ROYAUME DU MAROC
Université Mohammed V - RABAT -
جامعة محمد الخامس – الرباط –
Faculté des sciences
كلية العلوم
CENTRE D'ETUDES DOCTORALES - SCIENCES ET TECHNOLOGIES

N° d'ordre :3211

THÈSE

En vue de l'obtention du : ***DOCTORAT***

Structure de Recherche : Laboratoire de Mathématiques, Statistique et Applications
Discipline : Mathématiques
Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Présentée et soutenue le : *Lundi(24/06/2019)* ***par :***

Mohammed KLILOU

Étude de certains opérateurs sur des espaces à poids de Nachbin.

JURY

Imade BENSAOUD,	*PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences, Rabat*	***Président***
Lahbib OUBBI,	*PES, Université Mohammed V, Ecole normale Supérieure , Rabat*	***Directeur de thèse***
Zine El Abidine ABDELALI	*PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences , Rabat*	***Co-encadrant***
Nadia BOUDI,	*PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences, Rabat*	***Rapporteur - Examinateur***
El Houssein ILLOUSSAMEN,	*PES, Université Hassan II, Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique, Mohammedia*	***Rapporteur - Examinateur***

Année Universitaire : 2018-2019

✉ Faculté des Sciences, avenue Ibn Battouta, BP. 1014 RP, Rabat –Maroc
☎ 00212(05) 37 77 18 76 00212(05) 37 77 42 61 ; http://www.fsr.um5.ac.ma

ROYAUME DU MAROC
Université Mohammed V - RABAT -
جامعة محمد الخامس – الرباط –
Faculté des sciences
كلية العلوم
CENTRE D'ETUDES DOCTORALES - SCIENCES ET TECHNOLOGIES

N° d'ordre :3211

THÈSE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Structure de Recherche : Laboratoire de Mathématiques, Statistique et Applications
Discipline : Mathématiques
Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Présentée et soutenue le : *Lundi(24/06/2019)* ***par :***

Mohammed KLILOU

Étude de certains opérateurs sur des espaces à poids de Nachbin.

JURY

Imade BENSAOUD,	*PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences, Rabat*	***Président***
Lahbib OUBBI,	*PES, Université Mohammed V, Ecole normale Supérieure , Rabat*	***Directeur de thèse***
Zine El Abidine ABDELALI	*PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences , Rabat*	***Co-encadrant***
Nadia BOUDI,	*PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences, Rabat*	***Rapporteur - Examinateur***
El Houssein ILLOUSSAMEN,	*PES, Université Hassan II, Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique, Mohammedia*	***Rapporteur - Examinateur***

Année Universitaire : 2018-2019

Dédicace

Je me dois d'avouer pleinement ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont soutenu durant mon parcours, qui ont su me hisser vers le haut pour atteindre mon objectif. C'est avec amour, respect et gratitude que je leur dédie cette thèse.

À la mémoire de mon père

Ce travail est dédié à mon père **Ali** avec qui je ne saurai partager cet accomplissement, car il nous a quitté le 08-10-2016, au cours des années doctorales, mais il demeurera dans mon cœur à jamais.

À qui je dois tout, et pour qui aucune dédicace ne saurait exprimer mon profond amour, ma gratitude, ma reconnaissance pour l'ampleur des sacrifices et des souffrances qu'il a endurés pour mon instruction et bien être. Il m'a toujours motivé, encouragé, soutenu et aidé tout au long de mes études. Ses prières m'ont été d'un grand soutien moral.

J'espère que, du monde qui est sien maintenant, il apprécie cet humble geste comme preuve de reconnaissance de la part d'un fils qui prie toujours pour son âme. Puisse Dieu, le tout puissant et miséricordieux l'accueille dans son éternel paradis. Amen.

À ma chère mère

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon profond amour et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon éducation et mon bien être.

Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

Que ce modéste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices. Puisse Dieu, le très haut, vous préserve du mal, vous comble de santé, de bonheur et vous procure une longue et heureuse vie.

À mes frères, mes sœurs et toute ma famille.

À tous mes enseignants.

À tous mes amis, mes collègues et mes élèves.

À tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin.

À tous ceux qui me sont chers et proches.

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein du Laboratoire de Mathématiques, Statistique et Applications (LMSA), Département de Mathématiques de la Faculté des sciences Université Mohammed-V Rabat, sous la direction de Professeur **Lahbib OUBBI** et sous la codirection de Professeur **Zine el abidine ABDELALI**.

Mes premières pensées vont d'abord au Professeur **Lahbib OUBBI** . Je suis très heureux d'avoir pu profiter, pendant ces années, de sa grande culture mathématique, de ses conseils très précieux, mais aussi de ses qualités humaines. J'ai eu la chance de l'avoir en tant que professeur en master à Rabat en 2007, où il m'a transmis sa passion pour les mathématiques et m'a donné l'envie de travailler sous sa direction. Une direction qui s'est caractérisée par une grande patience, une disponibilité permanante, des conseils abondants, un support et un suivi continus dans le but de mettre ce projet sous sa forme finale. Je ne saurais le remercier comme il se doit. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère et profonde gratitude.

Mes sincères remerciments vont à mon co-encadrant Professeur **Zine el abidine ABDELALI** pour l'intèrêt qu'il a porté à mon travail le long de son élaboration.

Que Professeur **Imade BENSAOUD** trouve ici l'expression de mes plus respectueux remerciements pour avoir accepté d'être président du jury.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance au Professeur **Nadia BOUDI** pour avoir accepté d'être rapporteur et examinatrur de mon travail. Je la remercie vivement pour l'attention avec laquelle elle a lu ce manuscrit.

J'adresse mes vifs remerciements au Professeur **El Houssein ILLOUSSAMEN** pour avoir accepté d'être rapporteur et examinatrur de mon travail. Qu'il trouve ici, l'expression de ma profonde considération.

Mes vifs remerciements s'adressent également au Professeur **Pilar RUEDA** de l'université de Valencia (espagne) qui a gentiment accepté de lire mon travail et d'en présenter un rapport. Ses remarques et ses suggestions m'ont été très utiles.

Je réitère mes remerciements aux membres de jury pour leurs commentaires pertinents et leurs enrichissantes discussions le jour de la soutenance.

Je suis reconnaissant à tous les membres du Groupe Algèbre et Analyse Fonctionnelle (GrAAF) qui ont suivi de près l'élaboration de ce travail à travers de nombreux exposés que j'ai présentés dans le cadre de son séminaire hebdomadaire.

Que les membres du Laboratoire Mathématiques, Statistique et Applications (LMSA) trouvent ici l'expression de ma gratitude de m'avoir fourni un cadre de travail et de recherche agréable, dynamique et stimulant.

Je remercie également mes frères, mes soeurs, mes amis, ma famille dont l'affection, l'amour, le soutien précieux et l'encouragement constants m'ont été d'un grand réconfort et ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir, mes plus profonds remerciements vont à ma mère, puisse Dieu, le tout puissant la préserver du mal, la combler de santé, de bonheur et lui procurer une longue vie. À mon défunt père, décédé durant la préparation de cette thèse, que Dieu, le miséricordieux, l'accueille dans son éternel paradis. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude.

Si j'en suis arrivé là aujourd'hui, c'est aussi parce que j'ai rencontré sur mon chemin des personnes qui m'ont apporté le meilleur d'elles-mêmes et m'ont hissé vers l'excellence. Je leur dis du fond du cœur : **Merci**.

Résumé

Cette thèse est une contribution à l'étude des espaces à poids de fonctions continues sur un espace complètement régulier X et à valeurs dans un espace vectoriel topologique A. La recherche dans ce domaine a connu un essor considérable pendant les dernières décennies. S'il est de tradition de considérer des familles V de Nachbin constituées de fonctions réelles (poids) semi-continues supérieurement sur X, nous considérons ici pour la première fois des familles de Nachbin, définies de manière rigoureuse, dont les poids sont à valeurs opérateurs sur A. Notons qu'un tel essai a été entrepris par C. Shekhar et B. S. Komal dans le cas d'un espace de Hilbert H, mais leur travail contenait plusieurs imperfections. Nous avons remédié à ces imperfections et présenté un cadre approprié pour mener une étude systématique sur ces nouveaux espaces à poids, dit généralisés ou non commutatifs. Ceci constitue une belle généralisation des espaces à poids classiques. Nous nous sommes alors intéressés à certaines propriétés de ces espaces $CV(X, A)$, telle la séparation et la complétude. Nous avons donné un théorème de densité caractérisant les parties denses dans un sous-espace vectoriel E de $CV_0(X, A)$. Ce résultat est en fait une extension du fameux théorème de Stone-Weierstrass aux espaces à poids. Nous avons aussi obtenu plusieurs théorèmes de type Arzelà-Ascoli dans des sous-espaces particuliers de $CV(X, A)$. Le gros de notre contribution cependant s'inscrit dans l'étude des opérateurs de multiplication, de composition et de composition pondérée d'un sous-espace vectoriel E de $CV(X, A)$ dans un autre espace à poids généralisé $CU(Y, A)$. Nous avons obtenu plusieurs résultats concernant les propriétés topologiques de ces opérateurs dans différents contextes, selon que A est un espace de Hilbert, un espace normé ou seulement un espace vectoriel topologique.

