ROYAUME DU MAROC

Université Mohammed V - RABAT -

جامعة محمد الخامس – الرباط –

Faculté des sciences

كلية العلوم

CENTRE D'ETUDES DOCTORALES - SCIENCES ET TECHNOLOGIES

N° d'ordre : 3446

THESE

En vue de l'obtention du : ***DOCTORAT***

Centre de recherche : CEREMAR-FS
Structure de Recherche : Laboratoire Mathématiques, Statistique et Applications
Discipline : Mathématiques
Spécialité : Analyse et Probabilités

Présentée et soutenue le : 27/03/2021 par :

Imad EL GHAZI

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DES FONCTIONS BIHARMONIQUES ET DES FONCTIONS FINEMENT HARMONIQUES

JURY

Lahbib OUBBI	*PES*	*École Normale Supérieure, Université Mohammed V-Rabat*	*Président*
Zine El Abidine GUENNOUN	*PES*	*Faculté des Sciences, Université Mohammed V-Rabat*	*Rapporteur / Examinateur*
Bouchaib FERRAHI	*PH*	*Faculté des Sciences, Université Abdelmalek Essaâdi-Tétouan*	*Rapporteur / Examinateur*
Sabah HADDAD	*PH*	*Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation, Akkari-Rabat*	*Rapporteur / Examinateur*
Mohamed EL KADIRI	*PES*	*Faculté des Sciences, Université Mohammed V-Rabat*	*Invité*
Zine El Abidine ABDELALI	*PES*	*Faculté des Sciences, Université Mohammed V-Rabat*	*Directeur de thèse*

Année Universitaire : **2020 / 2021**

✉ Faculté des Sciences, avenue Ibn Battouta, BP. 1014 RP, Rabat –Maroc
☎ 00212(0) 37 77 18 76 📠 00212(0) 37 77 42 61 ; http://www.fsr.ac.ma

Avant Propos

Cette thèse a été effectuée au sein du Laboratoire, mathématiques, statistiques et applications à la faculté des sciences de Rabat, sous la direction du professeur Mohemed EL KADIRI puis sous la direction du professeur Zine El Abidine ABDELALI.

Ce n'est nullement un travail personnel et ne pouvait voir le jour sans l'expertise, le sérieux et la rigueur de mon premier directeur de thèse, le professeur Mohemed EL KADIRI, professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, dont l'empreinte est manifeste dans chaque exemple, énoncé et preuve. Je tiens à lui exprimer ma gratitude infinie et mon profond respect.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers mon actuel directeur de thèse le professeur Zine El Abidine ABDELALI, professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour les nombreuses discussions instructives qu'on a eu, ainsi que pour ses conseils avisés et ses remarques pertinentes.

Mes remerciements vont également à Monsieur Lahbib OUBBI, professeur de l'enseignement supérieur à École Normale Supérieure de Rabat, qui a honoré cette soutenance en la présidant.

Je tiens aussi à remercier vivement le professeur Zine El Abidine GUENNOUN, professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, qui m a fait l'honneur d'être rapporteur et examinateur de ma thèse.

Mes remerciements vont aussi à monsieur Bouchab FERRAHI, professeur habilité à la Faculté des Sciences de Tétouan, qui m a fait l'honneur d'être rapporteur et examinateur de ma thèse.

Je ne saurai exprimer ma gratitude envers madame Sabah HADDAD, professeur habilitée au Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation Rabat, pour *ses conseils et ses encouragement et pour avoir accepter d'être rapporteur et examinatrice pour ma thèse.*

Je tiens enfin à remercier ma famille et mes amis.

Imad EL GHAZI

Résumé

Dans cette thèse nous traitons quatre sujets indépendants de la Théorie des Fonctions Biharmoniques et de la Théorie Fine du Potentiel.

Dans le deuxième chapitre, *Sur l'existence du deuxième noyau de Green et la notion de fonction biharmonique adjointe*, nous étudions l'existence et la régularité du deuxième noyau de Green dans un espace biharmonique fort de Brelot.

Le troisième chapitre, *Fonctions harmoniques et biharmoniques sur un compact*, est consacrée à la définition et l'étude des fonctions harmoniques et biharmoniques sur un ensemble compact d'un $\beta-$espace biharmonique de Brelot.

Le quatrième chapitre, *Sur la théorie du potentiel de certaines EDP couplées*, est consacrée à l'étude de certaines propriétés des solutions et sur-solutions des systèmes de type (S') :

$$\begin{cases} L_1 h = -\mu_1 k \\ L_2 k = -\mu_2 h \end{cases}$$

sur un domaine de Green de $\mathbb{R}^d$, où L_1 et L_2 sont elliptiques.

Le cinquième chapitre, Sur la représentation intégrale des fonctions finement surharmoniques, traite de la représentation intégrale des fonctions finement surharmoniques positives sur un domaine fin U d'un espace harmonique de Brelot vérifiant certaine conditions.

Mots clés : Théorie du Potentiel, Théorie Fine du Potentiel, Espace Biharmonique, Fonctions Biharmoniques Adjointes, Noyau de Couplage, Mesures de Jensen, Couplage d'EDP.

(113 pages)

Abstract

This thesis is about the Biharmonic Functions Theory and the Fine Potential Theory. It contains four articles wrote as chapters.

In the second chapter, *On the existence of the biharmonic Green kernels and the adjoint biharmonic functions* we study the existence and the regularity of second Green kernel in a Brelot biharmonic space.

The third chapter, *harmonic and biharmonic functions on a compact set* is consecrated to define and study the harmonic and biharmonic functions on a compact subset of a strong Brelot biharmonic space.

The fourth chapter, *On the potential theory of some systems of coupled PDEs*, is dedicated to study of some properties of the solutions of systems of type $(S^{'})$:

$$\begin{cases} L_1 h = -\mu_1 k \\ L_2 k = -\mu_2 h \end{cases}$$

on a Green domain of $\mathbb{R}^n$, where L_1 and L_2 are tow linear elliptic differential operators.

The fifth chapter, On the integral representation of finely superharmonic functions, treats the integral representation of the non-negative finely superharmonic functions on a fine domain U of a Brelot space under certain conditions.

Key words : Potential Theory, Fine Potential Theory, Biharmonic Functions, Adjoint Biharmonic Space, Coupling Kernel, Jensen Measures, Coupling PDEs.

(113 pages)

Table des matières

Introduction

Cette thèse porte sur la théorie des Fonctions Biharmoniques, elle se compose de quatre articles écrits sous forme de chapitres qui peuvent être lus indépendamment. Par la théorie des fonctions biharmoniques on désigne la Théorie Classique, la Théorie axiomatique des fonctions biharmonique de Smyrlnelis ainsi que la théorie issue de la théorie de balayage de Hansen et Bliedtner.

Historiquement les travaux de M. Korn en 1907 [54] et M.S. Zaremba en 1908 [67], peuvent être considérés comme étant les prémices de ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie des fonctions biharmoniques.

En effet, M.S. Zaremba en s'inspirant de M. Korn étudia le problème biharmonique restreint qui consiste à déterminer pour un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ une fonction réelle s admettant comme limite à la frontière une fonction réelle donnée f et vérifiant à l'intérieur de D, l'EDP d'ordre quatre $\Delta^2 s = 0$. Comme ce fut le cas pour la théorie classique du Potentiel, ces travaux s'inscrivaient dans le cadre des mathématiques pour la physique, dans ce cas là ce fut pour la résolution de l'équation d'équilibre (dite équation de Lagrange établie en 1811) vérifiée par la déformation s d'une plaque rectangulaire mince encastrée et soumise à une charge normale à sa surface.

Une fois les théories du potentiel relatives au Laplacien et à l'opérateur de la chaleur axiomatisées au milieu du $20^{ème}$ siècle, il était naturel de s'intéresser à l'axiomatisation du cas biharmonique ce que fut l'œuvre de Smyrnelis [59, 60]. Cette axiomatisation s'applique parfaitement à l'étude des solutions des systèmes de type (S) :

$$\begin{cases} L_1 h = -k \\ L_2 k = 0 \end{cases}$$

dans un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, où L_1 et L_2 sont deux opérateurs aux dérivées partielles, linéaires de second ordre elliptiques ou paraboliques.

En effet, Smyrnelis en se basant sur quarte axiomes, donna les principaux outils nécessaires au développement d'une théorie du potentiel axiomatique pour le cas biharmonique. On lui doit en particulier le principe du minimum, les inégalités de Harnack (cas elliptique), les propriétés de convergences ainsi que l'étude du problème de Riquier. Dans la deuxième partie de sa thèse Smyrnelis établit qu'à chaque espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$ on peut associer deux espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ possédant une base d'ouverts à la fois $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ réguliers et que inversement, du couplage de deux espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ résulte un espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$. En 1983 A. Boukricha [8] prouva ce même résultat dans un cadre un peu plus général, mais cette fois ci en considérant une section de potentiels sur l'espace $(\Omega, \mathcal{H}_1)$.

N. Bouleau étudia dans sa thèse en 1980, l'aspect probabiliste du problème biharmonique moyennant le couplage de deux processus de Markov, il démontra en outre qu'à tout espace biharmonique fort tel que le couple $(1, 1)$ est surhamonique on peut associer un semi-groupe triangulaire dont les couples excessifs coïncident avec les couples hyperharmoniques positifs. La représentation intégrale dans les espaces biharmoniques fut étudiée par Smyrnelis [61] et par El Kadiri dans [26, 27] et [28]. Ce dernier introduisit dans les années 2000 la notion de frontière de Martin d'un espace biharmonique vérifiant certaines conditions, établit la représentation intégrale des couples biharmoniques ≥ 0 au moyen de cette frontière et trois noyaux et étudia le problème de Riquier fin relatif à cette frontière .

La théorie de balayage de J. Bliedtner et W. Hansen, publiée en 1986 proposa une approche plus générale englobant l'aspect analytique et probabiliste des théories axiomatiques du potentiel et s'appliquant à des systèmes plus généraux d'EDP du type $(S^{'})$:

$$\begin{cases} L_1 h = -\mu_1 k \\ L_2 k = -\mu_2 h \end{cases}$$

sur un domaine de Green $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, où L_1 et L_2, sont deux opérateurs elliptiques ou paraboliques à coefficients $\mathcal{C}^\infty$. La théorie de Smyrnelis (et celle de Bouleau) ne s'applique pas à ce cadre si $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_2 \neq 0$. Signalons toutefois que la théorie axiomatique de Smyrnelis dans le cas des espaces biharmoniques forts, se réduit à un cas particulier des résultats de Hansen [49] relatif au couplage dans une somme directe d'espaces de balayage.

Dans le troisième chapitre, *Sur l'existence du deuxième noyau de Green et la notion de fonction biharmonique adjointe*, nous étudions l'existence et la régularité du deuxième noyau de Green dans un espace biharmonique de Brelot dont les espaces harmoniques associés sont forts. Nous prouvons grâce à quelques contre-exemples que les résultats énoncés dans [63, 64] par Smyrnelis et qu'il utilisa pour définir la notion de fonction biharmonique adjointe, sont en grande partie faux ou incomplets. Nous donnons en outre quelques conditions nécessaires sur notre espace biharmonique permettant de définir et d'étudier correctement la notion de fonction biharmonique adjointe.

Plus précisément, nous procédons comme suit : Dans un premier temps nous prouvons que du couplage par un noyau V convenable de deux espaces harmoniques de Bauer sous certaines conditions, résulte un unique espace biharmonique fort. Dans un second temps nous définissons correctement la notion d'espace biharmonique adjoint et ce en supposant les conditions nécessaires suivantes vérifiées pour notre espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$:

1- Il existe une base $\mathcal{V}$ d'ouverts L_i-complètement déterminants, $i = 1, 2$.

2- On suppose que le couple $(1, 1)$ est un $\mathcal{H}$-potentiel fini et continu sur Ω.

3- Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^+$ la fonction $V^*\phi$ est finie et continue dans Ω, où V^* désigne le noyau adjoint associé au noyau de couplage V (voir la preuve du Théorème 3.3.1 et la page 31).

Nous montrons enfin que sous les hypothèses 1, 2, 3 et en supposant que $y \mapsto p_y^{'}$ est continue sur $\Omega \setminus \{y\}$, que le deuxième noyau de Green sur $(\Omega, \mathcal{H})$ défini par $H(x, y) = p_y^{'}(x)$ pour tout $(x, y) \in \Omega^2$ est bien défini et régulier.

Le quatrième chapitre, *Fonctions harmoniques et biharmoniques sur un compact*, est consacré à la définition et l'étude des fonctions harmoniques et biharmoniques sur un ensemble compact d'un espace biharmonique fort de Brelot. Nous introduisons en particulier la notion de mesure harmonique sur un compact et nous donnons une représentation intégrale des fonctions harmoniques et biharmoniques moyennant les mesures et les systèmes de mesures de Jensen.

Concrètement, nous définissons premièrement les fonctions harmoniques et surharmoniques sur un compact $K \subset \Omega$ d'un espace harmonique de Brelot à l'aide des mesures de Jensen, nous remarquons tout d'abord qu'il est possible de définir la mesure harmonique sur le compact K et nous prouvons qu'une telle mesure est supportée par la frontière fine de K.

Par la suite nous caractérisons les couples de fonctions biharmoniques sur K moyennant les triplets de mesures de Jensen, sur un compact K d'un espace biharmonique fort et dont les espaces harmoniques associés sont des espaces de Brelot forts. Ceci est possible grâce notamment aux résultats de la première partie de ce chapitre et grâce au noyau de couplage relatif à notre espace biharmonique.

Nous terminons par un résultat sur la convergence des suites de couples biharmoniques sur K et nous montrons par un contre exemple qu'il ne suffit pas que cette convergence soit uniforme pour que la limite soit biharmonique mais plus ce que cela, cette convergence doit être uniforme localement.

Le cinquième chapitre, *Sur la théorie du potentiel relative à certaines EDP couplées*, est consacré à la définition et l'étude des propriétés des solutions et sur-solutions des systèmes de type $(S^{'})$ sur un domaine de Green de $\mathbb{R}^d$, où L_1 et L_2 sont elliptiques. Moyennant les noyaux de Green et les frontières de Martin associées aux opérateurs L_1 et L_2 nous obtenons une représentation intégrale des solutions ≥ 0 du système $(S^{'})$ ainsi qu'une propriété de convergence pour les suites croissantes de sur-solutions ≥ 0 du système $(S^{'})$.

Nous rappelons premièrement quelques résultats propres à la théorie du potentiel d'un opérateur elliptique de second ordre sur un domaine de Green de $\mathbb{R}^d$. Ces rappels seront à la base des démonstrations relatives aux propriétés vérifiées par les solutions et les sur-solutions du système $(S^{'})$ sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$ à la fois L_1- et L_2- Greenien. Pour cela nous introduisons les deux noyaux de Borel V_1 et V_2 définis sur D par :

$$V_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} (G_1^{\mu_1} G_2^{\mu_2})^k$$

$$V_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (G_2^{\mu_2} G_1^{\mu_1})^k,$$

où G_1 et G_2 sont respectivement les noyaux de Green sur D associés à L_1 et L_2 et μ_i, $i = 1, 2$, est une mesure de Kato pour L_i. Nous commençons par une caractérisation des couples harmoniques et surharmoniques sur une boule, puis nous donnons, grâce aux noyaux V_1 et V_2, les formes analytiques des éléments des cônes des solutions ≥ 0 et des sur-solutions ≥ 0 du système $(S^{'})$. Par analogie avec la théorie biharmonique axiomatique nous donnons une condition sur les suites croissantes de couples surhamoniques pour qu'elles soient de limites surharmoniques et démontrons un principe du minimum pour les couples surharmoniques sur un ouvert relativement compact de D. Nous enchaînons avec la définition des couples potentiels relatifs au système $(S^{'})$ et démontrons une décomposition de Reisz pour les couples surahmoniques positifs dans ce contexte. Finalement nous démontrons pour les couples harmoniques, une représentation intégrale au moyen des frontières de Martin $\triangle_1$ et $\triangle_2$ relatives à L_1 et L_2 respectivement.

Dans le sixième chapitre, il est question de la représentation intégrale des fonctions finement surharmoniques positives sur un domaine fin d'un espace harmonique fort de Brelot muni d'une base d'ouverts, satisfaisant l'axiome de Domination et admettant un noyau de Green ainsi qu'une base d'ouverts complètement déterminant, de plus on suppose que l'espace harmonique adjoint satisfasse aussi l'axiome de Domination et telle que la topologie adjointe fine est plus fine que la topologie fine, enfin que la base adjointe d'un quelconque ensemble contienne l'intérieur fin de cet ensemble.

La méthode utilisée est basée sur les théorèmes de représentation intégrale de Choquet sur les éléments extrêmaux d'un cônes muni d'une base maîtrisable et complète. De plus nous montrons que la base utilisée est compacte, ce qui permet de définir la frontière de Martin et le noyau de Martin et de donner la représentation intégrale des fonctions invariantes. Comme application du dernier résultat nous montrons que toute fonction invariante sur le domaine fin U peut être approchée (au sens de la topologie naturelle) par une suite de fonctions finement harmoniques positives sur U si toute fonction invariante minimale est finement harmonique sur U. Enfin moyennant la propriété des fonctions finement surharmoniques positives a s'auto-réduire sur tout ensemble A ou son complémentaire U A, nous étendons le théorème de partition de Brelot au fonctions finement surharmoniques positive sur U. $\square$

Chapitre 1
Préliminaires

1.1 Introduction

La théorie contemporaine du potentiel a suivi un cheminement constitué de plusieurs étapes historiques et qui perdure depuis deux siècles et demi. La première étape fut la théorie classique du potentiel qui vit le jour lorsque J. Lagrange constata en 1773 que les forces gravitationnelles dérivent d'une force (qui sera dite par la suite fonction de Green 1828) qui vérifie l'équation de Laplace (établit par Laplace en 1782) dans une région vide de masses.

Vers la fin du $19^{ème}$ siècle les principaux résultats structurant la théorie classique du potentiel fussent établis. En 1823 S. Poisson introduit sa formule intégrale sur le disque et la boule dans la perspective de résoudre le problème de Dirichlet. En 1839 Earnshow démontra le principe du minimum et en 1886 Harnack proposa les inégalités de Harnack qui donnent une idée sur la rigidité des solution de l'équation et mènent aux propriétés de convergences. Au cours du $20^{ème}$ siècle la théorie du potentiel a connu une évolution fulgurante qui a mené à l'apparition de plusieurs théories. Dans un premier temps la théorie classique fut axiomatisée par Brelot pour contenir la famille des opérateurs elliptiques d'ordre deux. Bauer par la suite proposa une axiomatisation incluant aussi les opérateurs paraboliques d'ordre deux. Enfin Constinescu et Cornea donnèrent une axiomatique qui reproduit les mêmes résultats que Brelot et Bauer mais partant d'une axiomatisation relativement plus légère et qui englobe les théories de Bauer et Brelot.

Comme ces axiomatiques ne s'appliquent pas aux équations différentielles d'ordre supérieur à deux, Smyrnelis donna une axiomatique qui s'applique aux équations de type $L_2L_1u = 0$, où L_1 et L_2 sont deux opérateurs différentiels elliptiques ou paraboliques d'ordre deux et u une fonction quatre fois continue sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Ce qui suit est un bref rappel des différentes axiomatiques du potentiel ainsi que de la théorie axiomatique biharmonique.

1.2 Espaces harmoniques

Soient Ω un espace topologique et $\mathcal{H}$ une application qui fait correspondre à tout ouvert U de Ω, un ensemble de fonctions définies sur U noté $\mathcal{H}(U)$.

Définition 1.2.1. On dit que $\mathcal{H}$ est un faisceau de fonctions si elle vérifie les conditions suivantes :

1- Soient U et V deux ouverts de Ω, tels que $U \subset V$, si $f \in \mathcal{H}(V)$ alors $f \in \mathcal{H}(U)$.

2- Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Ω. Une fonction f définie sur $\cup_{i\in I} U_i$ appartient à $\mathcal{H}(U_{i\in I})$, si pour tout $i \in I$, $f_{|U_i} \in \mathcal{H}(U_i)$.

On suppose dans ce qui suit que Ω est un espace topologique localement compact.

Définition 1.2.2. Un faisceau de fonctions $\mathcal{H}$ sur Ω est dit harmonique si, pour tout ouvert U de Ω, $\mathcal{H}(U)$ est un espace vectoriel réel de fonctions réelles continues sur U.

Définition 1.2.3. Une fonction f définie sur un ouvert U de Ω est dite $\mathcal{H}-$harmonique (ou simplement harmonique) si $f \in \mathcal{H}(U)$.

La définition suivante présente les différentes propriétés de convergences d'un faisceau harmonique.

Définition 1.2.4. 1- Propriété de convergence de Bauer : Un faisceau harmonique $\mathcal{H}$ sur Ω possède la propriété de convergence de Bauer si, la limite d'une suite croissante de fonctions $\mathcal{H}-$harmoniques (f_n) sur un ouvert de Ω, est une fonction $\mathcal{H}-$harmonique dans U si elle est localement bornée.

2- Propriété de convergence de Doob : Un faisceau harmonique $\mathcal{H}$ sur Ω possède la propriété de convergence de Doob si, la limite d'une suite croissante de fonctions $\mathcal{H}-$harmoniques (f_n) sur un ouvert de Ω, est une fonction $\mathcal{H}-$harmonique dans U si elle est finie sur un ensemble dense.

3- Propriété de convergence de Brelot : On suppose Ω connexe, localement connexe et localement compact. Un faisceau harmonique $\mathcal{H}$ sur Ω possède la propriété de convergence de Brelot si, la limite d'une suite croissante de fonctions $\mathcal{H}-$harmoni-ques (f_n) sur un ouvert U connexe de Ω, est une fonction $\mathcal{H}-$harmonique dans U si elle est finie en un point.

Remarque 1.2.1. Si Ω est un espace topologique connexe et localement connexe, alors la propriété de convergence de Brelot implique la propriété de convergence de Doob, cette dernière implique la propriété de convergence de Bauer.

Définition 1.2.5. Un faisceau harmonique $\mathcal{H}$ sur Ω est dit dégénéré s'il existe une fonction $\mathcal{H}-$harmonique h définie sur un voisinage ouvert de $x \in \Omega$, telle que $h(x) \neq 0$.

Définition 1.2.6. Un faisceau $\mathcal{K}$ sur Ω est dit hyperharmonique si, pour tout ouvert U de Ω, $\mathcal{K}(U)$ est un cône convexe de fonctions finies inférieurement et semi-continues inférieurement sur U.

Définition 1.2.7. Une fonction f définie sur un voisinage de U, est dite une $\mathcal{K}-$fonction si $f \in \mathcal{K}(U)$.

L'application qui fait correspondre à chaque ouvert U de Ω, $\mathcal{K}(U) \cap (-\mathcal{K}(U))$ est un faisceau harmonique, on le note $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$. □

Soit Ω un espace localement compact muni d'un faisceau hyperharmonique et U un ouvert de Ω. Soit f une fonction définie sur ∂U. On désigne par $\overline{H}_f^U$ l'enveloppe inférieure des fonctions v hyperharmoniques dans U telles que $\liminf\limits_{\substack{x \to y \\ x \in U}} v(x)$ soit $\geq f(y)$ et $> -\infty$ pour tout $y \in \partial U$.

Soit $\underline{H}_f^U = -\overline{H}_{(-f)}^U$, quelle que soit f : $\underline{H}_f^U \leq \overline{H}_f^U$, et f dite résolutive si $\underline{H}_f^U = \overline{H}_f^U = H_f^U$.

Définition 1.2.8. Un ouvert U de Ω est résolutif si $\forall f \in \mathcal{C}(\partial U)$, finie, $\underline{H}_f^U = \overline{H}_f^U = H_f^U$.

Définition 1.2.9. Un ouvert relativement compact U de Ω est appelé régulier si chaque fonction f réelle continue sur ∂U possède un unique prolongement $\overline{f}$ continu sur $\overline{U}$ et harmonique sur U.

Un espace topologique Ω localement compact muni d'un faisceau hyperharmonique $\mathcal{K}$ est dit espace de Constinescu et Cornea si :

1- Axiome de positivité : $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ est non dégénéré en aucun point de Ω.

2- Axiome de convergence : $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ possède la propriété de convergence de Bauer.

3- Axiome de résolutivité : Les ensembles résolutif (par respect à $\mathcal{K}$) forment une base de Ω.

4- Axiome de complétude : Une fonction u finie semi-continue inférieurement sur un ouvert U de Ω, appartient à $\mathcal{K}(U)$ si, pour tout ouvert V relativement compact résolutif par respect à $\mathcal{K}$ tel que $\overline{V} \subset U$, on a $\mu^V u \leq u$ sur V, où μ^V est construite relativement à $\mathcal{K}$ et donnée par $\mu^V = (\mu_x^V)_{x\in V}$.

□

Un espace topologique Ω localement compact muni d'un faisceau harmonique $\mathcal{H}$ est dit espace de Brelot si :

1- Ω est localement connexe et ne possède pas de points isolés.

2- Les ensembles réguliers relativement à $\mathcal{H}$ forment une base de Ω.

3- $\mathcal{H}$ vérifie la propriété de convergence de Brelot.

Un espace topologique Ω localement compact muni d'un faisceau harmonique $\mathcal{H}$ est dit espace de Bauer si :

1- $\mathcal{H}$ est non dégénéré en aucun point de Ω.

2- Il existe une base forte de Ω, d'ouverts réguliers relativement à $\mathcal{H}$.

3- $\mathcal{H}$ vérifie la propriété de convergence de Bauer.

Définition 1.2.10. Une fonction $\mathcal{H}-$hyperharmonique sur un ouvert U, est dite surharmonique sur U si elle est non identique à $+\infty$ dans aucune composante connexe de U.

Définition 1.2.11. Un potentiel sur un ouvert U est une fonction $\mathcal{H}-$surharmonique positive sur U, dont toute minorante harmonique dans U est ≤ 0.

Définition 1.2.12 (Support harmonique). Le support harmonique $S(f)$ d'une fonction numérique f, est le plus petit fermé F tel que f soit harmonique sur le complémentaire de F dans Ω.

Définition 1.2.13 (Propriété de domination). Une fonction f surharmonique et positive sur Ω vérifie la propriété de domination si pour toute fonction u hyperharmonique sur Ω on a :

$$u \geq f \text{ sur } S(f) \Longrightarrow u \geq f \text{ sur } \Omega.$$

Définition 1.2.14 (Axiome de domination). On dit que Ω vérifie l'axiome de domination si tout potentiel p localement borné sur Ω satisfait la propriété de domination, c'est-à-dire :

$$u \geq p \text{ sur } S(p) \Longrightarrow u \geq p \text{ sur } \Omega.$$

Remarque 1.2.2. 1- Il existe plusieurs formulations pour l'axiome de domination [51].

2- Si l'axiome de domination est vérifié dans un espace harmonique alors il est vérifié dans tout sous-espace harmonique de cet espace.

□

La polarité est une notion qui fut introduite par M. Brelot en 1941 et étendue par analogie avec la théorie classique aux axiomatiques harmoniques et biharmoniques. Si une propriété est vraie partout sur l'espace topologique, sauf sur sous-ensemble, alors la polarité traduit la petitesse de cet ensemble et on dit que cette propriété est vraie quasi-partout si elle est vraie en dehors d'un ensemble polaire.

Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace harmonique au sens de Constinescu et Cornea.

Définition 1.2.15. Un sous ensemble A de Ω est dit polaire, s'il existe une fonction s surharmonique sur $V \subset \Omega$ telle que $A \subset \{x \in V \textit{ et } s(x) = +\infty\}$.

Remarque 1.2.3. 1- Tout sous-ensemble d'un ensemble polaire est polaire.

2- S'il existe un potentiel > 0 sur Ω, alors $A \subset \Omega \Leftrightarrow \exists s > 0$ surharmonique sur Ω : $A \subset \{x \in \Omega \textit{ et } s(x) = +\infty\}$. Dans ce cas la réunion dénombrable d'ensembles polaires est polaire. □

Définition 1.2.16. La réduite d'une fonction $v \in \mathcal{S}^+$ sur un ensemble E de Ω, notée R_v^E, est l'enveloppe inférieure des fonctions surharmoniques positives $\geq v$ sur E. Sa régularisée $\widehat{R}_v^E$ est appelée la balayée de v sur E. Les propriétés de la réduite et la balayée peuvent être consultées dans [51].

Soit L un opérateur linéaire elliptique de second ordre, à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, alors il existe un unique opérateur elliptique linéaire de second ordre L^* qui vérifie $< L\phi, u >=< \phi, L^*u >$, où $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ et u une fonction $L-$harmonique sur U. Dans [7] J-M. Bony a montré que les faisceaux $L-$harmonique $\mathcal{H}_L$ et L^*-harmonique $\mathcal{H}_{L^*}$, vérifient les axiomes de Brelot.

Plus généralement, on suppose que $(\Omega, \mathcal{H}_L)$ est fort et muni d'une base constituée de domaines complètement déterminants, c'est-à-dire, des domaines $\delta \subset \overline{\delta} \subset \Omega$ tels que pour tout potentiel p dans Ω, harmonique sur δ, $R_p^{\Omega \setminus \delta} = p$ dans Ω. La fonction de Green

$G(x,y)$ relative à $(\Omega, \mathcal{H}_L)$ devient par échange des deux variables la fonction de Green $G^*(x,y) = G(y,x)$ relative à $\mathcal{H}_{L^*}$ lorsque elle existe.

Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace de Brelot avec un potentiel > 0 et dans lequel les potentiels de support réduit à un même point sont proportionnels. Alors il existe pour chaque point $y \in \Omega$ un potentiel p_y de support y tel que $\forall x \in \Omega$ la fonction $y \mapsto p_y(x)$ est continue sur $\Omega \setminus x$. La mesure harmonique adjointe est définie alors comme suit :

Définition 1.2.17. Étant donné un ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$ et $y \in \omega$, il existe d'après [51], une mesure de Radon σ_y^ω, > 0, portée par $\partial\omega$, définie par

$$\widehat{R}_{p_y}^{\Omega \setminus \omega}(x) = \int p_z(x) d\sigma_y^\omega(z).$$

Définition 1.2.18. Une fonction réelle h définie dans l'ouvert ω, est dite harmonique adjointe dans ω si :

1- h est finie continue dans ω.

2- quels que soient l'ouvert c.d. $\delta \subset \overline{\delta} \subset \omega$ et $y \in \omega$:

$$h(y) = \int h(z) d\sigma_y^\omega(z).$$

On note ${}^*\mathcal{H}(U)$ l'espace vectoriel des fonctions harmoniques adjointes sur U. Alors ${}^*\mathcal{H}$ est un faisceau harmonique et $(\Omega, {}^*\mathcal{H})$ est un espace harmonique de Brelot. □

1.3 Espace biharmonique

Soit Ω un espace localement compact à base dénombrable et notons $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}_c$) l'ensemble des ouverts (resp. l'ensemble des ouverts relativement compact) de Ω. Soit $\mathcal{H}$ une application qui associe à chaque $U \in \mathcal{U}$ un espace vectoriel de couples de fonctions réelles continues sur U, et qui sont compatibles i.e si $(u,v) \in \mathcal{H}$ et que $u = 0$ sur un ouvert $\omega \subset U$ alors $v = 0$ sur ω. Les paires de fonctions de $\mathcal{H}$ sont dites biharmoniques dans U.

Axiome 1 : $\mathcal{H}$ est un faisceau.

Ceci s'exprime comme suit,

1- Si U et V sont deux ouverts de Ω tels que $U \subset V$ et si $(u,v) \in \mathcal{H}(V)$ alors $(u_{|U}, v_{|U}) \in \mathcal{H}(U)$.

2- Si (U_i) est une famille d'ouverts de Ω et si (u,v) est une paire de fonctions réelles sur $U = \cup_i U_i$ tels que, pour tout i, $(u_{|U_i}, v_{|Ui}) \in \mathcal{H}(U_i)$ alors $(u,v) \in \mathcal{H}$.

□

Un ouvert $\omega \in \mathcal{U}_c$ est dit $\mathcal{H}-$régulier, ou seulement régulier, si pour tout couple de fonctions réelles (f, g) continues sur ∂U, il existe un couple $(u, v) \in \mathcal{H}(\omega)$ tel que

1- $\lim\limits_{x \longrightarrow y} u(x) = f(y)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow y} v(x) = g(y)$ pour tout $y \in \partial\omega$.
2- Si $(f, g) \geq 0$, alors $(u, v) \geq 0$.

Un tel couple (u, v) de fonctions est unique, appelé la solution du problème de Requier dans ω pour la donnée (f, g) sur la frontière $\partial\omega$ et on le note $H_\omega(f, g) = (H^1_\omega(f, g), H^2_\omega(f, g))$. Si $\omega \in \mathcal{U}_c$ est $\mathcal{H}-$régulier, alors pour tout $x \in \omega$, il existe un triplet de mesures de Radon positives $(\mu^\omega_x, \nu^\omega_x, \lambda^\omega_x)$ sur $\partial\omega$, appelé le triplet de mesures harmoniques sur ω au point x, tel que

$$H^1_\omega(f, g)(x) = \int f(y) d\mu^\omega_x(y) + \int g(y) d\nu^\omega_x(y)$$

et

$$H^2_\omega(f, g)(x) = \int g(y) d\lambda^\omega_x(y)$$

pour tout couple de fonctions $(f, g) \in \mathcal{C}(\partial\omega) \times \mathcal{C}(\partial\omega)$.

Axiome 2 : Les ouverts réguliers forment une base pour la topologie de Ω.

Nous notons $\mathcal{U}_r$ l'ensemble des ouverts relativement compacts de Ω $\mathcal{H}-$réguliers. Un couple de fonctions s.c.i sur ω à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ est dit $\mathcal{H}-$hyperharmonique, ou seulement hyperharmonique lorsque il n y a pas de confusion, si pour tout $\omega \in \mathcal{U}_r$, $\omega \subset \overline{\omega} \subset U$ et pour tout $x \in \omega$, nous avons

$$\int^* u d\mu^\omega_x + \int^* v d\nu^\omega_x \leq u(x)$$

et

$$\int^* u d\mu^\omega_x \leq v(x),$$

l'ensemble des couples de fonctions $\mathcal{H}-$hyperharmoniques sur un ouvert U de Ω est noté $\mathcal{H}^*(U)$. Il est facile de voir que $\mathcal{H}^*(U)$ et $\mathcal{H}^{*+}(U)$ sont des cônes de fonctions convexes. Pour tout $U \in \mathcal{U}$ on pose :

$$\mathcal{H}^*_1(U) = \{u : (u, 0) \in \mathcal{H}^*(U)\}$$

$$\mathcal{H}_2^*(U) = \{v : (+\infty, v) \in \mathcal{H}^*(U)\}.$$

Alors $\mathcal{H}_1^*$ et $\mathcal{H}_2^*$ sont deux faisceaux de cônes de fonctions s.c.i.
Par la suite nous définissons deux faisceaux d'espaces vectoriels de fonctions réelles continues, en posant $\mathcal{H}_1(U) = \mathcal{H}_1^*(U) \cap (-\mathcal{H}_1^*(U))$ et $\mathcal{H}_2(U) = \mathcal{H}_2^*(U) \cap (-\mathcal{H}_2^*(U))$ pour tout ouvert U de Ω.

Axiome 3 : $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ sont des espaces harmoniques de Bauer.

On dit que la paire $(\Omega, \mathcal{H})$ ou encore que Ω muni du faisceau $\mathcal{H}$, est un espace biharmonique si les axiomes 1,2 et 3 sont satisfaits.

Exemple 1.3.1. Soient L_1 et L_2 deux opérateurs elliptiques ou paraboliques sur Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Alors Ω muni du faisceau $\mathcal{H}$ défini par

$$\mathcal{H}(U) = \{(h, k) \in \mathcal{C}^2(U) \times \mathcal{C}^2(U) : L_1 h = k,\ L_2 k = 0\}$$

pour tout ouvert U de Ω, est un espace biharmonique.

Définition 1.3.1. Un espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$ est dit espace biharmonique de Brelot si Ω est connexe localement connexe(non compact) à base d'ouverts relativement compacts et si ses espaces harmoniques associés $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ sont des espaces harmoniques de Brelot.

L'aspect probabiliste des espaces biharmonique a était étudié par Bouleau dans [12]. Boboc et Bucur [6] ont montré que les paires hyperharmoniques positives coïncident avec les fonctions excessives d'une résolvante triangulaire sur l'espace $\Omega \bigoplus \Omega$, ce qui réduit la théorie des espaces biharmoniques à celle des $\mathbf{H}-$cônes. Pour plus de détails sur la théorie des espaces biharmoniques nous nous référons à [59] et [60].

Définition 1.3.2. Soient $U \in \mathcal{U}$ et $(u, v) \in \mathcal{H}^*(U)$. Si u est finie dans un sous-ensemble dense de U(et donc v est aussi finie dans un sous-ensemble dense de U), on dit que le couple (u, v) est $\mathcal{H}-$surharmonique ou seulement surharmonique sur U.

