

N° d'ordre: 3223

THESE

En vue de l'obtention du: **DOCTORAT**

Structure de Recherche : Laboratoire de Mathématiques, Statistique et Applications

Discipline : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Statistique

Présentée et soutenue le: 01/07/2019 par:

Laila Ait Hassou

*Modélisation des dépendances par les copules
avec applications en Economie et en environnement*

JURY :

Mohammadine BELBACHIR	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences, Rabat	Président
Abdelhak ZOGLAT	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences, Rabat	Directeur de thèse
Salah-Eddine EL ADLOUNI	PA, Faculté des sciences, Université de Moncton, Nouveau Brunswick, Canada.	Rapporteur/ Examineur
Khalid El HIMDI	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences, Rabat	Rapporteur/Examineur
El hadj EZZIHID	PH, Faculté juridiques, économiques et Sociales, Université Mohammed V, Rabat.	Examineur
Abdellah OULD KHAL,	PH, Université Mohammed V, Faculté des Sciences, Rabat	Examineur

Année Universitaire : 2018-2019

DÉDICACE

Avec un énorme plaisir, un cœur ouvert et une immense joie, que je dédie mon travail à :

Mes très chers, respectueux et magnifiques parents qui m'ont soutenu tout au long de ma vie, à mes sœurs et frères : "Vous êtes dépensés pour moi sans compter, en reconnaissant de tous les sacrifices consentis par tous et chacun pour me permettre d'atteindre cette étape de ma vie"

A mes chers amis Abderahim ASLIMANI , Habiba SEHLAOUI, Sara ZOUIRI, Zahakia EL FAIZ, Farida Dakhissi : "Je tiens à vous remercier pour votre soutien tout au long de mon travail"

A mes oncles, tantes, cousins et cousines : "Vous avez de près ou de loin contribué à ma formation, mes sincère gratitude"

Je leur dédie mes réussites passées et à venir.

AVANT-PROPOS

Les travaux de cette thèse de doctorat ont été réalisés et effectués au sein du laboratoire de Mathématiques, Statistique et Applications (LMSA) de la Faculté des Sciences de Rabat sous la direction du Professeur Abdelhak ZOGLAT.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude au Professeur Abdelhak ZOGLAT, professeur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour avoir guidé mes recherches, ses idées, ses conseils m'ont aidé à développer mes connaissances en Mathématiques, aussi pour son attention, sa patience et pour m'avoir fourni une excellente atmosphère pour faire de la recherche. Sans ses conseils et ses commentaires constants, ce doctorat n'aurait pas été réalisable. Je me sens très redevable de tout l'effort qu'il a déployé pour rendre mon séjour agréable au sein de laboratoire Mathématiques, Statistique et Applications (LMSA). Honnêtement, je ne saurai partir sans lui relater ma totale satisfaction sous sa direction.

Je voudrais exprimer ma gratitude au Professeur BELBACHIR Mohammadine, professeur à la Faculté des Sciences Rabat, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je veux aussi le remercier pour ses qualités humaines et ses encouragements.

Mes remerciements vont également à Monsieur EL ADLOUNI Salah-Eddine, professeur à l'Université de Moncton Nouveau Brunswick Canada, d'avoir accepté de participer au jury en tant que rapporteur de cette thèse. Je le remercie pour l'intérêt et la considération qu'il a porté à ce travail. Je lui adresse mes sincères remerciements ainsi que ma profonde gratitude.

J'adresse de chaleureux remerciements à Monsieur EL HIMDI Khalid, professeur à la Faculté des Sciences Rabat. pour son intérêt porté à mes travaux et d'avoir accepté de participer au jury en tant que rapporteur de cette thèse. Je suis reconnaissante pour ses conseils qui ont contribué à l'amélioration de cette thèse. Je suis particulièrement honorée de sa présence dans ce jury de soutenance. Je lui exprime ici ma plus haute considération.

Je voudrais remercier également le Professeur EZZAHID El Hadj, professeur à la Faculté des Sciences Juridiques économiques et Sociales-Agdal de Rabat, pour son attention à mes travaux, pour ses conseils avisés et son écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse.

Un grand remerciement au Professeur OULD KHAL Abdellah, professeur à la Faculté des Sciences Rabat, de m'avoir fait l'honneur de participer au jury. Je le remercie pour l'intérêt et la considération qu'il a porté à ce travail.

De même, je désire exprimer un grand merci à l'ensemble de mes collègues du Laboratoire Mathématiques, Statistique et Applications (LMSA) qui ont contribué à l'excellente atmosphère de travail et pour avoir préparé des séminaires de haute qualité organisés par le Laboratoire LMSA. J'exprime en particulier ma gratitude à Fadoua BADAoui, Amine AMAR pour leurs encouragements et aides qu'ils ont su m'apporter.

Nous ne laisserons pas cette occasion passer, sans remercier tous les enseignants et le personnel de l'Université Mohammed V, Faculté des Sciences pour leur aide et leurs précieux conseils et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail de thèse.

Je remercie tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'achèvement de cette thèse.

ACKNOWLEDGEMENT

The work of this doctoral thesis was accomplished and performed in the laboratory of Mathematics, Statistics and Applications (LMSA) in the Faculty of Sciences of Rabat under the supervision of the Professor Abdelhak ZOGLAT.

I would like to express my deepest gratitude to Professor Abdelhak ZOGLAT, professor at the Faculty of Sciences of Rabat, for guiding my research, his caring, patience, insights, guidance during the past several years and for participating in developing my background in Mathematics, and for providing me with an excellent atmosphere for doing research. His challenges brought this work towards a completion. Without his guidance and constant feedback this PhD would not have been achievable. I feel very grateful for all the effort he has made to make my stay pleasant within LMSA. Honestly, I can not leave without telling him my total satisfaction under his supervision.

I would like to express my gratitude to Professor BELBACHIR Mohammadine, professor at the Faculty of Sciences of Rabat, who is honoring me by chairing the examining board. I also want to thank him for his human qualities and encouragements.

My thanks also go to Professor EL ADLOUNI Salah-Eddine, professor at the Faculty of Sciences at University of Moncton Nouveau Brunswick in Canada, for agreeing to perform a report on this thesis and participate in the jury of this thesis. I thank him for the interest and consideration he has given to this work. I express my sincere thanks and my deep gratitude toward him.

I extend warm thanks to Professor EL HIMDI Khalid, professor at the Faculty of Sciences of Rabat, for his interest in my work and for agreeing to evaluate and write a report on this thesis and participate on my examining board. I am grateful to him for his advice which contributed to the improvement of this thesis. I am particularly honored by his presence on this defense jury. I express to him here my highest consideration.

Additionally, I would like to thank Professor EZZAHID El Hadj, professor in Faculty of Law, Economics and Social of Rabat, for his constant interest to my work, for his wise advices which have been preponderant for the success of this thesis.

A big thanks also to Professor OULD KHAL Abdellah, professor in the Faculty of Sciences of Rabat, for the honour of participating in the jury and for his interest to this work.

We will not let this opportunity go by without thanking all the teachers and staff at Mohammed V University, Faculty of Science for their help and valuable advice and for the interest they have shown in my work as thesis.

Likewise, I would to express my thanks to all the members of Laboratory of Mathematics, Statistics and Applications to serve the high-quality seminars. I would like to express my gratitude in particular to Fadoua BADAoui and Amine AMAR for their encouragement and support.

Finally, I would like to acknowledge my family who supported me during my time here. First and foremost I would like to thank Mom, Dad, sisters and brothers who always believing in me and encouraging me to follow my dreams.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse nous montrons les copules comme outils mathématiques flexibles qui modélisent la structure de dépendance entre les variables. Nous présentons les techniques qu'offrent les copules pour analyser les variables multivariées. Ainsi, nous analysons les transformations qui subissent les paramètres et les coefficients de dépendance de queue en prenant une rotation des copules asymétriques.

La plupart des copules sont appliquées aux séries chronologiques sous l'hypothèse d'une structure de dépendance statique, cependant il est bien connu que les corrélations entre certaines variables (économiques), ne sont pas constantes dans le temps. D'où l'intérêt d'introduire une nouvelle approche dynamique basée sur les copules, où le paramètre et la famille de copule changent au cours du temps. Finalement, nous présentons une application des copules statique et dynamique pour modéliser les variables économiques et environnementales, et nous utilisons ensuite les modèles de copules ajustés pour faire la prévision de ces variables.

Mots-Clefs : Copules, Séries chronologiques, Modèle dynamique, Prévision.

ABSTRACT

In this thesis we show the copula as flexible mathematical tools that model the dependency structure between the variables. We present the techniques offered by copulas to analyze multivariate variables. Thus, we analyze the transformations of the parameters and the tail dependence coefficients when we take a rotation of asymmetric copula. Most copula are applied to time series under the assumption of a static dependence structure, however it is well known that correlations between several (economic) variables are not constant and change over time. Hence the interest of introducing a new dynamic approach based on copula, where the parameter's and the family's copula change over time. Finally, we present an application of static and dynamic copulas to model the economic and environmental variables, and then use the adjusted copula models to predict those variables.

Keywords : Copulas, Time series, Dynamic model, Forecasting.

TABLE DES MATIÈRES

1 Théorie des copules : Définitions et propriétés.	17
1.1 Introduction	17
1.2 Fonctions de répartition et copules.	17
1.3 Quelques Propriétés de la copule	19
1.4 Classe de Fréchet et ordre de concordance	24
1.5 Copules et variables aléatoires	25
1.6 Exemples de copules associées à une copule	26
1.7 Copule associée à une fonction univariée (35)	27
1.8 Copule empirique	28
1.9 Fonction de Kendall	29
1.9.1 Définition et exemples	29
1.9.2 Fonction de Kendall empirique	29
1.10 Concept et mesure de dépendance	30
1.10.1 Notion de concordance	30

1.10.2	Mesure de concordance	30
1.10.3	Tau de Kendall	31
1.10.4	Rho de Spearman	32
1.11	Familles des copules paramétriques	34
1.11.1	Famille elliptique	34
1.11.2	Famille Archimédienne	36
1.11.3	Méthode de Simulation des copules	39
2	Les structures de dépendance asymétriques positives et négatives	44
2.1	Introduction	44
2.2	Les copules pivotées et leurs propriétés	45
2.3	Coefficients de dépendance de queue	47
3	Outils d'analyse de dépendance et de choix de copules	53
3.1	Outils pour l'analyse univariée des séries chronologiques	53
3.1.1	Stationnarité	54
3.1.2	Les processus <i>ARMA</i>	55
3.1.3	Les processus <i>ARIMA</i>	56
3.1.4	Les processus <i>SARIMA</i>	57
3.1.5	Le processus <i>GARCH</i>	57
3.2	Méthode paramétrique et semi-paramétrique pour analyser la dépendance	58
3.2.1	Chi-plot	59
3.2.2	Kendall plot ou K-Plot	61
3.2.3	Quelques critères d'identification de la copule	62
3.3	La copule conditionnelle	63

4	Aperçu sur les structures de dépendance dynamique et nouvelle approche	64
4.1	Introduction	64
4.2	Aperçu sur les copules dynamiques	65
4.2.1	Gourbegh 2005	65
4.2.2	Guégan and Zhang (2009, [63])	66
4.2.3	Modèle de Patton (2006, [94]) (2013, [95])	66
4.2.4	Nouvelle approche de copule dynamique	68
5	Applications aux variables macro-économiques	71
5.1	Contribution des copules dans la prévision des variables macro-économiques : taux de change et taux d'inflation	71
5.1.1	Introduction	71
5.1.2	Présentation et description des données	72
5.1.3	Conclusion	80
5.2	Les copules dynamiques pour la modélisation et la prévision des variables macro-économiques : taux de change et taux d'intérêt à court-terme	81
5.2.1	Modèle de Patton	82
5.2.2	Nouvelle Approche de la Copule Dynamique	84
5.2.3	Conclusion	87
6	Une approche par les copules pour prévoir les précipitations	94
6.1	Introduction	94
6.2	Situation géographique et données disponibles	95
6.3	Méthodologie et Résultats	95
6.4	conclusion	99

LISTE DES TABLEAUX

2.1 Exemples de familles de copules, leurs type de dépendance qu'elles peuvent modéliser et l'expression du tau de Kendall et coefficient de dépendance de queue associés.	50
5.1 * Voir Holt (1957) et Charles (1957) pour plus de détail sur le modèle lissage exponentiel.	75
5.2 Tableau Les résultats de la Moyenne Quadratique des Erreurs pour les différentes périodes	76
5.3 Tableau P-value pour les différentes familles de copules retenues	80
5.4 Tableau des prévisions des copules ajustées pour les différentes périodes	81
5.5 Statistiques descriptives de chaque variable	83
5.6 Résultats de l'estimation des paramètres des modèles ARMA-GARCH ajustés au panel du taux de croissance du taux de change et taux d'intérêt à court terme	84
5.7 Résultats de l'estimation des paramètres du modèle Patton.	85
5.8 Tau de Kendall prédit et les copules retenues pour les prévision avec leurs probabilités de transition (entre parenthèse).	88
6.1 P-value obtenue du test d'indépendance et homogénéité et stationnarité des séries retenues.	97
6.2 Copules retenues pour chaque paires, et les p-value obtenues du test d'ajustement	99

TABLE DES FIGURES

1.1 Nuages de paires des points simulées à partir de la copule gaussienne pour $\rho = -0,1$ (a) et $\rho = 0,5$ (b).	39
1.2 Nuages de paires des points simulées à partir de la copule Student paramétrée par $\nu = 1$ degrés de liberté et $\rho = -0,1$ (a) et $\rho = 0,7$ (b).	40
1.3 Nuages de paires de points simulés à partir de la copule Clayton pour $\theta = 0,5$.	41
1.4 Nuages de paires des points simulées à partir de la copule Gumbel pour $\tau = 0,5$ (a) et $\tau = 0,1$ (b).	42
1.5 Nuages de paires de points simulées à partir de la copule Frank pour $\tau = 0,5$ (a) et $\tau = -0,7$ (b).	43
2.1 Coefficient de dépendance de queue pour les copules de Clayton, de Gumbel et Joe.	52
5.1 L'évolution de l'inflation dans la zone Euro avril 2000 et décembre 2016.	73
5.2 L'évolution du taux de change et de l'inflation sur une période de seize ans.	74
5.3 Le graphique des résidus du taux d'inflation par rapport à ceux du taux de change	75
5.4 Chi-Plot et K-Plot des données de la première période	77

5.5 Chi-Plot et K-Plot des données de la deuxième période	78
5.6 Chi-Plot et K-Plot des données de la troisième période	79
5.7 Paramètre dynamique obtenue des copules ajustés pour chaque pays	89
5.8 L'évolution du taux de change et taux d'intérêt à court terme 1999-2014. . .	90
5.9 Estimation du Tau de Kendall par fenêtre glissante de taille 60.	90
5.10 Corrélations croisées entre les résidus et le logarithme de la variance conditionnelle du taux de change (a) et celui du taux d'intérêt à court terme (b).	91
5.11 Représentation des copules appropriées à chaque fenêtre et l'histogramme présentant leurs effectifs	91
5.12 Coefficients de dépendance de queue obtenues par l'approche de copule dynamique.	92
5.13 Performances des Copulas ajustées en termes de taux de croissance des prévisions de taux de change	93
6.1 Localisation des stations de mesures météorologiques	96
6.2 Le graphique des copules empirique de chaque paires	98
6.3 Performances des copules ajustées en termes de prévision des précipitations, en utilisant une approche de régression des quantiles de copules	100

La complexité et l'interconnexion présentées entre les variables, dans différents domaines de la statistique appliquée, rendent la modélisation des dépendances un défi réel. Cette dernière joue un rôle primordiale pour améliorer l'évaluation des risques existantes dans plusieurs domaines. Généralement, la modélisation de dépendance entre des variables aléatoires nécessite la connaissance des lois de probabilité multivariées. Dans ce sens, plusieurs modèles paramétriques très spécifiques des lois multivariées ont été utilisés, en particulier la loi normale multivariée. Cependant, ce modèle impose que les lois marginales soient de loi normale, ce qui est rarement vérifié dans la pratique. L'idéal, c'est avoir des lois multivariées ayant des lois marginales arbitraires.

Notons que la mesure de dépendance fréquemment utilisée est le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson. Cependant, l'utilisation de cet indicateur n'est judicieuse que lorsque la relation de dépendance est linéaire et que l'univers considéré est gaussien ; ce qui n'est pas toujours le cas. Embrechts et al (1999, [\[31\]](#)) confirment dans leurs travaux que cette mesure n'est pas efficace. La solution est d'utiliser une mesure capable de résumer la structure de dépendance entre les variables aléatoires, sans tenir compte du comportement des marginales. Dans cette perspective, la théorie des copules fournit une approche favorable.

Le concept classique des copules est fondé sur l'étude des lois multivariées établie par Fréchet, Féron et Dall'Aglio sous d'autres appellations. Il faut attendre Sklar en 1956, pour que le mot copule soit utilisé, et pour que le fameux théorème Sklar soit établie. D'une façon explicite, les copules sont des fonctions de répartition particulières, qui lient les fonctions de répartition multivariées, associées aux lois de probabilité dans \mathbb{R}^d , pour $d \geq 2$, aux fonctions de répartition marginales.

Cette théorie est basée sur le résultat de Hoeffding (1940), où il décrit des fonctions de répartition bivariées standardisées dont le support est contenu dans $[-1/2, 1/2]$ et dont les lois marginales sont uniformes sur $[-1/2, 1/2]$. Il a montré que ces versions particulières de copules admettent des bornes supérieures et inférieures. Des résultats voisins ont été établis par Fréchet (1951), que l'on appelle aujourd'hui les bornes de Fréchet-Hoeffding et les classes de Fréchet-Hoeffding. Plusieurs statisticiens et mathématicien ont redécouvert le concept de la dépendance sous différentes appellations, comme Galambos (1978) et Deheuvels (1978) qui l'ont nommé "fonction de dépendance" et Cook et Johnson (1981) qui l'appellent "la forme standard". D'une façon simplifiée, Sklar (1956) utilise le mot copule et le définit comme une fonction de répartition multivariée qui lie les fonctions de répartition univariées. Cette théorie a été ultérieurement développée par plusieurs auteurs dans nombreux ouvrages : Nelsen (1999) et Joe (1997).

Les copules ont été largement utilisées dans divers domaines en particulier l'économie et l'environnement. En finance, elles ont été utilisées pour modéliser les probabilités de défaillance des portefeuilles (Li (2000, [80])) et pour estimer la Value at Risk (VaR) (Cherubini et Luciano (2001, [30]), Ane et Kharoubi (2003, [3])). En hydrologie, les copules ont été utilisées dans le cadre de l'analyse fréquentielle Genest et al. (2007, [53]). Les livres Cherubini et al. (2004, [18]) et Rémillard (2013, [100]) traitent entièrement des diverses applications des copules en finance.

Même si les copules modélisent des structures de dépendance plus générales et avantageuse que la simple corrélation linéaire, il semble irréaliste de considérer la dépendance comme constante, étant donné que les corrélations varient dans le temps. A notre connaissance, les premiers documents proposant des copules qui varient dans le temps sont ceux de Patton (2006) [94], qui a étendu le théorème de Sklar pour les distributions conditionnelles et qui a proposé un modèle paramétrique pour décrire l'évolution du paramètre de la copule. Dias and Embrechts (2004, [33]) ont proposé un test pour les ruptures structurelles dans le paramètre de la copule. Gourbegh (2005, [61]) a modélisé l'évolution de la dépendance par les volatilités passées. Par la suite, plusieurs études ont porté sur l'application de copules dynamiques et le développement de nouveaux modèles et tests pour modéliser de façon appropriée les dépendances variants au cours du temps (Guegan et Zhang (2009, [63]), Chebbi and Hedhli (2014, [17]), Creal, Koopman et Lucas (2008, [27]), Hafner et Manner (2008, [65]) et Hafner et Reznikova (2008, [66]).

Le présent mémoire contribue au développement de la théorie des copules pour la modélisation des dépendances existant en environnement et économie. Nous y traitons cinq parties distinctes. Dans un premier temps, dans un chapitre introductif nous présentons un survol bref, mais exhaustif, des définitions et résultats de base de la théorie des copules. Le deuxième chapitre de la thèse est consacré à l'étude des copules pivotées asymétriques appropriées pour la modélisation des structures de dépendance négative. Nous établissons les

propriétés de ces copules qui vont éclaircir la liaison entre les coefficients de dépendance des queues et le paramètre de la copule originale et ceux de la copule pivotée. Dans le troisième chapitre, nous présentons les outils nécessaires pour modéliser les séries univariées, ainsi que les approches paramétriques comme les tests d'ajustement et semi-paramétriques comme les méthodes graphiques et les critères d'information pour le choix de la copule appropriée.

Au niveau du quatrième chapitre, nous mettons l'accent sur les propriétés des copules dynamiques existantes et leur estimation, et nous présentons notre contribution pour ces copules. Finalement, dans les deux derniers chapitres, nous présentons trois applications des copules statiques et dynamiques à partir des données macro-économiques et d'environnement. Nous montrons la contribution de notre approche de copule dynamique pour améliorer la prévision des agrégats macro-économiques. Ces chapitres ont fait l'objet de trois publications intitulées :

- **Copulas for Modeling the Relationship between Inflation and the Exchange Rate** (Chapitre publié du livre : Time Series Analysis and Forecasting) coécrit avec A. Zoglat, F. Badaoui, O. G. Cyrille, A. Amar et E. Ezzahid.
- **A Copulas Approach for Forecasting the Rainfall**(Publié en Volume 3 du livre Advanced Intelligent Systems Applied to Environment) coécrit avec A. Zoglat, F. Badaoui, A. Amar et E. Ezzahid.
- **A Dynamic Copula approach for Forecasting and Modeling Dependence between Exchange and Short-term Interest Rates** (en cours) coécrit avec A. Zoglat

Enfin, les perspectives de recherche relatives aux différents sujets abordés dans cette thèse sont proposées dans la section conclusion et perspectives.

CHAPITRE 1

THÉORIE DES COPULES : DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS.

1.1. INTRODUCTION

Dans ce premier chapitre, nous introduisons quelques notions et résultats de base qui vont nous permettre de mieux décrire le concept de copule. Nous présentons les propriétés les plus importantes de la fonction de copule et son rôle dans l'étude de l'indépendance des variables aléatoires. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Nelsen [88].

1.2. FONCTIONS DE RÉPARTITION ET COPULES.

Soient $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)$ deux points de \mathbb{R}^d , avec $0 \leq a_j \leq b_j \leq 1$ ($j \in 1, 2, \dots, d$). Un pavé $B := [a, b]$ de dimension d est un produit cartésien de d -intervalles unidimensionnels $B = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$. Les sommets du pavé B sont les points $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ tels que $v_k \in \{a_k, b_k\}$.

Définition 1.2.1. Soit $F : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction d -dimensionnelle, où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$. Le F -volume V_F du pavé $B \subset \mathcal{D}$ est défini par

$$V_F(B) := \sum_v \operatorname{sgn}(v) F(v),$$

où la somme est prise sur tous les sommets v de B , et le $\operatorname{sgn}(v)$ est donnée par

$$\operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v_k = a_k \text{ si } k \text{ est pair} \\ -1, & \text{si } v_k = a_k \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Les d -différences d'ordre 1 de F sont définies par

$$\Delta_{a_k}^{b_k} F(x) = F(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_d) - F(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_d).$$

Dans ce cas, le F -volume du pavé B peut s'exprimer en fonction des d -différences de F sur B comme suit

$$V_F(B) := \Delta_a^b F(x) = \Delta_{a_d}^{b_d} \Delta_{a_{d-1}}^{b_{d-1}} \dots \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} F(x).$$

On note $(x_1, \dots, x_d) \leq (y_1, \dots, y_d)$ lorsque $x_i \leq y_i \forall i \in \{1, \dots, d\}$.

Définition 1.2.2. (*Fonction attachée*) Soit la fonction $F : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^d$. On suppose que \mathcal{D} a un plus petit élément $e : e \leq u$ pour tout $u \in \mathcal{D}$. On dit que F est attachée si $F(x) = 0$ pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{D}$ tel que $x_k = e_k$ pour au moins un indice k .

Définition 1.2.3. Une fonction réelle F de dimension d est dite d -croissante, si $V_F(B) \geq 0$ pour tout pavé B dont les sommets sont définis dans le domaine de définition de F .

Définition 1.2.4. Une fonction $F : \mathbb{R}^d \mapsto [0, 1]$ est dite une fonction de répartition d -dimensionnelle, si F vérifie les conditions suivantes

- (a) F est d -croissante ;
- (b) F est attachée ;
- (c) $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty, \dots, x_d \rightarrow +\infty} F(x_1, \dots, x_d) = 1$.

Définition 1.2.5. La $k^{\text{ème}}$ lois marginale (unidimensionnelle) de F est la fonction $F_k : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$, où $F_k(x) \rightarrow F(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_d)$ quand $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)$.

Lemme 1.2.1. Soit $F : \mathcal{D} \mapsto [0, 1]$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$, une fonction attachée, d -croissante, de lois marginales $F_k(\cdot)$, $k \in 1, \dots, d$. Soient $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ deux points de \mathbb{R}^d . Alors

$$|F(x) - F(y)| \leq \sum_{k=1}^d |F_k(x_k) - F_k(y_k)|.$$

Passons maintenant à l'introduction de la définition et des résultats essentiels portant sur la copule, qui est définie comme étant une fonction de répartition multivariée dont les lois marginales sont uniformes. C'est une extension de la famille de fonctions de répartition multivariée via l'approche de Sklar (1959, [103]). Nous allons dans un premier temps définir les d -sous-copules comme étant une classe de fonctions d -croissantes et attachées, juste après nous allons présenter les copules comme sous-copules de domaine de définition $I^d = [0, 1]^d$.

Définition 1.2.6. Une fonction C' est dite une sous-copule d -dimensionnelle si elle vérifie les conditions suivantes

- (a) $\mathcal{D} \subset I^d$ domaine de définition de C' ;

- (b) C' est attachée et d -croissante ;
(c) C' a des marginales C'_k pour tout $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ telles que : $C'_k(u_k) = u_k$,
 $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathcal{D}$.

Définition 1.2.7. Une copule est une fonction $C : [0, 1]^d \mapsto [0, 1]$ vérifiant les propriétés suivantes

- (a) Si Pour tout $u \in [0, 1]^d$, il existe $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ tel que $u_k = 0$ alors $C(u) = 0$;
(b) $C(1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k$;
(c) C est d -croissante, c'est à dire pour tout u et v dans $[0, 1]^d$ on a : $V_C([u, v]) \geq 0$, où

$$V_C([u, v]) = \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}), \quad u_{j1} = u_j, \quad u_{j2} = v_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}.$$

Remarque 1.2.1. D'après cette définition, on voit que C est une copule d -dimensionnelle (d -copula) si elle est une sous-copule de domaine $[0, 1]^d$.

Le théorème de Sklar est le fameux théorème dans la théorie des copules qui explique mieux la relation entre la copule et la fonction de répartition multivariée. En effet, en connaissant les marginales, on les injecte dans une copule C , afin d'obtenir la fonction de répartition multivariée. Toute la théorie des copules est fondée sur le théorème suivant :

Théorème 1.2.2. Soit F une fonction de répartition multivariée de dimension d , et de marginales F_1, \dots, F_d . Il existe une copule C de dimension d telle que pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (1.1)$$

Si les lois marginales F_1, \dots, F_d sont continues alors la copule C est unique ; sinon elle est uniquement déterminée sur $F_1(\mathbb{R}) \times \dots \times F_d(\mathbb{R})$. Réciproquement, si C est une copule de dimension d et F_1, \dots, F_d sont les d fonctions de répartition univariées, alors la fonction F définie par l'équation [1.1](#) est la fonction de répartition multivariée de dimension d dont les marges sont F_1, \dots, F_d .

1.3. QUELQUE PROPRIÉTÉ DE LA COPULE

Dans la suite, on va traiter les propriétés de la copule bivariée, on considère également cette notation I qui désigne l'intervalle $[0, 1]$. La définition de la copule bivariée est la suivante :

Définition 1.3.1. On appelle copule bivariée toute fonction C définie sur I^2 qui possède les propriétés suivantes

(a) Pour tout $u \in I$, $C(u, 0) = C(0, u) = 0$;

(b) Pour tout $u \in I$, $C(u, 1) = C(1, u) = u$;

(c) C est une fonction 2-croissante c'est-à-dire $\forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in I^2$ avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

En particulier, C est croissante sur chaque composant, i.e.,

$$C(u, v) \leq C(u, v') \text{ et } C(u, v) \leq C(u', v) \quad \forall u \leq u', v \leq v'.$$

On considère le vecteur aléatoire $U = (U_1, U_2)$, où U_1 et U_2 sont deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[0, 1]$. Nous avons :

$$C(u_1, u_2) = P[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2].$$

Les propriétés de la copule implique :

(a) $P[U_1 \leq 0, U_2 \leq u_2] = P[U_1 \leq u_1, U_2 \leq 0] = 0.$

(b) $P[U_1 \leq 1, U_2 \leq u_2] = u_2$ et $P[U_1 \leq u_1, U_2 \leq 1] = u_1.$

(c) $P[u_1 \leq U_1 \leq v_1, u_2 \leq U_2 \leq v_2] \geq 0.$

Remarque 1.3.1. D'une manière simple, on dit que C est la fonction de répartition multivariée uniforme.

Exemple 1.3.1. Prenons la copule produit définie par : $C(u, v) = uv$, il est facile de montrer que C est une copule, en effet, nous avons $v_2 - u_2 \geq 0$ et $v_1 \geq u_1$, nous en déduisons que $v_1(v_2 - u_2) \geq u_1(v_2 - u_2)$, ce qui donne

$$v_1v_2 - v_1u_2 - u_1v_2 + u_1u_2 \geq 0.$$

Et donc C est une copule.

Théorème 1.3.2. ([48], [89], [88]) Soit C une copule bivariée, alors pour tout (u, v) dans I^2 , on a :

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v). \quad (1.2)$$

Démonstration. On a pour tout $(u, v) \in I^2$, $C(u, v) \leq C(u, 1) = u$ et $C(u, v) \leq C(1, v) = v$, donc

$$C(u, v) \leq \min\{u, v\}.$$

La 3^{ème} propriété de la copule appliquée sur les pavés $[u, 1] \times [v, 1]$ implique que, $C(u, v) \geq u + v - 1$, d'où :

$$C(u, v) \geq \max(u + v - 1, 0).$$

Les bornes $\max(u + v - 1, 0)$ et $\min(u, v)$ sont des copules notées $W(u, v)$ et $M(u, v)$. Ainsi pour toute copule bivariée C et $(u, v) \in I^2$, on a :

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v). \quad (1.3)$$

L'inégalité [1.3](#) permet de définir la copule de Fréchet-Hoeffding de borne supérieure M et de borne inférieure W . \square

Théorème 1.3.3. ([\[88\]](#), [\[89\]](#)) (*Continuité*) Soit C une copule bivariée. Alors pour tout $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ dans I^2 ,

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \quad (1.4)$$

Autrement dit, C est uniformément continue sur I^2 .

