratégies utilisées pour reconstruire une surface gauche, interpolation ou approximation ont servi pour numériser le travail des modélisateurs, pour en réduire la durée et le coût. D'où la nécessité de chercher d'autres méthodes plus pratiques et rassurantes depuis la conception jusqu'à la réalisation du produit.

Pour élargir la portée de la représentation des formes gauches par les modèles *B*-splines, certains chercheurs ont suggéré de nombreux types de courbes définies sur un espace non polynomial (Wang, 2006 ; Han, 2014). C'est exactement dans cet angle que vient s'intégrer la contribution de notre projet de recherche.

En nous appuyant sur les fonctions *B*-splines trigonométriques, introduites récemment dans le domaine de la modélisation des surfaces gauches et qui offre de très bonnes caractéristiques (la simplicité des calculs numériques, la facilité de la représentation des formes convexes, la reconstruction des formes aigues...)

Nous proposons dans cette thèse deux méthodes de reconstruction de surfaces gauches permettant d'améliorer la finesse du lissage et la qualité du contrôle tout en réduisant le temps de traitement.

Dans la première méthode, nous avons défini une base, vérifiant toutes les propriétés de *B*-spline, à partir des fonctions trigonométriques d'ordre 4. Dans le but d'améliorer la qualité de la modélisation (lissage) et d'accélérer la construction des courbes *B*-splines, nous avons mis au point un schéma de subdivision, utilisant le produit tensoriel de deux fonctions de base *B*-splines trigonométriques.

Pour valider la première méthode, nous l'avons appliquée à la reconstruction d'un capot de voiture à partir d'un ensemble de points de contrôle.

Dans la deuxième méthode, nous avons tenté d'apporter une solution au problème de l'interpolation polynomiale classique de degré élevé qui pose un certain nombre de limitations telles que la création d'oscillations de grandes amplitudes, et le recours à des procédures complexes et coûteuses.

L'interpolation d'Hermite par morceaux basée sur les B-spline trigonométriques cubiques avec des paramètres de forme nous ont permis d'atteindre un bon résultat pour résoudre ce problème. Les valeurs de paramètres de formes bien choisies permettront d'avoir automatiquement un lissage de classe C^3 , en plus le problème de la contrôlabilité est résolu grâce à l'interpolation par morceaux.

Pour des fins de validation de notre deuxième contribution, nous avons modélisé l'aile d'une voiture à partir d'un nuage de points de contrôle. La reconstruction de la surface de classe C^3 a été obtenue intrinsèquement pour des valeurs de paramètre de forme $\lambda = 1 - \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{1}{4}$.

Le contenu de cette thèse est constitué de cinq chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons les champs d'applications des surfaces gauches, à travers des exemples industriels, tels que l'industrie automobile, aéronautique, etc.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons une étude de synthèse de tous les modèles paramétriques classiques de reconstruction des courbes et de surfaces gauches utilisés dans la conception assistée par ordinateur (**CAO**).

Le troisième chapitre définit la problématique de recherche liée à la reconstruction des surfaces gauches, il présente l'état de l'art de la recherche dans ce domaine et expose les objectifs spécifiques de ce projet de recherche.

Le quatrième chapitre détaille l'approche d'approximation et vérifie les conditions à remplir par les bases B-spline trigonométriques d'ordre 4, comme il présente l'application aux cas des courbes et des surfaces gauches en exposant le schéma de subdivision pour le raffinage.

Le cinquième chapitre expose notre deuxième contribution basée sur la méthode d'interpolation d'Hermite B-spline cubique trigonométrique avec deux paramètres de forme.

Finalement, nous clôturons notre travail par une conclusion générale et des recommandations pour de futures pistes de recherche.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES PIECES DE FORME GAUCHE

INTRODUCTION

Les industriels utilisent fréquemment dans la fabrication de leurs produits des formes simples telles que les plans, cylindres, plans-cylindres (pièces mixtes), sphères et d'autres formes simples. En général, ces pièces ont des rôles fondamentaux dans le fonctionnement de la plupart des produits mécaniques et elles sont plus faciles à mettre en œuvre et moins coûteuses à fabriquer que les pièces complexes. Cependant, dans certaines applications, elles ne sont pas adéquates, par exemple une surface fonctionnelle en contact avec un fluide, c'est le cas de l'aérodynamique ou une onde, cas de l'optique. Les surfaces complexes sont normalement appelées surfaces gauches. D'après ISO [ISO/TS 17450-1:2005], les surfaces de forme gauche sont considérées comme des surfaces ayant des caractéristiques géométriques complexes. Les surfaces géométriques complexes n'ont pas de degré d'invariance. Si, pour un déplacement donné et que l'élément géométrique ne change pas, ce mouvement particulier est un invariant de l'élément géométrique à titre d'exemple, la rotation d'un cylindre de révolution autour de son axe de symétrie est un degré d'invariance de l'élément cylindre de révolution de même pour une translation le long de son axe. Un degré d'invariance représente un déplacement que peut subir une surface sans que celle-ci soit changée dans sa forme ou dans sa situation dans l'espace. Toute surface peut donc être classée en fonction des degrés de déplacements qui la laissent invariante en situation dans l'espace affine. Il correspond au degré de mobilité (liberté) utilisé en cinématique des solides.

Les pièces de forme gauche présentent un grand avantage dans de nombreuses applications industrielles, que ce soit pour des exigences fonctionnelles ou esthétiques. Leur importance pour l'industrie est bien connue dans la conception et la fabrication de produits ayant des surfaces gauches (Pfeifer,2001 ; Savio,2001 ; Brinksmeier,1996 ; Brinksmeier,2004 ; Katahira,2003 ; Klocke,2003 ; Rodgers, 2004).

L'utilisation de pièces freeform notamment en aéronautique et dans l'automobile a permis de réduire considérablement la consommation de carburants et les effets nuisibles à l'environnement.

Actuellement dans la phase de la conception de la majorité des produits, le concepteur mobilise toutes ses compétences scientifiques, techniques et professionnelles pour répondre

aux besoins des clients que ce soit au niveau des exigences fonctionnelles et au niveau de l'aspect esthétique, ce dernier devient également de plus en plus un critère important sur l'impact du produit dans le marché. Ce critère est un facteur de succès, en particulier pour les produits de consommation où la forme et l'apparence peuvent avoir plus d'impact sur le client que la fonction. Les exemples sont très courants: carrosseries, téléphones mobiles, etc.

Les formes gauches peuvent être fabriquées par de nombreux processus de production différents, dont les performances des moyens de production ont été améliorées pour réaliser ces formes gauches, comme le rapportent un certain nombre de publications (Pfeifer,2001 ; Savio,2001 ; Brinksmeier,1996 ; Brinksmeier,2004 ; Katahira,2003 ; Klocke,2003; Nowicki,1993).

Dans le domaine de la rétro-conception (reverse engineering) qui consiste à la création d'un modèle de conception (CAD) à partir d'un objet réel, la procédure est basée sur le mesurage d'un nuage de points de la surface de l'objet réel, puis on reconstruit la surface en choisissant le modèle de représentation paramétrique, d'interpolation ou d'approximation.

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter un aperçu sur l'utilisation industrielle des pièces de formes gauches.

1.1 UTILISATION DES PIÈCES FREEFORM DANS L'INDUSTRIE

Les pièces contenant les surfaces gauches (Freeform) sont largement utilisées dans des produits industriels, leur importance est primordiale dans l'industrie automobile, aéronautique, appareils électroménagers, etc.

A titre d'exemple, des Pièces comportant des surfaces gauches qu'utilise l'industrie automobile on les trouve dans les pièces de carrosserie, systèmes de conduites des fluides, systèmes de transmission de puissance, etc. Dans le domaine de l'aéronautique, on trouve les pièces d'ailes, fuselage monocoque, etc. Pour les appareils électroménagers et des produits de grande consommation, on les trouve dans les lames des robots de cuisines; une pompe à eau de la machine lave-linge, etc.

L'objectif des exemples cités est d'illustrer le large champ d'utilisation des pièces contenant des surfaces de formes gauches. La description de chaque exemple donne des informations sur l'industrie dans laquelle elle est appliquée et la fonction de la forme gauche, afin de répondre aux exigences appropriées de ces pièces.

1.1.1 Les pièces d'ailes et fuselage monocoque

Actuellement, les industriels du secteur de l'industrie aéronautique fixent deux objectifs principaux : le premier est de réduire la consommation du carburant et le deuxième est d'augmenter le nombre de passagers. Pour atteindre ces deux objectifs, la conception du fuselage monocoque et d'ailes est améliorée par l'utilisation de nouveaux matériaux comme la fibre de carbone qui réduit le poids total de l'avion et permet le développement de nouvelles formes géométriques permettant de réduire la résistance aérodynamique. La conception et la fabrication de la géométrie des formes gauches représentent un facteur clé dans le processus de développement comme le montre l'exemple de la **Figure 1.1**, le développement de l'Airbus A380 et du Boeing 787 Dreamline. La figure 1 montre la mesure de la résistance aérodynamique de la force ascendante et la rigidité dans une soufflerie, en temps réel. Cette étape est plus importante pour le développement d'un nouveau modèle de conception d'aile.



Figure 1. 1 Modèle complet d'un A380 dans la soufflerie allemande d'Emmerloord (NL) (Reckzeh 2003)

1.1.2 Pièces de carrosserie automobile

L'un des défis actuels de l'industrie automobile mondiale, c'est que le succès du produit industrialisé dépend non seulement de la qualité fonctionnelle, mais aussi l'attraction d'un acheteur potentiel (Klein, 1992). Les aspects ergonomiques et aérodynamiques sont deux autres exigences importantes pour les produits automobiles. Dans le contexte de la hausse des prix du pétrole, les industriels répondent à la demande du marché par des voitures économiques. Les surfaces de forme gauche répondent à la demande par une conception de

1.1.3 Les pales de Turbine

Une pale d'hélice (avion ou navire), de rotor (hélicoptère), de turbine, de pompe ou d'éolienne est une surface fonctionnelle en rotation autour d'un axe. C'est un dispositif aérodynamique ou hydrodynamique destiné à transformer une énergie motrice en accélération du fluide dans lequel il se déplace ou au contraire à transformer l'énergie de déplacement du fluide en énergie motrice. Plusieurs pales sont fixées à un moyeu central pour former une hélice ou un rotor.

Les pales de turbine peuvent être trouvées dans une grande variété de produits industriels. Leur champ d'application part de la production de masse comme des systèmes de refroidissement trouvés dans les micro-ordinateurs et les systèmes turbo compresseurs, jusqu'aux exigences élevées de fonctionnement du moteur à réaction.

L'utilisation des pales de turbine dans les turbo-réacteurs peut être considérée comme l'un des domaines les plus difficiles concernant, par exemple, le choix de matériaux et la géométrie de la forme des pales. Au cours des dernières années, l'amélioration des alliages, la solidification directionnelle et monocristalline ainsi que l'utilisation de systèmes de revêtement ont permis de travailler à haute température du gaz. Cela a permis d'augmenter la force du système et l'efficacité thermodynamique tout en diminuant le taux des pollutions de l'environnement. Le fonctionnement à haute pression, les températures jusqu'à 1400°C ainsi que la contrainte considérable due à la rotation à plus de 10000 tr / min permettent de simuler les conditions aux limites pendant le vol. La mauvaise conception et réalisation d'une telle pale de turbine peut entraîner une défaillance catastrophique du système.

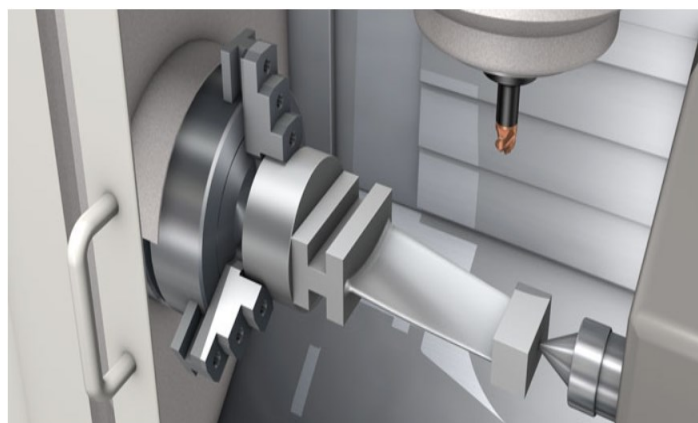


Figure 1. 4 : usinage d'une pale d'après document Sandvick Coromant

1.1.4 Pièces optiques

L'optique asphérique est une forme gauche, offrant des avantages significatifs par rapport aux surfaces planes et sphériques classiques. On trouve de nombreuses applications importantes de ces pièces, dans l'imagerie, les écrans de projection, la sécurité des documents, le durcissement du matériau, la microscopie et bien d'autres (Claytor, 2004). L'utilisation de formes gauche dans la conception des pièces d'optique peut améliorer considérablement leurs performances, tant en termes de réduction de la taille du système que d'amélioration de la fonctionnalité optique (erreur de front d'onde inférieure). En utilisant des formes gauches, le nombre de composants peut être réduit, les composants peuvent être placés dans des positions favorisant la qualité optique du (NANOMEFOS Project,2006) système, leur utilisation est avantageuse dans de nombreuses industries, allant de la production de masse de produits de consommation à la fabrication des composants spéciaux uniques pour le grand projet spatial par exemple. Par la suite, quelques exemples sont brièvement décrits.

Un exemple de production de masse est l'optique des imprimantes laser ; Jusqu'à récemment, leurs systèmes de balayage optique utilisaient plusieurs éléments optiques pour former un seul miroir de forme gauche, le nombre de composants est réduit avec des avantages correspondants en termes de réduction des coûts et de la taille. D'autres avantages incluent l'absence d'aberration chromatique et la possibilité de sélectionner n'importe quelle longueur d'onde du laser. Etant donné que le laser à longueur d'onde entraîne une réduction de la taille du point, la précision de la sortie d'impression est améliorée. Inversement, un laser à grande longueur d'onde peut être utilisé dans une imprimante de production de masse moins coûteuse avec le même système de balayage optique à forme gauche (Davis,2003).

Un exemple d'un projet spécial utilisant des formes gauches pour un produit unique est le spectromètre d'imagerie infrarouge multi-objets de la NASA IRMOS (Winsor et al). La conception optique comprend quatre grands miroirs très désaxés, très asphériques et un miroir biconique concave hors axe (Brinksmeier,1996). Le miroir de forme gauche a été introduit pour aider à réduire la taille du système d'un ordre de grandeur (Garrard,2005). Une réduction significative de la taille peut réduire considérablement l'utilisation de matériaux exotiques (béryllium) et la réduction de masse ce qui conduit à une performance améliorée pour les systèmes spatiaux légers. Les surfaces de forme gauche peuvent également être utilisées pour contrôler l'astigmatisme à plusieurs endroits dans le champ de vision et ainsi réduire l'aberration du front d'onde.

En général, les surfaces de forme gauche de miroir sont plus difficiles à fabriquer et l'incapacité d'un concepteur à évaluer leur aptitude à la fabrication a limité leur utilisation dans les systèmes optiques. Les concepteurs préfèrent sélectionner les formes de surface symétriques en rotation pour résoudre des problèmes de faisabilité, plutôt que de spécifier une conception basée sur les propriétés d'une surface gauche. Pour cette raison, de nouveaux outils de conception optique (Garrard, 2005) ont été développés pour améliorer la réalisation de ces surfaces complexes, afin de maîtriser les coûts.

1.2 CLASSIFICATION DES FORMES GAUCHES

Les exemples ci-dessus montrent le champ d'applications des formes gauches dans les différents domaines de l'industrie.

Les surfaces gauches peuvent être classées tel que le montre la Figure 1.5 à titre d'exemple pour les deux classes de surfaces optiques et aux aubes de turbine. Ce graphe montre clairement qu'entre ces deux classes, la tolérance recherchée se trouve à différentes échelles. Les surfaces optiques requièrent une tolérance nanométrique alors que les aubes de turbines sont au niveau micrométrique (ou aujourd'hui sub-micrométrique).

Comme étant faible (par exemple, presque plate, asphérique, changement de courbure limité), moyenne (changements de courbure modérés à importants, surfaces à facettes multiples) et élevée (avec des contre-dépouilles, accès / visibilité). Limitations, caractéristiques internes). En ce qui concerne les tolérances, la classification est basée sur la tolérance de profil relative définie comme le rapport : tolérance / dimension de la pièce principale.

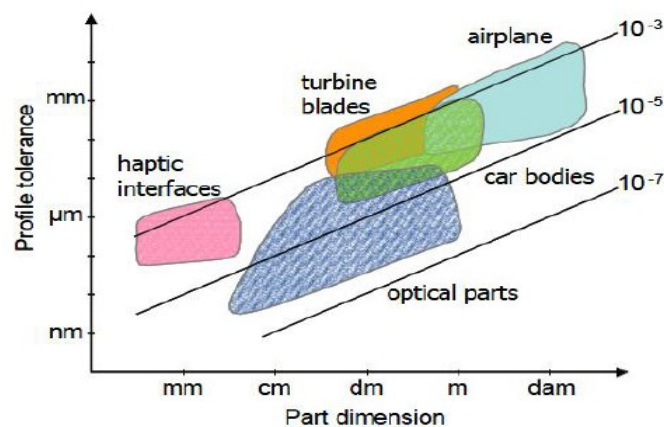


Figure 1.5 : Valeurs typiques des tolérances par rapport aux dimensions pour les exemples d'application traités (Savio,2007)

Les critères de classification proposés sont appliqués aux exemples présentés ci-dessus dans le tableau 1, tandis que la **Figure 1.5** présente une représentation graphique des plages d'application typiques pour les dimensions et les tolérances associées.

	Airplane parts	Auto body parts	Haptic interfaces	Turbine blades/blisks	Optical parts
Part dimensions (m)					
large ($10^0 - 10^2$)	xx			x	x
medium ($10^{-1} - 10^0$)	x	xx		xx	xx
small ($10^{-3} - 10^{-2}$)			xx		xx
micro (10^{-3})			x		x
Shape complexity					
low	xx				xx
medium	x	xx	xx	x	x
high			x	xx	
Relative tolerance					
medium ($10^{-4} - 10^{-3}$)	xx	xx		xx	
fine ($10^{-5} - 10^{-4}$)			xx	x	xx
ultra-fine ($< 10^{-5}$)					xx

Figure 1. 6 : Tableau 1 Classification des formes en fonction de la complexité et de la tolérance des formes selon (Savio et al,2007). (légende : xx : cas typique ; x: cas moins fréquent).

CHAPITRE 2

MODELISATION PARAMETRIQUE DES COURBES ET DES SURFACES GAUCHES

INTRODUCTION

Dans des secteurs d'activités tels que l'automobile, le flaconnage ou les biens d'équipement, la compétitivité conduit à l'élaboration de produits au design toujours plus novateur et de qualité croissante.

Au début des années 1960, J.C Ferguson de la Boeing Aircraft Company aux États-Unis a annoncé une méthode de description des segments de courbe, en tant que vecteurs, à l'aide de paramètres. Un segment de courbe de Ferguson est une fonction vectorielle cubique par rapport à un paramètre, obtenu en spécifiant les vecteurs de position et les vecteurs tangents des points de départ et d'arrivée du segment de courbe. A l'aide de ces segments de courbe, Ferguson a proposé une méthode de création d'une partie d'une surface (Gellert,1965) (appelée patch de surface), qui satisfait les conditions imposées en spécifiant des vecteurs de position et des vecteurs tangents en 4 points.

S.A. Coons (Coons,1964 ; Coons,1967) a annoncé en 1964 une méthode de description de surface puis il l'a généralisée en 1967. Le patch de surface de Coons est défini non seulement par les vecteurs de position et les vecteurs différentiels d'ordre supérieur par rapport aux quatre points d'angle du patch mais aussi avec les vecteurs de position liés aux quatre courbes limites. Les vecteurs différentiels d'ordre supérieur par rapport aux directions à travers les courbes limites le définissent également. Les segments de courbe de Ferguson, les patches de surface et les patches de surface Coons partagent un certain nombre de problèmes de contrôle et de continuité des segments et des patches. Une méthode pour résoudre le problème de connexion est la courbe Spline qui est décrite par différentes courbes de degrés cubiques dans différents segments entre point et point ; aux positions des points, c'est-à-dire aux points de connexion entre les segments de courbe, les connexions sont déterminées simultanément à tous les points de connexion.

La méthode Spline peut être considérée comme résolvant automatiquement le problème de connexion existant avec les courbes et les surfaces de Ferguson et de Coons. Cependant, le problème du contrôle de la forme n'est pas résolu.

P.Bezier de Renault Company en France a annoncé une représentation de courbe qui est définie en donnant un polygone et en lissant ses coins (Bezier,1971). Cette méthode ne nécessite pas de

données analytiques difficiles à comprendre intuitivement telles que les vecteurs tangents et les vecteurs de torsion. Les courbes et surfaces de Bézier utilisent les fonctions de base de Bernstein comme fonctions de fusion.

Gordon et Riesenfeld ont proposé des courbes et des surfaces qui utilisent les splines de base comme fonctions de fusion (Gordon, 1974). Celles-ci sont appelées courbes et surfaces B-Spline. Contrairement au modèle de Bézier, qui est une combinaison convexe de tous les vecteurs de position de sommet, le modèle B-Spline diffère en ce qu'il s'agit d'une combinaison convexe d'un certain nombre de vecteurs de position de sommet dans leur voisinage immédiat. Il en résulte que le problème du contrôle est amélioré.

Ce chapitre présente les modèles de description des courbes et des Surfaces gauches en abordant les différents outils mathématiques permettant de les décrire. Les modèles présentés sont : Ferguson et Coons . Bézier, B-Spline et B-Spline rationnelles non uniformes(NURBS). Ce sont des modèles les plus utilisés dans la plupart des logiciels de CAO. Ces modèles se différencient par l'expression mathématique utilisée pour interpoler ou approximer des points de contrôle.

2.1 LES MODELES FERGUSON ET COONS

Les modèles de Ferguson et Coons peuvent être considérés parmi les premiers modèles développés pour représenter des courbes et des surfaces gauches (Yamaguchi,1988).

2.1.1 Segment de courbe cubique paramétrique de Ferguson

Soit $P(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) une courbe paramétrique cubique :

$$\begin{aligned} P(t) &= [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] [A \quad B \quad C \quad D]^T \\ &= [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] M \end{aligned} \tag{2.1}$$

Où M est une matrice 4×3 .

En dérivant par rapport à t , on obtient :

$$\dot{P}(t) = [3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad 0] M \tag{2.2}$$

En supposant les conditions suivantes :

- A $t = 0, P(0) = Q_0$ et $P'(0) = Q'_0$
- A $t = 1, P(1) = Q_1$ et $P'(1) = Q'_1$

Pour trouver la matrice M en remplaçant ces conditions dans les formules (2.1) et (2.2) ; on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}'_0 \\ \mathbf{Q}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} M$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}'_0 \\ \mathbf{Q}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}'_0 \\ \mathbf{Q}'_1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, la courbe paramétrique cubique qui satisfait les conditions aux limites est :

$$\mathbf{P}(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}'_0 \\ \mathbf{Q}'_1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

D'où :

$$= [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] M_c \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}'_0 \\ \mathbf{Q}'_1 \end{bmatrix}$$

Avec

$$M_c = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$\mathbf{P}(t)$ peut-être écrite également sous la forme suivante:

$$\mathbf{P}(t) = [H_{0,0}(t) \quad H_{0,1}(t) \quad H_{1,0}(t) \quad H_{1,1}(t)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}'_0 \\ \mathbf{Q}'_1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Avec :

$$\begin{aligned} H_{0,0}(t) &= (t-1)^2(2t+1) \\ H_{0,1}(t) &= t^2(3-2t) \\ H_{1,0}(t) &= (t-1)^2t \\ H_{1,1}(t) &= (t-1)t^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

L'équation (2.5) montre que le segment de courbe cubique de Ferguson est une combinaison linéaire de données vectorielles $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}'_0, \mathbf{Q}'_1$, mélangées en combinaison linéaire avec des poids donnés par les coefficients $H_{0,0}(t), H_{0,1}(t), H_{1,0}(t), H_{1,1}(t)$.

- **Validation :**

Soient deux points contrôles $Q_0 = [0 \ 0 \ 0]$, $Q_1 = [1 \ 2 \ 3]$, et leurs vecteurs tangents $Q'_0 = [1 \ 1 \ 1]$ et $Q'_1 = [1 \ 1 \ 1]$, on désire construire le segment de courbe paramétrique cubique de Ferguson.

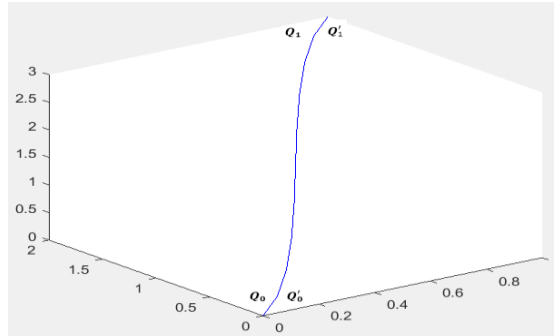


Figure 2.1 : Segment de courbe paramétrique cubique de Ferguson

- **Cas général**

Selon la méthode utilisée pour dériver un segment de courbe de Ferguson, une courbe polynomiale de degré $(2r + 1)$ peut être obtenue en spécifiant les positions et les vecteurs dérivés à l'ordre r en deux points. Cette courbe est appelée courbe d'interpolation Hermite (CIH) (Yamaguchi,1988)

- Pour le cas où la CIH est une ligne droite reliant 2 points :

$$P(t) = (1 - t) Q_0 + t Q_1 \quad (2.7)$$

- Pour le cas où la CIH est un polynôme du degré 5 :

$$P(t) = [k_{0,0}(t) \ k_{0,1}(t) \ k_{1,0}(t) \ k_{1,1}(t) \ k_{2,0}(t) \ k_{2,1}(t)] \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q'_0 \\ Q'_1 \\ Q''_0 \\ Q''_1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

D'où :

$$\begin{aligned} k_{0,0}(t) &= -6t^5 + 15t^4 - 10t^3 + 1 \\ k_{0,1}(t) &= 6t^5 - 15t^4 + 10t^3 \\ k_{1,0}(t) &= -3t^5 + 8t^4 - 6t^3 + t \\ k_{1,1}(t) &= -3t^5 + 7t^4 - 4t^3 \\ k_{2,0}(t) &= -\frac{1}{2}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - \frac{3}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \\ k_{2,1}(t) &= \frac{1}{2}t^5 - t^4 + \frac{1}{2}t^3 \end{aligned} \quad (2.9)$$

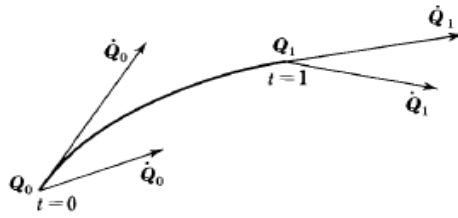


Figure 2.2 : Données pour générer un segment de courbe du 5^{eme} degré

Dans cette recherche, nous avons utilisé le programme Matlab pour valider tous les modèles.

Validation : Les données :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= [400 \ 600 \ 150] & \mathbf{Q}'_0 &= [4 \ 2 \ 0] \\ \mathbf{Q}_1 &= [100 \ 200 \ 150] & \mathbf{Q}'_1 &= [4 \ 0 \ 2] \end{aligned}$$

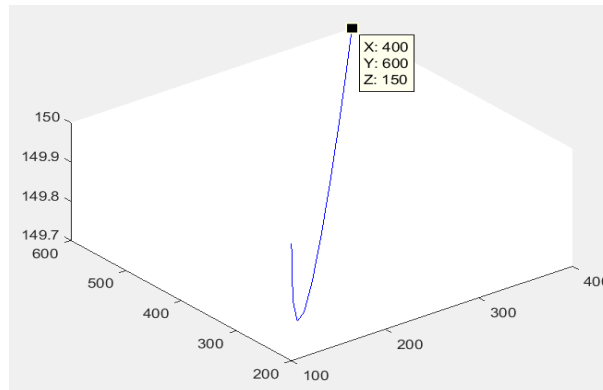


Figure 2.3 : Segment de courbe de Ferguson

2.1.2 Carreau (Patch) de surface Ferguson (PSF)

PSF est une surface basée sur une courbe d'interpolation Hermite cubique. Il est défini en supposant les vecteurs de position aux 4 coins et les vecteurs tangents dans deux directions de paramètres PSF est exprimé comme :

$$\mathbf{P}(u, w) = [H_{0,0}(u) \ H_{0,1}(u) \ H_{1,0}(u) \ H_{1,1}(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(0,0) & \mathbf{Q}(0,1) & \mathbf{Q}_w(0,0) & \mathbf{Q}_w(0,1) \\ \mathbf{Q}(1,0) & \mathbf{Q}(1,1) & \mathbf{Q}_w(1,0) & \mathbf{Q}_w(1,1) \\ \mathbf{Q}_u(0,0) & \mathbf{Q}_u(0,1) & 0 & 0 \\ \mathbf{Q}_u(1,0) & \mathbf{Q}_u(1,1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{0,0}(w) \\ H_{0,1}(w) \\ H_{1,0}(w) \\ H_{1,1}(w) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

D'où :

- $\mathbf{Q}(0,0), \mathbf{Q}(0,1), \mathbf{Q}(1,0), \mathbf{Q}(1,1)$: vecteurs position aux 4 coins.
- $\mathbf{Q}_u(0,0), \mathbf{Q}_u(0,1), \mathbf{Q}_u(1,0), \mathbf{Q}_u(1,1)$: vecteurs tangents dans la direction u .
- $\mathbf{Q}_w(0,0), \mathbf{Q}_w(0,1), \mathbf{Q}_w(1,0), \mathbf{Q}_w(1,1)$: vecteurs tangents dans la direction w .

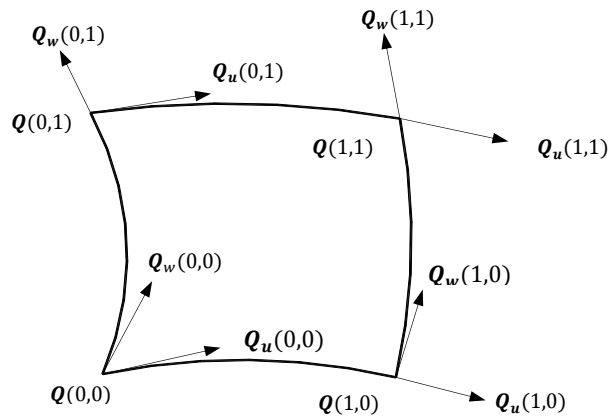


Figure 2. 4 : Données pour générer le carreau de surface Ferguson

Validation : les données :

$$\begin{array}{llll}
 \mathbf{Q}_{00} = [0 \ 0 \ 0] & \mathbf{Q}_{01} = [0 \ 20 \ 0] & \mathbf{Q}_{10} = [20 \ 0 \ 0] & \mathbf{Q}_{11} = [20 \ 20 \ 0] \\
 \mathbf{Q}_{u00} = [1 \ 1 \ 1] & \mathbf{Q}_{u01} = [1 \ 1 \ 1] & \mathbf{Q}_{u10} = [1 \ 1 \ 1] & \mathbf{Q}_{u11} = [1 \ 1 \ 1] \\
 \mathbf{Q}_{w00} = [0 \ 1 \ 1] & \mathbf{Q}_{w01} = [0 \ 1 \ 1] & \mathbf{Q}_{w10} = [0 \ 1 \ 1] & \mathbf{Q}_{w11} = [0 \ 1 \ 1]
 \end{array}$$

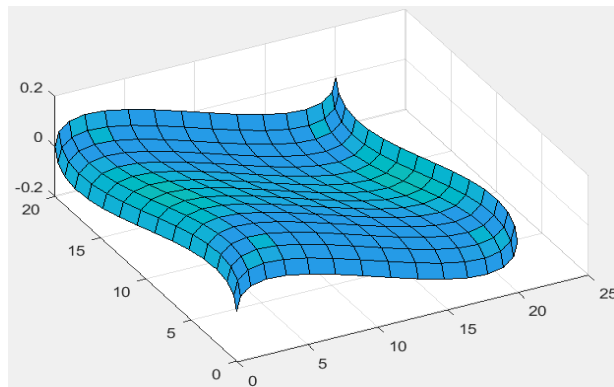


Figure 2. 5 : Patch de surface Ferguson

2.1.3 Le patch de surface Coons (C.S.P.64)

La formule du CSP64 annoncée en 1964 par le professeur S.A Coons est :

$$\mathbf{P}(u, w) = -[-1 \ C_{0,0}(u) \ C_{0,1}(u)] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{Q}(u, 0) & \mathbf{Q}(u, 1) \\ \mathbf{Q}(0, w) & \mathbf{Q}(0, 0) & \mathbf{Q}(0, 1) \\ \mathbf{Q}(1, w) & \mathbf{Q}(1, 0) & \mathbf{Q}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ C_{0,0}(w) \\ C_{0,1}(w) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

D'où

- $\mathbf{Q}(0,0), \mathbf{Q}(0,1), \mathbf{Q}(1,0), \mathbf{Q}(1,1)$: sont les vecteurs position aux quatre coins.
- $\mathbf{Q}(u, 0), \mathbf{Q}(u, 1), \mathbf{Q}(0, w), \mathbf{Q}(1, w)$: les quatre courbes limites.

- $C_{0,i}$: Sont des fonctions de mélange continu et monotone dans l'intervalle couvert par le patch.

Cette formule peut être décomposée en une somme de 3 termes :

$$P(u, w) = \underbrace{[C_{0,0}(u) \quad C_{0,1}(u)]}_{P_a(u,w)} \begin{bmatrix} Q(0, w) \\ Q(1, w) \end{bmatrix} + \underbrace{[Q(u, 0) \quad Q(u, 1)]}_{P_b(u,w)} \begin{bmatrix} C_{0,0}(w) \\ C_{0,1}(w) \end{bmatrix} - \underbrace{[C_{0,0}(u) \quad C_{0,1}(u)]}_{P_c(u,w)} \begin{bmatrix} Q(0,0) & Q(0,1) \\ Q(1,0) & Q(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{0,0}(w) \\ C_{0,1}(w) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

- Conditions sur les fonctions de mélange

1- Appliquer $C_{0,i}(j) = \delta_{ij} \quad (i, j: 0,1)$

Si cette condition est satisfaite, alors le patch de surface coïncide avec des courbes données arbitrairement.

$$P(u, 0) = Q(u, 0), \quad P(u, 1) = Q(u, 1), \quad P(0, w) = Q(0, w), \quad P(1, w) = Q(1, w)$$

2 - Ajouter $C_{0,i}^*(j) = 0 \quad (i, j: 0,1)$

Si cette condition est satisfaite, alors les vecteurs tangents dans la direction à travers les courbes limites du patch de surface seront exprimés uniquement en fonction de vecteurs tangents dans la même direction aux deux extrémités de la courbe limite et de la fonction de fusion.

Comme exemple : $P_u(0, w) = C_{0,0}(w)Q_u(0,0) + C_{0,1}(w)Q_u(0,1)$

Par conséquent, si deux patches de surface partagent les mêmes courbes limites et ont les mêmes vecteurs tangents aux deux extrémités de la courbe frontière, ces patches de surface sont connectés en continu à la pente le long de cette courbe limite.

3 - Ajouter $C_{0,i}^{**} = 0 \quad (i, j: 0,1)$

Si cette condition est également satisfaite, alors les seconds vecteurs dérivés dans la direction à travers une courbe limite sont déterminés uniquement par les seconds vecteurs dérivés dans cette direction aux deux extrémités de la courbe.

Comme exemple : $P_{uu}(0, w) = C_{0,0}(w)Q_{uu}(0,0) + C_{0,1}(w)Q_{uu}(0,1)$

Par conséquent, un autre patch de surface peut être connecté en continu jusqu'à la courbure

4 - Courbes limites

Sur le CSP, les courbes aux limites peuvent être données arbitrairement ainsi:

✓ Si $Q(0, w)$ et $Q(1, w)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} Q(0, w) &= C_{0,0}(w) Q(0,0) + C_{0,1}(w) Q(0,1) \\ Q(1, w) &= C_{0,0}(w) Q(1,0) + C_{0,1}(w) Q(1,1) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ensuite :

$$P(u, w) = [Q(u, 0) \quad Q(u, 1)] \begin{bmatrix} C_{0,0}(w) \\ C_{0,1}(w) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$= P_b(u, w)$$

✓ Si $Q(u, 0)$ et $Q(u, 1)$ sont donnés par :

$$Q(u, 0) = C_{0,0}(u) Q(0,0) + C_{0,1}(u) Q(1,0) \quad (2.15)$$

$$Q(u, 1) = C_{0,0}(u) Q(0,1) + C_{0,1}(u) Q(1,1)$$

$$P(u, w) = [C_{0,0}(u) \quad C_{0,1}(u)] \begin{bmatrix} Q(0, w) \\ Q(1, w) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$= P_a(u, w)$$

✓ Si (2.13) et (2.15) sont satisfaits alors :

$$P(u, w) = [C_{0,0}(u) \quad C_{0,1}(u)] \begin{bmatrix} Q(0,0) & Q(0,1) \\ Q(1,0) & Q(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{0,0}(w) \\ C_{0,1}(w) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$= P_c(u, w)$$

5 - Le polynôme le plus simple qui satisfait les conditions (1) et (2) pour les fonctions de mélange de Coons est les quatre courbes limites que ces courbes sont la courbe de Ferguson. En effet CSP est identique avec le FSP. En fait, FSP est un cas particulier du CSP.

Validation :

Dans cet exemple, nous avons supposé que les courbes aux limites satisfont aux troisièmes conditions exposées dans (2.17).