On note $\mathcal{S}(U)$ l'ensemble de toutes les paires de fonctions (u, v) qui sont surharmoniques sur U. Les ensembles $\mathcal{S}(U)$, $\mathcal{S}^+(U)$ et $\mathcal{H}^+(U)$ sont des cônes convexes de fonctions.

Définition 1.3.3. Un couple de fonctions $(p,q) \in \mathcal{S}^+(\Omega)$ est appelé un $\mathcal{H}-$potentiel (ou seulement potentiel) si

$$\forall (h,k) \in \mathcal{H}^+(\Omega);\ (h,k) \leq (p,q) \Rightarrow h = k = 0.$$

Il est clair que si $(u,v) \in \mathcal{S}^+(\Omega)$ et que u est un $\mathcal{H}_1-$potentiel et que v est un $\mathcal{H}_2-$potentiel, alors (u,v) est $\mathcal{H}-$potentiel. Inversement, si (u,v) est un $\mathcal{H}-$potentiel alors u est un $\mathcal{H}_1-$potentiel, et comme on le verra dans le chapitre suivant(Corollaire 3.2.3), v est $\mathcal{H}_2-$potentiel. □

Un espace biharmonique $(\Omega,\mathcal{H})$ est dit fort, si il'existe un $\mathcal{H}-$potentiel (p,q) tel que $p>0$ et $p>0$ sur Ω. Dans l'exemple 2.3.1, $L_1 = L_2 = \Delta$, l'operateur de Laplace, l'espace $(\mathbb{R}^d,\mathcal{H})$ est un espace biharmonique fort si et seulement si $d \geq 5$ (voir [27]). Tout ouvert relativement compact ω d'un espace biharmonique, muni du faisceau biharmonique restreint à ω, est fort.

Définition 1.3.4. Le support biharmonique d'un couple de fonctions numériques (f,g) est le plus petit fermé F tel que (f,g) soit biharmonique sur le complémentaire de F dans Ω.

Définition 1.3.5. Un espace biharmonique $(\Omega,\mathcal{H})$ vérifie l'axiome de domination si pour tout couple potentiel (p_1,p_2) localement borné et tout couple (s_1,s_2) surharmonique positif sur Ω on a : $s_j \geq p_j$ sur le support biharmonique de $(p_1,p_2) \Longrightarrow s_j \geq p_j$ sur Ω, pour $j = 1,2$.

Remarque 1.3.1. Si $(\Omega,\mathcal{H})$ vérifie l'axiome de domination, alors il en est de même pour les espaces harmoniques associés .

Soient $(\Omega,\mathcal{H})$ un espace biharmonique fort au sens de Smyrnelis et $(\Omega,\mathcal{H}_1)$ et $(\Omega,\mathcal{H}_2)$ ses espaces harmoniques associés.

Définition 1.3.6. Un sous ensemble A de Ω est dit $\mathcal{H}-$polaire, s'il existe un couple (s_1,s_2) surharmonique sur $V \subset \Omega$ tel que $A \subset \{x \in \Omega \ et\ s_j(x) = +\infty\}$ pour $j = 1,2$.

Théorème 1.3.1. Soit A un ensemble polaire de Ω, les assertions suivantes sont equivalentes :

1- A est $\mathcal{H}-$polaire.

2- A est $\mathcal{H}_1-$polaire et $\mathcal{H}_2-$polaire.

Remarque 1.3.2. 1- Tout sous-ensemble d'un ensemble $\mathcal{H}-$polaire est $\mathcal{H}-$polaire.

2- S $(\Omega, \mathcal{H})$ est fort, alors la réunion dénombrable d'ensembles $\mathcal{H}-$polaires est $\mathcal{H}-$polaire.

Définition 1.3.7. Un espace harmonique $(\Omega, \mathcal{K})$ est dit espace harmonique de Green si $(\Omega, \mathcal{K})$ est un espace harmonique de Brelot satisfaisant l'hypothèse d'unicité, à savoir que les potentiels à supports harmoniques réduits à un point sont proportionnels. Un espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$ est dit espace biharmonique de Green si ses espaces harmoniques associés $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ sont des espaces harmoniques de Green.

$\square$

Chapitre 2
Sur l'existence du deuxième noyau de Green et la notion de fonction biharmonique adjointe

(Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae (2016))

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous traitons la notion d'espace biharmonique adjoint dans le cas de l'unicité (des potentiels de supports réduits à un point) dans les espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ associés à $(\Omega, \mathcal{H})$ et de noyau de couplage V et sous les conditions suivantes :

1- Pour tout $y \in \Omega$, la fonction $p_y^{'}$ hyperharmonique d'ordre 2 associée à un quelconque $\mathcal{H}_2-$potentiel q_y de support $\{y\}$, est $\mathcal{H}_1-$surharmonique.

2- Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $y \mapsto p_y^{'}(x)$ est continue dans $\Omega \setminus \{x\}$.

On définit correctement l'espace biharmonique adjoint $(\Omega, {}^*\mathcal{H})$ associé à l'espace $(\Omega, \mathcal{H})$ comme étant l'espace biharmonique dont les espaces harmoniques associés sont exactement $(\Omega, {}^*\mathcal{H}_2)$ et $(\Omega, {}^*\mathcal{H}_1)$ les espaces harmoniques adjoints respectivement de $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_1)$, et pour lequel la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à p_y^* est $p_y^{'*} = p_\bullet^{'}(y)$ pour tout $y \in \Omega$, où $y \mapsto p_\bullet^{'}$ est une fonction continue de Ω dans $\mathcal{S}_1^+(\Omega)$ qui associe à chaque $y \in \Omega$ un $\mathcal{H}_1-$potentiel de support harmonique réduit à $\{y\}$. Nous montrons aussi que inversement, s'il existe un espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{G})$ dont les espaces harmoniques associés sont respectivement $(\Omega, {}^*\mathcal{H}_2)$ et $(\Omega, {}^*\mathcal{H}_1)$ et tel que la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à p_y^* est la fonction $p_y^{'*} = p_\bullet^{'}(y)$ pour tout $y \in \Omega$ (où p_y^* est la fonction $\mathcal{H}_1-$surharmonique adjointe définie par $p_y^*(x) = p_y(x) = p_x(y)$ telle que $p_x(y)$ est la fonction de Green de $(\Omega, \mathcal{H}_1)$, il en découle que la condition 2 ci-dessus est satisfaite et que le noyau de couplage de $(\Omega, \mathcal{G})$ est égale à V^* le noyau adjoint du noyau de couplage de $(\Omega, \mathcal{H})$ (voir la définition de V^* dans le paragraphe 2.5). Nous montrons aussi que le noyau (la fonction) H défini sur $\Omega \times \Omega$ par $H(x, y) = p_y^*(x)$ et dit le noyau de Green biharmonique (ou le second noyau de Green) de l'espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$, est un noyau régulier dans le sens où il est s.c.i. sur $\Omega \times \Omega$ et continu en dehors de la diagonale de $\Omega \times \Omega$.

Nous donnons aussi quelques nouveaux résultats dans la théorie axiomatique des espaces biharmonique et nous corrigeons certains résultats donnés par Smyrnelis. En particulier nous montrons que :

1- Dans un espace biharmonique dont les espaces harmoniques associés sont des espaces de Green, le noyau de Green biharmonique peut ne pas exister.

2- Contrairement au cas harmonique, un couple biharmonique > 0 dans un espace biharmonique peut ne pas exister.

3- Il est possible de définir la notion d'adjoint biharmonique d'un espace biharmonique de Green donné.

4- Le noyau de Green biharmonique dans un espace biharmonique est régulier.

5- Une caractérisation du noyau de couplage et l'existence de l'espace biharmonique associé à deux espaces harmonique et un noyau de couplage donné.

Notations : Soit Ω un espace localement compact à base dénombrable. Si A est un sous ensemble de Ω, nous désignons par $\overline{A}$ la clôture topologique de A dans la compactification d'Alexandroff $\overline{\Omega}$ de Ω, et par ∂A la frontière de A dans $\overline{\Omega}$. Par fonction sur A nous désignons une fonction sur A à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$. Soit U un ouvert de Ω, l'ensemble des fonctions boréliennes sur U est noté $\mathcal{B}(U)$ et si f est une fonction définie sur U on dénote $\widehat{f}$ la régularisée s.c.i. de f. Rappelons que $\widehat{f}$ est définie par $\widehat{f} = \liminf_{y \to x} f(y)$ pour tout $x \in U$ et que $\widehat{f}$ est la plus grande minorante s.c.i. de f dans U. Nous notons $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'espace vectoriel réel des fonctions finies et continues dans Ω à support compact. Pour toute fonction ϕ continue sur Ω on dénote $S(\phi)$ le support de ϕ. L'ordre sur l'ensemble des couples biharmoniques est défini par :

$$(f_1, g_1) \geq (f_2, g_2) \Longleftrightarrow f_1 \geq f_2 \text{ } et \text{ } g_1 \geq g_2 \text{ } sur \text{ } A.$$

Par souci de simplicité, nous allons écrire $(f, g) \geq 0$ au lieu $(f, g) \geq (0, 0)$ sur A et $(f, g) > 0$ au lieu $(f, g) > (0, 0)$ sur A. Si $\mathcal{A}(E)$ est un ensemble de fonctions définies sur E, on note $\mathcal{A}^+(E)$ l'ensemble des fonctions non-négatives de $\mathcal{A}(E)$.

2.2 Couples hyperharmoniques purs et noyau associé à un espace biharmonique

Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace biharmonique et v une fonction positive $\mathcal{H}_2-$hyperharmonique sur Ω. L'ensemble $\mathcal{U}_0(v) = \{u \in \mathcal{H}_1^{*+}(\Omega) : (u, v) \in \mathcal{H}_+^*(\Omega)\}$ est non vide car la fonction constante $u \equiv +\infty$ y appartient. Alors d'après le Lemme 11.6 [60], la fonction $u_0 = \widehat{\inf}\mathcal{U}_0(v) \in \mathcal{H}_1^{*+}(\Omega)$. C'est la plus petite fonction positive u, $\mathcal{H}_1-$hyperharmonique sur Ω telle que le couple $(u, v) \in \mathcal{H}^{*+}(\Omega)$. Cette fonction est dite la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v. Le couple (u, v) est dit pur si u est la fonction pure hyperharmonique d'ordre 2 associée à v. Les propriétés essentielles des couples hyperharmoniques purs peuvent être consultées dans [10] et [12].

Remarque 2.2.1. Si le couple $(u, v) \in \mathcal{S}^+(\Omega)$ est pur, alors u est un $\mathcal{H}_1-$potentiel. En effet, u est positive $\mathcal{H}_1-$surharmonique. Soit h la fonction $\mathcal{H}_1-$harmonique de la décomposition de Reisz de u, alors le couple $(u - h, v)$ est $\mathcal{H}-$harmonique positif dans Ω, et d'où $u \leq u - h$ et par conséquent $h = 0$, ce qui prouve que u est un $\mathcal{H}_1-$potentiel.

Remarque 2.2.2. Soit (p, q) un couple $\mathcal{H}-$surharmonique sur Ω tel que $q > 0$, alors p est un potentiel strict. Pour tout $\omega \in \mathcal{U}_r$, nous avons $p \geq \int p\mu_\bullet^\omega + \int p\nu_\bullet^\omega > \int p\mu_\bullet^\omega$, d'où p est strict.

Rappelons qu'un noyau V sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est une fonction $V \geq 0$ définie sur $E \times \mathcal{E}$ telle que :

1- Pour tout $A \in \mathcal{E}$, la fonction $x \mapsto V(x, A)$ est $\mathcal{E}-$mesurable.

2- Pour tout $x \in E$, la fonction d'ensemble $A \mapsto V(x, A)$ est une mesure positive sur $(E, \mathcal{E})$.

Soit V un noyau sur $(E, \mathcal{E})$, alors pour toute fonction f positive et $\mathcal{E}-$mesurable sur E, nous notons Vf ou encore $V(f)$ la fonction définie par

$$Vf(x) = \int^* f(y)V(x, dy), \ \forall x \in E,$$

l'intégral ici doit être comprise comme étant prise par rapport à la mesure $V(x, \bullet)$.

Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ et f une fonction positive, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}-$mesurable sur $(E \times E)$, alors la fonction $(x, A) \mapsto \int_A f(x, y)d\mu(y)$ sur $E \times \mathcal{E}$ est un noyau sur $(E, \mathcal{E})$.

Si E est un espace topologique et $\mathcal{E}$ est la $\sigma-$algèbre de Borel de E, alors le noyau sur $(E, \mathcal{E})$ est dit le noyau de Borel sur E.

Rappelons quelques résultats de Bouleau [3] qui nous seront utiles dans la suite de ce chapitre :

Théorème 2.2.1. Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort, alors il existe un unique noyau de Borel V sur Ω tel que :

1- Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\Omega)$, $V\phi$ est $\mathcal{H}_1-$potentiel sur Ω et $\mathcal{H}_1-$harmonique sur $\Omega \setminus S(\phi)$.

2- Pour toute fonction $v \in \mathcal{H}_2^{*+}(\Omega)$, Vv est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.

Le noyau V sera dit le noyau de couplage des espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ dans l'espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$ ou simplement noyau de couplage de $(\Omega, \mathcal{H})$. Soit (p, q) un $\mathcal{H}-$ potentiel pur > 0, fini et continu sur Ω. D'après la Remarque 3.3.2 le potentiel p est strict et d'après le Théorème 2 (p.362) [55] ou l'Exercice 8.2.3 (p.198) [22], il existe un unique noyau de Borel W sur Ω tel que :

1- Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\Omega)$, la fonction $W\phi$ est un $\mathcal{H}_1-$potentiel sur Ω, harmonique sur $\Omega \setminus S(\phi)$.

2- $W1 = p$.

Soit V le noyau de couplage de $(\Omega, \mathcal{H})$, et considérons le noyau de Borel V' défini sur Ω par $V'f = V(qf)$ pour toute fonction f borélienne positive sur Ω. Le noyau V' vérifie les deux propriétés précédentes 1. et 2. du noyau W, mais comme W est unique alors $V' = W$. De ce qui précède on déduit ce qui suit :

Proposition 2.2.1. Si v est une fonction $\mathcal{H}_2-$hyperharmonique sur Ω, alors la fonction $\mathcal{H}_1-$hyperharmonique pure d'ordre 2, associée à v est $u = W(\dfrac{v}{q})$.

Proposition 2.2.2. Soit $(u, v) \in \mathcal{S}_+^*(\Omega)$ et u_0 la fonction $\mathcal{H}_1-$hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v. Alors il existe une fonction $\mathcal{H}_1-$hyperharmonique telle que $u = u_0 + u_1$.

Preuve. Puisque (u, v) est $\mathcal{H}-$surharmonique alors u et u_0 sont deux fonctions $\mathcal{H}_1-$surharmoniques. Supposons dans un premier temps que u et v sont finies et soient $\omega \in \mathcal{U}_r$ un ouvert $\mathcal{H}-$régulier et w la fonction définie sur ω par $w = u - \int u d\mu_\bullet^\omega + \int u_0 d\mu_\bullet^\omega$. Alors le couple (u, v) est $\mathcal{H}-$surharmonique sur ω. De plus nous avons $\liminf\limits_{x \in \omega,\, x \to y} w(x) \geq u_0$ pour tout $z \in \partial\omega$. Il en découle d'aprés la Proposition 1.21 [59] que le couple (u_2, v) est $\mathcal{H}-$surharmonique sur Ω, où u_2 est la fonction définie sur Ω par :

$$u_2 = \begin{cases} w \wedge u_0 \; sur \; \omega \\ \\ u_0 \; sur \; \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

d'où $u_2 \geq u_0$ et donc $w \geq u_0$ dans ω. Il s'en suit que la fonction $u - u_0$ est égale à une fonction u_1, $\mathcal{H}_1-$hyperharmonique positive sur Ω et d'où $u = u_0 + u_1$. Pour tout couple (u, v) positif, $\mathcal{H}-$hyperharmonique il existe une suite croissante de couples (u_n, v_n) $\mathcal{H}-$surharmoniques finis positifs telle que $(u, v) = \sup_n(u_n, v_n)$. D'après la première partie de cette preuve, pour chaque n il existe une fonction t_n, $\mathcal{H}_1-$surharmonique positive et un couple pur (u'_n, v_n) tels que $u_n = u'_n + t_n$. La suite (u'_n, v_n) est croissante d'après le Théorème 3.2.1 et donc le couple (u'_n, v) est pur. Il s'en suit que $u = \sup_n u'_n + \sup_m \widehat{\inf}_{n \geq m} t_m$, ce qui prouve la proposition. □

Corollaire 2.2.1. On suppose que $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort. Alors il existe un couple (p, q), $\mathcal{H}-$potentiel pur, fini, continu et strictement positif dans Ω.

Preuve. Il existe un $\mathcal{H}-$potentiel (p, q), fini, continu et strictement positif dans Ω, d'après la Proposition 7.6 [59]. Soit p_1 la fonction $\mathcal{H}_1-$hyperharmonique pure associée à q, il existe une fonction $\mathcal{H}_1-$hyperharmonique $u \geq 0$ telle que $p = u + p_1$. Comme p_1 et u sont s.c.i. et p est fini et continu, on en déduit que p_1 est fini et continu, et d'où (p_1, q) est un $\mathcal{H}-$potentiel pur, fini et continu sur Ω. □

Corollaire 2.2.2. Soient $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort et (u, v) un couple pur sur Ω. Alors il existe une suite croissante de couples $\mathcal{H}-$potentiels (u_n, v_n) purs finis et continus tels que $(u, v) = \sup_n(u_n, v_n)$.

Preuve. D'après le Théorème 7.8 [60], il existe une suite croissante de $\mathcal{H}-$potentiels (p_n, q_n) continus sur Ω telle que $(u, v) = \sup_n(p_n, q_n)$. Pour chaque n considérons la fonction p'_n, $\mathcal{H}_1-$hyperharmonique pure associée à q_n. Alors d'après la Proposition 3.3.5 il existe $t_n \in \mathcal{H}_1^{*+}$ telle que $p_n = t_n + p'_n$. Puisque p_n est continue et que t_n et p'_n sont s.c.i. alors p'_n est continu. De plus du Théorème 3.2.1 on déduit que la suite p'_n est croissante et que $(u, v) = \sup_n(p'_n, q_n)$. □

Proposition 2.2.3. Soit $(u, v) \in \mathcal{S}^+(\Omega)$ pur et U un ouvert de Ω. Si v est $\mathcal{H}_2-$harmonique sur U, alors le couple (u, v) est $\mathcal{H}-$harmonique sur U.

Preuve. Soit $U \in \mathcal{U}_r$ tel que $\overline{\omega} \subset U$. Alors nous avons $\int v d\lambda_x^\omega = v(x)$ pour tout $x \in \omega$, et d'où le couple :

$$(s,v) = \begin{cases} (\int u d\mu_x^\omega + \int u d\nu_x^\omega, v) \ sur \ \omega \\ (u,v) \ sur \ \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

est $\mathcal{H}-$hyperharmonique sur Ω d'après la Proposition 4.2 [22].

Par conséquent $s \geq u$ et donc $u = s = \int u d\mu_x^\omega + \int u d\nu_x^\omega$ sur ω. Mais comme ω est aléatoire cela prouve que le couple (u,v) est $\mathcal{H}-$harmonique sur U d'après la Proposition 5.4. [22]. □

Corollaire 2.2.3. Si $(u,v) \in \mathcal{S}^+(\Omega)$ est un $\mathcal{H}-$potentiel, alors v est $\mathcal{H}_2-$potentiel.

Preuve. La fonction v étant $\mathcal{H}_2-$surharmonique positive , considérons k la fonction $\mathcal{H}_2-$harmonique de la décomposition de Riesz de v. Soit h la fonction pure d'ordre 2, $\mathcal{H}_2-$hyperharmonique, associée à k, alors $h \leq u$, d'où (h,k) est $\mathcal{H}-$surharmonique et donc $\mathcal{H}-$harmonique. Il en découle que $(h,k) = 0$, en particulier $k = 0$, ce qui prouve que v est un $\mathcal{H}_2-$potentiel. □

Corollaire 2.2.4. Soit (h,k) un couple $\mathcal{H}-$harmonique et soit p la partie $\mathcal{H}_1-$potentiel de la décomposition de Riesz de h. Alors (p,k) est un $\mathcal{H}-$potentiel pur.

Soit $(\Omega,\mathcal{H})$ un espace biharmonique et supposons que l'espace harmonique $(\Omega,\mathcal{H}_1)$ est un espace de Green. Considérons une fonction continue $y \mapsto p_y$ définie de Ω vers le cône $\mathcal{S}_1^+(\Omega)$ muni de la topologie introduite par R-M. Hervè, qui associe à chaque y un $\mathcal{H}_1-$potentiel de support harmonique $\{y\}$ ([51] Chapitre IV et [51] Proposition 22.1). D'après le théorème de représentation intégrale des potentiels, Théorème 18.2 [51], il existe une unique mesure de Radon μ positive sur Ω telle que $p = \int p_y d\mu(y)$. Dans ce cas le noyau W est donné par :

$$Wf(x) = \int_\Omega p_y f(y) d\mu(y)$$

pour tout $x \in \Omega$ et toute fonction $f \in \mathcal{B}^+(\Omega)$. De ce qui précède on peut voir que le noyau considéré dans le Théorème 3.2.1 est donné par

$$Vf(x) = \int_\Omega \frac{p_x}{q_x} f(y) d\mu(y)$$

pour tout $x \in \Omega$ et toute fonction $f \in \mathcal{B}^+(\Omega)$. D'où la proposition suivante :

Proposition 2.2.4. Soit $(\Omega,\mathcal{H})$ un espace biharmonique, supposons que l'espace harmonique $(\Omega,\mathcal{H}_1)$ est un espace de Green et considérons le noyau de couplage V. Soit la fonction continue $y \mapsto p_y$ définie de Ω vers le cône $\mathcal{S}_1^+(\Omega)$ muni de la topologie introduite par R-M. Hervé, qui associe à chaque y un $\mathcal{H}_1-$potentiel de support harmonique $\{y\}$. Alors il existe une unique mesure de Radon $\mu \geq 0$ sur Ω telle que $Vf(x) = \int p_y f(y) d\mu(y)$ pour tout $x \in \Omega$ et toute $f \in \mathcal{B}^+(\Omega)$.

2.3 Espace biharmonique associé à deux espaces harmoniques forts et un noyau de couplage donné

Étant donnés deux espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$, on suppose que le premier espace est fort et que il existe un $\mathcal{H}-$potentiel fini continu sur Ω. Smyrnelis a donné dans [59] un espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$ dont les espaces harmoniques associés sont $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$. Dans [8] Boukricha a établit, en utilisant les sections de potentiels continus, une méthode plus générale pour la construction de tels espaces biharmonique et a donné une caractérisation des espaces biharmoniques dont les espaces harmoniques associés sont $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$.

Dans ce qui suit nous prouvons qu'il existe un unique espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$ dont les espaces harmoniques associés sont $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ munis d'un noyau de couplage V sur Ω.

Soit ω un ouvert relativement compact de Ω, on note H^1_ω et H^2_ω les solutions du problème de Dirichlet sur ω de donnée f sur $\partial\omega$, relatives respectivement à $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$. Nous notons dans la suite l'opérateur de réduction (resp, balayage) sur $A \subset \Omega$ par respect respectivement aux faisceaux $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, $R^{1,A}$ et $R^{2,A}$ (resp. $\widehat{R}^{1,A}$, $\widehat{R}^{2,A}$).

Le résultat suivant semble être nouveau dans l'axiomatique des espaces biharmoniques :

Théorème 2.3.1. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux faisceaux harmoniques de Bauer sur Ω et V un noyau de Borel sur Ω tel que pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\Omega)$, la fonction $V(\phi)$ est un $\mathcal{H}_1-$potentiel fini continu sur Ω et $\mathcal{H}_1-$harmonique sur $\Omega \setminus S(\phi)$. On suppose de plus que Ω possède une base d'ouverts $\mathcal{V}$ qui sont à la fois $\mathcal{H}_1-$réguliers et $\mathcal{H}_2-$réguliers et qui il existe un $\mathcal{H}_2-$potentiel $q > 0$ tel que Vq est un $\mathcal{H}_1-$potentiel. Alors il existe un unique espace biharmonique fort $(\Omega, \mathcal{H})$ dont les espaces harmoniques associés sont $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ et tel que V est le noyau de couplage.

Remarque 2.3.1. Pour un noyau de Borel V sur un espace harmonique Ω, la propriété que pour toute fonction $f \geq 0$ sur Ω, à support compact dans Ω, la fonction Vf est un

$\mathcal{H}_1-$potentiel sur Ω, harmonique sur $\Omega \setminus S(f)$ est équivalente à la propriété que pour toute $f \in \mathcal{B}^+(\Omega)$ bornée et égale à zéro en dehors d'un compact K de Ω, la fonction Vf est finie, continue sur Ω et harmonique sur $\Omega \setminus K$.

Preuve. Il existe un $\mathcal{H}_2-$potentiel $0 < q_0 < q$, d'où $V(q_0)$ est $\mathcal{H}_1-$surharmonique (car q est la limite supérieure d'une suite de potentiels continus q_n, $n \in \mathbb{N}$). En remplaçant q par q_0 on peut supposer que q est continu. Pour tout $U \in \mathcal{U}_c$ nous avons $V(q) = V(1_U q) + V(1_{\Omega \setminus U} q)$. Il en découle d'après les hypothèses du théorème que $V(1_U q)$ est continu sur Ω et $V(1_{\Omega \setminus U} q)$ est $\mathcal{H}_1-$harmonique sur U(d'après la Remarque 3.3.1), d'où $V(q)$ est continu sur U, et par conséquent Vq est continu sur Ω. Pour tout $U \in \mathcal{U}_c$, le potentiel (dans U)

$$p_U = V(q) - \widehat{R}^{1,\Omega \setminus U}_{V(q)} = V(q) - H^1_U(V(q))$$

est fini et continu sur U. La famille $(p_U)_{U \in \mathcal{U}_c}$ est une section de $\mathcal{H}_1-$potentiels finis continus sur Ω. Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ l'espace biharmonique associé aux espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$, $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ et à la section de potentiels continus $(p_U)_{U \in \mathcal{U}_c}$ [7].

Il reste à montrer que le noyau de couplage de $(\Omega, \mathcal{H})$ est égale à V. On peut supposer que la constante 1 est $\mathcal{H}_2-$harmonique sur Ω et que $V1$ est $\mathcal{H}_1-$surharmonique donc un $\mathcal{H}_1-$potentiel sur Ω. Soit V' le noyau de couplage de l'espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$. Puisque $V1$ est un $\mathcal{H}_1-$potentiel et puisque le couple $(V1, 1)$ est $\mathcal{H}-$harmonique on Ω, alors d'après le Corollaire 3.3.10, $V1$ est la fonction $\mathcal{H}_1-$hyperharmonique d'ordre 2 associée à la fonction $u \equiv 1$, donc $V'1 = V1$. D'après les conditions sur V et les propriétés de V' on a $V = V'$, d'après l'Exercice 8.2.3. [22].

Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort dont les espaces harmoniques associés sont $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$, on suppose que $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ est un espace de Green et on considère $y \mapsto q_y$ une fonction continue de Ω vers $\mathcal{S}_2(\Omega)$ muni de la topologie de R-M. Hervé, qui associe a chaque $y \in \Omega$ un $\mathcal{H}_2-$potentiel q_y à support harmonique $\{y\}$ et on note G_2 la fonction définie sur $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$ par $G_2(x, y) = q_y(x)$. Si pour tout $y \in \Omega$ la fonction p'_y (la fonction hyperharmonique pure associée à q_y) est $\mathcal{H}_1-$surharmonique, alors la fonction définie par $H(x, y) = p'_y(x)$ est dite le noyau de Green biharmonique ou encore le deuxième noyau de Green de l'espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$.

2.4 Exemples

Dans ce paragraphe nous donnons quelques exemples montrant que les résultats préliminaires de Smyrnelis dans [61, 63] sont erronés. Ces mêmes résultas ont étaient utilisés par Smyrnelis dans [64] pour définir la notion d'espace biharmonique adjoint d'un espace biharmonique de Green. Même si les résultats dans [64] sont justes néanmoins ils sont déduit de résultats faux comme cela est mentionné dans l'introduction. Dans le paragraphe qui suit, nous allons définir correctement la notion d'espace biharmonique adjoint d'un espace biharmonique de Green.

Exemple 2.4.1. Soient N un entier ≥ 1, et $(\mathbb{R}^N, \mathcal{H})$ l'espace biharmonique de l'exemple 2.1 où $L_1 = L_2 = \Delta$. L'espace $(\mathbb{R}^N, \mathcal{H})$ est fort si et seulement si $N \geq 5$ (voir par Exemple [13] p.588). Supposons que $N \geq 5$ et soit (p, q) un $\mathcal{H}-$potentiel sur $\mathbb{R}^N$ tel que $p > 0$ et $q > 0$. Le noyau de couplage associé à $(\mathbb{R}^N, \mathcal{H})$ est donné par :

$$Vf(x) = c_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|| \, x - y \, ||^{N-2}} d\lambda(y)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R}^N)$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$, où λ dénote la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$ et c_N une constante de normalisation qui satisfait $\Delta \frac{c_N}{|| \, . - y \, ||^{N-2}} = -\epsilon_y$ au sens des distributions pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, ϵ_y étant la mesure de Dirac au point y ($G(x, y) = \frac{c_N)}{|| \, x - y \, ||^{N-2}}$ le noyau de Green normalisé de $\mathbb{R}^N$). Remarquons tout d'abord qui il n'existe pas de couple biharmonique $(h, k) > 0$ dans $\mathbb{R}^N$. En effet si un tel couple existait, la fonction k serait une constante qu'on notera $c > 0$. On aura alors $Vk(x) = cc_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|| \, x - y \, ||^{N-2}} d\lambda(y) = +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, ce qui est une contradiction. Considérons à présent le faisceau $\mathcal{H}'$ des espaces vectoriels constitués de fonctions réelles continues défini pour tout ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^N$ par :

$$\mathcal{H}' = \{(h, k) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} : (ph, qk) \; est \; \mathcal{H} - biharmonique \; sur \; \omega\},$$

donc nous avons nécessairement :

$$\mathcal{H}^{'*} = \{(h, k) \in \mathcal{C}_l \times \mathcal{C}_l : (pu, qv) \; est \; \mathcal{H} - hyperharmonique \; sur \; \omega\},$$

où $\mathcal{C}_l(\omega)$ dénote le cône des fonctions s.c.i. sur ω.

Il est clair que $(1, 1) \in \mathcal{H}^{'*}(\mathbb{R}^N)$. Toutefois il n'y a pas de couple (u, v) sur $\mathbb{R}^N$ tel que $u > 0$ et $v > 0$. Cet exemple montre que les affirmations de Smyrnelis dans la

Remarque 3 page 323 de [63] ne sont pas correctes.

Exemple 2.4.2. Cet exemple était donné par El Kadiri dans [26] et [27]. Soit $\Omega = [0,1[$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$, nous posons :

$$\mathcal{H}_1(\omega) = \{u \in \mathcal{C}^2(\omega) : (xu)^{''} = 0\}$$

et

$$\mathcal{H}_2(\omega) = \{u \in \mathcal{C}(\omega) : u(x) = \frac{a}{x^2+b}\}$$

sur chaque composante connexe de ω, $a, b \in \mathbb{R}$, où $\mathcal{C}(\omega)$, resp. $\mathcal{C}^2(\omega)$ dénote l'espace des fonctions réelles continues, resp. l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, sur ω (si $0 \in \omega$ alors toute fonction $u \in \mathcal{H}_2(\omega)$ est constante dans la composante contenant 0). On définit par la suite un faisceau biharmonique sur Ω en posant :

$$\mathcal{H}(\omega) = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2(\omega) : (xu)^{''} = -v, v \in \mathcal{H}_2(\omega)\}$$

sur tout ouvert ω de Ω. Il est facile de vérifier que $(\Omega, \mathcal{H})$ est un espace de biharmonique de Brelot dont les espaces harmoniques associés sont $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$. Soit p et q les foncions définies sur Ω par : $p(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$ et $q(x) = \min(1, v_0(x))$ où

$$v_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} - 1 & si\ x > 0 \\ +\infty & si\ x = 0 \end{cases}.$$

La fonction v_0 est un $\mathcal{H}_2-$potentiel. En effet, v_0 est une fonction $\mathcal{H}_2-$harmonique sur $]0,1[$ et pour tout $\alpha \in]0,1[$, si k est une fonction continue sur $[0,\alpha]$, harmonique sur $\omega =]0,\alpha[$ et telle que $k \leq v_0$ sur ω, alors v_0 est $\mathcal{H}_2-$surharmonique > 0 sur ω. Soit h une fonction $\mathcal{H}_2-$harmonique sur $]0,1[$ telle que $h \leq v_0$, alors h est nécessairement une constante ≤ 0, d'où v_0 est un $\mathcal{H}_2-$potentiel. On peut aussi vérifier aisément que le coupe (p,q) est un $\mathcal{H}-$potentiel. Donc l'espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$ est fort. Les espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ sont des espaces de Green, néanmoins $\{0\}$ n'est support biharmonique d'aucun couple $\mathcal{H}-$potentiel pur (extrémal). En effet v_0, à une constante multiplicative près, est l'unique $\mathcal{H}_2-$potentiel de support harmonique $\{0\}$. Si la fonction pure d'ordre 2 associée à v_0 est $\mathcal{H}_1-$surharmonique, alors le couple (u, v_0) serait harmonique sur $]0,1[$ d'après la Proposition 3.2.3, et on aura alors $(xu)^{''}(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$, et donc nécessairement :

$$u(x) = \frac{ln(x)}{x} + \frac{x}{2} + a + \frac{b}{x},$$

où a et b sont des constantes réelles. Mais ceci est impossible puisque $u(x) < 0$ pour tout x proche de 0.

Soit (P, Q) un $\mathcal{H}-$potentiel continu sur Ω tel que $Q > 0$ (et donc $P > 0$) dans Ω. Considérons le faisceau biharmonique $\mathcal{H}'$ défini sur Ω par :

$$\mathcal{H}'(U) = \{(h, k) \in \mathcal{C}(U) \times \mathcal{C}(U) : (Ph, Qk) \in \mathcal{H}'^*(U)\}$$

pour tout ouvert U de Ω. Alors $(1, 1) \in \mathcal{H}'^*(\Omega)$, mais il n'y a pas de $\mathcal{H}'^*-$potentiel de support biharmonique $\{0\}$. Cet exemple montre que le Théoèrme 2 de [27] p.321, n'est pas vrai. Il semble que ce résultat soit la conséquence d'une mauvaise utilisation du principe du minimum dans la preuve donnée par Smyrnelis.

Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort. Nous avons vu que contrairement aux espaces harmonique admettant un potentiel, l'ensemble de tous les points qui ne sont des supports biharmoniques d'aucun potentiel pur et extrémal, n'est pas toujours vide. Dans le cas où $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ est un espace harmonique de Green, Smyrnelis a montré dans [61] que cet ensemble est nulle part dense (c.à.d. d'interieur vide) dans Ω (cf. [25], Proposition 3.4). Dans [27] El kadiri a donné un résultat plus précis et général :

Théorème 2.4.1 (Théoèrme 3.1 [27]). Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort. Alors l'ensemble des points de Ω qui ne sont des supports biharmoniques d'aucun potentiel pur extrémal est $\mathcal{H}_2-$polaire.

La preuve de ce théoèrme est basée sur la représentation intégrale dans le cône des couples $\mathcal{H}-$surharmoniques (voir [27]).

Dans [63], Smyrnelis a aussi étudié l'existence et la régularité noyau de Green biharmonique (Proposition 6 [63]), toutefois il semble que ces résultats soient aussi incorrectes.

Un espace harmonique de Green $(\Omega, \mathcal{K})$, est dit symétrique si il y a une fonction continue $y \mapsto p_y$ de Ω vers le cône des fonctions $\mathcal{K}-$surharmoniques muni de la topologie de R-M. Hervé telle que pour tout $y \in \Omega$, la fonction p_y est un $\mathcal{K}-$potentiel de support harmonique y et $p_y(x) = p_x(y)$ pour tout couple $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ (on dit alors que le noyau fonction $G(x, y) = p_y(x)$, le noyau de Green de $(\Omega, \mathcal{K})$, est symétrique).

Théorème 2.4.2 (Proposition 3.1 [27]). Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort de Green dont les espaces harmoniques associés $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ sont symétriques et égaux et pour tout $y \in \Omega$, soit q_y un $\mathcal{H}_2-$potentiel à support harmonique $\{y\}$. Alors pour tout $y \in \Omega$, la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2, $p_y^{'}$ associée à q_y est surharmonique. De plus si la fonction G définie par $G(x,y) = q_y(x)$ est symétrique, alors la fonction $H(x,y) = p_y^{'}(x)$ est symétrique.