Démonstration. La preuve du théorème est immédiate si on considère l'inégalité triangulaire :

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1)| + |C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1)|.$$

Soit $u_1 \leq u_2$ alors la propriété 2-croissante nous donne $C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) \leq u_2 - u_1$, de la même manière si $u_2 \leq u_1$ on a $C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) \leq u_1 - u_2$. Donc pour tout $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ on a

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2)| \leq |u_2 - u_1|.$$

De même on obtient $|C(u_1, v_1) - C(u_1, v_2)| \leq |v_1 - v_2|$. En sommant membre à membre les deux inégalités et nous utilisons le résultat de l'inégalité triangulaire, on trouve le résultat [1.4](#). \square

Théorème 1.3.4. (*Différentiabilité*) Soit C une copule bivariée. Alors pour tout $u, v \in I$

(a) Les dérivées partielles $\frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$ et $\frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$ existent p.s et $0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \leq 1$.

(b) Les dérivées partielles $\frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$ et $\frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$ sont définies et croissantes sur I p.s.

On va s'intéresser dans ce qui va suivre au fameux théorème de Sklar de la théorie des copules. Il constitue le fondement de la plupart des applications des copules. Le théorème de Sklar élucide le rôle que joue les copules dans l'identification de la relation qui existe entre les fonctions de répartition à plusieurs variables et leurs marges univariées. Il s'énonce dans le cas bivariée comme suit :

Théorème 1.3.5. ([\[89\]](#), [\[88\]](#), [\[103\]](#)). Soit F une fonction de répartition bivariée de marginales F et G . On pose $F(x) = U$ et $G(y) = V$. $F(x, y)$ peut s'écrire en terme d'une fonction unique $C(U, V)$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (1.5)$$

D'après ce théorème la densité bidimensionnelle est définie par

$$f(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y).$$

Où f et g sont, respectivement, les densité de F et G . On dit dans ce cas que la copule C est associée aux variables U et V et on écrit $(U, V) \sim C$.

Le théorème de Sklar peut être également utilisé pour construire des copules à partir des lois de probabilité bidimensionnelles. Considérons par exemple les fonctions de répartition bivariées suivantes :

Exemple 1.3.6. Soit la loi logistique bivariée de Gumbel dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x, y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Les fonctions de répartitions marginales sont :

$$F(x) \equiv F(x, \infty) = (1 + e^{-x})^{-1}, \text{ et } G(y) \equiv F(\infty, y) = (1 + e^{-y})^{-1}.$$

Les fonctions inverses sont respectivement données par :

$F^{-1}(u) = \ln(u) - \ln(1 - u)$ et $G^{-1}(v) = \ln(v) - \ln(1 - v)$. Nous en déduisons que la fonction copule associée à $F(x, y)$ est

$$\begin{aligned} C(u, v) &= F\left(F^{-1}(u), G^{-1}(v)\right) \\ &= \left(1 + \frac{1 - u}{u} + \frac{1 - v}{v}\right)^{-1} \\ &= \frac{uv}{u + v - uv} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Exemple 1.3.7. Soit F_ρ la fonction de répartition bivariée de loi normale de coefficient de corrélation ρ telle que

$$F_\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left(\left(\frac{t_1 - m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(t_1 - m_1)(t_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{t_2 - m_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right] dt_1 dt_2$$

On suppose que F_ρ est la loi conjointe des variables aléatoires normales $X \sim N(m_1, \sigma_1)$ et $Y \sim N(m_2, \sigma_2)$. La copule associée à F_ρ est donnée par

$$C_\rho(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi_1^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi_1^{-1}(v)} \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left(\left(\frac{x - m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x - m_1)(y - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y - m_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right] dx dy$$

$\forall u, v \in I$, où ϕ_i^{-1} , $i = 1, 2$ est la fonction inverse de la loi $N(m_i, \sigma_i)$. Autrement dit la copule gaussienne est définie par :

$$C_\rho(u, v) = \Phi_\rho(\phi_1^{-1}(u), \phi_1^{-1}(v)),$$

où Φ_ρ est la fonction de répartition bivariée de la loi gaussienne de paramètre ρ .

Théorème 1.3.8. *Les copules admettent des densités de probabilité. Si la densité c associée à la copule C existe alors, elle est définie par*

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}.$$

Si la fonction de répartition bivariée est absolument continue, alors elle admet une densité et nous avons :

$$h(x, y) = c(F(x), G(y)) \times f(x) \times g(y),$$

avec $c(u, v)$ est la densité de la copule C , et f , g et h sont respectivement les densités de la fonction de répartition F , G et H .

Remarque 1.3.2. Notons que la propriété 2-croissante de la copule

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

est équivalente à la positivité de la densité

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \geq 0.$$

Exemple 1.3.9. Considérons la copule de Gumbel définie par

$$C(u, v, \theta) = uv \exp(-\theta \ln(u) \ln(v)).$$

On peut vérifier que C est une copule, en effet on a $C(0, v) = C(u, 0) = 0$ et $C(1, v) = C(v, 1) = v \exp(-\theta \ln(1) \ln(v)) = v$. Pour prouver que C est une copule, nous devons prouver que $c(u, v) \geq 0$, autrement dit

$$c(u, v) = \theta^2 \ln(u) \ln(v) - \theta(1 + \ln(u) + \ln(v)) + 1 \geq 0,$$

pour tout $(u, v) \in I^2$. Il est facile de montrer que le minimum de $c(u, v)$ est atteint lorsque u et v tendent vers zéro. Dans ce cas, nous avons

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ v \rightarrow 0^+}} \theta \ln(u) \ln(v) - \theta(1 + \ln(u) + \ln(v)) + 1 = 0^+.$$

Exemple 1.3.10. La copule $C^\perp(u, v) = uv$ est la copule produit. Nous avons

$$c^\perp(u, v) = 1$$

Nous en déduisons que toute loi bidimensionnelle construite avec cette copule vérifie :

$$h(x, y) = f(x) \times g(y)$$

La copule produit caractérise donc l'indépendance entre deux variables aléatoires.

1.4. CLASSE DE FRÉCHET ET ORDRE DE CONCORDANCE

Les classes de Fréchet sont les classes des distributions multidimensionnelles avec des marges données. Par exemple, si on considère les distributions bivariées F_{XY} et F_{YZ} , la classe de Fréchet $\mathcal{F}(F_{XY}; F_{YZ})$ est l'ensemble des distributions trivariées qui sont compatibles avec ces marges.

Définition 1.4.1. Une fonction F est dite appartenir à la classe de Fréchet (F_1, F_2) , et on note $(F \in \mathcal{F}(F_1, F_2))$, si et seulement si,

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = F_1(x_1) \text{ et } \lim_{x_1 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = F_2(x_2). \quad (1.7)$$

Caractériser F revient à trouver l'ensemble \mathcal{C} des copules :

$$\mathcal{F}(F_1, F_2) = \{F : F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)); C \in \mathcal{C}\}. \quad (1.8)$$

Les distribution maximales F^- et F^+ de $\mathcal{F}(F_1, F_2)$ sont définies par :

$$F^-(x_1, x_2) = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0) \text{ et } F^+(x_1, x_2) = \min(F_1(x_1), F_2(x_2)),$$

et on a

$$F^-(x_1, x_2) \leq F(x_1, x_2) \leq F^+(x_1, x_2) \quad (1.9)$$

F^- et F^+ sont appelées respectivement les bornes basse et haute de Fréchet. Les copules associées sont

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \text{ et } M(u, v) = \min(u, v).$$

Nous avons toujours cette relation, montrée précédemment :

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$$

Remarque 1.4.1. Prenons α le quantile de la copule C , donc les lignes de niveau d'une copule C doivent être dans le triangle défini par :

$$\{(u, v) : C(u, v) = \alpha\} \in \{(u, v) : \max(u + v - 1, 0) \leq \alpha, \min(u, v) > \alpha\}.$$

Nous allons maintenant introduire la relation d'ordre sur les copules.

Définition 1.4.2. Soient C_1 et C_2 deux copules. On dit que C_1 est plus petite que C_2 (on note $C_1 \prec C_2$) si et seulement si

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v), \quad \forall (u, v) \in I^2.$$

Remarque 1.4.2. L'ordre \prec est appelé l'ordre de concordance, cette relation d'ordre est partielle car on ne peut pas comparer toutes les copules entre elles. Néanmoins, nous avons toujours

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v).$$

Corollaire 1.4.1. Une structure de dépendance positive est une fonction copule C qui vérifie l'inégalité suivante

$$C^\perp \prec C \prec M.$$

De même, une structure de dépendance négative est une copules C qui vérifie

$$W \prec C \prec C^\perp.$$

Remarque 1.4.3. Il existe des copules qui n'ont pas de structure de dépendance ni positive ni négative.

Remarque 1.4.4. Soit $C_\theta(u, v)$ une copule avec un paramètre. C_θ est dite totalement ordonnée si :

- $\forall \theta_1 \leq \theta_2$, on a $C_{\theta_1} \leq C_{\theta_2}$ (positivement ordonnée)
- $\forall \theta_1 \leq \theta_2$, on a $C_{\theta_1} \geq C_{\theta_2}$ (négativement ordonnée)

1.5. COPULES ET VARIABLES ALÉATOIRES

Théorème 1.5.1. Soient deux variables aléatoires continues X et Y de copule associée C_{XY} , si h et ℓ sont deux fonctions strictement monotones sur $Im(X)$ et $Im(Y)$ respectivement. On a :

(a) Si h et ℓ sont strictement croissantes alors

$$C_{h(X)\ell(Y)}(u, v) = C_{XY}(u, v).$$

(b) Si h est strictement croissante et ℓ est strictement décroissante, alors

$$C_{h(X)\ell(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

(c) Si h est strictement décroissante et ℓ est strictement croissante, alors

$$C_{h(X)\ell(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v).$$

(d) h et ℓ sont strictement décroissantes alors

$$C_{h(X)\ell(Y)}(u, v) = v + u - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v).$$

Autrement dit, la copule reste invariante sous des transformations strictement croissantes de ses lois marginales.

Démonstration. Soient F , G , F' et G' les fonctions de répartition univariées de $X, Y, h(X)$ et $\ell(Y)$ respectivement. Nous avons : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = P[h(X) \leq x] = P[X \leq h^{-1}(x)] = F(h^{-1}(x)).$$

h^{-1} existe car h est strictement croissante. De même on a pour tout $y \in \mathbb{R}$ $G'(y) = G(\ell^{-1}(y))$, d'où $F'^{-1}(u) = h(F^{-1}(u))$ et $G'^{-1}(v) = \ell(G^{-1}(v))$. Par suite

$$\begin{aligned} C_{h(X)\ell(Y)}(u, v) &= H'(F'^{-1}(u), G'^{-1}(v)) \\ &= P[h(X) < F'^{-1}(u), \ell(Y) < G'^{-1}(v)] \\ &= P[X < h^{-1}[F'^{-1}(u)], Y < \ell^{-1}[G'^{-1}(v)]] \\ &= P[X < F^{-1}(u), Y < G^{-1}(v)] \\ &= H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \\ &= C_{XY}(u, v). \end{aligned} \tag{1.10}$$

□

1.6. EXEMPLES DE COPULES ASSOCIÉES À UNE COPULE

Nous allons prendre dans cette section quelques exemples simples de probabilité. On a :

$$\begin{aligned} P\{U \leq u, V > v\} &= P\{U \leq u\} - P\{U \leq u, V \leq v\} \\ &= u - C(u, v) \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} P\{U > u, V \leq v\} &= P\{V \leq v\} - P\{U \leq u, V \leq v\} \\ &= v - C(u, v) \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} P\{U > u, V > v\} &= P\{U > u\} - P\{U > u, V \leq v\} \\ &= 1 - u - v + C(u, v) \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} P\{U \leq u \text{ ou } V \leq v\} &= P\{U \leq u\} + P\{V \leq v\} - P\{U \leq u, V \leq v\} \\ &= u + v - C(u, v) \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}
P\{U > u \text{ ou } V > v\} &= P\{U > u\} + P\{V > v\} - P\{U > u, V > v\} \\
&= 1 - u + 1 - v - (1 - u - v + C(u, v)) \\
&= 1 - C(u, v) \\
&= 1 - C(1 - u, 1 - v)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

(pour la preuve de la dernière égalité nous allons la trouver dans la section de dépendance négative).

D'après ces calculs, on peut dire que à partir de la copule C , nous pouvons construire trois autres copules :

$$\begin{aligned}
\hat{C}(u, v) &= u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \\
\tilde{C}(u, v) &= u + v + C(u, v) \\
C^*(u, v) &= 1 - C(1 - u, 1 - v)
\end{aligned}$$

Les copules \hat{C} , \tilde{C} et C^* sont appelées respectivement la copule de survie, la copule duale et la co-copule. Soient X et Y deux variables aléatoires de fonction de répartition F et G respectivement. L'interprétation probabiliste des copules \hat{C} , \tilde{C} et C^* sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
P\{X \leq x, Y \leq y\} &= C(F(x), G(y)) \\
P\{X > x, Y > y\} &= \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)) \\
P\{X \leq x \text{ ou } Y \leq y\} &= \tilde{C}(F(x), G(y)) \\
P\{X > x \text{ ou } Y > y\} &= C^*(\bar{F}(x), \bar{G}(y))
\end{aligned}$$

Où $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ est la fonction de survie.

1.7. COPULE ASSOCIÉE À UNE FONCTION UNIVARIÉE ([35])

Considérons la fonction $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$. Soit C_f une fonction définie pour $x, y \in [0, 1]$ par

$$C_f(x, y) = (x \vee y)f(x \wedge y), \tag{1.16}$$

avec $x \vee y := \min(x, y)$ et $x \wedge y := \max(x, y)$. On peut remarquer que C_f est symétrique.

D'après la propriété 4 de la définition (1.3.1) et le théorème (1.4), il est clair que f est croissante et continue. Ainsi, f est elle dérivable sur $[0, 1]$.

Lemme 1.7.1. Soit $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ une fonction continue, croissante et dérivable sauf en un nombre fini de points. Les deux expressions suivantes sont équivalentes

- (a) Pour tout $s, t \in [0, 1]$, avec $s \leq t$, $sf(s) + tf(t) - 2sf(t) \geq 0$;
- (b) La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est décroissante sur $]0, 1]$.

Théorème 1.7.2. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction continue, dérivable sauf en un nombre fini de points. Soit C_f la fonction définie par l'équation (1.16). Alors C_f est une copule si et seulement si :

- (a) $f(1) = 1$;
- (b) f est croissante;
- (c) La fonction $t \longmapsto \frac{f(t)}{t}$ est décroissante sur $]0, 1]$.

Démonstration. La preuve de ce théorème résulte du lemme précédent (pour plus de détails voir Durante (2006, [35])). □

Exemple 1.7.3. Prenons $F_\theta(t) := c \exp(t^\theta/\theta)$, avec $\theta > 0$ et $c = \exp(-1/\theta)$, on obtient la famille de copules suivante :

$$C_\theta = \begin{cases} c x \exp(y^\theta/\theta), & x \leq y \\ c y \exp(x^\theta/\theta), & x > y \end{cases}$$

1.8. COPULE EMPIRIQUE

Soient $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ un échantillon de taille n , de fonctions de répartition bivariées H , de marginales F et G et de copule C . On définit les marges empiriques univariées par :

$$F_i = F_n(X_i) = \frac{R_{X_i}}{n+1} \approx F(X_i) \text{ et } G_i = G_n(Y_i) = \frac{R_{Y_i}}{n+1} \approx G(Y_i) \quad (1.17)$$

avec R_{X_i} est la statistique de Rang de X_i avec $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors la copule C peut être estimée par la copule empirique définie par

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(F_i \leq u, G_i \leq v), \quad u, v \in [0, 1] \quad (1.18)$$

Gänssler et Stute (1987, [51]) et Fermanian et al. (2004, [43]) ont montré que si les dérivées partielles du premier ordre de C sont continues, alors $\sqrt{n}(C_n - C)$ converge en loi vers une variable gaussienne G centrée continue sur $[0, 1]^2$. La comparaison de C_n et C peut être aussi un moyen de choisir le meilleur modèle de copule (Genest et Rémillard, (2008, [59])).

1.9. FONCTION DE KENDALL

1.9.1. Définition et exemples

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi conjointe H de marginales F et G et de copule C . On a $U = F(X)$ et $V = G(Y)$. On pose :

$$W := H(X, Y) = C(F(X), G(Y)) = C(U, V) \in [0, 1].$$

Alors la loi de W ne dépend pas des marginales, sa fonction de répartition K est définie par

$$K(t) = P(W \leq t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

cette fonction est appelée "**Fonction de Kendall**". On verra par la suite que la fonction de Kendall est liée à une mesure de dépendance appelée Kendall tau. Nous verrons aussi que même si K est une fonction univariée, elle caractérise certaines familles de copules.

Exemples 1.9.1. 1. Pour la copule indépendance C^\perp , nous avons :

$$K(t) = t - \ln(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (1.19)$$

De plus, $W = C(U, V) = UV$, et $-\ln(W) = -\ln(U) - \ln(V) \sim \Gamma(2, 1)$.

2. Pour la copule de borne supérieure de Fréchet-Hoeffding M , On pose $U = V$ et $M(U, V) = \min(U, V) = U$, alors

$$K(t) = t, \quad t \in [0, 1]. \quad (1.20)$$

3. Pour la copule de borne inférieure de Fréchet-Hoeffding W , On pose $V = 1 - U$ et $W(U, 1 - V) = \max(U + 1 - U - 1, 0) \equiv 0$, alors

$$K(t) = 1, \quad t \in [0, 1]. \quad (1.21)$$

1.9.2. Fonction de Kendall empirique

Pour estimer K , Genest et Rivest (1993, [57]) ont proposé de calculer d'abord les observations empiriques de W :

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{1}{(n-1)} \text{Card}\{j : X_j < X_i \text{ et } Y_j < Y_i\} \\ &= \frac{1}{(n-1)} \text{Card}\{j : R_{X_j} < R_{X_i} \text{ et } R_{Y_j} < R_{Y_i}\} \\ &= \frac{1}{(n-1)} \text{Card}\{j : F_j < F_i \text{ et } G_j < G_i\} \\ &= \frac{n}{(n-1)} C_n(F_i, G_i) - \frac{1}{n-1} \\ &\approx W_i = C_n(F_i, G_i), \quad i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Alors l'estimation de K est la fonction de copule empirique des observations empiriques et qui est définie par

$$K_n(t) = \frac{1}{n} \text{Card}\{i; W_i \leq t\} \quad , t \in [0, 1]. \quad (1.22)$$

1.10. CONCEPT ET MESURE DE DÉPENDANCE

Une mesure de dépendance est une application qui associe deux variables aléatoires ou plus, c'est une mesure qui quantifie le degré de la dépendance qui lie les deux variables ou plus. Une mesure de dépendance doit vérifier certains nombre de propriétés, autrement dit, être une mesure de concordance. Dans cette section, nous allons présenter quelques mesures de dépendance et concordance. Les plus connues sont le Coefficient de Pearson, le Tau de Kendall et le Rho de Spearman. Dans cette section nous montrerons qu'une mesure de dépendance est exclusivement exprimée à partir de la copule.

1.10.1. Notion de concordance

Définition 1.10.1. Deux observations (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de couple de v.a.c., (X, Y) sont dites concordantes si $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$. Il sont dite discordantes si $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$.

Géométriquement, deux observations sont discordantes signifie que la ligne passant par (x_1, y_1) et (x_2, y_2) a une pente négative. Pour un échantillon de taille n d'observations du couple (X, Y) , on a $\binom{2}{n}$ paires distinctes de couples (x_i, y_i) et (x_j, y_j) qui sont, soit concordantes soit discordantes.

1.10.2. Mesure de concordance

Dans toute la suite, on désigne par mesure \mathcal{M} , une fonction numérique (à valeurs dans \mathbb{R}) permettant de mesurer un certain lien entre deux variables aléatoires.

Définition 1.10.2. Une mesure numérique \mathcal{M} entre deux variables X et Y dont la copule C est une mesure de concordance si elle satisfait les propriétés suivantes :

- (a) \mathcal{M} est définie pour toute paire (X, Y) de v.a.c ;
- (b) $-1 = \mathcal{M}\langle X, -X \rangle \leq \mathcal{M}\langle C \rangle \leq \mathcal{M}\langle X, X \rangle = 1$;
- (c) $\mathcal{M}\langle X, Y \rangle = \mathcal{M}\langle Y, X \rangle$;
- (d) Si X et Y sont indépendantes alors $\mathcal{M}\langle X, Y \rangle = \mathcal{M}\langle C^\perp \rangle = 0$;

- (e) $\mathcal{M}\langle X, -Y \rangle = \mathcal{M}\langle -X, Y \rangle = -\mathcal{M}\langle X, Y \rangle$;
- (f) Si $C_1 < C_2$ alors $\mathcal{M}\langle C_1 \rangle \leq \mathcal{M}\langle C_2 \rangle$;
- (g) Si $((X_n, Y_n))$ est une suite de v.a.c dont la copule est C_n , et si C_n converge vers C , alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}\langle C_n \rangle = \mathcal{M}\langle C \rangle$.

Nous présentons par la suite les trois mesures fondamentales qui jouent un rôle important en statistique non paramétrique.

1.10.3. Tau de Kendall

Le Tau de Kendall est une mesure de concordance. Soit (X, Y) un vecteur de v.a.c de fonction de répartition bivariable H de marginales F et G et de copule C . On a $U = F(X)$, $V = G(Y)$ et $W = C(U, V)$. On suppose que les vecteurs $(X', Y') \sim H$ et (X, Y) sont indépendants. Alors le Tau de Kendall est défini par :

$$\begin{aligned}
\tau_C &= P \{ (X, Y) \text{ et } (X', Y') \text{ sont concordants} \} - P \{ (X, Y) \text{ et } (X', Y') \text{ sont discordants} \} \\
&= 2P \{ (X, Y) \text{ et } (X', Y') \text{ sont concordants} \} - 1 \\
&= 4P \{ X' \leq X, Y' \leq Y \} - 1 \\
&= 4\mathbb{E} [C \{ F(X), G(Y) \}] - 1 \\
&= 4\mathbb{E} [C(U, V)] - 1 \\
&= 4\mathbb{E} [W] - 1
\end{aligned}$$

Proposition 1.10.1. Si $C \preceq C^*$ alors $\tau_C \leq \tau_{C^*}$. Par conséquent on a

- (a) $\tau = 1$ si et seulement si $C = M$.
- (b) $\tau = -1$ si et seulement si $C = W$.

Remarque 1.10.1. Lorsque $\tau = 0$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas forcément indépendantes.

Soient P et Q le nombre de paires concordantes et discordantes d'un échantillon de taille n . Alors $P + Q = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$. On définit la version empirique du tau de Kendall par

$$\tau_n = \frac{P - Q}{P + Q} = \frac{2(P - Q)}{n(n-1)} = \frac{4P}{n(n-1)} - 1 \quad (1.23)$$

En utilisant les pseudo-observations W_1, \dots, W_n , on a

$$\tau_n = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n W_i - 1 \quad (1.24)$$

Remarque 1.10.2. On peut dire que τ_n dépend seulement des rangs. Il est facile de voir que $\tau_n = 1$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $R_{X_i} = R_{Y_i}$. De même, $\tau_n = -1$ si et seulement si $R_{X_i} = n + 1 - R_{Y_i}$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dans la suite nous allons montrer que τ_n est un bon estimateur de τ .

Proposition 1.10.2. *Pour toute copule C , on a*

$$\sqrt{n}(\tau_n - \tau)/\sigma_n \rightsquigarrow N(0, 1),$$

où σ_n est l'écart-type les pseudo-observations :

$$4(2W_i - F_i - G_i), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

De plus, sous l'hypothèse d'indépendance ($C = C^\perp$), nous avons : $\sqrt{n}\tau_n \rightsquigarrow N(0, 4/9)$.

Pour la preuve de ce résultat voir Ghoudi and Rémillard (2004, [\[60\]](#)).

1.10.4. Rho de Spearman

Rappelons que le Rho de Spearman est simplement défini comme la corrélation de Pearson entre $U = F(X)$ et $V = G(Y)$:

$$\rho_C = Cor(U, V) = 12\{E(UV) - 1/4\} = 12E(UV) - 3.$$

Remarquons que $\rho_M = 1$, $\rho_W = -1$ et $\rho_{C^\perp} = 0$

Remarque 1.10.3. On peut avoir $\rho_C = 0$ avec $C \neq C^\perp$.

Lemme 1.10.3 (Hoeffding identity). *Soit $(X, Y) \sim H$ et de marginales F et G . Si $E[X^2] < \infty$ et $E[Y^2] < \infty$, alors :*

$$Cov(X, Y) = \int_{\mathbb{R}^2} (H(x, y) - F(x)G(y)) dx dy. \quad (1.25)$$

À partir de ce lemme, l'expression du Rho de Spearman ρ_C est donnée par :

$$\rho_C = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv. \quad (1.26)$$

Remarque 1.10.4. Soient X et Y des variables aléatoires continue. τ et ρ désignent le tau de Kendall et le rho de Spearman, respectivement. Daniels (1950, [28]) a montré que :

$$|3\tau - 2\rho| \leq 1.$$

D'après la définition précédente, le Rho de Spearman peut être estimé à partir de la corrélation entre les paires : $(R_{X_1}, R_{Y_1}), \dots, (R_{X_n}, R_{Y_n})$, ainsi :

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n \left(R_{X_i} - \frac{n+1}{2} \right) \left(R_{Y_i} - \frac{n+1}{2} \right) \\ &= \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n R_{X_i} R_{Y_i} - 3 \frac{n+1}{n-1} \\ &= 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (R_{X_i} - R_{Y_i})^2 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Remarque 1.10.5. Il est facile de voir que :

- $\rho_n = 1$ si et seulement si $R_{X_i} = R_{Y_i} \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- $\rho_n = -1$ si et seulement si $R_{X_i} = n + 1 - R_{Y_i} \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Le résultat suivant affirme que ρ_n est un bon estimateur de Rho de Spearman.

Proposition 1.10.4. *Pour toute copule C , nous avons :*

$$\sqrt{n}(\rho_n, \rho) / \sigma_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

où σ_n est l'écart-type des pseudo-observations :

$$12 \left[\left(F_i - \frac{1}{2} \right) \left(G_i - \frac{1}{2} \right) + S_i + T_i \right], \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

avec

$$S_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\mathbb{I}(F_i \leq F_k) - F_k) (G_k - 1/2),$$

et

$$T_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\mathbb{I}(G_i \leq G_k) - G_k] (F_k - 1/2)$$

De plus, si $C = C^\perp$ alors $\sqrt{(n)}\rho_n \rightsquigarrow N(0, 1)$.

1.11. FAMILLES DES COPULES PARAMÉTRIQUES

Il existe plusieurs copules usuelles qui sont déjà appliquées en Finance et en Hydrologie. Nous commençons par présenter la copule d'indépendance. Nous introduisons juste après la famille Archimédienne, Elliptique et d'autres familles encore.

Nous avons vu que la copule indépendante C^\perp est définie pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^d$ par

$$C^\perp(u) = u_1 \times \dots \times u_d,$$

la fonction de densité de la copule indépendante est donnée par :

$$c^\perp(u) = 1 \quad \forall u \in [0, 1]^d.$$

On peut remarquer que la fonction de Kendall de la copule indépendante devient

$$K(t) = t \sum_{i=0}^{d-1} \frac{(-\ln(t))^i}{i!}, \quad t \in [0, 1].$$

1.11.1. Famille elliptique

Définition 1.11.1. *Un vecteur X de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ est dite elliptique si et seulement si il existe un unique vecteur $\mu \in \mathbb{R}^d$, une matrice semi-définie positive $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ tel que :*

$$X = \mu + \mathcal{R}^{1/2} A^\top S,$$

où $\Sigma = A^\top A$, S est le vecteur uniformément distribué sur S_d la sphère unité de dimension d , et \mathcal{R} est une variable aléatoire positive indépendante de S .

On note $X \sim \mathcal{E}(\mu, \Sigma, \mathcal{R})$. X admet une densité h donnée par :

$$h(x) = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} g\left((x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu)\right),$$

où

$$\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} t^{(d-2)/2} g(t)$$

est la densité de $\mathcal{R} = (X - \mu)^\top \Sigma^{-1} (X - \mu)$. g prend généralement le nom de générateur.

Proposition 1.11.1. *Soit $Y \sim \mathcal{E}(\mu, \Sigma, \mathcal{R})$, On a $Z = \Delta^{-1}(Y - \mu) \sim \mathcal{E}(0, \rho, \mathcal{R})$, où Δ est la diagonale de la matrice $\Delta_{ii} = \sqrt{\Sigma_{ii}}$, et $\rho_{ij} = \Sigma_{ij} / \sqrt{\Sigma_{ii} \Sigma_{jj}}$, $1 \leq i, j \leq d$. De plus, si $E(\mathcal{R}) < \infty$, alors*

$$E(Y) = \mu, \quad \text{Cov}(Y) = \frac{E(\mathcal{R})}{d} \Sigma \quad \text{et} \quad \text{Cov}(Z) = \rho$$

Une copule elliptique est tout simplement une copule associée à une loi elliptique. D'après la proposition (1.11.1), la copule elliptique dépend seulement de \mathcal{R} et de la matrice de corrélation ρ .

Proposition 1.11.2. (*Fang et al.(2002, [42])*)

Si $Y \sim \mathcal{E}(\mu, \rho, \mathcal{R})$, alors $\tau(Y_i, Y_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{ij})$ et ne dépend pas de \mathcal{R} , mais seulement de ρ .

A. Copule Gaussienne

La copule gaussienne est un cas particulier de la famille elliptique, dont le générateur g est défini par $g(t) := \frac{r^{-t/2}}{(2\pi)^{d/2}}$. On a également $\mathcal{R} \sim \chi^2(d)$ et si $Y \sim N_d(0, I)$, alors $S = \frac{Y}{\|Y\|}$ est indépendant de $\mathcal{R} = \|Y\|^2$ et S est uniformément distribué sur la sphère \mathcal{S}_d .