Données :

$$Q_{00} = [0 \ 0 \ 0] \quad Q_{01} = [0 \ 1 \ 0] \quad Q_{10} = [1 \ 0 \ 0] \quad Q_{11} = [1 \ 1 \ 0]$$

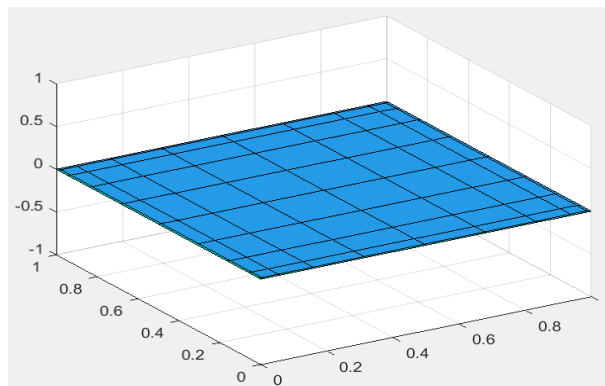


Figure 2. 6: Patch de surface Coons (C.S.P.64)

2.1.4 Les patches de surface Coons 67

En 1967, Coons a annoncé une généralisation de la formule annoncée en 1964, avec des termes de degré plus élevé ajoutés. Cette formule généralisée à la forme est la suivante (Yamaguchi,1988) :

$$\begin{aligned}
P(u, w) = & \sum_{i=0}^1 \sum_{r=0}^n C_{r,i}(u) Q^{r,0}(i, w) + \sum_{j=0}^1 \sum_{s=0}^n C_{s,j}(w) Q^{0,s}(u, j) \\
& - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n C_{r,i}(u) C_{s,j}(w) Q^{r,s}(i, j)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

D'où
$$Q^{a,b}(i, j) = \frac{\partial^{a+b}}{\partial u^a \partial w^b} Q(u, w) \Big|_{u=i, w=j}$$

Pour $(r, s = 0,1)$ cette formule peut être écrite sous forme matricielle comme:

$$P(u, w) = - \begin{bmatrix} -1 & C_{0,0}(u) & C_{0,1}(u) & C_{1,0}(u) & C_{1,1}(u) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & Q(u, 0) & Q(u, 1) & Q_w(u, 0) & Q_w(u, 1) \\ Q(0, w) & Q(0, 0) & Q(0, 1) & Q_w(0, 0) & Q_w(0, 1) \\ Q(1, w) & Q(1, 0) & Q(1, 1) & Q_w(1, 0) & Q_w(1, 1) \\ Q_u(0, w) & Q_u(0, 0) & Q_u(0, 1) & Q_{uw}(0, 0) & Q_{uw}(0, 1) \\ Q_u(1, w) & Q_u(1, 0) & Q_u(1, 1) & Q_{uw}(1, 0) & Q_{uw}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ C_{0,0}(w) \\ C_{0,1}(w) \\ C_{1,0}(w) \\ C_{1,1}(w) \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

- Conditions sur les fonctions de mélange

Les conditions $C_{0,0}$ et $C_{0,1}$ ont été données dans le CSP64.

1- Nous appliquons $C_{0,i}(j) = \delta_{i,j}$, $C_{1,i}(j) = 0$ ($i, j: 0,1$). ($\delta_{i,j}$: indice de Kronecker)

Si ces conditions sont satisfaites, alors le patch de surface coïncide avec des courbes données arbitrairement. C'est : $P(u, 0) = Q(u, 0)$, $P(u, 1) = Q(u, 1)$, $P(0, w) = Q(0, w)$, $P(1, w) = Q(1, w)$

2- Nous appliquons ensuite $C_{0,i}^*(j) = 0$, $C_{1,i}^*(j) = \delta_{i,j}$ ($i, j: 0,1$).

Si nous supposons que les vecteurs de dérivées partielles croisées sont déterminés de manière unique aux quatre coins, alors nous avons :

$$\begin{aligned}
P_w(u, 0) = Q_w(u, 0), P_w(u, 1) = Q_w(u, 1), P_u(0, w) = Q_u(0, w), P_u(1, w) = Q_u(1, w) \\
P_{u,w}(i, j) = Q_{u,w}(i, j) \quad (i, j: 0,1)
\end{aligned}$$

3- nous ajoutons ensuite la condition suivante : $C_{0,i}^{**}(j) = 0$, $C_{1,i}^{**}(j) = 0$ ($i, j: 0,1$).

Ceux-ci impliquent que le long des courbes limites, les seconds vecteurs dérivés par rapport aux directions des paramètres à travers ces courbes peuvent être exprimés en termes uniquement des seconds vecteurs dérivés et des seconds vecteurs de dérivée partielle croisés aux points d'extrémité.

Comme exemple pour $u = 0$, nous avons :

$$P_{uu}(0, w) = C_{0,0}(w) Q_{uu}(0, 0) + C_{0,1}(w) Q_{uu}(0, 1) + C_{1,0}(w) Q_{wuu}(0, 0) + C_{1,1}(w) Q_{wuu}(0, 1)$$

Par conséquent, si deux patches ont les mêmes vecteurs aux deux extrémités de la courbe limite, ils peuvent être connectés avec continuité jusqu'à la courbure.

4- Courbes limites :

Sur le CSP, les courbes aux limites peuvent être données arbitrairement ainsi :

Si nous supposons que les quatre courbes aux limites peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(0, w) &= C_{0,0}(w) \mathbf{Q}(0,0) + C_{0,1}(w) \mathbf{Q}(0,1) + C_{1,0}(w) \mathbf{Q}_w(0,0) + C_{1,1}(w) \mathbf{Q}_w(0,1) \\
\mathbf{Q}(1, w) &= C_{0,0}(w) \mathbf{Q}(1,0) + C_{0,1}(w) \mathbf{Q}(1,1) + C_{1,0}(w) \mathbf{Q}_w(1,0) + C_{1,1}(w) \mathbf{Q}_w(1,1) \\
\mathbf{Q}(u, 0) &= C_{0,0}(u) \mathbf{Q}(0,0) + C_{0,1}(u) \mathbf{Q}(1,0) + C_{1,0}(u) \mathbf{Q}_u(0,0) + C_{1,1}(u) \mathbf{Q}_u(1,0) \\
\mathbf{Q}(u, 1) &= C_{0,0}(u) \mathbf{Q}(0,1) + C_{0,1}(u) \mathbf{Q}(1,1) + C_{1,0}(u) \mathbf{Q}_u(0,1) + C_{1,1}(u) \mathbf{Q}_u(1,1)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(u, w) &= [C_{0,0}(u) \quad C_{0,1}(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(0,0) & \mathbf{Q}(0,1) \\ \mathbf{Q}(1,0) & \mathbf{Q}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{0,0}(w) \\ C_{0,1}(w) \end{bmatrix} \\
&- [-1 \quad C_{1,0}(u) \quad C_{1,1}(u)] \times \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{Q}_w(u, 0) & \mathbf{Q}_w(u, 1) \\ \mathbf{Q}_u(0, w) & \mathbf{Q}_{uw}(0,0) & \mathbf{Q}_{uw}(0,1) \\ \mathbf{Q}_u(1, w) & \mathbf{Q}_{uw}(1,0) & \mathbf{Q}_{uw}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ C_{1,0}(w) \\ C_{1,1}(w) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ensuite, si nous supposons que le vecteur tangent fonctionne dans les directions à travers les courbes limites peut être donné par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_u(0, w) &= C_{0,0}(w) \mathbf{Q}_u(0,0) + C_{0,1}(w) \mathbf{Q}_u(0,1) + C_{1,0}(w) \mathbf{Q}_{uw}(0,0) + C_{1,1}(w) \mathbf{Q}_{uw}(0,1) \\
\mathbf{Q}_u(1, w) &= C_{0,0}(w) \mathbf{Q}_u(1,0) + C_{0,1}(w) \mathbf{Q}_u(1,1) + C_{1,0}(w) \mathbf{Q}_{uw}(1,0) + C_{1,1}(w) \mathbf{Q}_{uw}(1,1) \\
\mathbf{Q}_w(u, 0) &= C_{0,0}(u) \mathbf{Q}_w(0,0) + C_{0,1}(u) \mathbf{Q}_w(1,0) + C_{1,0}(u) \mathbf{Q}_{uw}(0,0) + C_{1,1}(u) \mathbf{Q}_{uw}(1,0) \\
\mathbf{Q}_w(u, 1) &= C_{0,0}(u) \mathbf{Q}_w(0,1) + C_{0,1}(u) \mathbf{Q}_w(1,1) + C_{1,0}(u) \mathbf{Q}_{uw}(0,1) + C_{1,1}(u) \mathbf{Q}_{uw}(1,1)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(u, w) &= [C_{1,0}(u) \quad C_{1,1}(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{uw}(0,0) & \mathbf{Q}_{uw}(0,1) \\ \mathbf{Q}_{uw}(1,0) & \mathbf{Q}_{uw}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,0}(w) \\ C_{1,1}(w) \end{bmatrix} \\
&- [-1 \quad C_{0,0}(u) \quad C_{0,1}(u)] \times \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{Q}(u, 0) & \mathbf{Q}(u, 1) \\ \mathbf{Q}(0, w) & \mathbf{Q}(0,0) & \mathbf{Q}(0,1) \\ \mathbf{Q}(1, w) & \mathbf{Q}(1,0) & \mathbf{Q}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ C_{0,0}(w) \\ C_{0,1}(w) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Si (2.20) et (2.22) sont satisfaits ensemble alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(u, w) &= [C_{0,0}(u) \quad C_{0,1}(u) \quad C_{1,0}(u) \quad C_{1,1}(u)] \\
&\times \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(0,0) & \mathbf{Q}(0,1) & \mathbf{Q}_w(0,0) & \mathbf{Q}_w(0,1) \\ \mathbf{Q}(1,0) & \mathbf{Q}(1,1) & \mathbf{Q}_w(1,0) & \mathbf{Q}_w(1,1) \\ \mathbf{Q}_u(0,0) & \mathbf{Q}_u(0,1) & \mathbf{Q}_{uw}(0,0) & \mathbf{Q}_{uw}(0,1) \\ \mathbf{Q}_u(1,0) & \mathbf{Q}_u(1,1) & \mathbf{Q}_{uw}(1,0) & \mathbf{Q}_{uw}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{0,0}(w) \\ C_{0,1}(w) \\ C_{1,0}(w) \\ C_{1,1}(w) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

5- Le polynôme le plus simple qui satisfait les conditions de la fonction de mélange de Coons

- $H_{0,0}(t), H_{0,1}(t), H_{1,0}(t), H_{1,1}(t)$ jusqu' aux premières dérivées .

- $K_{0,0}(t), K_{0,1}(t), K_{1,0}(t), K_{1,1}(t)$, peut satisfaire la 2^{ème} dérivée.

- **Validation**

Dans cet exemple, nous avons supposé que les courbes aux limites satisfont aux troisièmes conditions.

Données :

- Position des vecteurs aux 4 coins :

$$\mathbf{Q}_{00} = [0 \ 0 \ 0] \quad \mathbf{Q}_{01} = [0 \ 1000 \ 0] \quad \mathbf{Q}_{10} = [1000 \ 0 \ 0] \quad \mathbf{Q}_{11} = [1000 \ 1000 \ 0]$$

- Vecteurs tangents aux 4 coins

$$\mathbf{Q}_{u00} = [1000 \ 0 \ 500] \quad \mathbf{Q}_{u01} = [1000 \ 0 \ 500] \quad \mathbf{Q}_{u10} = [1000 \ 0 \ 500] \quad \mathbf{Q}_{u11} = [1000 \ 0 \ 500]$$

$$\mathbf{Q}_{w00} = [0 \ 1000 \ 0] \quad \mathbf{Q}_{w01} = [0 \ 1000 \ 0] \quad \mathbf{Q}_{w10} = [0 \ 1000 \ 0] \quad \mathbf{Q}_{w11} = [0 \ 1000 \ 0]$$

- Vecteurs de torsion

$$\mathbf{Q}_{uw00} = [0 \ 0 \ 0] \quad \mathbf{Q}_{uw01} = [0 \ 0 \ 0] \quad \mathbf{Q}_{uw10} = [0 \ 0 \ 0] \quad \mathbf{Q}_{uw11} = [0 \ 0 \ 0]$$

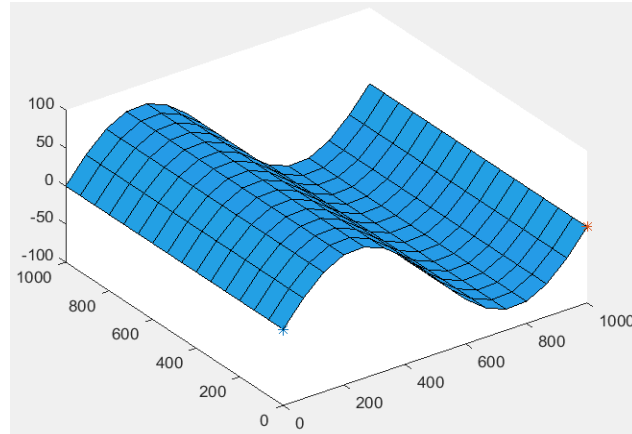


Figure 2. 7 : Patches de surface Coons 67

Conclusion

Ce type de courbes et de surfaces présente un certain nombre de problèmes lorsque l'utilisateur tente de modifier, contrôler ou concevoir une telle forme.

- 1- Il y a de nombreux points auxquels les données doivent être fournies, donc en grande quantité.
- 2- Il est difficile de prédire l'effet d'un vecteur tangent ou de torsion sur une courbe ou un patch de surface.
- 3- Le choix de l'amplitude optimale du vecteur tangent n'est pas précisé dans les articles de Ferguson et Coons.
- 4- Le contrôle de la forme a tendance à être difficile, car il dépend de nombreux facteurs, type de vecteurs, amplitudes.

2.2 MODELE SPLINE

Le terme Spline a été d'abord introduit en physique comme une règle élastique qui est libre de se plier. Ainsi, il prend la forme d'une courbe lisse passant par un point spécifié en attachant un nombre approprié de poids. En mathématiques, une Spline est une généralisation de la Spline physique qui est actuellement devenue un outil très important en analyse numérique et en conception assistée par ordinateur (CAO). (Böhm, 1977; Salomon,2006, Yamaguchi,1988)

2.2.1 Fonctions Spline

2.2.1.1 Définition

Une fonction Spline d'ordre M et de degré $m = M - 1$, ayant une suite croissante de nombres réels $x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ en tant que nœuds est une fonction $S(x)$ qui satisfait les deux conditions suivantes :

1. $S(x)$ est un polynôme de degré m au moins dans chaque intervalle (x_{i-1}, x_i)

$$(x_{-1} = -\infty, x_{n+1} = +\infty). i = 0, 1, 2, \dots, n + 1;$$

2. $S(x)$ et ses $1^{\text{ère}}, 2^{\text{ème}}, \dots, (m - 1)$ dérivées sont continués dans (x_{-1}, x_{n+1})

En fait, une fonction Spline se compose d'un certain nombre de polynômes qui sont définis séparément dans de petits intervalles et connectés ensemble aussi doucement possible. (Bartels, 1995)

2.2.1.2 Équation des fonctions Splines

Soit $S(x)$ une fonction Spline du $m^{\text{ème}}$ degré constitué de $n + 1$ polynômes dans l'intervalle.

$S(x)$ peut-être écrit dans chaque intervalle comme

$$S(x) = P_{m,0}(x) + \sum_{j=0}^i c_j (x - x_j)^m \quad (2.25)$$

Utilisation de la fonction puissance tronquée :

$$(x - x)_+^m = \begin{cases} (x - x_i)^m & (x > x_i) \\ 0 & (x \leq x_i) \end{cases} \quad (2.26)$$

Nous avons sur tout le domaine de x :

$$S(x) = P_{m,0}(x) + \sum_{i=0}^n c_i (x - x_i)^m \quad (2.27)$$

D'où : $c_i = \frac{1}{m!} [S^{(m)}(x_i + 0) - S^{(m)}(x_i - 0)]$

$S^{(m)}(x)$ est la dérivée d'ordre m de $S(x)$.

Une Spline de degré k est identiquement nulle dans les deux intervalles d'extrémité (x_{-1}, x_0) et (x_n, x_{n+1}) que l'on appelle une fonction C-Spline. Courbes paramétriques Splines cubiques

2.2.2 Courbes paramétriques Splines cubiques

Soit Q_0, Q_1, \dots, Q_n les vecteurs de position par lesquels passe une courbe Spline, constituée de n segments de courbe paramétrique P_i ($i = 1, 2, \dots, n$), avec continuité jusqu'à la courbure.

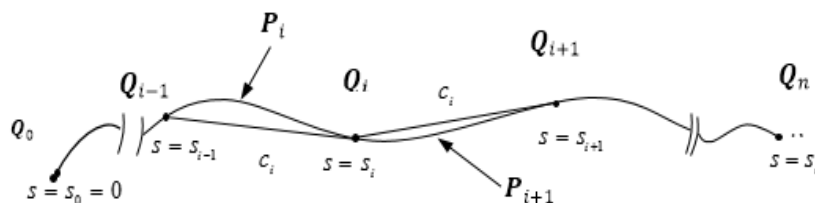


Figure 2.8 : Une courbe Spline cubique paramétrique.

Maintenant, considérons deux segments P_i et P_{i+1} reliant les trois points Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1} .
En utilisant la longueur s comme paramètre, P_i et P_{i+1} peuvent être exprimés par une formule cubique comme :

$$\begin{aligned} P_i(s) &= [s^3 \quad s^2 \quad s \quad 1] M_i \\ P_{i+1}(s) &= [s^3 \quad s^2 \quad s \quad 1] M_{i+1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Où M_i, M_{i+1} sont les matrices 4×3 .

Dérivant de l'expression (2.28) par rapport à s nous obtenons :

$$\begin{aligned} P'_i(s) &= [3s^2 \quad 2s \quad 1 \quad 0] M_i \\ P'_{i+1}(s) &= [3s^2 \quad 2s \quad 1 \quad 0] M_{i+1} \end{aligned} \quad (2.29)$$

On note les vecteurs tangents unitaires aux points Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1} respectivement par Q'_{i-1}, Q'_i, Q'_{i+1} .

Ensuite, à partir de (2.28) et (2.29) nous avons :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_{i-1} \\ Q_i \\ Q'_{i-1} \\ Q'_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s_{i-1}^3 & s_{i-1}^2 & s_{i-1} & 1 \\ s_i^3 & s_i^2 & s_i & 1 \\ 3s_{i-1}^2 & 2s_{i-1} & 1 & 0 \\ 3s_i^2 & 2s_i & 1 & 0 \end{bmatrix} M_i = N_i M_i \\ \begin{bmatrix} Q_i \\ Q_{i+1} \\ Q'_i \\ Q'_{i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s_i^3 & s_i^2 & s_i & 1 \\ s_{i+1}^3 & s_{i+1}^2 & s_{i+1} & 1 \\ 3s_i^2 & 2s_i & 1 & 0 \\ 3s_{i+1}^2 & 2s_{i+1} & 1 & 0 \end{bmatrix} M_{i+1} = N_{i+1} M_{i+1} \end{aligned} \quad (2.30)$$

En trouvant M_i et M_{i+1} à partir de (2.30) et en substituant dans (2.28), nous obtenons:

$$P_i(s) = [s^3 \quad s^2 \quad s \quad 1] N_i^{-1} \begin{bmatrix} Q_{i-1} \\ Q_i \\ Q'_{i-1} \\ Q'_i \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$P_{i+1}(s) = [s^3 \quad s^2 \quad s \quad 1] N_{i+1}^{-1} \begin{bmatrix} Q_i \\ Q_{i+1} \\ Q'_i \\ Q'_{i+1} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Où N_i^{-1} est donné par :

$$N_i^{-1} = \frac{1}{(s_i - s_{i-1})^3} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 & s_i - s_{i-1} & s_i - s_{i-1} \\ -3(s_{i-1} + s_i) & 3(s_{i-1} + s_i) & -(s_{i-1} + 2s_i)(s_i - s_{i-1}) & -(2s_{i-1} + s_i)(s_i - s_{i-1}) \\ 6s_i s_{i-1} & -6s_i s_{i-1} & s_i(2s_{i-1} + s_i)(s_i - s_{i-1}) & s_{i-1}(s_{i-1} + 2s_i)(s_i - s_{i-1}) \\ s_i^2(s_i - 3s_{i-1}) & s_{i-1}^2(3s_i - s_{i-1}) & -s_{i-1}s_i^2(s_i - s_{i-1}) & -s_{i-1}^2s_i(s_i - s_{i-1}) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

N_{i+1}^{-1} est obtenu par substitutions dans N_i^{-1} par 1

Ensuite, nous calculons les vecteurs de courbure des deux côtés de $s = s_i$

$$P''_i(s_i) = [6s_i \quad 2 \quad 0 \quad 0] N_i^{-1} \begin{bmatrix} Q_{i-1} \\ Q_i \\ Q'_{i-1} \\ Q'_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_i''(s_i) = \frac{2}{(s_i - s_{i-1})^2} \begin{bmatrix} 3 & -3 & s_i - s_{i-1} & 2(s_i - s_{i-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{i-1} \\ \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{Q}'_{i-1} \\ \mathbf{Q}'_i \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{P}_{i+1}''(s_i) = \frac{2}{(s_{i+1} - s_i)^2} \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2(s_{i+1} - s_i) & -(s_{i+1} - s_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{Q}_{i+1} \\ \mathbf{Q}'_i \\ \mathbf{Q}'_{i+1} \end{bmatrix}$$

Si nous supposons \mathbf{P}_i et \mathbf{P}_{i+1} ayant la même courbure à $s = s_i$, alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (s_{i+1} - s_i)\mathbf{Q}'_{i-1} + 2(s_{i+1} - s_{i-1})\mathbf{Q}'_i + (s_i - s_{i-1})\mathbf{Q}'_{i+1} \\ &= \frac{3}{(s_i - s_{i-1})(s_{i+1} - s_i)} \{ (s_i - s_{i-1})^2 (\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i) + (s_{i+1} - s_i)^2 (\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}) \} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Cette équation exprime la condition de continuité de courbure. $\begin{cases} s_i - s_{i-1} \approx c_i \\ s_{i+1} - s_i \approx c_{i+1} \end{cases}$

Si nous supposons que la longueur s est approximée par la longueur de la corde.

Alors (2.35) devient :

$$c_{i+1}\mathbf{Q}'_{i-1} + 2(c_{i+1} + c_i)\mathbf{Q}'_i + c_i\mathbf{Q}'_{i+1} = \frac{3}{c_i c_{i+1}} \{ c_i^2 (\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i) + c_{i+1}^2 (\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}) \} \quad (2.36)$$

($1 \leq i \leq n-1$).

En utilisant la transformation de paramètre suivante :

$$\begin{cases} s = s_{i-1} + (s_i - s_{i-1})t. \\ (0 \leq t \leq 1) ; (s_{i-1} \leq s \leq s_i), \end{cases}$$

Pour le $i^{\text{ème}}$ segment de courbe $\mathbf{P}_i(s)$ donne

$$\mathbf{P}_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{i-1} \\ \mathbf{Q}_i \\ (s_i - s_{i-1})\mathbf{Q}'_{i-1} \\ (s_i - s_{i-1})\mathbf{Q}'_i \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{P}_i(t) = [H_{0,0}(t) \quad H_{0,1}(t) \quad H_{1,0}(t) \quad H_{1,1}(t)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{i-1} \\ \mathbf{Q}_i \\ c_i \mathbf{Q}'_{i-1} \\ c_i \mathbf{Q}'_i \end{bmatrix}$$

Exprimé en termes de vecteurs tangents, cela devient :

$$\mathbf{P}_i(t) = [H_{0,0}(t) \quad H_{0,1}(t) \quad H_{1,0}(t) \quad H_{1,1}(t)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{i-1} \\ \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{Q}'_{i-1} \\ \mathbf{Q}'_i \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Validation :

$$\mathbf{Q}_x = [100 \ 200 \ 300 \ 400 \ 200 \ 600]$$

$$\mathbf{Q}_y = [200 \ 185 \ 117 \ 248 \ 400 \ 300]$$

$$\mathbf{Q}_z = [50 \ 110 \ 220 \ 330 \ 450 \ 650]$$

Vecteurs tangents aux extrémités :

$$\mathbf{Q}_{1s} = [0 \ 0 \ 1]$$

$$\mathbf{Q}_{ds} = [0 \ 1 \ 0]$$

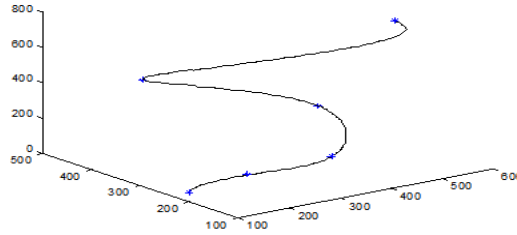


Figure 2.9 : Courbe Spline

2.2.3 Surfaces Splines

La méthode utilisée pour générer des courbes Spline peut être également utilisée pour générer des surfaces Spline, avec continuité jusqu'à la courbure.

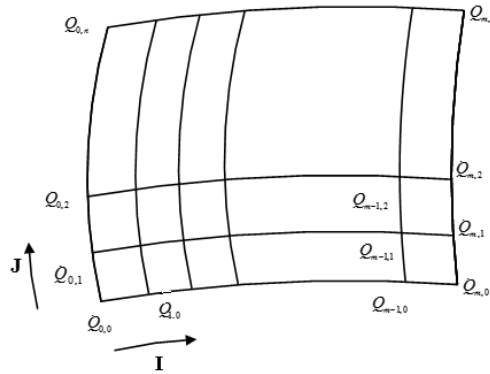


Figure 2.10 : Génération de surface spline

Soit $(i = 0,1, \dots, m; j = 0,1, \dots, n)$ un réseau de points $(i = 0,1, \dots, m; j = 0,1, \dots, n)$ et la longueur de corde respectivement dans les directions I, J . En utilisant l'équation (2.23) pour un patch de surface **Coons67** avec des fonctions d'interpolation Hermite comme fonctions de fusion, la surface Spline peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
 P_{ij}(u, w) &= [H_{0,0}(u) \quad H_{0,1}(u) \quad H_{1,0}(u) \quad H_{1,1}(u)] \\
 &\times \begin{bmatrix} Q_{i-1,j-1} & Q_{i-1,j} & Q_{w,i-1,j-1} & Q_{w,i-1,j} \\ Q_{i,j-1} & Q_{i,j} & Q_{w,i,j-1} & Q_{w,i,j} \\ Q_{u,i-1,j-1} & Q_{u,i-1,j} & Q_{uw,i-1,j-1} & Q_{uw,i-1,j} \\ Q_{u,i,j-1} & Q_{u,i,j} & Q_{uw,i,j-1} & Q_{uw,i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{0,0}(w) \\ H_{0,1}(w) \\ H_{1,0}(w) \\ H_{1,1}(w) \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{U} \mathbf{M}_c \\
 &\times \begin{bmatrix} Q_{i-1,j-1} & Q_{i-1,j} & Q_{w,i-1,j-1} & Q_{w,i-1,j} \\ Q_{i,j-1} & Q_{i,j} & Q_{w,i,j-1} & Q_{w,i,j} \\ Q_{u,i-1,j-1} & Q_{u,i-1,j} & Q_{uw,i-1,j-1} & Q_{uw,i-1,j} \\ Q_{u,i,j-1} & Q_{u,i,j} & Q_{uw,i,j-1} & Q_{uw,i,j} \end{bmatrix} \mathbf{M}_c^T \mathbf{W}^T
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{U} \mathbf{M}_c \\
&\times \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{i-1,j-1} & \mathbf{Q}_{i-1,j} & k_j \mathbf{Q}_{J,i-1,j-1} & k_j \mathbf{Q}_{J,i-1,j} \\ \mathbf{Q}_{i,j-1} & \mathbf{Q}_{i,j} & k_j \mathbf{Q}_{J,i,j-1} & k_j \mathbf{Q}_{J,i,j} \\ h_i \mathbf{Q}_{I,i-1,j-1} & h_i \mathbf{Q}_{I,i-1,j} & h_i k_j \mathbf{Q}_{IJ,i-1,j-1} & h_i k_j \mathbf{Q}_{IJ,i-1,j} \\ h_i \mathbf{Q}_{I,i,j-1} & h_i \mathbf{Q}_{I,i,j} & h_i k_j \mathbf{Q}_{IJ,i,j-1} & h_i k_j \mathbf{Q}_{IJ,i,j} \end{bmatrix} \mathbf{M}_c^T \mathbf{W}^T \quad (2.40) \\
&= \mathbf{U} \mathbf{M}_c \\
&\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{i-1,j-1} & \mathbf{Q}_{i-1,j} & \mathbf{Q}_{J,i-1,j-1} & \mathbf{Q}_{J,i-1,j} \\ \mathbf{Q}_{i,j-1} & \mathbf{Q}_{i,j} & \mathbf{Q}_{J,i,j-1} & \mathbf{Q}_{J,i,j} \\ \mathbf{Q}_{I,i-1,j-1} & \mathbf{Q}_{I,i-1,j} & \mathbf{Q}_{IJ,i-1,j-1} & \mathbf{Q}_{IJ,i-1,j} \\ \mathbf{Q}_{I,i,j-1} & \mathbf{Q}_{I,i,j} & \mathbf{Q}_{IJ,i,j-1} & \mathbf{Q}_{IJ,i,j} \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_j \end{bmatrix} \mathbf{M}_c^T \mathbf{W}^T
\end{aligned}$$

D'où : $\mathbf{U} = [u^3 \ u^2 \ u \ 1]$, $\mathbf{W} = [w^3 \ w^2 \ w \ 1]$ et $\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- **Conditions de continuité de courbure**

Les conditions de continuité de courbure peuvent être exprimées par les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
h_{i+1} \mathbf{Q}_{I,i-1,j} + 2(h_{i+1} + h_i) \mathbf{Q}_{I,i,j} + h_i \mathbf{Q}_{I,i+1,j} &= \frac{3}{h_{i+1} h_i} \{h_i^2 (\mathbf{Q}_{I,i+1,j} - \mathbf{Q}_{I,i,j}) + h_{i+1}^2 (\mathbf{Q}_{I,i,j} - \mathbf{Q}_{I,i-1,j})\} \\
(i = 1, 2, \dots, m-1; j = 0, 1, \dots, n) \\
k_{j+1} \mathbf{Q}_{J,i,j-1} + 2(k_{j+1} + k_j) \mathbf{Q}_{J,i,j} + k_j \mathbf{Q}_{J,i,j+1} &= \frac{3}{k_j k_{j+1}} \{k_j^2 (\mathbf{Q}_{J,i,j+1} - \mathbf{Q}_{J,i,j}) + k_{j+1}^2 (\mathbf{Q}_{J,i,j} - \mathbf{Q}_{J,i,j-1})\} \\
(i = 0, 1, \dots, m; j = 1, \dots, n-1) \\
k_{j+1} \mathbf{Q}_{IJ,0,j-1} + 2(k_{j+1} + k_j) \mathbf{Q}_{IJ,0,j} + k_j \mathbf{Q}_{IJ,0,j+1} &= \frac{3}{k_j k_{j+1}} \{k_j^2 (\mathbf{Q}_{I,0,j+1} - \mathbf{Q}_{I,0,j}) + k_{j+1}^2 (\mathbf{Q}_{I,0,j} - \mathbf{Q}_{I,0,j-1})\} \\
j = (1, \dots, n-1) \\
h_{i+1} \mathbf{Q}_{IJ,i-1,j} + 2(h_{i+1} + h_i) \mathbf{Q}_{IJ,i,j} + h_i \mathbf{Q}_{IJ,i+1,j} &= \frac{3}{h_{i+1} h_i} \{h_i^2 (\mathbf{Q}_{J,i+1,j} - \mathbf{Q}_{J,i,j}) + h_{i+1}^2 (\mathbf{Q}_{J,i,j} - \mathbf{Q}_{J,i-1,j})\} \\
(i = 1, 2, \dots, m-1; j = 0, 1, \dots, n) \quad (2.41)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{Q}_{I,i,j}$: est le vecteur dérivé au point par rapport à la longueur de la courbe dans la direction I .
- $\mathbf{Q}_{IJ,i,j}$; est le vecteur de dérivée partielle croisée par rapport aux longueurs de courbe dans les directions I et J au point $\mathbf{Q}_{i,j}$.

Les équations (2.41) permettent de déterminer tous les vecteurs tangents unitaires dans les directions I et J , ainsi que la détermination tous les vecteurs de dérivées partielles croisées. Pour déterminer tous les patchs Spline, il est nécessaire d'ajouter des conditions pour les vecteurs tangents unitaires dans les directions I et J aux points de départ et d'arrivée et de spécifier les vecteurs de dérivée partielle croisée aux quatre coins.

- **Validation:** Données:
- Vecteurs Position $\mathbf{Q}_{i,j}$:

$$\begin{bmatrix} (0,0,1) & (0,1,1) & (0,2,1) & (0,3,1) & (0,4,1) & (0,5,1) & (0,6,1) \\ (1,0,0) & (1,1,0) & (1,2,0) & (1,3,0) & (1,4,0) & (1,5,0) & (1,6,0) \\ (2,0,2) & (2,1,2) & (2,2,2) & (2,3,2) & (2,4,2) & (2,5,2) & (2,6,2) \\ (3,0,4) & (3,1,4) & (3,2,4) & (3,3,4) & (3,4,4) & (3,5,4) & (3,6,4) \\ (4,0,3) & (4,1,3) & (4,2,3) & (4,3,3) & (4,4,3) & (4,5,3) & (4,6,3) \\ (5,0,2) & (5,1,2) & (5,2,2) & (5,3,2) & (5,4,2) & (5,5,2) & (5,6,2) \\ (6,0,3) & (6,1,3) & (6,2,3) & (6,3,3) & (6,4,3) & (6,5,3) & (6,6,3) \end{bmatrix}$$

- Conditions sur les vecteurs unitaires tangents aux points de départ et d'arrivée.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{I,1,j} &= (1,0,0) & \mathbf{Q}_{I,m+1,j} &= (1,0,0) \\ \mathbf{Q}_{J,i,1} &= (1,0,0) & \mathbf{Q}_{J,i,n+1} &= (1,0,0) \end{aligned}$$

- Conditions sur les vecteurs de torsion :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{IJ,1,1} &= (0,0,0) & \mathbf{Q}_{IJ,m+1,1} &= (0,0,0) \\ \mathbf{Q}_{IJ,1,n+1} &= (0,0,0) & \mathbf{Q}_{IJ,m+1,n+1} &= (0,0,0) \end{aligned}$$

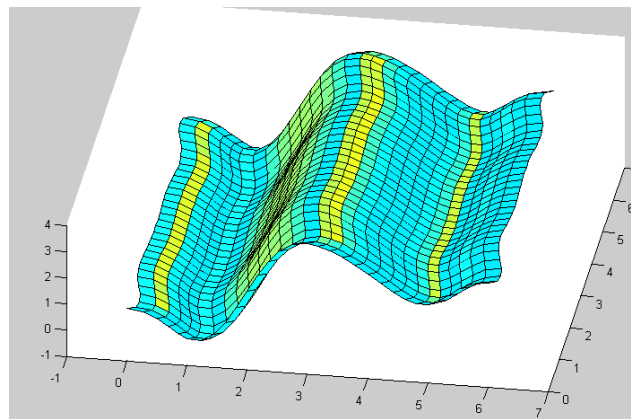


Figure 2. 11 : Surface Spline

2.3 LE MODELE DE BEZIER

Dans cette partie, nous exposons le modèle de Bézier qui surmonte certains problèmes pris en compte dans la contrôlabilité des courbes et des surfaces d'interpolation (Léon,1991, Yamaguchi,1988).

2.3.1 Courbes

- **Modification du segment de courbe de Ferguson cubique (Approximation de Bernstein)**

Soit un segment de courbe d'interpolation d'Hermite cubique, défini par deux vecteurs position, et deux vecteurs tangents (**Figure 2.12**)

$$P(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}'_0 \\ \mathbf{Q}'_1 \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.42)$$

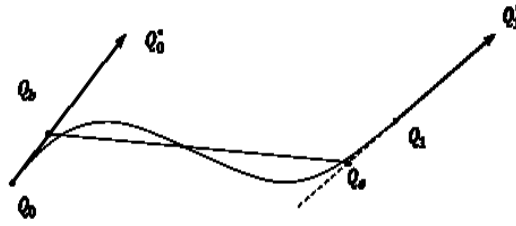


Figure 2. 12 : modification du Segment de courbe de Ferguson

- Q_b et Q_e sont deux vecteurs de position liés à Q_0, Q_1, Q_0^*, Q_1^* par les formules suivantes :

$$\begin{cases} Q_b = Q_0 + \frac{1}{p} Q_0^* \\ Q_e = Q_1 - \frac{1}{p} Q_1^* \end{cases} \quad (2.43)$$

La substitution de ces équations (2.42) donne :

$$P(t) = [X_0(t) \quad X_1(t) \quad X_2(t) \quad X_3(t)] \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_b \\ Q_e \\ Q_1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

D'où :

$$\begin{cases} X_0(t) = (1-t)^2(1+(2-p)t) \\ X_1(t) = pt(1-t)^2 \\ X_2(t) = pt^2(1-t) \\ X_3(t) = t^2(3-p+(-2+p)t) \end{cases}$$

La valeur optimale de p , qui permet à la courbe d'exister toujours à l'intérieur et plus près du polygone convexe formé par Q_0, Q_b, Q_e, Q_1 , est déterminée en résolvant les inégalités suivantes:

$$X_0(t) \geq 0, X_1(t) \geq 0, X_2(t) \geq 0, X_3(t) \geq 0. \text{ si est } p = 3$$

On change la notation du sommet du polygone comme suit:

$$\begin{cases} Q_0 = Q_0 \\ Q_b = Q_1 \\ Q_e = Q_2 \\ Q_1 = Q_3 \end{cases}$$

En substituant la valeur optimale de p et en utilisant la nouvelle notation de (2.44), nous obtenons:

$$\begin{aligned} P(t) &= [X_0(t) \quad X_1(t) \quad X_2(t) \quad X_3(t)] \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^3 X_i(t) Q_i \\ &= [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] M_B \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Avec :

$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Cette équation est appelée un segment de courbe de Bézier cubique, les vecteurs de position qui la définissent sont appelés polygone définissant une courbe, polygone caractéristique ou polygone de Bézier.

2.3.2 Formule générale

Si nous considérons les fonctions $X_i(t)$ de mélange de la formule cubique, nous vérifions que ce ne sont que les termes de l'expression binomiale $[(1-t) + t]^3$

$$X_i(t) = \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i \quad (2.47)$$

Si nous changeons 3 par n , nous obtenons la formule plus générale de la courbe de Bézier (Bezier,1971; Léon, 1991, Yamaguchi,1988):

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i Q_i \\ &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) Q_i \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (2.48)$$

$B_{i,n}(t)$: sont les fonctions de base de Bernstein.