Si les espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ sont symétriques mais non égaux, alors la fonction $p_y^{'}$ n'est pas toujours $\mathcal{H}_1-$surharmonique pour tout $y \in \Omega$, ce qui contredit les affirmations de Smyrnelis dans [63], l'exemple qui suit illustre ce cas de figure :

Exemple 2.4.3. Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ l'espace biharmonique de l'exemple 3.3.2. Pour tout $y \in \Omega$ on considère les fonctions suivantes :

$$p_y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{y} - 1 & si \ 0 \leq x \leq y \\ \dfrac{1}{x} - 1 & si \ y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et

$$q_y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} - 1 & si \ 0 \leq x \leq y \\ \dfrac{1}{x^2} - 1 & si \ y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

avec la convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$.

Alors pour tout $y \in \Omega$, tout $\mathcal{H}_1-$potentiel, resp. $\mathcal{H}_2-$potentiel, de support $\{y\}$ est proportionnel à p_y, resp. q_y. On pose $G_1(x,y) = p_y(x)$ et $G_2(x,y) = q_y(x)$ pour tout couple $(x,y) \in \Omega \times \Omega$. les fonctions G_1 et G_2 sont continues sur $\Omega \times \Omega$ et pour tout $y \in \Omega$ la fonction $G_i(.,y)$ est un $\mathcal{H}_i-$potentiel $\mathcal{H}_i-$harmonique sur $\Omega \setminus \{y\}$, $i = 1, 2$. Il en découle que G_1 et G_2 sont respectivement les noyaux de Green des espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ $(\Omega, \mathcal{H}_2)$. Il est clair que G_1 et G_2 sont symétriques. Toutefois la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à q_0 est égale à $+\infty$. Cet exemple montre que si les espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ sont symétriques mais non égaux, alors le noyau de Green n'est pas nécessairement défini.

2.5 L'espace biharmonique adjoint

La notion de fonction harmonique adjointe dans un espace harmonique de Green fut introduite et étudiée par R-M. Hervé dans le Chapitre IV [51], auquel nous nous référons pour la définition et les propriétés de telles fonctions.

Dans [64], Smyrnelis a essayé de généraliser ce concept dans le cadre de l'axiomatique biharmonique. Toutefois les résultats dans [64] sont incorrecte, comme cela fut signalé dans l'exemple 5.1 et 5.2. Dans ce paragraphe nous allons montrer que il est possible de définir correctement et de manière précise une théorie d'espace biharmonique adjoint d'un espace biharmonique de Green $(\Omega, \mathcal{H})$ à condition que cet espace possède un noyau biharmonique de Green qui soit régulier (condition 5.3). Nous allons aussi prouver que cette condition est nécessaire pour l'existence de l'adjoint biharmonique de $(\Omega, \mathcal{H})$.

La démarche erronnée suivie par Smyrnelis pour construir l'espace biharmonique adjoint dans [64] est basée sur le Théorème 2 de [63] qui est faux d'après l'exemple 3.4.2. Pour définir la notion d'espace biharmonique adjoint nous allons procéder différemment que Smyrnelis dans [64].

Tout au long de ce paragraphe $(\Omega, \mathcal{H})$ est un espace biharmoniquede Green, on suppose que le cône $\mathcal{H}_j^+(\Omega)$, $j = 1, 2$, est muni de la topologie de R.-M. Hervé (voir Chapitre IV [51]). Pour tout $y \in \Omega$, on considère p_y un $\mathcal{H}_1-$potentiel et q_y un $\mathcal{H}_2-$potentiel de supports harmoniques $\{y\}$ tels que $y \mapsto p_y$ et $y \mapsto q_y$ de Ω vers $\mathcal{S}_1^+(\Omega)$, respectivement $\mathcal{S}_2^+(\Omega)$ soient continues (cf. Théorème 18.1 et Proposition 81.1 [51]) et désignons par p_y' la fonction $\mathcal{H}_1-$hyperharmonique, pure d'ordre 2 associée à q_y.

Proposition 2.5.1. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1- La fonction $y \mapsto p_y'$ est continue sur Ω.

2- Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $y \mapsto p_y'(x)$ es continue sur $\Omega \setminus \{x\}$.

Preuve. 1. $\Rightarrow$ 2. Supposons que l'application $y \mapsto p_y'$ est continue sur Ω et soient $x \in \Omega$ et (y_n) une suite de pointe de $\Omega \setminus \{x\}$ convergeant vers $y \in \Omega \setminus \{x\}$. Nous avons $\lim \widehat{\inf} p_{y_n}' = p_y'$ et $\lim \widehat{\inf} q_{y_n} = q_y$ et donc il existe $x_0 \in \Omega \setminus \{y\}$ et une sous suite (y_{n_k}) de (y_n) tels que $\lim p_{y_n}'(x_0) = p_y'(x_0)$ et $\lim q_{y_n}(x_0) = q_y(x_0)$. IL en résulte d'après la Proposition 1.8 [62], et du Théorème d'Ascoli-Arzela qu'il existe une sous-suite (p_j, q_j) de (p_{y_n}', q_{y_n}) qui converge localement uniformément sur $\Omega \setminus \{y\}$ vers un couple

$\mathcal{H}-$surharmonique (p, q_y), où p est une fonction continue sur $\Omega\setminus\{y\}$. D'où $p = \lim\widehat{inf}p_j$ sur $\Omega\setminus\{y\}$ et donc sur Ω. Puisque le couple $(\lim\widehat{inf}p_j, q_y)$ est $\mathcal{H}-$surharmonique sur Ω, alors nous avons $p \geq p_y^{'}$ sur $\Omega\setminus\{y\}$. Il en découle que $p = p_y^{'}$ car $p - p_y^{'}$ est $\mathcal{H}_1-$surharmonique sur $\Omega\setminus\{y\}$ et s'annule en x_0. En particulier nous avons $p(x) = p_y^{'}$ et donc $\lim p_j(x) = p_y^{'}$. Il en résulte que pour tout $x \in \Omega\setminus\{y\}$, la suite $(p_{y_n}^{'})$ converge vers $p_y^{'}(x)$, ce qui prouve l'affirmation 2.

2. $\Rightarrow$ 1. Soit $x \in \Omega$ et supposons que $y \mapsto p_y^{'}(x)$ est continue sur $\Omega\setminus\{x\}$. Soit (y_n) une suite de points de Ω convergeant vers $\{y\}$ et (y_{n_k}) une sous-suite de (y_n) telle que la suite $(p_{y_{n_k}}^{'})$ converge dans $\mathcal{S}_1^+(\Omega)$, nous avons $\lim\widehat{\inf}p_{y_{n_k}}^{'}(x) = p_y(x)$. D'un autre coté le couple $(\lim\widehat{inf}p_{y_{n_k}}^{'}, q_y)$ est $\mathcal{H}-$hyperharmonique sur Ω, alors $\lim\widehat{inf}p_{y_{n_k}}^{'} \geq p_y^{'}$. Il s'en suit que $\lim\widehat{\inf}p_{y_{n_k}}^{'} = p_y^{'}$ sur $\Omega\setminus\{x\}$, et donc sur Ω tout entier. On conclu que la fonction $y \mapsto p_y^{'}$ est continue sur Ω.

La proposition suivante ainsi que son corollaire donnent quelques conditions correctes sous lesquelles la fonction $y \mapsto p_y^{'}$ est continue.

Définition 2.5.1. Un (une fonction) noyau sur Ω est une fonction s.c.i. $G : \Omega\times\Omega \to [0, +\infty]$. Le noyau G est dit régulier sur Ω, si pour toute mesure μ sur Ω de support compact K, la fonction $G\mu$ est continue sur Ω, si sa restriction sur K est continue.

Dans un espace harmonique de Green $(X, \mathcal{K})$, d'après Théorème 25.1 et pp. 521 [51], le noyau de Green sur X est régulier si et seulement si, $(X, \mathcal{K})$ satisfait l'axiome D (axiome de domination, voir le Chapitre V [51]). $\square$

Dans ce qui suit on note G le noyau défini sur $\Omega\times\Omega$ par $G(x, y) = p_y(x)$.

Proposition 2.5.2. Supposons que pour tout $y \in \Omega$, la fonction $p_y^{'}$ associée à q_y est surharmonique, et que le noyau G est régulier. Alors l'application $y \longmapsto p_y^{'}$ est continue de Ω vers $S_1^+(\Omega)$.

Preuve. Soit (y_n) une suite de points convergeant vers $y \in \Omega$. Pour $\phi \in \mathcal{C}_c^+$, la fonction $V(\phi)$ est continue, d'où la suite de mesures $q_{y_n}.\mu$ converge vers faibelement vers $q_y.\mu$. Nous avons alors $p_{y_n}^{'} = G_2\mu_n$ pour tout entier n, et d'où grâce au Théorème 3 [15], $\lim p_{y_n}^{'} = \lim\widehat{inf}G_2\mu_n = G_2\mu = p_y^{'}$. $\square$

Corollaire 2.5.1. Si l'espace harmonique $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ vérifie l'axiome de domination (ou l'axiome D, voir le Chapitre V [51]), alors

1- L'application $y \longmapsto p_y^{'}$ de Ω vers $S_2^+(\Omega)$ est continue.

2- Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $y \longmapsto p_y^{'}(x)$ est continue sur $\Omega \setminus \{x\}$.

Preuve. Si $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ vérifie l'axiome de domination, alors le noyau G est régulier et donc les assertions 1. et 2. sont justifiées d'après les propositions 3.5.1 et 3.5.3. □

Afin de définir correctement la notion d'espace biharmonique adjoint, nous allons procéder différemment que Smyernelis [64]. Nous supposons de plus que des hypothèses émises au début de ce chapitre sont satisfaites et que l'espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$ vérifie aussi les conditions suivantes :

5.1- Il existe une base $\mathcal{V}$ d'ouverts L_i-complètement déterminants, $i = 1, 2$.

5.2- On suppose que le couple $(1, 1)$ est un $\mathcal{H}$-potentiel fini et continu sur Ω.

Soit V le noyau de couplage de $(\Omega, \mathcal{H})$. On dénote par μ la mesure représentant la fonction hyperharmonique $V1$ d'ordre 2 associée à la fonction surharmonique constante 1,

$$V1 = \int p_y d\mu(y).$$

Rappelons que d'après la Proposition 3.2.4, le noyau V est donné par :

$$Vf(x) = \int^{*} p_x f(y) d\mu(y),\ \forall x \in \Omega\ et\ f \in \mathcal{B}_+(\Omega).$$

Nous allons par la suite coupler les espaces harmoniques $(\Omega, ^{*}\mathcal{H}_2)$ et $(\Omega, ^{*}\mathcal{H}_1)$ de telle sorte que dans l'espace biharmonique résultant de ce couplage, la fonction $p_{\bullet}^{'}(y)$ soit la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associé au $^{*}\mathcal{H}_1-$potentiel p_y^{*} pour tout $y \in \Omega$. Afin d'y parvenir nous allons utiliser le noyau de couplage V^{*} introduit dans la preuve du Théorème 3.3.1, défini par

$$V^{*}f(x) = \int q_x(y) f(y) d\mu(y), ;\ \forall f \in \mathcal{B}_+(\Omega),$$

en particulier nous avons

$$V^{*}p_y^{*}(x) = V^{*}p_{\bullet}(y)(x) = \int p_x(z) q_z(y) d\mu(z) = p_x^{'}(y),\ \forall x, y \in \Omega.$$

Le noyau V^{*} sera dit le noyau adjoint associé au noyau V.

Les conditions **5.1** et **5.2** signifient que le noyau V^* vérifie quelques unes des conditions du Théorème 3.3.1. Afin que V^* soit le noyau de couplage des espaces harmoniques $(\Omega,^* \mathcal{H}_2)$ et $(\Omega,^* \mathcal{H}_1)$, il doit satisfaire aussi à la condition suivante

5.3 Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^+$, la fonction $V^*\phi$ est finie et continue sur Ω.

Nous ne savons pas si la condition **5.3** est toujours satisfaite (sous les hypothèses émises dans ce paragraphe). Néanmoins nous avons ce qui suit,

Proposition 2.5.3. Si pour tout $y \in \Omega$, la fonction $p_y^{'}$ est surharmonique et si la fonction $y \longmapsto p^{'}(y)$ de Ω dans $\mathcal{S}_2^+(\Omega)$ est continue, alors la condition **5.3** est satisfaite.

Preuve. Soient $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\Omega)$ telle que $\phi \not\equiv 0$, et y n'appartenant pas à $\mathcal{S}(\phi)$ le support de ϕ. Puisque la fonction p_y^* est continue et > 0 sur $\mathcal{S}(\phi)$, on peut trouver un réel $\alpha \geq 0$ tel que $\phi \leq \alpha p_y^*$, d'où $\alpha p_\bullet^{'}(y) = V^*(\alpha p_y^* - \phi) + V^*(\phi)$. Vu que la fonction $p_\bullet^{'}(y)$ est finie et continue sur un voisinage U de $S(\phi)$ ne contenant pas pas y (d'après la Proposition 6.1), et que $V^*(\phi)$ et $V^*(\alpha p_y^* - \phi)$ sont s.c.i., alors $V^*(\phi)$ est finie et continue sur U. D'autre part, nous avons $V^*(\phi)(x) = \int q_y^*(x)\phi(y)d\mu(y)$ et donc $V^*(\phi)$ est $^*\mathcal{H}_2-$harmonique sur le complémentaire du support de ϕ. On en déduit que $V^*(\phi)$ est finie et continue sur Ω. $\square$

Corollaire 2.5.2. Si l'espace $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ satisfait l'axiome de domination alors la condition 5.3 est satisfaite.

Preuve. Le résultat découle de la proposition précédente et du Corollaire 3.5.1. $\square$

On peut alors se demander si la condition 5.3 est satisfaite par le noyau V^* dans le cas où il existe des points de Ω qui ne sont pas des supports biharmoniques d'un potentiel pur. L'exemple 5.2 montre que la réponse n'est pas toujours vraie. Pour voir ceci (dans l'exemple 5.2) remarquons tout d'abord que $(\frac{1-x}{2}, 1)$ est un couple $\mathcal{H}-$surharmonique sur $[0, 1[$. Pour tout $y \in [0, 1[$ on pose

$$p_y(x) = \begin{cases} \frac{1}{y} - 1 \; si \; 0 \leq x \leq y \\ \frac{1}{x} - 1 \; si \; y \leq x \leq 1, \end{cases}$$

et

$$p_y(x) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} - 1 \; si \; 0 \leq x \leq y \\ \frac{1}{x^2} - 1 \; si \; y \leq x \leq 1, \end{cases}$$

avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$. Il est clair que les fonctions $y \longmapsto p_y$ et $y \longmapsto q_y$ définies de Ω respectivement dans $\mathcal{S}_1^+$ et $\mathcal{S}_2^+$ munies de la topologie de R-M. Hervé, sont continues. Soit μ la mesure mesure sur Ω définie par $\mu(dy) = y(1-y)\lambda(dy)$, où λ dénote la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$. Nous avons par un calcul simple $\frac{1}{2}(1-x) = \int p_y(x)d\mu(y)$. Le noyau de couplage des espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ dans ce cas alors est donné par ;

$$Vf(x) = \int p_y(x)f(y)d\mu(y),$$

et donc

$$V^*f(x) = \int q_y(x)f(y)d\mu(y)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{B}^+$ et tout $x \in \Omega$. Soit ϕ une fonction positive sur $[0,1[$ de support compact et telle que $\phi(0) > 1$. On peut trouver alors un réel $\alpha \in [0,1[$ tel que sur $[0,\alpha$ et d'où nous avons

$$V^*(\phi)(0) \geq \int_0^\alpha \frac{(1-y^2(1-y))}{y}dy = +\infty,$$

ce qui prouve que la condition 5.3 n'est pas satisfaite. Nous allons prouver par la suite (Proposition 3.5.4) la réciproque de la Proposition 3.5.3, à savoir que si la condition 5.3 est satisfaite(bien sur en plus des conditions 5.1, 5.2), alors la fonction $p_y^{'}$ est $\mathcal{H}_1-$surharmonique pour tout $y \in \Omega$ et l'application $y \longmapsto p_y^{'}$ est continue sur Ω.

Nous allons maintenant coupler les espaces harmoniques $(\Omega,^* \mathcal{H}_2)$ et $(\Omega,^* \mathcal{H}_1)$ moyennant le noyau V^*, de telle sorte que dans l'espace biharmonique obtenu la fonction $p_\bullet^{'}(y)$ soit la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à la fonction $\mathcal{H}_1-$surharmonique $p_y^* = p_\bullet(y)$ pour tout $y \in \Omega$ comme nous l'avons vu précédemment.

Théorème 2.5.1. Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ soit un espace biharmonique de Green fort dont les espaces harmoniques associés $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ satisfassent aux conditions 5.1, 5.2et 5.3. Alors il existe un unique espace biharmonique de Green $(\Omega,^* \mathcal{H})$ dont les espaces harmoniques associés sont respectivement $(\Omega,^* \mathcal{H}_2)$ et $(\Omega,^* \mathcal{H}_1)$ et tel que pour tout $y \in \Omega$, la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à p_y^* soit égale $p_\bullet^{'}(y)$.

Preuve Le noyau V^* vérifie les hypothèses du Théorème 3.3.1, ce qui assure l'existence et l'unicité de l'espace biharmonique $(\Omega,^* \mathcal{H})$ résultant du couplage des espaces

$(\Omega,^* \mathcal{H}_2)$ et $(\Omega,^* \mathcal{H}_1)$ par ce noyau. D'après l'identité (6.1), pour tout $y \in \Omega$ la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à la fonction $^*\mathcal{H}_1-$surharmonique p_y^* est égale à $p_\bullet^*(y)$. $\square$

L'espace biharmonique $(\Omega,^* \mathcal{H})$ du Théorème 3.5.1 est dit *l'espace biharmonique adjoint* de $(\Omega, \mathcal{H})$. Pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$, les couples $(u, v) \in^* \mathcal{H}(\omega)$ sont appelés les couples biharmoniques adjoints sur ω.

Remarque 2.5.1. Les ouverts relativement compacts complètement déterminants de la base $\mathcal{V}$ constituent une base d'ouverts qui sont à la fois $^*\mathcal{H}_1-$réguliers et $^*\mathcal{H}_2-$réguliers, donc $^*\mathcal{H}-$réguliers. Soit ω un ouvert (relativement compact) $^*\mathcal{H}-$régulier et ϕ une fonction ≥ 0 continue sur $\partial\omega$. Pour tout $x \in \omega$, la forme linéaire $\phi \longmapsto V_\omega^*(^*H_\omega^1(\phi))(x)$ définie sur $\mathcal{C}(\partial\omega)$ définie une mesure de (Radon) τ_x^ω sur $\partial\omega$. Où $H_\omega^1(\phi)$ est la solution du problème Dirichlet dans ω dans l'espace $(\Omega,^* \mathcal{H}_1)$ de donnée ϕ sur $\partial\omega$, et V_ω le noyau de Borel défini sur Ω par $V_\omega(f) = V(\overline{f}) - \widehat{R}^{1,\Omega\setminus\omega}_{V(\overline{f})}$ pour toute $f \in \mathcal{B}^+(\omega)$, telle que $\overline{f}$ est la fonction définie sur Ω, égale à f sur ω et 0 sur $\Omega \setminus \omega$. Le triplet des mesures biharmoniques de ω au point x est $\rho_x^\omega, \tau_x^\omega, \sigma_x^\omega$, où ρ_x^ω et σ_x^ω sont respectivement les mesures harmoniques relatives à ω au point x dans les espaces harmoniques adjoints $(\Omega,^* \mathcal{H}_2)$ et $(\Omega,^* \mathcal{H}_1)$ (voir Chapitre VI [51]).

Nous allons maintenant montrer la réciproque de la Proposition 3.5.3 :

Proposition 2.5.4. Supposons qu'il existe un espace biharmonique fort $(\Omega, \mathcal{G})$ dont les espaces harmoniques associées sont $(\Omega,^* \mathcal{H}_2)$ et $(\Omega,^* \mathcal{H}_1)$ et tel que pour tout $y \in \Omega$, la fonction $p_\bullet'(y)$ est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à $p_y^* = p_\bullet(y)$. Alors pour tout $y \in \Omega$, la fonction p_y' est $\mathcal{H}_1-$surharmonique et la fonction $y \longmapsto p_y'$ est continue sur Ω.

Preuve Supposons qu'il existe un espace biharmonique fort $(\Omega, \mathcal{G})$ dont les espaces harmoniques associés sont $(\Omega,^* \mathcal{H}_2)$ et $(\Omega,^* \mathcal{H}_1)$ et tel que pour tout $y \in \Omega$, la fonction $p_\bullet'(y)$ est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à $p_y^* = p_\bullet(y)$. Supposons qu'il existe $y \in \Omega$ tel que $p_y' = +\infty$ sur Ω, alors nous avons $p_x'^*(y) = p_y'(x) = +\infty$ pour tout $x \in \Omega \setminus (N \bigcup \{y\})$, ce qui est absurde d'après le Théorème 5.3, puisque pour un tel x nous avons $p_x'(y) < +\infty$ (car le couple $(p_\bullet'(x), p_x^*)$ est $\mathcal{G}-$biharmonique sur $\Omega \setminus \{x\}$), où N est sous ensemble $^*\mathcal{H}_1-$polaire constitué des points y de Ω tels que la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à p_y^* est identiquement égale à $+\infty$. Soit maintenant $x \in \Omega$, alors le couple $(p_\bullet'(x), q^*)$ est $\mathcal{G}-$harmonique sur $\Omega \setminus \{x\}$. Soit

$z \in \Omega \setminus \{x\}$ et $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur Ω plus fin que le filtre des voisinages z, alors nous avons $\lim \widehat{\inf}_{\mathcal{F}} p'_z(x)$, et il en découle que cette égalité reste vrai aussi pour $z = x$ (en effet si u et v sont $\mathcal{K}-$hyperharmoniques sur X dans un espace harmonique $(X, \mathcal{K})$ tel que $u = v$ sur $X \setminus \{x\}$ pour un certain point $x \in X$, alors $u = v$). On en déduit que la fonction $y \longmapsto p'_y$ est continue sur Ω. Ce qui prouve la proposition. □

Nous allons par la suite démontrer la réciproque du Théorème 3.5.1, à savoir l'existence d'un espace biharmonique adjoint $(\Omega, {}^*\mathcal{H})$ associé à un espace harmonique $(\Omega, \mathcal{H})$ vérifiant les hypothèses du Théorème 3.5.1 et la propriété que pour tout $y \in \Omega$, la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à p^*_y est $p'_\bullet(y)$, ce qui implique que le noyau de couplage de $(\Omega, \mathcal{G})$ est V^*, et donc V^* vérifie nécessairement la condition 5.3.

Théorème 2.5.2. Supposons qu'il existe un espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{G})$ dont les espaces harmoniques associés sont respectivement $(\Omega, {}^*\mathcal{H}_2)$ et $(\Omega, {}^*\mathcal{H}_1)$ tels que pour toute $y \in \Omega$, la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à p^*_y est égale à $p'_\bullet(y)$. Alors le noyau de couplage de $(\Omega, \mathcal{G})$ est V^*.

Preuve. Soit W le noyau de couplage de $(\Omega, \mathcal{G})$. D'après les hypothèses du théorème, $(\Omega, \mathcal{G})$ est un espace biharmonique fort. Pour tout $y \in \Omega$, nous avons $V^*(p^*_y) = W(p^*_y) = p'_\bullet(y)$ par définition de V^* et W. Soit p un ${}^*\mathcal{H}_1-$potentiel > 0 sur Ω tel que $W(p)$ est fini et continu sur Ω (un tel potentiel existe d'après le Corollaire 3.2.1). D'après Théorème 18.2 [51], il existe une mesure μ sur Ω telle que $p = \int p_\bullet(y) d\mu(y)$. Par application du Théorème de Fubini deux fois, nous avons pour tout $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} W(p)(x) &= \int p(z) W(x, dz) = \int \int p^*_y(z) d\mu(y) W(x, dz) \\ &= \int \int p^*_y(z) W(x, dz) d\mu(y) = \int W(p^*_y)(x) d\mu(y) \\ &= \int V^*(p^*_y)(x) d\mu(y) = V^* p(x) \end{aligned}$$

et d'où $Wp = V^*$. Comme W satisfait la condition 2 du Théorème 3.3, on déduit que V^* satisfait aussi cette condition. En effet, soient $\phi \in \mathcal{C}^+_c(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que $\phi \leq \alpha p$. Alors $\alpha V^* p = V^*(\phi) + V^*(\alpha p - \phi)$. Les fonctions $V^*(\phi)$ et $V^*(\alpha p - \phi)$ sont toutes les deux finies et s.c.i. et vu que $V^* p$ est finie et continue sur Ω, alors $V^*(\phi)$ est fini et continu. De plus d'après la définition du noyau V^*, la fonction $V^*(\phi)$ est ${}^*\mathcal{H}_2-$harmonique dans $\Omega \setminus S(\phi)$. Soit $v \in^* \mathcal{H}^{*+}_1(\Omega)$, d'après ce qui précède nous avons $Wv = \sup_n W(v \wedge np) = \sup_n V^*(v \wedge np) = V^* v$. Il s'en suit d'après le Théorème 3.2.1 que $W = V^*$. □

Nous avons montré aussi (sous les hypothèses du Théorème 3.5.2) le résultat suivant :

Corollaire 2.5.3. Sous les hypothèses du théorème précédent, pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\Omega)$, la fonction $V^*\phi$ est un $^*\mathcal{H}_2-$potentiel fini et continu sur Ω.

2.6 Application à l'étude de la régularité du noyau de Green biharmonique

Nous gardons les mêmes notations du paragraphe précédent. Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace biharmonique de Green fort. Pour tout $y \in \Omega$, on considère un $\mathcal{H}_2-$potentiel q_y de support harmonique $\{y\}$ tel que la fonction $y \longmapsto q_y$ définie Ω dans $\mathcal{S}_1^+(\Omega)$ (muni de la topologie de R-M. Hervé) est continue (cf. Théorème 18.1 et Proposition 18.1 [51]). On suppose que pour tout $y \in \omega$, la fonction $p_y^{'}$ est continue de Ω dans $\mathcal{S}_1^+(\Omega)$ (d'où pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\Omega)$, la fonction $V^*\phi$ est un $^*\mathcal{H}_2-$potentiel fini et continu). On pose $H(x, y) = p_y^{'}(x)$ pour tout couple $(x, y) \in \Omega^2$. Le noyau H est dit le deuxième noyau de Green de l'espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$ (voir paragraphe 2).

Théorème 2.6.1. Supposons que les conditions 5.1 et 5.2 sont vérifiées et que pour tout $y \in \Omega$, la fonction $p_y^{'}$ est $\mathcal{H}_1-$surharmonique sur ω et pour tout $x \in \Omega$, la fonction $y \longmapsto p_y^{'}(x)$ pour tout couple $(x, y) \in \Omega^2$. Alors le noyau H vérifie les propriétés suivantes

1. H est s.c.i. sur $\Omega \times \Omega$.
2. H est continu sur $\Omega \times \Omega \setminus \triangle$, où $\triangle = \{(x, x)\} : x \in \Omega$ la diagonale de $\Omega \times \Omega$.

Preuve. On peut supposer que le couple $(1, 1)$ est $\mathcal{H}-$surharmonique. Les conditions du Théorème 3.2.1 sont vérifiées, et donc l'espace biharmonique adjoint $(\Omega,^* \mathcal{H})$ est bien défini.

1- On a $H(x, y) = \int p_z(x) q_y(z) d\mu(z)$ pour tout couple $(x, y) \in \Omega^2$. d'autre part pour tout $z \in \omega$, les fonctions $(x, y) \longmapsto p_z(x)$ et $(x, y) \longmapsto p_y(z)$ sont s.c.i. sur $\Omega \times \Omega$, il en découle du lemme de Fatou que la fonction H est s.c.i. sur $\Omega \times \Omega$.

2- Soit $((x_n, y_n))$ une suite de points de $\Omega \times \Omega \setminus \triangle$ convergeant vers $(x, y) \in \Omega \times \Omega \setminus \triangle$, et soit ω un voisinage ouvert de x tel que y n'appartient pas à $\overline{\omega}$. On peut supposer que y_n n'appartient pas à $\overline{\omega}$ pour tout entier n. Les couples $(H(x, \bullet), q_\bullet(x))$ sont $^*\mathcal{H}-$biharmoniques, et donc continuent sur $\Omega \setminus \{x\}$. D'où les suites $(H(x, y_n))$ et $(q_{y_n}(x))$ sont bornées. D'un autre coté, les couples $(H(., y_n), q_{y_n})$, $n \in \mathbb{N}$, sont biharmoniques sur ω, alors d'après le Théorème 3.2 [27], les suites $(H(., y_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont equicontinues en x. Soit $\epsilon > 0$, on peut trouver un voisinage W de x tel que $W \subset \omega$ et $|H(\xi, y_n) - H(x, y_n)| < \epsilon$ pour tout $\xi \in W$ et tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant les mêmes arguments dans l'espace biharmonique $(\Omega, {}^*\mathcal{H})$ au noyau H^* (défini par $H^*(x, y) = H(x, y)$), il existe un voisinage ouvert W' de y tel que $|H(x_n, \xi) - H(x_n, y)| < \epsilon$ pour tout $\xi \in W'$ et tout $n \in \mathbb{N}$. De plus il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in W$ et $y_n \in W'$ pour tout $n \geq n_0$. D'où,

$$|H(x_n, y_n) - H(x, y)| \leq |H(x_n, y_n) - H(x_n, y)| + |H(x_n, y) - H(x, y)| < 2\epsilon,$$

pour tout $n \geq n_0$. On en conclue que la suite $H(x_n, y_n)$ converge vers $H(x, y)$ et donc la fonction H est continue sur $\Omega \times \Omega \setminus \triangle$. $\square$

Chapitre 3

Fonctions harmoniques et biharmoniques sur les ensembles compacts

3.1 Introduction

L'objectif de ce papier est de définir et étudier les couples biharmoniques dans un compact d'un espace biharmoniques sous l'axiomatique de Brelot, moyennant les mesures de Jensen. Notre motivation trouve origine dans les travaux de A. Debiard, B. Gaveau [23] et E.A. Poletsky [58] qui ont étudié la question sous différents points de vue pour le cas harmonique classique sur un compact K de $\mathbb{R}^n$. En effet dans un compact K de $\mathbb{R}^n$, de manière naturelle, une fonction harmonique est limite de suite de fonctions harmoniques définies sur des voisinage de K. A. Debiard, B. Gaveau ont établit l'équivalence entre cette définition et le fait qu'une fonction est harmonique dans un compact K si et seulement si elle est continue et finement harmonique sur l'intérieur fin de K. D'autre part E.A.Poletsky a montré l'équivalence entre la notion de fonction harmonique sur un compact et sa représentation via les mesures de Jensen. Dans [19] M. El Kadiri et M. Chadli ont étudié la notion de couple biharmonique dans un compact K de $\mathbb{R}^n$ et démontré le résultat suivant, dire qu'un couple biharmonique dans K est limite d'une suite de couple biharmoniques sur des voisinages de K est équivalent à dire que ce couple est continu et finement biharmonique sur l'intérieur fin de K.

Rappelons qu'un couple (h, k) de fonctions $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dit biharmonique sur U si $\Delta u = -v$ et $\Delta v = 0$. Dans ce travail nous allons étendre les résultats de E.A. Poletsky au cas général d'un sous ensemble compact d'un espace biharmonique de Brelot.

Afin d'atteindre notre objectif nous allons dans un premier temps étendre la notion de fonction harmonique dans un compact de $\mathbb{R}^n$ à un compact d'un espace harmonique de Brelot. Dans un second temps nous définissons le système de mesures biharmoniques sur K et donnons quelques unes de leurs propriétés. Finalement nous développons une nouvelle représentation intégrale pour les couples biharmoniques sur les ensembles compacts moyennant les mesures de Jensen.

Notations : On note Ω un espace topologique localement compact, connexe et localement connexe à base dénombrable d'ouverts relativement compacts. On note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des ouverts relativement compacts de Ω. Si $E \subset \Omega$, ∂E est sa frontière topologique dans la compactification d'Alexandroff $\overline{\Omega}$ de Ω. On désigne par $\mathcal{B}$ la $\sigma-$algèbre de Borel sur Ω. Une fonction sur un ensemble A sera toujours supposée à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ sauf indication du contraire. Pour une fonction sur un ouvert U de Ω, on note $\widehat{f}$ la fonction régularisée s.c.i. et si f_i est une famille de fonctions sur U, on note $\widehat{\inf} f_i$ ou $(\widehat{\inf}_i f_i)$ pour $\widehat{\inf f_i}$. On note $\mathcal{C}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{C}_b(\Omega)$) l'espace des fonctions réelles continues (finies) (resp. bornées continues) sur Ω. L'espace $\mathcal{C}_b(\Omega)$ muni de la norme $||f|| = sup_{z\in\Omega}|f(z)|$ est un espace vectoriel normé et on note $\mathcal{C}_0(\Omega)$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}_b(\Omega)$ constitué des fonctions continues linéaires qui s'annulent à l'infini. On désigne par $\mathcal{C}_c(\Omega)$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}_0(\Omega)$ dont les éléments sont les fonctions à supports compacts. Le dual de l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des mesures (signées) de Radon sur Ω. Si K est un sous-ensemble compact de Ω et f une fonction finie continue sur un voisinage de K, on pose $\mid\mid f \mid\mid_K = \sup_{x\in K} \mid f(x) \mid$.

Si S est un cône convexe d'un espace vectoriel (réel), l'ordre spécifique (ou l'ordre défini par S) sur S, est noté

$$\forall u, v \in S : u \prec v \Leftrightarrow \exists s \in S : v = u + s.$$

Enfin, un couple (f, g) de fonctions sur Ω est dit fini, resp. continu sur Ω si f et g sont finies, resp.continues sur Ω.

3.2 Fonctions harmoniques dans un compact

On se place dans un espace harmonique de Brelot $(\Omega, \mathcal{H})$ à base dénombrable d'ouverts de $\mathcal{O}(\Omega)$ admettant un potentiel strictement positif. Les constantes sont supposées être surharmoniques ainsi si u est surharmonique négative sur un voisinage K on peut trouver une constante positive c telle que $w = u + c \geq 0$ soit surharmonique positive sur ce voisinage de K. cette remarque permet de restreindre quelques démonstrations aux fonctions surharmoniques positives. Quelques unes des preuves utilisées sont inspirées de [57] et [58] ont été adaptées convenablement à notre contexte. On note $\mathcal{O}_r(\Omega)$ l'ensemble des ouverts réguliers relativement compacts de Ω.

Définition 3.2.1. Soit K un sous ensemble compact de Ω et $z \in K$. Une mesure μ de Radon positive à support inclut dans K est appelée mesure de Jensen de barycentre z ou encore mesure de Jensen en z si

$$u(z) \geq \int_K u d\mu$$

pour toute fonction u surharmonique définie sur un voisinage de K. Si u est harmonique sur un voisinage de K alors $u(z) = \int_K u d\mu$. On note $\mathcal{J}_z(K)$ l'ensemble des mesures de Jensen sur K de barycentre z.

Remarque 3.2.1. Comme les constantes sont supposées harmoniques, alors toute mesure $\mu \in \mathcal{J}_z(k)$ est une mesure de probabilité.

Exemple 3.2.1. Soit $K \subset \Omega$ un compact et $z \in k$. La mesure de Dirac ϵ_z appartient à $\mathcal{J}_z(K)$.

Exemple 3.2.2. Soit $U \in \mathcal{O}_r(\Omega)$. Pour tout $z \in \overline{U}$, la mesure μ définie sur $K = \overline{U}$ par $\mu = \epsilon_z$ si $z \in \partial U$ et $\mu(A) = \mu_z^U(A \cap \partial U)$, $\forall A \in \mathcal{B}(\overline{U})$, où μ_a^U est la mesure de harmonique sur U, est une mesure de Jensen au point z. En effet il est clair que pour toute fonction surharmonique sur un voisinage de $\overline{U}$ on a $u(z) \geq \int u d\mu_z^U = \int u d\mu$.

.

Théorème 3.2.1. Soit K un sous-ensemble compact (non vide) de Ω, $z \in K$ et $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. Alors $\mu \in \mathcal{J}_z(K)$ si et seulement si toute fonction u surharmonique continue sur un voisinage de K vérifie,

$$u(z) \geq \int_K u d\mu$$

.