Mots-clés :

Opérateurs de multiplication, de composition ou de composition pondérée, famille de Nachbin généralisée, approximation dans les espaces à poids généralisés.

Abstract

This work is a contribution to the study of weighted spaces of continuous functions on a completely regular space X with values in a topological vector space A. The research in this area has known a considerable growth during the last decades. If traditionally the Nachbin families consist of upper semi-continuous real functions on X, we consider here for the first time, in a rigorous way, Nachbin families whose elements (the weights) take values in the algebra $\mathcal{L}(A)$ of continuous operators on A. Note here that such an essay has been attempted by C. Shekhar and B. S. Komal in the Hilbert space case H, their work contained several imperfections. We have remedied these imperfections and presented an appropriate framework to conduct a systematic study of these new weighted spaces, qualified as generalized or non commutative. This is a nice generalization of classical weighted spaces. We then characterized some properties of these spaces $CV(X, A)$, such as separation and completeness. We gave a density theorem characterizing the dense subspaces in a vector subspace E of $CV_0(X, A)$. This result is actually an extension of the famous theorem of Stone-Weierstrass to weighted spaces. We have also obtained several Arzela-Ascoli type theorems in particular subspaces of $CV(X, A)$. The essential of our contribution however concerns the study of multiplication, composition and weighted composition operators from a vector subspace E of $CV(X, A)$ into another generalized weighted space $CU(Y, A)$. We obtained several results concerning the topological properties of these operators in different contexts, according to whether A is a Hilbert space, a normed space or only a topological vector space.

Keywords :

Multiplication, Composition or Weighted composition operators, generalized Nachbin family, approximation in Generalized weighted spaces.

Table des matières

Introduction générale

Ce travail est une contribution à l'étude des espaces à poids de fonctions continues sur un espace complètement régulier X et à valeurs dans un espace vectoriel topologique A et de certains opérateurs entre de tels espaces.

Jusqu'ici les espaces à poids considérés dans la littérature sont déterminés par des familles de Nachbin formées de fonctions réelles positives et semi-continues supérieurement, dites poids. Récemment C. Shekhar et B. S. Komal [80] ont considéré des familles de poids sur X à valeurs opérateurs positifs sur un espace de Hilbert H. Ils ont alors étudié les opérateurs de multiplication dans les espaces à poids ainsi générés.

Nous introduisons, de manière rigoureuse, dans le cas où A est un espace vectoriel topologique, une notion de famille de Nachbin dont les poids sont à valeurs opérateurs sur A. Nous présentons une étude préliminaire des espaces à poids ainsi définis. Nous remédions ainsi à plusieurs imperfections dans le travail de C. Shekhar et B. S. Komal [80].

Nous nous concentrons cependant sur l'étude des opérateurs de multiplication et des opérateurs de composition pondérée entre de tels espaces. Nous obtenons aussi des résultats de type Arzelà-Ascoli caractérisant les parties précompactes des sous-espaces vectoriels $CV_0(X, A)$ et $CV_P(X, A)$ de $CV(X, A)$, ainsi qu'un théorème du type Prolla qui est une extension du fameux théorème de Stone-Weierstrass aux espaces à poids.

En fait, les espaces $CV(X)$ à poids (ou de Nachbin) de fonctions continues à valeurs scalaires sur un espace complètement régulier de Hausdorff X étaient introduits et étudiés, pour la première fois, en 1965 par L. Nachbin [61] en relation avec des problèmes d'approximation. Ce sont des espaces vectoriels topologiques localement convexes, constitués de fonctions continues définies sur X, à valeurs scalaires et satisfaisant à certaines conditions de croissance, imposées par une famille V, dite de Nachbin, de fonctions positives semi-continues supérieurement sur X. La topologie de $CV(X)$ est donc engendrée par des semi-normes qui sont des normes uniformes pondérées par des éléments de la famille V. Depuis lors, une variété de problèmes en relation avec différents aspects de la théorie générale des espaces (ou des algèbres) de (Banach ou) localement convexes ont été étudiés intensivement dans ces espaces et dans certains de leurs sous-espaces particuliers. Bien des auteurs se sont intéressés à l'étude de $CV_0(X)$, l'ensemble de toutes ces fonctions $f \in CV(X)$ telles que vf est nulle à l'infini sur X pour tout $v \in V$. Il s'est avéré que de tels espaces se comportent mieux que les espaces $CV(X)$ vis à vis de certains problèmes tels les problèmes d'approximation, les problèmes d'immersion, ceux des limites inductives etc [13, 14, 15, 18, 37, 61, 62, 67, 68, 70, 72, 87, 88]. Beaucoup d'autres sous-espaces de $CV(X)$ ont connu un grand intérêt. C'est le cas de $HV(G)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert G de $\mathbb{C}$ et $hV(G)$ celui des fonctions harmoniques sur G [11, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 55, 56, 57].

Les espaces à poids $CV(X, E)$ de fonctions continues sur X à valeurs dans un espace de Banach E, puis dans un espace localement convexe ou un espace vectoriel topologique E ont été étudiés par la suite à des fins diverses [9, 10, 12, 38, 42, 43, 46, 73, 74, 75, 76].

L'un des problèmes intéressants sur les espaces à poids concerne l'étude de différents types d'opérateurs d'un espace à poids dans lui-même ou dans un autre espace à poids tels les opérateurs de composition, les opérateurs de multiplication, les opérateurs de composition pondérée et les opérateurs de superposition [16, 17, 19, 25, 27, 35, 36, 38, 83, 84, 86, 90].

Les opérateurs de composition sur les espaces de Hilbert $L^2(X)$, sont apparus dans le travail [45] de B. O. Koopmann en relation avec la mécanique classique. Une étude de tels opérateurs sur les espaces de type L^2 et H^2 est donnée par E. A. Nordgren [63]. H. Kamowitz, quant à lui, a donné dans [44] une caractérisation des opérateurs de composition compacts sur l'algèbre à poids $C(X)$ où X est un compact. Dans [85] R. K. Singh et W. H. Summers ont étudié les opérateurs de composition $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ sur les espaces à poids de type $CV(X)$ et $CV_0(X)$, induits par des applications $\varphi : X \to X$, où X est un espace complètement régulier et V est une famille de Nachbin sur X. Ils ont donné des conditions sous lesquelles de tels opérateurs sont continus, injectifs ou surjectifs.

Dans [54], M. Lindström et J. Lliavona considèrent des opérateurs de composition C_φ de l'espace à poids particulier $CK(X)$, des fonctions continues sur X muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts dans $CK(Y)$, où Y est un autre espace complètement régulier et $\varphi : Y \to X$ est une application. Ils étudient la relation entre la compacité et la compacité faible de l'opérateur continu C_φ et le comportement de la fonction continue associée φ.

Dans [72], L. Oubbi considère les opérateurs de composition étendue C_φ, définis d'un sous-espace vectoriel E de $CV(X)$ dans un sous-espace vectoriel de $CU(Y)$. Ici l'application φ prend ses valeurs non seulement dans X mais dans son compactifié de Stone-Čech βX, englobant ainsi des opérateurs qui échappent à l'étude de [85]. Il caractérise alors les applications φ pour lesquelles C_φ est continu, borné, (localement) équicontinu ou (localement) compact.

Les opérateurs de multiplication $M_\psi : f \mapsto \psi f$ sur les espaces à poids $CV_0(X)$ et $CV_0(X, A)$ ont été étudiés pour la première fois par R. K. Singh et J. S. Manhas dans [81]. Lorsque A est supposé être une algèbre localement multiplicativement convexe, ils ont aussi considéré le cas $\psi : X \to A$. Les mêmes auteurs continuent dans [82] l'étude des opérateurs de multiplication, cette fois ci, sur $CV(X, A)$ où A un espace localement convexe et $\psi : X \to \mathcal{L}(A)$ est à valeurs opérateurs. Cette étude a été étendue à de différents sous-espaces vectoriels de $CV(X, A)$ par L. Oubbi dans [71]. Ce dernier a caractérisé les opérateurs de multiplication bornés et montre que, dans certaines situations, un tel opérateur est précompact si et seulement s'il est trivial.

Dans [65, 66], J. S. Manhas caractérise les opérateurs de multiplication compacts M_ψ sur $CV_0(X, A)$ (ou $CV(X, A)$) lorsque $\psi : X \to \mathcal{L}(A)$ et A est une algèbre topologique.

Dans [51], L. A. Khan et A. B. Thaheem ont étudié, dans le cadre non localement convexe, les opérateurs de multiplication sur des espaces de fonctions pondérés qui sont induits par des applications scalaires ou vectorielles. Le cas des applications à valeurs opérateurs fait l'objet de [52].