2.3.3 Relations récursives entre les fonctions de base de Bernstein

Une première relation de récurrence exprime les polynômes de Bernstein au même degré en termes de polynômes de Bernstein $(m-1)^{\text{ème}}$ degré, elle peut s'écrire:

$$\begin{aligned} B_{i,m}(u) &= u B_{i-1,m-1}(u) + (1-u) B_{i,m-1}(u) \quad \forall u \in [0,1], \\ B_{0,m}(u) &= (1-u) B_{0,m-1}(u), \quad i \in \{1,2, \dots, (m-1)\} \\ B_{m,m}(u) &= u B_{m-1,m-1}(u) \end{aligned}$$

La seconde relation relie les dérivées des polynômes de Bernstein même aux polynômes de $(m-1)^{\text{ème}}$ degré.

$$\begin{aligned} \frac{dB_{im}}{du}(u) &= m(B_{i-1,m-1}(u) - B_{i,m-1}(u)), \quad i \in \{1,2, \dots, (m-1)\} \\ \frac{dB_{0m}}{du}(u) &= -m B_{0,m-1}(u). \quad \forall u \in [0,1], \\ \frac{dB_{mm}}{du}(u) &= m B_{m-1,m-1}(u). \end{aligned}$$

2.3.3.1 Formule des vecteurs tangents et des vecteurs dérivés secondes

Le $r^{\text{ème}}$ vecteur dérivé d'une courbe de Bézier peut être exprimé en termes de différences finies comme:

$$\frac{d^r P(t)}{dt^r} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} B_{i,n-r}(t) \Delta^r Q_i \quad (2.49)$$

D'où

$$\Delta^r Q_i = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} Q_{i+j} \quad (2.50)$$

Pour les vecteurs tangents aux extrémités, nous avons :

$$- \quad A \quad t = 0: \quad \dot{P}(0) = n(Q_1 - Q_0) \quad (2.51)$$

$$- \quad A \quad t = 1: \quad \dot{P}(1) = n(Q_n - Q_{n-1}) \quad (2.52)$$

Pour les vecteurs dérivés seconde, nous avons :

$$- \quad A \quad t = 0: \quad \ddot{P}(0) = n(n-1)(Q_2 - 2Q_1 + Q_0) \quad (2.53)$$

$$- \quad A \quad t = 1: \quad \ddot{P}(1) = n(n-1)(Q_n - 2Q_{n-1} + Q_{n-2}) \quad (2.54)$$

2.3.3.2 Connexion

Soit $P_I(t)$ et $P_{II}(t)$ soit deux segments de courbe de Bézier connectés ($0 \leq t \leq 1$):

$$P_I(t) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (1-t)^{m-i} t^i Q_{I,i} \quad (2.55)$$

$$P_{II}(t) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (1-t)^{n-j} t^j Q_{II,j} \quad (2.56)$$

Les équations dérivées, les conditions de connexion et de continuité jusqu'à la courbure sont exprimées par les équations suivantes :

- Condition de continuité de position :

$$Q_{II,0} = Q_{I,m} \quad (2.57)$$

- Condition de continuité de pente :

$$\frac{n}{\alpha_2} (Q_{II,1} - Q_{II,0}) = \frac{m}{\alpha_1} (Q_{I,m} - Q_{I,m-1}) \quad (2.58)$$

- Condition de continuité de courbure : Condition de continuité de pente :

$$Q_{II,2} - Q_{I,m} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 (Q_{I,m-2} - Q_{I,m-1}) + \left[\frac{m(m-1)}{n(n-1)} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 + \frac{2m}{n} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{m}{n(n-1)} \beta \right] (Q_{I,m} - Q_{I,m-1}) \quad (2.59)$$

- **Validation :**

- Les points de contrôle :

$$P_0(0,1) ; P_1(1,2) ; P_2(2,4) ; P_3(3,6) ; P_4(4,2) ; P_5(5,10) ; P_6(6,12) ;$$

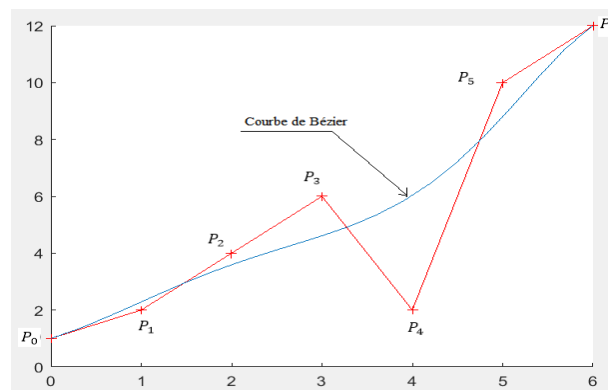


Figure 2.13 : Courbe de Bézier

- La courbe de Bézier interpole le point de départ P_0 et le point d'arrivée P_6

2.3.4 Surfaces

2.3.4.1 Patch de surface de Bézier

Le patch de surface de Bézier est une surface de produit cartésien (produit tensoriel) qui peut être exprimée par :

$$\mathbf{P}(u, w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{i,m}(u) B_{j,n}(w) \mathbf{Q}_{i,j} \quad 0 \leq u, w \leq 1 \quad (2.60)$$

Sous forme matricielle, nous avons :

$$\mathbf{P}(u, w) = [B_{0,m}(u) \quad B_{1,m}(u) \quad \dots \quad B_{m,m}(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} & \dots & \mathbf{Q}_{0n} \\ \mathbf{Q}_{10} & \mathbf{Q}_{11} & \dots & \mathbf{Q}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Q}_{m0} & \mathbf{Q}_{m1} & \dots & \mathbf{Q}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,n}(w) \\ \vdots \\ B_{n,n}(w) \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$\mathbf{Q}_{i,j}$ est appelé réseau définissant la surface, réseau de Bézier ou réseau caractéristique.

Comme les 4 courbes limites du patch de la surface de Bézier sont des segments de courbe de Bézier, les 4 points d'angle de la surface doivent être en accord avec le correspondant du réseau définissant la surface.

$$\mathbf{P}(0,0) = \mathbf{Q}_{00}, \quad \mathbf{P}(0,1) = \mathbf{Q}_{0n}, \quad \mathbf{P}(1,0) = \mathbf{Q}_{m0}, \quad \mathbf{P}(1,1) = \mathbf{Q}_{mn},$$

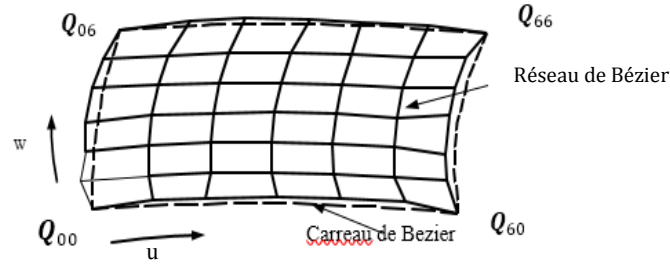


Figure 2.14 : Surface de Bézier ($m = n = 6$)

2.3.4.2 Connexion des patchs de surface bi-cubiques de Bézier

soient $\mathbf{P}_I(u, w)$ et $\mathbf{P}_{II}(u, w)$ deux zones de surface de Bézier bi-cubiques connectées traversant la courbe limite $u = 0$ de $\mathbf{P}_{II}(u, w)$ et $u = 1$ la courbe limite de $\mathbf{P}_I(u, w)$.

$$\mathbf{P}_I(u, w) = [u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1] \mathbf{M}_B B_{B,I} \mathbf{M}_B^T [w^3 \quad w^2 \quad w \quad 1]^T \quad (0 \leq u, w \leq 1) \quad (2.62)$$

$$\mathbf{P}_{II}(u, w) = [u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1] \mathbf{M}_B B_{B,II} \mathbf{M}_B^T [w^3 \quad w^2 \quad w \quad 1]^T \quad (0 \leq u, w \leq 1) \quad (2.63)$$

La condition de continuité de position est exprimée par :

$$\mathbf{P}_I(1, w) = \mathbf{P}_{II}(0, w) \quad (2.64)$$

Alors :

$$[1 \ 1 \ 1 \ 1] \mathbf{M}_B \mathbf{B}_{B,I} \mathbf{M}_B^T [w^3 \ w^2 \ w \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{M}_B \mathbf{B}_{B,II} \mathbf{M}_B^T [w^3 \ w^2 \ w \ 1]^T \quad (2.65)$$

Après avoir élargi et simplifié, nous obtenons :

$$\mathbf{Q}_{II,0i} = \mathbf{Q}_{I,3i} \quad (i = 0,1,2,3) \quad (2.66)$$

Cela signifie que les deux patches de surface doivent avoir les mêmes vecteurs de définition pour les courbes liées aux limites.

La continuité de la pente est donnée :

$$\mathbf{P}_{II,u}(0, w) = \mu(w) \mathbf{P}_{I,u}(1, w) + \lambda(w) \mathbf{P}_{I,w}(1, w) \quad (2.67)$$

Validation :

Données des Réseaux de Bézier :

(0,0,0)	(0,1,0)	(0,2,0)	(0,3,0)	(0,4,0)	(0,5,0)	(0,6,0)
(1,0,0)	(1,1,0)	(1,2,0)	(1,3,0)	(1,4,0)	(1,5,0)	(1,6,0)
(2,0,1)	(2,1,1)	(2,2,1)	(2,3,1)	(2,4,1)	(2,5,1)	(2,6,1)
(3,0,1)	(3,1,1)	(3,2,1)	(3,3,1)	(3,4,1)	(3,5,1)	(3,6,1)
(4,0,1)	(4,1,1)	(4,2,1)	(4,3,1)	(4,4,1)	(4,5,1)	(4,6,1)
(5,0,1)	(5,1,1)	(5,2,1)	(5,3,1)	(5,4,1)	(5,5,1)	(5,6,1)
(6,0,1)	(6,1,1)	(6,2,1)	(6,3,1)	(6,4,1)	(6,5,1)	(6,6,1)

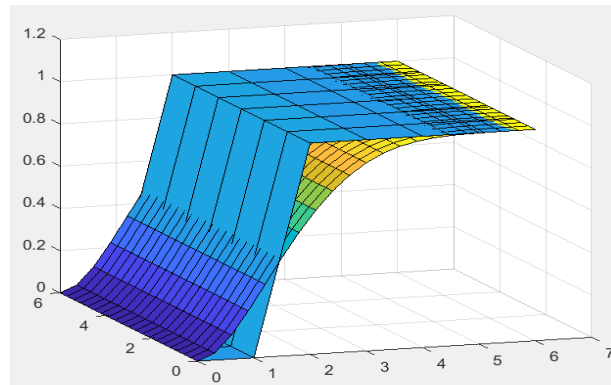


Figure 2. 15 : Surface de Bézier

Conclusion :

Les propriétés les plus intéressantes des courbes et des surfaces de Bézier sont définies par des vecteurs de position facile à comprendre intuitivement lors du contrôle des formes de courbes et de surfaces. Elles conservent également les principales caractéristiques des formes de leur courbe définissant les polygones et la surface définissant le lissage. Un problème avec le modèle Bézier est celui du contrôle de connexion. Résoudre les problèmes de connexion théoriquement est possible, mais lors du contrôle de la forme, la maîtrise de conditions de continuité devient compliquée.

2.4 LE MODELE B-SPLINE

Dans cette section, nous exposons un modèle important des courbes et des surfaces, qui surmonte les difficultés de connexion rencontrées avec les modèles de Ferguson et de Bézier. Ce modèle est appelé modèle B-Spline (Yamaguchi,1988 ; Salomon,2006).

2.4.1 Courbes

2.4.1.1 Fonctions B-spline

- Définition :

La fonction suivante à 2 variables de t et u :

$$M(t; u) = (u - t)_+^{M-1} = \begin{cases} (u - t)^{M-1} & (u \geq t) \\ 0 & (u < t) \end{cases} \quad (2.68)$$

Définir une fonction de différence divisée d'ordre $M_{j,M}(t)$ par rapport à la variable u basée sur t_0, t_1, \dots, t_n :

$$M_{j,M}(t) = M[t; t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+M}] = \frac{(t - t_j)_+^{M-1}}{(t_j - t_{j+1})(t_j - t_{j+2}) \dots (t_j - t_{j+M})} + \frac{(t_{j+1} - t)_+^{M-1}}{(t_{j+1} - t_j)(t_{j+1} - t_{j+2}) \dots (t_{j+1} - t_{j+M})} + \dots + \frac{(t_{j+M} - t)_+^{M-1}}{(t_{j+M} - t_j)(t_{j+M} - t_{j+1}) \dots (t_{j+M} - t_{j+M-1})} \quad (269)$$

Avec $j = 0, 1, \dots, n - M$

La fonction $M_{j,M}(t)$ est appelée fonction B-spline d'ordre M .

Nous pouvons facilement démontrer qu'une fonction B-spline est un cas particulier d'une C-spline (voir la section 2.2).

Dans les applications pratiques, nous utilisons des fonctions B-spline normalisées $N_{j,M}(t)$ données par:

$$N_{j,M} = (t_{j+M} - t_j)M_{j,M}(t) = M[t; t_{j+1}, \dots, t_{j+M}] - M[t; t_j, \dots, t_{j+M-1}] \quad (2.70)$$

$M_{j,M}(t)$ et $N_{j,M}(t)$ n'ont aucun sens $t = t_j$ avec $M = 1$.

Nous définissons donc :

$$M_{j,1}(t) = \begin{cases} (t_{j+1} - t_j)^{-1} & (t_j \leq t < t_{j+1}) \\ 0 & (\text{si non}) \end{cases} \quad (2.71)$$

$$N_{j,1}(t) = \begin{cases} 1 & (t_j \leq t < t_{j+1}) \\ 0 & (\text{si non}) \end{cases}$$

Propriétés

1- " B " dans la fonction B-spline représente la base. Cela fait référence à la propriété importante qu'une C-spline arbitraire de degré $M - 1$ ayant des nœuds t_0, t_1, \dots, t_n peut être exprimée de manière unique comme une combinaison linéaire de B-splines $n - M + 1$.

$$S(t) = \sum_{j=0}^{n-M} c_j N_{j,M}(t) \quad (2.72)$$

2- Considérons le cas dans lequel des nœuds $M - 1$ sont ajoutés aux deux extrémités des nœuds $t_0, t_1, \dots, t_n, t_{-(M-1)}, \dots, t_{-1}$ qui sont appelés nœuds intérieurs et $t_{n+1}, \dots, t_{n+M-1}$ ils sont appelés nœuds supplémentaires.

On peut montrer qu'une fonction Spline arbitraire $S(t)$ de degré $M - 1$, ayant des nœuds intérieurs comme nœuds, peut être exprimée uniquement comme une combinaison linéaire des fonctions $n + M - 1$ B-Spline déterminées par des nœuds étendus.

$$S(t) = \sum_{j=0}^{n+M-2} c_j N_{j,M}(t) \quad (2.73)$$

3- Les relations suivantes sont valables pour les fonctions B-splines.

$$M_{j,M}(t) = \frac{t-t_j}{t_{j+M}-t_j} M_{j,M-1}(t) + \frac{t_{j+M}-t}{t_{j+M}-t_{j+1}} M_{j+1,M-1}(t) \quad (2.74)$$

$$N_{j,M}(t) = \frac{t-t_j}{t_{j+M-1}-t_j} N_{j,M-1}(t) + \frac{t_{j+M}-t}{t_{j+M}-t_{j+1}} N_{j+1,M-1}(t) \quad (2.75)$$

Ces formules sont utilisées pour calculer récursivement les fonctions B-spline. Donc, si l'ordre M et t_0, t_1, \dots les nœuds sont spécifiés, les fonctions B-spline $N_{j,M}(t)$ peuvent être trouvées à partir des formules suivantes (2.71) et (2.75) :

$$N_{j,1}(t) = \begin{cases} 1 & (t_j \leq t < t_{j+1}) \\ 0 & (\text{si non}) \end{cases}$$

Pour le cas $M > 1$ nous avons :

$$N_{j,M}(t) = \frac{t-t_j}{t_{j+M-1}-t_j} N_{j,M-1}(t) + \frac{t_{j+M}-t}{t_{j+M}-t_{j+1}} N_{j+1,M-1}(t)$$

Remarque :

Les nœuds multiples sont permis avec la convention que $0/0=0$

2.4.1.2 Dérivation de la courbe B-Spline cubique uniforme

Soit $(n + 1)$ vecteurs de position qui construisent une courbe définissant un polygone et considérons le segment de courbe $(n - 2)$:

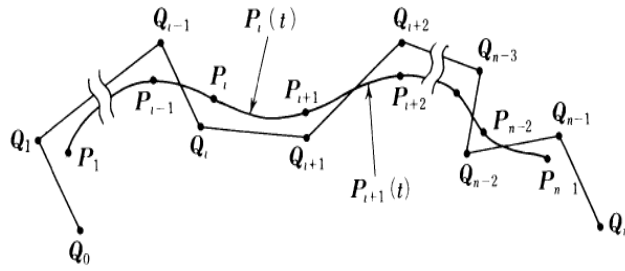


Figure 2. 16 : Dérivation d'une courbe B-Spline ($M = 4$)

$$P_i(t) = X_0(t)Q_{i-1} + X_1(t)Q_i + X_2(t)Q_{i+1} + X_3(t)Q_{i+2} \quad (2.76)$$

Où $X_0(t), \dots, X_3(t)$ sont les polynômes cubiques de paramètre t ($0 \leq t \leq 1$) qui satisfait la condition de Cauchy.

$$X_0(t) + X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) = 1 \quad (2.77)$$

Ensuite, en supposant des conditions de continuité jusqu'à courbure entre deux segments de courbe voisins $P_i(t)$ et $P_{i+1}(t)$ pour tous Q_j ($j = i - 1, i, \dots, i + 3$):

- Condition de continuité de position:

$$\left. \begin{array}{l} X_0(1) = X_3(0) = 0 \\ X_1(1) = X_0(0) \\ X_2(1) = X_1(0) \\ X_3(1) = X_2(0) \end{array} \right\} \quad (2.78)$$

- Condition de continuité de pente:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{X}_0(1) = \dot{X}_3(0) = 0 \\ \dot{X}_1(1) = \dot{X}_0(0) \\ \dot{X}_2(1) = \dot{X}_1(0) \\ \dot{X}_3(1) = \dot{X}_2(0) \end{array} \right\} \quad (2.79)$$

- Condition de continuité de courbure:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{X}_0(1) = \ddot{X}_3(0) = 0 \\ \ddot{X}_1(1) = \ddot{X}_0(0) \\ \ddot{X}_2(1) = \ddot{X}_1(0) \\ \ddot{X}_3(1) = \ddot{X}_2(0) \end{array} \right\} \quad (2.80)$$

La résolution des équations (2.77) à (2.80) pour $X_0(t), \dots, X_3(t)$ donne:

$$\left. \begin{array}{l} X_0(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3 \\ X_1(t) = \frac{1}{2}t^3 - t^2 + \frac{2}{3} \\ X_2(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} \\ X_3(t) = \frac{1}{6}t^3 \end{array} \right\} \quad (2.81)$$

Ensuite, la formule du segment de courbe B-Spline cubique peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} P_i(t) &= X_0(t)Q_{i-1} + X_1(t)Q_i + X_2(t)Q_{i+1} + X_3(t)Q_{i+2} \\ &= [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]M_R \begin{bmatrix} Q_{i-1} \\ Q_i \\ Q_{i+1} \\ Q_{i+2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.82)$$

D'où

$$M_R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Les fonctions (2.81) concordent avec les fonctions de commande dites B-Spline, $N_{j,M}$ d'ordre $M = 4$, lorsque le vecteur de nœud est spécifié comme suit:

$$T = [t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6 \quad t_7] = [-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$$

2.4.1.3 Type de courbe B-Spline (1) :

En utilisant les fonctions B-Spline uniformes dérivées dans la section (2.4.1.1), C^{M-2} une classe de courbes ouvertes et fermées de degré $M - 1$, définies par $n + 1$ vecteurs position $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}, Q_n$ peut être déterminée.

- Courbe ouverte :

Elle se compose $n - M + 2$ de segments de courbe : $P_i(t)$

$$P_i(t) = \sum_{j=i-1}^{i+M-2} N_{j-i+1,M}(t) Q_j \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (2.84)$$

$$P_i(0) = P_i, P_{n-M+2}(1) = P_{n-M+3} \quad (i = 1, 2, \dots, n - M + 2)$$

$P_1, P_2, \dots, P_{n-M+3}$ sont les extrémités des segments de courbe.

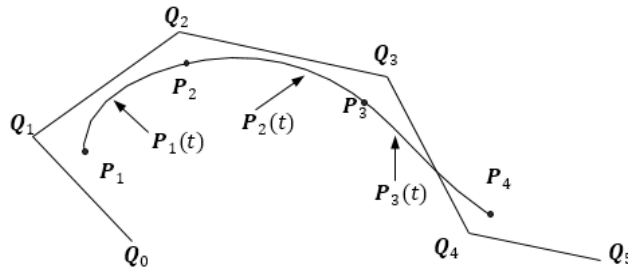


Figure 2. 17 : B-spline courbe ouverte Type (1)

- Courbe fermée

Elle se compose de $(n + 1)$ segments de courbe $P_i(t)$:

$$P_i(t) = \sum_{j=i-1}^{i+M-2} N_{j-i+1,M}(t) Q_{j \bmod (n+1)} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (2.85)$$

$$P_i(0) = P_i \quad (i = 0, 1 \dots n)$$

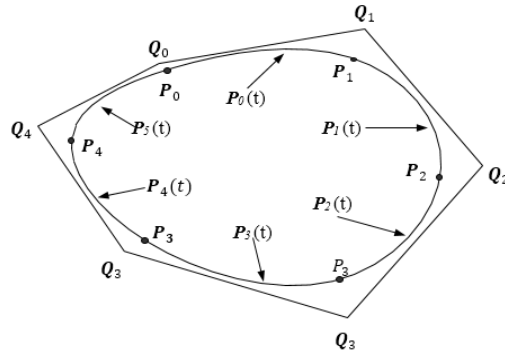


Figure 2. 18 : Courbe fermée B-spline type (1)

2.4.1.4 Type de courbe B-Spline (2)

En notant que $N_{0,M}(t), N_{1,M}(t), N_{2,M}(t)$ sont liés par translation horizontale, la courbe totale (ouverte ou fermée) de la classe C^{M-2} , définie par $n + 1$ des vecteurs position $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}, Q_n$, peut être déterminée comme suit :

- **Courbe ouverte :**

Elle se compose $n - M + 2$ segments de courbe $P_i(t)$:

$$P(t) = \sum_{j=0}^n N_{j,M}(t) Q_j \quad (0 \leq t \leq n - M + 2) \quad (2.86)$$

Le vecteur de nœud qui détermine les fonctions B-Spline est spécifié comme suit:

$$T = [t_0 \ t_1 \ \dots \ t_{n+M}] = [-(M-1) \ \dots \ -(M-2) \ \dots \ n+1]. \quad (2.87)$$

- **Courbe fermée :**

Il peut être exprimé comme :

$$P(t) = \sum_{j=0}^{n+M-1} N_{j,M}(t) Q_{j \bmod (n+1)} \quad (0 \leq t \leq n+1) \quad (2.88)$$

Le vecteur de nœud T qui détermine les fonctions B-Spline est spécifié comme suit :

$$T = [t_0 \ t_1 \ \dots \ t_{n+2M-1}] = [-(M-1) \ \dots \ -(M-2) \ \dots \ n+M]. \quad (2.89)$$

Remarque :

Les courbes B-Spline définies dans le type (2) sont exactement les mêmes que celles définies dans le type (1).

2.4.1.5 Type de courbe B-Spline (3)

Dans le type de courbe (1) et le type (2), les intervalles entre les nœuds sont tous 1; mais dans le type de courbe suivant, ils sont arbitraires. Lorsqu'il y a M nœuds multiples au début et à la fin d'un vecteur de nœud, alors les extrémités de la courbe coïncident avec celles de la courbe de définition du polygone.

- **Courbe ouverte :**

Une courbe ouverte définie par $(n + 1)$ vecteurs position $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}, Q_n$ est exprimée par la formule suivante:

$$P(t) = \sum_{j=0}^n N_{j,M}(t) Q_j \quad (a_0 \leq t < a_{n-M+2}) \quad (2.90)$$

Le vecteur de nœud qui détermine les fonctions B-Spline est spécifié comme suit:

$$T = [t_0 \ t_1 \ \dots \ t_{n+M}]. \quad (2.91)$$

Où les valeurs des nœuds sont déterminées comme suit :

$$\begin{aligned} t_i &= a_0 & i &= 0, 1, \dots, M-1 \\ t_{i+M} &= a_{i+1} & i &= 0, 1, \dots, n-M \\ t_{i+n+1} &= a_{n-M+2} & i &= 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (2.92)$$

La relation entre les valeurs de nœud et les segments de courbe est illustrée dans la **Figure 2.19**.

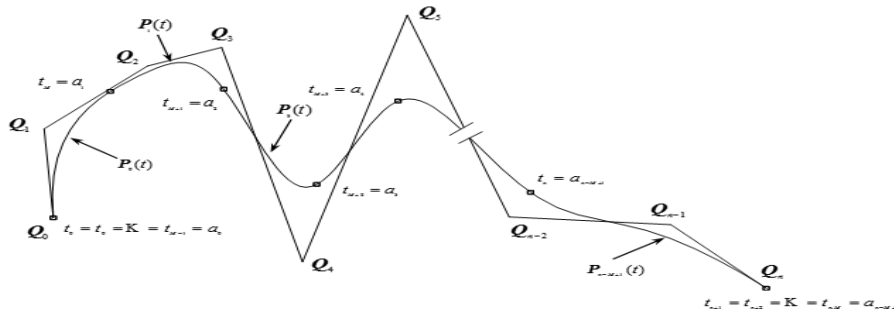


Figure 2.19 : Courbe B-Spline (3)

- **Courbe fermée :**

Une courbe fermée de degré $M - 1$ constituée de $n + 1$ segments, définis par $n + 1$ vecteurs de position $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}, Q_n$ s'exprime par la formule suivante :

$$P(t) = \sum_{j=0}^{n+M-1} N_{j,M}(t) Q_{j \bmod (n+1)} \quad (a_0 \leq t < a_{n+1})$$

Le vecteur de nœud qui détermine les fonctions B-Spline est spécifié comme suit:

$$T = [t_0 \ t_1 \ \dots \ t_{n+2M-1}].$$

Où les valeurs des nœuds sont déterminées comme suit :

$$\begin{aligned} t_i &= a_0 - (a_{n+1} - a_{i+n-M+2}) & i &= 0, 1, \dots, M-2 \\ t_{i+M-1} &= a_i & i &= 0, 1, \dots, n+1 \\ t_{i+n+M+1} &= a_{n+1} + (a_{i+1} - a_0) & i &= 0, 1, \dots, M-2 \end{aligned}$$

La relation entre les valeurs de nœud et les segments de courbe est illustrée dans la **Figure 2.20**.

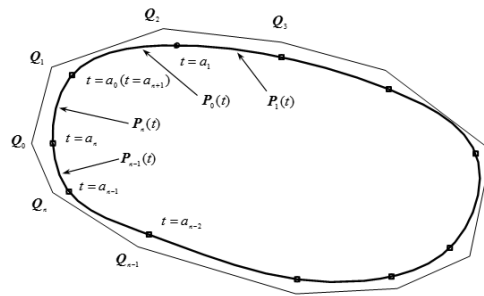


Figure 2. 20 : Relation entre les valeurs des nœuds de courbe et les segments de courbe

Remarque :

Une courbe B-spline générée par des valeurs de nœud spécifiées à des intervalles inégaux est appelée une courbe B-spline non uniforme.

- **Validation :**

- Les données, ordre des courbes : $M = 4$, incrément : $\chi = 0.25$

- Polygone définissant une courbe ouverte :

$$Q = [(0,0,0) (10,30,0) (30,50,0) (40,55,0) (60,20,0) (80,90,0) (90,40,0) (120,50,0) (160,0,0)]$$

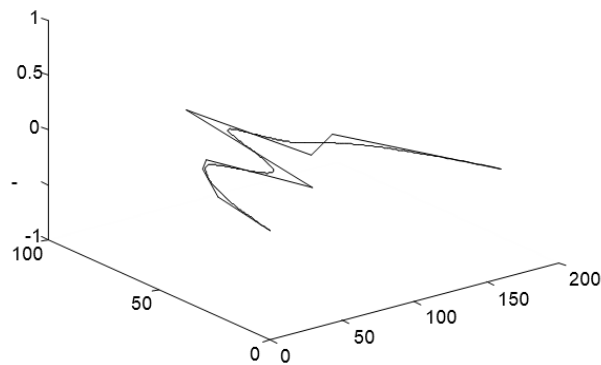


Figure 2. 21 : Courbe ouverte B-Spline de type (3)

- Polygone définissant une courbe fermée :

$$Q = [(-100,-100,0) (-100,100,0) (100,100,0) (100,-100,0)]$$

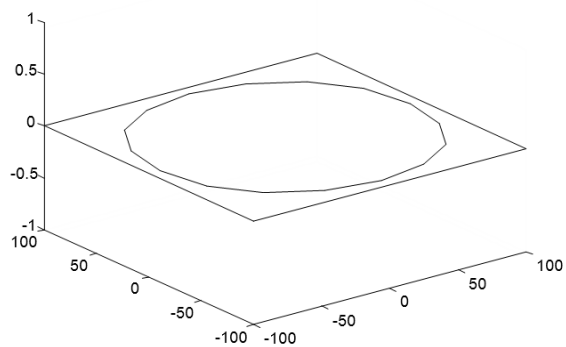


Figure 2. 22 : Courbe fermée B-Spline de type (3)

2.4.2 Surfaces B-Spline

Comme les surfaces de Bézier présentées au paragraphe 3 ; une surface B-spline de produit cartésien peut être déterminée en utilisant les fonctions de base B-spline. Soit $N_{i,K}(u)$, $N_{j,L}(w)$ un réseau de vecteurs de position et les fonctions B-spline de type (3) d'ordre K et L , respectivement. Une surface B-Spline de produit cartésien est donnée par :

$$P(u, w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,K}(u) N_{j,L}(w) Q_{ij} \quad (2.93)$$

Sous forme matricielle, nous avons :

$$P(u, w) = [N_{0,K}(u) \quad N_{1,K}(u) \quad \dots \quad N_{m,K}(u)] \begin{bmatrix} Q_{00} & Q_{01} & \dots & Q_{0n} \\ Q_{10} & Q_{11} & \dots & Q_{1n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ Q_{m0} & \dots & \dots & Q_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{0,L}(w) \\ N_{1,L}(w) \\ \vdots \\ N_{n,L}(w) \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

La différence entre le patch de surface Bézier et ce type de surface B-Spline est que le patch de surface Bézier est un patch de surface unique tandis que la surface B-Spline se compose d'un certain nombre de patches de surface connectés en douceur. Cela confère aux surfaces B-Spline une propriété de contrôle local.

- **Validation**
- Les Données : Réseau B-Spline

(0,0,0)	(0,1,0)	(0,2,0)	(0,3,0)	(0,4,0)	(0,5,0)	(0,6,0)
(1,0,0)	(1,1,0)	(1,2,0)	(1,3,0)	(1,4,0)	(1,5,0)	(1,6,0)
(2,0,0)	(2,1,0)	(2,2,0)	(2,3,0)	(2,4,0)	(2,5,0)	(2,6,0)
(3,0,1)	(3,1,1)	(3,2,1)	(3,3,1)	(3,4,1)	(3,5,1)	(3,6,1)
(4,0,0)	(4,1,0)	(4,2,0)	(4,3,0)	(4,4,0)	(4,5,0)	(4,6,0)
(5,0,1)	(5,1,1)	(5,2,1)	(5,3,1)	(5,4,1)	(5,5,1)	(5,6,1)
(6,0,0)	(6,1,0)	(6,2,0)	(6,3,0)	(6,4,0)	(6,5,0)	(6,6,0)

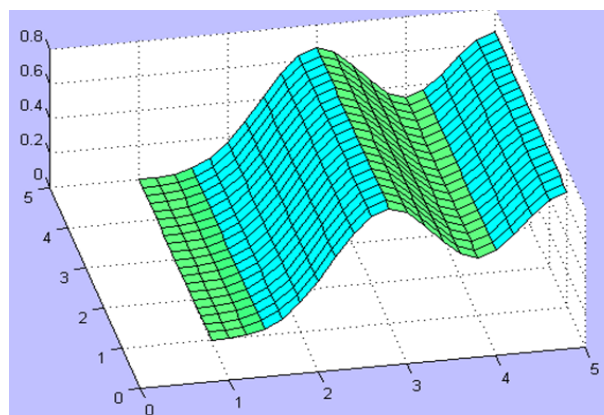


Figure 2. 23 : Surface bi-cubique B-spline uniforme

Conclusion :

Le modèle B-spline est une amélioration du modèle de Bézier, il a des propriétés des Splines pour donner naissance à un modèle fort en connexion et en contrôle.

2.5 MODELE RATIONNEL DE BEZIER ET B-SPLINE

Les courbes rationnelles et en particulier celles B-Spline deviennent aujourd'hui la description standard en CAO/FAO pour les courbes et les surfaces. Elles conservent tous les avantages des modèles précédents et ajoutent une représentation exacte de la conique (Piegl,1991 ; Piegl,1997).

2.5.1 Courbe de Bézier rationnelle

2.5.1.1 Forme homogène

La courbe rationnelle de Bézier associée à un polygone caractéristique peut être exprimée comme un polynôme paramétrique de degré (m) :

$$\mathbf{P}^h(t) = \sum_{i=0}^m \mathbf{s}_i^h B_{i,m}(t) \quad t \in [0,1] \quad (2.95)$$

$$\mathbf{s}_i^h = \begin{bmatrix} s_{ix}^h \\ s_{iy}^h \\ s_{iz}^h \\ h_i \end{bmatrix} \quad i = 0, 1, \dots, m$$

Où:

- \mathbf{s}_i^h sont les sommets de PG_m^h .

- $B_{i,m}(t)$ sont les fonctions de base de Bernstein de degré m . La courbe spatiale associée à $\mathbf{P}^h(t)$ est obtenue par application de la transformation projective H .

$$\mathbf{P}(t) = H(\sum_{i=0}^m \mathbf{s}_i^h B_{i,m}(t)) \quad t \in [0,1] \quad (2.96)$$

Nous avons:

$$\mathbf{s}_i = H(\mathbf{s}_i^h) \quad , \mathbf{s}_i^h = (h\mathbf{s})_i = [h_i s_{ix} \quad h_i s_{iy} \quad h_i s_{iz} \quad h_i] \quad \forall h_i \in \mathbb{R}^* \quad (2.97)$$

Les paramètres définissant complètement une courbe de Bézier rationnelle sont le polygone caractéristique PG_m^h et les coordonnées homogènes.

La forme homogène de $\mathbf{P}(t)$ peut s'écrire:

$$\mathbf{P}(t) = H(\sum_{i=0}^m (h\mathbf{s})_i B_{i,m}(t)) \quad t \in [0,1] \quad (2.98)$$

Selon cette expression, chaque point de la courbe est d'abord évalué en \mathbb{R}^4 puis transformé en fonction de l'application H pour obtenir le point équivalent de \mathbb{R}^3 .

2.5.1.2 Forme rationnelle

L'expression de $\mathbf{P}(t)$ peut être transformée pour montrer sa forme rationnelle dans \mathbb{R}^3 . Par définition de l'application H , nous obtenons successivement :

$$P(t) = H \begin{cases} \sum_{i=0}^m h_i s_{ix} B_{i,m}(t) \\ \sum_{i=0}^m h_i s_{iy} B_{i,m}(t) \\ \sum_{i=0}^m h_i s_{iz} B_{i,m}(t) \\ \sum_{i=0}^m h_i B_{i,m}(t) \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad (2.99)$$

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^m h_i s_{ix} B_{i,m}(t)}{\sum_{j=0}^m h_j B_{j,m}(t)} \quad (2.100)$$

2.5.1.3 Propriétés

2.5.1.3.1 Influence qualitative de la coordonnée homogène sur la forme de la courbe.

- Influence de la valeur de coordonnée homogène voisine de l'infini.

Dans ce cas, h_j agit comme un poids associé au sommet s_j , attirant vers $P(t)$ ce sommet lorsqu'il h_j augmente.

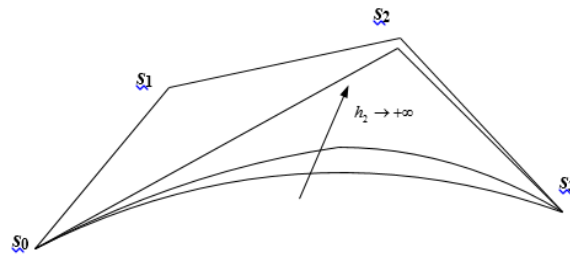


Figure 2. 24 : Influence de la coordonnée homogène (cas $h_2 \rightarrow +\infty$)

- h_j n'a aucune influence sur s_0 et s_m .
- Influence de la valeur de coordonnée homogène voisine de zéro.

Lorsque h_j tend vers zéro, la courbe évolue de manière à éloigner le sommet s_j .

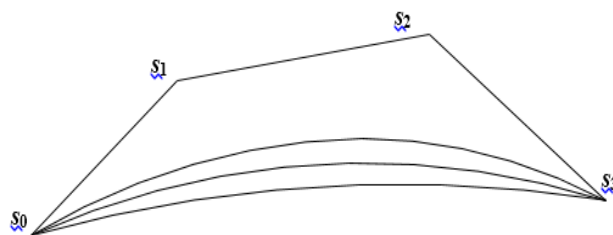


Figure 2. 25 : Influence de la coordonnée homogène (cas $h_2 \rightarrow 0$)

Quand, $h_j = 0$ l'influence de s_j est annulée.

- Influence de la valeur de coordonnée homogène négative.

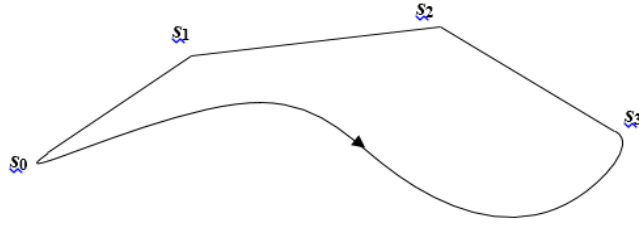


Figure 2.26 : Influence dans le cas de coordonnées homogènes $h_2 < 0$ et $h_0, h_1, h_3 > 0$

La présence de coordonnées homogènes négatives est mise en évidence par une forme de répulsion entre courbe et polygone. On peut aussi avoir l'annulation du dénominateur pour certaines valeurs de t . À partir d'une étude qualitative, nous concluons qu'il est nécessaire de restreindre l'intervalle de la variation h_i afin de conserver :

- Une simplicité de traitement (dénominateur $\neq 0$)
- Déduction de la forme de la courbe de celle du polygone.

Pour faire cela, nous prenons généralement $h_i \geq 0$.

2.5.1.3.2 Influence quantitative de la coordonnée homogène.

Soit $P(t)$ une courbe de Bézier rationnelle quadratique.

La relation entre $P(t, h_j = 0)$ et $P(t, h_j)$ peut-être exprimé par :

$$P(t, h_j) = P(t, h_j = 0) + B_{j,m}^*(t) (s_j - P(t, h_j = 0)) \quad \forall t \in [0,1] \quad (2.101)$$

D'où

$$B_{j,m}^* = \frac{h_j B_{j,m}(t)}{\sum_{k=0}^m h_k B_{k,m}(t)} \quad (2.102)$$

$$P(t, h_j) = \frac{\sum_{i=0, i \neq j} h_i s_i B_{i,m}(t)}{\sum_{k=0}^m h_k B_{k,m}(t)} + \frac{h_j s_j B_{j,m}(t)}{\sum_{k=0}^m h_k B_{k,m}(t)} \quad (2.103)$$

Quand h_j est modifié pour devenir h_j^* , la courbe est donnée par:

$$P(t, h_j^*) = P(t, h_j) + (1 - \frac{h_j}{h_j^*}) B_{j,m}^*(t, h_j) (s_j - P(t, h_j)) \quad \forall t \in [0,1] \quad (2.104)$$

D'où

$$B_{j,m}^*(t, h_j^*) = \frac{h_j^* B_{j,m}(t)}{\sum_{k=0, k \neq j}^m h_k B_{k,m}(t) + h_j^* B_{j,m}(t)} \quad (2.105)$$

Remarque

-L'équation (2.104) montre que la zone la plus affectée par la variation de h_j est celle correspondant aux valeurs de t situées au voisinage de la valeur (t^*) qui maximisent le terme $B_j^*(t, h_j^*)$

- $s_j, P(t, h_j), P(t, h_j^*)$ sont alignés $\forall t \in [0,1]$.