Preuve. On suppose que pour toute fonction u surharmonique continue sur U un voisinage ouvert de K, on a

$$u(z) \geq \int_K u d\mu_z.$$

Soit u une fonction surharmonique sur Ω. En ajoutant une constante positive convenable à u on peut supposer que $u \geq 0$. Comme $(U, \mathcal{H}_{|U})$ est un espace $\mathcal{P}-$harmonique, alors d'après le Corollaire 2.3.1 [22], il existe une suite croissante de fonctions surharmoniques continues sur U qui converge vers u. On a alors $u_n(z) \geq \int_K u_n d\mu_z$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, moyennant le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que $u(z) \geq \int_K u d\mu$. D'où $\mu \in \mathcal{J}_z(K)$. L'implication inverse est évidente. $\square$

On dit qu'une suite d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{O}(\Omega)$ converge vers K si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $U_{n+1} \subset \overline{U}_{n+1} \subset U_n$ et $\cap U_n = K$.

Définition 3.2.2. On dit qu'une fonction h continue sur K est harmonique sur K, si

$$h(z) = \int_K h d\mu_z$$

pour tout $z \in K$ et $\mu_z \in \mathcal{J}_z(K)$.

On note $\mathcal{H}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K qui sont limites uniformes sur K de suites de restrictions sur K de fonctions harmoniques sur des voisinages de K. La définition précédente est justifiée par le théorème suivant.

Théorème 3.2.2. Une fonction h est harmonique dans K si et seulement si elle appartient à $\mathcal{H}(K)$.

Preuve. Supposons que $h \in \mathcal{H}(K)$ et soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions harmoniques sur des voisinages U_n de K convergeant uniformément vers h sur K. Alors pour tout $z \in K$ et $\forall \mu_z \in \mathcal{J}_z(K)$. Puisque la mesure μ est finie sur K, alors d'après le théorème de domination de Lebesgue on a

$$h(z) = \lim h_n(z) = \lim \int_K h_n(x) d\mu_z = \int_K h(x) d\mu_z,$$

donc h est harmonique dans K.

Pour l'implication inverse, on considère $\tilde{h}$ un prolongement continu de h sur Ω et $U_n \in \mathcal{O}_c$ une suite d'ouverts convergeant vers K. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le voisinage V_j de K d'indice j et $\mu_z^{U_j}$ la mesure harmonique sur U_j relative à $z \in V_j$. La fonction $u = \int_{\partial U_n} \tilde{h} d\mu_z^{U_n}$ est harmonique sur U_j, (en effet u_j est la solution du problème de Dirichlet sur U_j de donnée sur la frontière $\tilde{h}_{|U_n}$).

On considère $z_n \in K$ une suite de points qui converge vers $z \in K$ et $\alpha > 0$ tels que $|u_n(z_n) - \tilde{h}(z_n)| > \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit v une fonction surharmonique dans un voisinage de K alors $\exists j \in \mathbb{N}$ tel que v est surharmonique sur U_n pour tout $n \geq j$. D'où $v(z_n) \geq \int_{\partial U_n} v \mu_{z_n}$. De la suite de mesures $\mu_{z_n}^{U_n}$ on peut extraire une sous suite $\mu_{n_k}^{U_{n_k}}$ qui converge vaguement vers une mesure positive μ lorsque n tend vers $+\infty$ et donc $v(z) \geq \int_{\partial U} v d\mu$ et d'où $\mu \in \mathcal{J}_z(K)$. D'autre part $u_n(z_n) = \int_{\partial D_n} \tilde{h}\mu_n$ converge vers $\int_K \tilde{h} d\mu = h(z)$. Or $h(z_n)$ converge aussi vers $h(z)$ ce qui contredit le fait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $|u_n(z_n) - \tilde{h}(z_n)| > \alpha$ et démontre le théorème. □

Pour tout $U \in \mathcal{O}_c$ et tout $z \in U$, on considère la mesure μ_z^U sur ∂U et on définit la mesure μ sur $\overline{U}$ par :

$$\mu(A) = \mu_z^U(A \cap \partial U), \ \forall A \in \mathcal{B}(U).$$

Cette mesure sera aussi notée μ_z^U

Le théorème suivant permet de définir la mesure harmonique sur K.

Théorème 3.2.3. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts convergente vers K et $z \in K$, la suite de mesures harmoniques $(\mu_z^{U_n})$ sur U_n contient une sous suite de mesures harmoniques $(\mu_z^{U_{n_k}})$, $k \in \mathbb{N}$, qui converge vaguement vers une mesure de Radon positive portée par K.

Preuve. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts convergente vers K et soit $z \in K$, on considère $(\mu_z^{U_n})$ la suite de mesures harmoniques (de probabilité) sur $(\overline{U}_n)$. Ces mesures peuvent être naturellement prolongées en mesures de probabilité sur U_0, notées une fois encore $(\mu_z^{U_n})$. Il existe une sous suite de mesures harmoniques $(\mu_z^{U_{n_k}})$ de $(\mu_z^{U_n})$ qui converge vaguement vers une mesure de Radon positive portée par $\overline{U}_0$. Puisque (U_n) est une suite décroissante et puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, la mesure $\mu_z^{U_{n_k}}$ est portée par $\overline{U}_{n_k}$, alors la mesure μ_z^K est portée par K (la restriction de μ_z^K à K sera aussi notée μ_z^K).

Pour vérifier l'unicité de cette limite il suffit de montrer que pour tout $z \in K$, la limite $\lim \int_{\partial U_{n_k}} u(\xi)\mu^{U_n}(z,\xi)$ existe pour toute fonction $u \in C(\overline{U}_0)$.

Nous commençons par montrer que cette limite existe lorsque u est une fonction surharmonique continue (positive) sur $\overline{U}_0$. La solution u_{n_k} du problème de Dirichlet sur U_{n_k} de donnée sur la frontière u, est égale à

$$u_{n_k}(z) = \int_{\partial U_{n_k}} u(\xi)\mu(z,\xi).$$

Puisque u est surharmonique, moyennant le principe du minimum, nous avons $u_{n_k} \leq u$ sur U_{n_k}. Comme $u_{n_{k+1}} = u$ sur $\partial U_{n_{k+1}}$ et puisque $u_{n_k} \leq u = u_{n_{k+1}}$ sur $\partial U_{n_{k+1}}$, alors une fois encore le principe du minimum implique que $u_{n_k} \leq u_{n_{k+1}}$. D'où la suite de fonctions

(u_{n_k}) est une suite croissante sur K et d'où, pour tout $z \in K$ la limite

$$\lim \int_{\partial U_{n_k}} u(\xi)\mu(z,\xi)$$

existe.

D'après le lemme d'approximation R-M. Hervé (Lemme 6.1 [51]) toute fonction finie continue sur un compact est limite uniforme d'une suite de restrictions sur K de différences de deux potentiels finis continus sur Ω. On en déduit que la limite

$$\lim \int_{\partial U_{n_k}} u(\xi)\mu(z,\xi)$$

existe pour toute fonction $u \in C(\overline{U}_1)$.

Il est facile de voir que la limite de la suite $(\mu_z^{U_{n_k}})$ est indépendante du choix de la sous-suite $(\mu_z^{U_{n_k}})$. On note cette limite μ_z^K et on l'appel la mesure harmonique sur K en z. $\square$

Le lemme suivant est un résultat classique :

Lemme 3.2.1. Soit (μ_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite de mesures sur Ω convergeant vers une mesure μ sur Ω. Alors pour toute fonction s.c.i positive (ou juste positive en dehors d'un compact de Ω) on a $\liminf \mu_n \geq \int f d\mu$.

Preuve. Soit f une fonction s.c.i positive sur Ω, il existe une suite croissante de fonctions continues positives à supports compacts telle que $f = \sup_n f_n$. Pour tout entiers j et n, on a $\int f\mu_j \geq \int f_n \mu_j$ et donc

$$\liminf \int f d\mu_j \geq \lim_{j\to\infty} \int f_n d\mu_j = \int f_n d\mu,$$

En faisant tendre n vers $+\infty$. Par le Théorème de convergence monotone on trouve

$$\liminf \int f d\mu_j \geq \int f\mu.$$

$\square$

Lemme 3.2.2. Le support de μ_z^K est contenu dans ∂K

Preuve. Soit W un voisinage de ∂K et soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts convergente vers K. Soit $z_j \in \partial U_j$ il existe une sous suite z_{j_k} convergente vers un point $z_0 \in \partial K \subset W$ et donc pour un k_0 assez grand $\partial U_{j_k} \subset W$, $k \geq k_0$.

Soient $x \in \Omega \setminus \partial K$ et W' un voisinage ouvert de x tel que $\overline{W} \cap \overline{W'} = \emptyset$. Dès un certain rang k_0 le support de $\mu^{U_{j_k}}$ est inclut dans $\overline{W}$ pour $k \geq k_0$. Pour $z \in K$, $\mu^{U_j}(z, \overline{W'}) = 0$. Comme W' est un ouvert de Ω alors $\liminf \mu^{U_j}(z, W') \geq \mu^K(z, W')$ d'après le Lemme 4.2.2, d'où $\mu^K(z, W') = 0$ et x n'appartient pas au support de μ_z^K. Il en découle que le support de μ_z^k est contenu dans ∂K. □

Rappelons que Ω est un espace $\mathcal{P}$-harmonique ce qui implique que pour tout ouvert U de Ω et tout $x \in U$ on a $\epsilon_x^{\Omega \setminus U} = \mu_x^U$ [51]. D'autre part si U est régulier alors U est un ouvert fin régulier et d'où le support de $\epsilon_x^{\Omega \setminus U}$ est inclut dans $\partial_f U$ [42].

Théorème 3.2.4. La mesure harmonique sur K est une mesure de Jensen sur K.

Preuve. Soit (U_n) une suite d'ouverts réguliers convergeant vers K et u une fonction surharmonique continue sur un voisinage ouvert U. Il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{j_0} \subset U$. Alors pour tout $j \geq j_0$, $j \in \mathbb{N}$ et tout $z \in K$ on a $u(z) \geq \int_{\partial U_j} u(\xi) d\mu(z, \xi)$ et donc $u(z) \geq \liminf(\xi) d\mu_z^{U_j} \leq \int_{\partial K} u(\xi) d\mu(z, \xi)$ d'après la définition de μ_z^K et le Lemme 4.2.1. □

Proposition 3.2.1. Le support de μ_z^K, $z \in K$ est contenu dans $\partial_f K$.

Preuve. D'après le Théorème 9.1 [51], il existe un potentiel $p > 0$ fini continu sur Ω tel que $K = \{x \in K : p(x) - \widehat{R}_p^{\Omega \setminus K}(x) > 0\}$. Soit (U_n) une suite d'ouverts convergeant vers K, alors $\widehat{R}_p^{\Omega \setminus K} = \sup_n \widehat{R}_p^{\Omega \setminus U_n} (= \sup_n R_p^{\Omega \setminus U_n})$. Soit z un point de K, alors pour tout entier n on a $\int \widehat{R}_p^{\Omega \setminus U_n} d\mu_z^K = \widehat{R}_p^{\Omega \setminus U_n}(z)$, car la fonction $\widehat{R}_p^{\Omega \setminus U_n}$ est harmonique sur un voisinage de K. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, nous obtenons grâce au théorème de convergence monotone $\int \widehat{R}_p^{\Omega \setminus K} d\mu_z^K = \widehat{R}_p^{\Omega \setminus K}(z)$. Ainsi $\widehat{R}_p^{\Omega \setminus K}(z) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int \widehat{R}_p^{\Omega \setminus K} d\mu_z^{U_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int p d\mu_z^{U_n}$ car le support de $\mu_z^{U_n}$ est inclue dans ∂U_n et $\widehat{R}_p^{\Omega \setminus K} = p$ sur ∂U_n. Il en découle que $\int (p - \widehat{R}_p^{\Omega \setminus K}) d\mu_z^K = 0$, et donc μ_z^K est portée par (le borélien)$K \setminus K^{'} = \partial_f K$, où K' est l'intérieur de K. □

3.3 Couples biharmoniques dans un compact

Nous pouvons maintenant définir les couples biharmoniques sur un compact de Ω en utilisant les mesures de Jensen dans le cas biharmonique. Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort au sens de Smyrlinis [59]. On note $\mathcal{H}^*(\Omega)$, resp. $\mathcal{H}_+^*(\Omega)$ le cône des fonctions $\mathcal{H}-$hyperharmoniques, resp. $\mathcal{H}-$hyperharmoniques positives.

On note $(\Omega, \mathcal{H}_1)$, $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ les espaces harmoniques associés à $(\Omega, \mathcal{H})$ (voir pages 38,39 [59]). Il est clair que ces espaces sont des espaces $\mathcal{P}-$ harmoniques. On suppose que $(\Omega, \mathcal{H}_1)$, $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ sont des espaces de Brelot et on dénote par $\mathcal{H}_1^*(\Omega)$ et $\mathcal{H}_2^*(\Omega)$ les cônes de fonctions respectivement $\mathcal{H}_1$-hyperharmoniques, $\mathcal{H}_2$ hyperharmoniques dans Ω. L'ensemble des ouverts réguliers de ω est noté une fois encore $\mathcal{O}_r(\Omega)$.

On dit qu'une suite de couples $((u_n, v_n))$ continus sur un compact K, converge uniformément vers un couple de fonctions (u, v) continues sur K. Si la suite (u_n), resp. (v_n) converge uniformément vers u, resp. v, sur K, c'est-à-dire que (u_n, v_n) converge vers (u, v) dans $\mathcal{C}(K)^2$ muni de la norme $|| (f, g) ||=|| f ||_K + || g ||_K$ pour tout couples $(f, g) \in \mathcal{C}(K)^2$ où $|| f ||= \sup_{x\in K} | f(x) |$.

Soit K un compact de Ω. L'ensemble des limites uniformes de suites de couples biharmoniques dans des voisinages de K est un sous espace vectoriel de $C(K) \times C(K)$ qu'on note $\mathcal{H}(K)$.

Proposition 3.3.1. Si $h \in \mathcal{H}_1(K)$ alors $(h, 0) \in \mathcal{H}(K)$

Preuve. Puisque $h \in \mathcal{H}_1(K)$ alors il existe une suite h_n de fonctions $\mathcal{H}_1$-harmoniques dans des voisinages de K telle que $\lim h_n = h$ uniformement sur K. Les couples de fonctions $(h_n, 0)$ sont biharmoniques sur des voisinages de K et la suite $((h_n, 0))$ converge vers $(h, 0)$ sur K, ce qui signifie que $(h, 0) \in \mathcal{H}(K)$. □

Afin de définir les couples biharmoniques dans un compact, nous utiliserons la notion de fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 (voir [60]). La fonction hyperharmonique d'ordre 2 d'une fonction v positive $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique dans Ω, est la plus petite fonction u positive telle que (u, v) soit un couple $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans Ω. cette fonction est donnée par

$$u = \widehat{\inf}\{w \geq 0 : \ (u, v) \in \mathcal{H}_+^*(\Omega)\}.$$

Un couple $(u, v) \in \mathcal{H}_+^*(\Omega)$ est dit pur si u est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.

Rappelons qu'un noyau de Borel $\mathcal{V}$ sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{B})$ est une fonction positive définie sur $\Omega \times \mathcal{B}$ telle que :

1- Pour tout $A \in \mathcal{B}$ la fonction $x \mapsto \mathcal{V}(x, A)$ est $\mathcal{B}$- mesurable.

2- Pour tout $x \in \Omega$, la fonction d'ensemble $A \mapsto \mathcal{V}(x, A)$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Théorème 3.3.1 (Théorème 2.8 [12]). Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort au sens de Smyrnelis. Alors il existe un noyau borélien unique noté $\mathcal{V}$ sur Ω qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1- Pour toute fonction f à support compact sur Ω, la fonction $\mathcal{V}(f)$ est $\mathcal{H}_1$-surharmonique sur Ω, finie, continue et $\mathcal{H}_1$-harmonique dans le complémentaire du support de f.

2- Pour toute fonction v positive, $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique dans Ω, $\mathcal{V}(v)$ est la fonction $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.

Le noyau V est dit noyau de couplage de $(\Omega, \mathcal{H})$.
Le résultat suivant peut être trouvé dans [12] :

Proposition 3.3.2. Soit $(\Omega, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort au sens de Smyrnelis et (u, v) un couple $\mathcal{H}-$surharmonique positif sur Ω alors $V(v) \preceq u$, c'est-à-dire, il existe $s \in \mathcal{S}_1^+(\Omega)$ telle que $u = s + V(v)$.

Soient Ω un espace harmonique de Brelot muni d'un potentiel > 0, et q un potentiel fini continu > 0 sur Ω. D'après le Théorème 2 [55] il existe un unique noyau de Borel W sur Ω tel que :

1- $W(1) = q$.

2- Pour toute fonction réelle continue positive f de support compact dans Ω, la fonction Vf, est un $\mathcal{H}_1-$potentiel fini continu sur Ω et $\mathcal{H}_1-$harmonique sur le complement du support de f.

Le noyau W est appelé le noyau associé au potentiel q.

Proposition 3.3.3. Soit (p, q) un couple $\mathcal{H}-$potentiel pur, fini et continue > 0 et W le noyau sur Ω associé à p dans l'espace harmonique $(\Omega, \mathcal{H}_1)$. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{B}^+(\Omega)$ on a $V(f) = W(\frac{f}{q})$.

Preuve. On dénote par V_1 le noyau de Borel défini par $V_1(f) = V(fq)$ pour toute $f \in \mathcal{B}^+(\Omega)$. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^+(\Omega)$, la fonction $V_1(f)$ est un $\mathcal{H}_1-$potentiel fini continu sur Ω et $\mathcal{H}_1-$harmonique sur le complement du $S(\phi)$ et on a $V_1(1) = p$ et d'où V_1 est le noyau associé à p, donc $V_1 = W$. $\square$

Soit (p_0, q_0) un potentiel pur fini continu sur Ω. Le potentiel p est un $\mathcal{H}_1-$potentiel strict fini continu. Soit V le noyau de Borel associé à p_0, c'est-à-dire l'unique noyau de Borel sur Ω vérifiant :

1- $V(1) = p_0$.

2- Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\Omega)$, la fonction $V(\phi)$ est surharmonique sur Ω et harmonique sur $\Omega \setminus S(\phi)$.

Pour tout ouvert U de Ω, on définit le noyau V_U sur U en posant

$$V_U(f) = V(\overline{f}) - \widehat{R}^{\Omega \setminus U}_{V(\overline{f})}{}_{|U}$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_b^+(\Omega)$, où $\overline{f}$ est le prolongement de f à Ω s'annulant sur $\Omega \setminus U$. Remarquons que si $f \in \mathcal{B}_b^+(\Omega)$ telle que $f = 0$ sur U, alors $V_U(f_{|U}) = 0$. En effet la fonction $V(\overline{f})$ est $\mathcal{H}_1-$harmonique sur U, il en découle du principe du minimum que $\widehat{R}^{\Omega \setminus U}_{V(\overline{f})}{}_{|U} = V(\overline{f})$ sur U et donc partout sur Ω.

Soient U_1 et U_2 deux ouverts de Ω tels que $U_1 \subset U_2$. Alors on a

$$V_{U_1}(f_{|U_1}) \leq V_{U_2}(f_{|U_2})$$

sur U_1 pour toute $f \in \mathcal{B}^+(\Omega)$. Soit K un compact de Ω et (U_n) suite décroissante d'ouverts de Ω convergeant vers K. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}^+(K)$, la suite de fonctions $V_{U_n}(\overline{f})$ est décroissante sur Ω. Posons

$$V_K(f) = (\inf_n V_{U_n}(f))_{|K}.$$

Il est alors facile de vérifier que $V_K(f)$ est indépendante du choix de la suite (U_n) et donc V_K est un noyau de Borel sur K.

Proposition 3.3.4. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_b^+$, la fonction $V_K(f)$ est continue sur K.

Preuve. Soit (p, q) un $\mathcal{H}-$potentiel continu sur Ω tel que $q > 0$ et $\overline{f} \leq q$. On a $V_{U_n}(q_{|U_n}) = V_{U_n}(q - \overline{f})_{|U_n} + V_{U_n}(\overline{f})_{|U_n}$ et par la Proposition 4.3.2 on a $V_{U_n}(q_{|U_n}) \prec p$ d'où $p = V_{U_n}(q_{|U_n}) + s_n$ sur U_n, telle que s_n est une fonction $\mathcal{H}_1-$surharmonique ≥ 0 sur U_n. Donc $p = V_{U_n}((q - \overline{f})_{|U_n}) + (V_{U_n}(\overline{f})_{|U_n})) + s_n$. Les suites de fonctions

$(V_{U_n}(q-\overline{f})_{|U_n})$, $(V_{U_n}(\overline{f})_{|U_n})$ et (s_n) convergent simplement sur K (les deux premières suites sont décroissantes alors que la troisième est croissante) et on a $p = \lim\widehat{\inf} V_{U_n}(q-\overline{f})_{|U_n} + \lim\widehat{\inf} V_{U_n}(q)_{|U_n} + \lim\widehat{\inf} s_n$. Comme p est fini et continu sur K et pour tout n, les fonctions $\lim\widehat{\inf} V_{U_n}(q-\overline{f})_{|U_n}$, $\lim\widehat{\inf} V_{U_n}(q)_{|U_n}$ et $\lim\widehat{\inf} s_n$ sont s.c.i. sur K, il en découle que $\lim V_{U_n}(q)_{|U_n} = \lim\widehat{\inf} V_{U_n}(q)_{|U_n}$ est continue sur K. Donc $V_K(f)$ est continue sur K. □

Définition 3.3.1. Un système de mesures positives de Radon $(\mu_z, \nu_z, \lambda_z)$ est dit de Jensen sur K si pour tout $(h,k) \in \mathcal{H}(K)$ et si $\forall z \in K$

$$\begin{cases} h(z) = \int_K h(x)d\mu_z(x) + \int_K k(x)d\nu_z(x) \\ k(z) = \int_K k(x)d\lambda_z(x). \end{cases}$$

On note $\mathcal{J}_z(K)$ (resp. $\mathcal{J}_z^1(K)$, $\mathcal{J}_z^2(K)$) l'ensemble de mesures de Jensen au point $z \in K$ relatif à l'espace $(\Omega, \mathcal{H})$ (resp.$(\Omega, \mathcal{H}_1), (\Omega, \mathcal{H}_2)$.

Remarque 3.3.1. 1- Pour tout système de mesures$(\mu_z, \nu_z, \lambda_z) \in \mathcal{J}_z(K)$ alors $\mu \in \mathcal{J}_z^1(K)$ et $\lambda \in \mathcal{J}_z^2(K)$.

2- Si les constantes sont $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ harmoniques alors μ_z et λ_z sont des mesures de probabilités.

Exemple 3.3.1. Le triplet de mesure $(\epsilon_z, 0, \epsilon_z)$ où ϵ_z est la mesure de Dirac en $z \in K$, est un système de mesures de Jensen dans K.

Exemple 3.3.2. Soient $U \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $(\mu_z^U, \nu_z^U, \lambda_z^U)$ le système de mesures harmoniques sur U alors les deux triplets de mesures $(\mu^U, \nu^U, \lambda^U)$ défini sur $K = \overline{U}$ par $\mu(A) = \mu_z^A(A \cap \partial U)$, $\lambda(A) = \lambda_z^A(A \cap \partial U)$ et $\nu(A) = \nu_z^A(A \cap \partial U)$ $\forall A \in \mathcal{B}(\overline{U})$, est un système de mesures de Jensen au point $z \in U$.

Exemple 3.3.3. Soient K un compact de Ω, $z \in \Omega$, $\mu \in \mathcal{J}_z^1(K)$ et $\lambda \in \mathcal{J}_z^2(K)$. Soit ν la mesure définie sur K par :

$$\nu(f) = V_K(f)(z) - \int V_K(f)d\lambda$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K)$. Alors le système de mesures (μ, ν, λ) est un système de mesures de Jensen sur K.

Définition 3.3.2. Un couple $(h,k) \in C(K^2)$ est dit biharmonique dans K si $\forall(\mu_z,\nu_z,\lambda_z) \in \mathcal{J}_z(K)$

$$\begin{cases} h(z) = \int_K h(x)d\mu_z(x) + \int_K k(x)d\nu_z(x) \\ k(z) = \int_K k(x)d\lambda_z(x) \end{cases}.$$

On note $\mathcal{BH}(K)$ l'espace des limites des suites de restrictions sur K des couples $\mathcal{H}-$har- moniques sur des voisinages de K. Il est clair que $\mathcal{BH}(K)$ est un espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}(K)^2$.

Proposition 3.3.5. Soit K un compact de Ω et $(h,k) \in \mathcal{BH}(K)$. Alors $k \in \mathcal{H}_2(K)$.

Preuve. Pour tout $z \in K$ et $\lambda \in \mathcal{J}_z^2(K)$ on a $(\epsilon_z, 0, \lambda_z) \in \mathcal{J}_z(K)$ et donc $\int k(x)d\lambda_z = k(z)$. Il en découle que $k \in \mathcal{H}_2(K)$. □

Théorème 3.3.2. Un couple $(h,k) \in C(K^2)$ est biharmonique dans K si et seulement si $(h,k) \in \mathcal{BH}(K)$.

Preuve. Soient $(h,k) \in \mathcal{BH}(K)$ et U_n une suite d'ouverts réguliers de Ω qui convergent vers K. D'après la Proposition 4.4.5 $k \in \mathcal{H}_2(K)$. Alors d'après le Théorème 4.2.2, il existe de fonctions harmoniques k_n sur des voisinages de K qui converge vers k uniformément sur K. Quitte à réduire le nombre des U_n, on peut assumer pour tout $n \in \mathbb{N}$, que la fonction k_n est harmonique sur U_n. On prouve dans un premier temps que $(V_{U_n}(k_n), k_n)$ converge vers $(V_K(k), k)$ sur K. Rappelons que la suite (U_n) est décroissante et que pour tout n, on a $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$. Soit $\epsilon \geq 0$, on peut trouver un entier n_0 tel que $\mid k_n(x) - k(x) \mid < \epsilon$ pour tout $x \in K$ et tout $n \geq n_0$. En réduisant chaque U_n pour tout $n \geq n_0$, on peut supposer que $\mid k_n \mid \leq \mid k \mid_K + \epsilon$ sur U_n. Pour tout $n \geq n_0$ on a l'égalité suivante :

$$V_{U_n}(k_n)_{|K} - V_K(k) = V_{U_n}(k_n - \overline{k}_{|U_n}) + V_{U_n}(\overline{k}_{|U_n}) - V_K(k).$$

Le deuxième terme de cette égalité tend vers 0, uniformément sur K, lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit $n \geq n_0$, on a $V_{U_n}(\mid k_n - \overline{k}_{|U_n} \mid) \leq V_{U_n}(f_{\epsilon|U_n})$ où $f_\epsilon = \epsilon 1_K + (\sup_K \mid) + \epsilon)1_{\Omega\setminus K}$. IL s'en suit que

$$\limsup(\sup_K V_{U_n}(\mid k_n - \overline{k}_{|U_n} \mid)) \leq \limsup(\sup_K V_{U_n}(f_{\epsilon|U_n})),$$

et comme ϵ est arbitraire, ceci implique que $\limsup(\sup_K V_{U_n}(\mid k_n - \overline{k}_{|U_n} \mid)) = 0$ et donc $\lim V_{U_n}(k_n) = \lim V_{U_n}(\overline{k}_{U_n}) = V_K(k)$ uniformément sur K. Ainsi on a :

$$\int (h - V_K(k))d\mu_z = \int hd\mu_z - \int V_K(k)d\mu_z$$

$$= \int hd\mu_z - (V_{U_n}(k_n) - \lim \int k_n d\nu_z$$

$$= \int hd\mu_z + \int kd\nu_z - V_K(k)(z) = h(z) - V_K(k)(z)$$

et d'où $h - V_K(k)$ est $\mathcal{H}_1-$harmonique dans K.

Pour l'implication inverse on considère une suite de couple de fonctions (h_n, k_n) biharmonique sur des voisinages de K et qui converge vers (h, k) sur K. Puisque $||k_n||_K \leq \sup(||K_n||_K)$ et d'après le théorème de domination de Lebesgue on a $k = \lim k_n = \lim \int k_n d\mu_z = \int \lim k_n d\mu_z = \int kd\mu_z$ et puisque $||h_n||_K \leq \sup(||h_n||_K) + \sup(||k_n||_K)$ alors $h = \lim h_n = \lim(\int h_n d\mu_z + \int k_n d\nu_z) = \int \lim h_n d\mu_z + \int \lim k_n d\nu_z = \int hd\mu_z + \int kd\nu_z$, d'où le résultat. $\square$

Dans la preuve précédente on a prouvé aussi que :

Proposition 3.3.6. Un couple de fonction $(h, k) \in \mathcal{C}(K)^2$ appartient à $\mathcal{BH}(K)$ si et seulement si $h - V_K(k) \in \mathcal{H}_1(K)$ et $k \in \mathcal{H}_2(K)$.

3.4 Remarques sur la convergence uniforme locale de suites de fonctions biharmoniques

Dans ce paragraphe $(\Omega, \mathcal{H})$ désigne un espace biharmonique au sens de Smyrnelis.

Définition 3.4.1. Une fonction u continue sur un ouvert U de Ω est dite biharmonique sur U si il existe une fonction v continue sur U telle que $(u, v) \in \mathcal{H}(U)$.

Il est bien connu que dans un espace harmonique de Brelot, que si une suite de fonctions harmoniques sur un ouvert U converge localement uniformément sur U vers une fonction u, alors u est harmonique sur U. Toutefois si (u_n) est une suite de fonctions biharmoniques qui converge localement uniformément vers une fonction continue u sur un ouvert U dans l'espace biharmonique Ω, alors on sait pas si la fonction u est biharmonique sur U. Dans le cas biharmonique classique relatif à l'opérateur de Laplace la biharmonicité de la fonction u découle de la formule de la moyenne biharmonique [29]. Dans ce qui suit nous allons redémontrer ce résultat dans le cas des fonctions biharmoniques au sens de l'équation différentielle partielle $L_1L_2u = 0$, où L_1 et L_2 sont deux opérateurs différentiels elliptiques d'ordre deux sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$.

Les Propositions 4.4.1 et 4.4.2 sont bien connues des spécialistes de la théorie des EDP.

Proposition 3.4.1. Soit (u_n) une suite de fonctions biharmonique au sens de l'équation $L_1L_2u = 0$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$, et qui converge localement uniformément vers une fonction u. Alors u est biharmonique sur U.

Preuve. Soit ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^d$ tel que $\omega \subset \overline{\omega} \subset U$. Pour toute fonction continue sur un ensemble contenant $\overline{\omega}$, on dénote par $\mathcal{H}^1_\omega(f)$ la fonction harmonique sur ω qui est la solution du problème de Dirichlet sur ω de donnée f sur la frontière $\partial\omega$. On définit aussi le noyau potentiel sur ω relatif à l'opérateur L_1, par

$$V_\omega(f) = \int G_\omega(.,y)f(y)dy$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{B}^+(\omega)$, où G_ω est le L_1-noyau de Green sur ω, normalisé de telle sorte que pour toute $y \in \omega$ on a $G_\omega(.,y) = -\epsilon_y$ au sens des distributions. Ainsi on a $L_1(V_\omega(f)) = -f$, et pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_+(U)$, $V_\omega(f)$ est un L_1-potentiel fini au moins en un point de chaque composante de U. Pour tout n, on a

$$u_n = H^1_\omega(u_n) + V_\omega(v_n),$$

où $v_n = -L_1u_n$. Cela montre que la suite de fonctions $V_\omega(v_n) = u_n - H_\omega(u_n)$ est uniformément convergente sur $\overline{\omega}$. On désigne par L_i^* l'opérateur adjoint de L_i, $i = 1, 2$, on a pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$

$$< L_1L_2u, \phi >=< u, L_2^*L_1^*\phi >= \int uL_2^*L_1^*\phi =$$

$$\lim_n \int u_nL_2^*L_1^*\phi = \int uL_2^*L_1^* = \int L_1L_2u\phi = 0,$$

donc $L_1 L_2 u = 0$ au sens des distributions. Comme u est continue il en découle que u est biharmonique. $\square$

Proposition 3.4.2. Soit (u_n) une suite de fonctions biharmoniques localement uniformément bornées sur un ouvert U de Ω, alors il existe une sous suite de fonctions (u_n) qui converge localement uniformément sur U.

Preuve. Soit ω un domaine L_1-régulier de $\mathbb{R}^d$ tel que $\omega \subset \overline{\omega} \subset U$. Comme pour la proposition précédente on a

$$u_n = H^1_\omega(u_n) + V_\omega(v_n).$$

Par conséquent les suites $(H^1_\omega(u_n))$ et $(V_\omega(v_n))$ sont uniformément localement bornées. On peut alors trouver une sous suite (u_{n_k}) de (u_n) telle que la suite $(H^1_\omega(u_{n_k}))$ est convergente sur ω vers une fonction harmonique sur ω, et $(V_\omega(v_{n_k}))$ converge Lebesgue p.p. vers une fonction w L_1-surharmonique sur ω. Par le théorème de convergence dominée on a

$$< L_2 w, \phi >= \int L_2 w \phi = \int w L_2 \phi =$$
$$\lim_{k\to+\infty} \int V(v_{n_k}) L_2 \phi = \lim_{k\to+\infty} \int L_2 V_\omega(v_{n_k}) \phi = 0.$$

Soit K un compact de U et (u_n) une suite de fonctions biharmoniques sur des voisinages de K, qui converge uniformément vers une fonction u sur K, alors u n'est pas nécessairement biharmonique sur K. L'exemple suivant illustre ce constat :

Soit $K = \overline{B(1,1)}$ dans $\mathbb{R}^3$ et pour chaque n posons $y_n = (\frac{1}{n}, 0, 0)$ et $u_n = || \, . - y_n \, ||$. Alors les fonctions u_n sont biharmoniques (au sens de l'opérateur de Laplace Δ) sur des voisinages de K et la suite $(u_{n|K})$ converge uniformément sur K vers la fonction $|| \, . \, ||$. Toutefois cette fonction n'est pas biharmonique sur K.

Chapitre 4

Sur la théorie du potentiel de certaines EDP couplées

(ANNALI DELL'UNIVERSITA' DI FERRARA (2017))

4.1 Introduction

Soient D un domaine de $\mathbb{R}^d(d \geq 1)$, L_1 et L_2 deux opérateurs du second ordre elliptiques ou paraboliques de coefficients $\mathcal{C}^\infty$ et μ_1 et μ_2 deux mesures adéquates sur D. On suppose que D est domaine de Green pour L_1 et L_2. La théorie du potentiel relative au système d' EDP $(S^{'})$ de type

$$\begin{cases} L_1 u = -\mu_1 v \\ L_2 v = -\mu_2 u \end{cases}$$

a été étudiée par plusieurs auteurs.

Si $L_1 = L_2 = \Delta$, l'opérateur de Laplace, $\mu_2 = 0$ et $\mu_1 = \lambda$, la mesure de Lebesgue, les solutions correspondantes au système $(S^{'})$ sont les couples (u, v) où u est une fonction biharmonique, c'est-à-dire solution de l'équation biharmonique $\Delta^2 = 0$, et $v = -\Delta u$. Plus généralement, si L_1 et L_2 sont deux opérateurs elliptiques linéaires de second ordre sur D, telles que $\mu_2 = 0$ et $\mu_1 = \lambda$, alors le système $S^{'}$ est équivalent à l'équation biharmonique $L_1 L_2 u = 0$. Les équations équivalentes avec conditions au limite ont été largement étudiées par plusieurs auteurs [44][45][46][47][65][66].

Dans les années 1970 Smyrnelis [59, 60] a développé une théorie axiomatique pour les solutions de ce type de systèmes lorsque $\mu_1 = 0$ ou $\mu_2 = 0$, dite théorie axiomatique des espaces biharmoniques. L'aspect probabiliste a été étudié par Bouleau [9] [11] quelques années plus tard.

Dans le cas où $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$ et L_1 et L_2 sont elliptiques, une théorie du potentiel probabiliste relative au système $(S^{'})$ a été étudiée par Chen et Zhao [21]. La théorie axiomatique de Smyrnelis ne s'applique pas dans ce cas. Toutefois la théorie des espaces de balayage développée par Bleidtner et Hansen [3], peut être considérée comme une théorie axiomatique qui s'applique dans ce contexte. Plusieurs problèmes de la théorie du Potentiel dans ce contexte restent à résoudre.

Ce travail a été initié dans [27, 28] par l'étude de la frontière de Martin dans le cas biharmonique et la représentation intégrale des fonctions biharmoniques dans un cadre axiomatique générale applicable au système de type $(S^{'})$ tel que $\mu_1 = 0$ ou $\mu_2 = 0$.

Notre principal objectif est d'étendre quelques méthodes de la théorie du Potentiel au systèmes de type $(S^{'})$. En particulier on va définir et étudier les notions de couples surharmoniques et de potentiels associés à $(S^{'})$ sur le domaine D. Nous obtenons aussi la représentation intégrale des potentiels et des couples harmoniques positifs. Les résultats de ce chapitre peuvent être étendus aux systèmes de type $(S^{'})$ associés à une classe d'opérateurs linéaires elliptiques de second ordre menant aux espaces harmoniques et qui fussent étudiés par R-M. Hervé dans [51]. Par souci de simplification et afin de pouvoir utiliser la théorie de distribution, nous n'avons considéré que les opérateurs linéaires elliptiques de second ordre à coefficients de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.