Les opérateurs de composition pondérée qui constituent une généralisation à la fois des opérateurs de multiplication et ceux de composition, ont fait l'objet d'études approfondies sur différents espaces fonctionnels, en particulier sur les espaces L^p, H^p, les espaces de Bergman et les espaces de fonctions continues. Dans [36], J. S. Jeang et N. C. Wong ont traité les opérateurs de composition pondérée $\psi C_\varphi : f \mapsto \psi f o \varphi$ de $C_0(X)$ dans $C_0(Y)$, où X et Y sont des espaces localement compacts de Hausdorff, $\psi \in C(Y)$ et φ est une application de Y dans X. Dans le cadre des fonctions à valeurs vectorielles, J. E. Jamison et M. Rajagopalan [35] ont considéré les opérateurs de composition pondérée ψC_φ sur l'espace de Banach $C(K, A)$, où K est un espace compact, A un espace de Banach, φ une application de K dans lui-même et ψ une fonction sur K à valeurs opérateurs sur A. De tels opérateurs de l'espace $C_P(X, A)$ de toutes les fonctions continues f sur X à valeurs dans A, telles que $f(X)$ est précompact ont été étudiés dans [85] pour un espace complètement régulier arbitraire X et un espace localement convexe quelconque A. Pour les espaces à poids $CV(X, A)$ où A est non nécessairement localement convexe, les opérateurs de composition pondérée ont été étudiés principalement dans [52, 53, 58, 69, 80].

Pour tous les auteurs précités, les poids $v \in V$ sont des fonctions réelles positives semi-continues supérieurement. Récemment, C. Shekhar et B. S. Komal ont introduit dans [79] des systèmes de poids prenant valeurs dans l'ensemble des opérateurs positifs sur un espace de Hilbert H et ont considéré les espaces à poids généralisés associés. En fait, dans le cas des poids réels v, chaque $v(x) > 0$ définit un opérateur sur tout espace vectoriel topologique E par $T_{v(x)}(u) = v(x)u$. Un tel opérateur est inversible, borné inférieurement et positif dans le cas où E est un espace de Hilbert. Cependant, un opérateur positif sur un espace de Hilbert H n'est nécessairement ni borné inférieurement ni injectif. En outre, si ψ est une application de X à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$, C. Shekhar et B. S. Komal ont étudié l'opérateur de multiplication M_ψ induit par ψ sur les espaces à poids correspondants $CV(X, H)$. C'est $M_\psi(f)(x) = \psi(x)f(x)$, $f \in CV(X, H)$. Nous avons relevé dans [79] quelques résultats non justifiés et d'autres même erronés. Nous avons apporté des rectifications à ces imperfections en ajustant la définition d'une famille de Nachbin et des espaces à poids associés, offrant ainsi un cadre approprié pour l'étude des espaces à poids généralisés. Nous étudions alors la complétude de ces espaces, nous y établissons l'analogue du Théorème d'approximation de Prolla qui caractérise, entre autres, les sous-espaces vectoriels denses de $CV_0(X, H)$. Nous étudions après les opérateurs de multiplication M_ψ définis de $CV(X, H)$ (resp. de $CV_0(X, H)$) dans lui même. Nous en caractérisons ceux qui sont continus, à images dense, bornés inférieurement ou inversibles.

Plus tard, nous nous sommes rendu compte que la définition d'une telle famille de Nachbin, disons généralisée, n'utilise que peu les propriétés du produit scalaire et que tout y est traduit en termes de normes. Nous l'étendons alors au cas d'un espace normé A et obtenons les analogues des résultats topologiques obtenus dans le cas d'un espace de Hilbert [49]. Nous étudions par la suite les opérateurs de composition pondérée ψC_φ définis d'un sous-espace vectoriel E de $CV(X, A)$ dans $CU(Y, A)$ ou dans $CU_0(Y, A)$. Précisément, nous en caractérisons ceux qui sont continus, bornés ou localement équicontinus. Nos résultats sont donnés en termes de cozéros des sous-espaces en considération, Ce qui nous permet de nous y passer de l'essentialité, au sens de [73], de ces espaces.

L'un des résultats les plus importants dans les espaces de fonctions est le théorème d'Arzelà-Ascoli. Celui-ci caractérise les compacts d'un tel espace. Nous nous sommes intéressés à des théorèmes du type Arzelà-Ascoli dans les espaces de Nachbin généralisés. La première étude de la précompacité, donc aussi de la compacité, dans les espaces à poids de fonctions continues semble être l'œuvre de W. M. Ruess et W. H. Summers [76], où les auteurs ont donné des caractérisations des sous-ensembles précompacts des sous-espaces $CV_0(X, A)$ et $CV_P(X, A)$ de $CV(X, A)$, A étant un espace localement convexe. Ils ont ensuite fait usage de leurs résultats pour obtenir des solutions au problème de Cauchy concernant le comportement asymptotique presque périodique des solutions de mouvement. Après W. M. Ruess et W. H. Summers, L. A. Khan et L. Oubbi dans [46] ont traité le théorème d'Arzelà-Ascoli dans des espaces à poids non localement convexes.

Au cours du temps, en travaillant avec la notion de poids à valeurs opérateurs sur un normé, nous nous sommes rendu compte que rien n'empêche d'étendre cette notion à des espaces plus généraux, à savoir aux espaces vectoriels topologiques quelconques. L'extension est loin d'être facile. En effet des difficultés apparaissent à cause du manque de la convexité, mais nous sommes parvenus à les surmonter.

Cette thèse est constituée de cinq chapitres :

Au chapitre 0, nous rappelons les notions algébriques et topologiques dont nous aurons besoin pour rendre la thèse aussi auto-suffisante que possible.

Au chapitre 1, nous étudions les espaces $CV(X, H)$ où les poids sont à valeurs opérateurs positifs sur espace de Hilbert H. Nous définissons, d'une manière rigoureuse, les notions de famille de Nachbin à valeurs opérateurs positifs sur H. Nous donnons quelques propriétés élémentaires de ces espaces et démontrons un théorème d'approximation de type Prolla pour de tels espaces. Nous exhibons un exemple de famille de Nachbin généralisée telle que la topologie à poids de $CV(X, H)$ ne peut être induite par aucune famille classique de Nachbin. Ceci montre l'intérêt d'étudier les espaces à poids dans ce nouveau contexte. De plus, Nous étudions les opérateurs de multiplication M_ψ sur $CV(X, H)$ induits par une application ψ sur X à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$. Nous donnons des conditions sous lesquelles un tel opérateur est continu, borné inférieurement, à image dense ou inversible.

Au chapitre 2, nous considérons les familles de Nachbin sur X, constituées, cette fois-ci, de poids prenant valeurs dans l'algèbre $\mathcal{L}(A)$ de tous les opérateurs linéaires continus sur un espace vectoriel normé arbitraire $(A, \| \ \|)$. Cela donne un cadre plus général pour l'étude des espaces pondérés. Notre objectif principal dans ce chapitre est, cependant, d'étudier les opérateurs de composition pondérée entre un sous-espace E de $CV(X, A)$ dans un autre espace pondéré $CU(Y, A)$ ou $CU_0(Y, A)$, où Y est un espace complètement régulier de Hausdorff et V et U sont des familles de Nachbin (généralisées) sur X et Y respectivement. De tels opérateurs, notés ψC_φ, sont associés à des applications $\varphi : Y \to X$ et $\psi : Y \to \mathcal{L}(A)$ de la façon suivante : $\psi C_\varphi(f) : y \mapsto \psi_y(f(\varphi(y)))$, $y \in Y$ et $f \in E$. Nous produisons dans la première section quelques préliminaires, quelques notations et quelques premières propriétés des espaces pondérés généralisés $CV(X, A)$. Nous traitons de la complétude de $CV(X, A)$ et de $CV_0(X, A)$, ainsi que du théorème d'approximation de Prolla dans ce nouveau contexte, exprimé cette fois en termes de E et de son cozéro. La deuxième section est consacrée à la caractérisation des opérateurs de composition pondérée qui appliquent continûment certains sous-espaces E de $CV(X, A)$ dans $CU(Y, A)$ ou dans $CU_0(Y, A)$. La dernière section de ce chapitre donne des conditions sous lesquelles ψC_φ est borné ou localement équicontinu.

Au chapitre 3, nous caractérisons les sous-ensembles précompacts des espaces $CV_0(X, A)$ et $CV_P(X, A)$ où A est un espace vectoriel normé arbitraire et V est une famille de Nachbin généralisée sur X. Cela étend au cas des poids à valeurs opérateurs les théorèmes de type Arzelà-Ascoli donnés dans [76] et [46]. Comme un ensemble précompact est compact si et seulement s'il est complet, cette caractérisation s'avère être une caractérisation de la compacité relative, une fois que l'espace considéré est quasi-complet. Dans la première section, nous caractérisons la précompacité dans $CV_0(X, A)$ et dans la deuxième, nous examinons la précompacité dans $CV_P(X, A)$.