D'après la proposition (1.11.1) la copule gaussienne, dépend seulement de ρ . On la notera par C_ρ . La densité c_ρ est donnée par

$$c_\rho = \frac{1}{|\rho|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\eta^\top(\rho^{-1}-I)\eta} \quad (1.28)$$

pour tout $u = (u_1, \dots, u_d) \in (0, 1)^d$, avec $\eta_j = \phi^{-1}(u_j)$, $j \in \{1, \dots, d\}$, et :

$$C_\rho(u) = \Phi_\rho(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_d)), \quad (1.29)$$

avec Φ_ρ est la loi gaussienne multivariée de paramètre ρ et ϕ^{-1} est l'inverse de la loi normale standard univariée. On peut montrer que

$$\rho(Y_i, Y_j) = \frac{6}{\pi} \arcsin(\rho_{ij}/2), \quad i, j \in \{1, \dots, d\}.$$

B. Copule de Student

Un vecteur aléatoire Y est dit de loi de student multivariée paramétrée par le degré de liberté ν et la matrice de corrélation Σ , si il est défini comme suit :

$$Y = X / \sqrt{Z/\nu}, \quad (1.30)$$

avec $X \sim N_d(0, \Sigma)$, $Z \sim \chi^2(\nu)$ et X et Z sont indépendantes. La densité f_Y est définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{(\pi\nu)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2}) |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \left(1 + y^\top \Sigma^{-1} y / \nu\right)^{-\frac{(\nu+d)}{2}} \quad (1.31)$$

Prenons maintenant $Y \sim \mathcal{E}(g, 0, \Sigma)$, avec g un générateur défini par :

$$g(t) = \frac{\Gamma(\nu + d/2)}{\Gamma(\nu/2)} \frac{(1 + t/\nu)^{-(d+\nu)/2}}{(\pi\nu)^{d/2}}. \quad (1.32)$$

D'après la proposition (1.11.1), la copule de Student dépend seulement des paramètres ν et ρ . On la notera par $C_{\rho, \nu}$, et sa densité $c_{\rho, \nu}$ définie par

$$c_{\rho, \nu}(u) = |\rho|^{-1/2} \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \right)^d \frac{(1 + \eta^\top \rho^{-1} \eta / \nu)^{-(\nu+d)/2}}{\prod_{i=1}^d (1 + \eta_i^2 / \nu)^{-(\nu+1)/2}}, \quad (1.33)$$

avec $\eta_i = t_\nu^{-1}(u_i)$.

1.11.2. Famille Archimédienne

Définition 1.11.2. ϕ est le générateur d'une copule multivariée si

- (i) $\phi : [0, 1] \mapsto [0, \phi(0)]$ est décroissante, avec $\phi(1) = 0$
- (ii) Pour tout $0 < s < \phi(0)$ et pour tout $1 \leq j \leq d$,

$$(-1)^j \frac{\partial^j}{\partial s^j} \phi^{-1}(s) > 0$$

Soit

$$\mathcal{D}_\phi = \{u = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d; \phi(u_1) + \dots + \phi(u_d) < \phi(0)\}.$$

La copule Archimédienne générée par ϕ est définie par

$$C(u) = \begin{cases} \phi^{-1}\{\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)\} & \text{si } u \in \mathcal{D}_\phi \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.34)$$

Barbe et al. (1996, [9]) ont défini une fonction $f_i(t)$ de la forme suivante

$$f_i(t) = \frac{\partial^{i+1}}{\partial s^{i+1}} \phi^{-1} \Big|_{\phi(t)=s} \quad (1.35)$$

Par hypothèse, $f_j(t) > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $j \in \{0, \dots, d\}$. On a également $f_0(t) = t, f_1(t) = -1/\phi'(t)$, et pour $j \in \{1, \dots, d\}$

$$f_j(t) = -\frac{1}{\phi'(t)} f'_{j-1}(t), \quad t \in (0, 1]. \quad (1.36)$$

Il s'ensuit que la densité de la copule $C = \phi^{-1}\{\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)\}$ est donnée par

$$c(u) = f_d\{C(u)\} \prod_{j=1}^d \{-\phi'(u_j)\}, \quad u = (u_1, \dots, u_d) \in (0, 1)^d. \quad (1.37)$$

De la même manière, la fonction Kendall est également donnée par :

$$K(t) = \sum_{j=0}^{d-1} -\frac{\phi^j(t)}{j!} f_j(t). \quad (1.38)$$

Nous allons présenter maintenant, l'expression du tau de Kendall pour les copules archimédienne bivariée. L'expression est donnée en fonction du générateur ϕ (Genest et Rivest (1993, [57])), telle que :

$$K(t) = t - \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}$$

Alors

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt. \quad (1.39)$$

Nous présentons dans la suite quelques familles des copules archimédiennes.

A. Famille de Clayton

Le générateur de la famille de copules Clayton est donné par

$$\phi_\theta(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta},$$

où $\theta \in \left[-\frac{1}{d-1}, +\infty \setminus \{0\}\right]$. On a

$$\phi^{-1}(s) = (1 + \theta s)^{-1/\theta}.$$

En appliquant la définition de la copule archimédienne, nous trouvons la copule de Clayton, sa fonction est donnée par :

$$C_\theta(u) = \max \left\{ 0, \left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} - d + 1 \right)^{-1/\theta} \right\}$$

Pour $\theta \geq 0$, l'expression de la copule Clayton est donnée par :

$$C_\theta = \left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} - d + 1 \right)^{-1/\theta}.$$

On remarque que $C_0(u) = \lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(u) = C_\perp(u)$, et $C_\infty(u) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta(u)$

En utilisant la relation (1.39), nous pouvons calculer le Tau de Kendall pour la famille de Clayton dans le cas bivarié.

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left(\frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\theta}{\theta+2} \end{aligned} \quad (1.40)$$

B. Famille de Gumbel

Soit la fonction $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$, avec $\theta \geq 1$ et $t \in [0, 1]$. On peut vérifier que ϕ est continue et strictement décroissante définie de $[0, 1]$ dans $[0, +\infty]$. De plus, ϕ est convexe et un générateur strict. En appliquant l'expression (1.34), nous trouvons la fonction de copules de Gumbel, qui est donnée par :

$$C_\theta(u) = \exp \left(- \left[\sum_{i=1}^d (-\ln u_i)^\theta \right]^{1/\theta} \right) \quad (1.41)$$

On note que C_1 est la copule indépendante. Ainsi, $C_0(u) = \lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(u) = C_+(u)$.

Dans le cas bivarié, et d'après l'expression (1.39), le Tau de Kendall de la copule de Gumbel est donné par :

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left(\left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\theta} \end{aligned} \quad (1.42)$$

C. Famille de Frank

Le générateur de la famille de Frank est donné par :

$$\phi(t) = -\ln \frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

En appliquant l'expression (1.34), on a l'expression de la copule :

$$C_\theta(u) = \frac{-1}{\theta} \ln \left[1 + (\exp(-\theta) - 1) \prod_{i=1}^d \frac{\exp(-\theta u_i) - 1}{\exp(-\theta) - 1} \right] \quad (1.43)$$

Le Tau de Kendall correspond à cette famille, et est donné par la formule suivante :

$$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta} (1 - D_1(\theta)), \quad (1.44)$$

où $D_k(x)$ est la fonction de Debye donnée par :

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{\exp(t) - 1} dt$$

1.11.3. Méthode de Simulation des copules

A. Simulation copule Gaussienne

Notre objectif dans cette partie est de simuler des observations (U_1, \dots, U_d) de la copule gaussienne C_ρ . Dans un premier temps, on va simuler $Y \sim N(0, \rho)$, et on définit d'abord :

$$U = (U_1, \dots, U_d) \quad \text{avec} \quad U_i = \phi(Y_i), \quad i \in \{1, \dots, d\}.$$

La figure (1.1) illustre cette simulation.

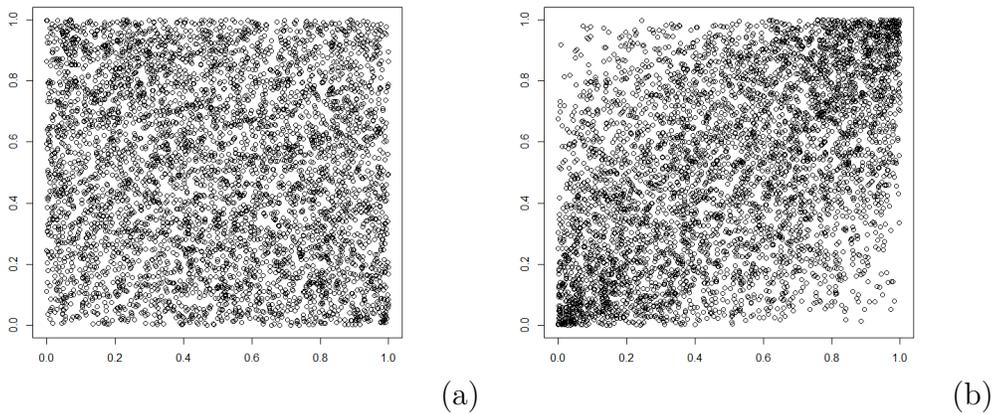


FIGURE 1.1 – Nuages de paires des points simulées à partir de la copule gaussienne pour $\rho = -0,1$ (a) et $\rho = 0,5$ (b).

B. Simulation copule de Student Pour simuler $U \sim C_{\rho, \nu}$, on va simuler d'abord Y définie dans l'équation (1.30) par $Y = X / \sqrt{Z/\nu}$ avec $X \sim N_d(0, \Sigma)$, $Z \sim \chi^2(\nu)$, puis on va prendre $U = (U_1, \dots, U_n)$ tel que $U_i = t_\nu(Y_i)$, $i \in \{1, \dots, d\}$. avec t_ν est la fonction de répartition univariée de la loi student à ν degrés de liberté. La figure (1.2) illustre un exemple de simulation.

C. Simulation de Copule Archimédienne

Pour Simuler une copule archimédienne, nous utilisons le résultat de Marshall and Olkin (1988, [84]). Pour cela, nous avons besoin d'abord de rappeler quelques définitions et résultats importants.

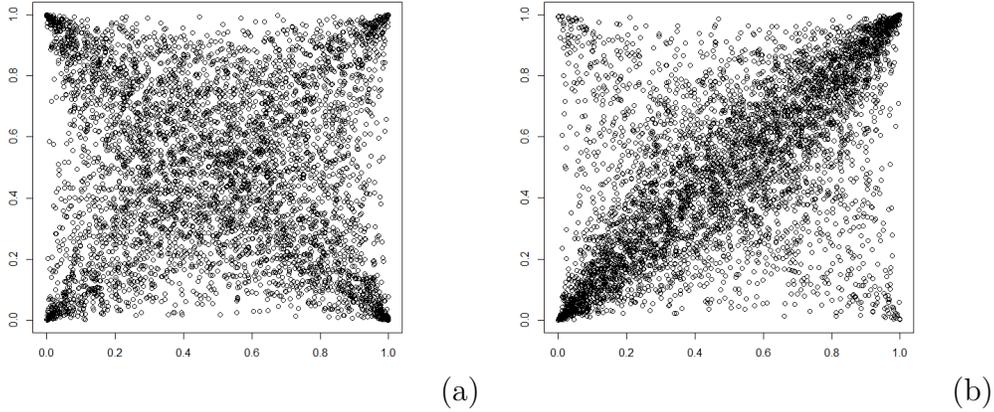


FIGURE 1.2 – Nuages de paires des points simulées à partir de la copule Student paramétrée par $\nu = 1$ degrés de liberté et $\rho = -0.1$ (a) et $\rho = 0,7$ (b).

Rappelons que la transformée de Laplace L d'une variable aléatoire positive S , avec une fonction de répartition F_S est définie par :

$$L(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-S\lambda}) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dF_S(t) \quad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Proposition 1.11.3. *Si $\phi(0) = \infty$, alors ϕ définit une copule, si et seulement s'il existe une variable aléatoire positive S telle que ϕ^{-1} est la transformée de Laplace de S .*

Proposition 1.11.4. *(Marshall and Olkin (1988, [84])) Soient S une variable aléatoire positive et ϕ^{-1} sa transformée de Laplace. Soient $\{E_i\}_{1 \leq i \leq d}$ deux variables aléatoires i.i.d de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ indépendantes de S . On pose :*

$$U_i := \phi^{-1}(E_i/S).$$

On a alors $U = (U_1, \dots, U_d) \sim C$, et la variable $V = C(U)$ est générée par $\phi^{-1}(E/S)$, avec

$$E = \sum_{i=1}^d E_i \sim \Gamma(d, 1).$$

Pour simuler des observations de la copule de Clayton avec $\theta > 0$, nous utilisons les résultats de la proposition de Marshall et Olkin (1988, [84]) en procédant avec l'algorithme suivant :

Simuler deux variables E_1 et E_2 de loi exponentielle de paramètre

1.

Simuler S de loi Gamma de paramètre $(1/\theta, 1)$.

Prendre $U_1 = (1 + E_1/S)^{-\theta}$ et $U_2 = (1 + E_2/S)^{-\theta}$.

La figure (1.3) illustre une simulation de la copule Clayton pour $\theta = 0.5$.

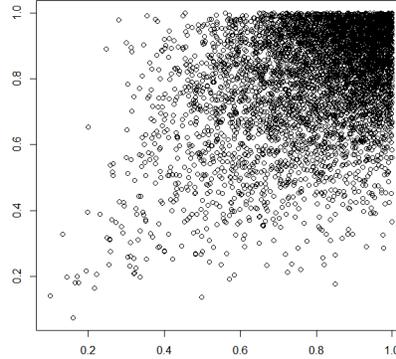


FIGURE 1.3 – Nuages de paires de points simulés à partir de la copule Clayton pour $\theta = 0, 5$.

Pour Simuler un échantillon de la copule de Gumbel, on utilise l’algorithme suivant :

Simuler deux variables X de la loi uniforme $[0, 1]$,

Simuler W de loi exponentielle de paramètre 1,

Prendre $S = \sin(\theta\pi X)(\sin(\pi X))^{-1/\theta} \left(\frac{\sin((1-\theta)\pi X)}{W} \right)^{(1-\theta)/\theta}$,

Simuler E_1 et E_2 de loi exponentielle de paramètre 1,

Prendre $U_1 = \exp(-(E_1/S)^\theta)$ et $U_2 = \exp(-(E_2/S)^\theta)$.

On peut également utiliser la notion de la fonction de répartition conditionnelle pour simuler des observations d’une copule donnée C . Nous savons que

$$P\{U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1\} = C_{2|1}(u_1, u_2)$$

Nous suivons l’algorithme suivant, suggéré par Genest et Mackay(1986, [56]), pour simuler une copule donnée C :

Simuler deux variables aléatoires uniformes E_1 et E_2 ,

Prendre U_1 égal à E_1 ,

Prendre U_2 égal à $C_{2|1}^{-1}(E_2, U_1)$.

Exemple 1.11.5. Prenons la copule bivariée de Frank, nous avons

$$C(u_1, u_2) = \frac{-1}{\theta} \ln \left[1 + (\exp(-\theta) - 1) \prod_{i=1}^2 \frac{\exp(-\theta u_i) - 1}{\exp(-\theta) - 1} \right]$$

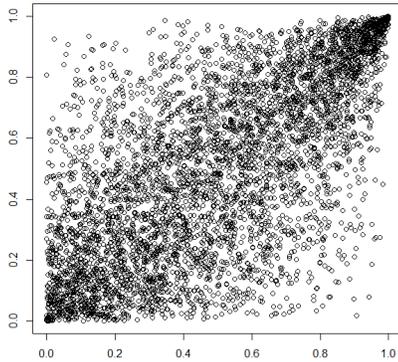
Nous en déduisons que

$$C_{2|1}(u_1, u_2) = \frac{(\exp(-\theta u_2) - 1) \exp(-\theta u_1)}{(\exp(-\theta) - 1) + \prod_{i=1}^2 (\exp(-\theta u_i) - 1)}$$

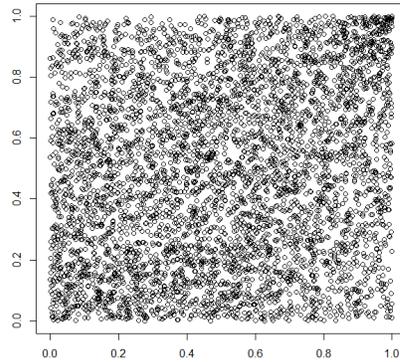
Finalement nous obtenons :

$$C_{2|1}^{-1}(u, u_1) = \frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{u(\exp(-\theta) - 1)}{u + (1 + u) \exp(-\theta u_1)} \right]$$

Les figures (1.4) et (1.5) illustrent une simulation, en utilisant l'algorithme précédent, des copules de Gumbel et Frank pour différentes valeurs du tau de Kendall.

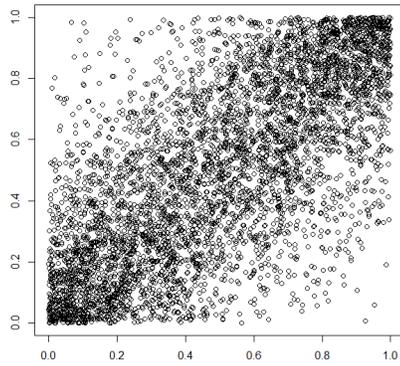


(a)

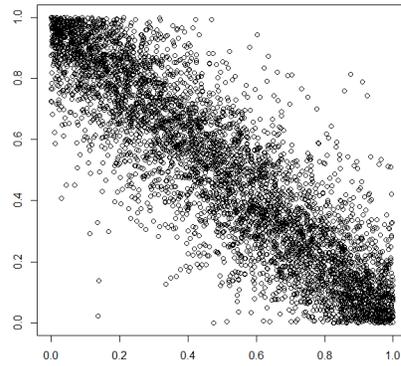


(b)

FIGURE 1.4 – Nuages de paires des points simulées à partir de la copule Gumbel pour $\tau = 0,5$ (a) et $\tau = 0,1$ (b).



(a)



(b)

FIGURE 1.5 – Nuages de paires de points simulées à partir de la copule Frank pour $\tau = 0,5$ (a) et $\tau = -0.7$ (b).

CHAPITRE 2

LES STRUCTURES DE DÉPENDANCE ASYMÉTRIQUES POSITIVES ET NÉGATIVES

2.1. INTRODUCTION

La dépendance entre les différentes données économiques peut être généralement, soit une dépendance positive ou une dépendance négative. La dépendance entre les données économiques peut être très compliquée et non linéaire en raison de l'effet des chocs externes. Nous utilisons donc le tau de Kendall τ pour mesurer la direction et l'intensité de la dépendance.

La notion de dépendance de queue réside de l'étude de la dépendance au niveau des queues qui peuvent être représentées par des variables aléatoires. La dépendance de queue quantifie la probabilité pour que deux variables atteignent à la fois deux valeurs extrêmes. Il arrive plusieurs fois, lors de l'analyse des séries chronologiques financières que deux séries présentent le même type de comportement extrême et qui peut être, soit une dépendance supérieure-supérieure notée "**ur**" (upper-right) soit une dépendance inférieure-inférieure notée "**ll**" (lower-left). Cependant, il peut également arriver qu'une valeur dans la queue inférieure (resp. supérieure) de la première série et l'autre valeur dans la queue supérieurs (resp. inférieure) de la deuxième série apparaissent simultanément. Cela peut être observé dans les prix des actions d'un certain portefeuille ainsi que dans les rendements des indices boursiers et d'autres séries chronologiques financières. Nous appellerons cela *la dépendance de queue inférieure-supérieure* notée "**ul**" (upper-left) et *la dépendance de queue supérieure-inférieure* notée "**lr**" (lower-right).

Joe (1997, [74]) et Caillault et Guégan (2005, [15]) ont proposé deux fonctions de dépendance de la queue supérieure-supérieure et de la queue inférieure-inférieure et qui ont été appliquées dans divers domaines de la statistique appliquée. En outre, deux autres fonctions de dépendance, la queue inférieure-supérieure et la queue supérieure-inférieure, ont été proposées pour décrire les dépendances extrêmes négatives sur les séries.

2.2. LES COPULES PIVOTÉES ET LEURS PROPRIÉTÉS

Généralement, les copules usuelles sont, soit, des copules symétriques, soit des copules asymétriques. La copule gaussienne et la copule de Student sont des copules symétriques qui peuvent caractériser une dépendance positive et négative. D'autre part, la copule gaussienne n'a pas une dépendance de queue et la copule de Student a une dépendance de queue symétrique. Tandis que, les copules comme celle de Clayton, de Gumbel, de Joe, et même si ces copules sont pivotées par une rotation d'angle π , peuvent décrire une dépendance positive et asymétrique. Patton (2012, [96]) a souligné qu'une demi-rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ de ces copules asymétriques, implique une dépendance négative et asymétrique. Ainsi, Pour capturer la dépendance de la queue inférieure-supérieure asymétrique τ_{lr} et la dépendance de la queue supérieure-inférieure τ_{ul} , nous allons construire des copules asymétriques de demi-rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$.

Il est bien connu que, si une variable aléatoire U suit la loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$, alors $1 - U$ suit également la loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

Dans la suite on note C la copule originale. Ainsi $C_{(.,\frac{\pi}{2})}$, $C_{(.,\pi)}$ et $C_{(.,-\frac{\pi}{2})}$ désignent respectivement les copules avec une rotation de $\frac{\pi}{2}$, π et $-\frac{\pi}{2}$. Notons aussi C_C , C_J et C_G les copules de Clayton, de Joe et celle de Gumbel respectivement.

Théorème 2.2.1. *Soient U et V deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[0, 1]$. Si le couple $(U, V) \sim C_j(\theta)$ avec $j \in \{C, G, J\}$, alors :*

(a) $(1 - U, V) \sim C_{(j,\frac{\pi}{2})}(\theta)$ tel que

$$C_{(j,\frac{\pi}{2})}(u, v; \theta) = v - C_j(1 - u, v; \theta) \text{ et } c_{(j,\frac{\pi}{2})}(u, v; \theta) = c_j(1 - u, v; \theta).$$

(b) $(1 - U, 1 - V) \sim C_{(j,\pi)}(\theta)$ tel que

$$C_{(j,\pi)}(u, v; \theta) = u + v - 1 + C_j(1 - v, 1 - v; \theta) \text{ et } c_{(j,\pi)}(u, v; \theta) = c_j(1 - u, 1 - v; \theta).$$

(c) $(U, 1 - V) \sim C_{(j,-\frac{\pi}{2})}(\theta)$ tel que

$$C_{(j,-\frac{\pi}{2})}(u, v; \theta) = u - C_j(u, 1 - v; \theta) \text{ et } c_{(j,-\frac{\pi}{2})}(u, v; \theta) = c_j(u, 1 - v; \theta),$$

avec $\theta \in \Theta_j$ est le paramètre de la copule C_j .

Démonstration. Supposons que C_j est la copule ajustée de couple (U, V) avec $j \in \{C, G, J\}$, c'est à dire $C_j(u, v; \theta) = P(U \leq u, V \leq v)$. Si $(1 - U, V) \sim C_{(j, \frac{\pi}{2})}$, alors

$$\begin{aligned} C_{(j, \frac{\pi}{2})}(u, v; \theta) &= P(1 - U \leq u, V \leq v) = P(U \geq 1 - u, V \leq v) \\ &= P(V \leq v) - P(U < 1 - u, V \leq v) \\ &= v - C_j(1 - u, v; \theta) \end{aligned} \quad (2.1)$$

On peut montrer les deux autres équations de manière analogue. D'autre part, si la dérivée seconde de la copule $C_{(j, d)}$ existe pour tout $d \in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{-\pi}{2}\}$, $j \in \{C, G, J\}$, on pose

$$c_{(j, d)}(u, v; \theta) = \frac{\partial^2 C_{(j, d)}(u, v; \theta)}{\partial u \partial v}.$$

Alors la densité de la copule $C_{(j, d)}$ est définie par :

$$\begin{cases} c_{(j, \frac{\pi}{2})}(u, v; \theta) = c_j(1 - u, v; \theta), & \theta \in \Theta_j \\ c_{(j, \pi)}(u, v; \theta) = c_j(1 - u, 1 - v; \theta), & \theta \in \Theta_j \\ c_{(j, \frac{-\pi}{2})}(u, v; \theta) = c_j(u, 1 - v; \theta), & \theta \in \Theta_j. \end{cases}$$

□

Nous allons maintenant montrer la relation qui existe entre le tau de Kendall d'une copule pivotée et celle d'origine $(\tau_{(j, \frac{\pi}{2})}, \tau_{(j, \pi)}, \tau_{(j, \frac{-\pi}{2})}$ et τ_j).

Lemme 2.2.2. *Pour tout $j \in C, G, J$, on a :*

- (a) $\tau_{(j, \frac{\pi}{2})} = -\tau_j$
- (b) $\tau_{(j, \frac{-\pi}{2})} = -\tau_j$
- (c) $\tau_{(j, \pi)} = \tau_j$

Démonstration. L'expression du tau de Kendall τ en fonction de la copule C est définie par :

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) c(u, v) du dv - 1 \quad (2.2)$$

Alors

$$\begin{aligned} \tau_{(j, \frac{\pi}{2})}(\theta) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C_{(j, \frac{\pi}{2})}(u, v; \theta) c_{R_{1j}}(u, v; \theta) du dv - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 (v - C_j(1 - u, v; \theta)) c_j(1 - u, v; \theta) du dv - 1 \\ &= -4 \int_0^1 \int_0^1 C_j(1 - u, v; \theta) c_j(1 - u, v; \theta) du dv + 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

En effectuant un changement de variable $s = 1 - u$ et $t = v$ la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne est donnée par $|J(s, t)| = |-1| = 1$. Par suite :

$$\begin{aligned}
\tau_{(j, \frac{\pi}{2})}(\theta) &= -4 \int_0^1 \int_0^1 C_j(s, t; \theta) c_j(s, t; \theta) |J(s, t)| ds dt + 1 \\
&= -4 \int_0^1 \int_0^1 C_j(s, t; \theta) c_j(s, t; \theta) ds dt + 1 \\
&= -\tau_j(\theta)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

D'une façon similaire, on montre les propriétés (b) et (c). □

2.3. COEFFICIENTS DE DÉPENDANCE DE QUEUE

Soient X et Y deux variables aléatoires de lois marginales respectivement F et G . On définit les coefficients des queues de dépendance par :

$$\begin{aligned}
\lambda^{ur} &:= \lim_{\alpha \rightarrow 0} P(X > F^{-1}(1 - \alpha) | Y > G^{-1}(1 - \alpha)), \\
\lambda^{ul} &:= \lim_{\alpha \rightarrow 0} P(X < F^{-1}(\alpha) | Y > G^{-1}(1 - \alpha)), \\
\lambda^{ll} &:= \lim_{\alpha \rightarrow 0} P(X < F^{-1}(\alpha) | Y < G^{-1}(\alpha)), \\
\lambda^{lr} &:= \lim_{\alpha \rightarrow 0} P(X > F^{-1}(1 - \alpha) | Y < G^{-1}(\alpha)),
\end{aligned}$$

où λ^{ur} , λ^{ul} , λ^{ll} et λ^{lr} désignent respectivement, la dépendance de queue supérieure-droite, supérieure-inférieure, inférieure-supérieure et inférieure-inférieure. Les coefficients λ^{ul} et λ^{lr} sont plus appropriés pour caractériser un co-mouvement extrême négatif entre les variable X et Y .

Dans la suite nous développerons les coefficients de dépendance de queue appropriés afin de modéliser la dépendance extrême négative entre les variables X et Y .

Théorème 2.3.1. *Soit C une copule donnée de paramètre θ , les coefficients de dépendance de queue de la copule C sont donnés pour $\theta \in \Theta_j$ par :*

$$\begin{aligned}
\lambda^{ul} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - C(\alpha, 1 - \alpha; \theta)}{\alpha}, \\
\lambda^{ur} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C(1 - \alpha, 1 - \alpha; \theta) + 2\alpha - 1}{\alpha}, \\
\lambda^{ll} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C(\alpha, \alpha; \theta)}{\alpha}, \\
\lambda^{lr} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - C(1 - \alpha, \alpha; \theta)}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Démonstration. D'après le théorème de Sklar, une copule C est une fonction de répartition avec des marges uniforme. Soient X et Y deux variables aléatoire de fonction de répartition F et G respectivement.

$$C(u, v) = \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(u), Y \leq G^{-1}(v)).$$

Le coefficient de dépendance de la queue supérieure-inférieure est donné par :

$$\begin{aligned} \lambda^{ul}(\alpha; \theta) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbb{P}(X < F_X^{-1}(\alpha) | Y > F_Y^{-1}(1 - \alpha)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X < F_X^{-1}(\alpha), Y > F_Y^{-1}(1 - \alpha))}{\mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(1 - \alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X < F_X^{-1}(\alpha) - \mathbb{P}(X < F_X^{-1}(\alpha), Y \geq F_Y^{-1}(1 - \alpha))}{\mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(1 - \alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - C(\alpha, 1 - \alpha; \theta)}{\alpha} \end{aligned} \tag{2.5}$$

De manière similaire, on montera les trois autres coefficients de queue. □

Nous allons maintenant montrer, par le théorème suivant, la relation qui existe entre le coefficient de dépendance de queue de la copule pivotée et celle de la copule originale.

Théorème 2.3.2. *Soient C_j , avec $j \in \{C, G, J\}$, une copule de coefficient de dépendance de queue λ_j , et soit $C_{(j,d)}$ sa copule pivotée de coefficient de dépendance de queue $\lambda_{(j,d)}$, on a :*

— Copule pivotée à $\frac{\pi}{2}$:

$$\lambda_{(j, \frac{\pi}{2})}^{ul} = \lambda_j^{ur}, \lambda_{(j, \frac{\pi}{2})}^{lr} = \lambda_j^{ll}, \lambda_{(j, \frac{\pi}{2})}^{ur} = \lambda_j^{ul}, \lambda_{(j, \frac{\pi}{2})}^{ll} = \lambda_j^{lr} \tag{2.6}$$

— Copule pivotée à π :

$$\lambda_{(j, \pi)}^{ul} = \lambda_j^{lr}, \lambda_{(j, \pi)}^{lr} = \lambda_j^{ul}, \lambda_{(j, \pi)}^{ur} = \lambda_j^{ll}, \lambda_{(j, \pi)}^{ll} = \lambda_j^{ur} \tag{2.7}$$

— Copule pivotée à $-\frac{\pi}{2}$:

$$\lambda_{(j, -\frac{\pi}{2})}^{ul} = \lambda_j^{ll}, \lambda_{(j, -\frac{\pi}{2})}^{lr} = \lambda_j^{ur}, \lambda_{(j, -\frac{\pi}{2})}^{ur} = \lambda_j^{lr}, \lambda_{(j, -\frac{\pi}{2})}^{ll} = \lambda_j^{ul} \tag{2.8}$$

Preuve 2.3.3. *Nous montrons la preuve de l'équation [2.6](#).*

$$\begin{aligned} \lambda_{(j, \frac{\pi}{2})}^{ul} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - C_{(j, \frac{\pi}{2})}(\alpha, 1 - \alpha)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - (1 - \alpha - C_j(1 - \alpha, 1 - \alpha))}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C_j(1 - \alpha, 1 - \alpha) + 2\alpha - 1}{\alpha} \\ &= \lambda_j^{ur} \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{(j, \frac{\pi}{2})}^{lr} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - C_{(j, \frac{\pi}{2})}(1 - \alpha, \alpha)}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - (\alpha - C_j(1 - (1 - \alpha), \alpha))}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C_j(\alpha, \alpha)}{\alpha} \\
&= \lambda_j^u
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{(j, \frac{\pi}{2})}^{ur} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C_{(j, \frac{\pi}{2})}(1 - \alpha, 1 - \alpha) + 2\alpha - 1}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \alpha - C_j(\alpha, 1 - \alpha) + 2\alpha - 1}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - C_j(\alpha, 1 - \alpha)}{\alpha} \\
&= \lambda_j^{ul}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{(j, \frac{\pi}{2})}^u &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C_{(j, \frac{\pi}{2})}(\alpha, \alpha)}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - C_j(1 - \alpha, \alpha)}{\alpha} \\
&= \lambda_j^{lr}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

De la même façon, nous pouvons montrer les deux équations [2.8](#) et [2.7](#).