Notations : Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. On dénote par $\overline{A}$ la fermeture de A dans la compactification d'Alexandroff $\overline{\mathbb{R}}^d$ de $\mathbb{R}^d$, et par ∂A la frontière de A dans $\overline{\mathbb{R}}^d$. Par fonction sur A on désigne une fonction à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, l'ensemble des fonctions positives de Borel sur U est noté $\mathcal{B}_+(U)$. Si f est une fonction sur U on note $\widehat{f}$ la régularisée s.c.i. de f. Rappelons que $\widehat{f}$ est définie par $\widehat{f}(x) = \liminf_{y \to x} f(y)$ pour tout $x \in U$ et que $\widehat{f}$ est la plus grande fonction s.c.i. $\leq f$ sur U.

L'ordre naturel sur l'ensemble des couples de fonctions sur A est défini par :

$$(f, g) \geq (h, k) \Leftrightarrow f(x) \geq h(x) \; et \; g(x) \geq k(x) \forall x \in A;$$

nous écrivons simplement $(f, g) \geq 0$ pour $(f, g) \geq (0, 0)$. □

4.2 La théorie du potentiel associée à un opérateur elliptique de second ordre

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques définitions et résultats sur la théorie du potentiel relative à un opérateur de second ordre sur un domaine de $\mathbb{R}^d$.

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et

$$L = \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

un opérateur différentiel linéaire elliptique de second ordre à coefficients localement lipschitziens c'est à dire pour tout $x \in D$ la forme quadratique $\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_{i\xi_j}$ est définie positive sur $\mathbb{R}^d$. Ce qui suit est un rappel de quelques résultats de la théorie du potentiel relative à l'opérateur L. Pour plus de détails sur cette théorie le lecteur peut se référer au Chapitre VII [51] et aux références qui y sont citées.

Définition 4.2.1. Une fonction u sur un ouvert ω de D est dite $L-$harmonique (ou simplement harmonique si il n'y a pas de risque de confusion) sur ω si u est de classe $\mathcal{C}^2$ et $Lu = 0$ sur ω.

Lorsque les coefficients $a_{i,j}$ et b_i de L sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors une fonction réelle u continue sur D est $L-$harmonique si et seulement u est solution de $Lu = 0$ au sens des distributions, c'est-à-dire

$$\sum_{i,j} \int_D a_{i,j} u(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) d\lambda(x) - \sum_i \int_D b_i(x) u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) d\lambda(x)$$

$$+ \int_D c(x) u(x) \phi(x) d\lambda(x) = 0$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(D)$, où $\mathcal{D}(D)$ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de support compact, c'est-à-dire, qui s'annulent en dehors d'un compact de D, et λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Pour tout ouvert ω de D, on désigne par $\mathcal{H}_L(\omega)$ l'ensemble des fonctions $L-$harmoniques sur D. Il est clair que l'ensemble $\mathcal{H}_L(\omega)$ est un $\mathbb{R}-$vectoriel espace. De plus l'application $\mathcal{H} : \quad \mathcal{O} \ni \omega \mapsto \mathcal{H}_L$ est un faisceau sur D d'espaces vectoriels de fonctions continues, où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de D.

Définition 4.2.2. Un ouvert $\omega \subset D$ relativement compact est dit $L-$régulier ou simplement régulier si pour toute fonction réelle f continue sur $\partial\omega$, il existe une fonction unique $h = H_\omega(f) \in \mathcal{H}_L(\omega)$ telle que $\lim_{x\in\omega, x\to\zeta} h(x) = f(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \partial\omega$.

D'après [51] page 561, toute boule ouverte $B \subset \overline{B} \subset D$ est $L-$régulière.

Soit ω un ouvert relativement compact de D. Par le principe du minimum, si $f \in \mathcal{C}_+(\partial\omega)$, alors $H_\omega(f) \geq 0$. Il en découle de la définition que pour tout $x \in \omega$, l'application $f \in \mathcal{C}(\partial\omega) \mapsto \mathbb{R}$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(\partial\omega)$, et donc c'est une mesure de Radon positive sur $\partial\omega$ qu'on note μ_x^ω. Nous avons alors

$$H_\omega(f) = \int f d\mu_x^\omega$$

pour tout $x \in \omega$ et $f \in \mathcal{C}(\partial\omega)$.

Les résultats suivants sont des conséquences du Théorème 34.1 [51] et pp.15 [14].

Théorème 4.2.1. (Principe de Harnack). Soit K un ensemble compact de D et $x_0 \in K$. Alors il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de K, telle que pour toute fonction $L-$harmonique positive sur D, on a $\sup_{x\in K} h \leq Ch(x_0)$.

Corollaire 4.2.1. Pour tout $x_0 \in D$, l'ensemble $H_L(x_0) = \{h \in \mathcal{H}_L^+(D) : h(x_0) = 1\}$ est equicontinue en x_0.

Théorème 4.2.2. Soit ω un sous domaine de D, et (h_n) une suite croissante de fonctions $L-$harmoniques sur ω. Alors la fonction $h = \sup_n h_n$ est $L-$harmonique dans ω si et seulement si h est finie en un point de ω.

Définition 4.2.3. Soit ω un ouvert de D. Une fonction $u : \omega \to \overline{\mathbb{R}}$ est $L-$hyperharmonique sur ω si :

1- u est s.c.i. $> -\infty$ sur ω.

2- Pour toute boule ouverte $B \subset \overline{B} \subset \omega$, $\int_{\partial\omega}^* \leq u(x)$, $\forall x \in \omega$.

La fonction u est dite $L-$surharmonique sur ω si u est $L-$hyperharmonique et non identiquement égale à $+\infty$ en aucune composante connexe de ω. La fonction u est $L-$hyporharmonique (resp. $L-$sousharmonique) si $-u$ est $L-$hyperharmonique (resp. $L-$surharmonique).

Il est clair d'après la définition qu'une fonction u, $L-$surharmonique sur un ouvert $\omega \subset D$, est finie sur un sous ensemble dense de ω. L'ensemble des fonctions

$L-$hyperharmoniques (resp. $L-$surharmoniques) sur D est un cône convexe. On le note $\mathcal{H}_L^*(D)$ (resp. $\mathcal{S}_L(D)$) ou simplement $\mathcal{H}^*(D)$ (resp. $\mathcal{S}(D)$) s'il n'y a pas de risque de confusion.

Soit u une fonction $L-$surharmonique sur D, il en découle du théorème précédent que la fonction $x \mapsto \int u d\mu_x^\omega$ est $L-$harmonique dans ω pour tout sous ensemble $\omega \subset D$ régulier et relativement compact. On la note aussi $H_\omega(u)$. Si (u_n) est suite croissante de fonctions $L-$surharmonique dans un domaine $\omega \subset D$, alors $\sup_n u_n$ est $L-$harmonique ou identiquement égale à $+\infty$ dans ω.

Définition 4.2.4. Un ensemble A de D est dit localement $L-$polaire (resp. $L-$polaire), ou simplement localement polaire (resp. polaire), si pour tout $x \in A$ il existe un voisinage ouvert ω de x et une fonction $L-$surharmonique sur ω (resp. D) tels que $A \cap \omega \subset \{x \in \omega : u(x) = +\infty\}$ (resp. $A \subset \{x \in \omega : u(x) = +\infty\}$).

Propriétés :

1- Tout sous-ensemble A de D $L-$polaire est localement $L-$polaire.

2- Tout sous-ensemble d'un ensemble localement $L-$polaire (resp. $L-$polaire) est localement $L-$polaire (resp. $L-$polaire).

3- Tout sous-ensemble de D localement $L-$polaire, est d'intérieur vide.

4- Soit (A_n) une suite de sous-ensemble $L-$polaires de D, alors $\cup_n A_n$ est $L-$polaire.

Théorème 4.2.3 ([14]). On suppose qu'il existe une fonction $u > 0$, $L-$surharmonique sur D qui n'est pas $L-$harmonique. Alors tout ensemble localement polaire est polaire.

On dit qu'une propriété $P(x)$ relative à $x \in D$ est vraie quasi-partout (q.p) si elle est vraie en dehors d'un ensemble polaire. Pour plus de détails on se réfère à [14] [25] [51].

Théorème 4.2.4 ([51]). Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions localement uniformément bornées et $L-$hyperharmoniques sur un ensemble ω de D. Alors la fonction $\widehat{\inf}_{i\in I} u_i = \widehat{\inf}_{i\in I} u_i$ est $L-$hyperharmonique dans ω et $\widehat{\inf}_{i\in I} u_i = \inf_{i\in I} u_i$ q.p.

Théorème 4.2.5. Soit E un sous-ensemble $L-$polaire de D et u, une fonction $L-$surharmonique sur $D \setminus E$ telle que u est localement inférieurement bornée sur un voisinage d'un quelconque point de E. Alors il existe une unique fonction s, $L-$surharmonique sur D telle que $s = u$ sur $D \setminus E$,[Principe des singularités amovibles [25]].

La proposition suivante est un corollaire qui découle du théorème précédent :

Proposition 4.2.1. soient u et v deux fonctions $L-$hyperharmoniques sur D. Si $u = v$ q.p. alors $u = v$ sur D.

La proposition suivante découle de [25] :

Proposition 4.2.2. soit u une fonction $L-$surharmonique positive sur D. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1- Pour toute fonction v $L-$surharmonique sur D, si $v \leq u$, alors $v \leq 0$ sur D.

2- Pour toute fonction v $L-$surharmonique sur D, si $v + u \geq 0$, alors $v \geq 0$ sur D.

3- Pour toute fonction h, $L-$harmonique sur D, si $h \leq u$, alors $h \leq 0$ sur D.

Définition 4.2.5. Une fonction $L-$surharmonique sur D est un $L-$potentiel (ou simplement potentiel) sur D si elle vérifie une des assertions équivalentes précédentes.

Théorème 4.2.6 (Décomposition de Reisz [22]). Soit u est une fonction $L-$surharmonique positive sur D. Alors il existe un unique $L-$potentiel est une uniques fonction positive $L-$harmonique sur D tels que $u = p + h$.

Le résultat suivant est une combinaison des propriétés vérifiées par les solutions de l'opérateur L. Ces propriétés peuvent être consultées dans [30].

Théorème 4.2.7. On suppose qu'il existe un $L-$potentiel $p > 0$ sur D. Alors il existe une unique fonction $G : D \times D \to \overline{\mathbb{R}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1- G est s.c.i. sur $D \times D$ et continue sur $D \times D \setminus \delta$, où $\delta = \{(x, x);\ x \in D\}$ est la diagonale de $D \times D$.

2- Pour tout $y \in D$, la fonction $G(., y)$ est $L-$harmonique sur $D\{y\}$.

3- Pour tout p, $L-$potentiel sur D, il existe une unique mesure μ (de Radon) sur D telle que $p = G\mu := \int_D G(., y)d\mu(y)$ (cette mesure est donnée par $Lp = -\mu$ au sens des distributions).

La proposition suivante est une conséquence du Théorème 5.2.6 et 5.2.7.

Proposition 4.2.3. Soit u une fonction $L-$surharmonique sur D. Si $Lu = 0$ au sens des distributions, alors u est $L-$harmonique.

Définition 4.2.6. Un domaine D de $\mathbb{R}^d$ sur lequel existe un $L-$potentiel> 0 est dit un domaine $L-$Greenien (ou simplement un domaine de Green). La fonction G dans le Théorème 5.2.7 est dite un noyau $L-$Greenien dans D.

Si G et $G^{'}$ sont deux noyaux de Green, alors il existe une fonction continue $\phi > 0$ sur D telle que $G^{'}(.,y) = \phi(y)G(.,y)$ pour tout $y \in D$. Puisque les coefficients de L sont supposés être de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, il existe un unique noyau $L-$Greenien G tel que pour tout $y \in D$, nous avons $LG(.,y) = -\epsilon_y$ au sens des distribution, où ϵ_y est la mesure de Dirac en y, cette fonction est dite le noyau de Green de L.

Remarque 4.2.1.

1- Tout sous-domaine d'un domaine $L-$Greenien est $L-$Greenien.

2- Tout domaine borné est $L-$Greenien pour tout opérateur elliptique de second ordre à coefficients Lipschitziens.

Remarque 4.2.2. Le domaine D n'est pas toujours un domaine $L-$Greenien. Par exemple, soit $L = \Delta$, l'opérateur de Laplace, et $D = \mathbb{R}^2$. Alors D n'est pas un domaine $L-$Greenien.

Rappelons qu'un noyau sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est une fonction $V : E \times \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que

1- Pour tout $A \subset \mathcal{E}$, la fonction $E \ni x \longmapsto V(x, A)$ est mesurable.

2- Pour $x \in E$, la fonction $\mathcal{E} \ni A \longmapsto V(x, A)$ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$.

Le potentiel Vf ou $V(f)$ d'une fonction f, $\mathcal{E}-$mesurable positive sur E est défini par

$$V(f)(x) = \int_E f(y)V(x, dy), \ \forall x \in E.$$

On note par $\mathcal{E}_+$ le cône des fonctions $\mathcal{E}-$mesurables positives sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On peut donner une autre définition d'un noyau sur $(E, \mathcal{E})$, équivalente à la définition précédente, comme étant une fonction $V : \mathcal{E}^+ \to \mathcal{E}^+$ telle que

1- $V(0) = 0$.

2- Pour toute suite de fonctions f_n dans $\mathcal{E}^+$,

$$V(\sum_n f_n) = \sum_n V(f_n).$$

Si $||V1||_\infty < 1$, alors $I - V$ est un noyau sur $(E, \mathcal{E})$, et sa restriction au cône des fonctions positives et bornées $b\mathcal{E}_+$, peut être étendue à un opérateur linéaire borné inversible sur l'espace linéaire $b\mathcal{E} = b\mathcal{E}_+ - b\mathcal{E}_+$. L'opérateur $(I - V)^{-1}$ peut être étendu de manière unique sur $(E, \mathcal{E})$, qu'on note aussi $(I - V)^{-1}$. Nous avons alors

$$(I - V)^{-1} = \sum_k V^k.$$

□

Supposons maintenant que D est un domaine $L-$Greenien et soit G le noyau de Green de L sur D. Pour toute mesure positive μ sur D, on dénote par G^μ le noyau défini sur D par

$$G^\mu f(x) = \int_D G(x, y) f(y) d\mu(y),\ x \in D,$$

pour toute fonction f Borel-mesurable positive sur D, et par G^μ la fonction $G^\mu 1$. Alors nous avons $LG^\mu f = -f\mu$ au sens des distributions. La fonction G^μ est appelée le potentiel de μ. Une mesure de Radon positive est dite de Kato pour L si son potentiel G^μ est fini et continu sur D.

D'apres [14], on a :

Théorème 4.2.8. Supposons que D est un domaine $L-$Greenien. Il existe à un homéomorphisme prés un espace topologique compact $\widehat{D}$ contenant D et une fonction $K : D \times \triangle \longrightarrow \mathbb{R}$, où $\triangle = \widehat{D} \setminus D$ tels que

1- La topologie induite sur D est identique à la topologie Euclidienne.

2- D est dense dans $\widehat{D}$.

3- Pour tout $Y \in \triangle$, la fonction $K(., Y)$ est $L-$harmonique > 0 sur D et la fonction $K(x, .)$, $x \in D$, sont continues sur $\triangle$ et séparent les points de $\triangle$.

4- Pour toute fonction h, $L-$harmonique ≥ 0, il existe une unique mesure μ sur $\triangle$ telle que $h = K\mu := \int_\triangle K(., Y) d\mu(Y)$.

5- Pour toute fonction h, $L-$harmonique ≥ 0, il existe une unique mesure μ sur $\triangle$, portée par $\triangle_1$ telle que $h = K\mu := \int_\triangle K(., Y) d\mu(Y)$, où $\triangle_1$ est le $G_\delta-$ensemble des éléments minimaux de $\triangle$.

L'ensemble $\triangle$ est dit la frontière de Martin de D (par respect à L) et $\triangle_1$ la frontière de Martin minimale de D. Rappelons ici qu'un point Y est dit minimal si la fonction $L-$harmonique $K(., Y)$ est sur un générateur extrémal du cône $\mathcal{H}_L^+(D)$ des fonctions harmoniques positives sur D. Pour plus de résultats sur la Théorie du Potentiel classique et axiomatique nous nous référons à [2] [50, 51]..

4.3 Couples harmoniques et surharmoniques

Dans tout le reste de ce chapitre, D est un domaine de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et L_1, L_2 deux opérateurs différentiels de second ordre linéaires et elliptiques sur D à coefficients $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que D est un domaine de Green pour L_1 et L_2, et que le noyau L_1-Greenien G_1 et le noyau L_2-Greenien G_2 sont normalisés de telle sorte que pour tout $y \in D$ on a $L_1G_1(.,y) = L_2G_2(.,y) = -\epsilon_y$ au sens des distributions. Nous fixons aussi deux mesures de Kato μ_1 et μ_2, relatives respectivement à L_1 et L_2, telles que

$$|| G_1^{\mu_1} ||_\infty || G_2^{\mu_2} ||_\infty < 1, \qquad (3.1)$$

et on considère (S'), le système de EDP suivant :

$$\begin{cases} L_1 u = -\mu_1 v \\ L_2 v = -\mu_2 u. \end{cases}$$

Une solution du système (S') est un couple de fonctions (u, v) continues dans D tel que $L_1 u = -\mu_1 v$ et $L_2 v = -\mu_2 u$ au sens des distributions. La condition (3.1) assure l'existence de couples de solution du système (S') dans le cas où il existe deux fonctions continues et bornées sur D telles que $L_1 h = 0$ et $L_2 k = 0$.

Si $L_1 = L_2 = \Delta$ (l'opérateur de Laplace), et la mesure $\mu_2 = 0$ et $\mu_1 = \lambda$ la mesure de Lebesgue, les solutions du système (S') sont les couples (u, v) où u est une fonction biharmonique, c'est-à-dire solution de l'équation biharmonique $\Delta^2 u = 0$ et $v = -\Delta u$.

Tout au long de ce qui suit V_1 et V_2 dénotent deux noyaux de Borel sur D définis par

$$V_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} (G_1^{\mu_1} G_2^{\mu_2})^k$$

$$V_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (G_2^{\mu_2} G_1^{\mu_1})^k.$$

D'après les hypothèses sur les mesures μ_1 et μ_2 on peut voir que pour toute fonction bornée $f \in \mathcal{B}_+(D)$, les fonctions V_1 et V_2 sont finies et continues sur Ω.

Dans cette section nous donnons quelques définitions, notations et propriétés des solutions (couples harmoniques) et sur-solutions (couples surharmoniques) du système $(S^{'})$ sur D.

Définition 4.3.1. Un couple de fonctions (u, v) continues sur D est dit harmonique si u et v sont solutions du système $(S^{'})$ au sens des distributions.

Soit B une boule telle que $B \subset \overline{B} \subset D$ et f une fonction définie sur un ensemble contenant ∂B. Si $f_{|\partial B}$ la restriction de f sur ∂B est finie et continue, on dénote par $H_B^i(f)$, $i = 1, 2$, la solution du problème de Dirichlet sur B relatif à l'opérateur L_i et de donnée f sur la frontière et si $f_{|\partial B}$ est s.c.i. ≥ 0, on définit $H_B^i(f)$ $i = 1, 2$, par $H_B^i(f) = \sup\{H_B^i(f\phi) : \phi \in \mathcal{C}(\partial B)\}$. On note K_B^{i,μ_i} le noyau de Borel défini sur B par :

$$K_B^{i,\mu_i}(f) = \int_B G_B^i(., y) f(y) d\mu_i(y), \ \forall f \in \mathcal{B}_+(B),$$

où G_B^i est le noyau de Green sur B relatif à L_i. Enfin nous dénotons par V_B^i, $i = 1, 2$, les noyaux de Borel définis sur B par

$$V_B^1 = \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}(K_B^{1,\mu_1}K_B^{2,\mu_2})^k \text{ et } V_B^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}(K_B^{2,\mu_2}K_B^{1,\mu_1})^k.$$

Remarque 4.3.1. Si la fonction $f \in \mathcal{B}_+(B)$ est bornée, alors les fonctions $V_B^{i,\mu_i}f$, $i = 1, 2$, sont continues dans B.

Théorème 4.3.1. Un couple (u, v) de fonctions continues sur D est harmonique si et seulement si pour toute boule ouverte $B \subset \overline{B} \subset D$ nous avons $H_B^1(u) + K_B^{1,\mu_1}(v) = u$ et $H_B^2(v) + K_B^{2,\mu_2}(u) = v$ dans B.

Preuve. On suppose tout d'abord que le couple (u, v) est harmonique sur D. On a alors $L_1 u = -\mu_1 v$ et $L_2 v = -\mu_2 u$ dans D au sens des distributions. Soient B et $B^{'}$ deux boules ouvertes de D telles que $B \subset \overline{B} \subset B^{'} \subset \overline{B}^{'} \subset D$. Puisque u et v sont bornées sur $B^{'}$ et μ_1 et μ_2 sont des mesures de Kato, alors les fonctions $K_{B^{'}}^{1,\mu_1}(v)$ et $K_{B^{'}}^{2,\mu_2}(u)$ sont continues sur $B^{'}$ et $L_1(u - K_{B^{'}}^{1,\mu_1}(v)) = 0$ et $L_2(v - K_{B^{'}}^{2,\mu_2}(u)) = 0$ au sens des distributions. D'où les fonctions $u - K_{B^{'}}^{1,\mu_1}(v)$ et $v - K_{B^{'}}^{2,\mu_2}(u)$ sont respectivement L_1-harmonique et L_2-harmonique sur $B^{'}$. Donc $H_B^1(u - K_{B^{'}}^{1,\mu_1}(v)) = u - K_{B^{'}}^{1,\mu_1}(v)$ et $H_B^2(v - K_{B^{'}}^{2,\mu_2}(u)) = v - K_{B^{'}}^{2,\mu_2}(u)$ dans B, ce qui donne $H_B^1(u) + K_B^{1,\mu_1}(v) = u$ et $H_B^2(v) + K_B^{2,\mu_2}(u) = v$ dans B.

Inversement, supposons que $H_B^1(u) + K_B^{1,\mu_1}(v) = u$ et $H_B^2(v) + K_B^{2,\mu_2}(u) = v$ dans $B \subset \overline{B} \subset D$. Comme $H_B^1(u)$ et $H_B^2(v)$ sont respectivement L_1-harmonique et L_2-harmonique, alors $L_1 u = L_1 K_B^{1,\mu_1}(v) = -\mu_1 v$ et $L_2 v = L_2 K_B^{2,\mu_2}(u) = -\mu_2 u$ sur B au sens des distributions. Puisque le choix de la boule B est arbitraire on conclu que $L_1 u = -\mu_1 v$ et $L_2 v = -\mu_2 u$ sur D au sens des distributions, ce qui veut dire que le couple (u, v) est harmonique dans D. □

Définition 4.3.2. Un couple (u, v) de fonctions localement intégrable sur D est dit surharmonique si u et v sont s.c.i. et $> -\infty$ sur D et satisfassent les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} L_1 u \leq -\mu_1 v \\ L_2 v \leq -\mu_2 u \end{cases}$$

au sens des distributions.

IL découle de cette définition qu'un couple (u, v) de fonctions intégrables sur D est harmonique si et seulement si les couples (u, v) et $(-u, -v)$ sont surharmoniques.

Proposition 4.3.1. Soit (u, v) un couple surharmonique positif sur D. Alors u est L_1-surharmonique et v est L_2-surharmonique sur D.

Preuve. La proposition est une conséquence directe de la définition d'un couple surharmonique. □

Le Théorème suivant peut être démontré de la même manière que le Théorème 5.3.1.

Théorème 4.3.2. Un couple (u, v) de fonctions s.c.i. localement intégrable sur D est surharmonique si et seulement si pour toute boule ouverte $B \subset \overline{B} \subset D$ nous avons $H_B^1(u) + K_B^{1,\mu_1}(v) \leq u$ et $H_B^2(v) + K_B^{2,\mu_2}(u) \leq v$ dans B.

On dénote par $\mathcal{S}(D)$ l'ensemble des couples surharmoniques sur D. Soient $(u_i, v_j), (u,$
$v) \in \mathcal{S}(D)$, $j = 1, 2$, et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on définit alors

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2),$$

et

$$\alpha(u,v) = (\alpha u, \alpha v) \text{ si } \alpha > 0 \text{ et } 0(u,v) = (0,0).$$

Corollaire 4.3.1. L'ensemble $\mathcal{S}(D)$ est un cône convexe.

On dénote par $\mathcal{S}_+(D)$ l'ensemble des couples surharmoniques positifs sur D.

Corollaire 4.3.2. L'ensemble $\mathcal{S}_+(D)$ est un cône convexe.

Corollaire 4.3.3. Soient (u_1, v_1) et (u_2, v_2) deux couples surharmoniques sur D. Alors le couple $(u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2)$ est surharmonique sur D.

Corollaire 4.3.4. Soit (u_n, v_n) une suite croissante de couples surharmoniques positifs sur un ouvert $\omega \subset D$ et supposons que $\sup_n u_n(x_0) + \sup_n v_n(x_0) < +\infty$ pour un certain point $x_0 \in D$. Alors le couple $(u,v) = \sup_n (u_n, v_n)$ est surharmonique sur D.

Preuve. Compte tenu de la Proposition 5.3.1, les fonctions u_n, resp. v_n, $n \in \mathbb{N}$, sont L_1-surharmoniques, resp. L_2-surharmoniques, et donc la fonction u, resp. v est L_1-surharmonique, resp. L_2-surharmonique sur D comme elle est finie en x_0. Ainsi u et v sont s.c.i. et localement intégrable sur D. Soit B une boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ telle que $B \subset \overline{B} \subset D$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $H^1_B(u_n) + K^{1,\mu_1}_B(v_n) \leq u$ et $H^2_B(v_n) + K^{2,\mu_2}_B(u_n) \leq v$ sur B. En faisant tendre $n \to +\infty$, nous avons alors $H^1_B(u) + K^{1,\mu_1}_B(v) \leq u$ et $H^2_B(v) + K^{2,\mu_2}_B(u) \leq v$ sur B. On en déduit du Théorème 5.3.2 que le couple (u,v) est surharmonique dur D. $\square$

Théorème 4.3.3. Soit (u_1, u_2) un couple de fonctions boréliennes sur D telles que,

$$G^{\mu_j}_j \mid u_k \mid \not\equiv +\infty,\ j \neq k,\ j,k = 1,2.$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1- Le couple (u_1, u_2) est surharmonique.

2- La fonction $u_1 - G^{\mu_1}_1(u_1)$, resp. $u_2 - G^{\mu_2}_2(u_2)$, définie sur un sous-ensemble de D, où la différence est bien-définie, admet un prolongement L_1-surharmonique, resp. L_2-surharmonique.

Preuve. Remarquons tout d'abord que les hypothèses du Théorème impliquent que pour tout $j,k = 1,2,\ j \neq k$, la fonction $G^{\mu_j}_j \mid u_k \mid$ est L_j-surharmonique sur D, et donc les fonctions $G^{\mu_j}_j u^+_k$ et $G^{\mu_j}_j u^-_k$ le sont aussi. Il en découle que ces fonctions sont finies L_j-q.p.

1. $\Rightarrow$ 2. On suppose que le couple (u_1, u_2) est surharmonique sur D et satisfait à la condition du Théorème. Alors la fonction $G_1^{\mu_1}(u_2) = G_1^{\mu_1}(u_2^+) - G_1^{\mu_1}(u_2^-)$ est une différence deux fonctions L_1-surharmoniques sur D, et donc localement intégrable et nous avons $L_1(u_1 - G_1^{\mu_1}u_2) = L_1u_1 + \mu_1u_2 \leq 0$ sur D au sens des distributions. Donc $u_1 - G_1^{\mu_1}u_2$ est égale Lebesgue-p.p. à une fonction L_1-surharmonique t_1 sur D. Il en découle que $u_1 + G_1^{\mu_1}(u_2^-) = t_1 + G_1^{\mu_1}(u_2^+)$ Lebesgue-p.p. sur D. La deuxième fonction est clairement L_1-surharmonique sur D. D'autre part $u_1 + G_1^{\mu_1}(u_2^-)$ est s.c.i. et nous avons $L_1(u_1 + G_1^{\mu_1}(u_2^-)) = L_1u_1 - \mu_1u_2^- = L_1u_1 + G\mu_1u_2 - \mu_1u_2^+ \leq 0$ sur D, ce qui prouve que la fonction $u_1 + G_1^{\mu_1}(u_2^-)$ est L_1-surharmonique sur D. D'où nous avons $u_1 + G_1^{\mu_1}(u_2^-) = t_1 + G_1^{\mu_1}(u_2^+)$ partout, puisque deux fonctions égalent Lebesgue-p.p sont égales partout. Donc la fonction $u_1 - G_1(u_2)$ définie quasi-partout sur D se prolonge sur D par la fonction L_1-surharmonique t_1. Avec une argumentation similaire on montre le même résultat pour $u_2 - G_2^{\mu_2}(u_1)$.
2. $\Rightarrow$ 1. Supposons que $u_1 - G_1(u_2)$ et $u_2 - G_2^{\mu_2}(u_1)$ peuvent être prolongées respectivement en une fonction L_1-surharmonique et L_2-surharmonique s et t sur D, alors $u_1 = G_1(u_2) + s$ et $u_2 = G_2^{\mu_2}(u_1) + t$ sur D. Donc $L_1u_1 = -\mu_1u_2 + L_1s \leq -\mu_1u_2$ et $L_2u_2 = -\mu_2u_1 + L_2t \leq -\mu_2u_1$ au sens des distributions sur D, ce qui signifie que le couple (u_1, u_2) est surharmonique sur D. □

Corollaire 4.3.5. Soit (u_1, u_2) un couple de fonctions boréliennes sur D telles que

$$G_j^{\mu_j} \mid u_k \mid \not\equiv +\infty,\ j \neq k,\ j,k = 1,2.$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1- Le couple (u_1, u_2) est harmonique.

2- Les fonctions $G_1^{\mu_1} \mid u_1 \mid$, $G_2^{\mu_2} \mid u_2 \mid$, sont finies et les fonctions $u_1 - G_1^{\mu_1}u_1$, $u_2 - G_2^{\mu_2}u_2$, sont L_1-harmonique et L_2-harmonique respectivement.

Théorème 4.3.4. Soient t_i, $i = 1,2$ deux fonctions L_i-harmonique sur D telles que $G_j^{\mu_j}t_i$ sont finies et $G_k^{\mu_k}G_j^{\mu_i}t_i$ sont bornées sur D, $j \neq k$, $j,k \in \{1,2\}$. Alors les couples de fonctions $(V_1t_1, V_2G_2^{\mu_2}t_1)$ et $(V_1G_1^{\mu_1}t_2, V_2t_2)$ sont harmoniques sur D.

Preuve. Il est clair que les fonctions V_1t_1 et $V_2G_2^{\mu_2}t_1$ sont continues sur D. D'autre part, nous avons $V_1t_1 = \sum_{n=0}^{+\infty}(G_1^{\mu_1}G_2^{\mu_2})^n(t_1)$, d'où $L_1V_1t_1 = -\mu_1G_2^{\mu_2}V_1t_1$ au sens des distributions sur D. Nous avons aussi $L_2V_2G_2^{\mu_2}t_1 = -\mu_2V_1t_1$ sur D. Donc le couple

$(V_1t_1, V_2G_2^{\mu_2}t_1)$ est harmonique D. Le même raisonnement permet de conclure que $(V_1G_1^{\mu_1}t_2, V_2t_2)$ est harmonique sur D. □

4.4 Les couples de fonctions surharmoniques positifs

Proposition 4.4.1. Soient h_i, $i = 1, 2$, deux fonctions L_i-harmoniques positives sur D. Si la fonction $V_1h_1 + V_1G_1^{\mu_1}h_2$, resp. $V_2G_2^{\mu_2}h_1 + V_2h_2$ est finie et continue sur D, alors le couple $(V_1h_1, V_2G_2^{\mu_2}h_1)$, resp. $(V_1G_1^{\mu_1}h_2, V_2h_2)$ est harmonique sur D.

Preuve. les fonctions $u = V_1h_1 + V_1G_1^{\mu_1}h_2$ et $v = V_2G_2^{\mu_2}h_1 + V_2h_2$ sont clairement surharmoniques sur D, et nous avons $L_1u = -v$ et $L_2v = -u$ au sens des distributions. Alors par définition le couple (u, v) est harmonique. Comme h_1 et h_2 sont arbitraires alors en prenant $h_2 = 0$ (resp. $h_1 = 0$) on a le résultat. □

Proposition 4.4.2. Soient h_i, $i = 1, 2$, deux fonctions L_i-harmoniques positives sur D. Si la fonction h_1, resp. h_2 est bornée sur D, alors le couple $(V_1h_1, V_2G_2^{\mu_2}h_1)$, resp. $(V_1G_1^{\mu_1}h_2, V_2h_2)$ est harmonique sur D.

Preuve. Supposons par exemple que h_1 est bornée sur D. Alors d'après les hypothèses sur les mesures μ_1 et μ_2, les fonctions V_1h_1 et $V_2G_2^{\mu_2}h_1$ sont finies et continues sur D. Donc le couple $(V_1h_1, V_2G_2^{\mu_2}h_1)$ est harmonique d'après la proposition précédente. Le même raisonnement s'applique au couple $(V_1G_1^{\mu_1}h_2, V_2h_2)$. □

Théorème 4.4.1. Soit (u, v) un couple surharmonique positif sur D. Si les fonctions $G_1^{\mu_1}v$ et $G_2^{\mu_2}h_1$ sont finies et continues sur D, et si $L_1u = -\mu_1v$ et $L_2v = -\mu_2u$ au sens des distributions, alors le couple (u, v) est harmonique sur D.

Preuve. Il est clair que les fonctions u et v sont positives et respectivement L_1 et L_2-surharmonique. Soient h_1 et h_2 les parties harmoniques (de la décomposition de Riesz) respectivement de u et v. Alors par hypothèse nous avons $u = h_1 + G_1^{\mu_1}v$ et $u = h_2 + G_2^{\mu_2}u$ et donc u et v sont continues sur D, et par conséquent le couple (u, v) est harmonique sur D. □

Théorème 4.4.2. Un couple (u, v) surharmonique positif sur D est harmonique sur D si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1- $L_1u = -\mu_1v$ et $L_2v = -\mu_2u$ au sens des distributions.

2- $G_1^{\mu_1}v$ et $G_2^{\mu_2}u$ sont finies et continues sur D.

Preuve. Supposons dans un premier temps que le couple (u, v) est harmonique sur D. Alors nous avons $L_1 u = -\mu_1 v$, $L_2 v = -\mu_2 u$ (au sens des distributions) et les fonctions u et v sont respectivement L_1-surharmonique et L_2-surharmonique sur D. Soient h_1 et h_2 les parties harmoniques (de la décomposition de Riesz) respectivement de u et v. Alors nous avons $u = h_1 + G_1^{\mu_1} v$ et $u = h_2 + G_2^{\mu_2} u$. Puisque les fonctions u,v, h_1 et h_2 sont continues alors les fonctions $G_1^{\mu_1} v$ et $G_2^{\mu_2} u$ sont continues sur D.

Inversement si la condition 2. est vérifiée alors u et v sont continues sur D, comme ces fonctions sont respectivement L_1-surharmonique et L_2-surharmonique sur D et comme les deux fonctions $G_1^{\mu_1} v$ et $G_2^{\mu_2} u$ sont continues sur D et constituent respectivement les parties potentiels dans la décomposition de Riesz de u et v respectivement. Alors le couple (u, v) est continu sur D et donc harmonique sur D si la condition 1. est vérifiée. □

Proposition 4.4.3. Soit (u_n, v_n) une suite croissante de couples harmoniques positifs sur un ouvert $\omega \subset D$ et supposons que $\sup_n u_n(x_0) + \sup_n v_n(x_0)$ est fini en un certain point $x_0 \in D$. Alors le couple $(u, v) = \sup_n(u_n, v_n)$ est harmonique sur D si et seulement si $G_1^{\mu_1} v$ et $G_2^{\mu_2} u$ sont finies et continues sur D.

Preuve. Par hypothèses et le Corollaire 5.3.4, le couple (u, v) est surharmonique sur D. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère h_n, resp. k_n la partie L_1-harmonique, resp. L_2-harmonique de la décomposition de Riesz de u_n, resp. v_n.