Le dernier chapitre traite du cas le plus général, à savoir celui des systèmes de poids à valeurs opérateurs sur un espace vectoriel topologique A. Nous y étudions les espaces à poids généralisés de fonctions continues sur X à valeurs dans A correspondants. Le but principal du chapitre 4, est l'étude des opérateurs de composition pondérée ψC_φ d'un sous-espace E de $CV(X, A)$ dans un $CU(Y, A)$ ou $CU_0(Y, A)$, A étant un espace vectoriel topologique de Hausdorff arbitraire. En section 1 nous donnons quelques préliminaires et notations complémentaires. Ensuite nous étudions quelques propriétés topologiques des espaces $CV(X, A)$. En section 2, nous étudions la complétude des espaces $CV(X, A)$ et $CV_0(X, A)$ et présentons le théorème d'approximation de Prolla dans ce nouveau cadre. Dans la section 3, nous caractérisons les opérateurs de composition pondérée qui appliquent continûment E dans $CU(Y, A)$ ou dans $CU_0(Y, A)$. La section 4 est consacrée aux conditions sous lesquelles ψC_φ est borné, alors que la dernière section est réservée à l'étude de l'équicontinuité (locale) de ψC_φ.

Chapitre 0

Rappels algébriques et topologiques

Dans ce chapitre, nous rappelons des outils algébriques et topologiques nécessaires pour la lecture de cette thèse.

0.1 Espaces complètement réguliers

Définition 0.1.1. *1. Soient X un espace topologique, x_0 un point de X et f une fonction de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que f est semi-continue supérieurement (en abrégé s.c.s.) en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$ pour tout $x \in U$. De manière équivalente, on peut exprimer cela par :*

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

où $\limsup\limits_{x \to x_0}$ désigne la limite supérieure.

2. Une fonction f est dite semi-continue supérieurement sur X si et seulement si elle est semi-continue supérieurement en tout point de X. Elle est donc semi-continue supérieurement si et seulement si $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ est un ouvert de X pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nous donnons une caractérisation et quelques propriétés de stabilité de la semi-continuité supérieure.

Proposition 0.1.2. ***1.*** *Une fonction f est semi-continue supérieurement en x_0 si et seulement si pour tout $\lambda > f(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $\lambda > f(x)$ pour tout $x \in U$.*

2. *Si f et g sont deux fonctions semi-continues supérieurement en x_0, alors $f+g$ l'est aussi. Si de plus les deux fonctions sont à valeurs positives ou nulles, leur produit fg est également semi-continu supérieurement en x_0.*

3. *Le produit d'une fonction semi-continue supérieurement par une fonction continue positive est semi-continu supérieurement.*

4. *Si f est une fonction semi-continue supérieurement d'un espace compact X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors il existe au moins un point a de X tel que : $f(a) = \sup_{x \in X} f(x)$.*

5. *Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions semi-continues supérieurement de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f(x) = \inf\{f_i(x) : i \in I\}$, pour tout $x \in X$. Alors f est semi-continue supérieurement.*

Définition 0.1.3. *Soient X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{K}$ une fonction définie de X dans $\mathbb{K}$.*

1. *On dit que f s'annule à l'infini (ou tend vers 0 à l'infini) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $|f(x)| < \varepsilon$, pour tout $x \notin K$. i.e., pour tout $\varepsilon > 0$, $\{x \in X \ : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ est compact dans le cas où f est s.c.s.*

2. *On dit que f est bornée si $|f|$ est majorée sur X. i.e., $\sup_{x \in X} |f(x)|$ est fini.*

3. *l'ensemble Supp$(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}^X$ est appelé support de f.*

L'exemple suivant montre que l'équivalence dans **1.** 0.1.3 n'aura pas lieu si la semi-continuité supérieure de f est omise :

Exemple 0.1.4. On prend $X = \mathbb{R}$ et ν l'indicatrice de l'ensemble $\{\frac{1}{p} : \quad p \in \mathbb{N}^\star\}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, $\nu(x) < \epsilon$ est vérifiée à l'extérieur du compact $[0,1]$. Cependant l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : \nu(x) \geq \frac{1}{2}\}$ n'est pas compact.

On désigne par :

$C(X)$ l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui sont continues sur X.

$C_0(X)$ le sous-espace de $C(X)$ des fonctions f qui tendent vers 0 à l'infini.

$B(X)$ l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui sont bornées sur X.

$B_0(X)$ le sous-espace de $B(X)$ des fonctions f qui s'annulent à l'infini.
$C_b(X) = C(X) \cap B(X)$.
$\mathcal{K}(X)$ le sous-espace de $C(X)$ des fonctions f qui sont à supports compacts.

Définition 0.1.5. *On dit qu'un espace séparé X est complètement régulier si pour tout fermé F de X et tout $x \in X \setminus F$, il existe une $f \in C(X)$ telle que : $0 \leq f \leq 1, f(x) = 1$ et $f(t) = 0$, pour tout $t \in F$.*

La topologie d'un espace complètement régulier n'est rien d'autre que la topologie initiale associée au système des fonctions appartenant à $C(X)$ ou encore à $C(X, [0,1])$.

Le théorème suivant résume quelques propriétés des espaces complètement réguliers :

Théorème 0.1.6. ***1.*** *Tout sous-espace d'un espace complètement régulier est complètement régulier.*

2. *Tout produit d'espaces complètement réguliers est complètement régulier.*

3. *Tout espace localement compact est complètement régulier. En particulier tout espace compact est complètement régulier.*

0.2 Compactifié de Stone-Čech

Définition 0.2.1. *On appelle caractère de l'algèbre $C_b(X)$ toute forme linéaire multiplicative et unitaire.*

Les propriétés essentielles des caractères de $C_b(X)$ sont résumées dans la :

Proposition 0.2.2. *[78] Soit χ un caractère de $C_b(X)$.*

1. Pour toute $f \in C_b(X)$, on a $\chi(f) \in cl(f(X))$. A fortiori $|\chi(f)| \leq \|f\|_\infty$ et χ est continu et de norme 1.

2. Pour toute $f \in C_b(X)$ on a $\chi(|f|) = |\chi(f)|$.

3. Pour toute famille finie $f_1, f_2, \ldots, f_p$ d'éléments de $C_b(X)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point $x \in X$ tel que $|\chi(f_i) - f_i(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$.

Désignons par βX l'ensemble des caractères de $C_b(X)$. Alors βX est une partie de la boule unité B de l'espace de Banach $C_b(X)'$, dual topologique de l'algèbre $C_b(X)$. On munit βX de la topologie induite par la topologie faible $\sigma(C_b(X)', C_b(X))$. Pour tout caractère χ_0, une base de voisinages de χ_0, pour cette topologie est donnée par l'ensemble des ouverts de la forme

$$W(\chi_0, F, \varepsilon) = \{\chi \in \beta X \ : \ |\chi(f) - \chi_0(f)| < \varepsilon, f \in F\},$$

où F est une partie finie de $C_b(X)$ et ε un réel strictement positif. Alors βX, muni de cette topologie manifestement séparée, est une partie faiblement fermée de la boule unité de $C_b(X)'$. Comme cette dernière est faiblement compacte, βX est compact.
Les points de X peuvent être considérés comme des caractères de $C_b(X)$. En effet à chaque $x \in X$, on associe le caractère, noté δ_x, selon $\delta_x(f) = f(x)$. Il existe donc une application canonique $\delta : X \to \beta X$, dite transformation de Dirac, vérifiant la proposition suivante qui permet d'injecter X dans βX.

Proposition 0.2.3. *L'application $\delta : X \to \beta X$ est un homéomorphisme de X sur $\delta(X)$ et $\delta(X)$ est partout dense dans βX.*

En combinant Théorème 0.1.6 et Proposition 0.2.3, on a :

Corollaire 0.2.4. *Pour qu'un espace X soit complètement régulier, il faut et il suffit qu'il soit sous-espace d'un espace compact.*

Corollaire 0.2.5. *Pour avoir l'égalité $X = \beta X$ il faut et il suffit que X soit compact. En particulier $\beta(\beta X) = \beta X$ pour tout espace topologique X.*

Ainsi βX est un compact où X est partout dense, dit compactifié de Stone-Čech de X.

Théorème 0.2.6. *[32] βX possède les propriétés équivalentes suivantes :*

1. Stone : le couple $(\delta, \beta X)$ est solution du problème universel des applications continues de X dans des espaces compacts quelconques. C'est-à-dire que toute application continue $f : X \to Y$ où Y est un compact admet un unique prolongement continu

$\widetilde{f} : \beta X \to Y$.

2. Stone-Čech : X est $C_b(X)$-plongé dans βX. C'est-à-dire que toute fonction $f : X \to \mathbb{K}$ définie, continue et bornée sur X admet un unique prolongement continu $\widetilde{f} : \beta X \to \mathbb{K}$.