Exemple 2.3.4. L'expression de la copule Joe est donnée par :

$$C(u, v) = 1 - [(1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta - (1 - u)^\theta(1 - v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \tag{2.13}$$

En utilisant le théorème [2.3.1](#), les coefficients de dépendance de queue supérieure-supérieure de la copule de Joe s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\lambda_J^{ur} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C_J(1 - \alpha, 1 - \alpha) + 2\alpha - 1}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - (2\alpha^\theta - \alpha^{2\theta})^{1/\theta} + 2\alpha - 1}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2 - \frac{(2\alpha^\theta - \alpha^{2\theta})^{1/\theta}}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2 - (2 - \alpha^\theta)^{1/\theta} \\
&= 2 - 2^{1/\theta}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

On peut également montrer que la copule de Joe n'admet pas de coefficient de dépendance de queue supérieure-inférieure, inférieure-inférieure et inférieure-supérieure.

Copula	Type de Dépendance	Tau de Kendall	Coefficient de dépendance de queue
Gaussian	Positive and Negative	$\tau_{Ga}(\theta) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\theta)$	***
Student	Positive and Negative	$\tau_S(\theta) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\theta)$	$\lambda \cdot = 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\nu+1} \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} \right)$
Frank	Positive and Negative	$\tau_F(\theta) = 1 - 4D_1(-\theta) - 1/\theta$ (*)	***
Joe	Positive	$\tau_J(\theta) = 1 + \frac{4}{\theta^2} \int_0^1 x \log(x)(1-x)^{2(1-\theta)/\theta} \partial x$	$\lambda^{ur} = 2 - 2^{1/\theta}$
Clayton	Positive	$\tau_C(\theta) = \frac{\theta}{\theta+2}$	$\lambda^{ll} = 2^{-1/\theta}$
Gumbel	Positive	$\tau_G(\theta) = 1 - \frac{1}{\theta}$	$\lambda^{ur} = 2 - 2^{1/\theta}$
Joe π	Positive	$\tau_{J_{180}}(\theta) = \tau_J(\theta)$	$\lambda^{ll} = 2 - 2^{1/\theta}$
Clayton π	Positive	$\tau_{C_{180}}(\theta) = \tau_C(\theta)$	$\lambda^{ur} = 2^{-1/\theta}$
Gumbel π	Positive	$\tau_{G_{180}}(\theta) = \tau_G(\theta)$	$\lambda^{ll} = 2 - 2^{1/\theta}$
Joe $\frac{\pi}{2}$	Negative	$\tau_{J_{90}}(\theta) = -\tau_J(\theta)$	$\lambda^{ul} = 2 - 2^{1/\theta}$
Clayton $\frac{\pi}{2}$	Negative	$\tau_{C_{90}}(\theta) = -\tau_C(\theta)$	$\lambda^{lr} = 2^{-1/\theta}$
Gumbel $\frac{\pi}{2}$	Negative	$\tau_{G_{90}}(\theta) = -\tau_G(\theta)$	$\lambda^{ul} = 2 - 2^{1/\theta}$
Joe $-\frac{\pi}{2}$	Negative	$\tau_{J_{270}}(\theta) = -\tau_J(\theta)$	$\lambda^{lr} = 2 - 2^{1/\theta}$
Clayton $-\frac{\pi}{2}$	Negative	$\tau_{C_{270}}(\theta) = -\tau_C(\theta)$	$\lambda^{ul} = 2^{-1/\theta}$
Gumbel $-\frac{\pi}{2}$	Negative	$\tau_{G_{270}}(\theta) = \tau_G(\theta)$	$\lambda^{lr} = 2 - 2^{1/\theta}$

TABLE 2.1 – Exemples de familles de copules, leurs type de dépendance qu’elles peuvent modéliser et l’expression du tau de Kendall et coefficient de dépendance de queue associés.

Nous présentons quelques illustrations, Fig 2.1, qui présentent les fonctions de $\lambda(\alpha)$ de chaque coefficient de dépendance de queue pour les copules de Gumbel, de Joe et celle de Clayton avec différentes valeurs du paramètre θ .

Le tableau (2.1) présente l’ensemble des copules les plus utilisées en finance et économie, leurs types de dépendance, l’expression du tau de Kendall associé et le coefficient de dépendance de queue capturé par chaque copule.

Maintenant, nous traitons la relation qui existe entre le Tau de Kendall d’une copule mixte et le Tau de Kendall des copules composantes.

Théorème 2.3.5. Soit $C^M = \sum_{j=1}^n p_j C_j(u, v; \theta_j)$ une mixture de n copules C_j avec une pondération p_j pour $j \in \{1..n\}$ et soit τ_j le tau de Kendall de la copule C_j . On a alors :

$$\tau_M(\Theta) = \sum_{j=1}^n p_j^2 \tau_j(\theta_j) + 2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n p_i p_j.$$

Démonstration. L’équation 1.10.3 donne l’expression du tau de Kendall $\tau(\theta)$ comme étant une fonction de copule C_θ . Donc, pour une copule mixte donnée $C_M(u, v; \Theta) =$

$\sum_{j=1}^n p_j C_j(u, v; \theta_j)$, son Tau de Kendall τ_M est donné par :

$$\begin{aligned}
\tau_M(\Theta) &= 4 \int_{I^2} C_M(u, v; \Theta) c_M(u, v; \Theta) dudv - 1 \\
&= 4 \int_{I^2} \sum_{j=1}^n p_j C_j(u, v; \theta_j) \sum_{j=1}^n p_j c_j(u, v; \theta_j) dudv - 1 \\
&= 4 \int_{I^2} \left\{ \sum_{j=1}^n p_j^2 C_j(u, v; \theta_j) c_j(u, v; \theta_j) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j [C_i(u, v; \theta_i) c_j(u, v; \theta_j) + \right. \\
&\quad \left. C_j(u, v; \theta_j) c_i(u, v; \theta_i)] \right\} dudv - 1 \\
&= \sum_{j=1}^n \{ p_j^2 [4 \int_{I^2} C_j(u, v; \theta_j) c_j(u, v; \theta_j) dudv - 1] + p_j^2 \} + \\
&\quad 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j \left\{ \int_{I^2} C_i(u, v; \theta_i) c_j(u, v; \theta_j) dudv + \int_{I^2} C_j(u, v; \theta_j) c_i(u, v; \theta_i) dudv \right\} - 1 \\
&= \sum_{j=1}^n p_j^2 \tau_j(\theta_j) + \sum_{j=1}^n p_j^2 + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j \{ [C_i(u, v; \theta_i) C_j(u, v; \theta_j)]_{I^2} \} - 1 \\
&= \sum_{j=1}^n p_j^2 \tau_j(\theta_j) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j
\end{aligned} \tag{2.15}$$

□

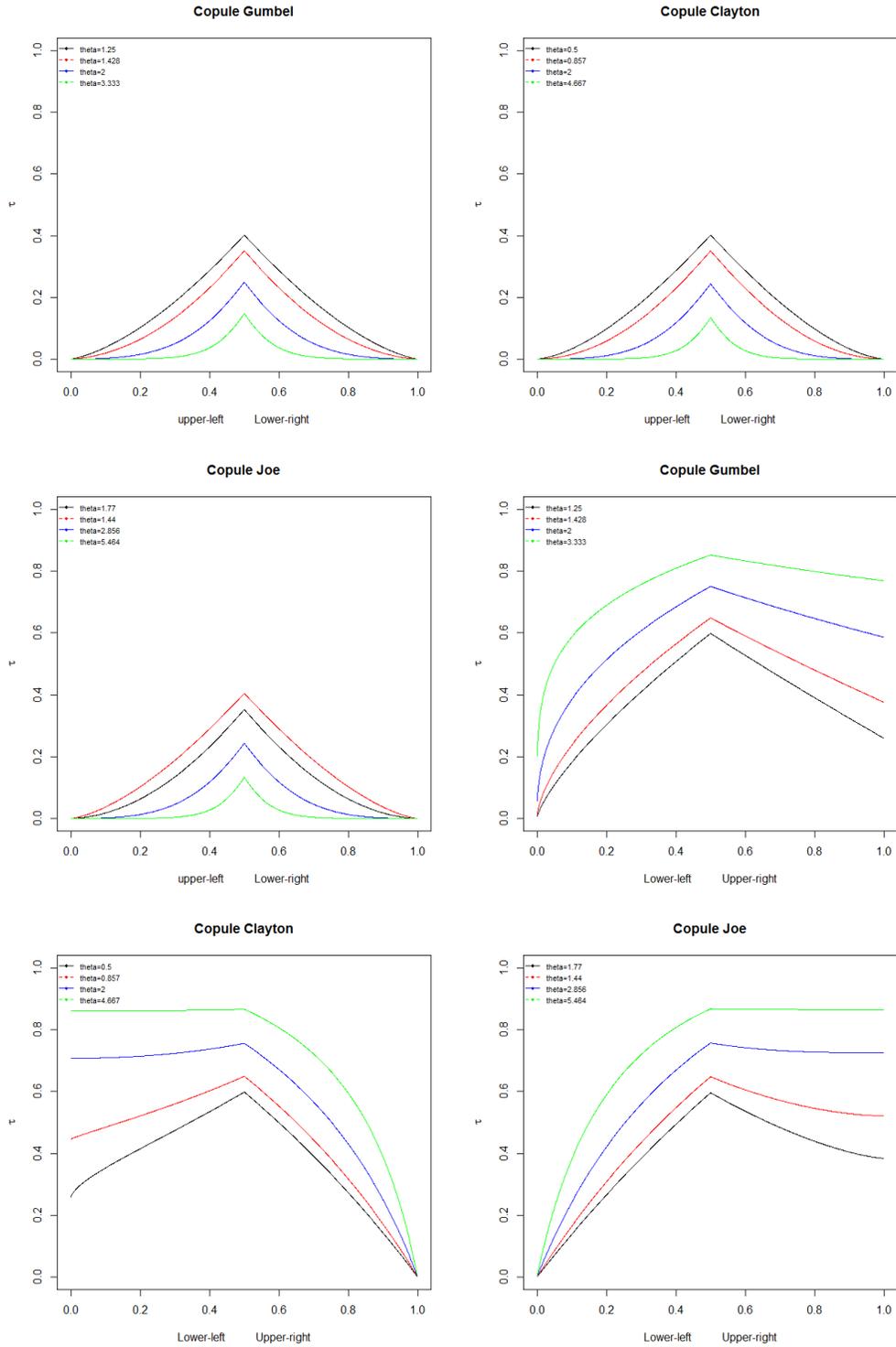


FIGURE 2.1 – Coefficient de dépendance de queue pour les copules de Clayton, de Gumbel et Joe.

CHAPITRE 3

OUTILS D'ANALYSE DE DÉPENDANCE ET DE CHOIX DE COPULES

La présence de la dépendance sérielle et l'hétéroscédasticité dans les séries étudiées, est habituellement traitée en utilisant une modélisation univariée des séries chronologiques comme par des modèles Autorégressifs AR, Moyenne Mobile MA, et d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressif généralisé GARCH... Tandis que l'interdépendance entre les séries chronologiques est modélisée par une copule associée aux innovations (i.i.d) issues de ces modèles univariées (Patton (2001, [93]), Van den Goorbergh et al.(2005, [61]), Zhang et Guégan (2008, [113]), Grégoire et al. (2008, [62])). Dans ce chapitre, nous présentons les outils nécessaires pour modéliser les séries univariées, ainsi que les approches paramétriques et semi-paramétriques pour le choix de la copule appropriée.

3.1. OUTILS POUR L'ANALYSE UNIVARIÉE DES SÉRIES CHRONOLOGIQUES

Une série chronologique (ou temporelle) est une succession d'observations au cours du temps :

$$\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$$

L'analyse des séries chronologiques est une partie de la statistique qui a pour but de caractériser la dépendance pouvant exister dans une série d'observations. Dans la littérature, la plupart des modèles statistiques font appel à l'hypothèse d'indépendance des observations. Cependant, lorsqu'on observe un phénomène dans le temps, on s'attend en général à

ce que des observations suffisamment rapprochées soient liées entre elles. Dans une telle situation, nous ne pouvons par conséquent appliquer des modèles statistiques faisant appel à l'hypothèse d'indépendance. L'approche que nous allons considérer dans cette partie consiste à caractériser la dépendance via un modèle et une fois que nous ayons ajusté un modèle satisfaisant à une série chronologique, nous verrons, qu'en plus de nous permettre de mieux comprendre le phénomène étudié, ce modèle ajusté servira à prédire les valeurs futures de la série. Nous présentons dans cette section comment modéliser une série chronologique, qui une fois tendance et saisonnalité supprimées, est stationnaire. A noter que le seul fait de supprimer la tendance et la saisonnalité ne rend pas la série nécessairement stationnaire, puisque cela n'affecte pas la variance et l'auto-covariance, qui doivent être constantes pour un processus stationnaire.

L'étude des séries chronologiques, correspond à l'analyse statistique d'observations successives au cours du temps. L'analyse de ces séries repose sur des concepts importants tels que la stationnarité, l'autocorrélation, bruit blanc Nous commençons par rappeler leurs propriétés principales et comment elles peuvent être utilisées. Comme nous le verrons, ces concepts sont insuffisants pour l'analyse des séries chronologiques financières. En particulier, nous introduirons le concept de volatilité, qui est d'une importance cruciale dans la finance.

3.1.1. Stationnarité

Considérons une suite de variables aléatoires réelles $(X_t; t \in \mathbb{Z})$, définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Une telle séquence est appelée une série chronologique et est un exemple de processus stochastique en temps discret.

La stationnarité joue un rôle central dans l'analyse des séries temporelles, car elle remplace de façon naturelle l'hypothèse d'observations indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) dans la statistique standard. Nous commençons par introduire deux notions standard de stationnarité.

Définition 3.1.1 (Stationnarité au sens strict). *Un processus $(X_t; t \in \mathbb{Z})$ est dit stationnaire au sens strict si le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ ont la même loi jointe, pour tout $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{Z}$.*

Autrement dit, un processus $(X_t; t \in \mathbb{Z})$ est dite stationnaire au sens strict si il est caractérisé par une stabilité en loi. Cette définition peut être affaiblie, et donne une nouvelle notion qui semble moins exigeante, puisqu'elle ne concerne que les deux premiers moments des variables X_t . Cependant, contrairement à la stationnarité stricte, elle nécessite l'existence de tels moments.

Définition 3.1.2. Un processus $(X_t; t \in \mathbb{Z})$ est dit stationnaire au second ordre, s'il est de second ordre ($\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$) et s'il vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbb{E}[X_t] = m < \infty$
- $Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(h); \quad h \in \mathbb{Z}$

La fonction $\gamma_X(\cdot)$ est alors appelée fonction d'autocovariance à l'horizon h . La fonction d'autocorrélation définie par :

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}$$

Avec les propriétés suivantes :

- $0 \leq \rho_X(h) \leq 1$.
- $\rho_X(h) = 0$ les observations X_t et X_{t+h} ne sont pas corrélées.
- $\rho_X(h) = 1$ ou $\rho_X(h) = -1$ signifie qu'ils sont parfaitement corrélés.

L'exemple le plus simple d'un processus stationnaire du second ordre est le bruit blanc. Ce dernier est particulièrement important car il permet de construire des processus stationnaires plus complexes.

Définition 3.1.3. Le processus $((\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}))$ est un bruit blanc faible si, pour une constante positive σ^2 , on a :

- $\mathbb{E}[\epsilon_t] = 0, \forall t \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{E}[\epsilon_t^2] = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{Z}$
- $cov(\epsilon_t, \epsilon_{t+h}) = 0, \forall t, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$

Le but ici est de déterminer les différentes composantes d'une série (X_t) , en particulier, obtenir la série corrigée des variations saisonnières (méthodes de désaisonnalisation). Pour les séries stationnaires, on peut aussi chercher à modéliser la série à l'aide d'un modèle ARMA, par exemple dans le but de faire de la prévision.

L'objectif de l'analyse des séries temporelles est de construire un modèle pour le processus stochastique sous-jacent. Ce modèle peut ensuite être utilisé pour obtenir des prédictions optimales. Pour les séries saisonnières, on peut aussi chercher à modéliser la série à l'aide des modèles saisonniers (SARIMA).

3.1.2. Les processus ARMA

Les modèles ARMA sont des combinaisons de deux modèles autoregressif et moyenne mobile.

Définition 3.1.4 (Les processus ARMA). *Un processus $(X_t; t \in \mathbb{Z})$ de second ordre, est un processus ARMA(p, q), avec p et q des entiers, s'il existe des réelles $c, \phi_1, \dots, \phi_p, \psi_1, \dots, \psi_q$ tels que :*

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \psi_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t$$

Où ϵ_t est un bruit blanc.

Ces processus peuvent s'écrire sous la forme :

$$\phi(B)X_t = \Theta(B)\epsilon_t,$$

où

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

B représentant l'opérateur du retard, au sens où $BX_t = X_{t-1}$ et avec la convention $B^p = B \circ B^{p-1}$, soit $B^p X_t = X_{t-p}$. Autrement dit, une série (Y_t) définie par $Y_t = B^p X_t$ est alors la série (X_t) retardée de p périodes.

3.1.3. Les processus ARIMA

Le modèle *ARIMA* est un modèle *ARMA* adapté aux séries non-stationnaires, en intégrant la série non-stationnaire.

On dit qu'un processus non-stationnaire est intégré d'ordre 1, si en le différenciant une fois, on obtient un processus stationnaire. Autrement dit un processus (X_t) (non-stationnaire) sera dit intégré d'ordre 1 si le processus (Y_t) défini par $Y_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t$ est stationnaire.

Par extension, on dit que (X_t) est intégré d'ordre d (on note $I(d)$) si (X_t) est non-stationnaire, le processus (Y_t) où $Y_t = (1 - B)^{d-1} X_t$ est non-stationnaire, et (Z_t) définie par $Z_t = (1 - B)^d X_t$, est stationnaire.

Définition 3.1.5 (Les processus ARIMA). *Une série (X_t) suit un processus ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) d'ordre (p, d, q) si elle s'écrit sous cette forme :*

$$\Phi(B)X_t = \phi(B)(1 - B)^d X_t = \Theta(B)\epsilon_t;$$

où ϵ_t est un bruit blanc, $\phi(B)$ est un polynôme de degré p et le polynôme Θ est degré q .

3.1.4. Les processus SARIMA

Les modèles $SARMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$ sont également très utilisés dès lors que les séries sont saisonnières (avec une forte périodicité trimestrielle, annuelle...etc).

Définition 3.1.6 (Les processus SARIMA). *Une série X_t suit un processus SARIMA (Seasonal AutoRegressive Integrated Moving Average) d'ordre $(p; d; q) * (P; D; Q)_s$ si cette série a une saisonnalité de période s et qu'on peut écrire :*

$$\Phi_1(B)\Phi_2(B^s)(1 - B)^d(1 - B^s)^D X_t = \Theta_1(B)\Theta_2(B^s)\epsilon_t$$

où Φ_1 est un polynôme de degré p , Φ_2 est de degré P , Θ_1 est de degré q et Θ_2 est de degré Q .

L'ouvrage de Box et Jenkins 'Time series analysis, forecasting and control', a proposé une démarche de prévision pour les séries univariées, fondée sur l'utilisation de processus *ARIMA*.

3.1.5. Le processus GARCH

Dans cette partie, nous allons étudier un autre processus appelé *GARCH* : "Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedastic", qui est un processus conditionnellement hétéroscédastiques (voir Engle (1982, [39]); Bollerslev (1986, [12]); Francq et Zakoian (2010, [47])). Ainsi que leurs applications en finance (voir Duan (1995, [34]); Badescu et al. (2008, [8]); Badescu et al. (2011, [7]); Tsay (2010, [107])).

Les économistes portent souvent l'intérêt à la modélisation de la volatilité associée aux rendements financiers. D'une part, il est connu que la volatilité des rendements financiers fluctue au cours du temps et que les caractéristiques particulières des séries financières (comme la non-stationnarité, regroupement des extrêmes, faits stylisés etc.) font qu'il est difficile de modéliser les séries financières. D'autre part, la tarification sous le modèle de Black-Scholes suppose que la volatilité des rendements est constante au cours du temps ce qui est contraire aux observations empiriques. Par conséquent, les modèles SARIMA, sont inadaptés pour modéliser la volatilité car il sont centrés sur l'analyse des autocovariances des processus. Afin de prendre en compte les caractéristiques des séries financières. On suppose r_t une série de rendement modélisée sous la forme suivante :

$$r_t = \mu + \epsilon_t = \mu_t + \sigma_t \eta_t$$

Où r_t est la série des rendement observés, $\mu_t = \mathbb{E}_{t-1}[r_t]$ est l'espérance conditionnelle de r_t par rapport à la tribu \mathfrak{F}_{t-1} ¹ et η_t est un processus indépendant et identiquement distribué, centré, de variance unité. Autrement dit, σ_t et η_t sont des processus tels que :

- (i) σ_t est mesurable par rapport à la tribu \mathfrak{F}_{t-1}
- (ii) η_t est indépendant de \mathfrak{F}_{t-1}
- (iii) $\sigma_t > 0$

Définition 3.1.7 (Processus ARCH (Engle 1982, [39])). *On dit que ϵ_t suit un processus ARCH(q) si il s'écrit de cette forme :*

$$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t,$$

$$\sigma_t^2 = \text{Var}_{t-1}(\epsilon_t) = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2$$

Où $\omega > 0$, $\alpha_q > 0$ et $\alpha_j \geq 0 \forall j \in \{0, 1, \dots, q\}$

Ainsi Var_{t-1} signifie la variance conditionnelle de ϵ_t sachant ϵ_{t-1}

La généralisation du modèle ARCH est due à Bollerslev (1986, [12]) pour corriger les faiblesses du modèle ARCH.

Définition 3.1.8. *On dit que ϵ_t est un processus GARCH(p, q) s'il s'écrit sous la forme suivante :*

$$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t;$$

où η_t est un processus indépendant et identiquement distribué, centré, de variance unité.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2 \quad (3.1)$$

où $\omega > 0$, $\alpha_q > 0$, $\alpha_j \geq 0 \forall j \in \{0, 1, \dots, q\}$ et $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$

3.2. MÉTHODE PARAMÉTRIQUE ET SEMI-PARAMÉTRIQUE POUR ANALYSER LA DÉPENDANCE

L'identification de la copule est une phase cruciale, c'est ainsi que nous procédons par des approches semi-paramétriques comme les diagrammes Chi-plot et K-plot et les critères d'ajustement tels que AIC et BIC, et des approches paramétriques à savoir les tests d'ajustement.

1. $\mathfrak{F}_{t-1} = \sigma(X_0, \dots, X_{t-1})$ la plus petite tribu qui rend mesurable les variables (X_0, \dots, X_{t-1})

3.2.1. Chi-plot

Afin de détecter l'association entre deux variables aléatoire X et Y , Fisher et Switzer [44] ont introduit le diagramme Chi-Plot utilisé en conjonction avec le diagramme de dispersion "scatterplots". La méthode est conçue de façon à ce que sous les conditions d'indépendance, les points du graphique Chi-Plot, soient concentrés horizontalement alentour de 0.

Chaque point (X_i, Y_i) de l'échantillon aléatoire de taille n est transformé en paire (λ_i, χ_i) pour tout $(i = 1, \dots, n)$. Cette méthode produit un second diagramme de dispersions mettant en évidence la dépendance qui existe entre deux variables aléatoires.

Lorsque deux variables aléatoires sont indépendantes, la distribution conjointe s'exprime comme le produit des deux fonctions marginales. Dans ce contexte, le χ_i mesure, en quelques sorte, la possibilité de factoriser la fonction de répartition bivariée en un produit de leurs distributions marginales. La valeur λ_i mesure la déviation de chaque point (X_i, Y_i) par rapport à la médiane de la distribution bivariée.

Soient X et Y deux variables aléatoire de fonction de répartition F et G , respectivement. et soit H la fonction de répartition bivariée du couple (X, Y) . On considère l'échantillon $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de n observations de loi H . On commence d'abord par calculer, pour chaque couple (X_i, Y_i) , les statistiques suivantes :

$$F_i = \frac{\text{rank}(X_i)}{n-1}, \quad G_i = \frac{\text{rank}(Y_i)}{n-1} \text{ et } H_i = \frac{\text{rank}(X_i, Y_i)}{n-1}$$

avec $\text{rank}(X_i) = \sum_{j \neq i} \mathbb{I}_{X_j \leq X_i}$, $\text{rank}(X_i, Y_i) = \sum_{j \neq i} \mathbb{I}_{X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i}$,

Sous l'hypothèse d'indépendance, on s'attendrait à avoir $H_i = F_i \times G_i$. C'est cette caractéristique que Chi-plot cherche à exploiter en représentant sur un graphique les paires de points (λ_i, χ_i) où :

$$\lambda_i = 4 \text{ sign}(\widetilde{F}_i \widetilde{G}_i) \max(\widetilde{F}_i^2, \widetilde{G}_i^2) \quad \text{et} \quad \chi_i = \frac{H_i - F_i * G_i}{\sqrt{F_i(1-F_i)G_i(1-G_i)}}, \quad (3.2)$$

où $\widetilde{F}_i = F_i - 0.5$ and $\widetilde{G}_i = G_i - 0.5$.

Pour chaque point de l'échantillon, χ_i est le coefficient de corrélation entre X et Y . Les valeurs de χ_i sont comprises entre -1 et 1.

De plus, une propriété intéressante de la statistique χ_i est son étroite liaison avec la statistique du khi-deux. En effet, en multipliant l'équation (3.2) par \sqrt{n} et en élevant au

carré, on obtient la statistique du khi-deux, qui sert généralement à tester l'indépendance dans des tableaux de fréquences.

Les $|\lambda_i|$ représentent la distance entre chaque point (X_i, Y_i) de l'échantillon et le centre du nuage de points (médiane de la distribution bivariée). Les valeurs de λ_i sont dans l'intervalle $[-1, 1]$. Si X et Y sont positivement corrélés, les λ_i auront une tendance positive, l'inverse pour une corrélation négative. Si les variables X et Y sont indépendantes, alors les points λ_i sont uniformément distribués.

Pour aider à évaluer la variation aléatoire des valeurs observées des paires (λ_i, χ_i) , Fisher et Switzer (1985 [44], 2001 [45]) ont construit des intervalles de confiance de la forme $\pm c_p \sqrt{n}$. Ils ont également donné des valeurs approximatives de c_p pour différentes valeurs de $p \in [0, 1]$. Dans le cas de l'indépendance, on s'attend à ce que $p \times 100\%$ des paires (λ_i, χ_i) soient uniformément dispersées dans l'intervalle $[-c_p \sqrt{n}, c_p \sqrt{n}]$. Dans le cas d'une dépendance positive, les points paires se dispersent au-dessus de la bande, et inversement dans le cas de la dépendance négative.

Fisher et Switzer n'ont pas donné une interprétation de l'utilisation des Chi-Plot pour analyser la dépendance dans les queues. On peut citer que si les paires sont éloignées de $\lambda = 0$ cela implique qu'ils se retrouvent dans les queues. Il est quasiment impossible de préciser la queue de dépendance. D'après l'expression de λ_i , si les deux variables aléatoires X et Y sont positivement corrélées, alors $\lambda_i \in [0, 1]$. Également, l'équation indique que si une observation est dans la queue de distribution, alors sa valeur correspondante de λ est proche de 1. Par conséquent, la dépendance dans les queues se traduit par des valeurs plus élevées de χ_i et proche de 1 pour λ_i .

Ainsi pour mieux analyser la dépendance dans les queues, on propose d'appliquer cette analyse graphique sur les données extrêmes des deux variables X et Y . On définit quatre groupes qui représentent les extrêmes comme suit :

$$A = \{(X_i, Y_i) : X_i < \text{median}(X), Y_i > \text{median}(Y)\},$$

$$B = \{(X_i, Y_i) : X_i > \text{median}(X), Y_i > \text{median}(Y)\},$$

$$C = \{(X_i, Y_i) : X_i > \text{median}(X), Y_i < \text{median}(Y)\}$$

$$D = \{(X_i, Y_i) : X_i < \text{median}(X), Y_i < \text{median}(Y)\}$$

Par la suite, on applique Chi-Plot sur chaque groupe d'observations, on appelle Chi-Plot queue *inférieure-supérieure* (upper-left), supérieure-supérieure (upper-right), supérieure-inférieure (lower-right) et inférieure-inférieure (lower-left), le Chi-Plot appliqué, respectivement, sur les observations du groupe A , B , C et D .

3.2.2. Kendall plot ou K-Plot

Le K-plot, proposé par Genest et Boies (2003, [11]), est une autre méthode graphique permettant de visualiser la dépendance. Cette technique s'inspire plutôt de la droite de Henry (QQ-Plot). Elle est basée sur les tests d'indépendance non-paramétriques et les statistiques d'ordre. La procédure consiste à représenter les paires $(W_{i,n}, H_i)$ pour tout $i \in [1, n]$, où $W_{i,n}$ est l'espérance de la i ème statistique d'ordre d'un échantillon de taille n de loi K_0 de H_i sous l'hypothèse nulle d'indépendance.