2.5.1.4 Représentation du conique.

Soit $P(t)$ une courbe de Bézier rationnelle quadratique :

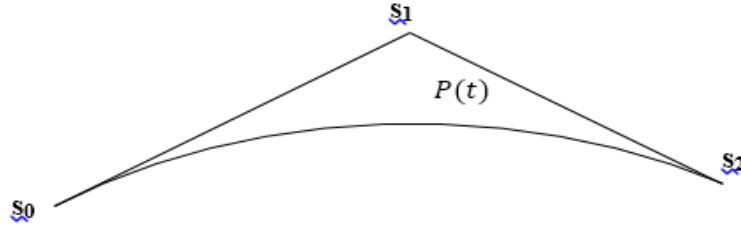


Figure 2.27 : Courbe de Bézier rationnelle quadratique

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 h_i s_i B_{i,2}(t)}{\sum_{j=0}^2 h_j B_{j,2}(t)} \quad (2.106)$$

Ensuite, nous définissons une base (v_1, v_2) comme suit:

$$v_1 = (s_1 - s_0) \text{ et } v_2 = (s_2 - s_1) \quad (2.107)$$

$P(t)$ décrit dans cette base par:

$$\begin{aligned} C(\alpha, \beta) &= s_1 + \alpha v_1 + \beta v_2 \\ &= \alpha s_0 + (1 - \alpha - \beta) s_1 + \beta s_2 \end{aligned} \quad (2.108)$$

Par identification entre $C(\alpha, \beta)$ et $P(t)$ on trouve :

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= B_{0,2}^*(t) = \frac{h_0(1-t)^2}{h_0(1-t)^2 + 2h_1t(1-t) + h_2t^2} \\ \beta(t) &= B_{2,2}^*(t) = \frac{h_2t^2}{h_0(1-t)^2 + 2h_1t(1-t) + h_2t^2} \\ 1 - \alpha - \beta &= B_{1,2}^*(t) \end{aligned} \quad (2.109)$$

Une autre représentation pour une conique est :

$$\alpha(t) \cdot \beta(t) = \frac{h_0 h_2}{4h_1^2} (1 - \alpha(t) - \beta(t))^2 \quad (2.110)$$

Le terme $\frac{h_0 h_2}{4h_1^2}$ détermine la nature de la conique.

- $\frac{h_0 h_2}{h_1^2} > 1 \Rightarrow$ Ellipse ou cercle
- $\frac{h_0 h_2}{h_1^2} = 1 \Rightarrow$ Parabole
- $\frac{h_0 h_2}{h_1^2} < 1 \Rightarrow$ Hyperbole

La courbe $P^*(t)$ définie par le même polygone $P(t)$ et par aucune séquence admissible de coordonnées homogènes $(h_0, -h_1, h_2)$ dans l'intervalle $t \in [0,1]$ représente l'arc complémentaire de la conique.

$$P^*(t) = \frac{s_0 h_0 (1-t)^2 - 2s_1 h_1 t(1-t) + s_2 h_2 t^2}{h_0 (1-t)^2 - 2h_1 t(1-t) + h_2 t^2} \quad (2.111)$$

D'après l'étude quantitative $P(t)$, $P^*(t)$, s_1 sont alignés, puisque l'on passe de $P(t)$ à $P^*(t)$ juste en changeant la coordonnée homogène h_1 .

Tous les points situés à l'infini sur la conique appartiennent à $P^*(t)$, car h_0, h_1, h_3 , sont admissibles. Le nombre de points situés à l'infini est donné par les racines du dénominateur de l'équation (2.111).

Les racines de l'équation sont exprimées par :

$$t_k = \frac{h_0 + h_1 \pm h_1 \sqrt{1 - \frac{h_0 h_2}{h_1^2}}}{h_0 + 2h_1 + h_2} \quad k \in \{1, 2\} \quad (2.112)$$

Le signe de $(1 - \frac{h_0 h_2}{h_1^2})$ détermine le nombre de racines réelles.

- $\frac{h_0 h_2}{h_1^2} > 1 \Rightarrow$ Pas de racine réelle, $P^*(t)$ est alors toujours à une distance finie de $P(t)$ (Ellipse ou cercle).
- $\frac{h_0 h_2}{h_1^2} = 1 \Rightarrow$ Une racine double, donc un point est situé à l'infini (Parabole)
- $\frac{h_0 h_2}{h_1^2} < 1 \Rightarrow$ Deux vraies racines (Hyperbole)

Remarque :

$(P(t_1) - s_1)$ et $(P(t_2) - s_2)$ définissent l'axe ou les asymptotes de l'hyperbole selon le cas. $P(t)$ représente un arc de cercle lorsque, en plus de la relation entre coordonnées homogènes, h_0, h_1, h_2 les deux conditions suivantes sont remplies:

- La caractéristique du polygone PG_2 doit être symétrique.

C'est : $\|s_1 - s_0\| = \|s_2 - s_1\| \quad (2.113)$

- Un point M doit être imposé à la courbe.

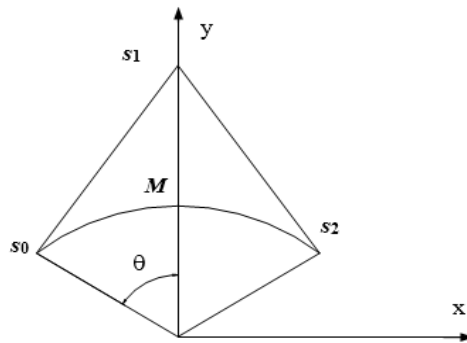


Figure 2. 28 : Génération d'un arc

- La condition nécessaire de $P(t)$ pour représenter un arc est :

$$\frac{h_0 h_2}{h_1^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (2.114)$$

Avec $\theta \in]0, \pi/2[$

- Pour des raisons de performances algorithmiques et de traitement de courbes, nous mettons généralement

$$h_0 = h_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \cos \theta \quad (2.115)$$

Ensuite, l'équation d'un arc devient :

$$\mathbf{P}(t) = \frac{R \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} (1-t)^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 2t(1-t) + \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} t^2}{(1-t)^2 + 2t(1-t) \cos \theta + t^2} \quad (2.116)$$

L'angle θ définit la position des sommets du polygone caractéristique, son intervalle est limité à $[0 \ \pi/2]$ car pour $]\pi/2 \ \pi[$, les h_i ne sont pas admissibles.

Donc pour générer un cercle complet, il faut au moins avoir deux arcs et pour éviter les points situés à l'infini, car $\theta = \pi/2$, nous préférons trois arcs.

2.5.2 Courbe B-Spline rationnelle

2.5.2.1 Forme homogène

L'expression d'une courbe $\mathbf{P}(t)$ de degré (m), définie par un polygone caractéristique PG_n , une séquence de coordonnées homogènes h_i ($i = 0, 1, \dots, n$) et une suite de nœuds t_j ($j = 0, 1, \dots, n + m + 1$), peut s'écrire:

$$\mathbf{P}(t) = H\{\mathbf{P}^h(t)\} = H\left(\sum_{i=0}^n s_i^h N_{i,m}(t)\right) \quad t \in [t_0 \ t_{n+m+1}] \quad (2.117)$$

D'où :

$$\mathbf{s}_i^h = (h\mathbf{s})_i = [h_i s_{ix} \ h_i s_{iy} \ h_i s_{iz} \ h_i] \quad \forall h_i \in \mathfrak{R}^* \quad (2.118)$$

2.5.2.2 Forme rationnelle

La forme rationnelle est obtenue en appliquant la définition de l'application projective H (2.117), alors $\mathbf{P}(t)$ devient :

$$\mathbf{P}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n h_i s_i N_{i,m}(t)}{\sum_{j=0}^n h_j N_{j,m}(t)} \quad t \in [t_0 \ t_{n+m+1}] \quad (2.119)$$

2.5.2.3 Propriétés

Le modèle B-Spline rationnel préserve toutes les propriétés déclarées pour le modèle de Bézier. Mais il diffère par la propriété de la localité des changements qui affectent la courbe de forme lorsqu'une coordonnée homogène change et par le fait $\mathbf{P}(t)$ qu'elle reste continue jusqu'à la pente malgré l'accent de forme dû à l'augmentation d'une coordonnée homogène.

2.5.2.4 Représentation de la conique

Le modèle rationnel B-Spline offre la possibilité de représenter exactement, avec une entité unique, les différentes coniques, en particulier les cercles et les arcs de cercle. C'est le plus grand avantage souvent compté au nom de ce modèle.

La meilleure méthode pour représenter un cercle, par une B-Spline, est de le considérer comme trois courbes de Bézier connectées avec une séquence de coordonnées homogènes $(1, \cos \pi/3, 1)$ pour chaque segment (**Figure 2.29**). Ainsi on peut associer à un cercle une courbe rationnelle B-spline de degré deux et comme suite nodale : $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ ou $[0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3]$.

- Cas périodique:

Coordonnée homogène	1	$\cos\pi/3$	1	$\cos\pi/3$	1	$\cos\pi/3$	1
Sommets	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6

- Cas non périodique:

Coordonnée homogène	1	$\cos\pi/3$	1	$\cos\pi/3$	1	$\cos\pi/3$
Sommets	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5

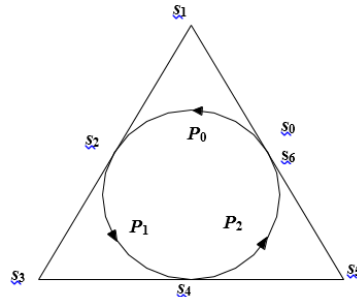


Figure 2. 29 : Génération du cercle

2.6 SURFACES GÉNÉRÉES ET SURFACES DE REVOLUTION

Dans cette section, nous exposons une nouvelle vision des surfaces générées, basée sur la notion de rayon barycentrique, qui permet de réduire le nombre de données et de construire dans certains cas en conséquence une loi appropriée. Nous exposons également à la fin de ce paragraphe les surfaces de révolution.

2.6.1 Définition des surfaces générées

Les surfaces générées sont des surfaces obtenues par la génération d'une courbe fermée, appelée courbe de forme SC , le long de toute courbe (ouverte ou fermée), appelée courbe directrice DC , selon une loi ou une association de lois prédéfinies. (Piegl, 1997)

Hypothèse : Dans le traitement des équations, nous utilisons le modèle B-Spline pour la courbe de forme.

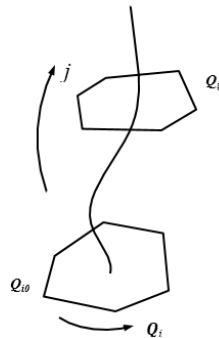


Figure 2. 30 : Principe des surfaces générées

2.6.2 Cas général

Soit une courbe B-spline fermée de type (3), du paragraphe (2.4.1.5), considérée comme une courbe de forme:

$$P(u) = \sum_i^{n+M-1} N_{i,M}(u) Q_{i \bmod (n+1)} \quad (2.120)$$

Étant donné une courbe directrice quelconque dont l'équation peut être exprimée comme:

$$P(v) = \sum_{j=0}^L A_j(v) q_j \quad (2.121)$$

Convention

Une courbe B-Spline fermée est généralement caractérisée par son polygone caractéristique PG, qui est formé d'un ensemble de vecteurs de position Q_i . Pour simplifier les équations, nous proposons d'introduire une nouvelle notion pour caractériser une B-Spline fermée, c'est la notion de rayon barycentrique.

Pour chaque point de contrôle Q_i , on associe un rayon barycentrique R_i , reliant le barycentre du polygone caractéristique et le point considéré Q_i .

Soit Ob et R_i respectivement le barycentre de PG et le rayon barycentrique, définis comme suit:

Ob Barycentre du PG.

$$Ob = \frac{\sum_{i=0}^n Q_i}{n} \quad (2.122)$$

R_i : Rayon barycentrique

$$R_i = Q_i - Ob$$

$$Q_i = R_i + Ob$$

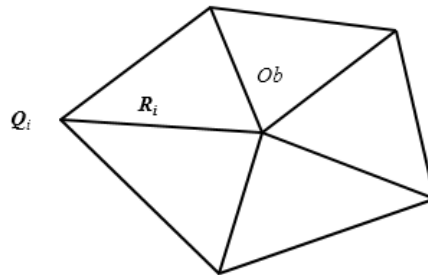


Figure 2. 31 : barycentre et rayon barycentrique

2.6.3 Équation générale d'une surface générée

Le polygone caractéristique PG_j d'une B-Spline à l'indice j est donné par :

$$Q_{ij} = R_{ij} + Ob_j \quad (2.123)$$

Avec Ob_j est un point de la courbe directrice définie comme :

$$Ob_j = \sum_{k=0}^L A_k(v_j) q_k \quad (2.124)$$

L'équation de la courbe B-Spline à l'indice j est :

$$\begin{aligned}
P_j(u) &= \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) \mathbf{Q}_{i \bmod (n+1),j} \\
&= \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) [\mathbf{R}_{ij} + \mathbf{0} \mathbf{b}_j]
\end{aligned}$$

en variant j le long de la courbe directrice CD , on obtient l'équation de la surface générée $P(u, v)$

$$P(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) [\sum_{k=0}^L A_k(v_j) \mathbf{q}_k + \mathbf{R}_{ij}] \quad (2.125)$$

2.6.4 Cas particuliers

Selon le rayon barycentrique, on peut définir trois types de surfaces générées.

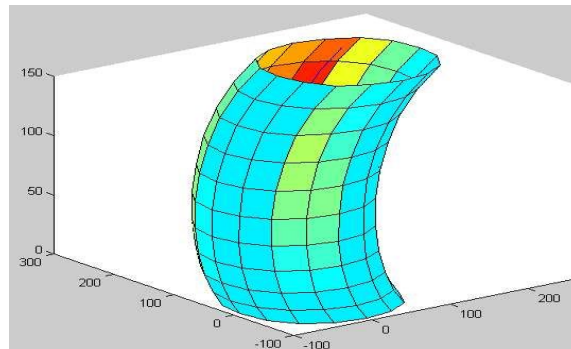
2.6.4.1 Surfaces générées constantes

Dans ce type de surfaces, les rayons R_{ij} , R_{i0} et R_i sont égaux, donc la surface générée constante (CGS) peut être définie comme:

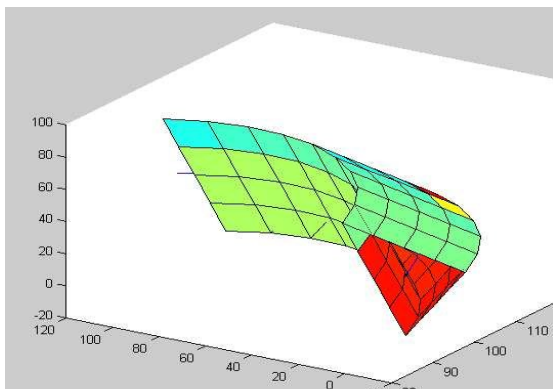
$$R_{ij} = R_{i0} = R_i$$

$$P(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) [\sum_{k=0}^L A_k(v_j) \mathbf{q}_k + \mathbf{R}_i] \quad (2.126)$$

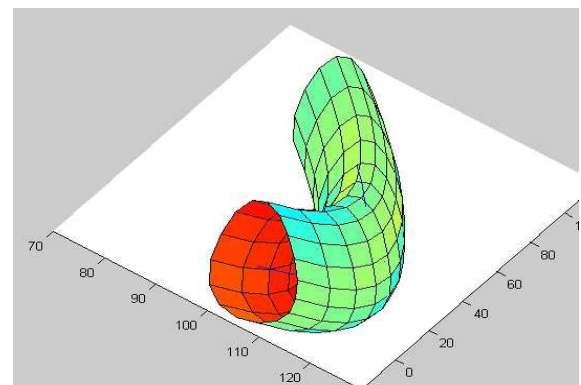
Ce type de surface peut être également obtenu par translation de la courbe de forme le long de la courbe directrice. La présentation de cette méthode sera détaillée à la fin de cette partie.



(a)



(b)



(c)

Figure 2.32 : (a), (b) et (c), exemples de surfaces générées constantes

2.6.4.2 Surfaces générées régulières

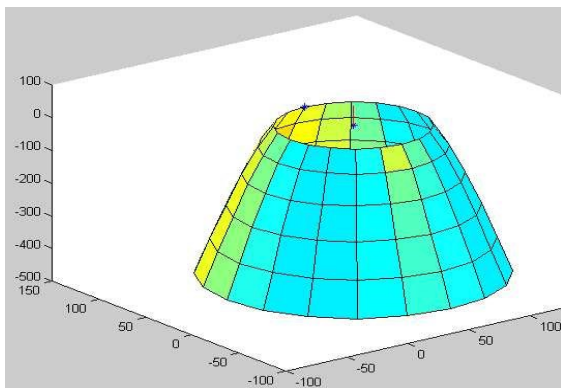
Lorsque le rayon barycentrique suit une loi régulière, le long de la courbe directrice, nous disons que nous avons une surface générée régulière (SGR). Ce type de surfaces permet de définir un nombre illimité de surfaces (**Figure 2.33**), chacune d'elles vérifie une loi précise. Cette propriété est très intéressante lorsque l'on veut créer des surfaces qui doivent être contrôlées par certaines lois comme les lois de la physique (mécanique des fluides, mécanique du solide...).

Le (SGR) peut être défini comme suit :

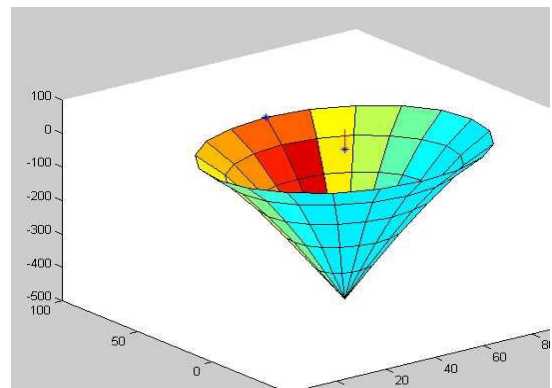
$$\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_{i0} + f(t) \quad (2.127)$$

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) \left[\sum_{k=0}^L A_k(v_j) \mathbf{q}_k + (\mathbf{R}_{i0} + f(t)) \right]$$

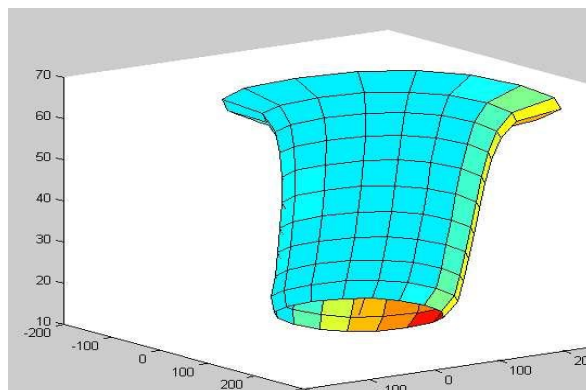
t : est une variable



(a)



(b)



(c)

Figure 2.33: Exemples de surfaces générées

2.6.4.3 Surfaces générées associées

Ce type de surface est obtenu en associant un ensemble de surfaces générées régulières. En effet pour chaque portion de la courbe directrice DC , on associe une loi régulière.

Donc pour $j = 0, 1, \dots, l, \dots, m$

Nous avons :

$$\begin{aligned} [0, g] &\Rightarrow \mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_{i0} + f_0(t) = \alpha_0(t) \\ [k, h] &\Rightarrow \mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_{ik} + f_k(t) = \alpha_k(t) \\ [l, m] &\Rightarrow \mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_{il} + f_l(t) = \alpha_l(t) \end{aligned} \quad (2.128)$$

Pour que :

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{j=0}^g \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) \left[\sum_{e=0}^L A_e(v_j) \mathbf{q}_e + \alpha_0(t) \right] + \dots + \sum_{j=k}^h \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) \left[\sum_{e=0}^L A_e(v_j) \mathbf{q}_e + \alpha_k(t) \right] + \dots + \sum_{j=l}^m \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) \left[\sum_{e=0}^L A_e(v_j) \mathbf{q}_e + \alpha_l(t) \right]$$

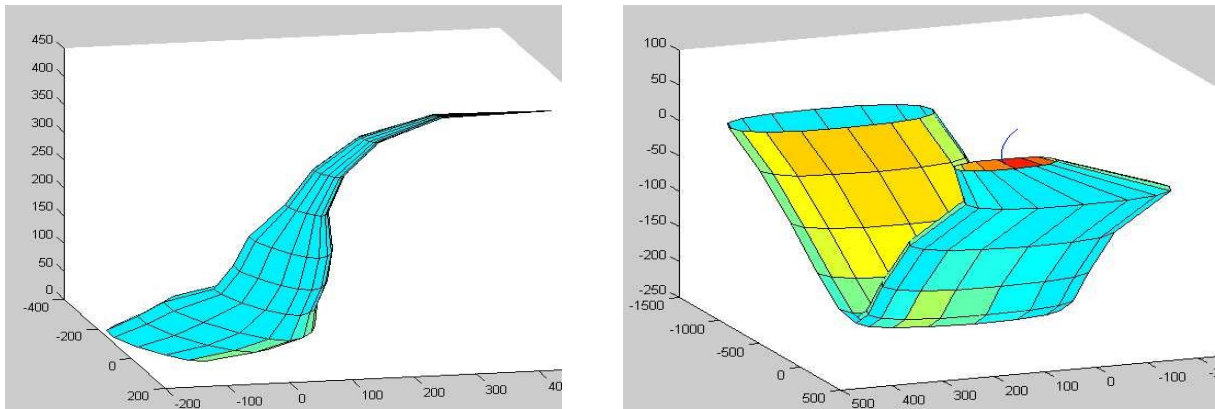


Figure 2.34 : Exemples de surfaces associées

2.6.4.4 Surfaces translattées :

La surface translattée (ST) est obtenue par la translation d'une courbe de forme le long d'une courbe directrice, la méthode est expliquée ci-dessous. Subdivisons une courbe directrice $\mathbf{P}_D(v)$ en m partition ΔS_j , pour chaque partition nous associons un vecteur corde \mathbf{c}_j . Le polygone caractéristique B-Spline fermé à l'indice j est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ij} &= \mathbf{Q}_{i0} + \mathbf{c}_j \\ &= \mathbf{Q}_{i0} + \mathbf{P}_D(v_j) - \mathbf{P}_D(0) \\ &= \mathbf{Q}_{i0} - \mathbf{P}_D(0) + \sum_{k=0}^L A_k(v_j) \mathbf{q}_k \end{aligned} \quad (2.129)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u, v_j) &= \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) \mathbf{Q}_{i \bmod(n+1), j} \\ &= \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) [\mathbf{Q}_{i \bmod(n+1), 0} - \mathbf{P}_D(0)] + \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) \sum_{k=0}^L A_k(v_j) \mathbf{q}_k \end{aligned}$$

Pour que :

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) Q_{i \bmod (n+1), j}$$

$$P(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) [Q_{i \bmod (n+1), 0} - P_D(0)] + \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{n+M-1} N_{i,M}(u) \sum_{k=0}^L A_k(v_j) q_k$$

$v \in [0,1]$, pour $j = 0, \dots, m$

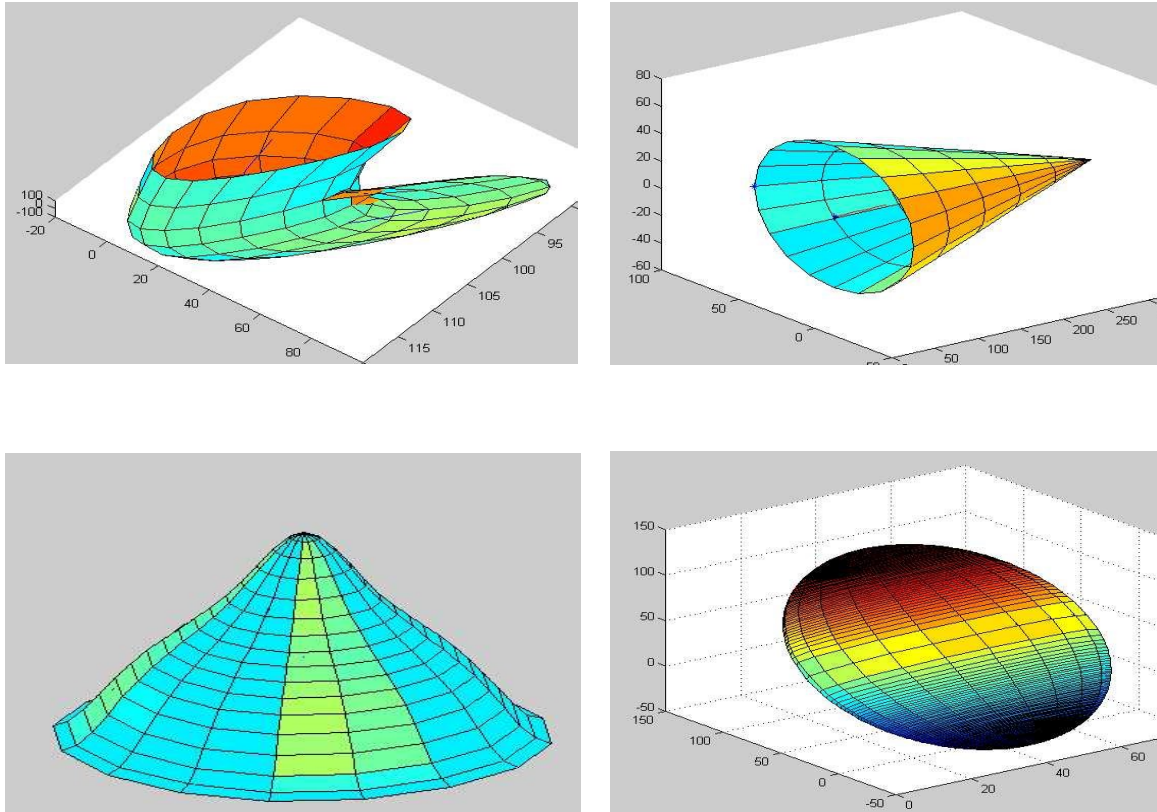


Figure 2. 35 : Quelques formes dérivées de la méthode de génération

2.6.4.5 Surfaces de révolution

La méthode de révolution est une procédure de construction solide très intéressante, que l'on retrouve pratiquement dans tous les systèmes de CAO. Une grande majorité de solide peut être renvoyée, à une rotation d'une courbe d'espace autour d'un axe. Dans ce qui suit, nous allons présenter l'équation mathématique, déterminant la rotation d'un point M d'un angle θ , autour d'un axe Δ , et nous donnerons également quelques exemples de solides construits par cette méthode.

Rotation d'un point M

Soit Δ et M respectivement un axe et un point de l'espace. Le point image M' de M par rotation $R(\theta)$, autour de l'axe Δ , avec u comme vecteur directeur, est donné par les relations suivantes:

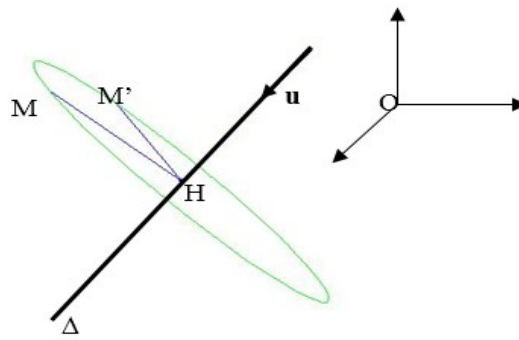


Figure 2. 36 : Rotation d'un point M autour d'un axe Δ

$$\mathbf{HM}' = R \mathbf{HM}$$

H est la projection de M sur Δ

$$\mathbf{OM}' = \mathbf{OH} + R \mathbf{HM}$$

$$R = \mathbf{uu}^T(1 - \cos \theta) + I \cos \theta + \mathbf{u}_m \sin \theta \quad (2. 130)$$

Où :

I: matrice d'identité

$$\mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2. 131)$$

\mathbf{u}_m : Matrice de convolution

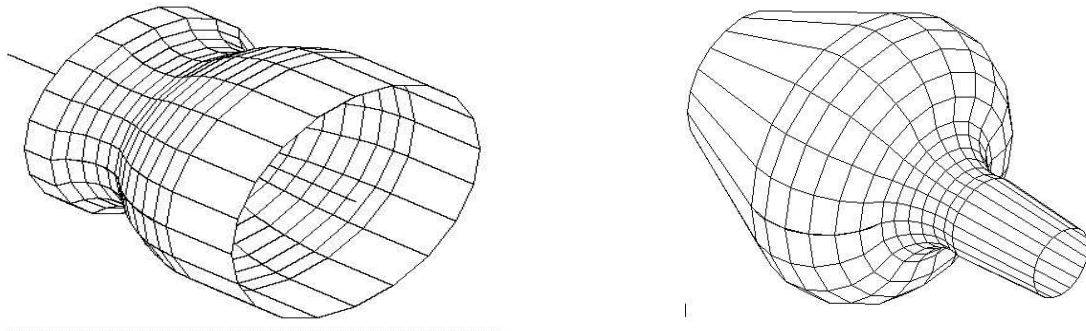


Figure 2. 37 : Exemples de surfaces de révolution

CHAPITRE 3

PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE

INTRODUCTION

La reconstruction 3D d'une surface est le processus de construction d'un modèle CAD d'une surface réelle fabriquée à partir d'un ensemble de points 3D.

La reconstruction des courbes et des surfaces gauches est un sujet qui est en cours de développement par plusieurs chercheurs notamment en infographie, en rétro-conception, en métrologie et en conception de produit.

Les recherches en terme reconstruction des courbes et des surfaces sont nombreuses (Bolle,1991; Dey,2006 ; Berger,2014) et ont développé des techniques de reconstruction.

Les méthodes de reconstruction des courbes et des surfaces gauches peuvent être classées selon deux approches ; la première est basée sur la reconstruction par interpolation, la deuxième utilise le concept de l'approximation.

La surface reconstruite par interpolation doit passer par tous les points de l'ensemble du nuage de points 3D, c'est-à-dire que les points échantillonnés font partie de la surface reconstruite. Cependant, cette condition n'est pas nécessaire dans le cas de l'approche par approximation.

L'objectif de ce chapitre consiste à présenter un état d'art sur les deux approches de reconstruction : l'interpolation et l'approximation, tout en mettant en évidence les limites et les avantages de chacune d'elles.

3.1 TECHNIQUES DE RECONSTRUCTION PAR INTERPOLATION DISCRETE

3.1.1 Interpolation basée sur le diagramme de voronoi

Les surfaces reconstruites par le diagramme de Voronoi sont des surfaces interpolantes d'un ensemble du nuage de points. Elle se pratique en deux étapes :

Première étape : une triangulation 3D de Delaunay est réalisée à partir du nuage de points.

Deuxième étape : un algorithme extrait une surface sous la forme d'un maillage polygonal en sélectionnant les triangles adéquats, sur la base de considérations géométriques et topologiques.

Les maillages polygonaux sont très utilisés dans les applications graphiques, car ils permettent de représenter virtuellement tout type de géométrie et de topologie et surtout des surfaces gauches.

La construction du diagramme de Voronoï d'un ensemble de points P est le processus de division de l'espace en sous-espaces selon le concept de voisinage comme le montré la **Figure 3.1**. Chaque point se voit attribuer son sous-espace exclusif appelé cellule de Voronoï. La cellule de Voronoï d'un point $x \in P$ est le sous-espace E^k qui couvre tous les points p qui sont plus proches de x que tout autre point q .

$$Vor(p) = \{x \in E^k / d(x,p) \leq d(x,q), \forall q \in P\} \quad (3.1)$$

Un exemple de représentation graphique du diagramme de Voronoï est montré dans l'espace euclidien à deux dimensions (**Figure 3.1**).

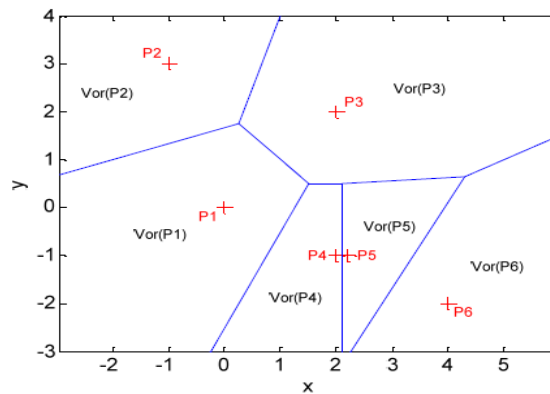


Figure 3. 1: Le diagramme de Voronoï d'un ensemble de points dans le plan $Vor(P)$ (cellule de Voronoï de P).

La triangulation de Delaunay de P est le dual géométrique du diagramme de Voronoï de P . Deux points de P sont reliés par une arête dans la triangulation de Delaunay si et seulement si leurs cellules sont adjacentes dans le diagramme de Voronoï de P (**Figure 3.2**).

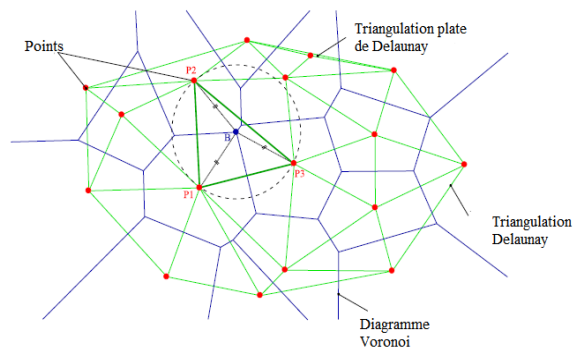


Figure 3. 2 : Triangulation de Delaunay 2D (vert) et diagramme de Voronoï (bleu) des points du plan (rouge) (CGAL). Le triangle en surbrillance est inscrit dans le cercle (en pointillés) centré sur un sommet de Voronoi B

La triangulation de Delaunay, appelée aussi tétraédrisation dans l'espace tridimensionnel, est la triangulation qui maximise la compacité des triangles. Il s'agit d'un ensemble de triangles en 2D, ou de tétraèdres en 3D. Elle possède les propriétés suivantes :

- Le maillage de Delaunay interpole l'ensemble des points de P .

Une arête entre 2 points de P existe si et seulement si leurs cellules de Voronoï sont adjacentes.

- Elle maximise l'angle minimal entre 2 arêtes ayant un sommet en commun.

- Le cercle (sphère) circonscrit dans un triangle (tétraèdre) de Delaunay ne contient aucun autre point de P .

L'axe médian d'un ensemble de points P de R^3 est l'ensemble des points de R^3 qui n'appartient pas à P ayant au moins deux points les plus proches dans P . Dans un certain sens, la notion d'axe médian généralise le concept de diagramme de Voronoï d'un ensemble de points pour les surfaces continues (Cazals, 2004).

L'axe médian d'un objet (bidimensionnel ou tridimensionnel) peut être défini comme le lieu des centres des boules maximales incluses à l'intérieur de l'objet, de manière à accéder à une représentation minimale de l'objet considéré. Il serait démontrable qu'une surface lisse puisse être reconstruite par l'intermédiaire de l'enveloppe de son axe médian (" Medial Axis Transform").

La notion d'axe médian est à la base de nombreux algorithmes dans le domaine de la reconstruction, du morphing ou de la reconnaissance de formes.

L'une des premières références parlant de triangulation de Delaunay utilisable pour des applications de reconstruction de surface est faite par (Boissonnat ,1984). Un très bon recueil des différentes

méthodes, exploitant le diagramme de Voronoï et son dual pour la reconstruction de surfaces , peut être trouvé dans (Cazals, 2004).

3.1.2 Le Crust

Amenta propose la méthode de reconstruction dite du « Crust » (Amenta,1998), « two-pass Voronoï filtering ». Sous certaines conditions d'échantillonnage, l'algorithme du Crust assure la reconstruction correcte de la surface numérisée. Amenta (Amenta,1998 ; Amenta ,1999) a défini une mesure non uniforme de la densité d'échantillonnage appelée le ϵ -sampling c'est-à-dire ϵ -échantillonnage, tel que le voisin le plus proche de tout point x de P soit à une distance inférieure à $\epsilon * LFS(x)$ avec $\epsilon < 1$ où $LFS(x)$, « Local Feature Size » d'un point x de la surface P est la distance euclidienne du point x au point le plus proche de l'axe médian. Intuitivement, une « bonne » densité d'échantillonnage, qui correspond à un échantillonnage suffisamment dense, est inversement proportionnelle à la distance par rapport à l'axe médian.

Dans le cas 3D, le Crust se compose de 4 étapes suivantes :

1. Calcul du diagramme de Voronoï des points échantillons.
2. Calcul des pôles des cellules de Voronoï, définis comme les deux sommets de ces cellules les plus éloignées du point générateur de la cellule. Le premier pôle est le sommet le plus éloigné du point générateur de la cellule, il est noté p^+ , le second pôle noté p^- est le sommet le plus éloigné dans le demi-plan opposé au premier (Figure 3.3).
3. On obtient un ensemble de points sommets de cellules de Voronoï, les pôles qu'on ajoute aux points échantillons de la surface (dans le cas 2D on ajoute tous les sommets des cellules de Voronoï), on calcule la triangulation de Delaunay issue de cette adjonction.
4. On garde uniquement les triangles dont les trois sommets sont des points de l'échantillon de départ. Cette étape est appelée « Voronoï filtering ».

Deux étapes de post traitement ont également été définies (« two-pass Voronoï filtering »), la première étape, « Normal filtering », consiste à supprimer les triangles qui ne remplissent pas le critère de la normale qui spécifie que les normales aux triangles forment de petits angles avec les vecteurs formés par les sommets du triangle et leurs pôles. En utilisant le fait que, sous certaines conditions d'échantillonnage du vecteur, formé par le point x et le pôle p^+ , représente une estimation de la normale à la surface au niveau de ce point x (Figure 3.3).

La deuxième étape, appelée « Trimming », enlève les petits tétraèdres qui pourraient être laissés sur la surface après le premier post-traitement.