Corollaire 0.2.7. *L'application de prolongement $f \mapsto \widetilde{f}$ de $C_b(X)$ dans $C(\beta X)$ et l'application de restriction $f \mapsto f_{|X}$ de $C(\beta X)$ dans $C_b(X)$ sont deux isomorphismes isométriques réciproques l'un de l'autre.*

0.3 Espaces vectoriels topologiques

Définition 0.3.1. *On appelle espace vectoriel topologique (*e.v.t.*) tout espace vectoriel A muni d'une topologie rendant continues globalement l'addition de E et la multiplication par un scalaire.*

Remarquons qu'un e.v.t. est séparé si, et seulement si, il est T_1. Ce qui est équivalent à dire que $\{0\}$ est un fermé.
Dorénavant, nous nous intéresserons essentiellement aux espaces vectoriels topologiques séparés.

Définition 0.3.2. *Soient A un* e.v.t. *et G une partie de A. On dit que G est :*

***1.** bornée si pour tout voisinage V de 0, il existe $s > 0$ tel que $G \subset tV$ pour tout $t \geq s$.*

***2.** précompact si, pour tout voisinage V de 0, il existe un sous-ensemble fini F de G tel que $G \subset \bigcup\limits_{x \in F} (x + V)$.*

***3.** convexe si pour tous $u, v \in G$ le segment $[u, v] = \{tu + (1-t)v : t \in [0, 1]\}$ est inclu dans G.*

***4.** équilibré si $\lambda G \subset G$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant l'inégalité $|\lambda| < 1$.*

***5.** rétractable si $r\overline{G} \subset \overset{\circ}{G}$ pour tout $0 \leq r < 1$, où $\overline{G}$ désigne la fermeture de G dans A et $\overset{\circ}{G}$ son intérieur.*

Proposition 0.3.3. *Soient A un* e.v.t.*, $a \in A$ et $\lambda \neq 0$. Alors les applications*

$$\begin{array}{rccc} T_a : & A & \to & A \\ & x & \mapsto & x + a \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rccc} M_\lambda : & A & \to & A \\ & x & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

sont des homéomorphismes de A.

Une conséquence immédiate de ce résultat est que la topologie est invariante par translation et multiplication par un scalaire non nul, c'est-à-dire, un ensemble $B \subset A$ est ouvert si et seulement si $T_a(B)$ (ou $M_\lambda(B)$) l'est. Il s'en suit que la topologie τ est entièrement définie par un système fondamental de voisinages de 0, dit une base locale.

Définition 0.3.4. ***a.*** *A est localement convexe s'il admet une base locale dont les éléments sont convexes.*

b. *A est localement borné si le point zéro possède un voisinage borné.*

c. *A est métrisable si sa topologie τ est engendrée par une distance d sur A. ceci équivaut à dire que A admet une base locale dénombrable.*

d. *A est normable s'il existe une norme sur A dont la topologie coïncide avec τ.*

Théorème 0.3.5. *[40]* ***1.*** *Tout* e.v.t. *admet une base locale formée de voisinages fermés équilibrés et rétractables.*

2. *Tout espace localement convexe admet une base locale formée de voisinages fermés équilibrés et convexes.*

Soit A un e.v.t.. On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des voisinages de 0 fermés, équilibrés et rétractables dans A. De tels ensembles constituent une base locale. Soit $G \in \mathcal{N}$. L'application $P_G : A \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$P_G(a) = \inf\{\ \alpha > 0 : a \in \alpha G\ \}, a \in A.$$

dite la jauge (ou la fonction de Minkowski) de G, est continue et satisfait

$$G = \{y \in A : P_G(y) \leq 1\} \text{ et } \overset{\circ}{G} = \{y \in A : P_G(y) < 1\},$$

On renvoit à [40] pour plus de détails concernant un tel problème.

Soit $G \in \mathcal{N}$. On sait que P_G est positivement homogène, c'est-à-dire $P_G(\lambda a) = |\lambda| P_G(a)$ pour tous $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ et que, pour tout $H \in \mathcal{N}$ vérifiant $H + H \subset G$, on a

$$P_G(a + b) \leq P_H(a) + P_H(b),\ \forall a, b \in A.$$

Dans le cas où A est localement convexe, la base locale considérée $\mathcal{N}$ est formée de voisinages fermés équilibrés et convexes. La jauge P_G, pour $G \in \mathcal{N}$, est alors une semi-norme.

Pour tout espace topologique X et tout e.v.t. A, on note par $C(X,A)$ (resp. $C_b(X,A)$, $C_0(X,A)$, $\mathcal{K}(X,A)$) l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues (resp. continues et bornées, continues et nulles à l'infini, continues à support compact) sur X à valeurs dans A, et par $\mathcal{F}(X,A)$ celui de toutes les fonctions sur X à valeurs dans A. Une fois que $A = \mathbb{K}$, on écrit simplement $C(X)$ (resp. $C_b(X)$, $C_0(X)$, $\mathcal{K}(X)$, $\mathcal{F}(X)$) au lieu de $C(X,A)$ (resp. $C_b(X,A)$, $C_0(X,A)$, $\mathcal{K}(X,A)$, $\mathcal{F}(X,A)$).

Définition 0.3.6. *Soient A et B deux* e.v.t.. *Une application linéaire $T : A \to B$ est continue si pour tout $G \in \mathcal{N}'$, il existe $H \in \mathcal{N}$ tel que*

$$P_G(T(a)) \leq P_H(a), \ \forall a \in A,$$

où $\mathcal{N}'$ est l'ensemble de tous les voisinages de 0 fermés, équilibrés et rétractables dans B.

Définition 0.3.7. *Soient A et B deux* e.v.t..

1. *On dit qu'une application linéaire T de A dans B est bornée inférieurement si,*

$$\forall G \in \mathcal{N}, \exists H \in \mathcal{N}' : P_G(a) \leq P_H(T(a)), \ \forall a \in A.$$

Dans le cas où $(A, \| \ \|_A)$ et $(B, \| \ \|_B)$ sont des espaces normés, ceci est équivalent à

$$\exists r > 0 \ : \ \ r\|a\|_A \leq \|T(a)\|_B, \ \forall a \in A.$$

2. *Une collection d'applications linéaires $\mathcal{T}$ de A dans B est dite équi-borné inférieurement si,*

$$\forall G \in \mathcal{N}, \exists H \in \mathcal{N}' : P_G(a) \leq P_H(T(a)), \ \forall a \in A, \ \forall T \in \mathcal{T}.$$

Dans le cas où $(A, \| \ \|_A)$ et $(B, \| \ \|_B)$ sont des espaces normés, ceci est équivalent à

$$\exists r > 0 \ : \ r\|a\|_A \leq \|T(a)\|_B, \ \forall a \in A, \ \forall T \in \mathcal{T}.$$

Par $\mathcal{L}(A,B)$ on note l'espace vectoriel de tous les opérateurs (i.e. applications linéaires) continus d'un espace vectoriel topologique A dans un autre B. Si $\mathcal{C}$ est une collection de sous-ensembles bornés de A, on notera par $\tau_{\mathcal{C}}$ la topologie sur $\mathcal{L}(A,B)$ de la convergence uniforme sur les membres de $\mathcal{C}$. Une base locale pour $\tau_{\mathcal{C}}$ est constituée de toutes les intersections finies d'ensembles de la forme

$$N(F,G) := \{T \in \mathcal{L}(A,B) : T(F) \subset G\}, G \in \mathcal{N}', F \in \mathcal{C},$$

En particulier, si $\mathcal{C}$ est constituée de toutes les parties finies (resp. bornées, précompactes), on notera $\tau_{\mathcal{C}}$ par β (resp. σ, c). Dans ce cas, une base locale pour $\tau_{\mathcal{C}}$ est constituée de tous les ensembles $N(F,G)$, où $G \in \mathcal{N}'$ et $F \in \mathcal{C}$.
On désigne par $\mathcal{L}_\tau(A,B)$ l'espace $\mathcal{L}(A,B)$ muni de la topologie τ, où $\tau \in \{\beta,\sigma,c\}$ et par $\mathcal{L}_{bi}(A,B)$ l'ensemble des opérateurs continus et bornés inférieurement de A dans B. Quand $A = B$, on note simplement $\mathcal{L}_\tau(A,B)$ (resp. $\mathcal{L}_{bi}(A,B)$) par $\mathcal{L}_\tau(A)$ (resp. $\mathcal{L}_{bi}(A)$).

Soient X et Y deux espaces complètement réguliers, E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X,A)$ et $\varphi : Y \to X$ et $\psi : X \to \mathcal{L}(A)$ deux applications. On a les deux définitions

Définition 0.3.8. *Le cozéro $coz(f)$ de $f \in E$ et celui, $coz(E)$, de E sont définis comme suit :*

$$coz(f) := \{x \in X : f(x) \neq 0\},$$
$$coz(E) := \{x \in X : \exists f \in E, f(x) \neq 0\} = \bigcup_{f \in E} coz(f).$$

Si $coz(E) = X$, on dit que E est essentiel.