Pour compléter l'exercice il suffit de déterminer la forme de K_0 sous l'hypothèse nulle d'indépendance. La densité cherchée est donnée par l'équation suivante :

$$W_{i,n} = \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^1 w \{K_0(w)\}^{(i-1)} \{1 - K_0(w)\}^{(n-i)} dK_0(w), \quad (3.3)$$

D'après Genest and Rivest (1993, proposition 2.1), la fonction de distribution empirique K_n des pseudo-observations H_1, \dots, H_n est asymptotiquement gaussienne et constitue un estimateur \sqrt{n} -consistant de :

$$K(w) = P\{H(X, Y) \leq w\}, \quad 0 \leq w \leq 1 \quad (3.4)$$

Sous l'hypothèse d'indépendance on a $H = F \times G$. D'où l'expression de de K_0 :

$$\begin{aligned} K_0(w) &= \mathbb{P}(UV \leq w) \\ &= \int_0^1 \mathbb{P}(U \leq \frac{w}{v}) dv \\ &= \int_0^w 1 dv + \int_w^1 \frac{w}{v} dv \\ &= w - w \log(w) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Où $U = F(X)$ et $V = G(Y)$

Par la suite, les propriétés du K-Plot sont les suivantes :

- Lorsque $n \rightarrow \infty$, $K_n(w) \rightarrow K(w)$ en probabilité, pour tout $w \in [0, 1]$. Egalement, $K_n^{-1}(p) \rightarrow K^{-1}(p)$ en probabilité pour tout $p \in [0, 1]$.
- Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $p \in [0, 1]$, avec $[np]$ le plus petit entier supérieur ou égal à np , on a :

$$H_{([np])} = K_n^{-1}(p) \rightarrow K^{-1}(p)$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(H_{([np])}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_{[np]:n} = K_0^{-1}(p)$$

sous l'hypothèse d'indépendance.

- Pour un échantillon grand, les points $(W_{i:n}, H_i)$ se concentrent sur la courbe $p \mapsto (K_0^{-1}(p), K^{-1}(p))$, autrement dit, les points du K-plot ressembleront au graphique $w \mapsto K^{-1}(K_0(w))$.
- Dans le cas d'indépendance on a $K = K_0$, d'où la tendance des points est linéaire.
- Lorsque X et Y sont négativement corrélés, avec $\tau(X, Y) = -1$, on a $K^{-1}(p) = 0$. D'où tous les points du graphique auront une tendance à tomber sur l'axe horizontal. Inversement si $\tau(X, Y) = 1$ tout les points sont sur la courbe $K_0(p)$, puisque $K^{-1}(p) = p$ pour tout $p \in [0, 1]$.

L'avantage d'utiliser les méthodes graphiques, est de préciser la famille de copule.

3.2.3. Quelques critères d'identification de la copule

Chi-Plot et K-Plot peuvent fournir plusieurs copules candidates pour les données. Pour réduire une telle nombre de copules, nous avons recours à des outil semi-paramétriques comme les deux premiers critères AIC et BIC, proposés par Hirotugu Akaike (1973) et Gideon Schwarz (1978), qui permettent de mesurer la qualité de l'ajustement. Les deux critères AIC et BIC sont définis par :

$$AIC = -2 \sum_{i=1}^n \ln[c_\theta(u_i, v_i)] + 2k,$$

$$BIC = -2 \sum_{i=1}^n \ln[c_\theta(F_i, G_i)] + \ln(n)k,$$

Où $c_\theta(\cdot, \cdot)$ est la densité de la copule C_θ qui dépend du paramètre $\theta \in \mathbb{R}^k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de paramètres estimés. La copule qui sera sélectionnée est celle qui minimise le critère *AIC*, *BIC*

Nous utilisons aussi une autre approche qui consiste à comparer la copule candidate C_θ et la copule empirique C_n introduite par Deheuvels (1979, [29]), en utilisant la moyenne d'erreur quadratique :

$$SME(C_{\theta_j}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [C_n(F_i, G_i) - C_{\theta_j}(F_i, G_i)]^2,$$

θ_j étant le paramètre de la copule paramétrique C_θ , définie par $\theta_j = \theta_0 + j * \delta$ avec $j \in \mathbb{N}^*$ et δ le pas de variation. C_n est la copule empirique définie à partir de H_n (D'après

le théorème de Sklar). La copule qui sera sélectionnée est celle pour laquelle le SME est minimale.

Pour minimiser les calculs nous allons estimer l'intervalle du paramètre de chaque copule. Puisqu'il existe une relation entre θ et le tau de Kendall et que nous pouvons construire un intervalle de confiance pour le tau de Kendall.

Par la suite on propose de tester l'ensemble des copules sélectionnées précédemment. On adopte l'approche proposée par Genest et al. (2008, [59]). Ces derniers ont fait un résumé sur différentes tests d'ajustement pour sélectionner la meilleure copule. Nous allons utiliser deux tests basés sur la statistique de Cramer-Von-Mises et Kolmogorov-Smirnov, leurs expressions sont définies par :

$$S_n = \int_0^1 |\mathbb{K}_n(t)|^2 \partial K_{\theta_n}(t), \text{ et } T_n = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\mathbb{K}_n(t)|,$$

Où $\mathbb{K}_n(t) = \sqrt{n}(K_n(t) - K(t))$ avec K la fonction de Kendall définie dans l'équation (3.4) et K_n sa fonction empirique.

3.3. LA COPULE CONDITIONNELLE

Dans cette section, nous allons présenter la notion de la copule conditionnelle qui va servir à la performance des copules en terme de prévision. En d'autre terme, en utilisant la copule conditionnelle C_X , on peut prédire Y sachant X . La copule conditionnelle C_X est définie par :

$$P[Y \leq y | X = x] = P[V \leq v | U = u] = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} := C_X(F(x), G(Y)), \quad (3.6)$$

Avec $V = G(Y)$, $v = G(y)$, $U = F(X)$ et $u = F(x)$.

Pour $p \in [0, 1]$, le p -ième C-quantile de y_t conditionnellement à x_t , noté par $Q_X(\tau|x)$, est défini par :

$$Q_X(\tau|x) = G^{-1}(C_X^{-1}(F(x), \tau)), \quad (3.7)$$

Où φ^{-1} dénote l'inverse de la fonction φ .

CHAPITRE 4

APERÇU SUR LES STRUCTURES DE DÉPENDANCE DYNAMIQUE ET NOUVELLE APPROCHE

4.1. INTRODUCTION

La plupart des copules sont appliquées aux données des séries chronologiques, mais elles sont souvent traitées de manière à être constantes dans le temps. Cependant, il est devenu un fait stylisé que les corrélations entre les variables économiques ne sont pas constantes dans le temps, une constatation qui a été documentée par Longin and Solnik (1995; [83]) ou Engle (2002; [40]). Le modèle DCC-GARCH, proposé simultanément par Engle (2002, [40]) et Tse et Tsui (2002, [106]), le modèle de volatilité stochastique avec corrélations stochastiques par Yu et Meyer (2006, [111]) et le modèle de changement de régime pour les corrélations dynamiques par Pelletier (2006) [98], sont quelques modèles paramétriques notables pour modéliser ces corrélations variantes dans le temps dans les modèles de volatilité multivariées. Egalement Hafner et al. (2006, [?]) proposent un modèle semi-paramétrique pour les corrélations dynamiques.

Dans ce chapitre, nous présenterons un aperçu sur quelques modèles de copule dynamique en nous concentrant sur la spécification, l'estimation et les propriétés d'un certain nombre de ces modèles. Ainsi nous proposons une nouvelle approche de copule dynamique qui permet à la fois d'analyser l'évolution du paramètre de la copule, et de détecter le changement de la copule elle-même. Nous discutons l'avantage de cette approche, en la comparant avec les modèles existants et en analysant sa performance dans les prévisions

dans le prochain chapitre.

Dans la première section, nous mettons l'accent sur les propriétés des copules dynamiques existantes et leur estimation et nous présentons notre contribution dans les copules variantes.

4.2. APERÇU SUR LES COPULES DYNAMIQUES

Dans cette section, nous donnerons un aperçu sur les copules dynamiques qui ont été proposés dans la littérature. Nous concentrons notre attention sur la spécification de la dynamique du paramètre copule et l'estimation des modèles et d'approche.

4.2.1. Gourbergh 2005

Dans l'article de Gourbergh et al. (2005, [61]) les copules dynamiques sont utilisées pour fixer le prix des options avec plusieurs actifs sous-jacents et ils constatent que les prix des options fournis par les copules dynamiques sont très différents de ceux des copules statiques. Gourbergh et al. proposent d'exploiter la relation entre le paramètre de certaines copules et le tau de Kendall pour estimer le paramètre de la copule. Une mesure variante dans le temps du tau de Kendall implique que le paramètre de la copule varie également. Ils supposent que la dépendance est déterminée par la volatilité passée des options étudiées. Soit σ_{it}^2 la variance conditionnelle de l'actif i (la variance conditionnelle du modèle GARCH). Alors τ_t est processus de type :

$$\tau_t = \gamma_0 + \gamma_1 \log \max(\sigma_{1t}^2; \sigma_{2t}^2)$$

Les paramètres γ_0 et γ_1 sont estimés en régressant l'estimateur par fenêtre glissante du τ_t sur le logarithme du maximum des variances obtenues à partir du modèle GARCH. La taille de la fenêtre est égale à environ 40 jours, bien que les résultats sont robustes au choix de la taille de la fenêtre.

La différence principale de cette approche par rapport aux autres approches est que le paramètre de la copule est supposé dépendant de la loi marginale par le biais de la variance conditionnelle, alors que les autres approches (comme on va voir dans les sections suivantes) supposent que le paramètre copule se comporte indépendamment des paramètres des distributions marginales.

4.2.2. Guégan and Zhang (2009, [63])

La différence entre cette approche et la majorité des approches concurrentes est que les auteurs ne testent pas seulement le changement dans la relation entre les variables d'intérêt, mais aussi si la copule reste la même et si seul le degré de dépendance change, ou si en plus, le type de copule change également à un moment donné. L'idée principale est de comparer une copule paramétrique à une estimation non paramétrique de la densité de copules à m points distincts dans le temps en utilisant les tests d'ajustement de Fermanian (2004, [43]). En appliquant le test à une copule conditionnelle, Guégan and Zhang vérifient si la famille des copules change. Lorsque la famille des copules change, les auteurs suggèrent que l'utilisation d'une procédure de segmentation binaire pour détecter les points de changement et le type de copule sur chacun d'eux. Sinon ils suggèrent d'utiliser le test de rupture structurelle de Dias et Embrechts (2004, [33]) pour détecter les points de changement des paramètres de la copule. Pour les détails de la procédure et du test voir l'article original.

4.2.3. Modèle de Patton (2006, [94]) (2013, [95])

Patton (2006, [94]) et Creal et al. (2008, [27]) proposent que les copule dynamique sont des copules usuelles avec des paramètres variants au cours du temps. Ils suggèrent que ces paramètres suivent un processus $ARMA(1, 10)$ avec une forme spécifique du terme d'erreur, qui est en générale une transformation des données retardées.

L'expression du coefficient de corrélation dynamique proposée par Patton (2006, [94]) pour la copule Gaussienne et Student est définie par :

$$\rho_t = \Lambda_{Gauss} \left(\omega + \beta \rho_{t-1} + \alpha \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \phi^{-1}(u_{t-j}) \phi^{-1}(v_{t-j}) \right),$$

où $\Lambda_{Gauss} = (1 - e^{-x})(1 + e^{-x})^{-1}$ est une transformation logistiques utilisée afin de garder ρ_t dans $[-1, 1]$ et ϕ^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition de loi normale standard. Ainsi pour avoir la valeur du paramètre de la copule θ_t on utilisera la relation existante entre le paramètre de la copule et le coefficient de corrélation.

L'expression de coefficient de corrélation dynamique τ_t pour les copules Gumbel et Clayton est données par :

$$\tau_t = \Lambda(\omega + \beta \tau_{t-1} + \alpha \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{t-j} - v_{t-j}|),$$

où $\Lambda(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$ pour garder la valeur du tau de Kendall entre 0 and 1.

Par la suite nous utilisons la relation entre le tau de Kendall et le paramètre de la copule afin d'estimer la valeur du θ_t .

L'estimation du vecteur $\Sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \Theta)$ Où $\gamma_i, i = 1, 2$ sont les paramètres de la densité marginale, et $\Theta = (\omega, \beta, \alpha)$ sont les paramètres de la copule dynamique. La littérature offre une variétés de méthodes d'estimation comme maximum de vraisemblance, méthode non-paramétrique basée sur les copules empiriques, et maximum de vraisemblance canonique qui est une approche semi-paramétrique. Pour plus de détail sur les méthodes d'estimation voir (Genest, Quessy et Rémillard (2006, [58]), Genest (1987, [52]), Deheuvels (1979, 1981, [29], [30]), Nelsen(2006, [89]), Genest et al. (1995, [55])).

Considérons $X_t = (X_{1t}, X_{2t}), t = 1, \dots, T$ un vecteur aléatoire bivarié, la fonction du log-vraisemblance est définie par :

$$L(\Sigma|X_t) = \sum_{t=1}^T \ln \left[c\left(F_1(x_{1,t}|\gamma_1), F_2(x_{2,t}|\gamma_2)|\Theta\right) \right] + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^2 \ln \left[f_i(x_{it}|\gamma_i) \right]$$

On adopte la méthode IFM, cette approche consiste à estimer premièrement les paramètres de la distribution marginales, ces estimateurs seront utilisé dans la deuxième étape pour estimer les paramètres de la copule. Finalement, la fonction de log-vraisemblance s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} L(\Sigma|X_t) &= \sum_{t=1}^T \ln \left[c\left(F_1(x_{1,t}|\hat{\gamma}_1), F_2(x_{2,t}|\hat{\gamma}_2)|\Theta\right) \right] + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^2 \ln \left[f_i(x_{it}|\hat{\gamma}_i) \right] \\ &= \sum_{t=1}^T \ln \left(c(\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}); \Theta \right) + \sum_{i=1}^2 L_{f_i}(x_{it}|\hat{\gamma}_i) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Où $\hat{u}_{it} = f_i(x_{it}|\hat{\gamma}_i)$.

Dans la deuxième étape, le paramètre Θ de la copule dynamique est estimé comme suit :

$$\hat{\Theta} = \arg \max_{\Theta} \sum_{t=1}^T \ln \left(c(\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}); \Theta \right) \quad (4.2)$$

4.2.4. Nouvelle approche de copule dynamique

Nous proposons une nouvelle approche dynamique des copules pour décrire l'évolution de la dépendance structurelle entre deux variables. Nous utilisons l'approche dite des "fenêtres glissantes" pour étudier deux aspects du changement. Tout d'abord, nous examinerons le changement du paramètre de la copule, en analysant le processus du tau de Kendall. Deuxièmement, nous étudierons le changement de type de la copule et nous sélectionnerons la meilleure copule à l'aide des critères et tests d'ajustement.

Le processus empirique du tau de Kendall

L'expression (1.10.3) montre qu'il existe une relation bijective entre les paramètres de la copule et le tau de Kendall. Cela explique la raison pour laquelle de nombreuses études examinent l'évolution des paramètres des copules en analysant l'évolution du tau de Kendall.

Comme la dépendance actuelle et future pourrait être affectée par la variation passée de la dépendance et/ou des événements extrêmes, nous proposons de modéliser le processus tau de Kendall par un modèle exogène autorégressif (ARX) [92]. Pour être plus spécifique, soient τ_t la mesure de Kendall de l'association entre les processus (X_{1t}) et (X_{2t}) à l'instant t , et $\sigma_{i,t-s_i}^2$ la variance conditionnelle, donnée par le modèle *GARCH* (3.1), de la variable X_{it} au temps $t - s_i$ pour $i = 1, 2$. Le tau de Kendall à l'instant t peut donc être exprimé comme suit :

$$\tau_t = f(\tau_{t-1}, \dots, \tau_{t-k}, \sigma_{1,t-s_1}^2, \sigma_{2,t-s_2}^2). \quad (4.3)$$

L'expression exacte du processus empirique du tau de Kendall sera spécifiée dans l'application.

Choix de copulas par fenêtre glissante

L'analyse par méthode des fenêtres glissantes d'un modèle de série temporelle est une technique courante utilisée pour vérifier la stabilité du modèle dans le temps (Zivot et Wang (2006, [112])). Plusieurs études utilisent cette approche pour évaluer les relations dynamiques entre les données économiques (Grégoire et al. [62], Aloui et al. (2013 [2], 2016 [3]), Lanouar et Benlagha (2016, [16]), et Liu et al. (2017, [81])).

En utilisant la procédure des fenêtres glissantes, nous calculons la valeur du tau de Kendall pour chaque fenêtre. Le signe de la valeur empirique du tau de Kendall peut changer d'une fenêtre à l'autre. Par conséquent, nous attendons à ce que la copule modélisant la structure de dépendance change également.

Le choix des copules appropriées est résumé dans les étapes d'algorithme suivantes :

1- Identification du type de dépendance.

a) Calculer le tau de Kendall empirique τ_n , et préciser selon son signe le type de dépendance.

2- Sélection de la copule

a) Selon le type de dépendance, nous sélectionnons dans le tableau [2.1](#), les copules candidates appropriés.

b) En utilisant les critères AIC et certains tests d'ajustement décrits dans la section [\(3.2.3\)](#), nous sélectionnons la meilleure copule..

Cette approche semi-paramétrique est appliquée pour chaque fenêtre.

Prévision par les copules dynamiques

Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ deux séries temporelles. En utilisant la copule dynamique proposée précédemment, et pour chaque $i \in \mathbb{N}_j$, nous pouvons prévoir X_{T+i} sachant $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ en suivant l'algorithme ci-dessous :

Step 1 : Prédire la valeur future du tau de Kendall $\hat{\tau}_{T+i}$ en utilisant l'équation [\(4.3\)](#).

Step 2 : Selon le signe de $\hat{\tau}_{T+i}$, sélectionner \mathcal{S}_i l'ensemble des copules appropriées de la Table [2.1](#).

Step 3 : Définir la copule C_{T+i} par

$$C_{T+i} = \sum_{C_j \in \mathcal{S}_i} P_j^{(i)} C_j, \quad (4.4)$$

où $P_j^{(i)} = \mathbb{P}\{C_{w_{T+i}} = C_j | C_{w_T} = C_T\}$, et C_{w_k} est la copule ajustée aux données de la fenêtre w_k . En d'autres termes, $P_j^{(i)}$ est la transition de probabilité de C_T à la copule C_j ajustée aux données de la fenêtre w_i . Ces probabilités peuvent être estimées à partir du processus des fenêtres glissantes passées.

Step 4 : Estimer les paramètres de la copule C_{T+i} en utilisant ceux des copules C_j , le τ_{T+i} prédit, et la relation entre les paramètres tau et copula de Kendall (voir Tableau [2.1](#))

Step 5 : Prédire X_{T+i} sachant Y .

Dans le paragraphe suivant, nous donnons quelques outils pour aider à accomplir la dernière étape de l'algorithme.

Selon l'équation [\(4.4\)](#), l'association entre les variables X et Y, à la fenêtre w_{T+i} , est capturée en utilisant la copule mixte $C^M := C_{T+i}$. Une fois que la copule C^M est identifié, la prévision devient une opération simple. Par exemple, en utilisant la copule conditionnelle $C_{1|2}^M$, on peut prédire X_{T+i} sachant $Y = y$. L'expression de la copule mixte conditionnelle distribution $C_{1|2}^M$ est défini par :

$$eq3.C_{1|2}^M(u|v) := P(X \leq x|Y = y) = P(U \leq u|V = v) = \frac{\partial C^M(u, v)}{\partial v} = \sum_{C_j \in \mathcal{S}} P_j^{(i)} \frac{\partial C_j(u, v)}{\partial v}, \quad (4.5)$$

où $U = F(X)$ et $V = G(Y)$ avec F et G désignant les fonctions de répartition de X et Y respectivement.

La fonction de quantile conditionnelle donnée $Y = y$, notée par $Q_Y(\cdot|y)$, est définie sur $[0, 1]$ par

$$Q_Y(q|y) = F^{-1}(C_{1|2}^{M^{-1}}(G(y), q)), \quad (4.6)$$

où F^{-1} désigne la fonction inverse de F .

CHAPITRE 5

APPLICATIONS AUX VARIABLES MACRO-ÉCONOMIQUES

Dans ce chapitre nous présentons deux applications des méthodologies présentées précédemment, sur des données macro-économiques. La première concerne la modélisation de la dépendance existante entre le taux de change et le taux d'inflation par la copule, et la contribution de la copule conditionnelle dans la prévision de ce dernier. La deuxième concerne l'application de notre approche de copule dynamique sur le taux de change et le taux d'intérêt à court-terme. Le choix est justifié par l'importance apporté à ces indicateurs dans l'économie et en particulier dans le marché monétaire.

5.1. CONTRIBUTION DES COPULES DANS LA PRÉVISION DES VARIABLES MACRO-ÉCONOMIQUES : TAUX DE CHANGE ET TAUX D'INFLATION

5.1.1. *Introduction*

L'inflation est un indicateur macroéconomique clé. Elle est définie comme une augmentation persistante du niveau général des prix. Cette augmentation entraîne une réduction de la valeur de la monnaie (OIT, FMI, OCDE, CEE-ONU, Eurostat et Banque mondiale, (2004, [91])). L'une des principales priorités des gouvernements et des banques centrales est la stabilité des prix. Une faible inflation favorise la croissance économique et le plein emploi. Une inflation élevée érode la compétitivité internationale et réduit la valeur de

l'épargne. Pour contrôler les prix, les banques centrales prennent en considération la relation entre l'inflation et plusieurs variables macroéconomiques telles que le produit intérieur brut (PIB), le taux d'intérêt et le taux de change.

La littérature économique ne permet pas d'établir clairement le lien existant entre l'inflation et un certain nombre de grandeurs économiques clés, comme le PIB. Les travaux empiriques donnent également des résultats qui sont parfois controversés, citons à titre d'exemple l'étude de Chollete et Ning (2009, [25]) qui ont montré une dépendance négative entre le PIB et l'inflation, alors que Munyeka (2014, [86]) a décelé une dépendance positive. Fitzgerald et Nicolini (2014, [46]) ont documenté une dépendance linéaire négative entre le chômage et l'inflation.

Le taux de change est l'un des variables macroéconomiques qui sont significativement liées à l'inflation. Il peut influencer celle-ci de deux manières ; soit directement à travers son impact sur les prix des biens finis importés, ou soit directement via son impact sur les prix des biens finis importés, soit indirectement via son impact sur les prix des biens intermédiaires importés utilisés dans la production nationale. De nombreuses études ont discuté de l'effet des fluctuations des taux de change sur l'inflation. Arize et al. (2004), en utilisant la régression linéaire sur un échantillon de 82 pays, ont montré que la variabilité du taux de change a un effet statistiquement significatif sur la variabilité de l'inflation. De même, l'étude de Naz et al. (2012, [87]) s'achève qu'une forte volatilité des taux de change a un impact significatif sur l'inflation. Xiongtoua et Sriboonchitta (2014, [110]) ont, quant à eux, utilisé un GARCH basé sur des copules pour analyser la dépendance entre les taux d'échange et d'inflation au Laos. Ils ont constaté que les deux variables ont une forte corrélation non linéaire et positive. Kano (2016, [75]), Burstein et Gopinath (2014, [14]) et Engel (2014, [41]) ont également montré l'existence d'une relation entre taux de change et inflation.

5.1.2. *Présentation et description des données*

Dans cette section, On se propose d'appliquer notre méthodologie, sur les données mensuelles du taux de change *USD/EURO*, et le taux d'inflation dans la zone Euro, en utilisant trois périodes (Fig. 5.1) afin de déterminer la sensibilité des copules aux changements macroéconomiques.

La première période va d'avril 2000 à décembre 2006. Les observations de cette période ont constitué notre échantillon d'apprentissage qui a servi à la construction du modèle. Pour tester la validité des prévisions de ce dernier nous avons utilisé les observations de l'année

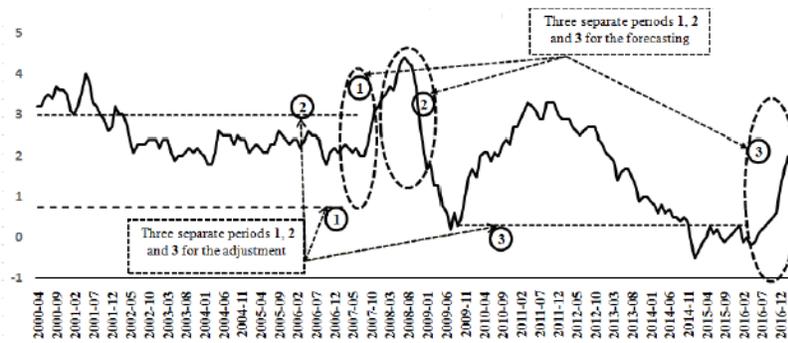


FIGURE 5.1 – L'évolution de l'inflation dans la zone Euro avril 2000 et décembre 2016.

2007. La deuxième période va d'avril 2000 à décembre 2007. Le nouveau modèle obtenu s'est avéré pour prévoir les observations de 2008. La troisième période s'étend de septembre 2009 à mars 2016. Les données de cette période ont constitué notre échantillon d'apprentissage qui a été utilisé pour choisir la copule appropriée. Le modèle retenu est utilisé par la suite dans la prévision des observations du deuxième trimestre de 2016.

L'évolution des taux de change et d'inflation US/Euro dans la zone euro est illustrée dans la Fig. (5.2). Ce graphique montre clairement que ces taux sont corrélés. On remarque que le taux de change a connue une période de baisse 2009-2016, une période de hausse 2000-2008, et deux périodes de stabilité 2000-2002 et 2015-2016.

Le graphique montre clairement que ces taux d'inflation et le taux de change sont corrélés. En effet, lorsque le taux de change prend une tendance à la hausse, le taux d'inflation commence à prendre une tendance à la baisse. En outre, les fluctuations du taux de change et du taux d'inflation se coïncident, notamment durant la période des crises, où le taux de change semble être plus volatile.

La Figure (5.2) montre que l'inflation sur la zone euro, présente une certaine instabilité, avec des valeurs qui varient entre -0.6% et 4.1%. Sur la période 2000-2007 l'inflation dans la zone euro a été relativement faible avec un taux annuel moyen de 1.9%. En 2008, elle s'est accélérée fortement avec la crise économique ce qui a amené le taux d'inflation à 4 %. L'année 2009 a connu une forte baisse de l'inflation de l'ordre de 3.0 % par rapport à l'année 2008, avant d'augmenter de nouveau en 2010 pour s'établir à 1.5%. À partir de 2011, l'inflation a poursuivi sa tendance à la baisse pour atteindre -0.6% en 2015.

Nos résultats montrent que durant la première période, caractérisée par une stabilité, les copules sont performantes en termes de prévision.

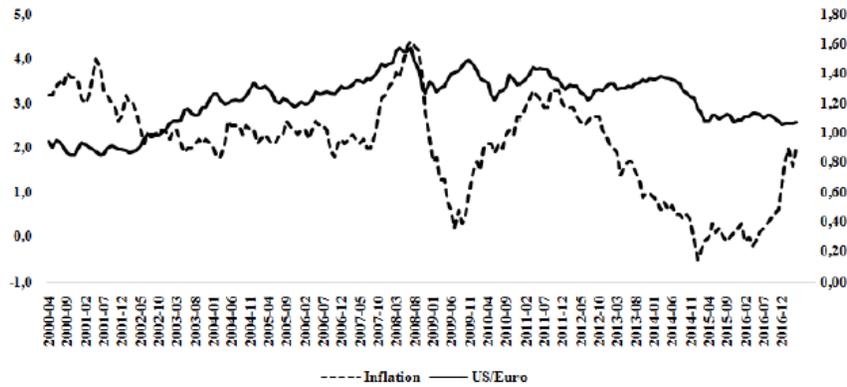


FIGURE 5.2 – L'évolution du taux de change et de l'inflation sur une période de seize ans.

Modélisation univariée des variables macro-économiques

Pour les différentes périodes considérées, la série du taux d'inflation présente une tendance, et un caractère de saisonnalité. La série du taux de change présente également une tendance et un caractère de non-stationnarité. Après une étude approfondie de ces deux séries, nous avons opté pour un processus $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$.

Le tableau [6.3](#) résume les modèles ajustés pour chaque variables et période. En appliquant le test de Kolmogorov-Smirnov, nous concluons que les résidus sont normalement distribués.

Modélisation de la dépendance

Le nuage des points des résidus du modèle ajusté au taux d'inflation par rapport à ceux du taux de change (figure [5.3](#)) ne montrent pas de tendance particulière. Vu que les points sont repartis sur tout le graphe, on peut penser que cette dépendance est faible.

Series	Adjusted models	Residuals
The inflation (2000-2007)	SARIMA(0,1,0)(0,0,1)	$\varepsilon_{Inf,period1}$
The <i>US/Euro</i> exchange rate (2000-2007)	SARIMA(0,1,1)(0,0,0)	$\varepsilon_{Exch,period1}$
The inflation (2000-2008)	SARIMA(1,1,0)(0,0,1)	$\varepsilon_{Inf,period2}$
The <i>US/Euro</i> exchange rate (2000-2008)	SARIMA(0,1,1)(0,0,0)	$\varepsilon_{Exch,period2}$
The inflation (2009-2016)	Exponential smoothing*	$\varepsilon_{Inf,period3}$
The <i>US/Euro</i> exchange rate (2009-2016)	SARIMA(1,1,0)(0,0,0)	$\varepsilon_{Exch,period3}$

TABLE 5.1 – * Voir Holt (1957) et Charles (1957) pour plus de détail sur le modèle lissage exponentiel.

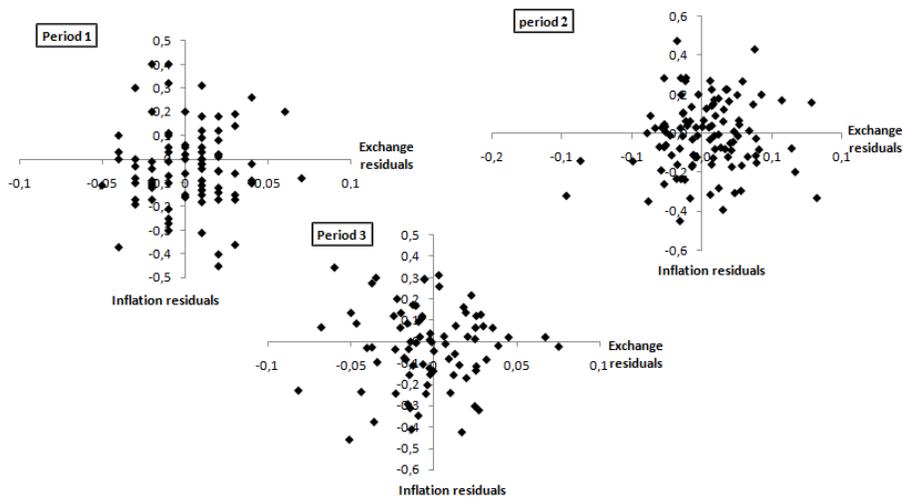


FIGURE 5.3 – Le graphique des résidus du taux d’inflation par rapport à ceux du taux de change

Pour explorer graphiquement la structure de dépendance entre les résidus, nous utilisons l’approche *Chi – Plot* et *K – Plot*. On estime que ces courbes vont nous guider dans le choix des familles de copules appropriées.

Les graphiques Chi-plot et K-plot nous permettent de visualiser la structure de dépendance qui caractérise chacune des périodes (Figures 5.4, 5.5 et 5.6).