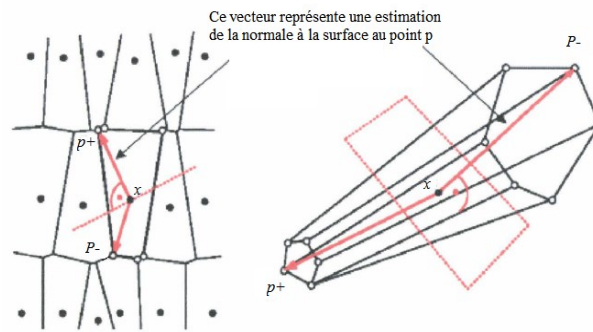


Figure 3.3 : Le point x , entourées des sommets des cellules de Voronoï et les pôles p^+ et p^- : 2 D et 3 D

L'algorithme Crust « one-pass filtering » (Amenta,1999), qui est une approche semblable au Crust « two-pass filtering », a été proposé par les mêmes auteurs. Il calcule juste le diagramme de Voronoï des points échantillons au lieu des points et des pôles des cellules de Voronoï. Le filtrage est basé sur l'heuristique suivante : l'ensemble de triangles T interpolant la surface S doit satisfaire ces trois conditions :

Il contient tous les triangles dont les deux côtés sont les côtés des cellules de Voronoï qui intersectent la surface.

- Chaque triangle est petit, c'est-à-dire que le rayon de son cercle circonscrit est beaucoup plus petit que la distance de ses sommets à l'axe médian.

Normal filtering : pour tous les triangles, l'écart angulaire entre les normales aux triangles et les normales estimées en utilisant les pôles aux sommets des triangles doit être faible.

3.1.3 Le Cocone

Sur la base de l'algorithme Crust, Amenta et al introduisent l'algorithme Cocone (Amenta,2000) qui sera à son tour suivi de quelques heuristiques et variantes améliorées (Dey,2001 ; Dey,2006 ; Dey, 2003). Cocone se présente comme une version simplifiée du Crust avec une complexité algorithmique réduite.

Le « Cocone » est une amélioration du « Crust », basée sur des observations concernant les critères de sélection des triangles, faisant partie de la surface finale.

Pour chaque point x , on définit 2 cônes alignés sur le plus grand axe de la cellule de Voronoï associée, axe formé par la liaison des deux pôles de la cellule, avec une ouverture de $3\pi/8$, et ayant x pour sommet. Parmi les triangles de Delaunay adjacents au sommet, seuls ceux appartenant au complémentaire de ces deux cônes sont retenus.

Dey (Dey,2001) propose d'utiliser Cocone en partitionnant le nuage de points à l'aide d'un octree. Les cellules obtenues sont légèrement agrandies afin d'assurer un recouvrement entre les morceaux de surfaces reconstruites. Grâce à ce partitionnement, Dey arrive à reconstruire explicitement des surfaces de plus d'un million de points sur des machines de puissance modeste en un temps raisonnable.

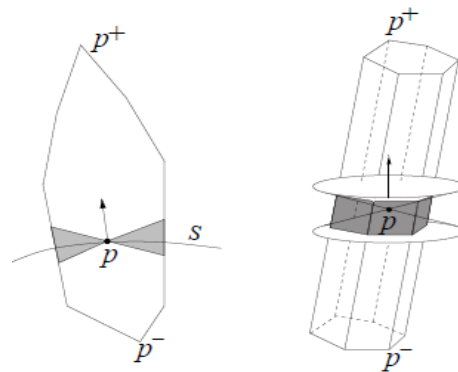


Figure 3.4 : Le test Cocone en un point donné de sa cellule de Voronoï

3.1.4 Le Powercrust

L'algorithme Powercrust, amélioration du Crust, est une technique robuste de reconstruction de surface, qui s'inspire des travaux de Boissonnat (Boissonnat,1984). Elle est basée sur une approche duale qui intègre la construction du diagramme de Voronoï et une analyse approximative de l'axe médian.

Le Powercrust construit une approximation linéaire de la surface de l'objet et de son axe médian à partir du nuage de points. L'algorithme utilise le nuage de points pour approcher l'axe médian, puis il applique une transformation inverse à partir de cet axe médian pour produire une approximation extérieure de la surface. Les outils principaux de cette méthode sont le diagramme de Voronoï et « Power diagram » une sorte de diagramme de Voronoï pondéré. Néanmoins, cet algorithme est toujours soumis à la condition d'échantillonnage qui stipule que le nuage de points doit être suffisamment dense pour permettre une bonne reconstruction.

Gopi (Gopi,2000) propose de diminuer la dimension du problème en ramenant localement le problème à une reconstruction 2D. Pour cela, les points du nuage doivent être munis d'une normale, afin de déterminer le plan tangent au point. Ensuite, pour chaque point du nuage, on projette son voisinage sur le plan tangent au point. Une triangulation locale de Delaunay permet de générer les triangles incidents au point.

(Gao,2003) propose de réduire la complexité de la reconstruction en s'appuyant sur le critère de densité minimale (ϵ -échantillonnage) que doit vérifier le nuage de points pour être dans les

conditions du Crust (Amenta,1999). Il propose un re-échantillonnage du nuage de points pour réduire sa taille en ne gardant que les points importants à la préservation de la topologie de la surface à reconstruire.

Le problème des approches basées sur le diagramme de Voronoï leur grande sensibilité au bruit présent dans le nuage de points en entrée, réside surtout dans la complexité calculatoire qui les rend inutilisables pour des nuages de points volumineux, puisqu'elles requièrent la génération complète du diagramme de Voronoï. Le chercheur Boudjemaï s'est basé sur une approche approximative pour réduire la sensibilité au bruit dans le nuage de points à reconstruire par des réseaux de neurones et ne demandent en entrées que les vecteurs de position pour la reconstruction de surfaces d'objets 3D (Boudjemaï,2006) à partir de réseaux de neurones qu'a un avantage de la non sensibilité au problème du nuage de points à reconstruire.

3.2 DESCRIPTION EXPLICITE / IMPLICITES

Les surfaces de forme gauche à carreau unique peuvent être modélisées à l'aide de fonctions explicites, telles que $Z = f(X, Y)$, ou de fonctions implicites, telles que $f(X, Y, Z) = 0$ (Struik, 1988). Par exemple, la fonction de base radiale peut être utilisée pour décrire mathématiquement des surfaces de forme gauche. (Dyn ,1986) et (Carr,2001) ont développé des méthodes pour utiliser des fonctions de base radiales pour reconstruire des surfaces de forme gauche basées sur un nuage de points.

3.3 DESCRIPTION PARAMETRIQUE

La construction des fonctions de base des modèles paramétriques a toujours été une difficulté dans le domaine de la conception géométrique assistée par ordinateur (CAD). Une classe de fonctions de base pratique joue souvent un rôle décisif dans le design numérique. Les courbes et surfaces B-spline cubiques conventionnels sont largement appliquées pour la CAGD en raison de leurs remarquables propriétés d'ajustement local.

Les descriptions paramétriques des surfaces de forme gauche sont beaucoup plus utilisées que les descriptions explicites ou implicites (Farin, 2002). Certains des avantages des descriptions paramétriques par rapport aux descriptions explicites/implicites sont décrits comme suit (Savio ,2007) :

Les descriptions paramétriques des courbes et des surfaces de forme gauche peuvent être facilement définies et modifiées à la fois localement et globalement.

Les descriptions paramétriques des courbes et des surfaces sont faciles à définir mathématiquement à l'aide de matrices, ainsi que les sous-programmes de calcul pouvant être utilisés à cette fin.

Les descriptions paramétriques des courbes et des surfaces sont indépendantes de tout système de coordonnées ; par conséquent, le choix d'un système de coordonnées n'affecte pas la forme des courbes ou des surfaces.

Les descriptions paramétriques sont pratiques pour les logiciels d'infographie en termes d'efficacité, puisque le calcul des courbes et des surfaces décalées peut être simplifié.

Bézier, B-spline et NURBS (non uniforme rationnelle B-spline) sont des modèles paramétriques populaires pour décrire les surfaces de forme gauche. Dans ces modèles surfaciques paramétriques, la forme de la courbe ou de la surface est régie par l'emplacement des points de contrôle. Les modèles B-spline et NURBS sont composés de patches polynomiaux par morceaux qui sont reliés entre eux en lissage au niveau des nœuds (Piegl, 1997). La **Figure 3.5** montre un exemple de courbe paramétrique B-spline tracée à partir d'un ensemble des points de contrôle.

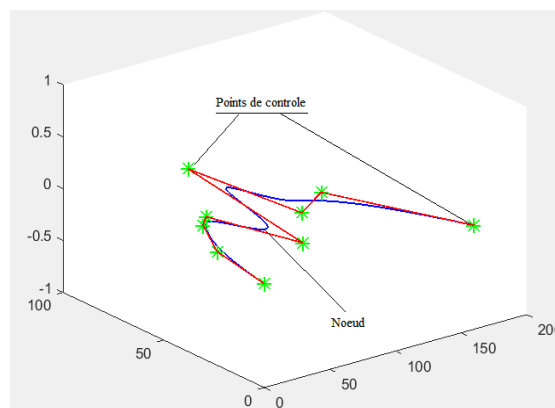


Figure 3.5 : Points de contrôle et nœuds d'une courbe B-spline

Bien que les courbes et surfaces B-spline rationnelles cubiques puissent ajuster les positions et les formes en changeant le facteur de pondération (Farin, 2002 ; Piegl, 1997), cependant leur effet d'ajustement reste difficilement prévisible.

Costantini et al. (Costantini, 2010) ont présenté une méthode pour la construction B-spline cubiques avec plusieurs nœuds. Les B-splines proposées sont pondérées par de paramètres de tension, associés aux nœuds, qui permettent une modification de la forme. Han (Han, 2006) a construit une sorte de polynôme quartique par morceaux de courbes avec un paramètre de forme local. Han (Han, 2011) a défini une classe de courbes splines quartiques par morceaux avec trois paramètres de forme locaux. Hu et al. (Hu, 2015) ont construit une sorte de courbes B-spline avec deux paramètres de forme locaux.

Pour élargir la portée de représentation de forme de modèles *B*-splines, certains chercheurs ont suggéré de nombreux types de courbes définies sur un espace non polynomial.

Walz (Walz, 1997) a montré que les *B*-splines trigonométriques d'ordre impair forment une partition d'une constante dans le cas de nœuds équidistants.

Des formules explicites et des relations de récurrence pour le calcul des *B*-splines généralisées (GB-splines) d'ordre arbitraire ont été données dans (Kvasov, 1999).

Wang et al (Wang, 2004) ont présenté un nouveau type de splines, appelées *B*-splines algébriques-trigonométriques non uniformes (NUAT *B*-splines), générées sur l'espace couvert par $\{1, t, \dots, t_{k-3}, \cos t, \sin t\}$ dans laquelle k est un entier arbitraire supérieur ou égal à 3. Les *B*-splines NUAT proposés par Wang et al (Wang, 2004) partagent la plupart des propriétés des *B*-splines polynomiales classiques. Les formules de subdivision sont applicables pour ce nouveau type de courbes Wang et al (Wang, 2004), et enfin, ils ont montré que la reconstruction des surfaces par le produit tensoriel est simple à réaliser pour ces nouvelles splines.

En tant que modèle mathématique unifié avec de nombreuses propriétés souhaitables, les *B*-splines sont largement appliquées à la modélisation de courbes et de surfaces de forme gauche. Cependant, il existe plusieurs limitations du modèle *B*-spline, qui restreint ses applications. Par exemple, une fois les vecteurs de nœuds spécifiés, les positions des courbes *B*-spline sont relativement fixes par rapport à leurs points de contrôle. D'autre part, les courbes *B*-spline ne représentent pas les courbes coniques à l'exception des paraboles et des hélices.

Bien que la *B*-spline rationnelle non uniforme (NURBS) puisse surmonter dans une certaine mesure le premier défaut des *B*-splines, elle ne parvient pas à modéliser les courbes transcendentes. Le modèle NURBS a plusieurs autres limitations potentielles en raison de la complexité relative des fonctions de base rationnelles. Par exemple, la forme rationnelle peut être instable, aussi ses dérivées et intégrales sont difficiles à calculer. Par conséquent, afin de pallier les inconvénients des *B*-splines, il est nécessaire d'explorer de nouveaux modèles.

Pour améliorer la flexibilité des modèles *B*-spline, certains chercheurs ont suggéré de nombreux types de courbes avec des paramètres de forme incorporés dans les fonctions de base. Par exemple, Xu et Wang (Wang, 2008) ont proposé trois types d'extensions de *B*-spline cubique uniforme. L'avantage des extensions est qu'elles ont des paramètres de forme qui peuvent être utilisés pour ajuster la forme des courbes sans déplacer les points de contrôle.

La propriété totalement positive est l'une des propriétés importantes des fonctions de base. Les courbes définies par une base totalement positive doivent avoir une propriété de diminution de la variation et de préservation de la convexité. Goodman et Said (Goodman, 1991) ont prouvé que la

base de Ball généralisée donnée dans (said,1989) est totalement normalisée et positive et qu'elle possède donc le même type de propriétés de préservation de forme que la base de Bernstein (Goodman,1991). Han et Zhu (Han, 2014) ont prouvé que la base trigonométrique cubique de Bézier donnée dans (Hun,2009) forme une base totalement positive, normalisée et optimale. Zhu et al. (Zhu,2015) ont construit quatre fonctions de base de type Bernstein, qui forment une base totalement positive, normalisée et optimale. Sur la base de type Bernstein, une classe de fonctions de base de type B-spline totalement positives est construite.

Grâce aux paramètres de forme, les concepteurs peuvent ajuster de manière flexible la forme des courbes et des surfaces. Dans cet axe Han (Han ,2004 ; Han, 2006] a introduit successivement des paramètres de forme pour des courbes TC-B-spline quadratiques uniformes et des courbes TC de Bézier quadratiques. Xiong et al. (Xiong,2008) ont discuté de l'extension des courbes et surfaces uniformes C-B-spline. Bashir et al. (Bashir,2013) ont étudié la courbe de Bézier trigonométrique quadratique rationnelle G2 et C2 avec deux paramètres de forme, et Liu et al. (Liu,2010) ont traité d'autres courbes et surfaces polynomiales hyperboliques uniformes B-spline avec un paramètre de forme.

Abdul Majeed et al (Majeed,2021) ont développé de nouvelles fonctions B-splines trigonométriques quadratique (QTBS) avec deux paramètres de forme. Les fonctions QTBS proposées héritent des propriétés de base du B-spline classique. Le QTBS a été utilisé pour la conception de différentes pièces de forme gauche, aile d'avion, le profil aérodynamique, les pales de turbomachines et le stabilisateur vertical.

La Bspline trigonométrique quadratique proposée (Majeed,2021) est plus adaptée à la conception en raison de la présence de paramètres de forme que la B-spline quadratique ordinaire. Avec l'utilisation de paramètres de forme, il a obtenu une courbe plus flexible qui répond aux exigences de la bonne modélisation.

Notre projet de recherche entre dans le cadre de l'investigation d'un modèle de reconstruction des courbes et des surfaces gauches des produits utilisés dans plusieurs secteurs tel que l'aéronautique, l'automobile...

Le modèle CAD d'une surface gauche, doit vérifier deux propriétés importantes de reconstruction de la surface gauche, la première a un caractère global et la deuxième a un caractère local. La première qui a un caractère global traite de la continuité, c'est le lissage, c'est-à-dire la continuité du modèle donnant le lissage de la surface, par contre la deuxième qui a un caractère local, s'intéresse à la contrôlabilité de la surface. Si on change ou on ajoute un point de contrôle, la surface ne sera pas modifiée globalement, mais la déformation de la surface se fait localement.

Pour les modèles de B-spline appliqués aux surfaces, nous pouvons profiter d'une certaine régularité des fonctions de base, qui fait que toutes les dérivées partielles mixtes sont d'ordre 3.

L'utilisation des schémas de subdivision avec les fonctions paramétriques B-spline améliore la qualité de lissage, mais le choix du niveau de subdivision est très important, car il a une influence sur la forme globale de la surface.

Notre sujet de thèse développe deux stratégies de reconstruction des surfaces gauches, la première est basée sur l'interpolation et la deuxième sur l'approximation, utilisant les B-spline trigonométriques d'ordre 4 pour l'approche approximation et cubique pour l'interpolation d'Hermite avec deux paramètres de formes. Nous allons voir en détail ces deux stratégies dans les chapitres suivants.

CHAPITRE 4

LA RECONSTRUCTION PAR APPROXIMATION DES COURBES ET DES SURFACES GAUCHES PAR LA METHODE B-SPLINES UAT D'ORDRE 4

INTRODUCTION

Les courbes B-spline trigonométriques sont développées en utilisant une base trigonométrique de type $\{1, t, \cos(t), \sin(t)\}$. Ces types des courbes sont une extension des courbes cubiques analogues aux courbes de Ferguson, courbes de Bézier et B-splines uniformes (Zhang, 1997). Les courbes B-spline trigonométriques contiennent de nombreuses propriétés très utiles. Elles peuvent traiter des courbes et des surfaces gauches et fournir une reproduction exacte des cercles et des cylindres (Zhang, 1997).

Les courbes et les surfaces B-spline trigonométriques appartiennent à l'approche de reconstruction par approximation. La figure ci-dessous montre le SADT A-0 du modèle d'étude :

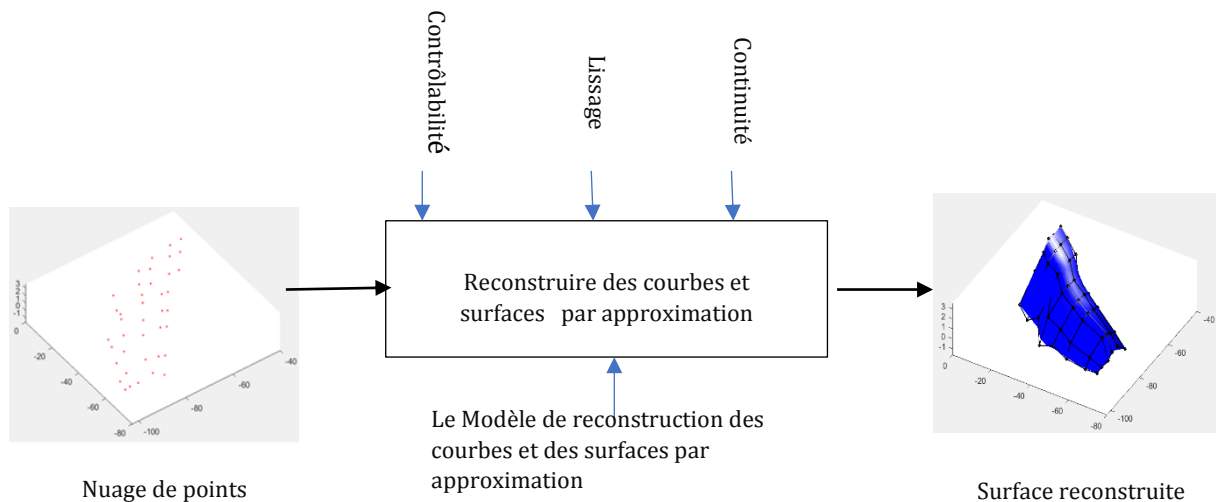


Figure 4. 1: SADT A-0 d'un modèle de reconstruction des courbes et des surfaces gauches

Dans ce travail, on va exposer toutes les démarches de reconstruction des courbes et des surfaces.

4.1 LES B-SPLINES TRIGONOMETRIQUES ALGEBRIQUES UNIFORMES D'ORDRE

On donne une représentation explicite des bases des splines trigonométriques uniformes d'ordre 4 (UTA B-spline) (Wang, 2004 ; Wang,2006 ; Lamnii,2009 ; Lamnii, 2013)

Soient

- $n > 1$
- h : est un paramètre $h \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\text{Posons: } \tau_n = \left\{ \underbrace{0, 0, 0, 0}_{4 \text{ noeuds confondus}}, \underbrace{h, 2h, \dots, (n-1)h}_{(n-1) \text{ noeuds uniformes répartis}}, \underbrace{nh, nh, nh, nh}_{4 \text{ noeuds confondus}} \right\} \quad (4.1)$$

Nous considérons la subdivision uniforme de l'intervalle $I = [0, n \times h]$ de manière uniforme.

L'espace B-spline trigonométrique d'ordre 4 est défini comme suit :

$$S_4(I, \tau_n) = \{s \in C^2([0, n \times h]), s_{[ih, (i+1)h]} \in \Gamma_4\};$$

$$\Gamma_4 = \{1, t, \cos(t), \sin(t)\}$$

Γ_4 désigne l'espace des polynômes trigonométriques.

La dimension de S_4 est $n + 3$ et les B-splines trigonométriques d'ordre 4 sont données par :

- Pour $i = 0, \dots, n - 4$:

$$M_{i,h}(t) = \begin{cases} \frac{(t-hi) - \sin(t-hi)}{2h - 2h \cos(h)}, & t \in [ih, (i+1)h], \\ \frac{(t-hi) + 2 \sin(h - (t-hi)) + \sin(2h - (t-hi)) + 2 \cos(h) ((t-hi) - h) - 2h}{2h(\cos(h) - 1)}, & t \in [(i+1)h, (i+2)h], \\ \frac{((t-hi) + \sin(2h - (t-hi)) + 2 \sin(3h - (t-hi)) + 2 \cos(h) ((t-hi) - 3h) - 2h)}{4h \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}, & t \in [(i+2)h, (i+3)h], \\ \frac{(t-hi) + \sin(4h - (t-hi)) - 4h}{2h(\cos(h) - 1)}, & t \in [(i+3)h, (i+4)h], \\ 0, \text{ si non.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Avec les conditions aux limites respectives des côtés gauches et droits, les B-splines trigonométriques sont :

$$M_{-3,h}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(h-t) - h + t}{\sin(h) - h}, & t \in [0, h], \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

$$M_{n-1,h}(t) = \begin{cases} \frac{\sin((n-1)h-t) - (n-1)h + t}{h - \sin(h)}, & t \in [(n-1)h, nh], \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

$$M_{-2,h}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(h-t) - \sin(h) + t}{h - \sin(h)} + \frac{-2 \sin(h-t) - 2t \cos(h) + 2 \sin(h) - t + \sin(t)}{2h \cos(h) - 2 \sin(h)}, & t \in [0, h], \\ \frac{\sin(2h-t) - 2h + t}{2h \cos(h) - 2 \sin(h)}, & t \in [h, 2h], \\ 0, \text{ si non.} \end{cases}$$

$$M_{-1,h}(t) = \begin{cases} \frac{t - \sin(t)}{2h \cos(h) - 2h} + \frac{2 \sin(h-t) + 2t \cos(h) - 2 \sin(h) + t - \sin(t)}{2h \cos(h) - 2 \sin(h)}, & t \in [0, h[, \\ \frac{h(t-2h) + t \sin(2h) + \sin(h)(\sin(h-t) + h) + (\sin(h) + h) \sin(2h-t)}{2h(\cos(h)-1)(h \cos(h) - \sin(h))} + \\ \frac{2h(2h-t) \cos^2(h) - h \cos(h)(\sin(h-t) + 2 \sin(2h-t) - h + 4 \sin(h) + t)}{2h(\cos(h)-1)(h \cos(h) - \sin(h))}, & t \in [h, 2h[, \\ \frac{\sin(3h-t) - 3h + t}{2h(\cos(h)-1)}, & t \in [2h, 3h[\\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

$$M_{n-2,h}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2h+t-nh) + h(n-2) - t}{2h \cos(h) - 2 \sin(h)}, & t \in [(n-2)h, (n-1)h[, \\ \frac{h(-2 \sin(-nh+h+t) + \sin(-nh+2h+t) - nh + n \sin(2h) + t)}{2(h-\sin(h))(h \cos(h) - \sin(h))} - \\ \frac{\sin(h)(\sin(nh-t) + (n-2)h + 2(h+t) \cos(h) - t)}{2(h-\sin(h))(h \cos(h) - \sin(h))}, & t \in [(n-1)h, nh[, \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$$

$$M_{n-3,h}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(3h-nh+t) + h(n-3) - t}{2h(\cos(h)-1)}, & t \in [(n-3)h, (n-2)h[\\ \frac{h-\sin(h)}{2h-2h \cos(h)} - \frac{\sin(-nh+2h+t) + h(n-2) - t}{2h \cos(h) - 2 \sin(h)} + \\ \frac{(\sin(-nh+h+t) + \sin(-nh+2h+t) + 2 \cos(h)(h(n-2) - t) + \sin(h))}{4h \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}, & t \in [(n-2)h, (n-1)h[\\ \frac{h \cos(2h)(hn-t) + 2h \sin\left(\frac{h}{2}\right)\left(\cos h\left(\frac{3}{2} - n\right) + t\right) + 2h \sin(h)}{2h(\cos(h)-1)(h \cos(h) - \sin(h))} + \\ \frac{\sin(h) \sin(hn-t) - h \sin(hn+h-t) - nh \sin(h) + t \sin(h) - h \sin(2h)}{2h(\cos(h)-1)(h \cos(h) - \sin(h))}, & t \in [(n-1)h, nh[\\ 0, \text{si non.} \end{cases}$$

Les B-splines trigonométriques d'ordre 4 ont toutes les propriétés importantes des B-splines polynomiales classiques, voir (Wang, 2004 ; Wang,2006) nous avons :

- Localité : $M_{i,h}(t) = 0$ pour $t \notin [ih, (i+4)h]$
- Positivité : $M_{i,h}(t) > 0$ pour $t \in [ih, (i+4)h]$
- Partition de l'unité : $\sum_{i=-3}^{n-1} M_{i,h}(t) = 1$ pour tout $t \in [0, nh]$
- Indépendance linéaire : $M_{-3,h}, M_{-2,h}, \dots, M_{n-1,h}$ sont linéairement indépendants

4.2 LES COURBES B-SPLINE TRIGONOMETRIQUES

Nous introduisons maintenant les courbes B-spline trigonométriques associées à la famille ci-dessus $M_{i,h}$. En effet, la courbe B-spline trigonométrique d'ordre 4 qui est basée sur $(n+3)$ points de contrôle

$P_{-3}, P_{-2}, \dots, P_{n-1}$, est définie comme suit :

$$C_4(t) = \sum_{i=-3}^{n-1} P_i M_{i,h}(t) \quad (4.3)$$

Pour tout $t \in [0, n \times h]$.

Comme pour les courbes B-splines polynomiales, les courbes B-spline trigonométriques ont les propriétés suivantes (Wang, 2004 ; Wang,2006) :

- 1- L' enveloppe convexe: Comme les fonctions de base ont les propriétés de la positivité et de la partition de l'unité, alors l'ensemble des segments de la courbe de $C_4(t)$ doit se situer à l'intérieur de son polygone de contrôle.

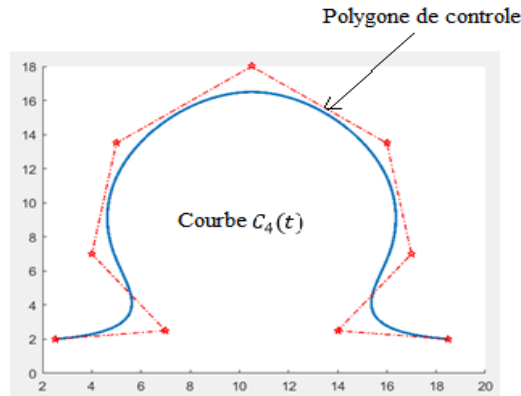
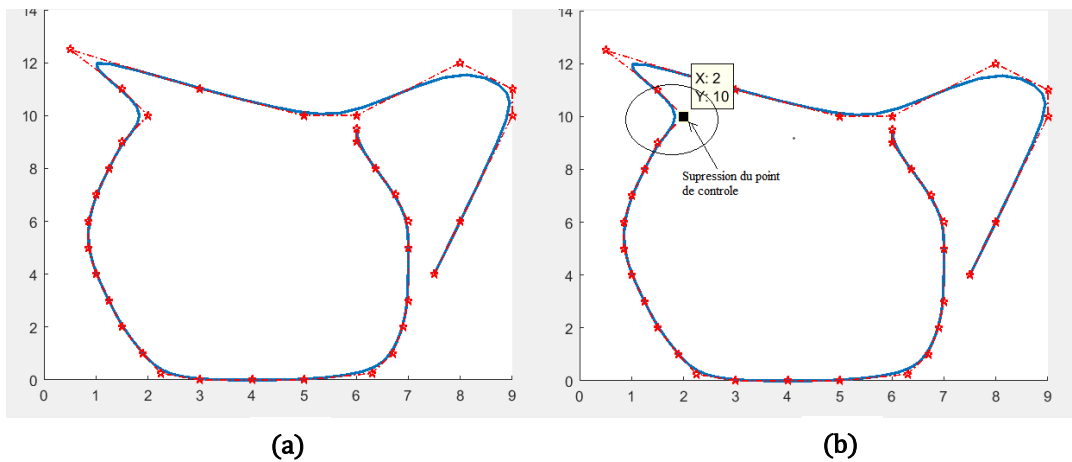
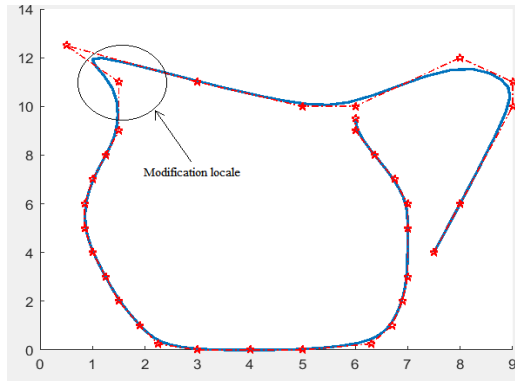


Figure 4. 2: la courbe de $C_4(t)$ à l'intérieur de son polygone de contrôle

- 2- L'invariance géométrique : Puisque les fonctions de base ont la propriété de la partition de l'unité, la forme de ces courbes trigonométriques de $C_4(t)$ n'est pas dépendante du choix des systèmes de coordonnées.
- 3- La localité: le changement d'un point de contrôle au maximum modifiera 4 segments de la courbe B-spline trigonométrique initiale d'ordre 4, par conséquent, une modification locale peut s'effectuer sans modifier le reste de la courbe.





(c)

Figure 4. 3: Modification locale de la forme de la courbe $C_4(t)$

4- Propriétés des extrémités : pour forcer les B-splines de la courbe à coïncider avec les extrémités du polygone de contrôle, il suffit de rajouter 4 fois les nœuds au bord de l'intervalle.

Soit à reconstruire une courbe B-splines trigonométriques d'ordre 4 à l'aide des neuf points de contrôle P_0 à P_8 ci-dessous :

$$P_0(2.5,2) ; P_1(7,2.5) ; P_2(4,7) ; P_3(5,13.5) ; P_4(10.5,18) ; P_5(16,13.5) ; P_6(17,7) ; P_7(14,2.5) ; P_8(18.5,2) .$$

On prend le vecteur nœud uniforme, la distance entre deux nœuds consécutifs est équidistante :

$$\tau_n = \{-0.50, -0.33, -0.17, 0, 0.17, 0.33, 0.50, 0.67, 0.83, 1.00, 1.17, 1.33, 1.50\}$$

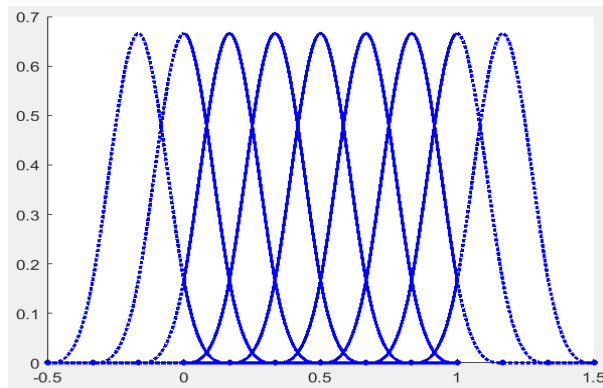


Figure 4. 4 : Les neuf courbes B-splines trigonométriques d'ordre 4

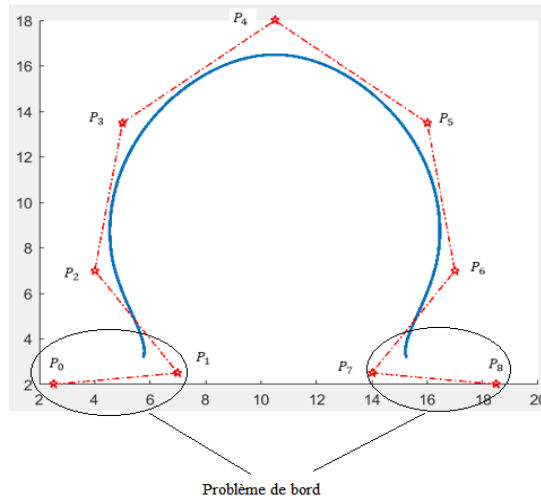


Figure 4.5 : La courbe B-spline trigonométriques d'ordre 4 avec 9 points de contrôle

Nous obtenons , comme résultat de la reconstruction de cette courbe avec les données ci-dessus, que la courbe B-spline trigonométrique ne passe pas par le premier sommet P_0 du polygone de contrôle et le dernier sommet P_8 du polygone de contrôle.

Alors le vecteur nœud sera :

$$\tau_n = \left\{ \underbrace{0,0,0,0}_{4 \text{ noeuds confondus}}, 0.17, 0.33, 0.50, 0.67, 0.83, \underbrace{1,1,1,1}_{4 \text{ noeuds confondus}} \right\}$$

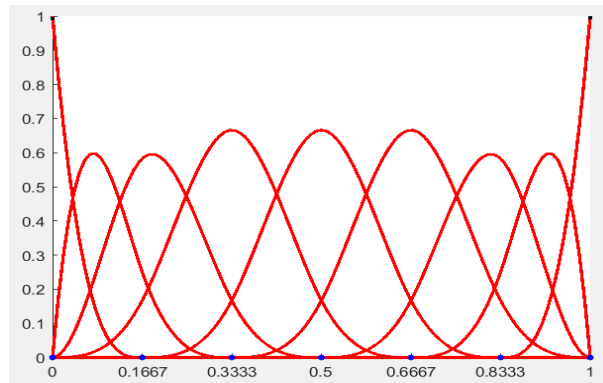


Figure 4.6 : Courbes B-splines trigonométriques d'ordre 4

En effet, la base B-spline est uniforme à l'exception des nœuds répétés. Tous les deux nœuds successifs sont équidistants, chaque distance vaut 0.17 .

Puisque le quatrième nœud est 0 et l'avant dernier 1 , la courbe est définie à $t \in [0,1]$.

Pour reconstruire une courbe B-spline le concepteur n'a qu'à choisir les sommets du polygone de contrôle non pas le vecteur nœud, car le B-spline d'ordre 4 est uniforme. Seul le polygone de contrôle est nécessaire pour la reconstruire. (Hajji et al,2018)

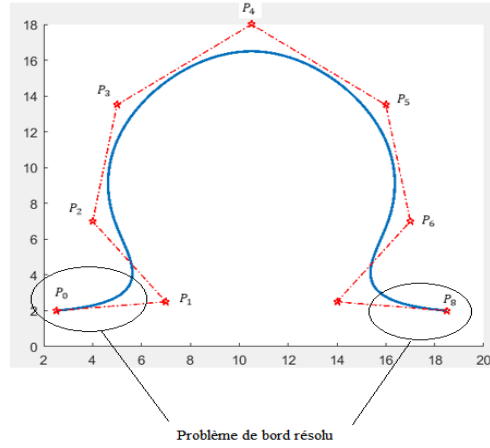


Figure 4. 7 : La Courbe B-spline trigonométrique d'ordre 4 avec 9 sommets du polygone de contrôle

4.3 LA SURFACE B-SPLINE TRIGONOMÉTRIQUE D'ORDRE 4

La reconstruction d'une surface à partir d'un ensemble de points contrôlant intuitivement sa forme est devenue, en conception assistée par ordinateur (**CAO**), la méthode la plus populaire pour la modélisation des surfaces de forme gauche (freeform surfaces).

L'utilisation du produit tensoriel, (**voir Annexe1**) pour les surfaces polynomiales, offre la possibilité d'appliquer directement la plupart des algorithmes sur des courbes (De Casteljaou,...), pour cela nous fixons l'un des paramètres et nous exécutons l'algorithme dans la direction de l'autre paramètre.

Le produit tensoriel de la B-spline trigonométrique à un ensemble de points de contrôle de la grille rectangulaire pour construire la surface associée peut être obtenue par le produit tensoriel de deux courbes de telle sorte que les propriétés des fonctions de base spline ne soient pas modifiées.

Soient $(m + 3) \times (n + 3)$ points de contrôles et $\tau_{m,h}, \tau_{n,k}$ deux vecteurs nœuds, un produit tensoriel de la surface de B-spline trigonométrique est défini par :

$$S(u, w) = \sum_{i=-3}^{m-1} \sum_{j=-3}^{n-1} P_{i,j} M_{i,h}(u) M_{j,k}(w) \quad (4.4)$$

Pour $u \in [0, m \times h], w \in [0, n \times k]$

Où

- $M_{i,h}$: fonctions de la base B-Splines trigonométriques dans la direction paramétrique u .
- $M_{j,k}$: fonction de base B-Splines trigonométrique dans la direction paramétrique w .

La plupart des propriétés des bases B-splines trigonométriques restent valables pour les surfaces B-splines trigonométriques.

Nous citons quelques propriétés importantes :

1. L'invariance géométrique : Puisque les fonctions de base ont la propriété de la partition de l'unité :

$$\sum_{i=-3}^{m-1} \sum_{j=-3}^{n-1} M_{i,h}(u)M_{j,k}(w) = 1 \quad (4.5)$$

Ce résultat montre que $S(u,w)$ est indépendante du choix des systèmes de coordonnées.

2. La propriété d'enveloppe convexe : pour $u \in [0, m \times h], w \in [0, n \times k]$ et $M_{i,h}(u), M_{j,k}(w)$ les termes sont positifs. Alors, en tenant compte des équations (4.4), (4.5) nous avons la propriété d'enveloppe convexe.

Pour illustrer cette propriété 2 et la propriété 3, nous allons travailler avec le nuage de points d'une aile de mini avion (Annexe 2, Tableau 1).

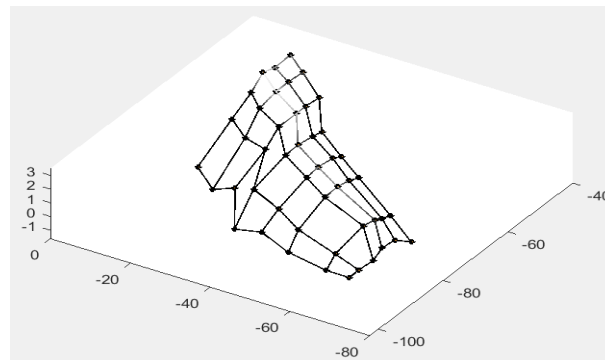


Figure 4. 8 : Polygone de contrôle d'une surface

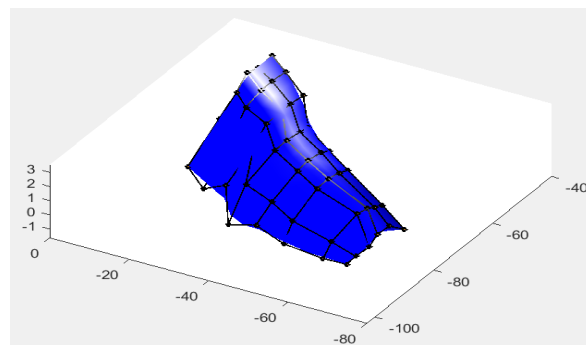


Figure 4. 9 : La surface reconstruite

3. Contrôlabilité : Une modification locale peut être effectuée sans perturber le reste de la surface.

Pour illustrer cette propriété, nous allons travailler avec le nuage de points d'une aile de mini avion (Annexe 2, Tableau 1 et Tableau 2).