Définition 0.3.9. ***1.*** *L'application linéaire $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ définie de E dans $\mathcal{F}(Y,A)$ par $C_\varphi(f)(y) = f(\varphi(y))$, $y \in Y$, est dite l'opérateur de composition associé à φ.*

2. *L'application linéaire $M_\psi : f \mapsto \psi f$ définie de E dans $\mathcal{F}(X,A)$ par $M_\psi(f)(x) := \psi(x)(f(x))$, $x \in X$, est dite l'opérateur de multiplication associé à ψ.*

3. *L'application linéaire $\psi C_\varphi : f \mapsto \psi(f \circ \varphi)$ définie de E dans $\mathcal{F}(Y,A)$ par $\psi C_\varphi(f)(y) = \psi_y(f(\varphi(y)))$ est appelée l'opérateur de composition pondérée associé à ψ et φ, où $\psi_y := \psi(y)$.*

Notons qu'une fois que ψ est identiquement l'identité de A, ψC_φ n'est rien d'autre que l'opérateur de composition C_φ et une fois que $X = Y$ et φ est l'identité de X, ψC_φ n'est rien d'autre que l'opérateur de multiplication M_ψ.

0.4 Espaces à poids de fonctions continues

Selon Nachbin, les poids sont des fonctions réelles positives satisfaisant certaines conditions supplémentaires.

Définition 0.4.1. *Soit v une fonction définie de X dans $\mathbb{R}$.*

1. *v est dite un poids sur X si v est positive et semi-continue supérieurement.*

2. *Une famille V de poids sur X est dite de Nachbin si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

a. *V est essentiel, c'est-à-dire $\forall x \in X$, $\exists v \in V : v(x) > 0$ (on écrit $V > 0$).*

b. *V est filtrante croissante, c'est-à-dire $\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall \lambda > 0$, $\exists v \in V : \max(\lambda v_1, \lambda v_2) \leq v$.*

Pour tous $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$ et $f \in C(X, A)$, on écrit $vP_G(f)$ pour désigner l'application $x \mapsto v(x)P_G(f(x))$.
La donnée d'une famille de Nachbin V sur X et d'un espace vectoriel topologique non trivial et séparé A permet de définir les ensembles suivants dits espaces à poids ou de Nachbin de fonctions continues sur X à valeurs dans A :

$$CV(X, A) = \{f \in C(X, A) : \quad vP_G(f) \in B(X), \ \forall v \in V\},$$

$$CV_P(X, A) := \{f \in C(X, A) : vf(X) \ \text{ est précompact dans } A, \ \forall v \in V\},$$

et

$$CV_0(X, A) = \{f \in C(X, A) : \quad vP_G(f) \in B_0(X), \forall v \in V\}$$

Ce sont des espaces vectoriels tels que $CV_0(X, A) \subset CV_P(X, A) \subset CV(X, A)$.
Lorsque $A = \mathbb{K}$, on note respectivement $CV_0(X)$, $CV_P(X)$ et $CV(X)$ au lieu de $CV_0(X, A)$, $CV_P(X, A)$ et $CV(X, A)$.

L'espace $CV(X,A)$ sera doté de la topologie linéaire pondérée τ_V dont une base de voisinages de zéro est constituée de tous les ensembles de la forme

$$B_{G,v} := \{f \in CV(X,A), (vf)(X) \subset G\},$$

où G parcourt $\mathcal{N}$ et v parcourt V. La jauge d'un tel ensemble est notée $P_{G,v}$. C'est :

$$P_{G,v}(f) := \sup\{v(x)P_G(f(x)), x \in X\}, f \in CV(X,A).$$

Dans le cas où l'espace A est muni d'une norme $\| \ \|$. Cette topologie est définie par la famille des semi-normes :

$$\|f\|_v = \sup\{v(x)\|f(x)\|, x \in X\},\ v \in V.$$

dont la boule unité fermée est notée par B_v.

Comme V est de Nachbin, la famille des semi-normes $\| \ \|_v, v \in V$ est filtrante croissante.

Si V est engendrée par un singleton v, c'est-à-dire $V = \{\lambda v : \lambda > 0\}$, alors $CV(X,A)$ (resp. $CV_0(X,A)$, $CV_P(X,A)$, $CV(X)$, $CV_0(X)$ et $CV_P(X)$) sera noté $Cv(X,A)$ (resp. $Cv_0(X,A)$, $Cv_P(X,A)$, $Cv(X)$, $Cv_0(X)$ et $Cv_P(X)$).

Nous allons donner quelques exemples classiques de familles de Nachbin et les espaces à poids correspondants. Ces espaces peuvent varier de l'espace $C(X,A)$ tout entier au singleton $\{0\}$:

Exemple 0.4.2. Soient A un e.v.t., X un espace complètement régulier et $V = \{\lambda 1 : \lambda > 0\}$ la famille de Nachbin engendrée par la fonction constante $v = 1$ sur X. Alors $Cv(X,A) := C_b(X,A)$ et $Cv_0(X,A) := C_0(X,A)$. Puisque les semi-normes $(\| \ \|_v)_{v\in V}$ sont des normes toutes équivalentes à la norme $\| \ \|_\infty$, ces deux espaces sont des espaces normés. En particulier, $Cv(X) = C_b(X)$ et $Cv_0(X) = C_0(X)$.

Exemple 0.4.3. Soit A un e.v.t.. Notons par $\mathrm{K}(X)$ l'ensemble des parties compactes de X. Pour tout $K \in \mathrm{K}(X)$, désignons par χ_K la fonction caractéristique de K et considérons la famille de Nachbin $V = K = \{\lambda\chi_K \ : \ \lambda > 0;\ K \in \mathrm{K}(X)\}$. Alors on a $CK_0(X,A) = CK(X,A) = C(X,A)$. Ceci découle du fait que pour tous $f \in C(X,A)$, $\varepsilon > 0$ et $K \in \mathrm{K}(X)$, l'ensemble $\{x \in X \ : \ \lambda\chi_K(x)|f(x)| \geq \varepsilon\}$ est un fermé inclu dans le compact K, donc c'est un compact. Par conséquent $f \in CK_0(X,A)$.

Exemple 0.4.4. Prenons $X = \mathbb{R}^n$ et considérons la famille de Nachbin $V = \{|p| : p$ fonction polynômiale de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{K}\}$. Alors $CV_0(\mathbb{R}^n) = CV(\mathbb{R}^n) \subsetneq C(\mathbb{R}^n)$. En effet, soient $f \in CV(\mathbb{R}^n)$ et $|p| \in V$. Si on pose $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, alors la fonction $x \to \|x\|_2^2|p(x)|$ est un élément de V. Donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2|p(x)||f(x)| < \infty$$

$$\lim_{\|x\|_2\to\infty} |p(x)||f(x)| = 0.$$

Par suite $|p|f$ tend vers 0 à l'infini, d'où $CV(\mathbb{R}^n) = CV_0(\mathbb{R}^n)$.
Tout élément de $CV(\mathbb{R}^n)$ est en particulier une fonction bornée. Donc la fonction f telle que $f(x) = \exp(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)$ avec $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$, appartient à $C(\mathbb{R}^n)$, mais pas à $CV(\mathbb{R}^n)$. Ainsi $CV(\mathbb{R}^n) \subsetneq C(\mathbb{R}^n)$.

L'exemple suivant montre que $CV(X)$ peut être réduit au singleton $\{0\}$.

Exemple 0.4.5. Si on considère $X = \mathbb{Q}$ qui est complètement régulier mais non localement compact et la famille de Nachbin sur X, $V = C^+ = \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^{*+}\text{continue}\}$ alors $CV(X) = \{0\}$. Sinon, il existe un $f \in CV(X)$ non nulle telle que $f(t_0) = 1$ pour un certain $t_0 \in \mathbb{Q}$.
L'ensemble $\Omega = \{x \in \mathbb{Q} : |f(x)| > \frac{1}{2}\}$ est un ouvert de $\mathbb{Q}$ contenant t_0. Donc $\Omega = \mathbb{Q}\cap\Omega'$ avec Ω' un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \Omega' \setminus \mathbb{Q}$. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Considérons $v \in C^+$ tel que $v(t) = \dfrac{1}{|t-x|}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|f\|_v \geq \frac{1}{2|x_n - x|}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on trouve une absurdité.