Pour les trois périodes, un ensemble des points du graphique *K*–plot s’éloigne de la diagonale, ce qui prouve l’existence d’une dépendance, non-négligeable, entre les deux variables. Comme les valeurs du $W_{i:n}$ et H_i augmentent, un examen plus approfondi des graphiques, de la première et la deuxième période, montre l’existence d’une dépendance de queue entre les deux variables, puisque les courbes empiriques des deux paires s’écartent de

la diagonale quand $W_{(i:n)}$ est supérieure à 0.6 et inférieure à 0.3. D'une même, les graphiques *Chi - plot* sur l'ensemble des données et des périodes, révèlent l'existence d'une dépendance importante entre les deux variables durant les trois périodes, puisqu'une grande partie des points dépassent la bande de confiance.

Les résultats des graphiques *Chi - plot* des quatre queues (Fig. 5.4 5.5), pour la première et la deuxième période, révèlent une dépendance dans les deux queues supérieur, plus importante dans la queue supérieure-gauche. Cependant, pour la troisième période (Fig. 5.6), le résultat montre une dépendance importante dans la queue supérieure-droite.

Ainsi, à l'instar de cette analyse, la structure de dépendance change de la période avant crise et après la crise. Cette structure peut être modélisée par une famille elliptique ou Archimédienne.

Maintenant, nous utilisons l'approche non paramétrique d'identification des copules paramétriques qui utilise la Moyenne Quadratiques des Erreurs (SME) entre la copule empirique et la copule paramétrique (3.2.3). Nous appliquons cette approche en parcourant tout l'intervalle estimé du paramètre de chaque copule avec un pas de $\Delta = 0.01$ pour le couple (Taux de Change, Inflation). Les résultats sont résumés dans le tableau (5.2).

TABLE 5.2 – Tableau Les résultats de la Moyenne Quadratique des Erreurs pour les différentes périodes

Copules	2000-2006		2000-2007		2009-2016	
	θ	SME	θ	SME	θ	SME
Gaussien	-0,006283144	0,666221707	-0,01256604	0,674898388	-0,007853901	0,666667501
Frank	-0,03640524	0,666240085	-0,072106922	0,67489491	-0,04526277	0,667086605
Clayton 90	-0,008032129	0,666644906	-0,016129032	0,675562286	-0,010050251	0,665601731
Gumbel 90	-1,004016064	0,665589801	-1,008064516	0,673420536	-1,005025126	0,667795267
Joe 90	-1,006931479	0,665137666	-1,013926573	0,672450586	-1,008674243	0,668540737
Clayton 270	-0,008032129	0,66566254	-0,016129032	0,673673519	-0,010050251	0,667782731
Gumbel 270	-1,004016064	0,666274178	-1,008064516	0,674467634	-1,005025126	0,666120776
Joe 270	-1,006931479	0,666398959	-1,013926573	0,674441874	-1,008674243	0,66545838

Les résultats du Tableau 5.2 montrent que, pour la première et la deuxième période, les copules Joe pivoté de 90, Gumbel pivoté de 90 et Clayton pivoté de 270, ont les plus petites valeurs de SME. Tandis que, pour la troisième période, la copule Joe pivoté de 270 et Clayton pivoté de 90 ont les plus petites valeurs du SME. Ces résultats qui corroborent ceux de l'analyse graphique, suggèrent la présence des queues de dépendance

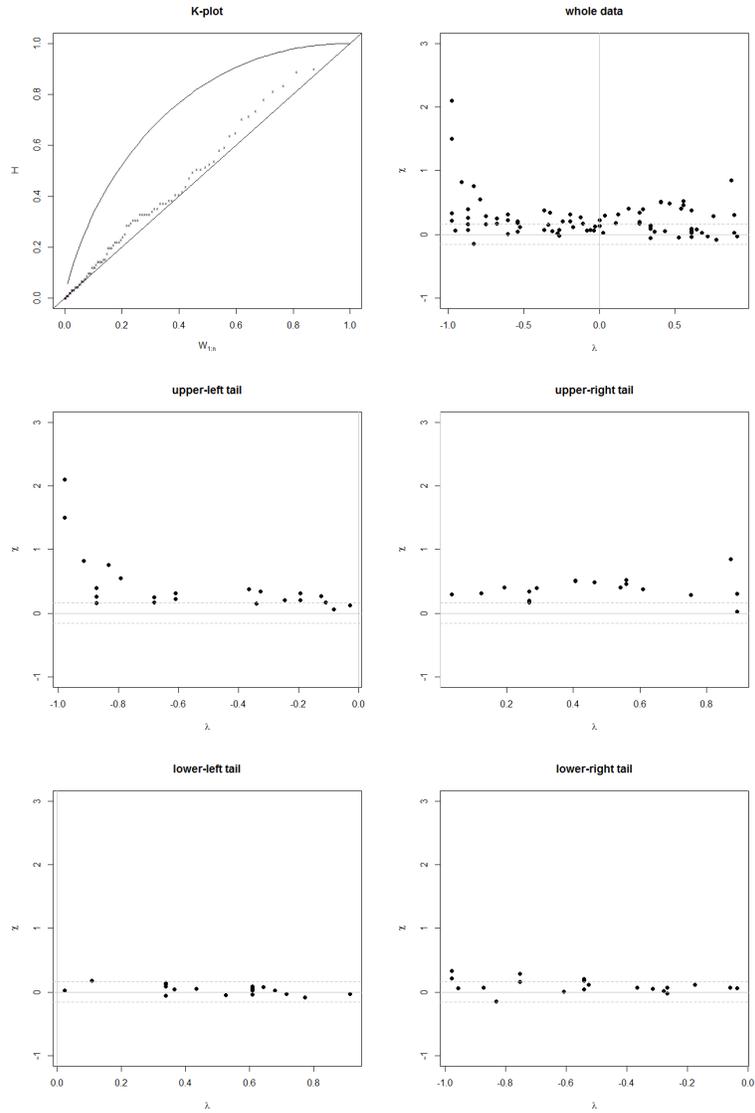


FIGURE 5.4 – Chi-Plot et K-Plot des données de la première période

négative, ainsi qu'un changement dans la structure de dépendance avant-durant et après la crise. Par la suite, nous utiliserons les copules sélectionnés pour faire l'inférence statistique.

En utilisant les méthodes de présélection des copules décrite précédemment, notre choix s'est porté sur cinq copules pour modéliser la dépendance entre le taux de change et le taux d'inflation. Par la suite, nous adoptons le test proposée par Genest et al (2009) (section 3.2.3), afin de retenir la meilleure copule.

Le tableau 6.3 présente les p-values que nous avons obtenues. Pour la première période,

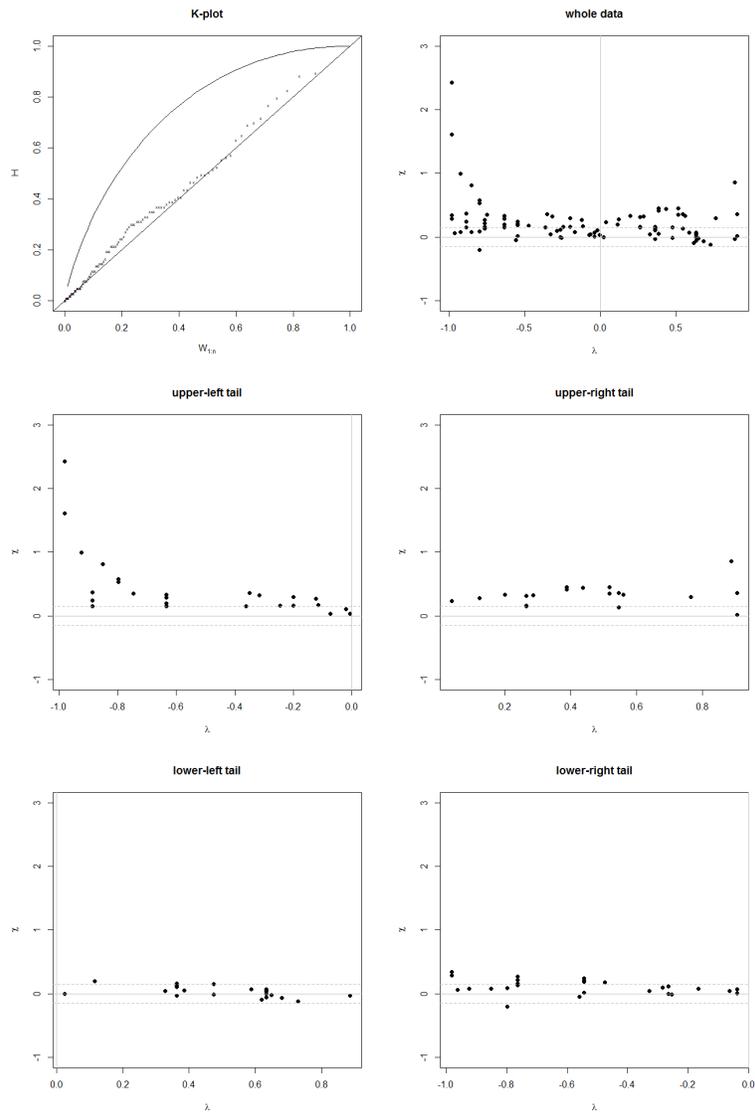


FIGURE 5.5 – Chi-Plot et K-Plot des données de la deuxième période

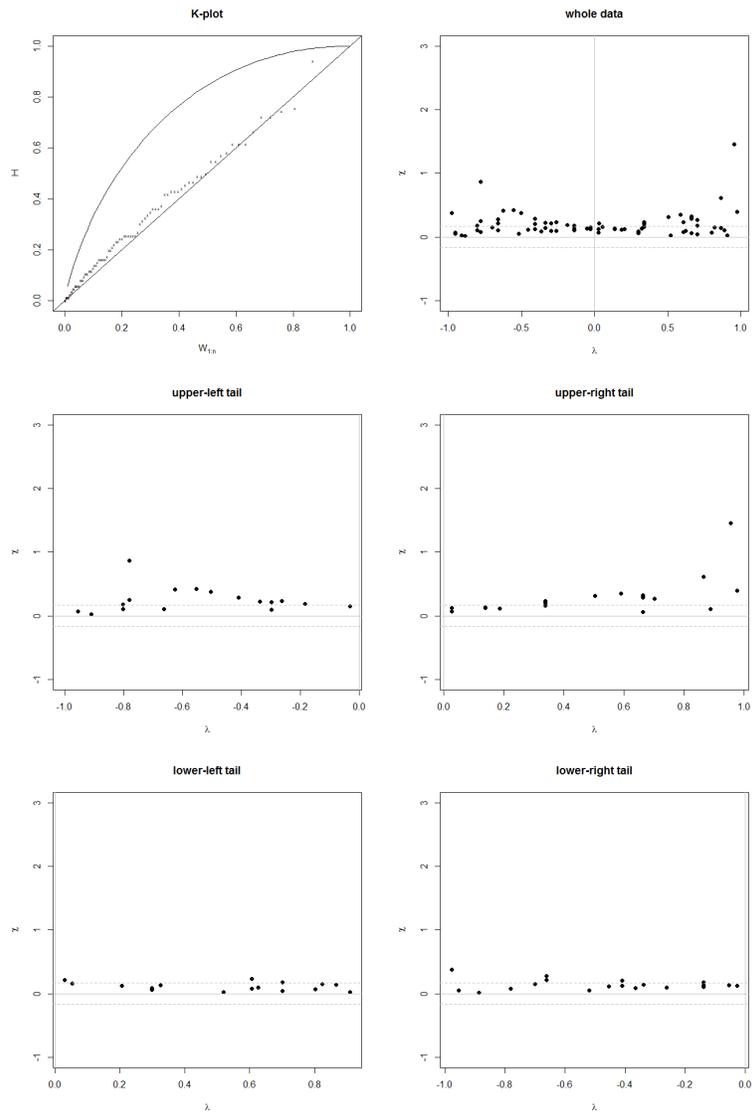


FIGURE 5.6 – Chi-Plot et K-Plot des données de la troisième période

TABLE 5.3 – Tableau P-value pour les différentes familles de copules retenues

Period	Copula	p-value CVM	p-value KS
2000-2006	Gumbel $\frac{\pi}{2}$	0.6978131	0.6819085
	Joe $\frac{\pi}{2}$	0.7726316	0.7578947
	Clayton $\frac{-\pi}{2}$	0.01814516	0.004032258
2000-2007	Gumbel $\frac{\pi}{2}$	0.8531353	0.8168317
	Joe $\frac{\pi}{2}$	0.9321705	0.9186047
	Clayton $\frac{-\pi}{2}$	0.02411576	0.003215434
2009-2016	Clayton $\frac{\pi}{2}$	0.03636364	0.0989899
	Gumbel $\frac{-\pi}{2}$	0.7332016	0.8774704
	Joe $\frac{-\pi}{2}$	0.8378378	0.9034749

la plus grande p-value est 0.77 pour la copule Joe pivotée d'angle $\frac{\pi}{2}$. La même copule est sélectionnée avec une p-value de 0.93, pour la deuxième période. Tandis que pour la troisième période, la meilleur copule est celle de Joe pivoté d'angle $\frac{-\pi}{2}$ avec une p-value de 0.87.

Nos résultats (table 5.4) montrent que durant la première période, caractérisée par une stabilité, les copules sont performantes en termes de prévision. Contrairement aux périodes de crise et d'instabilité (après crise), où celles-ci semblent donner des prévisions imprécises. Cela est dû à la volatilité des principaux agrégats macroéconomiques. Pour surmonter ce problème, nous suggérons de modéliser les séries mises à jour en utilisant des copules dynamiques.

5.1.3. Conclusion

L'étude de la dépendance entre les variables économiques revêt une importance capitale en prise de décision. Les techniques de la Copule sont des outils puissants pour explorer cette dépendance. Dans cet étude, nous avons tenté d'explorer la structure de corrélation entre l'inflation et le taux de change *US/Euro* durant les périodes d'avant-crise, de crise et

TABLE 5.4 – Tableau des prévisions des copules ajustées pour les différentes périodes

2000-2006		2000-2007		2009-2016	
Observée	Prédite	Observée	Prédite	Observée	Prédite
-0.02	-0.016	0.28	-0.02	0.02	-0.0067
-0.05	-0.028	0.27	-0.02	0.12	-0.00678
-0.02	-0.027	-0.23	-0.02	0.11	-0.00678
-0.01	-0.028	-0.39	-0.02	0.10	-0.00678
0.15	-0.023	0.01	-0.02	0.09	-0.00678
0	-0.023	-0.01	-0.024	0.08	-0.00678

d'après-crise.

Trois résultats principaux doivent être mis en évidence. Premièrement, au cours de la période 2000-2007 et 2000-2008, la copule la plus appropriée qui décrit la dépendance entre l'inflation et le taux de change est la copule Joe pivoté d'angle $\frac{\pi}{2}$ (avec un changement au niveau de la valeur du paramètre, indiquant que l'intensité de la dépendance change). Deuxièmement, pour la période 2009-2016, la copule Joe pivoté d'angle $\frac{-\pi}{2}$ est retenue pour modéliser la dépendance entre les deux variables. Troisièmement, durant la période stable d'avant la crise, cette étude montre la bonne performance des copules en terme des prévisions.

5.2. LES COPULES DYNAMIQUES POUR LA MODÉLISATION ET LA PRÉVISION DES VARIABLES MACRO-ÉCONOMIQUES : TAUX DE CHANGE ET TAUX D'INTÉRÊT À COURT-TERME

Les fluctuations du taux de change sont l'un des facteurs qui influencent plusieurs variables macroéconomiques et ils sont parmi les importants indicateurs clés pour les responsables de la politique monétaire (HoltemÖller et Mallick [68]). Le taux de change est défini comme le prix de la monnaie d'un pays exprimé dans la monnaie d'un autre pays. Il peut être exprimé comme le taux moyen sur une période donné ou comme le taux à la fin d'une période. Le taux d'intérêt est l'instrument typique utilisé par les décideurs politiques pour contrôler les agrégats monétaires (Hnatkovska et al. [71]), en particulier pendant les périodes de crise économique où le taux de change devient très volatile. Il est généralement admis qu'avec un taux d'intérêt élevé et une politique monétaire restrictive, il est possible de stabiliser le taux de change.

La théorie économique fournit des points de vue contradictoires sur les liens entre le taux d'intérêt et d'autres variables macroéconomiques. La recherche empirique tente de déterminer la nature de cette relation pour différents pays et périodes (Hnatkovska et al. [?], HoltemÖller et Mallick [69], et Andries et al. (2017, [5])). La plupart des modèles théoriques standard de taux de change prédisent l'écart de taux d'intérêt entre le pays et un pays étranger. Selon la théorie de la parité des taux d'intérêt non couverte, le différentiel du taux d'intérêt est déterminé par le taux de change (Hoffmann et MacDonald [?], Suthar [105]). Chinn et al ([21], [22], [23]) ont trouvé une corrélation positive entre le taux de change logarithmique et l'écart de taux d'intérêt. à l'aide d'une analyse de régression simple, Furman et Stiglitz [50] soutiennent qu'un taux d'intérêt élevé dans les économies fortement endettées peut donner lieu à une dépréciation du taux de change en raison d'un risque accru de faillite. Hnatkovska et al. montrent que la relation entre le taux de change et les taux d'intérêt n'est pas monotone. En utilisant l'analyse de corrélation conditionnelle dynamique pour le cas de Philippines, Bautista [10] montre que la corrélation entre le taux d'intérêt et le taux de change n'est pas constante. Sarac et KaragÖz [101] ont utilisé le test de causalité pour étudier l'impact des taux de change et des taux d'intérêt à court terme en Turquie. Ils ont constaté qu'au cours de la période allant de février 2003 à août 2015, les taux d'intérêt à court terme n'exercent pas d'influence sur le taux du dollar que si ce dernier dépasse un certain seuil. En utilisant des données roumaines, Andries et al. ([5]) révèlent un fort mouvement conjoint entre les taux de change et les taux d'intérêt en période de turbulences ou de changements de politique monétaire.

5.2.1. *Modèle de Patton*

A ce niveau, nous nous proposons de faire une application du modèle de Patton (2006) sur des données macroéconomiques, par la suite, nous le comparons aux résultats de la nouvelle approche dynamique décrite dans la section précédente. Nous modélisons le taux de change et le taux d'intérêt à court terme de la zone Euro, Japon, Indonésie, Danemark, Russie, Canada, Suède. Ces données sont tirées du site Web de l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE) (<https://data.oecd.org/>). Pour notre analyse, nous considérons le taux de croissance des deux variables, calculé comme $r_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$. Le tableau 5.5 présente un résumé statistique de chaque série.

Les séries chronologiques des variables ne conviennent pas immédiatement à la modélisation par les copules. Nous devons d'abord éliminer l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité en appliquant les techniques de Box-Jenkins pour modéliser des séries temporelles (Box et Jenkins [13]). En utilisant cette approche, nous constatons que le taux de croissance du taux de change $r_{ech,t}$ et le taux de croissance du taux d'intérêt à court terme

Country	Mean	Max	Min	std	Skewness	Kurtosis	Jecque-Berra
Panel Exchange rate							
Euro Area	0.0004	0.028	-0.033	0.01	0.0125	0.1006	0.1446***
Indonesia	-0.0013	0.2065	-0.1386	0.03	0.8294	6.999994	469.3179
Russia	-0.0033	0.1359	-0.1750	0.0339	-1.2468	6.659213	430.92
Sweden	-0.0007	0.0739	-0.1036	0.0266	-0.3901	1.148178	26.498
Denmark	0.00022	0.0643	-0.0788	0.024	-0.02561	0.112061	0.2663***
Canada	-0.0002	0.0637	-0.0915	0.0168	-0.15233	3.033117	126.99
Japan	0.00019	0.0257	-0.0312	0.01	-0.0341	0.236482	0.5419***
Panel Short-term Interest Rate							
Euro Area	-0.0112	0.238	-0.3312	0.0792	-1.00664	3.023275	105.3052
Indonesia	-0.0043	0.2331	-0.1872	0.05	0.299408	4.002388	155.5969
Russia	0.01741	1.7270	-0.6592	0.2314	2.554055	15.0293	2495.2139
Sweden	0.01237	4.500	-1.182	0.295	10.69082	160.5237	368337.99
Denmark	0.00039	6	-2.833	0.397	9.756462	169.4979	389458.4
Canada	-0.0057	0.5160	-0.3222	0.079	0.900922	9.878674	1353.66
Japan	0.00143	0.2852	-0.1091	0.0378	2.777429	19.73669	2865.0659

TABLE 5.5 – Statistiques descriptives de chaque variable

$r_{ir,t}$ peuvent être modélisés par un processus $ARMA + GARCH(1, 1)$. Les estimations des paramètres de ces processus sont présentées dans le tableau 5.6. Ainsi, les modèles ajustés à $r_{ech,t}$ et $r_{ir,t}$ fournissent des résidus corrélés, $\eta_{ech,t}$ et $\eta_{ir,t}$. Une analyse approfondie de ces résidus montre qu'ils sont homogènes, stationnaires avec des composants indépendants. En effet, l'idée clé pour modéliser la corrélation, entre $r_{ech,t}$ et $r_{ir,t}$, est de déterminer la meilleure copule qui capture la dépendance entre $\eta_{ech,t}$ et $\eta_{ir,t}$.

Les résidus $\eta_{ech,t}$ et $\eta_{ir,t}$ suivent soit loi de Student ou la loi normale (voir tableau 5.6). Le test de Kolmogorov-Smirnov montre que les séries, $\{F_{\eta_{ir}}(\hat{\eta}_{ir,t}) = \hat{u}_t\}_{t \geq 0}$ et $\{F_{\eta_{ech}}(\hat{\eta}_{ech,t}) = \hat{v}_t\}_{t \geq 0}$ sont uniformément distribués.

Ensuite, nous extrayons les résidus standardisés et les transformons en variables uniformes. Et l'hypothèse que les résidus transformés sont uniformément distribués, on procède à l'identification de la copule adéquate. Après ce traitement des séries, nous estimons les paramètres de copule en utilisant l'équation (4.2.3). Le tableau suivant résume présente les résultats trouvés.

Le critère d'AIC, nous a permis de tirer plusieurs constats. En effet, pour la zone Euro, la Russie, Canada, Japon et l'Indonésie, la copule gaussienne variante est la plus appropriée. Nous rappelons, ainsi, que la copule gaussienne est symétrique et n'exige pas la présence d'une dépendance dans les queues. Cependant, pour la Suède et le Danemark, les copules sélectionnées sont la copule Gumbel privotée à 180 et la copule Clayton. Ces copules sont capables de capturer une dépendance positive et présente une dépendance dans la queue inférieure-inférieur. Ce qui explique une possibilité d'une baisse du taux d'intérêt à court

Exchange Rate							
	Euro Area	Indonesia	Russia	Sweden	Denmark	Canada	Japan
ϕ_1	0.2776***	0.8794639***	0.5676***	0.3706***	0.2902***	$2.883e - 01$ ***	$2.263e - 01$ **
γ_1	0	-0.6864055***	0	0	0	0	0
γ_2	0	-0.1097699	0	0	0	0	0
ω	0.0000144	0.0001139	2.431e-06	5.005e-05	7.907e-05	1.302e-05	8.002e-08
α_1	0.06937	0.8673522**	$4.972e - 01$ ***	5.288e-02	3.521e-02	$1.516e - 01$ *	1.000e-08
β_1	0.7881***	0.3266656*	$6.605e - 01$ ***	$8.634e - 01$ ***	$8.180e - 01$ ***	$8.062e - 01$ ***	$9.995e - 01$ ***
df	0	4.3287649**	$5.099e + 00$ **	0	0	$1.000e + 01$ *	0
KS p-value							
	0.9954	0.3602	0.9381	0.7104	0.634	0.7397	0.9496
Short-term Interest Rate							
	Euro Area	Indonesia	Russia	Sweden	Denmark	Canada	Japan
ϕ_1	0.6941***	0.8111***	-0.667697***	0.4011902***	0.5172***	$4.921e - 01$ ***	$-6.787e - 01$ ***
ϕ_2	0	0	0	-0.0239602	0	$1.033e - 01$ *	$-4.188e - 01$ *
ϕ_3	0	0	0	0.1259427**	0	0	$2.225e - 01$ *
ϕ_4	0	0	0	0	0	0	$1.380e - 01$ *
ϕ_5	0	0	0	0	0	0	5.738e-02
ϕ_6	0	0	0	0	0	0	$8.066e - 02$ *
γ_1	0	0	0.481349**	0	0	0	$9.208e - 01$ ***
γ_2	0	0	-0.012944	0	0	0	$7.128e - 01$ ***
γ_3	0	0	0.200765**	0	0	0	0
ω	0.0001034	0.0000825*	0.001597	0.0012764*	2.231e-05	5.071e-06	1.002e-05
α_1	1.0000000	0.8433**	0.664625*	1.0000000*	1.000**	$1.000e + 00$ ***	$1.000e + 00$ *
β_1	0.75837***	0.2840*	0.607299***	0.4338528***	$6.760e - 01$ ***	$6.355e - 01$ ***	$7.216e - 01$ ***
df	2.18011***	5.675*	2.983025***	2.4361475***	$2.364e + 00$ ***	$2.409e + 00$ ***	$2.109e + 00$ ***
KS p-value							
	0.2863	0.1778	0.9861	0.8622	0.2539	0.8776	0.2727

significations : 0.01 ***, 0.05 **, 0.1 *.

TABLE 5.6 – Résultats de l'estimation des paramètres des modèles ARMA-GARCH ajustés au panel du taux de croissance du taux de change et taux d'intérêt à court terme

terme accompagnée d'une dépréciation de la devise nationale. Comme le montre la Figure (5.2.1), la relation entre les deux variables est dynamique et elle change au cours du temps. également, au cours de la période de crise, on remarque l'existence des piques qui correspond à un changement brusque dans le paramètre de la copule ajustée. Le traie en rouge précise la période de la crise financière 2007-2009.

5.2.2. Nouvelle Approche de la Copule Dynamique

Pour illustrer notre approche, nous utilisons les données mensuelles du taux d'intérêt à court terme et du taux de change Euro/USD, pour la période allant du février 1999 à juillet 2014. Les variations temporelles des taux de croissance au cours de la période étudiée sont représentées sur la Fig. 5.8 ci-dessous. La figure montre les fluctuations des taux d'intérêt à court terme dans l'UE et le taux de change euro/USD, et indique leur relation.

	Euro Area	Indonesia	Russia	Sweden	Denmark	Canada	Japan
time varying Gaussian Copula							
ω	-0.1374	-0.3021	-0,8004	0,5791	0,0453	0,0917	0.0060
β	0.3731	-0.6230	0,4635	0,4352	0,3381**	0,5908	-0.1799
α	-2.136	0.3457	-1,9516	-2,1347	1,2482	-2,0952	2.1783
LL	-1.9485	-2.3878	-5.7806	-4.7330	-6.9555	-3,275	-6.8546
time varying rotated Gumbel Copula							
ω	1,5304	0,9172	-1,0596	0,7914	-0,7305	-1,0263	-1.1085
β	-0,286	-0,0099	-0,1002	-0,0362	-0,349	0,0523	0.0541
α	-0,661	0,1121	0,514	0,8431	0,229**	-0,0975	0.1127
LL	0.2776	2.8411	-4.9753	-7.2750	-6.8159	-1.0930	-0.8418
time varying Clayton Copula							
ω	-0,8371	-0.0015	0,4827	-0,2269	-1,3141	0,5081	-1.4926
β	1,7606	0.8816	1,0715	-0,2591	1,4055	2,9055	0.6958
α	1,4733	0.0061	-1,2926	-0,3618	2,0448	-2,1193	3.9988
LL	-1.4103	0.0023	0.3525	-5.2570	-11.1423	-1.4166	-2.6306

TABLE 5.7 – Résultats de l'estimation des paramètres du modèle Patton.

Modèle variant dans le temps du tau de Kendall

Plusieurs études montrent que les résultats empiriques ne sont généralement pas sensibles aux petits changements de la taille de la fenêtre glissante (Aloui et al. (2013 [2]), (2016, [3]), Liu et al. (2017, [81])).

Dans notre cas, nous sélectionnons la taille d'une fenêtre, de tel sorte que les observations contenues dans cette fenêtre soient homogènes. Nous avons retenu une fenêtres de 60 observations. Le tau de Kendall est estimée à la limite supérieure de la fenêtre, à partir de ses 60 observations. La figure 5.9 montre une variation évidente du tau de Kendall, surtout durant la période de crise.

Après une étude exploratoire, nous avons constaté que le processus tau de Kendall est un processus autorégressif de premier ordre avec la variable externe (ARX). Premièrement, les coefficients du modèle autorégressif $AR(1)$ sont estimés. Dans un deuxième temps, nous explorons la corrélation croisée entre les résidus du modèle $AR(1)$ et le logarithme des volatilités conditionnelles $\log(\sigma_{ir,t-s})$ et $\log(\sigma_{ech,t-s'})$, afin de sélectionner le décalage significatif s et s' (Figure 5.10). à ce stade, les volatilités conditionnelles retardées retenues sont utilisées comme variables externes. Par conséquent, nous estimons leurs coefficients à l'aide de la méthode du moindre carré ordinaire et testons leur significativité. Les résultats montrent que le processus tau de Kendall n'est pas influencé par la volatilité conditionnelle des taux d'intérêt à court terme. Enfin, l'expression du processus tau de Kendall est définie par :

$$\tau_t = 0.27 + 0.98 * \tau_{t-1} + 0.029 * \log(V_{ech,t-38}) \quad (5.1)$$

évaluation du changement de la copule

La volatilité et le signe variant du tau de Kendall suggèrent que la structure de corrélation change. Il ne peut donc pas être modélisé par une seule copule.

Nous appliquons notre approche décrite dans la section [4.2.4](#) sur chaque fenêtre glissante afin de sélectionner leur copule appropriée. Le diagramme de dispersion de la Fig. [5.11](#) confirme la variation de la copule ajustée au cours du temps. Cette variation devient évidente en période de crise. L'histogramme représente la fréquence des copules les mieux adaptées. En effet, la copule la plus fréquente est la copule Frank. On rappelle qu'elle est symétrique et convient à modéliser les dépendances positive et négative.

La figure [5.12](#) montre la variation des coefficients de dépendance de la queue λ^{ur} , λ^{ul} , λ^{ll} et λ^{lr} , calculés en utilisant l'approche dynamique de copule. Comme prévu, la structure de dépendance au niveau des extrêmes entre les deux taux change avec le temps. Les graphiques mettent clairement en évidence les périodes de temps où les événements extrêmes sont fortement corrélés.