On a alors sur D, $u_n = h_n + G_1^{\mu_1} v_n$ et $v_n = k_n + G_2^{\mu_2} u_n$. Les suites (h_n) et (k_n) sont croissantes (car h_n, resp. k_n est la plus grande L_1-harmonique, resp. L_2-harmonique de u_n, resp. v_n) et comme la fonction $h = \sup h_n$, resp. $k = \sup k_n$ est L_1-harmonique, resp. L_2-harmonique sur D. Alors en faisant tendre $n \to +\infty$, nous avons $u = h + G_1^{\mu_1} v$ et $v = k + G_2^{\mu_2} u$. On en déduit alors que $L_1 u = -\mu_1 v$ et que $L_1 v = -\mu_2 u$ au sens des distributions. Il en découle du Théorème 5.4.2 que le couple (u, v) est harmonique sur D si et seulement si $G_1^{\mu_1} v$ et $G_2^{\mu_2} u$ sont finies et continues sur D. □

Proposition 4.4.4. Soient t_i, $i = 1, 2$, deux fonctions L_i-surharmoniques positives sur D. Si la fonction $V_1 t_1 + V_1 G_1^{\mu_1} t_2 + V_2 G_2^{\mu_2} t_1 + V_2 t_2$ est finie en un point de D, alors les couples $(V_1 t_1, V_2 G_2^{\mu_2} t_1)$ et $(V_1 G_1^{\mu_1} t_2, V_2 t_2)$ sont surharmoniques sur D.

Preuve. Par définition du noyau V si la fonction Vf est finie en un point, alors L_1-surharmonique, donc localement intégrable et s.c.i. sur D. D'autre part, on a $L_1 V_1 =$

$-\mu_1 t_1 - \mu_1 V_2 G_2^{\mu_2} t_1 \leq \mu_1 V_2 G_2^{\mu_2} t_1$ et $L_2 V_2 G_2^{\mu_2} t_1 = -\mu_2 t_1 - \mu_2 V_1 t_1 \leq V_1 t_1$ d'après les définitions des noyaux V_1 et V_2. D'où le couple $(V_1 t_1, V_2 G_2^{\mu_2} t_1)$ est surharmonique sur D. De la même manière on montre que le couple $(V_1 G_1^{\mu_1} t_2, V_2 t_2)$ est surharmonique sur D. $\square$

Corollaire 4.4.1. Soit (u, v) un couple surharmonique positif sur D. Si u et v sont bornées sur D, alors pour $i = 1, 2$ il existe une unique fonction positive t_i, L_i-surharmonique telle que $u = t_1 + G_1^{\mu_1} v$ et $u = t_2 + G_2^{\mu_2} u$.

Théorème 4.4.3. Soit (u, v) un couple surharmonique positif sur D. Alors pour $i = 1, 2$ il existe une unique fonction positive t_i, L_i-surharmonique telle que $u = t_1 + G_1^{\mu_1} v = V_1 t_1 + V_1 G_1^{\mu_1} t_2$ et $v = t_2 + G_2^{\mu_2} u = V_2 G_2^{\mu_2} t_1 + V_2 t_2$.

Preuve. D'après la Proposition 5.2.1, la fonction u est L_1-surharmonique ≥ 0 sur D, donc $\nu = -L_1 u$, au sens des distributions, est une mesure de Radon positive sur D. Nous avons $\mu_1 v \leq \nu$, et par conséquent $G_1^{\mu_1} v \leq G_1^{\nu} = u$. Comme μ_1 est une mesure de Kato, la fonction $G_1^{\mu_1}(v \wedge n)$ est finie et continue, et donc $u - G_1^{\mu_1}(v \wedge n)$ est s.c.i, localement intégrable, et on a $L_1(u - G_1^{\mu_1}(v \wedge n)) = -\nu - \mu_1(v \wedge n) \leq 0$ au sens des distributions, d'où la fonction $t_{1,n} = u - G_1^{\mu_1}(v \wedge n)$ est L_1-surharmonique et $u = t_{1,n} + G_1^{\mu_1}(v \wedge n)$. La suite de fonctions $(t_{1,n})$ est croissante, donc la fonction $t_1 = \widehat{\inf}_n t_{1,n}$ est L_1-surharmonique et vérifie $u = t_1 + G_1^{\mu_1} v$. De la même manière il existe t_2, L_2-surharmonique telle que $v = t_2 + G_2^{\mu_2} u$. Ainsi on a $u = t_1 + G_1^{\mu_1} t_2 + G_1^{\mu_1} G_2^{\mu_2} u$, et donc $(I - G_1^{\mu_1} G_2^{\mu_2}) u = t_1 + G_1^{\mu_1} t_2$. En appliquant l'opérateur V_1 au deux membres de l'égalité précédente on obtient $u = V_1 t_1 + V_1 G_1^{\mu_1} t_2$. De manière analogue on a $u = G_2^{\mu_2} t_1 + t_2 = V_2 G_2^{\mu_2} t_1 + V_2 t_2$. $\square$

Nous allons prouver maintenant l'unicité de du couple de fonctions (t_1, t_2). Supposons qu'il existe un couple de fonctions $(t_1^{'}, t_2^{'})$ vérifiant ce qui précède. Alors on aura $u = t_1 + G_1^{\mu_1} v = t_1^{'} + G_1^{\mu_1} v$ et $v = t_2 + G_2^{\mu_2} u = t_2^{'} + G_2^{\mu_2} u$. D'où $t_1 = t_1^{'}$ et $t_2 = t_2^{'}$ q.p. et donc $t_1 = t_1^{'}$ et $t_2 = t_2^{'}$ d'après la Proposition 2.11. Ce qui achève la démonstration.

Lemme 4.4.1. Soient t_i, $i = 1, 2$, deux fonctions L_i-surharmoniques positives sur D. Si la fonction $(V_1 t_1 + V_1 G_1^{\mu_1} t_2, V_2 G_2^{\mu_2} t_1 + V_2 t_2)$ est harmonique, alors la fonction t_i, est L_i-harmoniques sur D pour $i = 1, 2$.

Preuve. En effet nous avons $L_1(V_1 t_1 + V_1 G_1^{\mu_1} t_2) = L_1 t_1 - \mu_1(V_2 G_2^{\mu_2} t_1 + V_2 t_2)$ et $L_2(V_2 G_2^{\mu_2} t_1 + V_2 t_2) = L_2 t_2 - \mu_2(V_1 t_1 + V_1 G_1^{\mu_1} t_2)$ au sens des distributions. Donc si le couple $(V_1 t_1 + V_1 G_1^{\mu_1} t_2, V_2 G_2^{\mu_2} t_1 + V_2 t_2)$ est harmonique, alors pour chaque $i = 1, 2$, on a $L_i t_i = 0$ est donc t_i est L_i-harmonique d'après la Proposition 5.2.3. $\square$

Théorème 4.4.4. Soit (u,v) un couple harmonique positive sur D. Alors pour chaque $i=1,2$, il existe une unique fonction t_i, L_i-harmonique sur D telle que $(u,v)=(V_1t_1+V_1G_1^{\mu_1}t_2, V_2G_2^{\mu_2}t_1+V_2t_2)$.

Preuve. Le théorème découle du Théorème 5.4.3 et du lemme 5.4.1. □

Proposition 4.4.5. Soit (u_j,v_j),$j=1,2$ deux couples surharmoniques positifs sur D. Si le couple (u_1+v_1,u_2+v_2) est harmonique, alors les couples (u_j,v_j) sont harmoniques pour $j=1,2$.

Preuve. D'après le Théorème 5.4.4 on a $(u_j,v_j)=(V_1t_1^j+V_1G_1^{\mu_1}t_2^j, V_2G_2^{\mu_2}t_1^j+V_2t_2^2)$, pour $j=1,2$, où t_i^j est L_i-surharmonique, $i=1,2$. Si le couple (u_1+v_1,u_2+v_2) est harmonique, alors d'après le Lemme 5.4.1, pour chaque $i=1,2$, la fonction L_i-surharmonique $t_1^j+t_2^j$ est L_i-harmonique, d'où t_i^j est L_i-harmonique pour tout $i,j=1,2$. Ainsi moyennant le Corollaire 5.3.3, (u_j,v_j) est harmonique sur D. □

On dénote par $\mathcal{H}_+(D)$ l'ensemble des couples harmoniques positifs sur D.

Corollaire 4.4.2. L'ensemble $\mathcal{H}_+(D)$ des couples harmoniques positifs sur D est une bande dans le cône $\mathcal{S}_+(D)$.

Lemme 4.4.2. Soit ω un ouvert connexe relativement compact de D. Alors il existe un couple harmonique (h,k) sur D tel que $\inf_{x\in\omega}h(x), \inf_{x\in\omega}k(x)>0$ sur ω.

Preuve. Comme D est un domaine L_i-Greenien pour $i=1,2$, alors d'après le Théorème 16.1 [51], il existe une fonction $h_i>0$, L_i-harmonique sur D. Les restrictions de h_1 et h_2 sont bornées sur ω. D'autre part Les mesures μ_1 et μ_2 sont des mesures de Kato, d'où d'après le Corollaire 5.4.2 le couple constitué des restrictions sur ω des fonctions $V_1^\omega h_1+V_1^\omega G_1^{\omega,\mu_1}k$ et $V_2^\omega G_2^{\omega,\mu_2}h+V_2^\omega k$, vérifie bien la propriété du Lemme. □

Pour un couple de fonctions (f,g) sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$, le couple

$$(\liminf_{x\to z} f(x), \liminf_{x\to z} g(x)) \in \overline{\mathbb{R}}^d$$

est noté $\liminf_{x\to z}(f,g)(x)$.

Théorème 4.4.5. Soit ω un ouvert relativement compact de D et soit (u,v) un couple surharmonique sur ω tel que $\liminf_{\omega\ni x\to z}(u,v)(x)\geq 0$ pour tout $z\in\partial\omega$. Alors $(u,v)\geq 0$ sur ω.

Preuve. On peut supposer que ω est connexe. d'après le lemme précédent il existe un couple harmonique (h,k) défini sur un voisinage de $\overline{\omega}$ tels que $\inf_{\omega\ni x} h(x) > 0$ et $\inf_{\omega\ni x} k(x) > 0$ sur ω. Supposons par exemple que u change de signe, alors la fonction $\frac{u}{h}$ atteint son minimum $\alpha < 0$ en un point x_0 de ω. Soit $\beta = \inf \frac{v}{k}$, alors $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $\beta \geq \alpha$, alors le couple de fonctions positives $(u-\alpha h, v-\alpha k)$ est surharmonique sur ω. Donc $u-\alpha h$ est L_1-surharmonique positive égale à zero en x_0, et d'où on a $u = \alpha h$, ce qui contredit le fait que $\liminf_{\omega\ni x\to z} u(x) \geq 0$ pour $z \in \partial\omega$. Si $\alpha \geq \beta$, alors la fonction s.c.i. $\frac{v}{k}$ atteint son minimum en point $x_1 \in \omega$. Le raisonnement précédent appliqué au couple surharmonique $(u-\beta h, v-\beta k)$ conduit à une contradiction, et d'où $(u,v) \geq 0$.

4.5 Les potentiels

Définition 4.5.1. Un couple surharmonique (p,q) sur D est un potentiel si, pour toute fonction $h \geq 0$ et L_1-harmonique sur D et pour toute fonction $k \geq 0$ et L_2-harmonique sur D telles $(V_1h + V_1G_1^{\mu_1}k, V_2G_2^{\mu_2}h + V_2k) \leq (p,q)$, on a $h = k = 0$ sur D.

Proposition 4.5.1. Soit (p,q) un potentiel sur D et (h,k) un couple positif harmonique sur D tel que $(h,k) \leq (p,q)$, alors $h = k = 0$ sur D.

La proposition découle de la Définition 5.5.1 et du Théorème 5.4.4.

Proposition 4.5.2. Soit (p,q) un potentiel sur D. Alors p est un L_1-potentiel et q est un L_2-potentiel sur D.

Preuve. Soient h et k deux fonctions positives respectivement L_1-harmonique et L_2-harmonique sur D telles que $h \leq p$ et $k \leq q$. D'après le Théorème 4.8, on a $p = V_1p_1 + V_1G_1^{\mu_1}p_2$ et $q = V_2G_2^{\mu_2}p_1 + V_2p_2$, d'où p_i est une fonction L_i-surharmonique positive sur D pour $i = 1, 2$. Alors on a $h - p_1 \leq G_1^{\mu_1}V_2G_2^{\mu_2}p_1 + V_1G_1^{\mu_1}p_2$. Comme la fonction $h - p_1$ est L_1-surharmonique positive sur D et la fonction $G_1^{\mu_1}V_2G_2^{\mu_2}p_1 + V_1G_1^{\mu_1}p_2$ est un L_1-potentiel sur D, alors on a nécessairement $h - p_1 \leq 0$, c-à-dire $h \leq p_1$. Le même argument appliqué aux fonctions k et q donne $k \leq p_2$. Ainsi on a $(V_1h + V_1G_1^{\mu_1}k, V_2G_2^{\mu_2}h + V_2k) \leq (p,q)$ et donc $h = k = 0$. Par conséquent p est un L_1-potentiel et q est un L_2-potentiel.

Proposition 4.5.3. Soient $(h,k) = (V_1h_1 + V_1G_1^{\mu_1}h_2, V_2G_2^{\mu_2}h_1 + V_2h_2)$ un couple harmonique positif et $(u,v) = (V_1t_1 + V_1G_1^{\mu_1}t_2, V_2G_2^{\mu_2}t_1 + V_2t_2)$ un couple surharmonique positif sur D. Si $(h,k) \leq (u,v)$ sur D alors, $h_1 \leq t_1$ et $h_2 \leq t_2$ sur D.

Preuve. Les couples (u,v) et $(u-h,v-k)$ sont surharmoniques positifs sur D. D'après le Théorème 5.4.3, il existe deux fonctions $t_1,t_1^{'}$, L_1-surharmoniques positives sur D et deux fonctions $t_2,t_2^{'}$, L_2-surharmoniques positives sur D, telles que $u = V_1t_1 + V_1G_1^{\mu_1}t_2,\ v = V_2G_2^{\mu_2}t_1 + V_2t_2,\ u-h = V_1t_1^{'} + V_1G_1^{\mu_1}t_2^{'}$ et $v-k = V_2G_2^{\mu_2}t_1^{'} + V_2t_2^{'}$. D'après le Théorème 5.4.4, il existe une fonction h_1, L_1-harmonique positive sur D et une fonction h_2, L_2-harmoniques positive sur D, telles que $h = V_1h_1 + V_1G_1^{\mu_1}h_2,\ k = V_2G_2^{\mu_2}h_1 + V_2h_2$. Moyennant la propriété de l'unicité dans le Théorème 5.4.3 on a nécessairement $t_1 = t_1^{'} + h_1$ et $t_2 = t_2^{'} + h_2$ et donc $h_1 \leq t_1$ et $h_2 \leq t_2$.

Proposition 4.5.4. Soit p_i un L_i-potentiel sur D, $i = 1,2$. Si le couple

$$(V_1p_1 + V_1G_1^{\mu_1}p_2, V_2G_2^{\mu_2}p_1 + V_2p_2)$$

est surharmonique, alors c'est un potentiel sur D.

Preuve. Supposons que le couple $(V_1p_1 + V_1G_1^{\mu_1}p_2, V_2G_2^{\mu_2}p_1 + V_2p_2)$ est surharmonique sur D. Moyennant le Théorème 5.3.3, il existe pour chaque $i = 1,2$, une fonction h_i, L_i-harmonique positive telle que $(V_1h_1 + V_1G_1^{\mu_1}h_2, V_2G_2^{\mu_2}h_1 + V_2h_2) \leq (V_1p_1 + V_1G_1^{\mu_1}p_2, V_2G_2^{\mu_2}p_1 + V_2p_2)$. D'après la Proposition 5.3 on a nécessairement $h_i \leq p_i$, et donc $h_i = 0$ pour $i = 1,2$ ce qui implique que $h = k = 0$ car p_i est un L_i-potentiel. D'où $(V_1p_1 + V_1G_1^{\mu_1}p_2, V_2G_2^{\mu_2}p_1 + V_2p_2)$ est un potentiel. □

Théorème 4.5.1 (Décomposition de Riesz). Soit (u,v) un couple surharmonique positif sur D, alors pour chaque $i = 1,2$, il existe une fonction positive h_i, L_i-harmonique sur D et un unique potentiel (p,q) sur D tels que $(u,v) = (V_1h_1 + V_1G_1^{\mu_1}h_2, V_2G_2^{\mu_2}h_1 + V_2h_2) + (p,q)$.

Preuve. Soit (u,v) un couple surharmonique positif sur D, alors pour chaque $i = 1,2$, il existe une fonction positive t_i, L_i-surharmonique sur D telle que $u = V_1t_1 + V_1G_1^{\mu_1}t_2$ et $v = V_2G_2^{\mu_2}t_1 + V_2t_2$. D'après la décomposition de Riesz pour les fonctions L_i-surharmoniques, il existe un fonction positive h_i, L_i-harmonique sur D telle que $t_i = h_i + p_i$. D'où $(u,v) = (V_1h_1 + V_1G_1^{\mu_1}h_2, V_2G_2^{\mu_2}h_1 + V_2h_2) + (V_1p_1 + V_1G_1^{\mu_1}p_2, V_2G_2^{\mu_2}p_1 + V_2p_2)$. Le Théorème découle ainsi de la Proposition 5.5.4. □

Corollaire 4.5.1. Soit (p,q) un couple potentiel sur D. Alors pour $i = 1,2$, il existe p_i, un L_i-potentiel sur D tel que $p = V_1p_1 + V_1G_1^{\mu_1}p_2$ et $q = V_2G_2^{\mu_2}p_1 + V_2p_2$.

Corollaire 4.5.2. L'ensemble des couples potentiels sur D, $\mathcal{P}(D)$, est un cône convexe et une bande de $\mathcal{S}(D)$.

Théorème 4.5.2. Soit (p, q) un couple potentiel sur D. Alors il existe deux mesures μ et ν uniques et positives sur D telles que

$$p = \int_D V_1 G_1(., y) d\mu(y) + \int_D V_1 G_1^{\mu_1} G_2(., y) d\nu(y)$$

et

$$q = \int_D V_2 G_2^{\mu_2} G_1(., y) d\mu(y) + \int_D V_2 G_2(., y) d\nu(y).$$

Preuve. D'après le Corollaire 5.5.1, il existe un unique L_i-potentiel p_i, pour $i = 1, 2$, tel que $p = V_1 p_1 + V_1 G_1^{\mu_1} p_2$ et $q = V_2 G_2^{\mu_2} p_1 + V_2 p_2$. D'après le Théorème de la représentation de Riesz, il existe deux mesures uniques μ et ν portées par D, telles que $p_1 = \int G_1(x, y) d\mu(y)$ et $q_1 = \int G_2(x, y) d\nu(y)$. D'où d'après le Théorème de Fubini, on a

$$p = \int_D V_1 G_1(., y) d\mu(y) + \int_D V_1 G_1^{\mu_1} G_2(., y) d\nu(y)$$

et

$$q = \int_D V_2 G_2^{\mu_2} G_1(., y) d\mu(y) + \int_D V_2 G_2(., y) d\nu(y).$$

4.6 Représentation intégrale des solutions positives de (S')

On dénote par $\triangle_i$, $i = 1, 2$, la frontière de Martin de D relative à L_i et par g_i son noyau de Martin correspondant sur $D \times \triangle_i$. Alors pour tout $Y \in \triangle_i$, $g_i(., Y)$ est une fonction L_i-harmonique sur D. On dénote aussi par $\triangle_i^m$ la frontière de Martin minimale relative à L_i, constituée des points minimaux de $\triangle_i$.

Proposition 4.6.1. Soient μ et ν deux mesures positives respectivement sur $\triangle_1$ et $\triangle_2$.

Si les fonctions

$$u = \int_{\triangle_1} V_1 g_1(., Y) d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} V_1 G_1^{\mu_1} g_2(., Y) d\nu(Y)$$

et

$$v = \int_{\triangle_1} V_2 G_2^{\mu_2} g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} V_2 g_2(.,Y)d\nu(Y).$$

sont finies et continues sur D, alors le couples (u, v) est harmonique sur D.

Preuve. Supposons que u et v sont finies et continues sur D. Il en découle que les fonctions $h_1 = \int_{\triangle_1} g_1(.,Y)d\mu(Y)$ et $h_2 = \int_{\triangle_2} g_2(.,Y)d\nu(Y)$ sont respectivement L_1-harmonique et L_2-harmonique sur D et par le Théorème de Fubini on a $u = V_1 h_1 + V_1 G_1^{\mu_1} h_2$ et $v = V_2 G_2^{\mu_2} h_1 + V_2 h_2$. On en déduit que le couple (u, v) est harmonique d'après la Proposition 5.4.1. □

Lemme 4.6.1. Soient μ et ν deux mesures finies positives, sur $\triangle_1$ et $\triangle_2$ respectivement, et soient les fonctions définies sur D par

$$u = \int_{\triangle_1} V_1 g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} V_1 G_1^{\mu_1} g_2(.,Y)d\nu(Y)$$

et

$$v = \int_{\triangle_1} V_2 G_2^{\mu_2} g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} V_2 g_2(.,Y)d\nu(Y).$$

Si le couple (u, v) est harmonique sur D, alors on a

$$\int_{\triangle_1} g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} G_1^{\mu_1} g_2(.,Y)d\nu(Y) < +\infty.$$

et

$$\int_{\triangle_1} G_2^{\mu_2} g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} g_2(.,Y)d\nu(Y) < +\infty.$$

Preuve. En effet on a

$$u = \int_{\triangle_1} g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} G_1^{\mu_1} g_2(.,Y)d\nu(Y) \leq u < +\infty.$$

et

$$v = \int_{\triangle_1} G_1^{\mu_2} g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} g_2(.,Y)d\nu(Y) \le v < +\infty.$$

$\square$

Théorème 4.6.1. Soit (u, v) un couple harmonique positif sur D. Alors il existe deux mesures μ et ν uniques, finies et positives sur $\triangle_1$ et $\triangle_2$ et portées par $\triangle_1^m$ et $\triangle_2^m$ respectivement telles que

$$u = \int_{\triangle_1} V_1 g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} V_1 G_1^{\mu_1} g_2(.,Y)d\nu(Y)$$

et

$$v = \int_{\triangle_1} V_2 G_2^{\mu_2} g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} V_2 g_2(.,Y)d\nu(Y).$$

preuve. D'après le Théorème 5.4.4, pour chaque $i = 1, 2$, il existe une unique fonction h_i, L_i-harmonique positive telle que $u = V_1 h_1 + V_1 G_1^{\mu_1} h_2$ et $v = V_2 G_2^{\mu_2} h_1 + V_2 h_2$. D'après le Théorème 5.2.8, il existe deux mesures uniques (de Radon) μ et ν sur $\triangle_1$ et $\triangle_2$, portées respectivement par $\triangle_1^m$ et $\triangle_2^m$ telles que $h_1 = \int g_1(.,Y)d\mu(Y)$ et $h_2 = \int g_2(.,Y)d\nu(Y)$. Donc par le Théorème de Fubini,

$$u = \int_{\triangle_1} V_1 g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} V_1 G_1^{\mu_1} g_2(.,Y)d\nu(Y)$$

et

$$v = \int_{\triangle_1} V_2 G_2^{\mu_2} g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} V_2 g_2(.,Y)d\nu(Y).$$

Soient σ et τ deux mesures (de Radon) positives, sur $\triangle_1$ et $\triangle_2$ et portées respectivement par $\triangle_1^m$ et $\triangle_2^m$ telles que

$$u = \int_{\triangle_1} V_1 g_1(.,Y)d\sigma(Y) + \int_{\triangle_2} V_1 G_1^{\mu_1} g_2(.,Y)d\tau(Y)$$

et

$$v = \int_{\triangle_1} V_2 G_2^{\mu_2} g_1(.,Y)d\sigma(Y) + \int_{\triangle_2} V_2 g_2(.,Y)d\tau(Y).$$

Alors d'après le Théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned}(I - G_1^{\mu_1}G_2^{\mu_2})u &= \int_{\triangle_1} g_1(.,Y)\mu(Y) + \int_{\triangle_2} G_2^{\mu_2} g_2(.,Y)d\nu(Y)\\ &= \int_{\triangle_1} g_1(.,Y)d\sigma(Y) + \int_{\triangle_2} G_2^{\mu_2} g_2(.,Y)d\tau(Y).\end{aligned}$$

Les fonctions $\int_{\triangle_1} g_1(.,Y)d\mu(Y)$ et $\int_{\triangle_1} g_1(.,Y)d\sigma(Y)$ sont L_1-harmonique et L_2-harmonique respectivement et les fonctions $\int_{\triangle_2} G_2^{\mu_2} g_2(.,Y)d\nu(Y)$ et $\int_{\triangle_2} G_2^{\mu_2} g_2(.,Y)d\tau(Y)$ sont des L_1-potentiel et L_2-potentiel respectivement, alors moyennant l'unicité de de la décomposition de Riesz on a $\int_{\triangle_1} g_1(.,Y)d\mu(Y) = \int_{\triangle_1} g_1(.,Y)d\sigma(Y)$, et donc $\mu = \sigma$, par l'unicité de la représentation intégrale des fonctions L_1-harmoniques positives moyennant une mesure sur $\triangle_1$ portée par $\triangle_1^m$. De la même manière on montre que $\nu = \tau$. $\square$

Corollaire 4.6.1. Soit (u, v) un couple harmonique positif sur D admetant la représentation intégrale suivante :

$$u = \int_{\triangle_1} V_1 g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} V_1 G_1^{\mu_1} g_2(.,Y)d\nu(Y)$$

et

$$v = \int_{\triangle_1} V_2 G_2^{\mu_2} g_1(.,Y)d\mu(Y) + \int_{\triangle_2} V_2 g_2(.,Y)d\nu(Y)$$

sur D, où μ et ν deux mesures finies positives respectivement sur $\triangle_1$ et $\triangle_2$. Alors le couple $(h, k) = ((I - G_1^{\mu_1}G_2^{\mu_2})u, \int_{\triangle_2} g_2(.,Y)d\nu(Y))$ est solution du système $L_1 h = -\mu_k$, $L_2 k = 0$.

Preuve. En effet, on a $(I - G_1^{\mu_1}G_2^{\mu_2})(V_1 g_1(.,Y)) = g_1(.,Y)$ pour tout $Y \in \Delta_1$ et $(I - G_1^{\mu_1}G_2^{\mu_2})(V_1 G_1^{\mu_1} g_2(.,Y)) = G_1^{\mu_1} g_2(.,Y)$ pour tout $Y \in \triangle_2$. Par le Théorème de Fubini, on a $(I - G_1^{\mu_1}G_2^{\mu_2})u = \int_{\triangle_1} g_1(.,Y)d\mu(Y) + G_1^{\mu_1} \int_{\triangle_2} g_2(.,Y)d\nu(Y)$. En appliquant l'opérateur L_1 au deux membres de l'égalité, on obtient $L_1(I - G_1^{\mu_1}G_2^{\mu_2})u = -\mu_1 \int_{\triangle_2} g_2(.,Y)d\nu(Y)$ car la fonction $\int_{\triangle_1} g_1(.,Y)d\mu(Y)$ est L_1-harmonique. Puisque la fonction $\int_{\triangle_2} g_2(.,Y)d\nu(Y))$ est L_2-harmonique on conclue que le couple $(h,k) = ((I - G_1^{\mu_1}G_2^{\mu_2})u, \int_{\triangle_2} g_2(.,Y)d\nu(Y))$ est solution du système $L_1 h = -\mu k$, $L_2 k = 0$. $\square$

Chapitre 5

Sur la représentation intégrale des fonctions finement surhamoniques

(Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae (2019))

5.1 Introduction

Soit Ω l'espace $\mathbb{R}^n$ si $n \geq 3$, ou un domaine de complémentaire non polaire de $\mathbb{R}^2$ et soit U un domaine fin de Ω, c'est à dire un domaine au sens de la topologie fine sur Ω. Le problème de la représentation intégrale des potentiels fins dans U a été étudié par Fuglede dans [7, 8]. On note G_U le noyau de Green fin de U défini par

$$G_U(.,y) = G(.,y) - \widehat{R}^{CU}_{G.,y)},$$

sur $U \setminus \{y\}$ et prolongé par continuité fine au point y, où G est le noyau de Green de Ω. Le résultat de Fuglede affirme que pour tout potentiel fin p dans U, on peut trouver une mesure de Borel unique $\mu \geq 0$ sur U telle que

$$p(x) = \int G_U(x,y)d\mu(y)$$

pour tout $x \in U$.

Par $\mathcal{S}(U)$ on désigne le cône des fonctions finement surhamoniques positives sur U. Une fonction $h \in \mathcal{S}(U)$ est dite invariante si elle appartient à l'orthogonal, pour l'ordre spécifique dans $\mathcal{S}(U)$, de la bande $\mathcal{P}(U)$ des potentiels fins dans U. Les fonctions invariantes sont caractérisées par le fait qu'elles sont invariantes par balayage sur les complémentaires de certains ouverts fins V_n, $n \in$, tels que $\cup_n V_n = U$ et $\overline{V}_n \subset U$ pour tout n, cf. [39, Theorem 4.4] et [38, Theorem, p. 130]. En particulier, une fonction invariante est finement harmonique dans le complémentaire de l'ensemble polaire où elle prend la valeur $+\infty$.

Toute fonction finement surharmonique $s \geq 0$ dans U se décompose de manière unique en la somme d'une fonction invariante et d'un potentiel fin dans U. Il en résulte alors que pour toute fonction $s \in U$, on peut trouver une mesure de Borel unique $\mu \geq 0$ dans U et une fonction h invariante sur U telles que

$$s = \int G_U(., y) d\mu(y) + h.$$

On en déduit que les fonctions invariantes jouent le rôle des fonctions harmoniques ≥ 0 dans la décomposition de Riesz des fonctions surharmoniques ≥ 0 dans un domaine euclidien de $\mathbb{R}^n$.

Dans [31] nous avons défini une topologie sur le cône $\mathcal{S}(U)$ des fonctions finement surharmoniques ≥ 0 dans U en vue de retrouver le résultat de Fuglede de représentation intégrale des potentiels fins par la méthode de Choquet, et d'obtenir aussi la représentation intégrale des fonctions invariantes au moyen des fonctions invariantes extrémales, dites aussi minimales.

Les fonctions invariantes minimales peuvent être partout finies, c'est-à-dire finement harmoniques sur U, comme elles peuvent être infinies en certains points (formant un ensemble polaire) de U, d'après un résultat récent de Gardiner et Hansen [43]. Ces derniers auteurs ont en effet mis en évidence l'existence d'un domaine fin U de $\mathbb{R}^n$ de la forme $U = D \cup \partial_i D$, où D un domaine non régulier de$\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, et où $\partial_i D$ est l'ensemble des points irréguliers de ∂D, et d'une fonction invariante minimale qui n'est pas finement harmonique dans U, ce qui a résolu deux vieux problèmes dûs à Fuglede, à savoir :

1. Est-ce-que toute fonction invariante dans un domaine fin U est la somme d'une suite de fonctions finement harmoniques ≥ 0 dans U ?

2. Si D est un domaine de Green non régulier de ^{n} et si s est une fonction harmonique minimale dans D, de limite fine f-$\lim_{x \to z} h(x) = +\infty$ en un point irrégulier z de ∂D, a-t-on $h = \alpha G_U(., z)$, où U est le plus petit domaine fin régulier contenant D ?

Dans ce travail nous allons reprendre la question de la représentation intégrale des fonctions finement surharmoniques ≥ 0, partiellement étudiée dans [31], dans le cadre plus général d'un domaine fin d'un espace de Brelot satisfaisant l'axiome D, admettant un noyau de Green et une base d'ouverts complétement déterminants et dans lequel la topologie fine adjointe est plus fine que la topologie fine. La méthode repose comme dans [31] sur le théorème de représentation intégrale de Choquet dans les cônes à base compacte. En particulier on défini la frontière de Martin $\Delta(U)$ de U et et le noyau de Martin lui correspondant sur $\Delta(U) \times U$ et obtenons ainsi la représentation intégrale des fonctions invariantes sur U.

Comme application de la représentation intégrale des fonctions invariantes, nous montrons que si toute fonction invariante minimale est finement harmonique, alors toute fonction invariante est approchable au sens de la topologie du cône $\mathcal{S}(U)$ par des fonctions finement harmoniques ≥ 0 dans U. Enfin, grâce à une propriété simple des fonctions extrémales de $\mathcal{S}(U)$ d'être autoréduites sur A ou $U \setminus A$ pour n'importe quelle partie A de U, nous étendons aux fonctions finement surharmoniques ≥ 0 un théorème de partition de Brelot [16].

L'intérêt de se placer dans le cadre général d'un espace de Brelot est d'obtenir des résultats généraux pouvant s'appliquer à des ouverts fins de la théorie du Potentiel définie par un opérateur elliptique sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou sur une variété Riemannienne (avec potentiel > 0).

Notations et définitions : Si Ω est un espace harmonique de Brelot et U est un domaine fin de Ω, on note $\mathcal{S}(U)$ le cône convexe des fonctions finement surharmoniques ≥ 0 dans U au sens de [35]. Le cône des potentiels fins dans U (c'est-à dire les fonctions de $\mathcal{S}(U)$ dont toute minorante finement sousharmonique dans U est ≤ 0) est noté $\mathcal{P}(U)$, c'est une bande de $\mathcal{S}(U)$. La topologie de Ω ainsi que celle induite par cette topologie sur U sera appelée topologie initiale. On note $\mathcal{B}_+(U)$ le cône des fonctions boréliennes (relativement à la topologie initiale) sur U (à valurs dans $[0, +\infty]$). Nous utilisons le mot fin (finement) pour distinguer les notions relatives à la topologie fine de celles relatives à la topologie initiale. Si $f : U \longrightarrow [0, +\infty]$ on désigne, sans distinction, par R_f, resp. $\widehat{R}_f$, la réduite, resp. la balayée, de f de A relative à U ou Ω (dans le cas de U cf. [35, Section 11] pour ces notions). Si $u \in \mathcal{S}(U)$ et $A \subset U$ on peut écrire $\widehat{R}_u^A$ pour $\widehat{R}_f$ avec $f := 1_A u$. Pour toute partie $A \subset \Omega$ on note $\widetilde{A}$ l'adhérence fine de A dans Ω, et $b(A)$ la base de A dans Ω, c'est-à-dire, l'ensemble des points de Ω où A n'est pas effilé, en d'autre termes l'ensemble des points limites A dans Ω.

Si E est un espace vectoriel topologique localement convexe (e.v.t.l.c en abrégé), et si K est un compact convexe de E et μ une mesure de probabilité sur K, on note $b(\mu)$ le barycentre de μ et on écrit $b(\mu) = \int_K k d\mu(k)$, ce qui signifie que pour toute forme affine continue l sur K, on a $l(b(\mu)) = \int l(k)d\mu(k)$; l'ensemble des points extrémaux de K est noté $Ext(K)$. □

5.2 Construction d'une résolvante associée au cône des fonctions finement surharmoniques ≥ 0 dans un domaine fin.

Soit Ω un espace harmonique au sens de Brelot satisfaisant l'axiome de domination D et admettant un potentiel > 0, et soit U un domaine fin de Ω, c'est-à-dire au sens de la topologie fine de Ω. On rappelle que la topologie fine sur Ω est la topologie la moins fine qui rend continues les fonctions surharmoniques sur Ω. Pour les principales propriétés de cette topologie on renvoie à [35, Chapter 1, Section 3]. On suppose que la fonction 1 est surharmonique (ce qui n'est pas vraiment uneréstriction car on peut toujours se ramener à ce cas en considérant les fonctions f-harmoniques, où f est un potentiel fini continu et > 0 dans Ω). On note $\mathcal{S}(U)$ le cône des fonctions finement surharmoniques ≥ 0 dans U et $\mathcal{U}_+(U) = \mathcal{S}(U) \cup \{+\infty\}$ celui des fonctions finement hyperharmoniques ≥ 0 dans U.

L'ensemble $\partial_i U$ des points irréguliers de la frontière fine est polaire et l'ensemble $U' = U \cup \partial_i U$ est un domaine fin de Ω, c'est le plus petit domaine fin régulier de Ω qui contient U (voir [35, p. 10]). De plus, toute fonction de $\mathcal{U}_+(U)$ admet un prolongement unique en une fonction de $\mathcal{U}_+(U')$ d'après [35, Theorem 9.14, p. 96]. Ceci nous permet de supposer dans toute la suite que U est régulier.

Soit p un potentiel > 0, strict continu et borné sur Ω. Alors il est bien connu d'après [**?** , Theorem 2, p. 362] qu'il existe un noyau V borélien sur Ω tel que

1. $V1 = p$.

2. Pour toute fonction continue $\varphi \in \mathcal{C}_c^+(\Omega)$, $V\varphi$ est un potentiel fini continu et harmonique dans le complémentaire du support de φ.