Définition 0.4.6. *Si U et V sont deux familles de Nachbin sur X.*

1. *On dit que U est moins fine que V et l'on écrit $U \leq V$ si pour tout $u \in U$ il existe $v \in V$ tel que $u \leq v$.*

2. *On dit que U et V sont équivalentes si $U \leq V$ et $V \leq U$ et on écrit $U \sim V$.*

Proposition 0.4.7. i. *$CV_0(X,A)$ est un sous-espace topologique fermé de $CV(X,A)$.*

ii. *Si $U \leq V$ alors $CV_0(X,A) \subseteq CU_0(X,A)$ et $CV(X,A) \subseteq CU(X,A)$ et les injections canoniques sont continues.*

iii. *$CV(X,A)$ est un $C_b(X)$-module i.e. c'est un espace vectoriel vérifiant $\forall f \in C_b(X), \forall g \in CV(X,A) : fg \in CV(X,A)$ et $CV_0(X,A)$ est un $C_b(X)$-sous-module de $CV(X,A)$.*

Proposition 0.4.8. *Soit V une famille de Nachbin définie sur X. Alors :*

1. *$\mathcal{K}(X)$ est un idéal de $C(X)$ tel que $\mathcal{K}(X) \subset CV_0(X)$.*

2. *Si de plus X est localement compact, alors $\overline{\mathcal{K}(X)}^{CV(X)} = CV_0(X)$. En particulier $\mathcal{K}(X)$ est dense dans $CV_0(X)$.*

Proposition 0.4.9. *$C_b(X) \cap CV_0(X)$ est dense dans $CV_0(X)$.*

Démonstration. Soit $f \in CV_0(X)$ et soient $v \in V$ et $\varepsilon > 0$. Alors l'ensemble $K = \{x \in X : v(x)|f(x)| \geq \varepsilon\}$ est compact.
Posons $k = \sup\limits_{x\in K} |f(x)|$ et définissons la fonction ϕ définie de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ par $\phi(t) = t$, si $|t| \leq k$ et $\phi(t) = k\dfrac{t}{|t|}$, si $|t| > k$.
Alors ϕ est continue sur $\mathbb{K}$ et vérifie

$$|\phi(t)| \leq \min(|t|, k) \text{ et } |t - \phi(t)| \leq |t|, t \in \mathbb{K}$$

Donc la fonction $\phi o f \in C(X)$ et vérifie $|\phi o f| \leq \min(|f|, k)$. Ce qui entraîne $\phi o f \in C_b(X) \cap CV_0(X)$. De plus, $v(x)|f(x) - \phi o f(x)| < \varepsilon$, pour tout x de X. Par conséquent $\|f - \phi o f\|_v < \varepsilon$. D'où la densité de $C_b(X) \cap CV_0(X)$ dans $CV_0(X)$. □

Ainsi, l'ensemble des fonctions bornées dans $CV_0(X)$ est dense dans $CV_0(X)$, alors que $C_b(X) \cap CV(X)$ ne l'est pas dans $CV(X)$, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 0.4.10. Prenons $X = \mathbb{R}$ et le poids v défini par $v(x) = e^{-|x|}$. Alors $C_b(X) \subset Cv(X)$ donc $C_b(X) \cap Cv(X) = C_b(X)$.
Considérons la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{|x|}$ on a $f \in Cv(X)$.
Si $f \in \overline{C_b(X)}^{Cv(X)}$, alors il existe $g \in C_b(X)$ telle que $\|g - f\|_v < \frac{1}{2}$. Donc

$$|g(x)e^{-|x|} - 1| \ < \ \frac{1}{2} \ \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Comme $g \in C_b(X)$ on a $\lim_{x \to +\infty} g(x)e^{-|x|} = 0$. Donc par passage à la limite à l'infini dans (1), on aboutit à l'absurdité $1 < \frac{1}{2}$. Ainsi $C_b(X)$ n'est pas dense dans $Cv(X)$.

Lemme 0.4.11. *Soit $E \subset CV(X)$ un $C_b(X)$-module.*

1. Si $x \in coz(E)$ et U un ouvert contenant x, alors il existe $f \in E$ telle que $f(x) = 1$, $0 \leq f \leq 1$ et $f(X \setminus U) = \{0\}$.

2. Si $K \subset coz(E)$ est un compact et $C \subset X$ est un fermé tels que $K \cap C = \emptyset$, alors il existe $f \in E$ tel que $f \equiv 1$ sur K et $f \equiv 0$ sur C.

Le théorème suivant, dû à Prolla, permet de caractériser la fermeture d'un sous-espace de $CV_0(X)$.

Théorème 0.4.12. *Soient $CV_0(X)$ un espace de Nachbin, $A \subset C_b(X)$ une algébre séparant les points de X et $W \subset CV_0(X)$ un A-module. Alors*
$f \in \overline{W}^{\tau_V}$ si et seulement si pour tout $x \in X$: $f(x) \in \overline{W(x)}^{\mathbb{K}}$.

Pour tous $v \in V$ et $r > 0$, on considère les ensembles de niveau définis par :

$$N(v, r) := \{x \in X : v(x) \geq r\}$$

et

$$N(v) := \{x \in X : v(x) > 0\}.$$

K. D. Bierstedt introduit dans [9] la notion de $V_{\mathbb{R}}$-espaces comme étant les espaces complètement réguliers de Hausdorff X tels que toute fonction réelle sur X dont la restriction à chaque ensemble de niveau $N(v, r)$ est continue, doit être continue sur X, v parcourant V et $r > 0$.

Le lemme suivant permet, en particulier, de caractériser les $V_{\mathbb{R}}$-espaces.

Lemme 0.4.13. *Soient Z un espace complètement régulier de Hausdorff, B un espace vectoriel topologique non trivial de Hausdorff sur le corps $\mathbb{K}$ et $\mathcal{F}$ une collection de sous-ensembles de Z. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. *Pour tout espace complètement régulier de Hausdorff Y, une fonction $f : Z \to Y$ dont la restriction $f_{|_F}$ à tout $F \in \mathcal{F}$ est continue, est nécessairement continue sur Z.*

ii. *une fonction* $f : Z \to \mathbb{R}$ *dont la restriction* $f_{|_F}$ *à tout* $F \in \mathcal{F}$ *est continue, est nécessairement continue sur* Z.

iii. *une fonction* $f : Z \to B$ *dont la restriction* $f_{|_F}$ *à tout* $F \in \mathcal{F}$ *est continue, est nécessairement continue sur* Z.

Démonstration. L'implication i.⇒ ii. est évidente parce que $\mathbb{R}$ est un espace complètement régulier de Hausdorff. Pour ii.⇒ iii., Soit $f : Z \to B$ telle que $f_{|_F}$ est continue pour tout $F \in \mathcal{F}$. Pour une fonction continue $g : B \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)_{|_F}$ est continue pour tout $F \in \mathcal{F}$. Donc $g \circ f$ est continue sur X d'après ii.. Puisque B est un espace complètement régulier de Hausdorff, sa topologie est la topologie initiale définie par $C(B, \mathbb{R})$. Donc f est continue sur Z. Enfin, pour l'implication iii.⇒ i., on suppose que $f : Z \to Y$ est une fonction telle que $f_{|_F}$ est continue pour tout $F \in \mathcal{F}$. Pour un $a \in B \setminus \{0\}$ donné, soit i_a l'homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans B défini par $i_a(\lambda) = \lambda a$. Pour une fonction continue donnée $g : Y \to \mathbb{R}$, la fonction $i_a \circ g \circ f : Z \to B$ est continue sur chaque $F \in \mathcal{F}$. Donc elle est continue sur Z d'après iii.. Comme g est arbitraire dans $C(Y)$ et $i_a(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$, f est continue sur Z.

□

Définition 0.4.14. *On dit que* Z *est un* $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$*-espace s'il satisfait l'une des assertions du Lemme 0.4.13. En particulier,* X *sera un* $V_{\mathbb{R}}$*-espace, si c'est un* $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$*-espace pour*

$$\mathcal{F} := \{N(v, r),\ v \in V,\ r > 0\}.$$

Chapitre 1

Opérateurs de multiplication dans $CV(X, H)$, cas où H est un Hilbert

Dans un espace $CV(X, A)$ associé à des poids réels, chaque $v(x) > 0$ définit un opérateur sur A par $T_{v(x)}(u) = v(x)u$. Un tel opérateur est inversible, borné inférieurement et, dans le cas où A est un espace de Hilbert, positif. Cependant, un opérateur positif sur un espace de Hilbert n'est pas nécessairement borné inférieurement ou même injectif. Récemment C. Shekhar et B. S. Komal ont introduit dans [79] des systèmes de poids à valeurs opérateurs positifs sur un espace de Hilbert H et ils ont considéré des espaces pondérés de fonctions continues sur X à valeurs dans H. En outre, C. Shekhar et B. S. Komal ont étudié l'opérateur de multiplication M_ψ, induit par une application ψ de X dans $\mathcal{L}(H)$, sur les espaces pondérés correspondants $CV(X, H)$. Nous avons relevé certaines imperfections dans leur travail [79] et avons developpé un cadre adéquat à l'étude des espaces à poids, disons, généralisés.

Dans [79], les auteurs utilisent, par exemple, un théorème d'approximation similaire à un résultat de Prolla [75] et affirment que, sous leurs hypothèses sur V, la collection $(\| \ \|_v)_{v \in V}$ des semi-normes générant la topologie de $CV(X, H)$ est filtrante croissante, ou encore que les boules unités correspondantes constituent un système fondamental de voisinages de zéro. Les auteurs affirment également, sans aucune justification, qu'un certain espace pondéré, à savoir $C\|V\|(X)$, de fonctions scalaires continues, lié à $CV(X, H)$ est essentiel. Il se trouve qu'un tel théorème d'approximation n'est connu que pour $CV(X,A)$ avec des poids réels, que les semi-normes ne doivent pas satisfaire une telle condition (voir l'exemple 1.1.3) et qu'un tel espace n'est pas nécessairement essentiel (voir l'exemple 1.1.4).