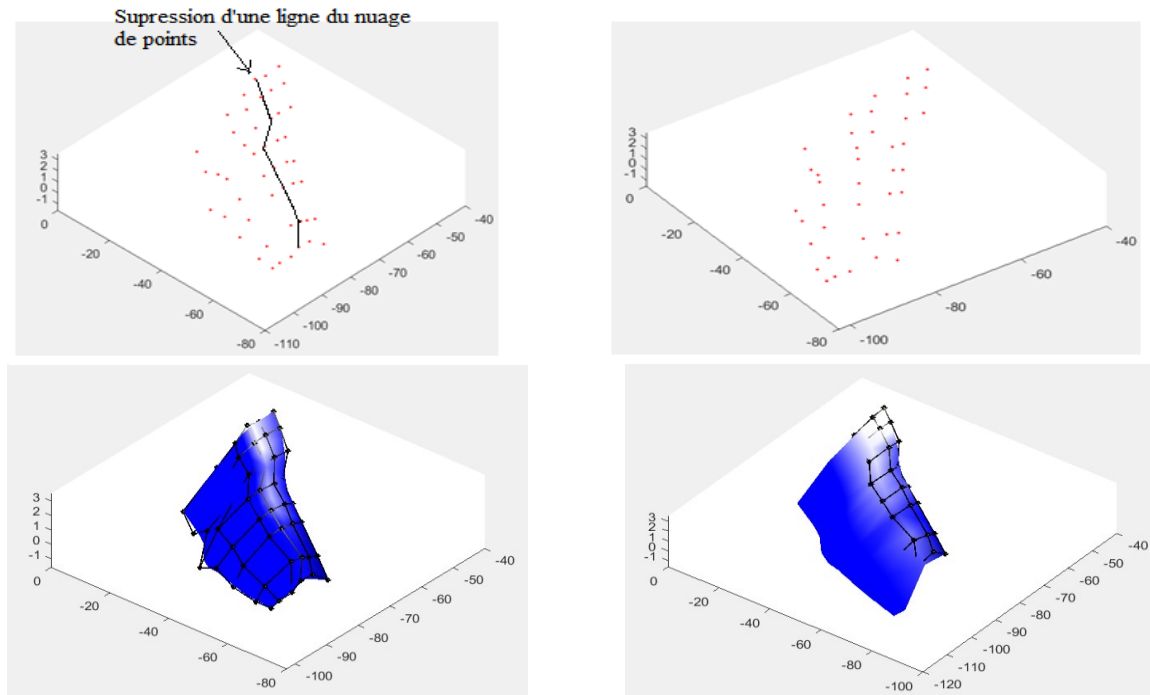


Figure 4. 10 : Influence de la modification locale sur la surface

4. L'Imposition des conditions aux bords : Les courbes limites de la surface (4.4), sont des courbes B-splines trigonométriques. Leurs polygones B-splines trigonométriques sont donnés par les polygones frontières du contour de contrôle. Pour forcer la courbe B-splines à coïncider avec les quatre coins du contour de contrôle, il suffit de répéter les nœuds à la fin des intervalles $[0, m \times h]$ et $[0, n \times k]$ quatre fois .

Exemple 1 :

On veut maintenant reconstruire une surface B-splines trigonométriques d'ordre 4 à l'aide des points de contrôle suivant :

- | | | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------|
| $P_{00}(0,0,0)$ | $P_{01}(0,1,0)$ | $P_{02}(0,2,1)$ | $P_{03}(0,3,2)$ | $P_{04}(0,4,1)$ | $P_{05}(0,5,0)$ | $P_{06}(0,6,0)$ |
| $P_{10}(1,0,0)$ | $P_{11}(1,1,1)$ | $P_{12}(1,2,2)$ | $P_{13}(1,3,1)$ | $P_{14}(1,4,1)$ | $P_{15}(1,5,0.5)$ | $P_{16}(1,6,0)$ |
| $P_{20}(2,0,1)$ | $P_{21}(2,1,1)$ | $P_{22}(2,2,2)$ | $P_{23}(2,3,3)$ | $P_{24}(2,4,1)$ | $P_{25}(2,5,0.5)$ | $P_{26}(2,6,1)$ |
| $P_{30}(3,0,1)$ | $P_{31}(3,1,1)$ | $P_{32}(3,2,2)$ | $P_{33}(3,3,3)$ | $P_{34}(3,4,1)$ | $P_{35}(3,5,0.5)$ | $P_{36}(3,6,1)$ |
| $P_{40}(4,0,0)$ | $P_{41}(4,1,1)$ | $P_{42}(4,2,2)$ | $P_{43}(4,3,1)$ | $P_{44}(4,4,1)$ | $P_{45}(4,5,0.5)$ | $P_{46}(4,6,0)$ |

$$P_{50}(5,0,0) \quad P_{51}(5,1,0) \quad P_{52}(5,2,1) \quad P_{53}(5,3,2) \quad P_{54}(5,5,1) \quad P_{55}(5,5,0) \quad P_{56}(5,6,0)$$

A l'aide du logiciel Matlab, nous construisons le polygone de contrôle du nuage de points.

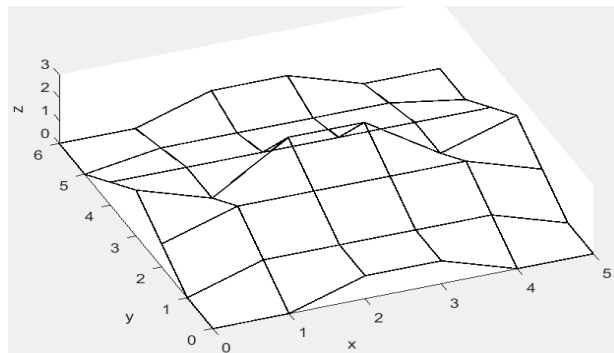


Figure 4.11 : Polygone de contrôle de la surface à reconstruire

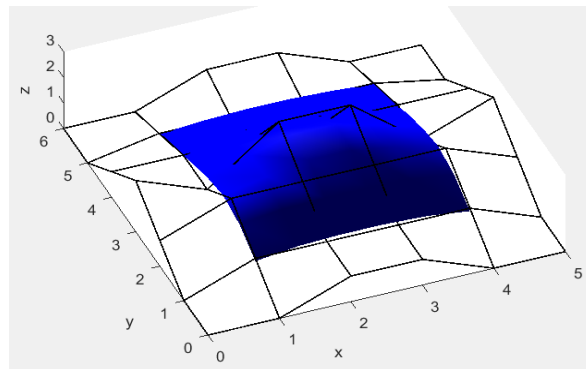


Figure 4.12 : Surface reconstruite B-spline trigonométriques et son polygone de contrôle

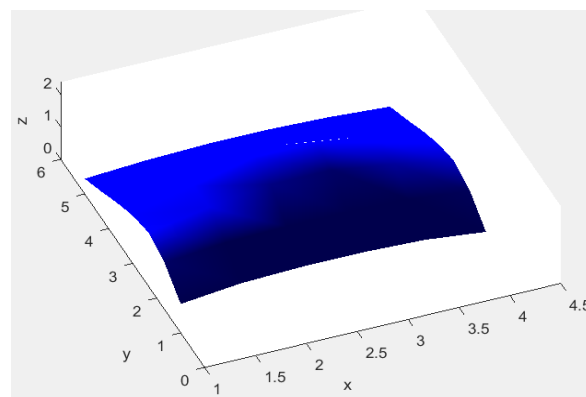


Figure 4.13 : Surface reconstruite B-spline trigonométriques

Après le premier résultat de la reconstruction de cette surface par B-spline trigonométriques, on voit bien que la surface reconstruite ne passe pas par les quatre bords du réseau du polygone de

contrôle , d'où la répétition quatre fois les nœuds aux extrémités des intervalles $[0, m \times h]$ et $[0, n \times k]$.

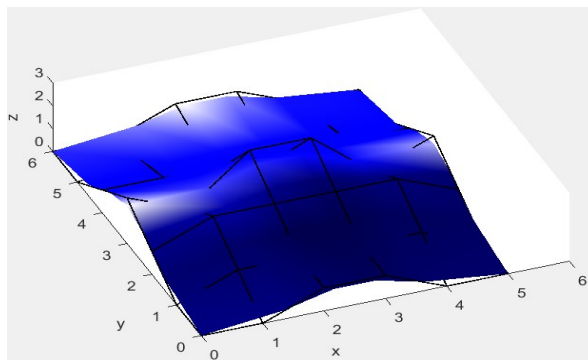


Figure 4. 14 : Surface B-spline trigonométrique avec son polygone de contrôle.
La surface est forcée de coïncider avec les quatre bords du polygone de contrôle

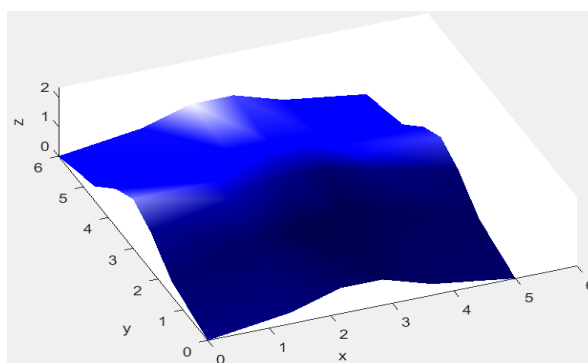


Figure 4. 15 : Surface B-spline trigonométriques sans son polygone de contrôle.
La surface est forcée de coïncider avec les quatre bords du polygone de contrôle.

4.4 LA SUBDIVISION DES COURBES ET DES SURFACES

Pour améliorer la qualité de la reconstruction des courbes et des surfaces gauches, on va appliquer un schéma de subdivision, pour cela on doit d'abord prouver si la B-spline trigonométrique d'ordre **4** satisfait l'équation de raffinement. Cette procédure subdivise la base B-spline trigonométrique associée à h dans une copie à l'échelle et contractée d'elle-même associée à $h/2$, (Hajji,2018)

Théorème 1 :

Soit $M_{i,h}$ et $M_{i,\frac{h}{2}}$ représentent la base B-spline trigonométrique d'ordre 4 définie respectivement par des vecteurs nœuds τ_n et τ_{2n} .

La B-spline trigonométrique et $M_{i,h}$ et $M_{i,\frac{h}{2}}$ pourrait satisfaire les équations de raffinement suivantes :

Pour $i = 0, \dots, n - 4$,

$$M_{i,h}(t) = g(h) \left(M_{2i,\frac{h}{2}}(t) + M_{2i+4,\frac{h}{2}}(t) \right) + \frac{1}{2} \left(M_{2i+1,\frac{h}{2}}(t) + M_{2i+3,\frac{h}{2}}(t) \right) + H(h)M_{2i+2,\frac{h}{2}}(t) \quad (4.6)$$

Les équations aux conditions limites respectives des deux côtés gauche et droite sont données par :

$$\begin{aligned} M_{-3,h}(t) &= M_{-3,\frac{h}{2}}(t) + A(h)M_{-2,\frac{h}{2}}(t), \\ M_{-2,h}(t) &= B(h)M_{-2,\frac{h}{2}}(t) + C(h)M_{-1,\frac{h}{2}}(t) + D(h)M_{0,\frac{h}{2}}(t), \\ M_{-1,h}(t) &= \varepsilon(h)M_{-1,\frac{h}{2}}(t) + F(h)M_{0,\frac{h}{2}}(t) + \frac{1}{2}M_{1,\frac{h}{2}}(t) + g(h)M_{2,\frac{h}{2}}(t), \\ M_{n-3,h}(t) &= g(h)M_{2n-6,\frac{h}{2}}(t) + \frac{1}{2}M_{2n-5,\frac{h}{2}}(t) + F(h)M_{2n-4,\frac{h}{2}}(t) + \varepsilon(h)M_{2n-3,\frac{h}{2}}(t), \\ M_{n-2,h}(t) &= D(h)M_{2n-4,\frac{h}{2}}(t) + C(h)M_{2n-3,\frac{h}{2}}(t) + B(h)M_{2n-2,\frac{h}{2}}(t), \\ M_{n-1,h}(t) &= A(h)M_{2n-2,\frac{h}{2}}(t) + M_{2n-1,\frac{h}{2}}(t), \end{aligned}$$

Avec

$$A(h) = \frac{h \cos\left(\frac{h}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\sin(h) - h},$$

$$B(h) = \frac{2 \left(h - 2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \right) \cos^2\left(\frac{h}{4}\right)}{h - \sin(h)}$$

$$C(h) = \frac{h(\cos(h) - 1)}{2h \cos(h) - 2 \sin(h)},$$

$$D(h) = \frac{h \sin^2\left(\frac{h}{4}\right)}{\sin(h) - h \cos(h)}$$

$$\varepsilon(h) = \frac{h - 2 \sin(h) + h \cos(h)}{2h \cos(h) - 2 \sin(h)},$$

$$g(h) = \frac{1}{8} \sec^2\left(\frac{h}{4}\right),$$

$$F(h) = 1 - D(h) - g(h);$$

$$H(h) = 1 - 2g(h)$$

Pour vérifier ce théorème nous prenons le cas :

$$- \quad i = 0$$

On pose :

$$M_{i,h}(t) = g(h) \left(M_{2i,\frac{h}{2}}(t) + M_{2i+4,\frac{h}{2}}(t) \right) + R(h) \left(M_{2i+1,\frac{h}{2}}(t) + M_{2i+3,\frac{h}{2}}(t) \right) + H(h)M_{2i+2,\frac{h}{2}}(t)$$

$$- \quad \text{Pour } t \in [0, h] \text{ respectivement } t \in [3h, 4h]$$

Nous trouvons $M_{0,h}(t) = g(h)M_{0,h/2}(t)$, respectivement $(M_{0,h}(t) = g(h)M_{4,h/2}(t))$

$$\text{Avec } g(h) = \frac{1}{8} \sec^2\left(\frac{h}{4}\right);$$

Puis, en utilisant (4.2) on obtient (voir Figure 4.16 (a))

$$- \quad \text{Pour } R(h) \text{ on prend } t \in [0, 2h] \text{ ou } t \in [2h, 4h]$$

Puis pour , $t \in [h, 2h]$, $M_{0,h}(t) = g(h)M_{0,h/2}(t) + R(h)M_{1,h/2}(t)$

Ainsi, en utilisant (4.2), nous obtenons (voir Figure 4.16 (a)) :

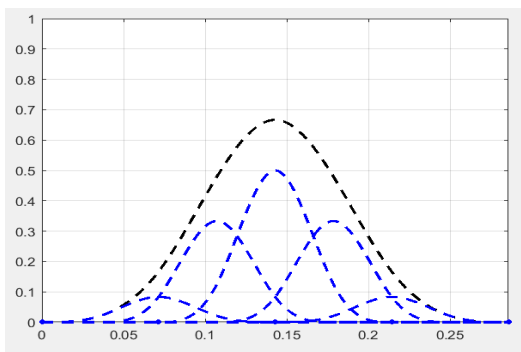
$$R(h) = \frac{1}{2}$$

- Pour $H(h)$ nous prenons $t \in [h, 3h]$, nous constatons (voir **Figure 4.16 (a)**),

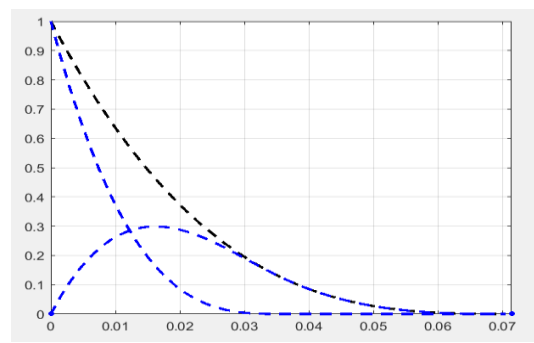
$$M_{0,h}(t) = g(h) \left(M_{0,\frac{h}{2}}(t) + M_{4,\frac{h}{2}}(t) \right) + R(h) \left(M_{1,\frac{h}{2}}(t) + M_{3,\frac{h}{2}}(t) \right) + H(h)M_{2,\frac{h}{2}}(t). \quad (4.7)$$

Ensuite, en utilisant (4.2) on obtient : $H(h) = 1 - 2g(h)$

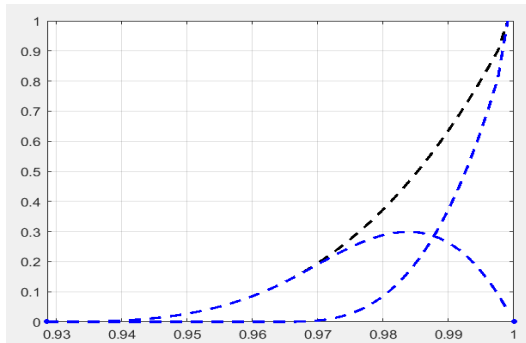
On utilise une technique similaire, pour les autres cas de i .



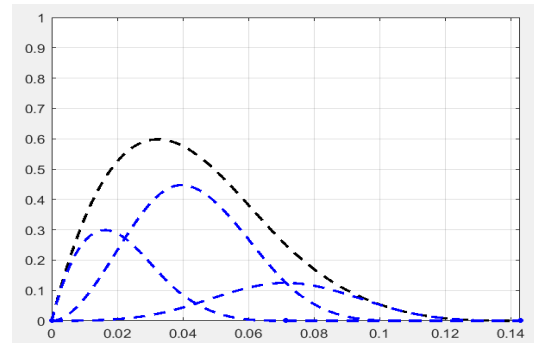
(a)



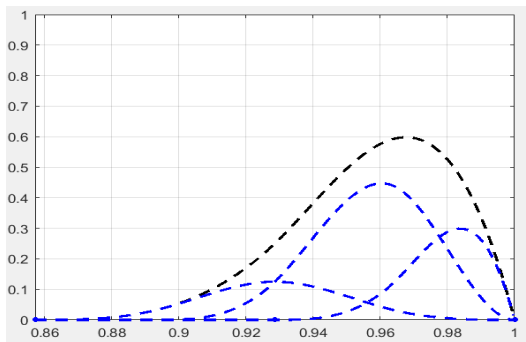
(b)



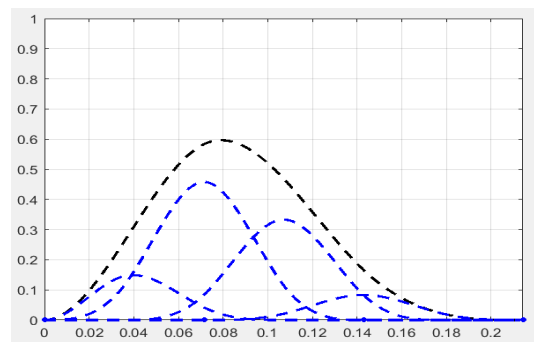
(c)



(d)



(e)



(f)

En effet, en utilisant l'équation (4.8), la formule (4.3) devient.

$$C_4(t) = P M_{\frac{h}{2}}^T E_h \quad (4.9)$$

Où $P = (P_{-3}, P_{-2}, \dots, P_{n-1})$.

Le raffinement des surfaces B-spline trigonométriques est exprimé par :

$$S(u, w) = R M_{\frac{h}{2}}^T E_h \quad (4.10)$$

Où :

$$R = (Q_{-3} M_{k/2}^T E_k, Q_{-2} M_{k/2}^T E_k, \dots, Q_{n-1} M_{k/2}^T E_k)$$

$$i = -3, \dots, m-1, \quad Q_i = (P_{-3,i}, \dots, P_{n-1,i}).$$

Exemple 2 :

Prenant l'exemple de la section 4.2, on veut améliorer le lissage de la courbe B-spline trigonométrique d'ordre 4 par utilisation de l'équation de raffinement (4.9)

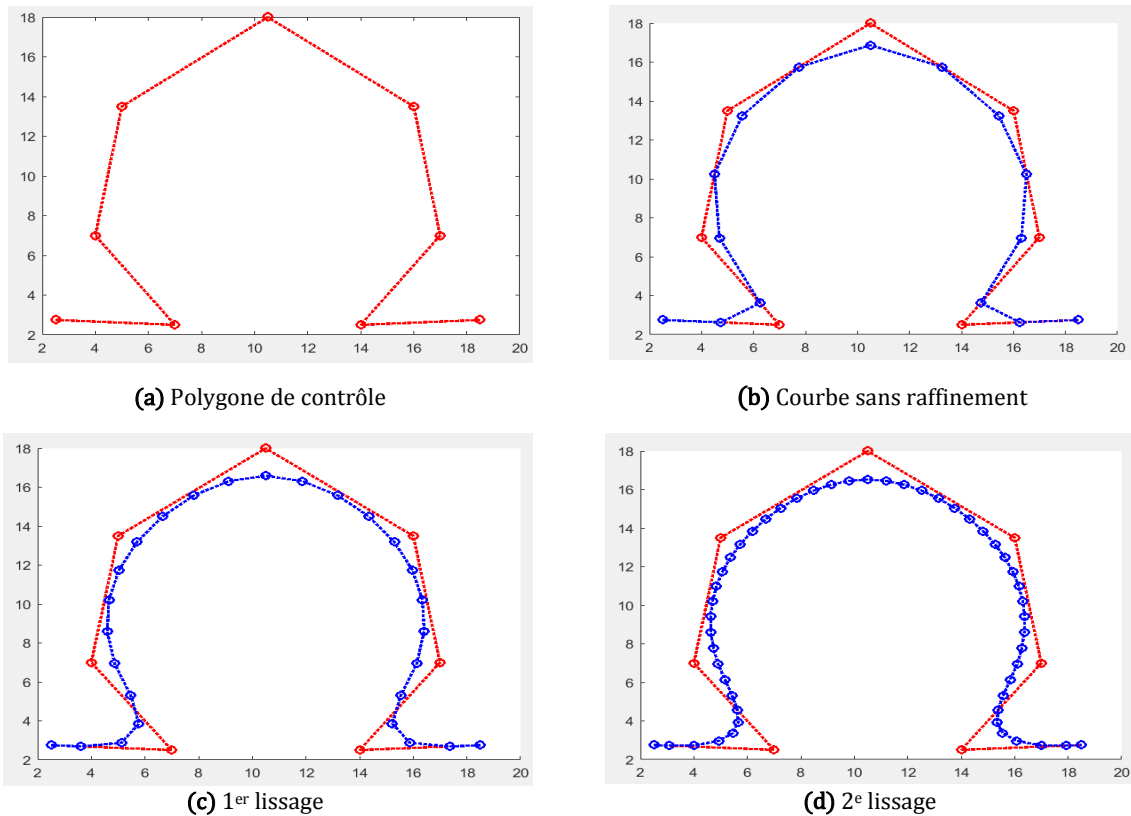


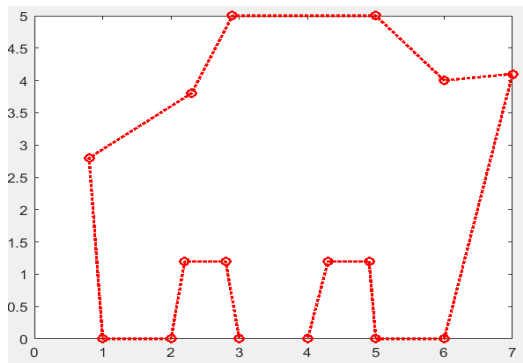
Figure 4.17 : La courbe de subdivision produite par la formule de raffinement

Exemple 3

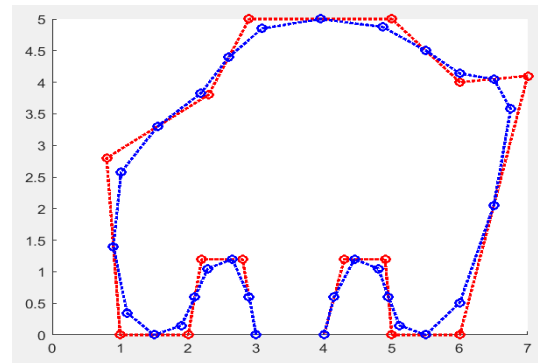
Soient les points de contrôle ci-dessous, on cherche un lissage parfait pour cette géométrie en recourant au schéma de subdivision traité précédemment.

$$P_0(3,0) ; P_1(2.8,1.2) ; P_2(2.2,1.2) ; P_3(2,0) ; P_4(1,0) ; P_5(0.8,2.8) ; P_6(2.3,3.8) ; P_7(2.9,5)$$

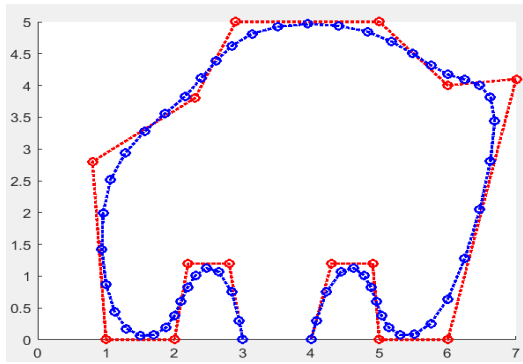
$P_8(5,5)$; $P_9(6,4)$; $P_{10}(7,4.1)$; $P_{11}(6,0)$; $P_{12}(5,0)$; $P_{13}(4.9,1.2)$; $P_{14}(4.3,1.2)$; $P_{15}(4,0)$;



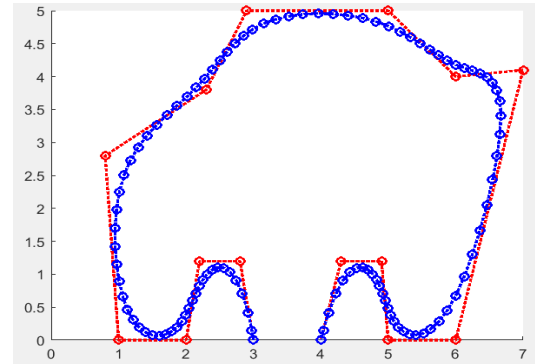
(a) Polygone de contrôle



(b) Courbe sans raffinement



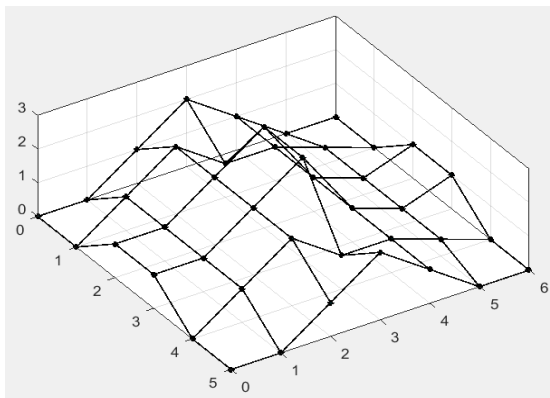
(c) 1^{er} lissage



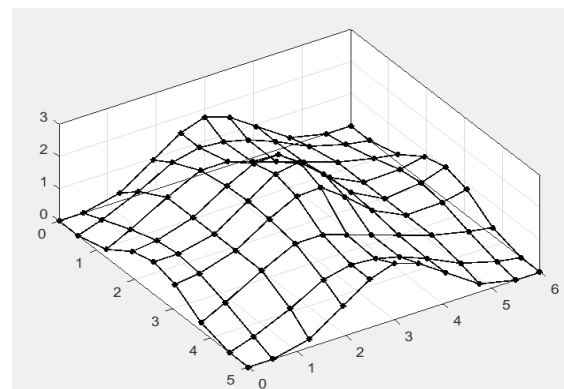
(d) 2^{em} lissage

Figure 4.18 : Reconstruction de la courbe par UATB d'ordre 4 avec schéma de subdivision

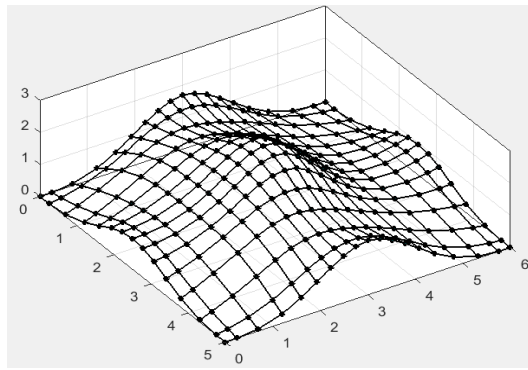
Exemple 4: Pour la reconstruction de la surface raffinée, on prend l'exemple de la section 4.3



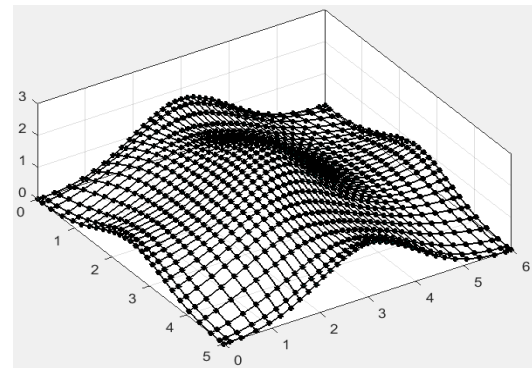
(a) Polygone de contrôle



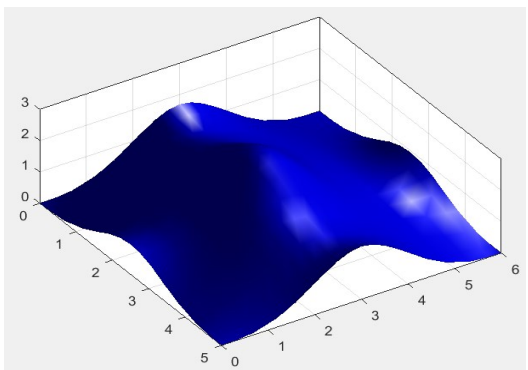
(b) Surface sans raffinement



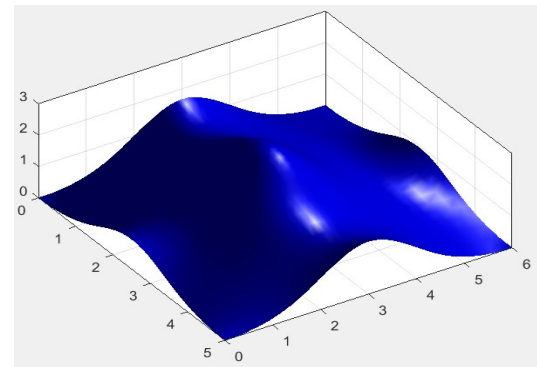
(c) 1er lissage



(d) 2^{eme} lissage



(e) 1^{ere} lissage



(f) 2^{eme} lissage

Figure 4. 19 : Deux étapes de la subdivision des surfaces produites par la formule de raffinement (4.10)

4.5 APPLICATION INDUSTRIELLE

Les surfaces gauches ont connu un énorme progrès, on les trouve dans diverses applications industrielles, notamment en automobile, aéronautique, etc.

L'utilisation des pièces freeform en automobile a permis de réduire concrètement la consommation de carburants et les effets nuisibles à l'environnement.

Dans cette illustration, nous allons procéder à la reconstruction d'un capot de voiture à partir du nuage de points (**Annexe 2, Tableau 3**), en vue de valider notre modèle avec la stratégie d'approximation, une mise en œuvre par expérimentation nous a permis de reconstruire le modèle nominal CAD et de réduire le délai de reconstruction.

- **1^{ère} étape :**

A partir du nuage de points du capot, nous allons reconstruire le nuage de points

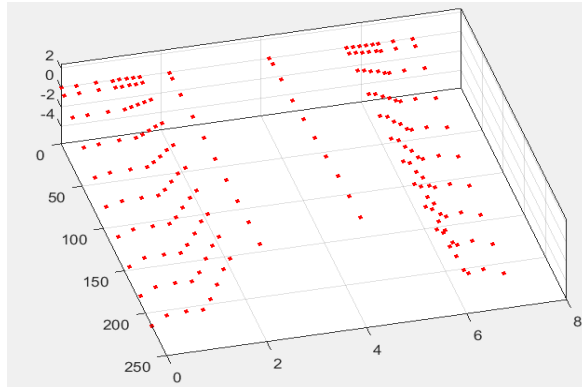


Figure 4. 20 : Nuage des points du capot

- **2^{ème} étape :**

Construction du polygone de contrôle en utilisant le nuage des points

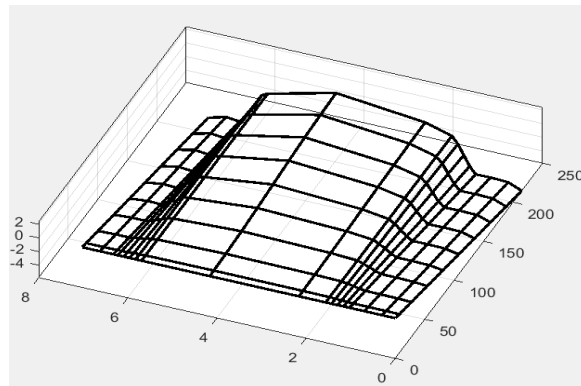


Figure 4. 21 : Polygone de contrôle du capot

- **3^{ème} étape :**

La reconstruction de la surface gauche du capot à partir d'un ensemble de nuage de points, par l'utilisation du produit tensoriel.

Le produit tensoriel de la B-spline trigonométrique à un ensemble de points de contrôle de la grille rectangulaire pour construire la surface associée peut être obtenue par le produit tensoriel de deux courbes de telle sorte que les propriétés des fonctions de base spline ne soient pas modifiées.

L'imposition des conditions aux bords : les courbes limites de la surface (4.4), sont des courbes B-splines trigonométriques. Leurs polygones B-splines trigonométriques sont donnés par les polygones frontières du contour de contrôle. Pour forcer la courbe B-splines à coïncider avec les quatre coins du contour de contrôle, il suffit de répéter les nœuds à la fin des intervalles quatre fois.

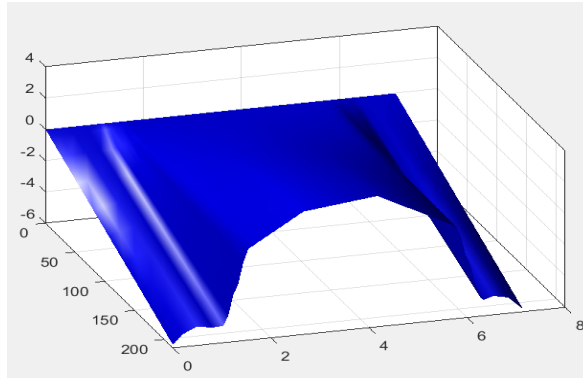


Figure 4. 22 : La reconstruction du capot avec UAT B-spline

- **4^{ème} étape**

Pour améliorer la qualité et la durée de la reconstruction de la reconstruction du capot, on va appliquer un schéma de subdivision à la B-spline trigonométrique d'ordre **4**. Cette procédure subdivise la base B-spline trigonométrique associée à h dans une copie à l'échelle et contractée de lui-même associée à $\frac{h}{2}$.

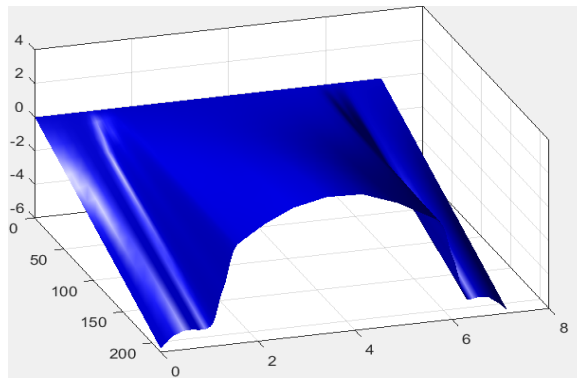


Figure 4. 23 : 1^{ère} opération du lissage du capot

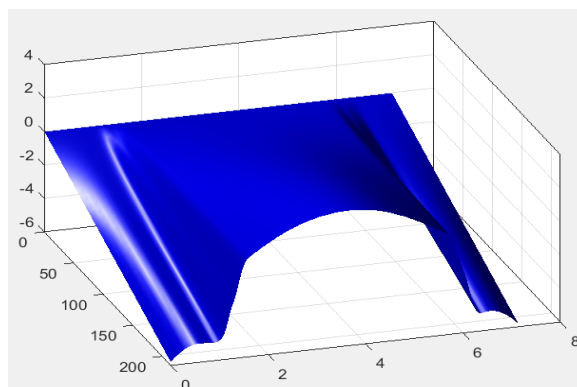


Figure 4. 24 : 2^{ème} opération du lissage du capot

Conclusion

Les résultats numériques que nous avons obtenus sont satisfaisants. Le schéma de subdivision que nous avons utilisé nous a permis d'accélérer la reconstruction de la surface gauche.

Concernant le problème des bords, le problème est résolu grâce à la multiplication des nœuds aux extrémités de leur intervalle.

Le lissage est obtenu grâce à l'ordre des fonctions de la base B-spline, l'utilisation des fonctions trigonométriques et l'utilisation du schéma de subdivision.

La contrôlabilité est une propriété intrinsèque de B-spline.

CHAPITRE 5

L'INTERPOLATION D'HERMITE PAR MORCEAUX BASEE SUR LES B-SPLINES TRIGONOMETRIQUE CUBIQUE AVEC PARAMETRES DE FORME

INTRODUCTION

Les surfaces gauches sont généralement décrites à l'aide des représentations paramétriques (Farin ,1999 ; Farin ,2001). Les modèles les plus utilisés sont des modèles paramétriques de Ferguson et Coons Hermite, Spline, Bspline, Bézier etc.

Les modèles les plus courants sont des modèles qui utilisent $(t^3 t^2 t 1)$, comme base pour un segment d' une courbe cubique paramétrique de Ferguson.

Au cours de la dernière décennie, de nombreuses études ont été menées sur l'interpolation d'Hermite trigonométrique. A titre d'exemple, Xuli a présenté explicitement des méthodes d'interpolation trigonométriques d'Hermite définies par morceaux (Xuli,2015).

Le modèle d'interpolation d'Hermite est l'une des méthodes d'interpolation les plus utilisées pour avoir une meilleure approximation des courbes et des surfaces gauches, car nous utilisons non seulement les valeurs de la fonction, mais aussi celles de ses dérivées.