Au cours de la période allant d'avril 2008 à la fin de 2009, qui inclut la période de crise, nous pouvons constater une forte dépendance de la queue inférieure. Ainsi, Une autre période de forte dépendance à l'égard de la queue inférieure commence au dernier trimestre de 2013. A cette époque, la dette publique de la zone euro s'élevait à 92.7% du PIB. Selon l'Office des statistiques européennes, il s'agit de la première baisse " en termes absolus " enregistrée depuis 2007. Les extrêmes inférieurs observés peuvent s'expliquer par le fait que le taux d'intérêt à court terme est utilisé pour influencer l'accumulation de la dette publique.

La dépendance de la queue supérieure entre les taux de croissance considérés semble être affectée par les périodes d'avant-crise, de crise et d'après-crise. La première période couvre le dernier trimestre de 2006, tandis que la deuxième va de juin à décembre 2007, et la dernière période va jusqu'au premier trimestre de 2008.

Prévision du taux de change en utilisant la copule dynamique conditionnelle

Dans les sections précédentes, nous avons souligné les changements dans la copule ajustée et le tau de Kendall. Ce caractère dynamique devrait être prise en compte dans

la prévision. Pour ce faire, nous appliquons l'algorithme proposé dans la section 4.2.4 pour prédire $r_{ech,T+i}$, où $T =$ avril 2014 de sorte que $T + 1$, $T + 2$, et $T + 3$ correspondent respectivement aux mois de mai, juin et juillet 2014. Le tableau 5.8 résume nos résultats.

Dans la première étape (colonne 2), nous prédisons la valeur future de tau de Kendall $\hat{\tau}_{T+1}$, $\hat{\tau}_{T+2}$, et $\hat{\tau}_{T+3}$, en utilisant (5.1). Dans la deuxième étape, étant donné que le signe de Kendall prédit est positif, nous sélectionnons \mathcal{S} l'ensemble des copules susceptibles de modéliser une dépendance positive.

Soit $n_j^{(i)}$ le nombre de transitions de la copule C_{w_T} à une fonction copule $C_j \in \mathcal{S}$, par pas de i . Nous définissons la probabilité de transition, de C_{w_T} à C_j par pas de i , par :

$$P_j^{(i)} := \frac{n_j^{(i)}}{\sum_{C_k \in \mathcal{S}} n_k^{(i)}}.$$

La 4ème colonne contient les copules candidates accessibles à partir de C_{w_T} . Entre parenthèses, nous donnons la probabilité de transition. Ces copules sont utilisées pour construire une fonction de copule mixte selon (4.4). Les estimations de ses paramètres sont indiquées dans la 5e colonne. Dans l'étape finale (étape 5), nous fixons q à 0.5, qui correspond au cas du quantile médiane de la copule.

Une étude comparative a été développée entre notre approche de copule dynamique et la copule statique modélisant la corrélation sur l'ensemble de la période. La copule la plus appropriée pour décrire la dépendance entre les taux de change et les taux d'intérêt à court terme est la copule de Clayton (avec $\theta = 0,0675$). En d'autres termes, nous comparons le médian quantile copule calculé par les deux approches. Fig. 5.13 montre que la copule mixte proposée donne de meilleurs résultats par rapport à la copule statique.

5.2.3. Conclusion

Les taux de change et les taux d'intérêt à court terme sont des variables macroéconomiques importantes qui influencent la performance de l'économie mondiale. Il est de notoriété publique que les responsables de la politique monétaire utilisent les taux d'intérêt à court terme pour contrôler les fluctuations du taux de change et influencer l'accumulation de la dette publique. En effet, Plusieurs études ont tenté de déterminer la nature de cette relation pour différents pays et périodes en utilisant différentes méthodologies. Dans cette

Date	$\hat{\tau}$ (Step 1)	April Copula	Possible change (Step 3)	Estimated parameters (Step 4)
May-14 (i=1)	0.02477	Frank	Frank (0.8077) Clayton (0.0769) Rotated Joe 180 (0.1154)	0.2231386 0.05081856 1.043983
Juin-14 (i=2)	0.03067	Frank	Frank (0.72) Clayton (0.24) Rotated Joe 180 (0.04)	0.2762476 0.06328082 1.054815
Jul-14 (i=3)	0.03462	Frank	Frank (0.625) Clayton (0.292) Rotated Joe 180 (0.083)	0.3118884 0.07172305 1.062163

TABLE 5.8 – Tau de Kendall prédit et les copules retenues pour les prévision avec leurs probabilités de transition (entre parenthèse).

étude, nous avons proposé une approche de copule dynamique, basée sur la méthode des fenêtres glissantes, pour analyser les structures de dépendance dynamique entre les taux de change et les taux d'intérêt à court terme dans la zone euro. Cette approche permet d'examiner le type et le degré de dépendance dans le temps pour différentes situations économiques.

Notre approche s'avère adéquate pour modéliser la corrélation variante dans le temps et suffisamment robuste pour faire face aux perturbations dues aux périodes de crise économique. Nous proposons un modèle pour saisir la dépendance entre le taux de change et le taux d'intérêt à court terme dans la zone euro au cours de la période allant de février 1999 à juillet 2014. Cet intervalle peut être fractionné en trois périodes : L'avant-crise, la crise et les périodes d'après-crise. Pendant la période d'avant-crise, qui était caractérisée par une stabilité économique, les copules gaussiennes ou Frank sont les plus appropriées pour modéliser la dépendance entre les taux de change et les taux d'intérêt à court terme. Pour les périodes de crise et d'instabilité de l'activité économique, cette dépendance est modélisée par des copules asymétriques. Il convient de noter que pendant ces périodes, le taux d'intérêt est utilisé pour contrôler la stabilité du taux de change.

La prévision est l'une des principales raisons qui sous-tendent la modélisation. Nous appliquons notre approche dynamique pour prédire le comportement conjoint des taux de change et des taux d'intérêt à court terme dans un avenir proche. Pour ce faire, nous construisons une copule dynamique mixte qui est beaucoup plus performante qu'une copule statique en terme de prévision.

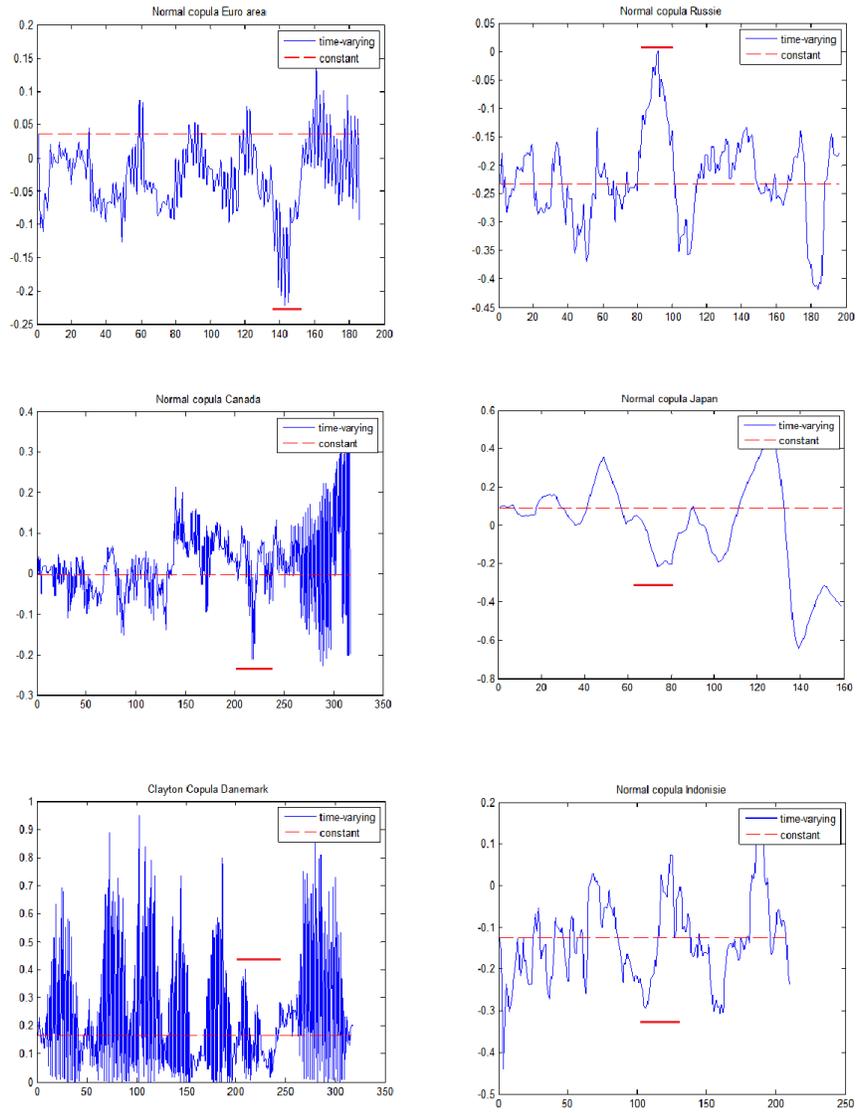


FIGURE 5.7 – Paramètre dynamique obtenue des copules ajustés pour chaque pays

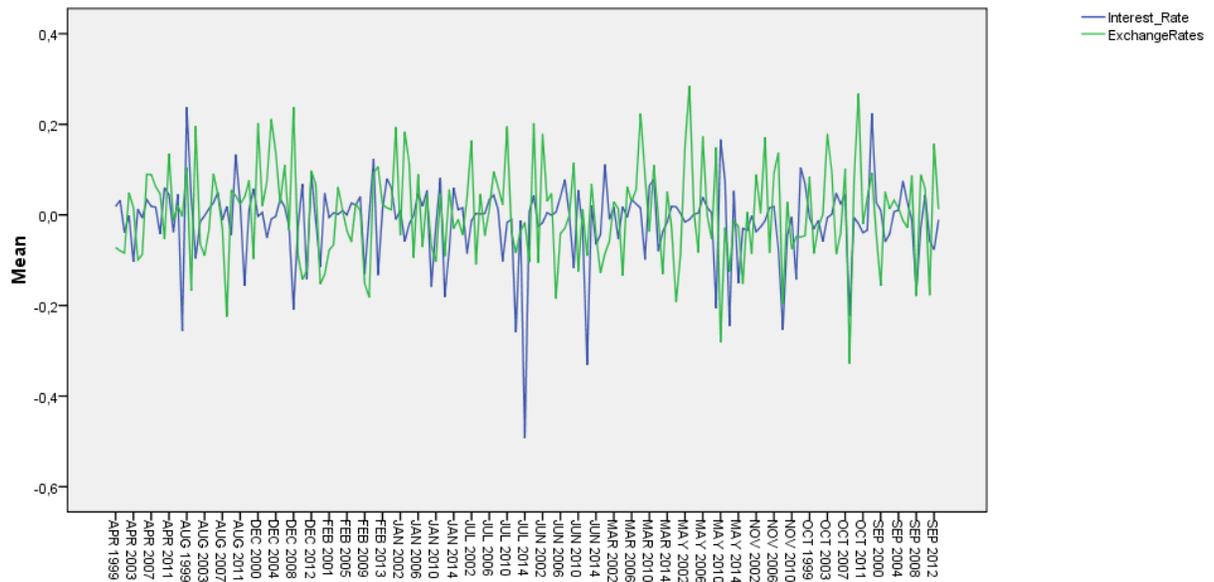


FIGURE 5.8 – L'évolution du taux de change et taux d'intérêt à court terme 1999-2014.

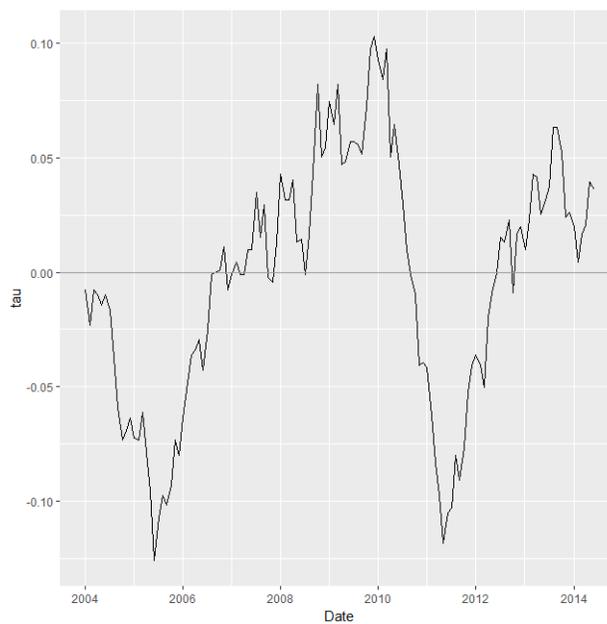


FIGURE 5.9 – Estimation du Tau de Kendall par fenêtre glissante de taille 60.

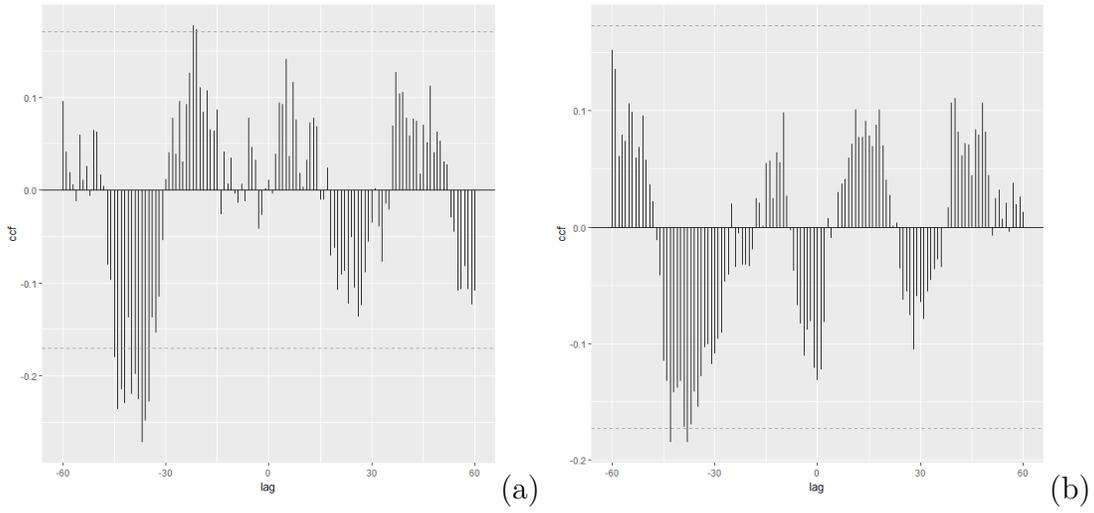


FIGURE 5.10 – Corrélation croisées entre les résidus et le logarithme de la variance conditionnelle du taux de change (a) et celui du taux d’intérêt à court terme (b).

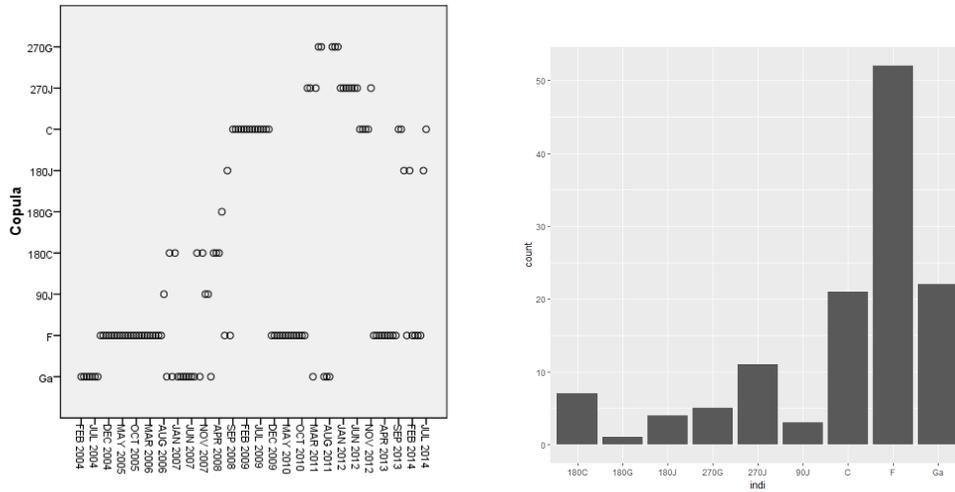


FIGURE 5.11 – Représentation des copules appropriées à chaque fenêtre et l’histogramme présentant leurs effectifs

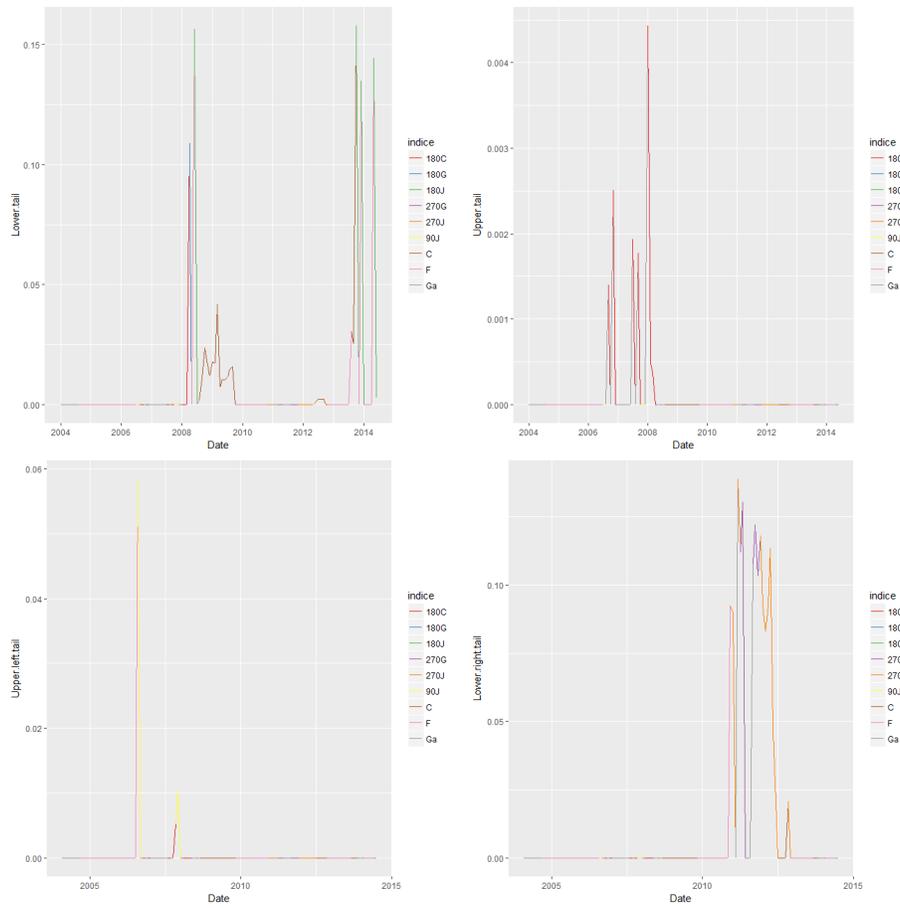


FIGURE 5.12 – Coefficients de dépendance de queue obtenues par l’approche de copule dynamique.

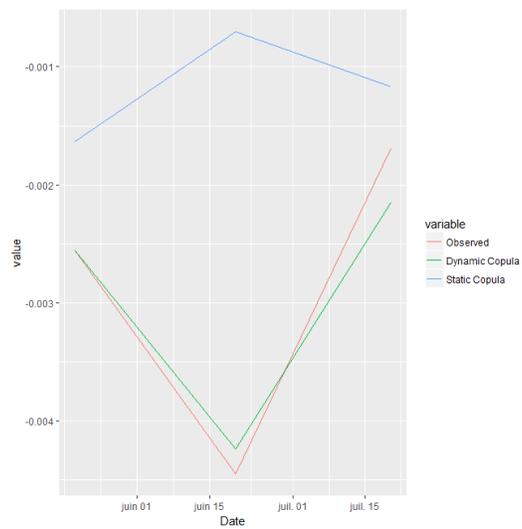


FIGURE 5.13 – Performances des Copulas ajustées en termes de taux de croissance des prévisions de taux de change

CHAPITRE 6

UNE APPROCHE PAR LES COPULES POUR PRÉVOIR LES PRÉCIPITATIONS

6.1. INTRODUCTION

La prévision des pluies constitue un enjeu très intéressant, en raison de ces interactions avec de nombreux domaines économiques et sociaux ainsi que de la multiplication des impacts du changement climatique. Ce problème est d'abord un processus d'observation continu qui concerne l'état de l'atmosphère, des océans et de la surface terrestre. Dans ce contexte, l'organisation météorologique mondiale fournit un cadre pour une suite évolutive de systèmes d'observation mondiaux basés sur des satellites, des radars et des stations météorologiques de surface. De nombreuses études ont développé des techniques statistiques et mathématiques pour intégrer ces observations afin la prévision météorologique.

Pour les prévisions à (moyen et long terme) (de quelques heures à un mois ou plus), la prévision numérique du temps (PTN) est présentée comme la technique de prévision la plus utilisée. La prévision numérique du temps est la représentation de l'état atmosphérique actuel sur une grille tridimensionnelle, en appliquant les équations physiques et dynamiques qui régissent la façon dont l'atmosphère change dans le temps à chaque point de la grille. La répétition de ce processus génère une prévision de la longueur désirée. L'application des modèles numériques nécessite une infrastructure très développées et des ressources informatiques plus sophistiquées. Un autre inconvénient du modèle (PTN) est la simulation imparfaite à petit échelle, comme les précipitations et les nuages, en raison de la nature de l'atmosphère et les erreurs du système de modélisation (American Meteorological Society, 2015, [?]).

De nombreuses études s'intéressent actuellement aux approches statistiques et utilisent des indices climatiques océaniques et atmosphériques retardés pour calculer avec précision les probabilités de recevoir des quantités particulières de précipitations. Dans ce contexte, L'indice d'oscillation australe (SOI) est calculé à partir des fluctuations mensuelles ou saisonnières de la différence de pression atmosphérique entre Tahiti (dans le Pacifique central) et Darwin (en Australie), est un indicateur potentiel pour la prévision des précipitations. Il donne une mesure la différence de pression au niveau de la mer sous forme d'indice.

Le choix du SOI retardé est discuté dans nombreuses études actuelles. En fait, il est utilisé pour prévoir les précipitations saisonnières australiennes dans certaines régions et saisons (Chiew et al. (1998, [24]), McBride et Nicholls (1983, [85]), Stone et al. (1996, [104]), Kirono et al. (2010, [77])), pour prévoir les précipitations au début de l'été dans les basses terres du Lesotho (Hyden L et Sekoli (2000, [72])), pour prédire les précipitations annuelles moyennes dans le nord de l'Iran (Hadiani et al., (2012, [64]), et pour prédire les précipitations annuelles et la sécheresse au Zimbabwe (Chifurira et Chikobvu (2014, [20])).

Dans le même contexte, nous présentons une approche statistique soutenant l'utilisation de l'indice d'oscillation australe (SOI) retardé pour la prévision des précipitations saisonnières. Nous établissons un modèle statistique, basé sur la théorie des copules, qui prend en compte la relation SOI et les précipitations. Dans cette étude nous avons effectuer une analyse comparative approfondie des séries chronologiques mensuelles.

6.2. SITUATION GÉOGRAPHIQUE ET DONNÉES DISPONIBLES

Afin d'explorer la relation entre le SOI retardé et les précipitations, nous utilisons les données obtenues de 6 stations météorologiques situées au Maroc (Tanger et Casablanca), en Espagne (La Corogne et Valladolid) et au Portugal (Lisboa-Geofísica et Santa Maria) (Figure). Le choix de la région méditerranéenne se justifie par la complexité géorographique. De plus, l'idée derrière le choix de six emplacements différents est de confirmer ou de contredire l'effet de la spatiale, et d'identifier les mois les plus pertinents dans la relation entre le SOI et les précipitations.

6.3. MÉTHODOLOGIE ET RÉSULTATS

Notre approche peut être résumée dans les étapes d'algorithmes suivantes :



FIGURE 6.1 – Localisation des stations de mesures météorologiques

Etape 1 : Rassembler les séries SOI et pluviométrique par mois et calculer le coefficient de corrélation de Kendall entre les séries bivariées mensuelles $(SOI_t, Rainfall_t)$ pour chaque mois t avec $t = 1, \dots, 12$. Le coefficient de corrélation de Kendall présente l'avantage de capturer les formes générales de dépendance. A la fin de cette étape, les séries retenues sont celles qui sont fortement corrélées.

Etape 2 : Nous utilisons une approche non-paramétrique pour identifier les familles de copules susceptibles de s'adapter aux données. L'approche consiste à choisir la copule la plus proche de la copule empirique de Deheuvels. On utilise le critère AIC ou BIC pour la sélection de la copule. La mise en oeuvre de cette approche est la suivante :

- 1 . La construction de la copule empirique. Pour plus de détails sur cette étape, voir section (1.8).
- 2 . La représentation de la copule empirique, pour avoir une idée préliminaire sur les copules sensibles à tester.
- 3 . Parmi les copules qui sont retenues de l'identification graphique, nous procédons à la sélection des copules les plus appropriées, basée sur le critère *AIC* ou *BIC*.

Une fois la meilleure copule identifiée à l'aide de l'approche non paramétrique, nous procédons à l'identification de la meilleure copule en utilisant une approche paramétrique. Pour plus de détails sur cette étape, voir Embrechts et al. (2001).

Etape 3 : tester la qualité d'ajustement des copules paramétriques, en utilisant le test proposée par Genest (2009).

L'examen des corrélations confirme l'hypothèse d'un effet retardé entre les séries de SOI

et de pluie. Par exemple, le SOI du mois d'août a un effet significatif sur les précipitations d'octobre dans les stations de Tanger et de Valladolid, tandis que les précipitations d'octobre dans les stations de Casablanca et de La Corogne sont influencées par SOI du mois de septembre et juin respectivement. Cependant, le SOI du mois de mars a un impact immédiat sur les précipitations dans les stations de Tanger, Casablanca, Valladolid et La Corogne. Aucune corrélation significative n'a été détectée pour la station de Santa Maria. Ceci est probablement dû à des caractéristiques géographiques. Santa Maria est une île parmi neuf îles de l'archipel des Açores, qui se situe au sud-est de l'archipel au Portugal.

Avant l'ajustement de la copule, nous devons analyser les séries univariées, afin d'éliminer la saisonnalité et l'autocorrélation. Dans notre cas, nous avons normaliser les variables retenues ($y_t = \frac{x_t - \mu}{\sigma}$, avec μ et σ sont la moyenne et l'écart-type de la série x_t), afin de les rendre indépendante et identiquement distribuées. Tableau (6.3) résume le résultats obtenue, en appliquant les test d'homogénéité, d'indépendance, normalité et stationnarité.

	Homogénéité	Stationarité	Normalité	Indépendance
Mar-SOI	0.694	0.7257	0.1636	0.1792
Mars-Rain-Tangier	0.4844	0.9613	0.0002948	0.8339
Mars-Rain-Casa	0.5626	0.99	0.0007804	0.753
Mars-Rain-valad	0.3511	0.9838	0.0001141	0.8145
Mars-Rain-Corruna	0.495	0.99	0.008606	0.113
Mars-Rain-Lisboa	0.5326	0.5721	0.001188	0.3516
Aout-Soi	0.8478	0.9874	0.8337	0.3886
Oct-Rain-Tangier	0.2735	0.4425	7.199e-06	0.9493
Oct-Rain-Valad	0.3511	0.99	5.842e-05	0.09495
Oct-rain-Lisboa	0.5419	0.9614	0.0002036	0.9104
Sep-SOI	0.9651	0.9554	0.4331	0.5537
Oct-Rain-Tangier	0.6307	0.9828	3.395e-05	0.8879
Oct-Rain-Casa	0.2942	0.9584	4.438e-05	0.6527
Juillet-SOI	0.8185	0.99	0.5334	0.5523
Sept-Rain-Casa	0.07658	0.7496	9.917e-09	0.4902
SOI-Juin	0.7033	0.99	0.3241	0.3173
Oct-Rain-Corruna	0.4294	0.9805	0.001362	0.6643

TABLE 6.1 – P-value obtenue du test d'indépendance et homogénéité et stationnarité des séries retenues.

La représentation des copules empiriques met en évidence deux structures de dépendance différentes. Pour certaines séries (la première rangée de la figure (6.2)), on peut

remarquer une évolution des séries SOI et pluviométrique, dans la même direction, de sorte qu'il est possible d'envisager une dépendance positive. En revanche, pour les autres mois (la deuxième rangée de la Figure 6.2), les séries SOI et pluviométrie se déplacent dans des directions opposées indiquant une dépendance négative.

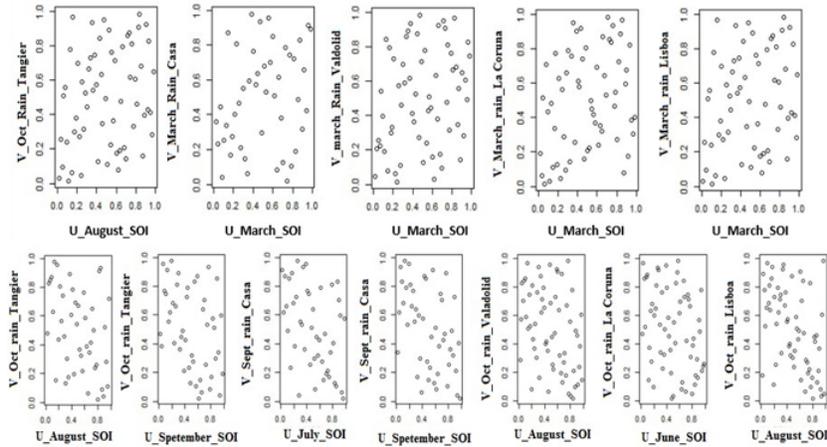


FIGURE 6.2 – Le graphique des copules empirique de chaque paires

En utilisant le test et le critère AIC, nous sélectionnons les copules les mieux ajustées (Tableau 6.3). L'analyse de la série bivariee (SOI, Précipitations) pour chaque mois conduit à différentes familles de candidats copulas. Cependant, nous pouvons distinguer une certaine forme de stabilité. En fait, pour toutes les stations considérées, les copules normales et Clayton sont les plus appropriées pour capturer la relation SOI et précipitations en mars. Pour SOI-Août montre une dépendance négative avec les précipitation, et les copules Frank, Student et Gumbel pivoté à $-\pi/2$ sont appropriées.

Ces résultats montrent que le premier ajustement de copules devrait être fait de façon saisonnière car chaque période de l'année se comporte différemment. Deuxièmement, il ressort clairement de cette analyse de données que la structure de dépendance entre précipitation et SOI est forte sur la partie centrale. Les événements extrêmes de précipitations sont probablement liés à d'autres indices atmosphériques et climatologiques.

Pour tester la stabilité des copules ajustées, nous les utilisons pour prévoir les précipitations saisonnières. Les résultats sont reproduits sur la Fig.6.3. Il montre, pour chaque station, les points des valeurs observées (en noir) et les valeurs prédites à l'aide d'une régression médiane quantile de copule (en rouge). Par exemple, la première parcelle représente les précipitations de la station de Tanger en mars 2000-2004 (Rainfall-March-Tanger) avec les valeurs correspondantes prédites à l'aide d'une régression médiane quantile (en rouge) et l'intervalle de prédiction à 90% (en blue) de copule Clayton.