Au noyau V est associée une famille résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ de noyaux boréliens sur Ω dont le cône des fonctions excessives est $\mathcal{U}_+(\Omega)$. Comme les fonctions excessives de (V_λ) sont s.c.i, il résulte de [24, Chap. XII, no 41] qu'il existe une mesure de Radon $\tau \geq 0$ bornée sur Ω telle que la résolvante (V_λ) soit de base τ. La mesure τ ne charge pas les ensembles polaires, le cône $\mathcal{S}(\Omega)$ est exactement le cône des fonctions excessives finies τ-p.p. de la résolvante (V_λ). De plus, τ charge tout ouvert fin non vide. En effet, si ω est un ouvert fin non vide tel que $\tau(\omega) = 0$, alors $\tau(r(\omega)) = 0$ puisque $r(\omega) \setminus \omega$ est polaire, donc τ-négligeable, où $r(\omega) = \omega \cup \partial_i\omega$. On a alors $\widehat{R}_p^{\complement\omega} = p$ τ-p.p, d'où $\lambda V_\lambda(\widehat{R}_p^{\complement\omega}) = \lambda V_\lambda(p)$ pour tout $\lambda > 0$. En faisant $\lambda \to +\infty$, on obtient $\widehat{R}_p^{\complement\omega} = p$ partout, ce qui est absurde car p est strict. On déduit en particulier que deux fonctions surharmoniques égales τ-p.p sont égales partout.

Soit W le noyau borélien sur U (relativement à la topologie initiale de U) défini par

$$Wf = V\overline{f} - \widehat{R}_{V\overline{f}}^{CU}$$

(réstreinte à U) pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_+(U)$ bornée, où $\overline{f}$ est le prolongement de f à Ω nul dans $\Omega \setminus U$. □

Lemme 5.2.1. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_+(U)$ bornée, on a $Wf \in \mathcal{S}(U)$.

Preuve. En effet, comme f est bornée, la fonction $V\overline{f}$ est surharmonique ≥ 0 et finie dans Ω, donc la fonction $\widehat{R}_{V\overline{f}}^{\complement U}$ est finement harmonique dans U d'après [35, Theorem 11.13, p. 127]. On en déduit donc que $Wf \in \mathcal{S}(U)$. □

Corollaire 5.2.1. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_+(U)$, on a $Wf \in \mathcal{U}_+(U)$.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{B}_+(U)$, on a $Wf = \sup_n W(f_n \wedge n) \in \mathcal{U}_+(U)$. □

Lemme 5.2.2. Le noyau W vérifie le principe complet du maximum.

Preuve. Soient f, g deux fonctions $\in \mathcal{B}_+(U)$ et $a \in \mathbb{R}_+$ tels que $a + Wg \geq Wf$ sur $\{f > 0\}$. On peut supposer f bornée. Considérons la fonction

$$u = \begin{cases} \min(Wg + \widehat{R}_{V\overline{f}}^{CU}, V\overline{f}) & \text{dans } U \\ V\overline{f} & \text{dans } CU. \end{cases}$$

On a

$$\text{f} - \liminf_{x \to y}(Wg + \widehat{R}_{V\overline{f}}^{CU}(x)) \geq V\overline{f}(y)$$

pour tout $y \in \partial_f U$. Comme la fonction $Wg + \widehat{R}_{V\overline{f}}^{CU} \in \mathcal{U}_+(U)$, alors d'après [35, Lemma 10.1], u est finement hyperharmonique dans Ω, donc hyperharmonique dans Ω d'après [35, Theorem 9.8, p. 87], puisqu'elle est ≥ 0. On en déduit qu'elle est excessive pour la résolvante (V_λ). D'autre part on a $a + u \geq V\overline{f}$ sur $\{f > 0\} = \{\overline{f} > 0\}$, donc d'après [24, Théorème 28, p. 17] on a $a + u \geq V\overline{f}$ dans Ω. On en déduit que $a + Wg \geq Wf$ dans U, ce qui démontre le lemme. □

Corollaire 5.2.2. Il existe une famille résolvante unique (W_λ) de noyaux boréliens sur U de noyau potentiel W.

Preuve. Le corollaire résulte aussitôt du lemme précédent d'après [24, Théorème 88, p. 75]. □

Soit $s \in \mathcal{S}(\Omega)$ et e l'ensemble polaire $\{x \in \Omega : s(x) = +\infty\} \cap U$. La fonction $\widehat{R}_s^{\complement U}$ est finement harmonique dans $U \setminus e$ d'après [35, Theorem 11.13, p. 127], donc la fonction $s - \widehat{R}_s^{\complement U}$ est finement surharmonique ≥ 0 dans $U \setminus e$, et par suite elle se prolnge par continuité fine en une fonction finement surharmonique $v \geq 0$ dans U d'après [35, Theorem 9.14, p. 96], notée encore $s - \widehat{R}_s^{\complement U}$.

Pour déterminer les fonctions excessives de la résolvante (W_λ) nous avons besoin de rappeler le théorème d'approximation suivant [36, Theorem 3, p. 68] :

Théorème 5.2.1. Soit $s \in \mathcal{S}(U)$. Alors on peut trouver une suite (s_n) de fonctions surharmoniques ≥ 0 dans Ω telle que la suite $(s_n - \widehat{R}_{s_n}^{\complement U})$ est croissante et

$$s = \sup_n (s_n - \widehat{R}_{s_n}^{CU}).$$

Lemme 5.2.3. Pour toute fonction $s \in \mathcal{S}(\Omega)$, la fonction $s - \widehat{R}_s^{CU}$ est excessive pour la résolvante (W_λ).

Preuve. La fonction s est excessive pour la résolvante (V_λ), donc d'après [24, Théorème 17, p.11], on peut trouver une suite croissante (f_n) de fonctions boréliennes bornées sur Ω telle que $s = \sup_n V(f_n)$. On a alors $s - \widehat{R}_s^{CU} = \sup_n W(g_n)$ où g_n est la restriction de f_n à U. Donc $s - \widehat{R}_s^{CU}$ est excessive pour (W_λ). □

Théorème 5.2.2. Le cône des fonctions excessives de la résolvante (W_λ) est identique au cône $\mathcal{U}_+(U)$.

Preuve. Notons $\mathcal{E}(U)$ le cône des fonctions excessives de la résolvante (W_λ). L'inclusion $\mathcal{S}(U) \subset \mathcal{E}(U)$ découle aisément du Théorème 5.2.1 et du Lemme 5.2.3. Comme toute fonction $u \in \mathcal{U}_+(U)$ est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante (s_n) de fonctions de $\mathcal{S}(U)$ (il suffit de prendre $s_n = s \wedge n$ pour tout entier n), on en déduit que $\mathcal{U}_+(U) \subset \mathcal{E}(U)$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit $s \in \mathcal{E}(U)$, alors d'après [24, Théorème 17, p. 11] s est l'enveloppe supérieure d'une suite $(W(f_n))$, où (f_n) est une suite croissante de fonctions boréliennes ≥ 0 bornées dans U. Pour tout n on a $W(f_n) = V(\overline{f}_n) - \widehat{R}^{CU}_{V(\overline{f}_n)}$. Or comme $V(\overline{f}_n)$ est finie et continue dans U, la fonction $\widehat{R}^{CU}_{V(\overline{f}_n)}$ est finement harmonique dans U d'après [35, Theorem 11.13], donc $W(f_n) \in \mathcal{S}(U)$. On en déduit alors que $s \in \mathcal{U}_+(U)$. $\square$

Remarque 5.2.1. Nous avons appelé fonctions excessives de la résolvante (W_λ) les fonctions surmédianes de (W_λ) au sens de [5]. Les fonctions excessives au sens de [5, p. 16] de (W_λ) est donc $\mathcal{S}(U)$.

Comme la résolvante (W_λ) est subordonnée à la résolvante (V_λ), alors elle est basique et transciente (cf. [24, Chapitre XII]). L'ouvert fin U étant supposé régulier, c'est donc un espace radonien, ce qui permet de lui appliquer les résultats du chapitre 12 de [24].

Corollaire 5.2.3. *Le cône $\mathcal{S}(U)$ est un H-cône standard de fonctions sur U.*

Preuve. Le corollaire résulte du théorème précédent et de [5, Theorem 4.4.6]. $\square$

5.3 Topologie du cône $\mathcal{S}(U)$ et représentation intégrale des fonctions finement surharmoniques ≥ 0

Pour ne pas compliquer les notations, nous utiliserons dorénavant les mêmes notations pour désigner les réduites et les balayées dans les cônes $\mathcal{S}(\Omega)$ et $\mathcal{S}(U)$ et nous ferons les précisions nécessaires s'il y a un risque de confusion.

D'après [5, Theorem 4.4.6], le cône $\mathcal{S}(U)$ est un H-cône standard de fonctions. Suivant [5, Section 4.5, p. 141], on le munit de la topologie naturelle. Cette topologie est la topologie induite sur $\mathcal{S}(U)$ par celle d'un espace vectoriel localement convexe dans lequel $\mathcal{S}(U)$ est un cône convexe saillant bien coiffé (c'est-à-dire réunion de ses chapeaux) ; elle est suffisante pour l'étude de la représentation intégrale des fonctions finement surharmoniques ≥ 0, toutefois nous montrons un résultat plus fort, à savoir que le cône $\mathcal{S}(U)$ admet une base compacte. Ce dernier résultat est important dans la mesure où il nous permettra, dans le cas de proportionnalité des potentiels de même support ponctuel de définir la frontière de Martin $\Delta(U)$ de U et la représentation intégrale des fonctions invariantes au moyen d'un noyau de Martin K sur $U \times \Delta(U)$.

Comme $\mathcal{S}(U)$ est un H-cône standard (cf. [5, Definition, p. 104]), on peut trouver un ensemble dénombrable $D = \{s_n \in \mathcal{S}(U) : n \in\}$ d'éléments de $\mathcal{S}(U)$ tel que pour tout $s \in \mathcal{S}(U)$, on a $s = \sup\{t \in D : t \leq s\}$. Donc tout élément s de $\mathcal{S}(U)$ (et aussi tout élément de $\mathcal{S}(U)$ (et aussi élément de $\mathcal{U}_+(U)$) est l'enveloppe supérieure d'une suite (croissante) d'éléments de D.

Lemme 5.3.1. Pour tout $x \in U$, il existe un voisinage fin K_x de x compact en topologie initiale, tel que la réstriction de toute fonction $s \in \mathcal{S}(U)$ à K_x est s.c.i en topologie initiale.

Preuve. D'après [41, Lemma, p. 114], tout point x de U admet un voisinage fin K_x compact en topologie initiale tel que la réstriction de toute fonction s_n de D à K_x est continue en topologie initiale. Toute fonction $s \in \mathcal{S}(U)$ est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante d'éléments de D, donc sa réstriction à K_x est s.c.i (en topologie initiale). □

Théorème 5.3.1. Il existe une suite (K_n) de compacts (en topologie initiale de Ω) contenus dans U et un ensemble polaire P tels que

1. $U = \cup_n K_n' \cup P$, où K_n' est l'intérieur fin de U.

2. Pour tout n, la réstriction à K_n de toute fonction de $\mathcal{S}(U)$ est s.c.i. en topologie initiale.

Preuve. D'après le lemme 5.3.1, tout point x de U admet un voisinage fin compact K_x en topologie initiale tel que la réstriction de toute fonction $t \in \mathcal{S}(U)$ à K_x est s.c.i. D'autre part, il résulte de la propriété quasi-Lindeloff de la topologie fine qu'on peut trouver une suite (x_j) de points de U et un ensemble polaire P tels que $U = \cup_j K_{x_j} \cup P$. Les compacts $K_j = K_{x_j}$ répondent aux conditions du théorème. □

Remarque 5.3.1. Les ouverts fins K_n' sont réguliers puisque, pour tout entier n, l'ensemble K_n est compact (en topologie initiale).

Corollaire 5.3.1. Il existe une suite (H_n) de parties compactes de U, chacune non effilée en chacun de ses points, et un ensemble polaire P tels que

1. $U = \cup_n H_n \cup P$.

2. Pour tout n, la réstriction de toute fonction de $\mathcal{S}(U)$ à H_n est s.c.i en topologie initiale.

Preuve. On écrit $U = \cup_n K_n' \cup P$ comme dans le théorème 5.3.1. Pour tout n, soit (U_n^m) la suite de composantes finement connexes de K_n'. Les ouverts fins U_n^m sont évidemment nécessairement réguliers d'après la remarque 5.3.1. Soit $p > 0$ un potentiel strict, fini et continu sur Ω (cf [18, p. 166]). Alors d'après [18, Proposition 7.2.2] on a pour tout couple (m, n) d'entiers,

$$b(\complement U_n^m) = \{x \in \Omega : \widehat{R}_p^{\complement U_n^m}(x) = p(x)\}.$$

Comme U_n^m est régulier on a donc

$$U_n^m = \{x \in \Omega : \widehat{R}_p^{\complement U_n^m}(x) < p(x)\}.$$

Pour tout couple (m, n) d'entiers et tout entier $l > 0$, posons

$$H_{n,m,l} = \{x \in U_n^m : p(x) - \widehat{R}_p^{\complement U_n^m}(x) \geq \frac{1}{l}\}.$$

Alors les ensembles $H_{n,m,l}$ sont compacts et chacun est non effilé en chacun de ses points et on a $U = \cup_{n,m,l} H_{n,m,l}$ et la réstriction de toute fonction $s \in \mathcal{S}(U)$ à $H_{n,m,l}$ est s.c.i en topologie initiale. □

Nous allons utiliser la suite (H_n) du corollaire précédent pour définir par analogie avec [56] une topologie localement compacte sur le cône $\mathcal{S}(U)$. Pour tout n notons $C_l(H_n)$ l'espace des fonctions s.c.i sur H_n à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, et munissons cet espace de la topologie de la convergence en graphe (cf. [56]). Il est connu que $\mathcal{C}_l(H_n)$ est un espace compact métrisable pour cette topologie. Soit d_n une distance compatible avec cette topologie. On définit un écart d sur $\mathcal{U}_+(U)$ par

$$d(u; v) = \sum_n \frac{1}{2^n \delta(\mathcal{C}_l(H_n))} d_n(u_{|H_n}, v_{|H_n})$$

pour tout couple (u, v) de fonctions de $\mathcal{U}_+(U)$, où $\delta(\mathcal{C}_l(H_n))$ désigne le diamètre de $\mathcal{C}_l(H_n)$. Comme deux fonctions finement hyperharmoniques sont identiques si elle coincident quasi-partout, il en résulte que d est une distance sur $\mathcal{U}_+(U)$. On note $\mathcal{T}$ la topologie définie sur $\mathcal{U}(U)$ par la distance d. □

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur $\mathcal{U}_+(U)$, on pose

$$\liminf\widehat{\ }_{\mathcal{F}} = \sup_{M\in\mathcal{F}} \widehat{\inf_{u\in M}}.$$

Théorème 5.3.2. Le cône $\mathcal{U}_+(U)$ des fonctions finement hyperharmoniques ≥ 0 dans U est compact en topologie $\mathcal{T}$. Pour tout ultrafiltre $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{U}_+(U)$ on a

$$\lim_{\mathcal{G}} = \lim\widehat{\inf}_{\mathcal{G}}.$$

Preuve. On va copier mot pour mot (avec les adaptations nécessaires) la démonstration du même résultat dans [31] correspondant au cas où Ω est un ouvert de Green $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{G}$ un ultrafiltre sur $\mathcal{U}_+(U)$. Pour tout $M \in \mathcal{G}$, posons $u_M = \inf_{u\in M} u$. Alors les bases d'ultrafiltres $\mathcal{G}_n$, images de $\mathcal{G}$ par réstrictions aux compacts H_n convergent, dans les espaces compacts $\mathcal{C}_i(H_n)$, vers les fonctions $u_n = \sup_{M\in\mathcal{U}} \widehat{u_M}^n$, où $\widehat{u}^n$ désigne la régularisée s.c.i de la réstriction de u à H_n. Soient $M \in \mathcal{G}$ et n un entier, alors la régularisée finement s.c.i. $\widehat{u_M}$ de u_M est s.c.i dans H_n d'après le Théorème 5.3.1 et minore u_M, donc $\widehat{u_M} \leq \widehat{u_M}^n$. D'autre part, d'après l'axiome D, il existe une partie polaire A de Ω telle que $u_M = \widehat{u_M}$ dans $U \setminus A$, donc $\widehat{u_M}^n \leq \widehat{u_M}$ dans $H_n \setminus A$. D'autre part, si $x \in A$, on a $\widehat{u_M}^n(x) \leq \widehat{u_M}(x)$ car $\widehat{u_M}$ est finement continue dans U et x est finement adhérent à $H_n \setminus A$ puisque H_n est non-effilé au point x. Donc $u_n = \lim\widehat{\inf}_{\mathcal{G}}$ dans H_n pour tout n, et comme la fonction $u = \lim\widehat{\inf}_{\mathcal{G}} \in \mathcal{U}_+(U)$ d'après [35, Theorem 12.9], on voit que l'ultrafiltre $\mathcal{G}$ converge vers u en topologie $\mathcal{T}$. Donc $\mathcal{U}_+(U)$ est compact en topologie $\mathcal{T}$. □

Corollaire 5.3.2. La topologie de la convergence en graphe coïncide avec la topologie naturelle de $\mathcal{S}(U)$.

Preuve. D'après le théoreme 5.3.2 et le Théorème 4.5.8 de [5], la topologie naturelle sur $\mathcal{S}(U)$ est moins fine que la topologie de la convergence en graphe sur $\mathcal{S}(U)$. Soit $\mathcal{G}$ un ultrafiltre sur $\mathcal{S}(U)$ qui converge en topologie naturelle vers $s \in \mathcal{S}(U)$, alors, toujours d'après le théorème précédent, $\mathcal{G}$ converge en graphe vers s. On déduit que la topologie en graphe sur $\mathcal{S}(U)$ est moins fine que la topologie naturelle de $\mathcal{S}(U)$. Donc les deux topologies sont identiques sur $\mathcal{S}(U)$. □

Corollaire 5.3.3. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur $\mathcal{S}(U)$, convergent en topologie en graphe, alors on a $\lim_{\mathcal{F}} = \lim\widehat{\inf}_{\mathcal{F}}$.

Preuve. Le corollaire résulte du corollaire précédent et de [5, Theorem 4.5.2]. □

Corollaire 5.3.4. Le cône $\mathcal{S}(U)$ muni de la topologie naturelle admet une base compacte.

Preuve. La topologie naturelle sur $\mathcal{S}(U)$ est localement compacte, il résulte alors d'un théorème de Klee [1, Theorem II.2.6] que $\mathcal{S}(U)$ admet une base compacte. □

Corollaire 5.3.5. Pour tout $x \in U$ et toute partie A de U, les fonctions affines $u \mapsto u(x)$ et $u \mapsto \widehat{R}_u^A(x)$ $(A \subset U)$, à valeurs dans $[0, +\infty]$, sont affines et s.c.i. en topologie naturelle sur $\mathcal{S}(U)$.

Preuve. Il est clair que l'application $u \mapsto \widehat{R}_u^A(x)$ est affine pour $x \in U$ fixé. Soit (u_j) une suite dans $\mathcal{S}(U)$ qui converge naturellement (i.e. en topologie naturelle) vers $u \in \mathcal{S}(U)$. Pour tout indice k on a

$$\widehat{\inf_{j\geq k}}\, \widehat{R}_{u_j}^A(x) \geq \widehat{R}^A_{\widehat{\inf}_{j\geq k} u_j}(x).$$

Les deux membres de cette égalité croissent avec k et on a lorsque $k \to \infty$,

$$\liminf_k \widehat{R}_{u_k}^A(x) \geq \lim_k \widehat{\inf}\, \widehat{R}_{u_k}^A(x) \geq \widehat{R}^A_{\lim \widehat{\inf}_{j\geq k} u_k}(x) \geq \widehat{R}_u^A(x),$$

et donc la fonction $u \mapsto \widehat{R}_u^A(x)$ est bien s.c.i. sur $\mathcal{S}(U)$. Pour la fonction $u \mapsto u(x)$ il suffit de prendre $A = U$. □

Soient B une base compacte du cône $\mathcal{S}(U)$, μ une mesure de probabilité sur B. Pour tout $x \in U$ et toute partie A de U, les intégrales $\int p(x)d\mu(p)$ et $\int_B \widehat{R}_p^A(x)d\mu(p)$ sont bien définies car les fonctions $u \mapsto \widehat{R}_p(x)$ sont boréliennes et ≥ 0 sur B d'après le corollaire précédent. On note $\int p d\mu(p)$ et $\int_B \widehat{R}_p^A d\mu(p)$ les fonctions u et v définies sur U par $u(x) = \int_B p(x)d\mu(p)$ et $v(x) = \int_B \widehat{R}_p^A(x)d\mu(p)$ pour tout $x \in U$. Soit s le barycentre μ, $A \subset U$ et $x \in U$. Les fonctions $p \mapsto p(x)$ et $p \mapsto \widehat{R}_p^A(x)$ sont affines s.c.i ≥ 0 sur B, donc, d'après [1, Corollary I.1.4], il existe une suite croissante (l_n) de formes affines continues sur B telle que $p(x) = \sup_n l_n(p)$ (resp. $\widehat{R}_p^A(x) = \sup_n l_n(p)$) pour tout $p \in B$. On a donc $s(x) = \sup_n l_n(s) = \sup \int_B l_n(p)d\mu(p) = \int_B p(x)d\mu(p)$ (resp. $\widehat{R}_s^A(x) = \sup_n l_n(s) = \sup \int_B l_n(p)d\mu(p) = \int_B \widehat{R}_p^A(x)d\mu(p)$). On on en déduit que $u = s$ et $v = \widehat{R}_s^A$ et par suite que $u, v \in \mathcal{S}(U)$. On a ainsi prouvé le

Théorème 5.3.3. Soient B une base compacte de $\mathcal{S}(U)$, μ une mesure de Radon sur B et A une partie de U et soit $s = \int_B p d\mu(p)$. Alors s est finement surharmonique dans U

et $\widehat{R}_s^A = \int_B \widehat{R}_p^A d\mu(p)$. En particulier la fonction $\int_B \widehat{R}_p^A d\mu(p)$ est finement surharmonique dans U.

Théorème 5.3.4. Soit B une base compacte et soit $u \in \mathcal{S}(U)$. Alors il existe une mesure de Radon unique μ sur B portée par l'ensemble $Ext(B)$ des éléments extrémaux de B telle que $u = \int_B p d\mu(p)$.

Preuve. On suppose que $u \neq 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha u \in B$. Le cône $\mathcal{S}(U)$ étant réticulé pour l'ordre spécifique d'après [35, p. 131], donc, d'après le théorème de représentation intégrale de Choquet, il existe une mesure de probabilité unique ν sur B, portée par $Ext(B)$ et de barycentre ν. On a donc $\alpha u = \int_B p d\nu(p)$. La mesure $\mu = \frac{1}{\alpha}\nu$ répond aux conditions du théorème. □

La mesure μ associée à $u \in \mathcal{S}(U)$ dans le théorème précédent sera appelée la mesure maximale représentant u. □

5.4 Noyau de Green fin et représentation intégrale des potentiels fins et des fonctions invariantes.

On se place maintenant dans le cadre d'un espace harmonique de Brelot Ω à base dénombrable satisfaisant l'axiome de domination et l'hypothèse d'unicité, c'est-à-dire l'hypothèse de proportionnalité des potentiels de même support ponctuel. D'après [51, Théorème 18.1 et Proposition 18.1], Ω admet un noyau de Green G, c'est-à-dire une fonction $G : \Omega \times \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ telle que

1. Pour tout $y \in \Omega$, la fonction $G(., y)$ est un potentiel dans Ω harmonique dans $\Omega \setminus \{y\}$.

2. G est s.c.i sur $\Omega \times \Omega$ et continue en dehors de la diagonale de $\Omega \times \Omega$.

On suppose de plus que la topologie de Ω possède une base formée d'ouverts complétement déterminants. D'après R-M. Hervé [51, Chapitre VI] on peut définir sur Ω une structure d'espace harmonique (de Brelot) adjoint, dans laquelle la fonction G^* définie par $G^*(x, y) = G(y, x)$ est un noyau de Green.

Pour montrer l'existence d'un noyau de Green fin > 0 sur U, Fuglede [41] suppose que la topologie fine et la topolgie fine adjointes sont identiques. Dans la suite nous nous plaçons dans un cadre un peu plus général où l'on suppose seulement que la topologie fine est moins fine que la topologie fine adjointe. Les résultats des paragraphes précédents s'appliquent à ce cadre. Nous montrerons aussi que l'hypothèse que la topologie fine est moins fine que la topologie fine adjointe est nécessaire (et suffisante) pour l'existence d'un noyau de Green fin > 0 dans U.

Soit U un domaine fin de Ω. Pour tout $y \in U$, la fonction $\widehat{R}^{\complement U}_{G(.,y)}$ est finement harmonique dans U si $\{y\}$ n'est pas polaire et dans $U \setminus \{y\}$ si $\{y\}$ est polaire d'après [35, Theorem 11.13, p. 127]. On note $G_U(.,y)$ la fonction finement surharmonique dans U, définie sur $U \setminus \{y\}$ par

$$G_U(x,y) = G(x,y) - \widehat{R}^{\complement U}_{G(.,y)}(x),$$

et éventuellement prolongée par continuité fine au point y si $\{y\}$ est polaire (cf. [5, Theorem 9.15, p. 98]).

Lemme 5.4.1. Soit $p = \int G(.,y)d\mu(y)$ un potentiel sur Ω harmonique en dehors d'un compact K de Ω, où μ est une mesure de Radon sur Ω. Alors la mesure μ est portée par K.

Preuve. Soit ω un ouvert relativement compact tel que $\overline{\omega} \subset \Omega \setminus K$. On a $\int G(.,y)d\mu(y) = \int_\omega G(.,y)d\mu(y) + \int_{\Omega\setminus\omega} G(.,y)d\mu(y)$, et donc la fonction $\int_\omega G(.,y)d\mu(y)$ est harmonique dans le complémentaire de K. D'autre part il est bien connu que la fonction $\int_\omega G(.,y)d\mu(y)$ est harmonique dans $\Omega \setminus \overline{\omega}$, donc dans un voisinage de K. Il en résulte que la fonction $\int_\omega G(.,y)d\mu(y)$ est harmonique dans Ω, donc nulle car elle minore le potentiel p. On en déduit que $\mu(\omega) = 0$. L'ouvert ω étant arbitraire et l'espace Ω à base dénombrable, donc $\mu(\Omega \setminus K) = 0$, c'est-à-dire que μ est portée par K. $\square$

Lemme 5.4.2. L'ensemble $A = \{y \in U : G_U(.,y) = 0\}$ est polaire.

Preuve. Ici les balayées sont prises dans Ω. Soit K un compact $\subset A$ et soit p un potentiel strict, fini et continu dans Ω. D'après [51, Théorème 18.2, p. 481], il existe une mesure $\mu \geq 0$ telle que $\widehat{R}^K_p = G_\mu = \int G(.,y)d\mu(y)$. La fonction $\widehat{R}^K_p$ est harmonique dans $\Omega \setminus K$, donc la mesure μ est portée par K d'après le lemme précédent. D'autre part on a $\widehat{R}^{\complement U}_{\widehat{R}^K_p} = \int \widehat{R}^{\complement U}_{G(.,y)} d\mu(y)$ d'après [? , Théorème 22.4, p. 508]. La mesure μ étant portée par K et, pour tout $y \in K$, on a $\widehat{R}^{\complement U}_{G(.,y)} = G(.,y)$ car U est supposé régulier, donc $\widehat{R}^K_p = \widehat{R}^{\complement U}_{\widehat{R}^K_p}$. La fonction $\widehat{R}^K_p$ est harmonique dans $\Omega \setminus K$ et la fonction $\widehat{R}^{\complement U}_{\widehat{R}^K_p}$ est finement harmonique dans U, on déduit de l'égalité précédente que $\widehat{R}^K_p$ est finement harmonique dans Ω, donc elle est harmonique dans Ω d'après [35, Theorem 9.8, p. 87] puisqu'elle est localement bornée. Comme p est un potentiel et $\widehat{R}_p^K \leq p$, il en résulte que $\widehat{R}_p^K = 0$, et donc que K est polaire d'après le critère de polarité de [51, p. 434]. Ainsi tout compact contenu dans A est polaire, il résulte du théorème de capacitabilité de Choquet que A est polaire puisqu'il est borélien, donc analytique dans l'espace à base dénombrable Ω. $\square$

Corollaire 5.4.1. Si les potentiels adjoints de même support ponctuel sont proportionnels, alors l'ensemble $A = \{x \in U : G_U(x, .) = 0\}$ est polaire.

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme précédent au noyau G^* et d'utiliser le lien entre balayage et balayage adjoint (cf. [51, p. 550]) et le fait qu'il y a identité entre les ensembles polaires et les ensembles polaires adjoints, d'après [51, Théorème 32.1]. $\square$

Proposition 5.4.1. Si U est un ouvert fin adjoint, alors on a $G_U(x, y) > 0$ pour tout couple $(x, y) \in U^2$.

Preuve. Soit $x \in U$. D'après le Lemme 4.1, l'ensemble $A = \{z \in U : G_U(x, z) = 0\}$ est polaire. Comme les ensembles polaires et les ensembles polaires adjoints sont identiques en vertu de [51, Théorème 32.1], on en déduit que A est polaire adjoint, donc l'intérieur fin de A en topologie fine adjointe est vide. Soit ω une composante finement connexe adjointe de $U \setminus \{x\}$, alors $\omega \setminus A \neq \emptyset$, donc il existe $z \in \omega$ tel que $G_U(x, z) > 0$. La fonction $y \mapsto G_U(x, y)$ est finement surharmonique adjointe ≥ 0 sur $U \setminus \{x\}$ d'après [51, Lemme 30.1 et Théorème 31.1] et [35, Theorem 11.13, p. 127]. Elle est non identiquement nulle sur $\omega \setminus \{y\}$, donc $G_U(x, y) > 0$ pour tout $y \in \omega \setminus \{y\}$ d'après [35, Theorem 12.6, p. 150]. On en déduit que $G_U(x, y) > 0$ pour tout $y \in U$. La proposition est démontrée. $\square$

Le théorème suivant se démontre exactement comme [37, Theorem, p. 203] :

Théorème 5.4.1. Pour tout $y \in U$, la fonction $x \mapsto G_U(x, y)$ est un potentiel fin dans U finement harmonique dans $U \setminus \{y\}$. Tout potentiel fin vérifiant cette condition est de la forme $\alpha G_U(., y)$, où α est un réel ≥ 0.

Remarque 5.4.1. De même, si U est un ouvert fin adjoint, alors pour tout $x \in U$, la fonction $y \mapsto G_U(x, y)$ est un potentiel fin adjoint dans U.

Définition 5.4.1. La fonction $(x, y) \mapsto G_U(x, y)$ est appelée le noyau de Green fin de U.

Proposition 5.4.2. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $G_U(., y) > 0$ pour tout $y \in U$.

2. U est un ouvert fin adjoint.

Preuve. L'implication $2 \Longrightarrow 1$ a été établie dans la preuve de la proposition 5.4.1. Montrons l'implication inverse. Supposons que $G_U(.,y) > 0$ pour tout $y \in U$. Soit $x \in U$, posons $U_x = \{y \in \Omega \setminus \{x\} : G(x,y) > \widehat{R}^{\complement U}_{G(.,y)}(x)\}$. Alors U_x est un ouvert fin adjoint puisque les fonctions $y \mapsto G(.,y)$ et $\widehat{R}^{\complement U}_{G(.,y)}$ sont surharmoniques adjointes, donc continues en topologie fine adjointe. Soient $x_1, x_2 \in U$ tels que $x_1 \neq x_2$, alors on a $U = U_{x_1} \cup U_{x_2}$, et donc U est un ouvert adjoint. □

Une fonction $h \in \mathcal{S}(U)$ est dite invariante si elle est orhtogonale pour l'ordre spécifique (ordre défini par le cône $\mathcal{S}(U)$) à la bande $\mathcal{P}(U)$ des potentiels fins dans U. L'ensemble des fonctions invariantes de $\mathcal{S}(U)$ est noté $\mathcal{H}_i(U)$. C'est un cône convexe et une bande de $\mathcal{S}(U)$. Toute fonction $u \in \mathcal{S}(U)$ admet une décomposition unique de la forme $u = p + h$, où p est un potentiel fin et h est une fonction invariante dans U. Les fonctions invariantes jouent donc le rôle des fonctions harmoniques positives dans la décomposition de Riesz des fonctions surharmoniques positives dans un ouvert en topologie initiale de Ω.

Nous dirons qu'une fonction $u \in \mathcal{S}(U)$ est extrémale si elle appartient à une génératrice extrémale de $\mathcal{S}(U)$.

Proposition 5.4.3. Toute fonction extrémale de $\mathcal{S}(U)$ est ou bien une fonction invariante ou bien un potentiel fin.

Proposition 5.4.4. Pour tout $y \in U$, la fonction $G_U(.,y)$ est extrémale.

Preuve. Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{S}(U)$ tels que $u_1 + u_2 = G_U(.,y)$, alors u_1 et u_2 sont des potentiels fins finement harmoniques dans $U \setminus \{y\}$, donc proportionnelles à $G_U(.,y)$ d'après le théorème 5.4.1, donc $G(.,y)$ est extrémale. □

Dans toute la suite on supposera que la topologie fine sur Ω est moins fine que la topologie fine adjointe. Les résultats suivants se démontrent exactement comme les théorèmes 2.3 et 2.4 de [31] :

Théorème 5.4.2. Tout potentiel fin extrémal de $\mathcal{S}(U)$ est de la forme $\alpha G_U(.,y)$ où $\alpha \geq 0$ et $y \in U$.

Théorème 5.4.3. Soient $h \in \mathcal{S}(U)$ et $x_0 \in U$ tel que $h(x_0) < +\infty$. Pour tout entier $n >$ posons $V_n = \{y \in U : G_U(.,y) > \frac{1}{n}\}$. Alors h est invariante si et seulement si $\widehat{R}_h^{\complement V_n} = h$ pour tout n.

Proposition 5.4.5. Toute fonction invariante est finement harmonique dans le complémentaire de l'ensemble polaire où elle vaut $+\infty$.

Preuve. Soit h une fonction invariante et $E = \{x \in U : h(x) = +\infty\}$. L'ensemble E est polaire et $U \setminus E$ est donc un ouvert fin d'après [35, p. 33]. Avec les notations du théorème précédent, on a $\widehat{R}_h^{\complement V_n} = h$ pour tout n. Donc la fonction h est finement harmonique dans $V_n \setminus E \cap V_n$, pour tout n, et par suite elle est finement harmonique dans $\cup_n (V_n \setminus E \cap V_n) = U \setminus E$. □

Proposition 5.4.6. Soient $u \in \mathcal{S}(U)$ et h invariante. Alors $h \leq u$ si et seulement si $h \prec u$.

Preuve. On a évidemment $h \prec u \implies h \leq u$. Montrons l'implication inverse. D'après la proposition précédente, la fonction h est finement harmonique dans l'ouvert fin $V = U \setminus E$, où E est l'ensemble polaire $E = \{x \in U : h(x) = +\infty\}$. Donc $u - h$ est finement surharmonique ≥ 0 dans $U \setminus E$, et par suite elle se prolonge, d'après le principe de prolongement par continuité fine [35, Theorem 9.15, p. 98], de manière unique, en une fonction finement surharmonique $s \geq 0$ dans U et on a $u = h + s$ q.p., donc partout, ce qui prouve bien que $h \prec u$. □

Définition 5.4.2. Une fonction invariante extrémale sera dite minimale si elle est extrêmale, en d'autres termes h appartient a un rayon extrême du cône $\mathcal{S}(U)$.

□

5.5 Frontière de Martin d'un domaine fin et représentation intégrale des fonctions invariantes

Soit B une base compacte du cône $\mathcal{S}(U)$ et soit Φ une forme affine continue ≥ 0 sur $\mathcal{S}(U)$ telle que

$$B = \{u \in \mathcal{S}(U) : \Phi(u) = 1\}.$$

Alors $\Phi(u) > 0$ sauf pour $u = 0$. Considérons l'application $\varphi : U \longrightarrow B$ définie par

$$\varphi(y) = P_y = \frac{G_U(.,y)}{\Phi(G_U(.,y))},$$

et identifions $y \in U$ avec $\varphi(y) = P_y \in B$ et donc U avec $\varphi(U)$. La topologie induite sur U par celle de B sera appelée topologie naturelle.

Notons $\overline{U}$ l'adhérence de U dans B (pour la topologie naturelle), et posons $\Delta(U) = \overline{U} \setminus U$. Alors $\overline{U}$ est compact dans B, on l'appellera compactification (ou compactifié) de Martin de U, et $\Delta(U)$ sera appelée la frontière de Martin de U.

Si B et B' sont deux bases compactes de $\mathcal{S}(U)$, les compactifications de U relative à B et B' sont clairement homéomorphes.