Dans ce chapitre, nous allons revenir sur ce type de problèmes en construisant un nouveau interpolant d'Hermite en se basant sur une base trigonométrique d'Hermite ayant les mêmes propriétés que la base classique d'Hermite. Ensuite, nous allons introduire un deuxième paramètre de forme à (Liu et al., 2012) pour avoir une continuité de C^3 des courbes et des surfaces gauches d'interpolation. Afin d'illustrer l'intérêt de cette méthode, nous allons donner des exemples de courbes et de surfaces gauches d'interpolation.

5.1 FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES DE LA BASE B-SPLINE CUBIQUE

Dans cette section, nous rappelons la définition et les propriétés intéressantes de la base B-spline du polynôme trigonométrique cubique. Pour plus de détails, voir (Liu, 2012).

Définition 1.

Soit λ un paramètre de forme, tel que $-1 \leq \lambda \leq 1$. Les quatre fonctions suivantes sont définies comme les fonctions de la base B-spline trigonométrique cubique avec un paramètre de forme.

$$\begin{cases} B_0(\lambda, t) = f(\lambda)(1 - \sin(t))(1 - \lambda \sin(t))^2, \\ B_1(\lambda, t) = f(\lambda)(1 + \cos(t))(1 + \lambda \cos(t))^2, \\ B_2(\lambda, t) = f(\lambda)(1 + \sin(t))(1 + \lambda \sin(t))^2, \\ B_3(\lambda, t) = f(\lambda)(1 - \cos(t))(1 - \lambda \cos(t))^2, \end{cases} \quad (5.1)$$

Avec : $f(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2 + 4\lambda + 4}$

Les fonctions trigonométriques de la base B-spline cubique ayant toutes les propriétés souhaitables des B-splines polynomiales classiques (Liu et al., 2012) telles que :

- Positivité : $B_i(\lambda, t) \geq 0, i = 0,1,2,3$
- Partition de l'unité : $\sum_{i=0}^3 B_i(\lambda, t) = 1$
- Symétrie : $B_0(\lambda, t) = B_3\left(\lambda, \frac{\pi}{2} - t\right), B_1(\lambda, t) = B_2\left(\lambda, \frac{\pi}{2} - t\right)$
- Monotonie pour le paramètre λ : quelque soit la valeur de $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:
 - $B_0(\lambda, t)$ et $B_3(\lambda, t)$ sont décroissantes par rapport au paramètre de forme λ
 - $B_1(\lambda, t)$ et $B_2(\lambda, t)$ sont croissantes par rapport au paramètre de forme λ

5.2 COURBE SPLINE CUBIQUE TRIGONOMETRIQUE AVEC UN PARAMETRE DE FORME:

5.2.1 Définition et propriétés

Définition 2:

Soient les Points de contrôles $V_i (i = 0, 1, \dots, n + 1)$ dans \mathfrak{R}^2 ou \mathfrak{R}^3 , λ est un paramètre de forme ($-1 \leq \lambda \leq 1$) et le vecteur nœuds $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$.

Pour $i = 1, \dots, n$, le $i^{\text{ème}}$ segment de la courbe trigonométrique est donné par :

$$v_i(\lambda, t) := \sum_{j=0}^3 V_{i+j-1} B_j(\lambda, t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (5.2)$$

De la même manière, nous pouvons définir la courbe B-spline polynomiale trigonométrique cubique comme suit :

$$v(\lambda, t) := v_i\left(\lambda, \frac{\pi}{2} \times \frac{(t - u_i)}{\Delta u_i}\right), \quad t \in [u_i, u_{i+1}] \quad (5.3)$$

Avec :

$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$, U sont des vecteurs de nœuds équidistants.

La courbe B-spline trigonométrique cubique (5.2) possède les propriétés géométriques intéressantes suivantes : voir (Liu et al., 2012).

1. Propriétés terminales :

- Pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$, on calcule $v(\lambda, t)$ et sa dérivé $v'(\lambda, t)$.

On obtient les résultats suivants :

$$\begin{cases} v(\lambda, 0) = \frac{V_0 - 2V_1 + V_2}{2\lambda^2 + 4\lambda + 4} + V_1, \\ v(\lambda, \frac{\pi}{2}) = \frac{V_1 - 2V_2 + V_3}{2\lambda^2 + 4\lambda + 4} + V_2, \\ v'(\lambda, 0) = \frac{(2\lambda + 1)(V_2 - V_0)}{2\lambda^2 + 4\lambda + 4}, \\ v'(\lambda, \frac{\pi}{2}) = \frac{(2\lambda + 1)(V_3 - V_1)}{2\lambda^2 + 4\lambda + 4}, \end{cases} \quad (5.4)$$

2. Symétrie : les points de contrôle V_0, \dots, V_3 et les points de contrôle V_3, \dots, V_0 définissent la même courbe B-spline trigonométrique, c.à.d. :

$$v(\lambda, t) = v(\lambda, \frac{\pi}{2} - t)$$

3. Invariance géométrique : Puisque les fonctions de base ont la propriété de la partition de l'unité. La forme de ces courbes B-Spline trigonométriques est indépendante du choix des systèmes de coordonnées.
4. Enveloppe convexe : Comme les fonctions de base ont les propriétés de la positivité et de la partition de l'unité, l'ensemble des segments de la courbe doit se situer à l'intérieur de son polygone de contrôle V_0, \dots, V_3 .
5. Propriété de la diminution de variation

5.2.2 Exemples numériques

En utilisant les propriétés terminales (5.4) on peut reconstruire :

- Pour réaliser une courbe ouverte $v(\lambda, t)$ interpolant V_0 et V_{n+1} , il suffit d'ajouter quatre points de contrôle $V_{-2} = V_{-1} = V_0$ et $V_{n+3} = V_{n+2} = V_{n+1}$.
- Pour reconstruire une courbe fermée trigonométrique $v(\lambda, t)$, on ajoute quatre points de contrôle

$$V_{-2} = V_n, V_{-1} = V_{n+1}, V_{n+2} = V_0, \text{ et } V_{n+3} = V_1.$$

La Figure 5:1 montre la reconstruction des deux types de courbes ouverte et fermée en fixant comme valeur de λ :

- $\lambda = 0.5$: la courbe reconstruite spline cubique trigonométrique (bleue).
- $\lambda = 0.8$: la courbe reconstruite spline cubique trigonométrique (rouge).
- $\lambda = 1$: la courbe reconstruite spline cubique trigonométrique (noire).

Lors de la reconstruction de cette courbe, on a utilisé U comme vecteur de nœuds uniforme. On remarque que lorsque λ augmente la courbe se rapproche du polygone de contrôle.

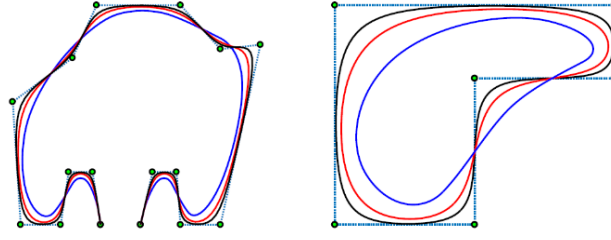


Figure 5.1 : Effet de la variation du paramètre de forme λ sur la forme de la courbe fermée ou ouverte

5.3 INTERPOLATION D'HERMITE BASEE SUR B-SPLINE CUBIQUE TRIGONOMETRIQUE

5.3.1 Bases d'interpolation d'Hermite des B-spline cubique trigonométrique

L'objectif de cette partie est de déterminer une base trigonométrique d'Hermite cubique $TB_0^\alpha(t), TB_1^\alpha(t), TB_2^\alpha(t)$, et $TB_3^\alpha(t)$, en se basant sur l'analogie des fonctions polynômiales cubiques de la base classique d'Hermite. Ces fonctions de base sont déterminées sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tout en imposant les quatre conditions aux limites suivantes (Hajji , 2019) :

- Pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$, on calcule $TB_0^\alpha(t), TB_1^\alpha(t), TB_2^\alpha(t)$ et $TB_3^\alpha(t)$, et sa dérivée première $TB_0^{\alpha(1)}(t); TB_1^{\alpha(1)}(t), TB_2^{\alpha(1)}(t)$ et $TB_3^{\alpha(1)}(t)$
- Pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$

$$TB_0^\alpha(0) = 0, TB_0^\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, TB_0^{\alpha(1)}(0) = -\alpha_1, TB_0^{\alpha(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$TB_1^\alpha(0) = 1, TB_1^\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, TB_1^{\alpha(1)}(0) = 0, TB_1^{\alpha(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\alpha_2,$$

$$TB_2^\alpha(0) = 0, TB_2^\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, TB_2^{\alpha(1)}(0) = \alpha_1, TB_2^{\alpha(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$TB_3^\alpha(0) = 0, TB_3^\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, TB_3^{\alpha(1)}(0) = 0, TB_3^{\alpha(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha_2,$$

Remarque : L'existence des fonctions $TB_0^\alpha, TB_1^\alpha, TB_2^\alpha$, et TB_3^α est assurée si on considère $\langle B_0(\lambda, t), B_1(\lambda, t), B_2(\lambda, t), B_3(\lambda, t) \rangle$ comme un espace des solutions.

On peut réécrire les expressions sous une forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} TB_0^\alpha(\lambda, t) \\ TB_1^\alpha(\lambda, t) \\ TB_2^\alpha(\lambda, t) \\ TB_3^\alpha(\lambda, t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_1 & \delta_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_0(\lambda, t) \\ B_1(\lambda, t) \\ B_2(\lambda, t) \\ B_3(\lambda, t) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Avec :

$$\delta_0 = \frac{\alpha(2\lambda(\lambda+2)(\lambda(\lambda+2)+2)+1)}{\lambda(\lambda+2)(2\lambda+1)},$$

$$\delta_1 = \frac{-\alpha(\lambda+1)^2}{\lambda(\lambda+2)(2\lambda+1)},$$

$$\delta_2 = \frac{\alpha}{\lambda(\lambda+2)(2\lambda+1)},$$

$$\gamma_0 = \frac{(\lambda+1)^2(2\lambda+1) - \alpha(2\lambda(\lambda+2)(\lambda(\lambda+2)+2)+1)}{\lambda(\lambda+2)(2\lambda+1)},$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha(\lambda+1)^2 - 2\lambda - 1}{\lambda(\lambda+2)(2\lambda+1)},$$

$$\gamma_2 = \frac{(\lambda+1)^2(2\lambda+1) - \alpha}{\lambda(\lambda+2)(2\lambda+1)},$$

Les quatre fonctions de base trigonométrique d'Hermite $TB_i^\alpha, i = 0, \dots, 3$ sont illustrées graphiquement dans la **Figure 5.2**. Les B-splines d'Hermite trigonométriques $TB_i^\alpha, i = 0, \dots, 3$ ont les propriétés suivantes :

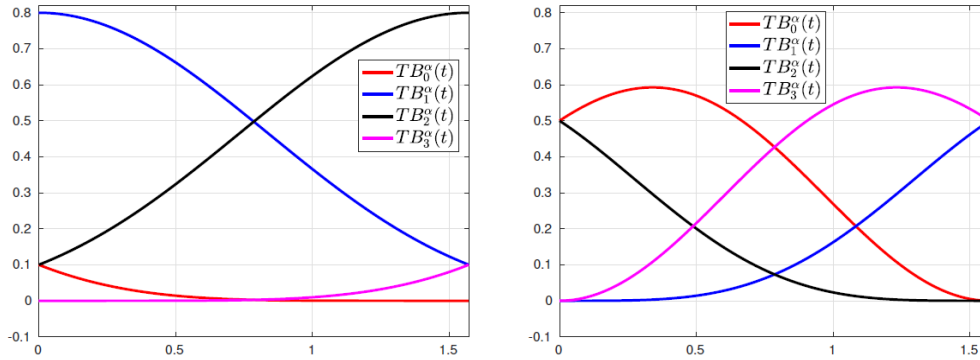


Figure 5.2 : Fonctions de base trigonométrique Hermite $TB_i^\alpha, i = 0, \dots, 3$ avec différents choix de λ et α

Proposition :

Soit $-1 \leq \lambda \leq 1$, et pour tout entier positif α , les fonctions trigonométriques $TB_i^\alpha, i = 0, \dots, 3$ satisfont les propriétés suivantes:

- Partition de l'unité : $\sum_{i=0}^3 TB_i^\alpha(\lambda, t) = 1, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
- Symétrie : $TB_0^\alpha(\lambda, t) = TB_3^\alpha(\lambda, \frac{\pi}{2} - t), TB_1^\alpha(\lambda, t) = TB_2^\alpha(\lambda, \frac{\pi}{2} - t)$,

Démonstration :

Nous allons vérifier la partition de l'unité :

$$\sum_{i=0}^3 TB_i^\alpha(\lambda, t) = (\delta_0 + \gamma_1 + \gamma_0 + \delta_1)(B_0(\lambda, t) + B_3(\lambda, t)) + (\delta_1 + \gamma_2 + \gamma_1 + \delta_2)(B_1(\lambda, t) + B_2(\lambda, t)).$$

En vérifiant $(\delta_0 + \gamma_1 + \gamma_0 + \delta_1) = 1$ et $(\delta_1 + \gamma_2 + \gamma_1 + \delta_2) = 1$

Nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^3 TB_i^\alpha(\lambda, t) = (B_0(\lambda, t) + B_1(\lambda, t) + B_2(\lambda, t) + B_3(\lambda, t)) = 1.$$

La symétrie provient de la symétrie des fonctions de base $B_i(\lambda, t)$ et celle des lignes 1 et 4 (respectivement 2 et 3) de la matrice (5.5).

5.3.2 Interpolation trigonométrique Spline Hermite cubique avec paramètres de forme

Nous avons quatre points distincts $P_j \in \mathfrak{R}^2, j = 0, \dots, 3$.

Nous recherchons une solution du problème d'interpolation trigonométrique Hermite

$$\begin{cases} TH_\alpha(\lambda, 0) = P_1, \\ TH_\alpha(\lambda, \pi/2) = P_2, \\ TH_\alpha^{(1)}(\lambda, 0) = \alpha(P_2 - P_0), \\ TH_\alpha^{(1)}(\lambda, \pi/2) = \alpha(P_3 - P_1). \end{cases} \quad (5.6)$$

Où $TH_\alpha(\lambda, t): [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathfrak{R}^2$ est la courbe trigonométrique d'Hermite paramétrique cubique, α est un réel positif et $-1 \leq \lambda \leq 1$.

Les deux Figures 5.3(a) et 5.3(b) illustrent la reconstruction des courbes splines cubiques trigonométriques d'Hermite aux quatre points $P_j \in \mathfrak{R}^2, j = 0, \dots, 3$, avec les différentes valeurs des paramètres de forme λ et α .

Proposition :

Soit $-1 \leq \lambda \leq 1$ et α étant un réel positif. Pour tous les points d'interpolation $P_j \in \mathfrak{R}^2, j = 0, \dots, 3$, il existe un unique interpolant de la forme suivante :

$$TH_\alpha(\lambda, t) = \sum_{j=0}^3 P_j TB_j^\alpha(\lambda, t), t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad (5.7)$$

Satisfait les conditions d'interpolation (5.6)

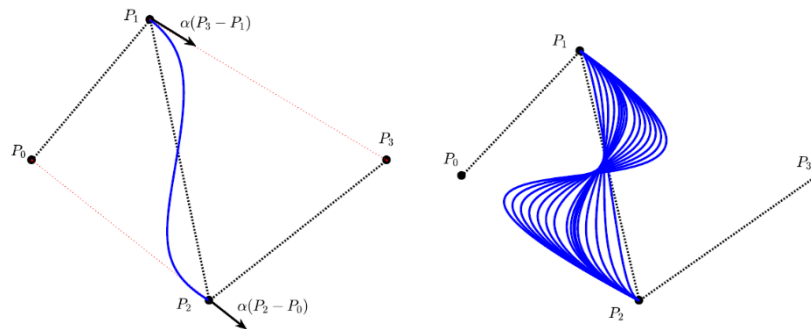


Figure 5.3 : (a) Courbe Spline Hermite trigonométrique cubique créée avec quatre points de contrôle.
(b) Courbes Spline Hermite trigonométrique cubique reconstruites avec différents choix de λ et α

5.3.3 Courbe Spline trigonométrique Hermite

Le résultat principal de ce travail consiste à construire des courbes splines d'interpolation. Nous considérons les points d'interpolation $P_i (k = 0, 1, \dots, n + 1)$, le vecteur nodal $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$. et les deux paramètres de forme λ et α ($-1 \leq \lambda \leq 1, \alpha > 0$).

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $i = 1, \dots, n - 1$

Nous définissons le $i^{\text{ème}}$ segment Spline trigonométrique d'Hermite par :

$$P_i(\lambda, t) := \sum_{j=0}^3 p_{i+j-1} T B_j^\alpha(\lambda, t) \quad (5.8)$$

La courbe spline d'interpolation trigonométrique d'Hermite est donnée par :

$$P(\lambda, t) := P_i(\lambda, \frac{\pi}{2} * \left(\frac{t-u_i}{\Delta u_i}\right), t \in [u_i, u_{i+1}], \quad (5.9)$$

Avec $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i, i = 1, 2, \dots, n - 1,$

U : le vecteur nodal.

Nous étudions la continuité de la spline d'interpolation.

La continuité de la courbe spline d'interpolation trigonométrique d'Hermite (5.9), est la suivante:

$$P^{(k)}(\lambda, u_i^-) = \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta u_{i+1}}\right)^k P^{(k)}(\lambda, u_i^+), \quad (5.10)$$

- a - pour $\lambda = 1 - \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{1}{4}, k = 0, 1, 2, 3.$

- b - pour $\lambda \neq 1 - \sqrt{2}$ et $\alpha > 0, k = 0, 1, 3$

Démonstration :

Pour démontrer ce résultat important, nous calculons les dérivés successifs de l'équation (5.8), jusqu'à la troisième dérivation, nous déduisons:

$$P_{i-1}(\lambda, \frac{\pi}{2}) = P_i(\lambda, 0) = P_i$$

$$P_{i-1}^{(1)}(\lambda, \frac{\pi}{2}) = P_i^{(1)}(\lambda, 0) = \alpha(P_{i+1} - P_{i-1}),$$

$$P_{i-1}^{(2)}(\lambda, \frac{\pi}{2}) = \frac{\alpha(2(\lambda + 1)^2 P_{i+1} + ((\lambda - 2)\lambda - 1)(P_{i-2} - P_i)) + 2(-\alpha(\lambda + 1)^2 + 2\lambda + 1)P_{i-1} - 2(2\lambda + 1)P_i}{(2\lambda + 1)},$$

$$P_i^{(2)}(\lambda, 0) = \frac{\alpha(2(\lambda + 1)^2(P_{i-1} - P_{i+1}) + ((\lambda - 2)\lambda - 1)P_{i+2}) + (\alpha(1 - (\lambda - 2)\lambda) - 4\lambda - 2)P_i + 2(2\lambda + 1)P_{i+1}}{(2\lambda + 1)},$$

$$P_{i-1}^{(3)}(\lambda, \frac{\pi}{2}) = P_i^{(3)}(\lambda, 0) = \frac{5}{4}(P_{i+1} - P_{i-1})$$

$$\text{Donc} \quad P_{i-1}^{(k)}(\lambda, \frac{\pi}{2}) = P_i^{(k)}(\lambda, 0), -1 \leq \lambda \leq 1, \alpha > 0, k = 0, 1, 3. \quad (5.11)$$

$$u \in [u_i, u_{i+1}], t = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u - u_i}{\Delta u_i}$$

$$\text{Alors} \quad P^{(k)}(\lambda, u) = \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\Delta u_i}\right)^{(k)} P_i^{(k)}(\lambda, t)$$

Soit

$$\begin{aligned} P^{(k)}(\lambda, u_i^-) &= \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\Delta u_{i-1}}\right)^{(k)} P_{i-1}^{(k)}\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right), \\ P^{(k)}(\lambda, u_i^+) &= \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\Delta u_i}\right)^{(k)} P_{i-1}^{(k)}(\lambda, 0). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Alors d'après (5.11) et (5.12), nous vérifions la continuité de classe C^1 pour $P(\lambda, u)$.

En effet, le résultat important trouvé, lorsque les deux paramètres de forme prennent simultanément $\lambda=1-\sqrt{2}$ et $\alpha = 1/4$, nous avons pour $P(\lambda, u)$ la continuité de classe C^3 . (Hajji,2019)

Dans la Figure 5.4, nous donnons des exemples de courbes interpolantes de spline Hermite trigonométrique cubique ouvertes et fermées avec les différents valeurs de λ et α .

Pour le cas $\lambda=1-\sqrt{2}$ et $\alpha = 1/4$ la courbe est de classe C^3 , si non la courbe est de classe C^1 .

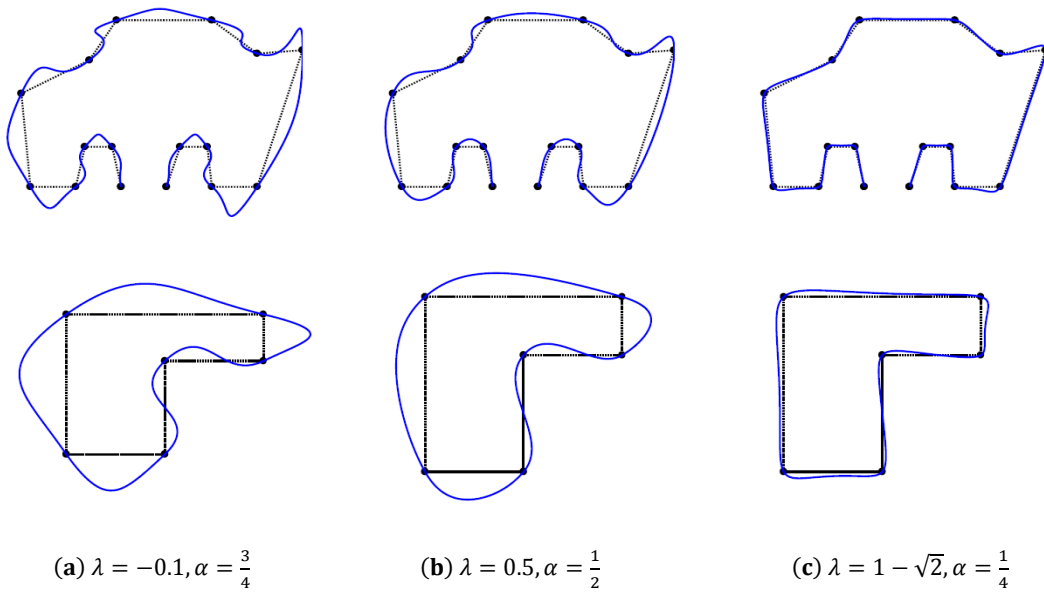


Figure 5.4 : Courbes d'interpolation spline d'Hermite trigonométriques cubique ouverte et fermée avec les différentes valeurs de λ et α .

5.4 SURFACES SPLINES D'HERMITE TRIGONOMÉTRIQUES CUBIQUES

D'après les travaux de Y.ZHU et al. (Voir (Zhu ,2012)), nous définissons les surfaces de splines trigonométriques comme un produit tensoriel de deux courbes.

Définition :

Nous avons :

- $(n + 2) \times (n + 2)$ points d'interpolations noté P_{ij}
- $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ les vecteurs de nœuds
- $\alpha > 0$ est un réel

Pour : $-1 \leq \lambda \leq 1$

Le carreau de surface de spline trigonométrique paramétrique a la forme suivante :

$$S_{i,j}(\lambda, t, s) := \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 P_{i+k-1, j+l-1} TB_k^\alpha(\lambda, t) TB_l^\alpha(\lambda, s) \quad (5.13)$$

$$(t, s) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

La surface de spline paramétrique trigonométrique est donnée par,

$$S(\lambda, t, s) := S_{i,j} \left(\lambda, \frac{\pi \cdot (t - u_i)}{2\Delta u_i}, \frac{\pi \cdot (s - u_j)}{2\Delta u_j} \right), \quad (5.14)$$

$$(t, s) \in [u_i, u_{i+1}] \times [u_j, u_{j+1}].$$

Avec $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$.

La surface $S(\lambda, t, s)$ a la propriété d'interpolation suivante :

D'après Lemme $(i, j)^{\text{ème}}$ patch bi-trigonométrique d'Hermite $S_{i,j}(u, v)$ nous vérifions les propriétés d'interpolation suivantes:

$$S_{i,j}(\lambda, 0, 0) = S_{i,j-1}(\lambda, \frac{\pi}{2}, 0) = S_{i-1, j-1}(\lambda, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = P_{ij},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{i,j}(\lambda, 0, 0) = \frac{\partial}{\partial t} S_{i,j-1}(\lambda, 0, \frac{\pi}{2}) = \frac{\partial}{\partial t} S_{i-1, j-1}(\lambda, \frac{\pi}{2}, 0) = \frac{\partial}{\partial t} S_{i-1, j-1}(\lambda, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \alpha(P_{i+1, j} - P_{i-1, j}),$$

$$\frac{\partial}{\partial s} S_{i,j}(\lambda, 0, 0) = \frac{\partial}{\partial s} S_{i,j-1}(\lambda, 0, \frac{\pi}{2}) = \frac{\partial}{\partial s} S_{i-1, j-1}(\lambda, \frac{\pi}{2}, 0) = \frac{\partial}{\partial s} S_{i-1, j-1}(\lambda, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \alpha(P_{i, j+1} - P_{i, j-1}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} S_{i,j}(\lambda, 0, 0) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} S_{i,j-1}(\lambda, 0, \frac{\pi}{2}) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} S_{i-1, j}(\lambda, \frac{\pi}{2}, 0) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} S_{i-1, j-1}(\lambda, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$= \alpha^2(P_{i-1, j-1} - P_{i-1, j+1} - P_{i+1, j-1} - P_{i+1, j+1}),$$

Pour plus de détail, voir (Hajji, 2019)

- La **Figure 5.5 (a)** montre la construction du carreau (patch) bi-trigonométrique d'Hermite $S_{i,j}(u, v)$.
- La **figure 5.5 (b)** montre une surface bi-trigonométrique d'Hermite avec les différentes valeurs des paramètres de forme : $\lambda = -1$, $\alpha = 0.2$ (rouge) et $\lambda = 1$, $\alpha = 0.2$ (bleu).
- La **figure 5.5 (c)** montre un carreau de surface B-spline trigonométrique bi-cubique en utilisant la définition de H. Liu et al. (Voir (Liu , 2012)) avec les différents paramètres: $\lambda = 1$ (rouge) et $\lambda = 0$ (bleu).

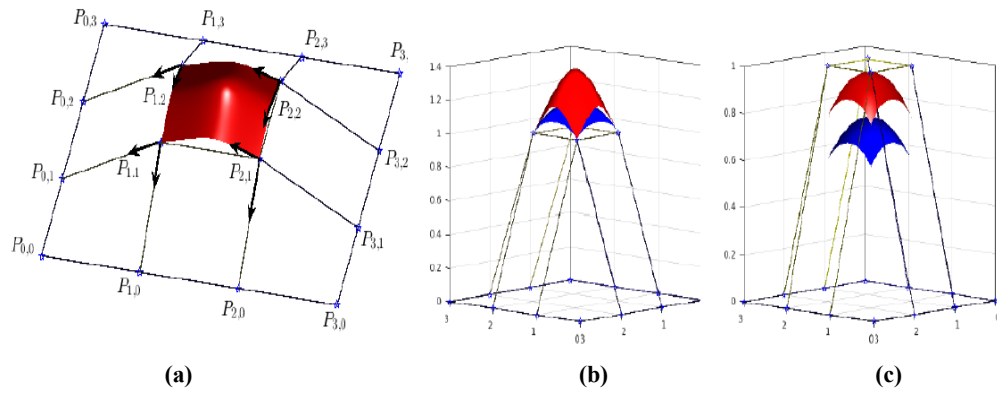


Figure 5.5 : Carreau de surface bi-cubique trigonométrique et bi-trigonométrique Hermite B-spline avec les différents paramètres

La surface $S(\lambda, t, s)$ est obtenue par l'union des carreaux bi-trigonométriques d'Hermite $S_{i,j}(\lambda, t, s)$ de classe C^1 . Pour les surfaces splines trigonométriques paramétriques d'interpolation d'Hermite cubiques $S(\lambda, t, s)$ la continuité entre deux surfaces est une conséquence directe de la construction de cet interpolant. Quant à la continuité C^3 est réalisée en prenant $\lambda = 1 - \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{1}{4}$.

La surface $S(\lambda, t, s)$ est définie par (5.14):

- a - la surface est continue de C^3 , lorsque $\lambda = 1 - \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{1}{4}$
- b - la surface est continue de C^1 lorsque $\lambda \neq 1 - \sqrt{2}$ et $\alpha \geq 0$

Exemple d'application

Afin de justifier la précision et l'efficacité de notre interpolation cubique trigonométrique d'Hermite présentée, nous considérons quelques exemples graphiques. Pour construire un patch de surface Hermite B-spline bi-cubique trigonométrique ou bi-trigonométrique interpolant les quatre arêtes de la surface résultante, nous ajoutons quatre vecteurs colonnes de points de contrôle. ($P_{i,-2} = P_{i,-1} = P_{i,0}, P_{i,n+3} = P_{i,n+2} = P_{i,n+1}, i = 0, 1, \dots, n + 1$) et quatre vecteurs, lignes des points de contrôles ($P_{-2,j} = P_{-1,j} = P_{0,j}$ et $P_{n+3,j} = P_{n+2,j} = P_{n+1,j}, j = 0, 1, \dots, n + 1$).

Soit les points de contrôle :

- $P_{00}(0,0,3), P_{01}(0,1,2), P_{02}(0,2,3), P_{03}(0,3,3), P_{04}(0,4,2), P_{05}(0,5,3)$
- $P_{10}(1,0,2), P_{11}(1,1,3), P_{12}(1,2,4), P_{13}(1,3,4), P_{14}(1,4,3), P_{15}(1,5,2)$
- $P_{20}(2,0,3), P_{21}(2,1,4), P_{22}(2,2,5), P_{23}(2,3,5), P_{24}(2,4,4), P_{25}(2,5,3)$
- $P_{30}(3,0,3), P_{31}(3,1,4), P_{32}(3,2,5), P_{33}(3,3,5), P_{34}(3,4,4), P_{35}(3,5,3)$
- $P_{40}(4,0,2), P_{41}(4,1,3), P_{42}(4,2,4), P_{43}(4,3,4), P_{44}(4,4,3), P_{45}(4,5,2)$
- $P_{50}(5,0,3), P_{51}(5,1,2), P_{52}(5,2,3), P_{53}(5,3,3), P_{54}(5,4,2), P_{55}(5,5,3)$

La reconstruction ci-dessous Figure 5.6 de la surface B-spline trigonométrique bicubique par utilisation de la définition de H. Liu et al. (Voir (Liu et al, 2012)) avec un seul paramètre de forme λ

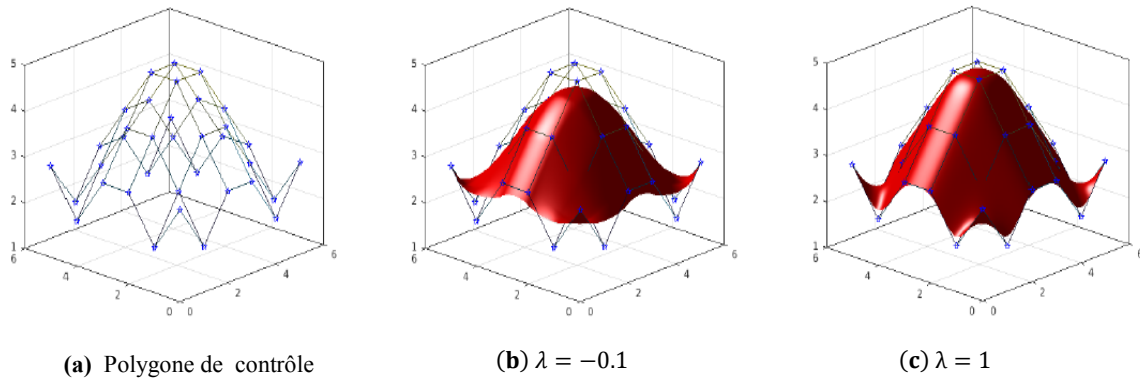


Figure 5. 6 : Patch de surface bicubique B-spline avec différentes valeurs du paramètre de λ .

La reconstruction de la Figure 5.7 de la surface B-spline trigonométrique bicubique avec notre modèle d'étude en utilisant les deux paramètres de forme λ et α

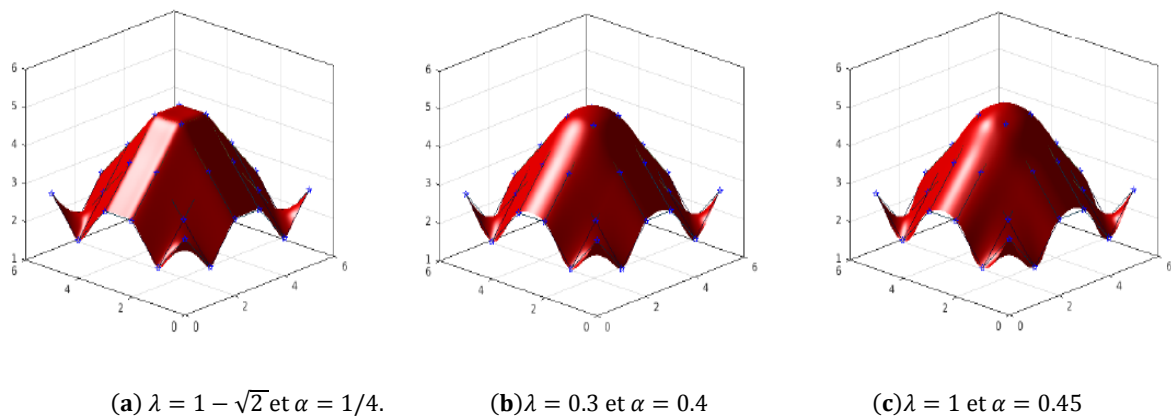


Figure 5. 7 : Patch de surface bicubique B-spline avec les différents paramètres de forme λ et α

5.5 APPLICATION INDUSTRIELLE

Le reverse engineering est un processus qui permet de créer un nouvel objet ayant des fonctionnalités identiques par rapport à l'objet de départ, sans viol de brevet. Cette technique a plusieurs objectifs, nous citons que la compréhension des processus de conception d'un produit, la détection des contrefaçons chez des produits concurrents. Le modèle original de CAO n'est pas suffisant pour soutenir des modifications et/ou les procédés de fabrication courante.

Le principe de cette technique repose sur la collecte d'un nuage de points issu de la surface de l'objet à mesurer à l'aide d'un scanner numérique ou d'une MMT.

Ce nuage de points est traité par les fonctions **CAO** (Conception Assistée par Ordinateur) permettant la reconstruction de surfaces à partir duquel un modèle paramétrique est défini par l'utilisateur et le système générateur (choix des côtes et des relations inter-cotes, tolérance...)

Dans cette optique on souhaite travailler avec notre modèle traité précédemment pour protéger le produit à industrialiser et pour satisfaire la contrainte d'interpoler les points mesurés (points de contrôles) de l'objet réel et d'avoir un lissage parfait de la pièce.

L'objet de cette partie est de reconstruire une aile d'automobile (**Annexe 2, Tableau 4**) selon notre contribution à partir d'un nuage de points mesurés sur machine à mesurer tridimensionnelle (MMT) de l'objet réel, pour avoir le modèle surfacique continu CAD de cette pièce.

A partir du nuage de points d'aile, nous allons reconstruire le nuage de points

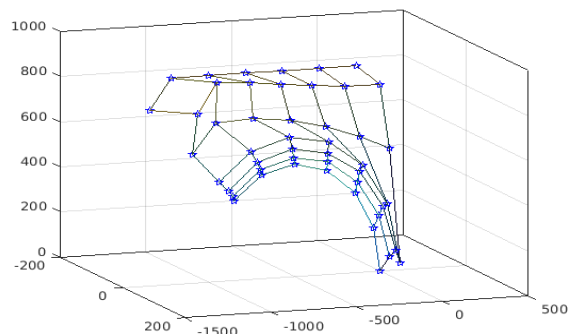


Figure 5. 8 : Polygone de contrôles

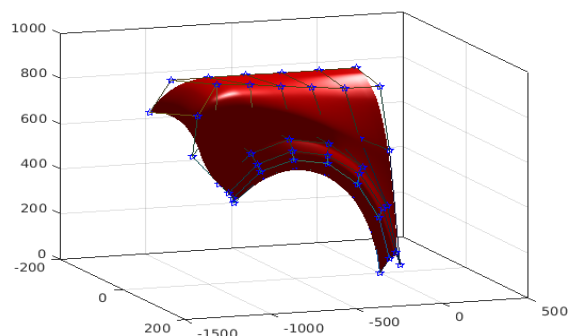


Figure 5. 9 : Reconstruction d'aile avec le paramètre de forme $\lambda = 0$

La **Figure 5.9** représente la reconstruction d'une aile de voiture par la stratégie d'approximation d'après (Liu, 2012) en prenant $\lambda = 0$, comme paramètre de forme. La surface reconstruite se situe à l'intérieur de son polygone de contrôle.

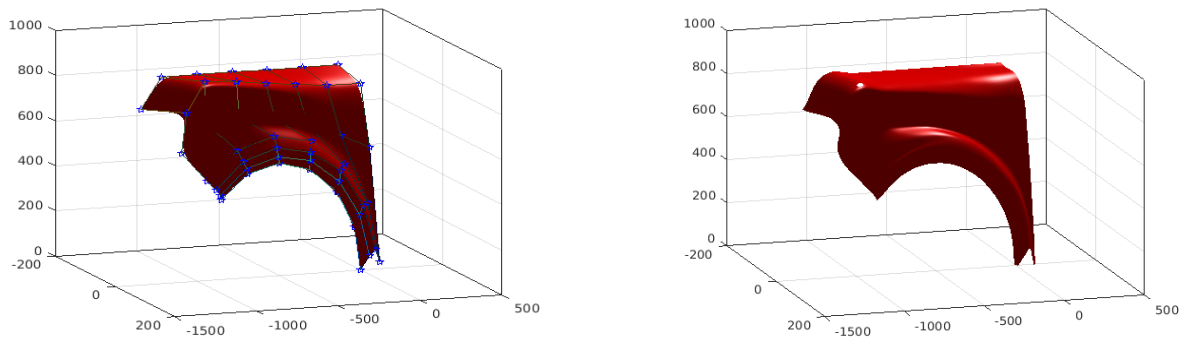


Figure 5. 10 : Reconstruction d'aile avec le paramètre de forme $\lambda = 1$

La **Figure 5.10** représente la reconstruction d'une aile de voiture par la stratégie d'approximation d'après (Liu et al, 2012) en prenant $\lambda = 1$, comme paramètre de forme. La surface reconstruite se situe à l'intérieur de son polygone de contrôle. Il est bien clair que cette reconstruction est plus lisse par rapport à la **Figure 5.9**.