Paire	Copule Ajustée	Paramètres	P-value Cvm	P-value KS
(Mars-SOI, Rain Mars tangier)	Clayton	0.5398682	0.99	0.97
(Mars-Soi, Mars Casa-Rain)	Gaussian	0.3018108	0.73	0.48
(Soi-Mars,Mars-Rain-Valad)	Clayton	0.4434467	1	1
(Soi-Mars,Mars-Rain-Corruna)	Clayton	0.6105467	0.735	0.765
(Soi-Mars, Mars-Rain-Lisboa)	Clayton	0.5485385	0.91	0.98
(Aout-SOI, Oct-Rain-Tangier)	Rotated Gumbel 270	-1.419674	0.43	0.5
(Soi-Aout, Oct-Rain-Valad)	Frank	-2.474201	0.88	0.83
(Soi-Aout, Oct-Rain-Valad)	Student	-0.5356838 ; df=2.599966		0.45
(Sep-SOI, Oct-Rain-Tangier)	Gaussian	-0.4213325	0.89	0.87
(Sept-Soi, Oct-Rain-Casa)	Rotated Gumbel 270	-1.527329	0.34	0.64
(Juillet-Soi, Sept-Rain-Casa)	Rotated Gumbel 270	-1.460937	0.449	0.724
(Soi-Juin, Oct-Rain-Corruna)	Gaussian	-0.3512613	0.73	0.48

TABLE 6.2 – Copules retenues pour chaque paires, et les p-value obtenues du test d’ajustement

Les résultats de la prévision sont très contrastés. Dans certains cas, comme les pluies d’octobre à Casablanca Tanger et de mars Corruna, les copules ajustées ne peuvent même pas prédire la tendance à plus ou moins de précipitations et les valeurs prédites ne sont pas cohérentes avec les valeurs observées. En effet, l’analyse des valeurs observées dans certains cas confirme une tendance à la hausse (ou à la baisse) de la quantité de pluie alors que les valeurs prédites montrent une tendance inverse. Ces résultats confirment la nécessité d’utiliser une approche de copules multivariées impliquant plus de deux séries, étant donné que les précipitations sont corrélées avec plusieurs conditions atmosphériques, géographiques et environnementales.

6.4. CONCLUSION

La prévision des précipitations est une question cruciale dans un pays *semi – aride* comme le Maroc. A court terme, les spécialistes peuvent utiliser l’information sur les précipitations pour planifier les affectations des clients et les exigences de stockage. A moyen terme, il peut fournir des lignes directrices pour la sélection saisonnière des cultures. A long terme, les prévisions de précipitations sont importantes pour les hydrologues et les gestionnaires de l’eau afin d’élaborer des stratégies intégrées contre les catastrophes potentielles causées par des inondations catastrophiques ou des sécheresses graves.

Les méthodes de prévision des précipitations sont de deux sortes. Le premier s’appuie sur des approches statistiques tandis que le second repose sur des simulations numériques. Malgré leur coût plus élevé, les simulations numériques sont toujours incapables de surpasser les systèmes de prédiction statistique simples. Ceci est essentiellement lié à l’incertitude de la relation entre les précipitations, les variables hydro-climatiques et les indices climatiques.

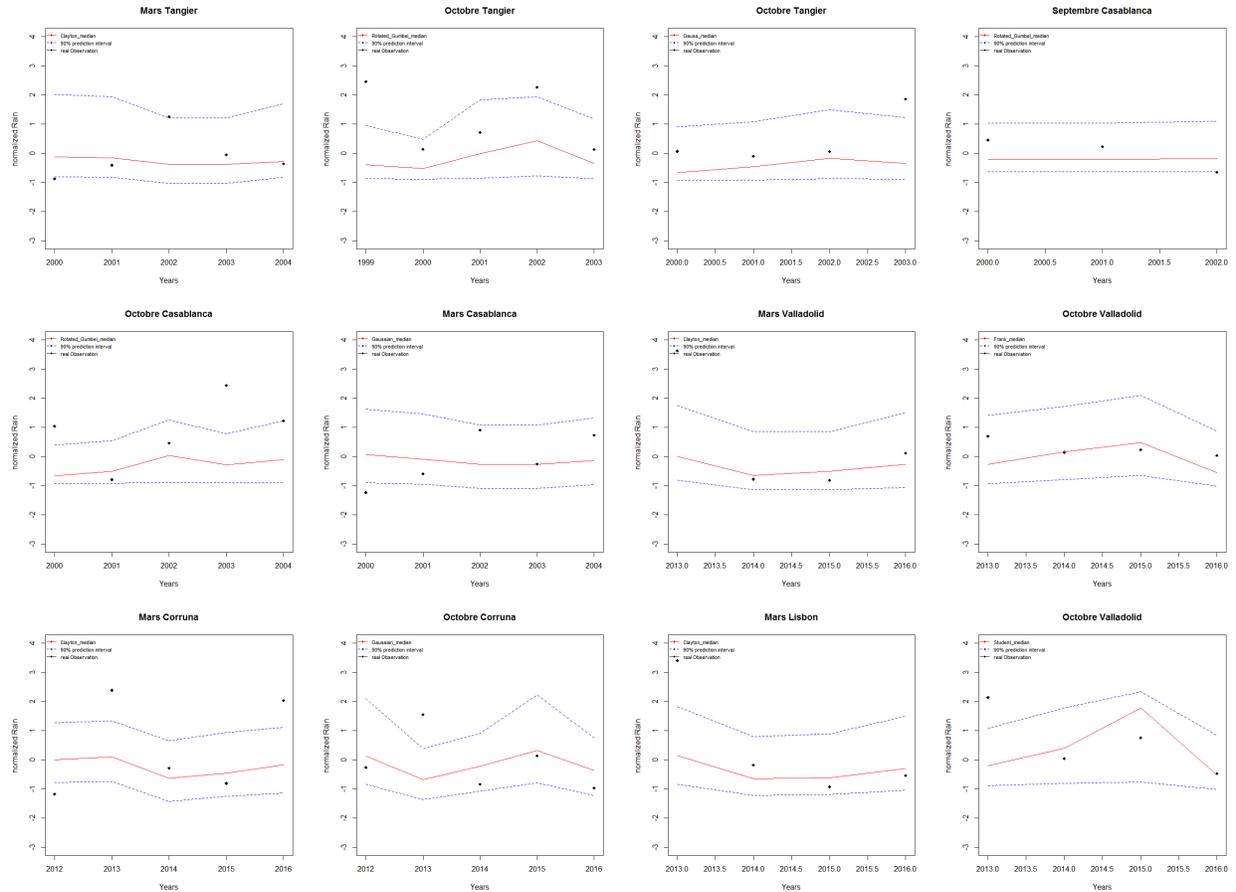


FIGURE 6.3 – Performances des copules ajustées en termes de prévision des précipitations, en utilisant une approche de régression des quantiles de copules

Cet étude vise à présenter une approche statistique soutenant l'utilisation de l'indice d'oscillation australe (SOI) retardé pour la prévision des précipitations saisonnières. Nous établissons un modèle statistique, basé sur la théorie des copules, qui prend en compte la relation SOI et les précipitations. Les données proviennent de l'Organisation Météorologique Mondiale (OMM), pour 6 stations météorologiques situées au Maroc (Tanger et Casablanca), en Espagne (La Corogne et Valladolid) et au Portugal (Lisboa-Geofísica et Santa Maria). En utilisant l'approche suggérée, nous menons une analyse comparative temporelle et régionale profonde, qui conduit à l'ajustement de différentes familles de copules. Pour toutes les stations et les saisons, les résultats finaux confirment un effet retardé dans la structure entre les précipitations et les SOI avec une relation forte sur la partie l'extrême. Cependant les événements extrêmes de précipitations peuvent être liés à d'autres indices atmosphériques et climatologiques.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Notre thèse présente une contribution à la modélisation de la dépendance en utilisant la théorie des copules. Dans les trois premiers chapitres, nous avons présenté un ensemble de propriétés sur les copules. Ainsi avons-nous établi d'autres propriétés sur les copules qui sont capables de modéliser la dépendance négative. Une autre partie de cette thèse a été consacrée aux structures de dépendance dynamique, nous avons proposé une approche de copule dynamique se basant sur la méthode de fenêtre glissante. En utilisant les copules mixtes conditionnelles, nous avons proposé un algorithme pour les prévisions à court terme dans des structures de dépendance dynamique.

Dans les deux derniers chapitres, nous avons utilisé les approches proposées pour avoir les prévisions des séries macroéconomiques et environnementales. La première application sur le taux de change et le taux d'inflation, en utilisant les copules, montre la sensibilité des copules aux changements macroéconomiques. Dans cette perspective, nous avons appliqué l'approche de copule dynamique pour modéliser la structure de dépendance entre le taux de change et le taux d'intérêt à court terme. Cette application montre la bonne performance de notre approche en matière de prévision. Finalement, l'application des copules sur les données de SOI et ceux des précipitations confirme l'effet retardé dans la structure entre ces deux variables avec une relation forte sur la partie extrême. Elle suggère la nécessité d'introduire d'autres variables pour l'amélioration de la prévision. Ainsi, souhaitons-nous dans l'avenir explorer les copules multivariées, comme C-vine et D-vine, pour prévoir les précipitations en incluant d'autres variables climatologiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Alidoost, F., Stein, A., Su, Z. *Copula-based interpolation methods for air temperature data using collocated covariates*. Spatial Statistics, 2018.
- [2] Aloui, R., Hammoudeh S., Nguyen, D.K. *A time-varying copula approach to oil and stock market dependence : The case of transition economies*. Energy Economics, 2013. 39, 208-221.
- [3] Aloui, R. Gupta, R., Miller M. S. *Uncertainty and crude oil returns*. Energy Economics, 2016. 55, 92-100.
- [4] American Meteorological Society (AMS), Boston, Massachusetts, United States.
- [5] Andries, A.M., Ihnatova, I., Caprarua, B., Tiwaric A.K. *The relationship between exchange rates and interest rates in a small open emerging economy : The case of Romania*, Economic Modelling, 2017.
- [6] Arize, A.C., Malindretos, J., Nippani, S. *Variations in exchange rates and inflation in 82 countries : an empirical investigation*. The North American Journal of Economics And Finance, 15(2), 227-247. (2004).
- [7] Badescu, A.L., Cheung, E., Rabehasaina, L. : *A two dimensional risk model with proportional reinsurance*. J. Appl.Probab. 2011, 48 (3), 749-765.
- [8] Badescu, A.L., Landriault, D. : *Recursive calculation of the dividend moments in a multi-threshold risk model*. N.Am.Actuar.J. 2008, 12 (1), 74-88.
- [9] Barbe P., Genest C., Ghoudi K., and Rémillard B.. *On Kendall's process*. J. Multivariate Anal., 1996, 58(2) :197-229.
- [10] Bautista, C.C. *Interest rate-exchange rate dynamics in the Philippines : a DCC analysis*. Applied Economics Letters, 2003, Vol. 10, pp. 107-111.
- [11] Genest, C. and Boies, J.C. : *Detecting dependence with kendall plots*. The American Statistician, 2003. 57 (4), 275-284.

- [12] Bollerslev, T. : *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of Econometrics, 1986 31 :307-327.
- [13] Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. *Time Series Analysis Forecasting and Control*. San Francisco, 1976, Holden-Day.
- [14] Burstein A. and Gopinath, G. : International prices and exchange rates. Handbook of International Economics, vol 4, 391-451, North Holland/Elsevier, London (2014).
- [15] Caillault, C., Guégan, D. *Empirical estimation of tail dependence using copulas : Application to Asian markets*. Quantitative Finance, 2005. 5, 489-501.
- [16] Charfeddine, L. , Benlagha, N. *A Time-varying Copula Approach for Modelling Dependency : New Evidence from Commodity and SandP500 Markets*. Journal of Multinational Financial Management, 2016. [http :dx.doi.org/10.1016j.mulfin.2016.10.003](http://dx.doi.org/10.1016/j.mulfin.2016.10.003)
- [17] Chebbi, A., and A. Hedhli, A., *Dynamic dependencies between the Tunisian stock market and other international stock markets : GARCH-EVT-Copula approach*. Applied Financial Economics, 2014, vol. 24, issue 18, 1215-1228.
- [18] Cherubini, U. Luciano, E. and Vecchiato, W.. *Copula Methods in Finance*. Wiley Finance. Wiley, 2004, New York.
- [19] Cherubini, U. and Luciano, E. *Value risk trade-off and capital allocation with copulas*. Econ.Notes ,2001, 30, (2), 235-256.
- [20] Chifurira, R., and Chikobvu, D. : *A probit regression model approach for predicting drought probabilities in Zimbabwe using the Southern Oscillation Index*. Mediterranean Journal of Social Sciences, 2014, 5(20), 656pp.
- [21] Chinn, M.D., Meredith, G. *Monetary policy and long-horizon uncovered interest parity*. International Monetary Fund(IMF) Staff paper, 2004, Vol. 51, pp. 409-430.
- [22] Chinn, M.D., Meredith, G. *Testing Uncovered Interest Parity at Short and Long Horizons during the Post-Bretton Woods Era*. Working Paper No. 1077, 2005, National Bureau of Economic Research.
- [23] Chinn, M.D. and Quayyum S. *Long Horizon Uncovered Interest Parity Re-Assessed*. mimeo, 2013. University of Wisconsin-Madison.
- [24] Chiew, F.H., Piechota, T.C., Dracup, J.A., and McMahon, T.A. : *ElNino/Southern Oscillation and Australian rainfall, stream flow and drought : Links and potential for forecasting*. Journal of Hydrology, 1998, 204(1-4), 138-149 pp.
- [25] Chollete, L. and Ning, C. : *The Dependence structure of macroeconomic variables in the US*. Working Papers Series 0204, University of Ryerson (2009).
- [26] Choudhri, E. U. and Hakura, D. S. *Exchange Rate Pass-Through to Domestic Prices : Does the Inflationary Environment Matter ?*. Document de travail no 01/194, 2001, Fonds monétaire international.
- [27] Creal, D., Koopman, S.J. and Lucas, A. *A general framework for observation driven time-varying parameter models*. Tinbergen Institute Discussion Paper, 2008. 08-108/4.

- [28] Daniels H. E.. *Rank correlation and population models*. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B., 1950, 12 :171-181.
- [29] Deheuvels, P. *La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance*. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.(5), 1979, 65(6), 274-292.
- [30] Deheuvels, P. *Multivariate tests of independence. In Analytical methods in probability theory (Oberwolfach, 1980)*. Lecture Notes in Math. Springer, 1981, Berlin, 861, 42-50.
- [31] Embrechts, P., Resnick, S. I., & Samorodnitsky, G. *Extreme value theory as a risk management tool*. North American Actuarial Journal, 1999, 3(2), 30-41.
- [32] Devereux, M. B. and Yetman, J. *Predetermined Prices and the Persistent Effects of Money on Output*. Journal of Money, Credit and Banking, 2003, 35(5), 729-741.
- [33] Dias, A. and Embrechts, P., *Dynamic copula models for multivariate high-frequency data in finance*. Manuscript, 2004, ETH Zurich.
- [34] Duan, J.-C. : *The GARCH option pricing model*. Math. Finance, 1995, 5(1) :13-32.
- [35] Durante F. *A new class of symmetric bivariate copulas*. Journal of Nonparametric Statistics, 2006, 18 :7-8, 499-510, DOI : 10.1080/10485250701262242.
- [36] Durocher, M., Chebana, F., Ouarda, T.B.M.J. *On the prediction of extreme flood quantiles at ungauged locations with spatial copula*. Journal of Hydrology, 2016. 533, 523-532.
- [37] Eling, M., Jung, K. *Copula approaches for modeling cross-sectional dependence of databreach losses*. Insurance : Mathematics and Economics, 2018. 82, 167-180.
- [38] Embrechts, P., Lindskog, F., & McNeil, A. J.. *Modeling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. In : S. Rachev (Ed.), Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, 2003. 329-384.
- [39] Engle. R. F. *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation*. Econometrica, 1982, 50 :987-1007.
- [40] Engle, R. F. *Dynamic Conditional Correlation : A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models*, Journal of Business and Economic Statistics, 2002, 20(3) :339-50.
- [41] Engel, C., Lee, D., Liu, C., Liu, Ch., Wu., S.P.Y. *The uncovered interest parity puzzle, exchange rate forecasting, and Taylor rules*. Journal of International Money and Finance, 2018.
- [42] Fang H.-B., Fang K.-T., and Kotz S.. *Corrigendum to : The meta-elliptical distributions with given marginals*. J. Multivariate Anal., 2005. 94(1) :222-223.
- [43] Fermanian J.-D. , Radulovic D. , and Wegkamp M. H.. *Weak convergence of empirical copula processes*. Bernoulli, 2004, 10 :847-860.
- [44] Fisher, N.I., Switzer, P. *Chi-plots of assessing of dependence*. Biometrika, 1985. 72, 253-265.

- [45] Fisher, N.I., Switzer, P. *Graphical assessment of dependence : is a picture worth 100 tests*. The American Statistician, 2001. 55 (3), 233-239.
- [46] Fitzgerald, T.J. and Nicolini, J.P. : Is There a Stable Relationship between Unemployment and Future Inflation? Evidence from U.S. Cities. Working Paper 713, Federal Reserve Bank of Minneapolis Research Department (2014).
- [47] Francq, C. and Zakoian J.-M. : *GARCH Models : Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. 2010, John Wiley & Sons.
- [48] Fréchet M..*Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données*. Ann. Univ. Lyon, 3e sér. A, 1951, 14, 53-77.
- [49] Frees, E.W., Valdez, E.A. *Under standing relationships using copulas*. North American Actuarial Journal, 1998. 2, 1-25.
- [50] Furman, J., Stiglitz, J. *Economic Crises : Evidence and Insights from East Asia*. Brookings Papers on Economic Activity, 1998, No 2, pp. 1-135.
- [51] Ganssler P. and W. Stute. *Seminar on Empirical Processes*. volume 9 of DMV Seminar. Birkhauser Verlag, Basel, 1987.
- [52] Genest, C. *Frank's family of bivariate distributions*. Biometrika, 1987, 74(3), 549-555.
- [53] Genest, C., Favre, A. C., Béliveau, J., & Jacques, C. *Metaelliptical copulas and their use in frequency analysis of multivariate hydrological data*. Water Resources Research, 2007, 43(9).
- [54] Genest, C., Gendron, M., Bourdeau-Brien, M. *The advent of copulas in finance*. Eur.J. Finance, 2009, 15 (7/8), 609-618.
- [55] Genest, C., Ghoudi, K., and Rivest, L.-P. *A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distribution*. Biometrika, 1995, 82(3), 543-552.
- [56] Genest, C., and MacKay, R. J. *The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals*. Am. Stat., 1986, 40, 280-283.
- [57] Genest, C., Rivest, L.-P. *Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas*. Journal of the American Statistical Association, 1993. 88 (423), 1034-1043.
- [58] Genest, C., Quessy, J.-F. et Rémillard, B. *Goodness-of-fit procedures for copula models based on the probability integral transformation*. Scandinavian Journal of Statistics, 2006, 33, 337-366.
- [59] Genest, C., Rémillard, B., and Beaudoin, D. : *Goodness-of-fit tests for copulas : A review and a power study*. Insurance : Mathematics and economics, 44(2), 2009, 199-213.
- [60] Ghoudi K. and Rémillard B..*Empirical processes based on pseudo observations .II. The multivariate case*, **2004**. In Asymptotic Methods in Stochastics, volume 44 of Fields Inst. Commun., pages 381-406. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [61] Goorbergh, R., Genest, C. *Bivariate option pricing using dynamic copula models*. Insurance : Mathematics and Economics, 2005. vol. 37, issue 1, 101-114.

- [62] Gregoire, V., Genest, C., Gendron, M. *Using Copula to model price dependence in energy markets*. Energy Risk, 2008. 5, 58-64.
- [63] Guegan, D., Zhang, J. *Change analysis of a dynamic copula for measuring dependence in multivariate financial data*. Quantitative Finance, 2006, Taylor & Francis (Routledge).
- [64] Hadiani, M., Asl, S.J., Banafsheh, M.R., Dinpajouh, Y., and Yasari, E. : *Investigation the Southern Oscillation index effect on dry/wet periods in north of Iran*. Int. J. Agric. CropSci, 2012, 4, 1291-9 pp.
- [65] Hafner, C. M., and Manner. H., *Dynamic stochastic copula models : Estimation, inference and applications*. METEOR Research Memorandum RM/08/043, 2008, Maastricht University.
- [66] Hafner, C. M., and Reznikova, O., *Efficient estimation of a semiparametric dynamic copula model*. Manuscript, 2008, Institute of Statistics, UCL.
- [67] Hoffmann, M., MacDonald, R. *Real exchange rates and real interest rate differentials : a present value interpretation*. European Economic Review, 2009, Vol. 53, pp. 952-970.
- [68] Holtemöller, O. ; Mallick, S. *Exchange rate regime, real misalignment and currency crises*. Economic Modelling, 2013, 34, 5-14.
- [69] Holtemöller, O., Mallick, S. *Global food prices and monetary policy in an emerging market economy : the case of India*. Journal of Asian Economics, 2016, Vol 46, 56-70.
- [70] Hnatkovska, V., Lahiri, A., Vegh, C. *The exchange rate response puzzle*, May 31, 2012. Available at SSRN : <http://ssrn.com/abstract=1996693>.
- [71] Hnatkovska, V. ; Lahiri, A. ; Vegh, C. *Interest Rate and the Exchange Rate : A Nonmonotonic Tale 63*. European Economic Review, 2013, 68.
- [72] Hyden, L., and Sekoli, T. : *Possibilities to forecast early summer rainfall in the Lesotho Lowlands from the El-Nino/Southern Oscillation*. WATERSA-PRETORIA-, 2000, 26(1), 83-90 pp.
- [73] Hu, L. *Dependence patterns across financial markets : a mixed copula approach*. Appl. Financ. Econ., 2006. 16, 717-729.
- [74] Joe, H.. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. 1997. Chapman et Hall, London.
- [75] Kano, T. : *Exchange rates and fundamentals : a general equilibrium exploration*, Hitotsubashi Institute for Advanced Study, Discussion Paper HIAS-E-19 (2016).
- [76] Kim J.-M., Jung H. *Linear time-varying regression with Copula DCC-GARCH models for volatility*. Economics Letters, 2016. 145, pp. 262-265.
- [77] Kirono, D.G., Chiew, F.H., and Kent, D.M. : *Identification of best predictors for forecasting seasonal rainfall and runoff in Australia*. Hydrological processes, 2010, 24(10), 1237-1247 pp.
- [78] Kojadinovic, I., Yan, J. *A non-parametric test of exchangeability for extreme value and left-tail decreasing bivariate copulas*. Scandinavian Journal of Statistics, 2012. Vol. 39, pp. 480-496.

- [79] Kole, E., al. *Selecting copulas for risk management*. Journal of Banking & Finance, 2007, doi :10.1016/j.jbankfin.2006.09.010.
- [80] Li, D. *On default correlation : a copula approach* . Journal of Fixed Income 9, 2000, 43-54.
- [81] Liu, B.Y. , Ji, Q., Fan, Y. *A new time-varying optimal copula model identifying the dependence across markets*. Quantitative Finance, 2017. 17 :3, 437-453.
- [82] Liu,B.Y., Ji, Q., Fan, Y. *Dynamic return-volatility dependence and risk measure of CoVaR in the oil market : a time-varying mixed copula model*. Energy Econ, 2017. 68, pp. 53-65.
- [83] Longin, F., and Solnik B., *Is the correlation in international equity returns constant : 1960-1990 ?*. Journal of International Money and Finance 14, 1995, 3-26.
- [84] Marshall A. W., and Olkin I.. *Families of multivariate distributions*. 1988, Journal of the American Statistical Association, 83 :834-841.
- [85] McBride, J.L., and Nicholls, N. : *Seasonal relationships between Australian rainfall and the Southern Oscillation*. Monthly Weather Review, 1983, 111(10), 1998-2004 pp.
- [86] Munyeka, W. : *An In-Depth Look at Economic Growth and Employment in Post-Apartheid South Africa : Analysis and Policy Implications*. Journal of Educational and Social Research, 4(3) MCSER, Rome-Italy (2014).
- [87] Naz, F.,Mohsin, A., Zaman, K. *Exchange rate pass-through in to inflation : New insights in to the cointegration relationship from Pakistan*. Journal of Economic Modelling 29, 2012, 2205-2221.
- [88] Nelsen, R. B. *An introduction to Copulas*, 1999, 139. Lecture Notes in Statistics, Springer Verlag, New-York.
- [89] Nelsen, R.B. *An Introduction to Copulas*, 2006 ; 2nd edn. Springer, New York.
- [90] Nguyen, C., Bhatti, M.I., Komorníková, M., Komorník, J. *Gold price and stock markets nexus under mixed-copulas*. Economic Modelling, 2016. 58, 283-292.
- [91] International Labour Office (ILO), International Monetary Fund (IMF), Organization for Economic Co-operation and Development (OECD),Statistical Office of the European Communities (Eurostat), United Nations (UN) and the World Bank : *Consumer price index manual. Theory and practice*. International Labour Office.ISBN, 92-2-113699-X, Geneva (2004)
- [92] Ohtsu K., Peng H., Kitagawa G. *Time Series Analysis Through AR Modeling*. In : *Time Series Modeling for Analysis and Control*.SpringerBriefs in Statistics. Springer, 2015, Tokyo.
- [93] Patton, A. J. *Modelling Time-Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula*, 2001. PhD thesis, Department of Economics, UCSD.
- [94] Patton, A. J. *Modelling asymmetric exchange rate dependence*. International Economic Review, 2006.

- [95] Patton, A. *Copula Methods for Forecasting Multivariate Time Series*. Article in Handbook of Economic Forecasting, 2013, 2 :899-960.
- [96] Patton A. *A review of copula models for economic time series*. Journal of Multivariate Analysis, 2012 Volume 110, Pages 4-18.
- [97] Patton, A.J., *On the Out-of-Sample Importance of Skewness and Asymmetric Dependence for Asset Allocation*. Journal of Financial Econometrics, 2004, 2(1), 130-168.
- [98] Pelletier, D., *Regime switching for dynamic correlations*. Journal of Econometrics, 2006, vol. 131, issue 1-2, 445-473.
- [99] Pircalabu A., Hvolby T., Jung J., Hug E. *Joint price and volumetric risk in wind power trading : A copula approach*. Energy Economics, 2017, 62, pp. 139-154.
- [100] Remillard, B. *Statistical methods for financial engineering*. 2013, Chapman and Hall/CRC.
- [101] Saraç, T. B., Karagöz, K. *Impact of Short-term Interest Rate on Exchange Rate : The Case of Turkey*. Procedia Economics and Finance, 2016. 38, 195 - 202.
- [102] Silva Filho, O. C., Ziegelmann, F. and Dueker, M.J. *Assessing Dependence Between Financial Market Indexes Using Conditional Time-Varying Copulas : Applications to Value at Risk*. Quantitative Finance, 2014, 14, 2155-2170.
- [103] Sklar, A. *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 8, 1959, 229-231.
- [104] Stone, R., Hammer, G., and Nicholls, N. *Frost in northeast Australia : trends and influences of phases of the Southern Oscillation*. Journal of Climate, 1996, 9(8),1896-1909 pp.
- [105] Suthar, M.H. *Bank Rate and Interest Yield Differentials as Determinants of Foreign Exchange Rate in India*. The Icfai Journal of Monetary Economics, 2008, Vol VI, No. 2, pp. 43-49.
- [106] Tse, Y. K., and Tsui, A. *A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model with Time-Varying Correlations*. Journal of Business & Economic Statistics, 2002, vol. 20, issue 3, 351-62.
- [107] Tsay, S. *Analysis of Financial Time Series*. Third Edition, Wiley, 2010, ISBN : 0-470-41435-9.
- [108] Turgutlu, E., Ucer, B. *Is global diversification rational Evidence from emerging equity markets through mixed copula approach*. Appl. Econ., 2010. 42, 647-658.
- [109] Waszink, H. *Modelling Dependence of Interest, Inflation and Stock Market returns*. Waszink Actuarial Advisory Ltd, CAS. (2006).
- [110] Xiongtoua, T. and Sriboonchitta, S. *Analysis of volatility and dependence between exchange rate and inflation rate in Lao people's Democratic Republic using Copula-Based GARCH Approach*. Modeling Dependence in Econometrics 251, 201-214 (2014).

- [111] Yu, J., and Meyer, R. *Multivariate stochastic volatility models : Bayesian estimation and model comparison*. *Econometric Reviews*, 2006, 25 (2-3), 361-384.
- [112] Zivot, E. ; Wang, J. *Rolling Analysis of Time Series*. In : *Modeling Financial Time Series with S-PLUS*. 2006. Springer, New York, NY.
- [113] Zhang, J. and Guégan, D., *Pricing bivariate option under GARCH processes with time-varying copula*. *Insurance : Mathematics and Economics*, Elsevier, 2008, 42(3), 1095-1103.

Résumé

Dans cette thèse nous montrons les copules comme outils mathématiques flexibles qui modélisent la structure de dépendance entre les variables. Nous présentons les techniques qu'offrent les copules pour analyser les variables multivariées. Ainsi, nous analysons les transformations qui subissent les paramètres et les coefficients de dépendance de queue en prenant une rotation des copules asymétriques. La plupart des copules sont appliquées aux séries chronologiques sous l'hypothèse d'une structure de dépendance statique, cependant il est bien connu que les corrélations entre certaines variables (économiques), ne sont pas constantes dans le temps. D'où l'intérêt d'introduire une nouvelle approche dynamique basée sur les copules, où le paramètre et la famille de copule changent au cours du temps. Finalement, nous présentons une application des copules statique et dynamique pour modéliser les variables économiques et environnementales, et nous utilisons ensuite les modèles de copules ajustés pour faire la prévision de ces variables.

Mots-Clefs : Copules, Séries chronologiques, Modèle dynamique, Prévision.

Abstract

In this thesis we show the copula as flexible mathematical tools that model the dependency structure between the variables. We present the techniques offered by copulas to analyze multivariate variables. Thus, we analyze the transformations of the parameters and the tail dependence coefficients when we take a rotation of asymmetric copula. Most copula are applied to time series under the assumption of a static dependence structure, however it is well known that correlations between several (economic) variables are not constant and change over time. Hence the interest of introducing a new dynamic approach based on copula, where the parameter's and the family's copula change over time. Finally, we present an application of static and dynamic copulas to model the economic and environmental variables, and then use the adjusted copula models to predict those variables.

Keywords: Copulas, Time series, Dynamic model, Forecasting.