Dans tout le reste de cet article nous fixons une base B du coône $\mathcal{S}(U)$ et une forme affine continue $\Phi : \mathcal{S}(U) \longrightarrow]0, +\infty[$ définissant cette base, c'est-à-dire telle que $B = \{u \in \mathcal{S}(U); \Phi(u) = 1\}$. C'est par rapport à cette base que nous considérons la compactification de Martin $\overline{U} \subset B$ et la frontière de Martin $\Delta(U) = \overline{U} \setminus U$ de U.

Nous dirons qu'une mesure positive sur B est portée par un borélien A de B si $\mu(B \setminus A) = 0$.

On note $Ext(B)$ l'ensemble des éléments extrémaux de B et on pose $Ext_p(B) = \mathcal{P}(U) \cap Ext(B)$ et $Ext_i(B) = \mathcal{H}_i(U) \cap Ext(B)$. On rappelle d'après Choquet que comme B est métrisable, alors $Ext(B)$ est un G_δ de B.

Remarque 5.5.1. D'après le théorème 5.4.2, on a $Ext_p(B) = U$.

Proposition 5.5.1. Soit (A_n) une suite croissante de compacts de Ω telle que $\cup_n A_n = \Omega$. Pour tout réel $\alpha > 0$ et tout entier l, l'ensemble $A_{\alpha,l} = \{y \in U : \Phi(G(.,y)) \geq \alpha\} \cap A_l$ est compact en topologie naturelle.

Preuve. Soit (y_n) une suite de points $A_{\alpha,l}$. D'après la compacité de $\mathcal{S}(\mathcal{U}) \cup \{+\infty\}$ et A_l, on peut trouver une sous-suite (y_{n_k}) de (y_n) convergente vers un point y de A_l telle que les suites $(G_U(., y_{n_k}))$ et $(\widehat{R}^{\complement U}_{G(.,y_{n_k})})$ convergent dans $\mathcal{U}_+(U) = \mathcal{S}(U) \cup \{+\infty\}$ respectivement vers une fonction s et $\widehat{\liminf} \widehat{R}^{\complement U}_{G(.,y_{n_k})}$. Ces deux fonctions appartiennent à $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ et on a

$$s + \widehat{\liminf} \widehat{R}^{\complement U}_{G(.,y_{n_k})} = G(., y).$$

Or on a $\widehat{\liminf} \widehat{R}^{\complement U}_{G(.,y_{n_k})} \geq \widehat{R}^{\complement U}_{G(.,y)}$, et donc $s \leq G(., y) - \widehat{R}^{\complement U}_{G(.,y)} = G_U(., y)$. Donc la fonction s est un potentiel fin dans U, finement harmonique dans $U \setminus \{y\}$ puisque $s \prec G(., y)$ (dans U). On en déduit d'après le théorème 5.4.1, que $s = \gamma G_U(., y)$ pour un

$\gamma \in [0,1]$. Or on a $\Phi(s) \geq \alpha$, donc $s > 0$ et par suite $\gamma > 0$ et $y \in U$, et on a $\Phi(G_U(.,y)) = \frac{1}{\gamma}\Phi(s) \geq \alpha$. Donc $y \in A_{\alpha,l}$. On en déduit que $A_{\alpha,l}$ est compact. □

Proposition 5.5.2. Les ensembles $U = Ext_p(B)$ et $Ext_i(B)$ sont des boréliens de B.

Preuve. En effet, on a $Ext_p(B) = U = \cup_{k\in^*,l\in} A_{\frac{1}{k},l}$ d'après le théorème 4.11, où les $A_{\alpha,l}$ sont les ensembles de la proposition 5.5.1. Donc $Ext_p(B)$ est un K_σ puisque d'après la proposition précédente chacun des ensembles $A_{\frac{1}{k},l}$ est un compact de B. D'autre part, on a $Ext_i(B) = Ext(B) \setminus Ext_p(B)$, donc $Ext_i(B)$ est un borélien de B. □

Proposition 5.5.3. Soit μ une mesure de probabilité sur B portée par $Ext(B)$ et s le barycentre de μ. Alors s est un potentiel fin (resp. une fonction invariante) si et seulement si μ est portée par $Ext_p(B)$ (resp. $Ext_i(B)$).

Preuve. Soient $x_0 \in U$ et (V_n) la suite d'ouverts fins du théorème 5.4.3. On a $s = \int_B u d\mu(u) = \int_{Ext_p(B)} p d\mu(p) + \int_{Ext_i(B)} k d\mu(k)$. Si μ est portée par $Ext_i(B)$, on a $s = \int_{Ext_i(B)} k d\mu(k)$, et donc pour tout $n > 0$, on a, d'après le théorème 4.12 et le théorème 3.12, $\widehat{R}_s^{\complement V_n} = \int_{Ext_i(B)} \widehat{R}_k^{\complement V_n} = \int k d\mu(k) = s$, et par suite s est invariante d'après le théorème 4.12. Réciproquement, si s est invariante, on a $\widehat{R}_s^{\complement V_n} = s$ et $\widehat{R}_k^{\complement V_n} = k$ pour tout n et toute fonction $k \in Ext_i(B)$. On en déduit que $\widehat{R}_s^{\complement V_n} = s$ pour tout n. En particulier on a $\int_{Ext_p(B)\cap V_n} \widehat{R}_p^{\complement V_n} d\mu(p) = \int_{Ext_p(B)\cap V_n} p d\mu(p)$, soit $\int_{V_n} \widehat{R}_p^{\complement V_n} d\mu(p) = \int_{V_n} p d\mu(p)$ pour tout n. On a donc $\int_{V_n} \widehat{R}_p^{\complement V_n}(x_0) d\mu(p) = \int_{V_n} p(x_0) d\mu(p)$, et par suite $\mu(V_n \setminus \{x_0\}) = 0$. Il en résulte que $\mu(U \setminus \{x_0\}) = \mu(\cup_n V_n \setminus \{x_0\}) = 0$. Comme x_0 peut être choisi arbitrairement, on en déduit que $\mu(Ext_p(B) = \mu(U) = 0$, et par suite μ est portée par $Ext_i(B)$. □

On a $Ext(B) \subset \overline{U}$ et, d'après le théorème 5.4.2, $Ext_p(B) = U$. Il en résulte que $Ext_i(B) \subset \overline{U}$. Posons $\Delta(U) = \overline{U} \setminus U$ et $\Delta_1(U) =_i (B)$. Les ensembles $\Delta(U)$ et $\Delta_1(U)$ sont respectivement appelés la frontière de Martin de U et la frontière de Martin minimale de U.

Corollaire 5.5.1. Les ensembles $\Delta(U)$ et $\Delta_1(U)$ sont des boréliens de $\overline{U}$.

Théorème 5.5.1. Soit $s \in \mathcal{P}(U)$, resp. $s \in \mathcal{H}_i(U)$. Alors il existe une mesure unique μ une mesure sur B portée par $Ext_p(B)$, resp. $Ext_i(B)$, telle que $s = \int_B u d\mu(u)$.

Preuve. Soit $s \in \mathcal{S}(U)$. D'après le théorème 5.3.4, il existe une mesure de Radon sur B portée par $Ext(B)$ telle que $s = \int_B u d\mu(u) = p + h$, où $p = \int_{Ext_p(B)} u d\mu(u)$ et

$h = \int_{Ext_i(B)} ud\mu(u)$. D'après le théorème 5.5.3, p est un potentiel fin $\prec s$ et h est une fonction invariante $\prec s$. Supposons que s est un potentiel fin, alors $h = 0$ et donc $s = \int_{Ext_p(B)} ud\mu(u)$. D'après l'unicité de la représentation intégrale, on a donc $\mu = 1_{Ext_p(B)}\mu$ et par suite μ est portée par $Ext_p(B)$. De même si s est une fonction invariante, alors $p = 0$ et μ est portée par $Ext_i(B)$. □

Proposition 5.5.4. Pour tout $\alpha > 0$ et tout entier l, la fonction $g : A_{\alpha,l} \longrightarrow \mathcal{S}(U)$ définie par $g(y) = G_U(.,y)$ est continue en topologie initiale.

Preuve. Soit (y_n) une suite de points de $A_{\alpha,l}$ qui converge en topologie initiale vers $y \in A_{\alpha,l}$. Comme $A_{\alpha,l}$ est compact en topologie naturelle, pour toute valeur d'adhérence $z \in A_{\alpha,l}$ de (y_n) en topologie naturelle, on peut extraire de (y_n) une sous-suite (y'_n) qui converge en topologie naturelle vers le point z. En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 4.15, il vient $y = z$ et que par suite $\lim G_U(.,y_n) = G_U(.,y)$. □

Corollaire 5.5.2. Soit $x \in U$. Alors les fonctions $U \ni y \mapsto G_U(.,y)$ et $U \ni y \mapsto \Phi(G_U(.,y))$ sont boréliennes.

Comme conséquence du théorème 5.5.1, nous retrouvons d'une manière très simple le théorème de représentation intégrale de Fuglede (cf. [39]) :

Théorème 5.5.2. Soit p un potentiel fin sur U. Alors il existe une mesure de Borel unique μ positive sur U telle que

$$p(x) = \int G_U(x,y)d\mu(y), \ \forall x \in U.$$

Preuve. D'après le théorème 5.5.1 il existe une mesure ν unique sur B portée par $Ext_p(U)$ telle que

$$p = \int_{Ext_p(B)} qd\nu(q) = \int_U \frac{G_U(.,y)}{\Phi(G(.,y))} d\nu(y).$$

Pour tout $x \in U$ les fonctions $G_U(x,y)$ et $\Phi(G_U(.,y)$ sont boréliennes sur U en topologie naturelle, donc en topologie initiale puisque tout borélien naturel de U est un borélien de U en topologie initiale. Soit la mesure $\mu = \frac{1}{\Phi(G(.,y))}\nu$, alors μ répond à la condition du théorème. □

Pour tout $Y \in \overline{U}$ considérons la fonction $K(.,Y) \in B \subset \mathcal{S}(U)\backslash\{0\}$ définie sur U par $K(x,Y) = \phi(Y)(x)$ si $Y \in U$ et $K(.,Y) = Y$ si $Y \in \Delta(U)$. Il est clair que l'application $Y \longmapsto K(.,Y)$ est une bijection of $\overline{U}$ sur lui même.

Définition 5.5.1. La fonction $K : U \times \overline{U} \longrightarrow]0,+\infty]$ définie par $K(x,Y) = K(.,Y)(x)$ est appelée le noyau de Riesz-Martin (fin) de U, et sa réstriction à $U \times \Delta(U)$ est appelée le noyau de Martin (fin) de U.

Proposition 5.5.5. Le noyau de Riesz-Martin $K : U \times \overline{U} \longrightarrow]0,+\infty]$ possède les propriétés suivantes, $\overline{U}$ étant muni de la topologie naturalle :

(i) Pour tout $x \in U$, $K(x,.)$ est s.c.i sur $\overline{U}$.

(ii) Pour tout $Y \in \overline{U}$, $K(.,Y) \in \mathcal{S}(U)$ est finement continue sur U.

(iii) K is s.c.i sur $U \times \overline{U}$ quand U est muni de la topologie fine et $\overline{U}$ muni de la topologie naturelle.

Preuve. Le (i) résulte du corollaire 5.3.5 appliqué à $u = K(.,Y)$, où $K(.,Y)$ est identifié à Y. Le (ii) est évident. Prouvons le (iii). Soit $x_0 \in U$, $Z \in \overline{U}$, et soit (V_j) un système fondamental de voisinages de Z dans $\overline{U}$ tel que $V_{j+1} \subset V_j$ pour tout j. Étant donnée une constante $c > 0$, considérons la suite croissante de fonctions

$$k_j := \inf_{Y \in V_j} K(.,Y) \wedge c$$

et leur régularisées s.c.i. $\widehat{k}_j \in \mathcal{S}(U)$. D'après la propriété de Brelot, cf. [39], il existe un voisinage fin H de x_0 dans U tel que H est compact en topologie intiale et les réstrictions des fonctions $\widehat{k}_j \in \mathcal{S}(U)$ et $K(.,Z) \wedge c \in \mathcal{S}(U)$ à H soient continues sur H (en topologie initiale). D'après (i) on a simplement sur U

$$K(.,Z) \wedge c = \liminf_{Y \to Z} K(.,Y) \wedge c = \sup_j \inf_{Y \in V_j} K(.,Y) \wedge c,$$

qui est quasi-partout, et donc partout sur U égale à $\sup_j \widehat{\inf_{Y \in V_j}} K(.,Y) \wedge c \in \mathcal{S}(U)$. D'après le corollaire 5.3.3 et le théorème de Dini, il existe pour tout $\epsilon > 0$ un entier $j_0 > 0$ tel que

$$K(.,Z) \wedge c = \sup_j \widehat{\inf_{Y \in V_j}} K(.,Y) \wedge c = \sup_j \widehat{k}_j < \widehat{k}_i + \epsilon$$

sur H pour tout $i \geq j_0$. Pour tout voisinage fin W de x_0 tel que $W \subset H$ on a

$$\inf_{x\in W, Y\in V_j} K(x,Y)\wedge c = \inf_{x\in W} k_j(x) \geq \inf_{x\in W} \widehat{k}_j(x)$$

$$\geq \inf_{x\in W} K(x,Z)\wedge c - \epsilon \geq K(x_0,Z)\wedge c - 2\epsilon$$

pour $j \geq j_0$. L'assertion (iii) résulte en faisant $\to 0$ et $c \to +\infty$. □

Remarque 5.5.2. Un ensemble $A \subset U$ est dit presque borélien s'il ne diffère d'un borélien (en topologie initiale) que par un ensemble polaire. On note $\mathcal{B}(U)$, resp. $\mathcal{B}^*(U)$, la tribu des ensembles boréliens (en topologie initiale), resp. presque boréliens de U. Tout ouvert fin $V \subset U$ est presque borélien car son régularisé $r(V)$ est F_σ (en topologie initiale) et $r(V)\setminus V$ est polaire. Il en résulte que tout ouvert W de $U\times\overline{U}$, où U est muni de la topologie fine et $\overline{U}$ de la topologie naturelle, appartient à la tribu $\mathcal{B}^*(U)\times\mathcal{B}(\overline{U})$ engendrée par les ensembles $A_1 \times A_2$ où $A_1 \in \mathcal{B}^*(U)$ et $A_2 \in \mathcal{B}(\overline{U})$, c'est à dire, A_2 un borélien de $\overline{U}$ en topologie naturelle. En vertu de la proposition 5.5.5 (iii), tout ensemble de la forme $\{(x,Y)\in U\times\overline{U} : K(x,Y) > \alpha\}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ est un ouvert de $U\times\overline{U}$, et donc appartient à $\mathcal{B}^*(U)\times\mathcal{B}(\overline{U})$. Ceci signifie que le noyau de Riesz-Martin kernel K est mesurable relativement à $\mathcal{B}^*(U)\times\mathcal{B}(\overline{U})$.

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 5.5.3. Pour toute fonction $u\in\mathcal{S}(U)$ invariante, il existe une mesure de Radon unique μ sur $\overline{U}$ portée par $\Delta_1(U)$ telle que $u = \int K(.,Y)d\mu(Y)$.

Corollaire 5.5.3. Pour toute fonction $u\in\mathcal{S}(U)$, il existe une mesure de Radon unique μ sur $\overline{U}$ portée par $U\cup\Delta_1(U)$ telle que $u = \int K(.,Y)d\mu(Y)$.

□

5.6 Décomposition de Brelot des fonctions finement surharmoniques ≥ 0

Dans [17], Brelot a montré que si $u \in \mathcal{S}(\Omega)$ et $A \subset \Omega$, alors u admet une décomposition $u = u_1 + u_2$, où $\widehat{R}^A_{u_1} = u_1$ et $\widehat{R}^{\complement A}_{u_2} = u_2$, avec unicité de la décomposition si on prend pour u_2 la plus grande minorante spécifique v de u qui soit autoréduite sur $\complement A$, c'est-à-dire $\widehat{R}^{\complement A}_v = v$. Comme application de la représentation intégrale nous allons étendre ces résultats aux fonctions finement surharmoniques ≥ 0.

Lemme 5.6.1. Soient u un élément extrémal de $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ et $A \subset U$. Alors on a $u = \widehat{R}_u^A$ ou $u = \widehat{R}^{\complement A}$.

Preuve. Supposons $u \neq \widehat{R}_u^A$ (et donc en particulier $u \neq 0$) et soit $f = u - \widehat{R}_u^A$. Alors $\widehat{R}_f > 0$ et on a $\widehat{R}_f \prec u$ d'après le lemme de [35, p. 129]. Comme u est extrémal, on a $u = \alpha \widehat{R}_f$, avec $\alpha > 0$. D'autre part, on a $f = 0$ q.p. sur A, donc $\widehat{R}_f = \widehat{R}_f^{\complement A}$ et par suite $\widehat{R}_f = \widehat{R}_{\widehat{R}_f}^{\complement A}$. Donc $u = \widehat{R}_u^{\complement A}$. □

Proposition 5.6.1. Soient B une base compacte du cône $\mathcal{S}(U)$ et $A \subset U$. Alors les ensembles $Ext_A(B) = \{u \in Ext(B) : \widehat{R}_u^A = u\}$ est un borélien de B.

Preuve. On peut supposer les constantes surharmoniques. Soit μ la mesure de base de la résolvante (V_λ) de la section 2. On suppose que les constantes sont μ-intégrables. Comme deux fonctions surharmoniques positives égales μ-p.p. sont nécessairement égales partout, on voit que $Ext_E(B) = \cap_n C_n$, où pour tout entier n, $C_n = \{u \in B : \int u \wedge n d\mu = \int \widehat{R}_u^A \wedge n d\mu\}$. Il suffit donc de montrer que pour tout n l'ensemble C_n est un borélien de B. Or cela provient tout simplement du fait facile à montrer que les fonctions $u \mapsto \int u \wedge n d\mu$ et $u \mapsto \int \widehat{R}_u^A \wedge n d\mu$ sont s.c.i sur B. □

On dit que u est autoréduite sur $A \subset U$ si $\widehat{R}_u^A = A$.

Théorème 5.6.1. Soient $u \in \mathcal{S}(U)$ et $A \subset U$. Alors il existe une décomposition $u = u_1 + u_2$ de u dans $\mathcal{S}(U)$ telle que

1. u_1 est autoréduite sur A.

2. u_2 est autoréduite sur $\complement A$.

Preuve. Soit $u \in \mathcal{S}(U)$ et μ la mesure maximale B représentant u. On a $u = \int p d\mu(p) = \int_{Ext_A(B)} p d\mu(p) + \int_{Ext(B) \setminus Ext_A(B)}$. D'après le lemme 5.6.1 on a $Ext(B) = Ext_A(B) \cup Ext_{\complement A}(B)$, et pour tou $p \in Ext(B) \setminus Ext_A(B)$, on a $\widehat{R}_p^{\complement A} = p$. Posons $u_1 = \int_{Ext_A(B)} p d\mu(p)$ et $u_2 = \int_{Ext(B) \setminus Ext_A(B)}$. On a donc $u = u_1 + u_2$ et, d'après le théorème 5.3.3, $\widehat{R}_{u_1}^A = \int_{Ext_A(B)} \widehat{R}_p^A d\mu(p) = \int_{Ext(B)} p d\mu(p) = u_1$ et $\widehat{R}_{u_2}^A = \int_{Ext(B) \setminus Ext_A(B)} \widehat{R}_p^{\complement A} d\mu(p) = \int_{Ext(B) \setminus Ext_A(B)} p d\mu(p) = u_2$. □

Remarque 5.6.1. On a l'unicité de la décomposition de u dans le théorème précédent si on impose à u_2 (resp. u_1) d'être la plus grande minorante spécifique de u qui soit autoréduite sur $\complement A$ (resp. sur A).

5.7 Approximation des fonctions invariantes par des fonctions finement harmoniques

Dans [43], Gardiner et Hansen ont montré que si $U = D \cup \partial_i D$, où D est un domaine non régulier de $\mathbb{R}^2$, alors toute fonction invariante minimale dans $U = D \cup \partial_i D$, est finement harmonique d'après un résultat de Brelot (cf. [16, section 7]). Ce qui suggère de poser la question

Si toute fonction invariante minimale dans U est finement harmonique, est-ce que toute fonction invariante est la somme d'une suite de fonctions finement harmoniques positives dans U ?

Nous donnons une réponse trés partielle à cette question (théorème 5.7.1). Plus précisemment, nous montrons que si toute fonction invariante minimale dans U est finement harmonique dans U, alors toute fonction invariante dans U est approchable en topologie naturelle par des fonctions finement harmoniques ≥ 0 dans U.

Proposition 5.7.1. Soient K un compact naturel de $\overline{U}$ tel que $K \subset Ext_i(B)$ et $\mathcal{H}_K(U)$ l'ensemble des fonctions invariantes de la forme $\int kd\mu(k)$, où μ est une mesure de probabilité sur K. Alors $\mathcal{H}_K(U)$ est un convexe compact de $\mathcal{S}(U)$ et $Ext(\mathcal{H}_K(U)) = Ext(B) \cap \mathcal{H}_K(U)$.

Preuve. Il est clair que $\mathcal{H}_K(U)$ est convexe. Montrons qu'il est compact. Soit (μ_j) une suite de mesures de probabilités sur K. On peut extraire de la suite (μ_j) une sous-suite ν_j qui converge vaguement vers une mesure de probabilité μ sur K. Pour toute forme affine continue l sur B, on a $l(\int_K kd\mu(k)) = \int_K l(k)d\mu(k) = \lim l(\int_K kd\nu_j(k)) = l(\lim \int_K kd\nu_j(k))$, donc $\int_K kd\mu(k) = \lim \int_K kd\nu_j(k) \in \mathcal{H}_K(U)$. On en déduit que $\mathcal{H}_K(U)$ est compact. L'inclusion $Ext(B) \cap H_K(U) \subset Ext(\mathcal{H}_K(U))$ est évidente. Montrons l'inclusion inverse. Soit $h \in Ext(\mathcal{H}_K(U))$, et soient $u, v \in \mathcal{S}(U)$ telles que $h = u+v$. On peut trouver deux mesures σ et τ finies sur B, portées par $Ext_i(B)$ telles que $u = \int_B kd\sigma(k)$ et $v = \int_B kd\tau(k)$, et une mesure μ sur K telle que $h = \int_K d\mu(k)$. D'après l'unicité de la représentation intégrale dans le théorème de Choquet, on a $\mu = \sigma + \tau$, et donc σ et τ sont portées par K, et par suite $u, v \in \mathcal{H}_K(U)$. Comme $h \in Ext(\mathcal{H}_K(U))$, on en déduit que u et v sont proportionnelles à h et donc $h \in Ext(B)$. On en déduit l'inclusion $Ext(\mathcal{H}_K(U)) \subset Ext(B) \cap H_K(U)$, et donc l'égalité cherchée. $\square$

Théorème 5.7.1. Supposons que toute fonction invariante minimale dans U est finement harmonique, alors toute fonction invariante dans U est limite naturelle d'une suite de fonctions finement harmoniques dans U.

Preuve. Soit h une fonction invariante (> 0) et μ la mesure sur B portée par $Ext_i(B)$ qui représente h (th. 2.1). On peut trouver une suite (K_n) de compacts de deux à deux disjoints de B contenus dans $Ext_i(B)$ tels que $\mu(B) = \mu(\cup_n K_n)$ et $\mu(K_n) > 0$ pour tout entier n. On a donc $h = \sum_n \int_{K_n} k d\mu(k) = \sum_n \mu(K_n) b(\mu_n)$, où μ_n est la mesure $\frac{1}{\mu(K_n)} 1_{K_n}.\mu$. Pour tout n on a $b(\mu_n) \in \mathcal{H}_{K_n}(U)$ puisque $\mathcal{H}_{K_n}(U)$ est convexe. D'après le théorème de Krein-Milmann, la fonction $h_n = b(\mu_n)$ est limite d'une suite (h_n^i) de combinaisons d'éléments extrémaux de $\mathcal{H}_{K_n}(U)$, donc de fonctions finement harmoniques d'après la proposition précédente et l'hypothèse du théorème. On en déduit que $h = \sum_n h_n$ est limite naturelle d'une suite de fonctions finement harmoniques dans U. □

Corollaire 5.7.1. Soit D un ouvert borné non régulier de $\mathbb{R}^2$, et soit $U = D \cup \partial_i(D)$. Alors toute fonction invariante dans U est la limite naturelle d'une suite de fonctions finement harmoniques dans U.

Preuve. Comme cela est expliqué au début de la section, toute fonction invariante minimale dans U est finement harmonique, le résultat découle aussitôt du théorème précédent. □

Bibliographie

[1] Alfsen, E.M. : Compact Convex Sets and Boundary Integrals, Ergebnisse der Math. Vol. 57, Springer, Berlin, (2001)

[2] Armitage, D.H., Gardiner, S.J. : Classical Potential Theory, Springer,London, 2001.

[3] Bliedtner, J., Hansen, W. : Potential theory. An analytic and probabilistic approch to balayage. Universitex. Springer-Verlag. Berlin, 1986.

[4] Boboc, N. : Bucur, Gh. : Natural localisation and natural sheaf property in standard H-cones of functions. I, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 30, 1985. H-cones.

[5] Boboc, N. : Bucur, Gh., Cornea, A. : Order and convexity in Potential theory, H-cones, Lecture Notes in Mathematics, 853, Springer, Berlin, 1981.

[6] Boboc, N., Bucur, Gh. : Perturbations in exessive structures. Complex Analysis-Fifth Romanian-Finnish Seminar, Part 2 (Bucharest, 1981), Lecture Notes in Math., 1014, Springer, Berlin, (1983)

[7] Bony, J-M. : Opérateurs elliptiques dégénères associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel. Cours du C.I.M.E, Stresa, (1969)

[8] Boukricha, A. : Espaces biharmoniques. Theorie du Potentiel, (Orsay, 1983), 116-148, Lecture Notes in Math., 1096, Springer, Berlin, 1984.

[9] Bouleau, N. : Semi-groupes triangulaire associé à un espace biharmonique. C.R. Aced.Sci. Paris Sr. A-B 288, (1979)

[10] Bouleau, N. : Application de la théorie markovienne du potentiel à l'étude de fonctions biharmoniques et de certains systèmes différentiels et couplage de processus de Markov. Thèse d'État de l'Université Paris VI, Mars (1980)

[11] Bouleau, N. : Couplage de deux semi-groupes droites. C.R. Acad. Sci. Paris Sr. A-B 288(1979)

[12] Bouleau, N. : Espace biharmonique et couplage de processus de Markov. J. Math. Pures Appl, 59, no.2, 187-240, (1980)

[13] Bouleau, N. : Théorie du potentiel associée à certains systèmes différentiels. Math. Ann. 255, no.3, 335-350, (1981)

[14] Brelot, M. : Axiomatique des fonctions harmoniques. Universite de Montreal, (1996)

[15] Brelot, M. : Lectures on Potential Theory, 2d Edition, Tata Institue of Fundamental Research, Bombay, (1967)

[16] Brelot, M : Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin. Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. (N. S.) 23, (1948). 113–138.

[17] Brelot, M. : Sur le théorème de partition de Mme R. M. Hervé, Rocky Mountain J. Math. 10 (1980), no. 1, 293–302.

[18] Constantinescu, C. : Cornea, A. : Potential Theory on Harmonic spaces, Springer Verlag Heidelberg, 1972.

[19] Chadli, M., El Kadiri, M. : Uniform approximation of continuous functions on compact sets by biharmonic functions. Comment. Math. Univ. Carolin. 44, no. 3, 427-435, (2003)

[20] Choquet, G. : *Lectures on Analysis, Vol. II, Mathematical Notes Series*, W.A. Benjamin, Inc., 1968.

[21] Chen, Z.Q., Zhao, Z. : Potential theory for elliptic systems. Ann. Probab. 24, no. 1, 293-319, (1996)

[22] Constantinescu,C., Cornea,A. : Potential Theory on Harmonic Spaces. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1972)

[23] Debiard, A., Gaveau, B. : Potentiel fin et algèbres de fonctions analytiques. I. J. Functional Analysis 16, 289-304, (1974)

[24] Dellacherie, C., Meyer, P.A. : Probabilités et Potentiel, Hermann, Paris 1987, Chap. XII-XVI.

[25] Doob, J.L. : Classical Potential Theory and its Probabilistic cunterparts, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1984)

[26] El Kadiri, M. : Représentation intégrale dans le cadre de la théorie axiomatique des fonctions biharmoniques. Thèse de $3^{ème}$ cycle , Rabat (1986)

[27] El Kadiri, M. : Sur la représentation intégrale en théorie axiomatique des fonctions biharmoniques. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 42, no. 7-8, 579-589, (1997)

[28] El Kadiri, M. : Frontière de Martin biharmonique représentation intégrale des fonctions biharmoniques. Positivity. 6, 129-145, (2002)

[29] El Kadiri, M. : Liouville's theorem and restricted mean property for biharmonic functions. Electron. J. Differential Equations, no. 66, (2004)

[30] El Kadiri, M., Haddad, S. : Comportement des fonctions bi-surharmoniques et problème de Requier fin à la frontière de Martin biharmonique. AlgGroups Geom. 24, 155-186, (2007)

[31] El Kadiri, M. : Sur la représentation intégrale et la décomposition de Riesz des fonctions finements surharmoniques, Positivity 4 (2000), no. 2, 105–114.

[32] El Kadiri, M. : Fonctions séparément finement surharmoniques, Positivity 7 (2003), no. 3, 245–256.

[33] El Kadiri, M., Fuglede, B. : Martin boundary of a fine domain and a Fatou-Naim-Doob theorem for finely superharmonic functions, arXiv :1403.0857.

[34] El Kadiri, M., Fuglede, B. : Sweeping and Dirichlet problem on the Martin boundary of a fine domain, arXiv :1409.7098.

[35] Fuglede, B. : Finely harmonic functions, Lecture Notes in Math., 289, Springer-Verlag, 1972.

[36] Fuglede, B. : Localization in Fine Potential Theory and Uniform Approximation by Subharmonic Functions, J. Funct. Anal. 49, 52-72 (1982).

[37] Fuglede, B. : Sur la fonction de Green pour un domaine fin, Collection of articles dedicated to Marcel Brelot on the occasion of his 70th birthday. Ann. Inst. Fourier 25 (1975), no. 3-4, xxi, 201–206.

[38] Fuglede, B. : Integral representation of fine potentials, Math. Ann. 262 (1983), no. 2, 191–214.

[39] Fuglede, B. : Représentation intégrale des potentiels fins, Comptes Rendus, 300, Série I,129 -132 (1985).

[40] Fuglede, B. : Fine Potential Theory, Lect. Notes in Math., 1344, Springer Verlag, 199-201 (1987).

[41] Fuglede, B. : Finely harmonic mappings and finely holomorphic functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Serie A.I. Mathematica, Helsinki, 2, (1976) 113-127.

[42] Fuglede , B : Fine connectivity and finely harmonic functions. Actes du Congrès International de Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, 513–519. Gauthier-Villars, Paris, (1971).

[43] Gardiner, S.J. : Hansen W. : On the Riesz decomposition of finely superharmonic functions, Adv. Math. 214 (2007), no. 1, 417–436.

[44] Gazzola, F., Sweers, G. : on positivity for biharmonic operator under Steklov boundary conditions. Arch. Ration. Mech. Anal. 188, no. 3, 399-427, (2008)

[45] Gazzola, F., Grunau, H-C., Sweers, G. : Polyharmonic boundary value problem. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains. Lecture Notes in Mathematics, (1991). Springer-Verlag, Berlin, (2010)

[46] Grunau, H-C., Sweers, G. : Positivity properties of elliptic boundary value problems of higher order. Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts, Part8, Athens, (1996). Nonlinear Anal. 30, no. 8, 5251-5258, (1997)

[47] Grunau, H-C., Sweers, G. : Positivity for equations involving polyharmonic operators with Direchlet boundary conditions. Math. Ann, 307, no. 4, 589-626, (1997)

[48] Hansen, W. : Harnack inequalities for Schrodinger operators. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 28, no. 3, 413-470, (1999)

[49] Hansen, W. : Modification of balayage spaces by transitions with application to coupling of PDE's. Nagoya Math. J. 169, 77-118, (2003)

[50] Helms, L. L. : Introduction to potential theory. Pure and Applied Mathematics, Vol. XXII Wiley-Interscience A Dicvision of John Wiley and Sons, New York-London-Sydney, (1969)

[51] Hervé, R.M. : Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel. (French) Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 12, 415-571, (1962)

[52] Hervé, R.M. : Quelques propriétés du faisceau des fonctions harmoniques associé à un opérateur elliptique dégénéré. Annales de l'institut de Fourier, 25, no. 3-4, (1975)

[53] Janssen, K. : On the Martin boundary of weakly coupled balayage spaces. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 51, no. 5-6, 655-664, (2006)

[54] Korn, M. : Mémoire. Bulletin de l'Académie de Carcovie, (1907)

[55] Mayer, P-A. : Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 12, 415-571, (1962)

[56] Mokobodzki, G. : Représentation intégrale des fonctions surharmoniques au moyen des reduites. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15, fasc. 1, 103-112, (1965)

[57] Perkins, T. : Potential Theory on Compact Sets. Thesis (Ph.D.)–Syracuse University. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, (2011)

[58] Poletsky, E. A. : Approximation by harmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 349, no. 11, 4415-4427.

[59] Smyrnélis, E.P. : Axiomatique des fonctions biharmoniques. I. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 25, no. 1, x, 35-97, (1975)

[60] Smyrnélis, E.P. : Axiomatique des fonctions biharmoniques. II. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 26, no. 3, (1976)

[61] Smyrnélis, E.P. : Représentation intégrale dans les espaces biharmoniques. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. 71, 283-394, (1985)

[62] Smyrnélis, E.P. : Harnack's properties of biharmonic functions, Comment. Math. Univ. Carolin. 33, no. 2, 299-302, (1992)

[63] Smyrnélis, E.P. : Couples de Green, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. 12, 319-326, (2002)

[64] Smyrnélis, E.P. : Fonctions biharmoniques adjointes. Ann. Pol. Math. 99, no. 1, 1-21, (2010)

[65] Sweers, G. : Positivity for strongly coupled elliptic system by Green functions estimates. J. Geom. Anal. 4, no. 1, 121-142, (1994)

[66] Sweers, G. : Strong positivity in $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ for elliptic systems. Math. Z. 209, no. 2, 251-271, (1992)

[67] Zaremba, S. : Le problème biharmonnique restreint. Annales scientifiques de l'ENS, 26, (1909)

ROYAUME DU MAROC
Université Mohammed V - RABAT - جامعة محمد الخامس – الرباط –
Faculté des sciences
كلية العلوم
CENTRE D'ETUDES DOCTORALES - SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Résumé

Dans la première partie, Sur l'existence du deuxième noyau de Green et la notion de fonction biharmonique adjointe, nous étudions l'existence et la régularité du deuxième noyau de Green dans un espace biharmonique fort de Brelot.

La deuxième partie, Fonctions harmoniques et biharmoniques sur un compact, est consacrée à la définition et l'étude des fonctions harmoniques et biharmoniques sur un ensemble compact d'un β-espace biharmonique de Brelot.

La troisième partie, Sur la théorie du potentiel de certaines EDP couplées, est consacrée à l'étude de certaines propriétés des solutions et sur-solutions des systèmes de type (S') :

$$L_1(h) = -\mu_1 k$$
$$L_2(k) = -\mu_2 h,$$

sur un domaine de Green de R^n, où L_1 et L_2 sont elliptiques.

La quatrième partie, Sur la représentation intégrale des fonctions finement surharmoniques, traite de la représentation intégrale des fonctions finement surharmoniques positives sur un domaine fin U d'un espace harmonique de Brelot vérifiant certaines conditions.

Mots-clés : Théorie du Potentiel, espace biharmonique, fonctions finement harmoniques, fonctions biharmoniques adjointes, noyau de couplage, mesures de Jensen, couplage d'EDPs.

Abstract

In the first part, On the existence of the biharmonic Green kernels and the adjoint biharmonic functions, we study the existence and the regularity of second Green kernel in a Brelot biharmonic space.

The second part, harmonic and biharmonic functions on compact sets, is consecrated to define and study the harmonic and biharmonic functions on a compact subset of a β-Brelot biharmonic space.

The third part, On the potential theory of some systems of coupled PDEs, is dedicated to the study of some properties of the solutions of systems of type (S'):

$$L_1(h) = -\mu_1 k$$
$$L_2(k) = -\mu_2 h,$$

on a Green domain of R^n, where L_1 and L_2 are tow elliptic linear differential operators.

In the fourth part, On the integral representation of finely superharmonic functions, treats the integral representation of the non-negative finely superharmonic functions on a fine domain U of a Brelot space under certain conditions.

Keywords: Potential theory, biharmonic space, finely harmonic functions, adjoint biharmonic functions, coupling kernel, Jensen's measures, coupling of EDPs.