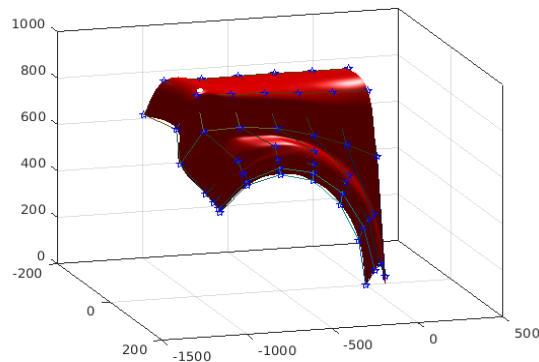


Figure 5. 11 : Reconstruction d'aile avec notre modèle des deux paramètres de forme $\lambda = 0.3$ et $\alpha = 0.4$

La **Figure 5. 11** montre la reconstruction d'une aile de voiture par notre stratégie de contribution: la méthode d'interpolation (Hajji , 2019), en prenant $\lambda = 0.3$ et $\alpha = 0.4$ comme paramètres de forme. La surface reconstruite passe par les points de contrôle et de classe C^1 .

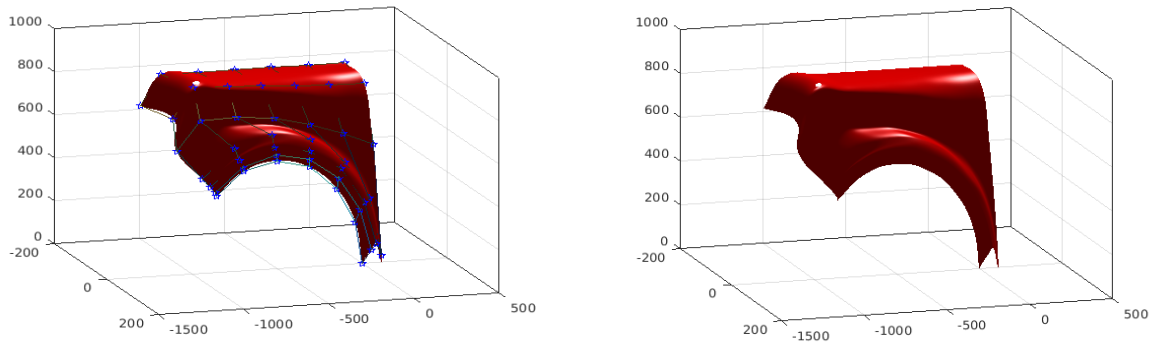


Figure 5.12 : Reconstruction d'aile avec notre modèle des deux paramètres de forme $\lambda = 1$ et $\alpha = 0.45$

La **Figure 5.12** montre la reconstruction d'une aile de voiture par notre stratégie de contribution: la méthode d'interpolation (Hajji, 2019), en prenant $\lambda = 1$ et $\alpha = 0.45$ comme paramètres de forme. La surface reconstruite passe par les points de contrôle et de classe C^1 .

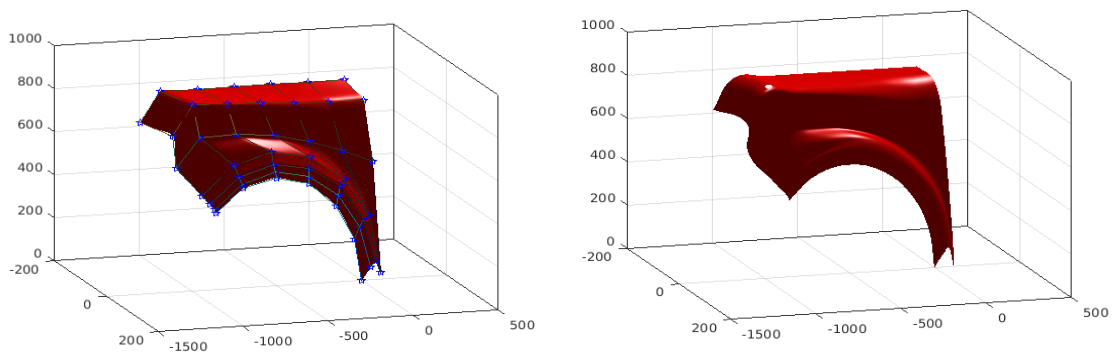


Figure 5.13 : Reconstruction d'aile avec notre modèle des deux paramètres de forme $\lambda = 1 - \sqrt{2}$ et $\alpha = 1/4$

La **Figure 5.13** montre l'obtention d'une reconstruction d'une aile de voiture par notre contribution: (Hajji, 2019), en déterminant $\lambda = 1 - \sqrt{2}$ et $\alpha = 1/4$ comme paramètres de forme. La surface reconstruite obtenue est de classe C^3 .

Conclusion :

Au terme de notre travail, nous avons étudié d'une façon détaillée une nouvelle méthode d'interpolation d'Hermite basée sur B-spline trigonométrique cubique avec deux paramètres de forme. Pendant cette étude nous avons reconstruit des courbes et des surfaces gauches, en répondant aux exigences du lissage. Nous avons mis en évidence l'influence de ces deux paramètres sur la continuité des courbes et des surfaces gauches.

L'utilisation de cette nouvelle base de B-spline trigonométrique cubique la classe C^1 est une conséquence directe, par contre la classe C^3 est obtenue en prenant pour les deux paramètres de forme les valeurs suivantes : $\lambda = 1 - \sqrt{2}$ et $\alpha = 1/4$.

Pour le cas de la caractéristique de la contrôlabilité demandée lors de la reconstruction des courbes et des surfaces gauches ; cette qualité est assurée par l'interpolation par morceau des courbes et des surfaces gauches.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons développé dans cette thèse deux méthodes de reconstruction, l'une par approximation et l'autre par interpolation de reconstruction des courbes et surfaces gauches.

L'objectif était d'explorer une nouvelle voie en utilisant des bases trigonométriques qui ne présentent pas les inconvénients des bases classiques, elles constituent une solution souvent mieux adaptée pour construire des splines d'interpolation locale.

Pour la méthode d'approximation basée sur des B-splines trigonométriques d'ordre 4, nous avons suivi toutes les étapes de vérification des propriétés des bases B-spline, tel que : la positivité, la symétrie, la partition de l'unité et l'indépendance linéaire ; ensuite nous avons procédé par la même démarche de vérification pour la reconstruction des courbes et des surfaces gauches, en s'assurant des propriétés suivantes : propriété d'enveloppe convexe, invariance géométrique, localité et propriétés des extrémités.

Vérifiant ces propriétés intéressantes des bases splines trigonométriques, nous avons reconstruit les courbes et les surfaces gauches d'ordre 4.

Pour améliorer la qualité de la reconstruction des courbes et des surfaces gauches, nous avons proposé une méthode basée sur un schéma de subdivision de la base B-spline trigonométrique associée à une copie réduite et contractée ; cette tâche nous a permis d'avoir un lissage optimal. La validation de cette dernière est réalisée par la modélisation sous Matlab d'un capot d'automobile dont la surface présente un lissage fin.

Nous avons traité le problème d'interpolation du nuage de points par l'introduction d'une base d'Hermite et d'un nouveau paramètre de forme (α) associés au modèle proposé par (Liu et al, 2012). Les propriétés de notre modèle appelé " interpolation d'Hermite par morceau basée sur les B-splines trigonométriques cubique avec deux paramètres de forme (λ et α) " sont : la positivité, la symétrie, la partition de l'unité et la monotonie pour le paramètre de forme λ ; et après la vérification des propriétés exigées (propriétés des extrémités , invariance géométrique , propriété d'enveloppe convexe) par les courbes et les surfaces gauches nous avons procédé à leur reconstruction par l'application de notre modèle.

En appliquant le modèle de Liu pour la reconstruction par interpolation, nous avons conclu que les surfaces reconstruites (pour tout λ) sont de classe C^1 .

Remédiant à cette limitation, nous obtenons une continuité C^3 pour des courbes et des surfaces gauches en fixant les paramètres λ et α respectivement aux valeurs spécifiques $1 - \sqrt{2}$ et $1/4$.

La modélisation d'une aile de voiture par Matlab nous a permis de valider de ce modèle d'interpolation, de confirmer son efficacité dans la reconstruction des courbes et des surfaces gauches de classe C^3 et de conclure son importante valeur ajoutée dans la reconstruction.

La validation de cette dernière méthode est réalisée par la modélisation sous Matlab d'une aile d'automobile dont la surface présente un lissage fin.

Comme perspectives, il nous semble que la généralisation de l'interpolation d'Hermite associé aux B-splines trigonométrique avec des paramètres de forme sera d'un grand intérêt dans l'optimisation du temps de calcul et l'amélioration de la qualité de lissage.

Ces modèles peuvent servir du support de génération de trajectoires d'outil pour l'usinage de pièces mécaniques de précision présentant des surfaces gauches lisses. Ce support peut être intégrer dans la programmation CNC en Fabrication Assisté par Ordinateur (FAO).

Nous recommandons dans le domaine de la robotique, l'insertion de ces modèles dans des algorithmes de calcul des trajectoires lisses par morceaux sans collision avec l'environnement des passages étroits.

Puisque la reconstruction est un maillon essentiel dans la chaîne numérique de contrôle et d'inspection de conformité des pièces. Nous recommandons l'utilisation de ces modèles pour la reconstruction des courbes et des surfaces gauches associées, afin de les comparer avec le modèle CAD et de se confirmer sur sa conformité métrologique.

BIBLIOGRAPHIE

ISO/TS 17450-1:2005, Geometrical product specifications (GPS) - General concepts - Part 1:

Model for geometrical specification and verification.

- A. Lamnii, H. Mraoui, D. Sbibi, A. Zidna, A multi resolution method for fitting scattered data on the sphere, BIT Numerical Mathematics, , 589-61049, (2009) <https://doi.org/10.1007/s10543-009-0230-3>
- A. Lamnii, H. Mraoui, D. Sbibi, A. Zidna, Uniform tension algebraic trigonometric spline wavelets of class C2 and order four, Mathematics and Computers in Simulation,87 (2013),68-86.
<https://doi.org/10.1016/j.matcom.2012.11.006>
- A. Majeed, M.Abbas, A. Abdul Sittar, M.Y .Misro and M. Kamran Airplane designing using Quadratic Trigonometric B-spline with shape parameters AIMS Mathematics, Volume 6, Issue 7, 7669–7683.2021 DOI:10.3934/math.2021445
- B. Kvasov, P .Sattayatham, GB-splines of arbitrary order. J. Comput. Appl. Math.104, 63–88, 1999.
- B. Farin, M.Szafarczyk, The new method of freeform surface honing, Annals of the CIRP, 42/1:425-428, 1993.
- D.J, Struik, 1988. Lectures on Classical Differential Geometry (Second Edition). Toronto: Dover Publications.
- D. Reckzeh .Aerodynamic design of the highlift- wing for a Megaliner aircraft, Aerospace Science and Technology, 7/2:107-119, 2003.
- D. Salomon Curves and Surfaces for Computer Graphics , Springer 2006.
- D. W. Davis, M. Walter, M. Takahashi, T. Masaki, Machining and metrology systems for freeform laser printer mirrors, Proc. in Eng. Sci., Indian Academy of Sciences, 28:925–932, 2003.
- E.. Brinksmeier, O . Riemer, W. Preuß, F. Klocke, T. Pfeifer, M. Weck, W. Michaeli, P. Mayr, H.R .Stock A.Mehner, G.Goch, D. A. Lucca, Process Chains for the Replication of Complex Optical Elements, Annals of the WGP, 1/04, 2004.
- E. Brinksmeier, W. Preuss, Diamond machining of the 3 m reflector of the KOSMA submillimeter telescope by a single-point fly-cutting process, Proc. 11th Ann. Meeting ASPE, 56-61, 1996.
- E. Savio, L De Chiffre et R Schmitt. Metrology of freeform shaped parts. Annals of the CIRP, vol. 56, pages 1–26, 2007.
- E.Savio, L. De Chiffre, Inspection of free form functional surfaces on fan blades, PRIME 2001 Int. Conf., Sestri Levante, Italy, 20-22 June, 2001.
- F. boudjemai, reconstruction de surfaces d'objets 3D à partir de nuages de points par réseaux de neurones 3d-som thèse de l'universite des sciences et technologies de lille automatique et informatique industrielle, D.J. 2006.
- F. Cazals, J. Giesen. Delaunay Triangulation based Surface Reconstruction: Idas and Algorithms,INRIA Research Report 5393, 2004
- F. Klocke, O. Dambon, Precision Machining of Glass for Optical Applications, Proc. of Int. Workshop on Extreme Optics and Sensors, Tokyo, Japan, 185-193, 2003.
- F. Yamaguchi, Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design, Springer - Verlag, September 1988.

- G. Farin. Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide, 5th edition, Morgan Kaufmann Publishers Inc. San Francisco, CA, USA, 2002
- G. Farin, Curves and surfaces for cagd. In A Practical Guide 5th Edition. CADG, 2001.
- G. Farin. Nurbs: From projective geometry to practical use., In 2nd edition, Wellesley, MA, AK Peters.1999
- G. Hu, X. Qin, X. Ji et al., "The construction of $\lambda\mu$ -B-spline curves and its application to rotational surfaces, Applied Mathematics and Computation, vol. 266, pp. 194–211,2015.
- G.O Gellert,. Geometric Computing-Electronic Geometry for Semi automated Design, Machine Design, March 1965.
- G. Walz, Identities for trigonometric B-splines with an application to curve design. BIT 37 (1), 189–201,1997.
- G. Wang, Q. Chen , M. Zhou. NUAT B-spline curves Computer Aided Geometric Design 21 193–205, 2004.
- G.Wang, Y. Li, Optimal properties of the uniform algebraic trigonometric B-splines, Computer Aided Geometric Design, 23, 226 – 238,2006
- G. Xu and G.Z.Wang. Extended cubic uniform B-Spline and α -B-Spline. Acta Automatica Sinica, vol. 34, no. 8, pp. 980–984, 2008.
- H. B. Said, "A generalized Ball curve and its recursive algorithm," ACM Transactions on Graphics, vol. 8, no.4,pp. 360–371, 1989.
- H. Klein, Rechnergestützte Qualitätssicherung bei der Produktion von Bauteilen mit frei geformten Oberflächen, Dissertation, Universität Karlsruhe, 1992.
- H.Liu, L. Li, D.Zhang, H. Wang. Cubic trigonometric polynomial B-spline curves and surfaces with shape parameter. In Journal of Information & Computational Science,2012
- H. Xuli, Piecewise trigonometric Hermite interpolation, Applied Mathematics and Computation, 268 616-627, 2015.
- J.C.Carr, R.K. Beatson, J.B.Cherrie, T.J. Mitchell, W.R. Fright, B.C.McCallum, and T.R. Evans. Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions, Proceedings of Siggraph Conference, Los Angeles, CA, USA, 67-76, 2001.
- J.D. Boissonnat. Geometrie structures for three-dimensional shape representation, ACM Trans. Graph., 3(4):266-286,1984.
- J.L. Léon Modele de Bézier, Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO, Hermes, Paris 1991.
- J. Stam, Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values, in: Proc. 25th Annu. Conf. Comput. Graph. Interact. Tech., ACM Press, New York,, USA, 395 -404, 1998.
- J.W. Zhang, Two different forms of C-B-splines, Computer Aided Geometric Design, 31 – 41, 1997
- J. Xiong,Q.Guo, and G. Zhu, "Extension ofUniformC-B Spline curves and Surfaces," Computer Engineering and Design, vol. 29, no. 23, pp. 6102–6104, 2008.
- K. Garrard, T.Bruegge , J.Hoffman, T.Dow, A.Sohn, Design tools for freeform optics, Proc. of SPIE, 5874: 95-105, 2005.
- K.Katahira, H. Ohmori, C.Schmidt, O. Dambon, U.Schneider, , ELID Grinding Characteristics for the Machining of Optical Surface Quality for Ceramic Spherical Lens Molds, Proc. of euspent Int. Top.Conf., Aachen, Germany,

- 317- 320, 2003.
- K. Weinert , Möglichkeiten zur Produktivitätssteigerungen bei der Bearbeitung von Freiformflächen, Innovative Techniken im Werkzeug- und Formen- und Modelbau, Conf. Proceedings, Dortmund, Germany, 3-20. 1996.
- L.Piegl, W. Tiller. The NURBS Book (Second Edition). New York: Springer-Verlag ,1997
- L.Piegl. On NURBS: A Survey, IEEE Computer Graphics & Applications, January 1991
- M.Berger, A. Tagliasacchi , L. Seversky, P. Alliez, J. Levine, A. Sharf, C. Silva, State of the art in surface reconstruction from point clouds, Proceedings of the Eurographics 2014, Eurographics STARs, 161–185, Strasbourg, France, 2014.
- M. Gopi, S. Krishnan and C.T. Silva .Surface reconstruction based on lower dimensional localized delaunay triangulation, In Proceedings of Eurographics,19:C476-C478, 2000.
- M. Rodgers, K. Thompson. Benefits of freeform mirror surfaces in optical design, Proc. Of ASPE Winter Top. Meeting, North Carolina, USA, 2004.
- N. Amenta, M. Bern. And C. Choi. One-Pass Delaunay filtering for homeomorphic 3D surface reconstruction, UT Technical report number TR99-08. 1999.
- N. Amenta, M .Bern and M. Kamvysselis. A new Voronoi-based surface reconstruction algorithm, Siggraph 98, 415-421, 1998.
- N. Amenta, S. Choi, T.K. Dey, N. Leekha, A simple algorithm for homeomorphic surface reconstruction, in: Proc. Sixt. Annu. Symp. Comput. Geom. - SCG '00, pp. 213–222 ACM Press, New York , USA, 2000 .
- NANOMEFOS Project, www.wtb.tue.nl, www.tno.nl and www.senternovem.nl, November 2006
- N. Dyn, , D.Levin, Rippa, S. Numerical procedures for surface fitting of scattered data by radial functions. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 7(2): 639- 659. 1986.
- N. E , Claytor, D. M. Combs, J. J. Mader, O. Lechuga, J. Udayasankaran, , An Overview of Freeform Optics Production, Proc. of ASPE Winter Top. Meeting, North Carolina, USA, 2004.
- P. Bezier, Example of an Existing System in the Motor Industry, The UNISURF System, Proc. Roy. Soc. Lond. A321, 207- 218, 1971.
- P. Costantini, P. D. Kaklis, and C. Manni, Polynomial cubic splines with tension properties, Computer Aided Geometric Design, vol. 27, no. 8, pp. 592–610, 2010.
- R. Bartels, J. Beatty, B. Barsky , An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling 1st Edition September 1995.
- R. M .Bolle, B. C.Vemuri, On three-dimensional surface reconstruction methods. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 13(1), 1-13, 1991.
- R. S. Winsor, R. G Ohl, J. A Connelly, J. W. MacKenty, Optical Design of an Infrared Multi-Object Spectrometer Utilizing a Free-Form Optical Surface, Proc. of the ASPE Winter Top. Meeting, North Carolina, USA.
- S.A. Coons, Surfaces for computer-aided design of space figures, M.I.T. ESL 9442-M-139, January 1964.
- S.A. Coons, Surfaces for computer-aided design of space Forms, M.I.T. Project MAC, TR-41, June 1967.
- S. Gao and H.Q .Lu. A fast algorithm for delaunay based reconstruction, In Proc. 11th Int. Conf. in Central Europe

- on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision, 2003.
- S.Hajji, B. Danouj, and A. Lamnii, UAT B-Splines of Order 4 for Reconstructing the Curves and Surfaces, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 12, 2018, no. 21, 1007 – 1020, 2018.
<https://doi.org/10.12988/ams.2018.87104>
- S.Hajji, A. Lamnii, B. Danouj, and M.Lotfi. Hermite interpolation by piecewise cubic trigonometric spline with shape parameters. *Jour of Adv Research in Dynamical & Control Systems*, Vol.11, 02-Special Issue, 1687-1696, 2019.
- S. Hajji, A.Lamnii , B. Danouj and M. Lotfi , Hermite Interpolation by Piecewise Cubic Trigonometric Spline with Shape Parameters; In *Proceedings of the 1st International Conference of Computer Science and Renewable Energies (ICCSRE 2018)*, pages 277-283 . DOI: 10.5220/0009775302770283
- T. K. Dey, *Curve and Surface Reconstruction: Algorithms with Mathematical Analysis*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 2006
- T.K. Dey, J. Giesen, J. Hudson, Delaunay based shape reconstruction from large data, in: *Proc. IEEE 2001 Symp. Parallel Large-Data Vis. Graph.*, IEEE, 2001: pp. 19– 146.
- T.K. Dey, S. Goswami, Tight Cocone : A Water-tight Surface Reconstructor, in: *Proc. Eighth ACM Symp. Solid Model. Appl.*, ACM, Seattle, pp. 127–134, 2003.
- T. N. T. Goodman and H.B. Said, Properties of generalized Ball curves and surfaces, *Computer-Aided Design*, vol. 23, no. 8, pp. 554–560, 1991.
- T. Pfeifer, D .Imkamp, M.Glombitza, Selective measuring of freeform surfaces for quality control and selective maintenance of bending tools, *J. Mater. Process.Tech.*, 115:147-152, 2001
- U. Bashir, M. Abbas, and J. M. Ali, “The G2 and C2 rational quadratic trigonometric Bezier curve with two shape parameters with applications,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219,no. 20, pp. 10183–10197, 2013.
- W.Böhm. *Cubic B-Spline Curves and Surfaces in computer Aided Geometric Design Computing*.19, 1977.
- W. J. Gordon, R.F. Riesenfeld , *B-Spline curves and surfaces*, in *Computer Aided*, 1974
- X. Han, “A class of general quartic spline curves with shape parameters,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 28, no. 3, pp. 151–163, 2011.
- X. Han and Y. Zhu, “Total positivity of the cubic trigonometric Bezier basis,” *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2014, Article ID 198745, 5 pages, 2014.
- X. Han, “Cubic trigonometric polynomial curves with a shape parameter,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 21,no. 6,pp. 535–548, 2004.
- X. Han, “Quadratic trigonometric polynomial curves concerning local control,” *Applied Numerical Mathematics*, vol. 56, no.1, pp. 105–115, 2006.
- X.Han, “Piecewise quartic polynomial curves with a local shape parameter,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 195, no. 1-2, pp. 34–45, 2006.
- X.Han , *The Trigonometric Polynomial Like Bernstein Polynomial* , Hindawi Publishing Corporation the Scientific World Journal, Article ID 174716, 17 pages

<http://dx.doi.org/10.1155/2014/174716> Volume 2014

- X. Han, Y. Ma, and X. Huang, The cubic trigonometric Bezier curve with two shape parameters, *Applied Mathematics Letters*, vol. 22, no. 2, pp. 226–231, 2009.
- X. Liu, W. Xu, Y. Guan, and Y. Shang, Hyperbolic polynomial uniform B-spline curves and surfaces with shape parameter *Graphical Models*, vol. 72, no. 1, pp. 1–6, 2010.
- Y. Zhu, X. Han, and S. Liu, Curve construction based on four $\alpha\beta$ -Bernstein-like basis functions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 273, pp.160–181, 2015.
- Y. Zhu, X. Han, J. Han. Quartic trigonometric bezier curves and shape preserving interpolation curves, In *Journal of Computational Information Systems*, 2012.

ANNEXE1

PRODUIT TENSORIEL DE B-SPLINES:

Le produit tensoriel permet d'engendrer des surfaces en combinant les expressions paramétriques des courbes paramétriques dans une somme de combinaisons des facteurs des différentes expressions paramétriques des courbes.

Nous présentons dans cette annexe le produit tensoriel de surface B-spline (le produit tensoriel de surfaces paramétriques est décrit dans (Piegl,1997)). On se propose de construire une surface B-spline de degré (p, q) définie par un polyèdre de contrôle des points P_{ij}

La surface B-spline est paramétrée avec deux paramètres u et v avec $u, v \in [0,1]$ définit l' expression suivante :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{ij} \quad \text{Équation. 1}$$

Un point P_{ij} de la surface s'exprimera en fonction de deux paramètres (u, v) .

Nous considérons alternativement les courbes iso-paramétriques correspondant chacune à la valeur fixée de $u = u_0$ ou $v = v_0$ ci-après.

Courbes iso paramétriques au paramètre $u = u_0$

On peut réécrire l'expression (**Equation.1**) par :

$$\begin{aligned} S(u_0, v) &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} N_{i,p}(u_0) N_{j,q}(v) P_{ij} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} N_{j,q}(v) \left(\sum_{i=0}^{m-1} N_{i,p}(u_0) P_{ij} \right) \end{aligned}$$

En posant :

$$P_j(u_0) = \sum_{i=0}^{m-1} N_{i,p}(u_0) P_{ij}$$

Pour $j = 0, \dots, n-1$

On définit des points $\{P_j\}$ de paramètre u_0 sur une courbe B-spline procédant les points de contrôle $\{P_{0,j}, P_{1,j}, \dots, P_{i,j}, \dots, P_{m-1,j}\}$ et l'on a l'expression :

$$S(u_0, v) = \sum_{j=0}^{n-1} N_{j,q}(v) P_j(u_0) \quad \text{Équation 2}$$

Alors, l'expression (**Equation.1**) permet de construire géométriquement la courbe iso-paramétrique $C_{u_0}(v)$:

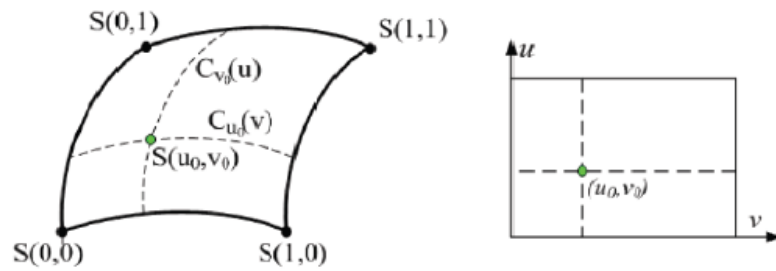


Figure : Illustration du produit tensoriel de surface B-spline par les courbes iso-paramétriques.

- Tracer les points de contrôle :
 $P_j(u_0) \{ P_{0,j}, P_{1,j}, \dots, P_{i,j}, \dots, P_{m-1,j} \}$ pour tout $j = 0, \dots, n - 1$
- Tracer la courbe B-spline procédant des points de contrôle :
 $\{ P_0(u_0), P_1(u_0), \dots, P_j(u_0), \dots, P_{n-1}(u_0) \}$

Courbes iso-paramétriques au paramètre $v = u_0$

On procède de manière symétrique pour déterminer la courbe iso-paramétrique $C_{v_0}(u)$. Donc, le point $P(u_0, v_0)$ de la surface B-spline est déterminé par l'intersection de deux courbes iso-paramétriques $C_{u_0}(v)$ et $C_{v_0}(u)$ (voir la figure précédente.).

ANNEXE 2

Tableau 1 : Coordonnées initiales d'une partie d'une aile de mini avion

X	-43.701	-48.276	-51.665	-56.151	-61.517	-72.469
Y	-12.298	-12.204	-11.866	-12.568	-12.100	-12.374
Z	2.430	2.30	2.511	1.896	0.887	-0.659
X	-47.652	-51.931	-55.218	-59.815	-64.683	-73.811
Y	-18.606	-18.362	-18.033	-17.601	-17.965	-17.296
Z	2.390	2.433	2.283	1.839	0.591	-1.618
X	-52.907	-56.973	-59.202	-64.427	-67.729	-76.552
Y	-26.959	-26.794	-26.405	-26.168	-25.510	-25.048
Z	2.212	2.305	2.150	2.071	0.947	-0.345
X	-62.176	-64.713	-68.908	-72.415	-80.813	-86.088
Y	-35.100	-34.912	-34.600	-34.340	-33.177	-32.675
Z	2.109	2.190	2.283	2.130	1.044	-0.980
X	-67.610	-69.597	-73.763	-77.569	-85.537	-90.337
Y	-44.408	-43.898	-43.592	-43.833	-43.263	-42.833
Z	2.072	2.253	2.342	2.247	1.336	0.464
X	-72.724	-75.307	-78.643	-82.373	-90.474	-93.594
Y	-52.996	-52.626	-52.398	-52.300	-52.230	-52.222
Z	2.194	2.409	2.541	2.422	1.483	0.399
X	-82.345	-85.204	-87.243	-90.473	-98.270	-100.684
Y	-68.763	-68.849	-68.697	-68.457	-67.778	-67.496
Z	2.522	2.852	3.088	3.204	2.474	1.676
X	-88.270	-93.090	-96.385	-98.929	-101.542	-102.682
Y	-78.697	-78.503	-77.941	-77.842	-76.310	-74.871
Z	2.541	3.529	3.468	3.000	2.648	2.158

Tableau 2 : Coordonnées 3D modifiées d'une partie d'une aile de mini avion

X	-43.701	-48.276	-51.665	-61.517	-72.469
Y	-12.298	-12.204	-11.866	-12.100	-12.374
Z	2.430	2.30	2.511	0.887	-0.659
X	-47.652	-51.931	-55.218	-64.683	-73.811
Y	-18.606	-18.362	-18.033	-17.965	-17.296
Z	2.390	2.433	2.283	0.591	-1.618
X	-52.907	-56.973	-59.202	-67.729	-76.552
Y	-26.959	-26.794	-26.405	-25.510	-25.048
Z	2.212	2.305	2.150	0.947	-0.345
X	-62.176	-64.713	-68.908	-80.813	-86.088
Y	-35.100	-34.912	-34.600	-33.177	-32.675
Z	2.109	2.190	2.283	1.044	-0.980
X	-67.610	-69.597	-73.763	-85.537	-90.337
Y	-44.408	-43.898	-43.592	-43.263	-42.833
Z	2.072	2.253	2.342	1.336	0.464
X	-72.724	-75.307	-78.643	-90.474	-93.594
Y	-52.996	-52.626	-52.398	-52.230	-52.222
Z	2.194	2.409	2.541	1.483	0.399
X	-82.345	-85.204	-87.243	-98.270	-100.684
Y	-68.763	-68.849	-68.697	-67.778	-67.496
Z	2.522	2.852	3.088	2.474	1.676
X	-88.270	-93.090	-96.385	-101.542	-102.682
Y	-78.697	-78.503	-77.941	-76.310	-74.871
Z	2.541	3.529	3.468	2.648	2.158

Tableau 3 : Les coordonnées 3D du capot

X	Y	Z	X	Y	Z
0.00	0.00	0.00	2.21	31.44	0.00
53.64	3.61	-1.45	55.30	38.78	-1.25
107.28	7.22	-2.90	108.38	46.11	-2.50
160.92	10.83	-4.35	161.47	53.45	-3.75
214.56	14.44	-5.80	214.56	60.78	-5.00
0.61	7.86	0.00	2.31	33.12	0.00
54.12	12.27	-1.34	55.37	40.36	-1.19
107.59	16.93	-2.58	108.43	47.60	-2.41
161.05	21.60	-3.83	161.49	54.83	-3.64
214.56	26.01	-5.16	214.56	62.07	-4.83
1.18	15.71	0.00	2.40	34.80	0.00
54.54	21.19	-1.26	55.44	41.89	-1.03
107.87	26.66	-2.41	108.48	49.04	-2.17
161.21	32.13	-3.56	161.52	56.19	-3.30
214.56	37.60	-4.82	214.56	63.28	-4.33
1.72	23.58	0.00	2.50	36.48	0.00
54.91	30.11	-1.22	55.51	43.39	-0.82
108.14	36.38	-2.38	108.53	50.40	-1.77
161.36	42.66	-3.54	161.55	57.40	-2.71
214.56	49.19	-4.76	214.56	64.32	-3.54
2.21	31.44	0.00	2.60	38.16	0.00
55.30	38.78	-1.25	55.59	44.90	-0.62
108.38	46.11	-2.50	108.58	51.63	-1.25
161.47	53.45	-3.75	161.57	58.37	-1.88
214.56	60.78	-5.00	214.56	65.11	-2.50

X	Y	Z	X	Y	Z
2.60	38.16	0.00	2.94	44.44	0.00
55.59	44.90	-0.62	55.84	50.69	0.00
108.58	51.63	-1.25	108.75	56.94	0.00
161.57	58.37	-1.87	161.65	63.19	0.00
214.56	65.11	-2.50	214.56	69.44	0.00
2.68	39.73	0.00	4.48	84.43	0.00
55.65	46.32	-0.43	57.15	87.99	0.32
108.62	52.82	-0.73	109.52	90.67	1.01
161.59	59.32	-1.04	161.90	93.35	1.71
214.56	65.90	-1.46	214.56	96.91	2.02

2.77	41.30	0.00	5.00	124.44	0.00
55.72	47.74	-0.22	57.58	124.44	0.42
108.66	54.12	-0.33	109.78	124.44	1.35
161.61	60.50	-0.45	161.98	124.44	2.27
214.56	66.94	-0.67	214.56	124.44	2.70
2.85	42.87	0.00	4.48	164.45	0.00
55.78	49.19	-0.06	57.15	160.89	0.32
108.71	55.51	-0.09	109.52	158.21	1.01
161.64	61.82	-0.11	161.90	155.53	1.71
214.56	68.15	-0.17	214.56	151.97	2.02
2.94	44.44	0.00	2.94	204.44	0.00
55.84	50.69	0.00	55.84	198.19	0.00
108.75	56.94	0.00	108.75	191.94	0.00
161.65	63.19	0.00	161.65	185.69	0.00
214.56	69.44	0.00	214.56	179.44	0.00

X	Y	Z	X	Y	Z
2.94	204.44	0.00	2.60	210.72	0.00
55.84	198.19	0.00	55.59	203.98	-0.63
108.75	191.94	0.00	108.58	197.25	-1.25
161.65	185.69	0.00	161.57	190.51	-1.88
214.56	179.44	0.00	214.56	183.77	-2.50
2.85	206.01	0.00	2.50	212.40	0.00
55.78	199.69	-0.06	55.51	205.49	-0.82
108.71	193.37	-0.09	108.53	198.48	-1.77
161.64	187.06	-0.11	161.55	191.48	-2.71
214.56	180.73	-0.17	214.56	184.57	-3.54
2.77	207.58	0.00	2.40	214.08	0.00
55.72	201.14	-0.22	55.44	206.99	-1.03
108.66	194.76	-0.33	108.48	199.84	-2.17
161.61	188.38	-0.45	161.52	192.69	-3.30
214.56	181.94	-0.67	214.56	185.60	-4.33
2.68	209.15	0.00	2.31	215.76	0.00
55.65	202.56	-0.43	55.37	208.52	-1.19
108.62	196.06	-0.73	108.43	201.28	-2.41
161.59	189.56	-1.04	161.49	194.05	-3.64
214.56	182.98	-1.46	214.56	186.81	-4.83
2.60	210.72	0.00	2.21	217.44	0.00
55.59	203.98	-0.63	55.30	210.11	-1.25

108.58	197.25	-1.25	108.38	202.77	-2.50
161.57	190.51	-1.88	161.47	195.44	-3.75
214.56	183.77	-2.50	214.56	188.10	-5.00

X	Y	Z
2.21	217.44	0.00
55.30	210.11	-1.25
108.38	202.77	-2.50
161.47	195.44	-3.75
214.56	188.10	-5.00
1.72	225.30	0.00
54.91	218.77	-1.22
108.14	212.50	-2.38
161.36	206.22	-3.54
214.56	199.69	-4.76
1.18	233.17	0.00
54.54	227.69	-1.26
107.87	222.22	-2.41
161.21	216.75	-3.56
214.56	211.28	-4.82
0.61	241.02	0.00
54.12	236.62	-1.34
107.59	231.95	-2.58
161.05	227.28	-3.83
214.56	222.87	-5.16
0.00	248.88	0.00
53.64	245.27	-1.45
107.28	241.66	-2.90
160.92	238.05	-4.35
214.56	234.44	-5.80

Tableau 4 : Les coordonnées 3D d'aile de voiture

X	Y	Z	X	Y	Z
-852.914	353.288	0	-690.824	461.594	0
-859.76	360.134	3.333	-696.878	469.295	3.333
-866.606	366.981	6.666	-703.389	477.07	6.666
-873.452	373.827	10	-710.13	484.813	10
-880.298	380.673	13.333	-716.870	492.692	13.333
-887.145	387.519	16.666	-723.382	500.466	16.666
-893.991	394.365	20	-729.435	508.168	20
-901.287	401.661	16.666	-734.194	516.115	16.666
-908.583	408.957	13.333	-737.196	526.32	13.333
-919.872	416.246	10.000	-739.318	537.654	10.000
-923.175	423.549	6.666	-741.441	548.988	6.666
-930.471	430.845	3.333	-744.442	559.193	3.333
-937.767	438.141	0	-749.201	567.14	0
-964.743	465.931	-6.666	-780.063	599.174	-6.666
-991.720	493.761	-13.333	-819.487	628.339	-13.333
-1017.946	520.797	-20.000	-863.191	656.070	-20.000
-1045.673	549.380	-26.666	-909.895	683.8	-26.666
-1072.649	577.19	-33.333	-946.318	712.965	-33.333
-1099.625	605	-40	-977.18	745	-40
-1225.967	737.611	60.379	-1094.164	869.272	52.475
-1352.31	870.221	160.759	-1211.174	993.391	144.612
-1475.953	1000	258.994	-1323.168	1112.542	231.918
-1348.736	890.712	127.61	-1207.839	1014.278	111.075
-1224.181	783.710	-1.914	-1092.51	915.675	-9.923
-1099.625	676.709	-130.991	-977.18	816.709	-130.991
-499.625	499.625	0	-308.427	461.594	0

-503.937	509.217	3.333	-310.199	473.739	3.333
-510.211	518.688	6.666	-315.476	485.662	6.666
-517.465	528.1	10	-322.505	497.473	10
-524.72	537.511	13.333	-329.534	509.284	13.333
-530.993	546.983	16.666	-334.81	521.207	16.666
-535.305	556.574	20	-336.583	533.352	20
-536.066	563.593	16.666	-332.844	538.159	16.666
-534.194	574.681	13.333	-326.381	547.88	13.333
-531.005	587.804	10.000	-318.555	560.06	10.000
-527.816	600.926	6.666	-310.729	572.239	6.666
-525.944	612.015	3.333	-304.265	581.96	3.333
-526.705	619.033	0	-300.526	586.767	0
-555.554	655.747	-6.666	-326.877	636.952	-6.666
-596.777	673.598	-13.333	-370.733	658.561	-13.333
-644.187	682.016,	-20.000	-423.342	665.883	-20.000
-691.597	690.435	-26.666	-475.952	673.203	-26.666
-732.82	708.285,	-33.333	-519.808	694.814	-33.333
-761.669	745	-40	-546.158	745	-40
-855.256	848.426	32.714	-609.329	821.326	7.025
-948.843	951.316	104.245	-672.501	896.619	51.768
-1038.46	1049.614	171.122	-732.992	967.807	92.088
-946.196	973.192	70.859	-670.714	919.781	18.579
-853.933	895.588	-29.943	-608.436	869.475	-55.969
-761.669	816.709	-130.991	-546.158	816.791	-130.991