Dans ce chapitre, nous étudions les espaces $CV(X,H)$, où les poids v sont à valeurs opérateurs positifs. Nous définissons d'abord un cadre approprié dans lequel on peut mener une étude raisonnable de différents problèmes dans de tels espaces. Nous donnons ensuite des conditions sous lesquelles $CV(X,H)$ est complet. Nous montrons aussi un théorème d'approximation de type Prolla pour de tels espaces. De plus, Nous étudions les opérateurs de multiplication M_ψ sur $CV(X,H)$ induits par une application ψ sur X à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$. Nous donnons des conditions sous lesquelles un tel opérateur est continu, borné inférieurement, à image dense ou inversible.

1.1 Espaces de Nachbin Généralisés, cas Hilbert

Dans tout ce chapitre, H désigne un espace de Hilbert dont le produit scalaire et la norme sont notés respectivement par $\langle .,. \rangle$ et $\| \ \|$ et $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés de H dans lui-même.

Définition 1.1.1. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit positif, noté $T \geq 0$, si $\langle Ty, y \rangle \geq 0$ pour tout $y \in H$.*

L'ensemble de tous les opérateurs positifs sur H sera noté $\mathcal{L}^+(H)$. On écrit $S \geq T$ ou $T \leq S$ pour signifier $S - T \in \mathcal{L}^+(H)$.

Pour tout $y \in H$, l'application δ_y désignera l'évaluation normée au point y. C'est $\delta_y(T) := \|T(y)\|$, pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$.

Définition 1.1.2. *Une application v de X dans $\mathcal{L}(H)$ est dite fortement semi-continue supérieurement si, pour tout $y \in H$, l'application à valeurs réelles $\delta_y \circ v$ est semi-continue supérieurement sur X.*

Dans [79], les auteurs appellent système de poids sur X, toute famille V de fonctions sur X à valeurs dans $\mathcal{L}^+(H)$ telle que :

i. tout $v \in V$ est fortement semi-continue supérieurement,
ii. $\forall x \in X, \bigcap_{v \in V} \ker v(x) = \{0\}$,
iii. V est filtrante croissante dans le sens suivant :

$$\forall v_1, v_2 \in V, \ \forall \lambda > 0, \ \exists v \in V : \lambda v_1 \leq v \text{ et } \lambda v_2 \leq v.$$

Pour un tel système de poids, ils associent les espaces pondérés de fonctions continues sur X à valeurs dans H suivants :

$$CV(X, H) = \{f \in C(X, H) : vf(X) \ \text{ est borné dans } \ H, \ \forall v \in V\}$$

et

$$CV_0(X, H) = \{f \in C(X, H); vf \text{ est nulle à l'infini sur } \ X, \ \forall v \in V\},$$

où vf désigne la fonction définie sur X par $vf(x) := v(x)(f(x))$.
Puisque, pour tous $v \in V$ et $f \in CV(X, H)$, $vf(X) := \{v(x)(f(x)), x \in X\}$ est borné dans H, la quantité :

$$\|f\|_v = \sup\{\|v(x)f(x)\| : x \in X\}$$

est finie. En fait, $\| \ \|_v$ est même une semi-norme sur $CV(X, H)$ et la famille de toutes ces semi-normes définissent une topologie localement convexe τ_V sur $CV(X, H)$.
En outre ils affirment, sans preuve, que comme c'est le cas dans le cadre scalaire, si $v \leq u$ (c'est-à-dire $v(x) \leq u(x), \forall x \in X$), alors $\| \ \|_v \leq \| \ \|_u$ (ou de manière équivalente $B_u \subset B_v$, où B_u est la boule unité de la semi-norme $\| \ \|_u$ et B_v celle de $\| \ \|_v$). Ce qui n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.1.3. Prenons $X = \mathbb{R}$ et $H = \mathbb{C}^2$. Alors $\mathcal{L}(H) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Posons $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = T + C$. Considérons les applications identiquement constantes u et v de X vers $\mathcal{L}(H)$ définies par $u(x) = T$ et $v(x) = S$, pour tout $x \in X$. Si $V = \{\lambda u, \lambda v, \lambda > 0\}$, alors V satisfait les conditions requises dans [79]. Puisque T et S sont positifs, S est inversible et $T \leq S$, u et v sont évidemment continues et $u \leq v$. Toutefois, $\| \ \|_u \not\leq \| \ \|_v$. Cela est dû au fait que $\| \ \|_u \leq \| \ \|_v$ si et seulement si $u^2 \leq v^2$. Mais cela ne tient pas comme il est prouvé dans [59], p. 47. En effet, $u^2 \leq v^2$ si, et seulement si, $T^2 \leq S^2$. Remarquons que $T^2 = T$ et $C^2 = C$. Donc

$S^2 - T^2 = C + CT + TC = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Le spectre de $S^2 - T^2$ est $\{1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\}$. Il contient donc une valeur propre négative. Par conséquent, $S^2 - T^2$ n'est pas positif.

Encore dans [79], les auteurs considèrent l'espace pondéré $C\|V\|(X)$ associé aux poids à valeurs réelles $x \mapsto \|v(x)\|,\ v \in V$ et affirment qu'il est essentiel. En fait, rien ne garantit que de tels poids sont semi-continus supérieurement. De plus, bien que ce soit le cas, l'essentialité peut ne pas tenir comme le montre l'exemple modifié suivant de [71] :

Exemple 1.1.4. Prenons $X = \mathbb{Q}$, H un espace de Hilbert et $V = \{fI, f : X \to \mathbb{R}^+ \text{ continue }\}$, où I représente l'application identité de H. Alors $v \in V$ est équivalent à l'existence de $f \in C(X, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\begin{array}{rcl} v : X & \longrightarrow & \mathcal{L}(H) \\ x & \longmapsto & f(x).I : \begin{array}{rcl} H & \longrightarrow & H \\ h & \longmapsto & f(x)h. \end{array} \end{array}$$

et V satisfait les conditions de [79]. Cependant, $CV(X,H)$ (et à fortiori $C\|V\|(X)$) est trivial. En effet, supposons qu'il existe une fonction non nulle $f \in CV(X,H)$ et fixons $t_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Si $\Omega = \{t \in \mathbb{Q} : \|f(t)\| > \frac{\|f(t_0)\|}{2}\}$, alors Ω est un ouvert de $\mathbb{Q}$ contenant t_0. Pour tout irrationnel r dans l'adhérence $\overline{\Omega}^{\mathbb{R}}$, Soit $f_r(t) := \frac{1}{|t-r|}$. Alors $v := f_r I \in V$, mais

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{Q}} \|v_r(t) f(t)\| & \geq \sup_{t \in \Omega} |f_r(t)| \|f(t)\| \\ & \geq \sup_{t \in \Omega} \frac{\|f(t)\|}{|r-t|} \\ & \geq \sup_{t \in \Omega} \frac{\|f(t_0)\|}{2|r-t|} = +\infty. \end{aligned}$$

Cela contredit $f \in CV(X,H)$.

Il est à noter que, lorsque les poids sont scalaires, l'essentialité de V assure la séparation de $CV(X,A)$ pour tout espace localement convexe A. Dans le cas des poids à valeurs dans $\mathcal{L}^+(H)$, cela ne tient plus, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.1.5. Soient $T \in \mathcal{L}^+(H)$ non injectif et $V := \{\lambda T, \lambda > 0\}$. Alors toute fonction continue $f : X \to \ker T$ appartient à $CV(X, H)$. En particulier, si $0 \neq y \in \ker T$ et f est la fonction constante prenant la valeur y, alors f est un élément non nul de $CV(X, H)$ tel que $\|f\|_v = 0$ pour tout $v \in V$. Donc $CV(X, H)$ n'est pas séparé.

Enfin, notons que la semi-continuité supérieure dans le cas des poids scalaires fait en sorte que $CV_0(X, H)$ est un sous-espace fermé de $CV(X, H)$. Puisque toute fonction semi-continue supérieurement est bornée sur tout ensemble compact. Cependant, dans le cas présent, il n'est pas clair que les applications $x \mapsto \|v(x)f(x)\|$ sont semi-continus supérieurement, et donc bornées sur tout sous-ensemble compact de X. Par conséquent, il n'est pas clair que $CV_0(X, H)$, tel qu'il est défini ci-dessus, est contenu dans $CV(X, H)$. De plus, même si on suppose que $CV_0(X, H)$ est contenu dans $CV(X, H)$, rien ne permet de dire qu'il est fermé ou complet une fois que $CV(X, H)$ l'est. Pour ces raisons, nous adopterons dorénavant les définitions suivantes :

Définition 1.1.6. *Une famille de Nachbin généralisée sur X est une collection V de fonctions sur X à valeurs dans $\mathcal{L}^+(H)$ telle que :*

i. *tout $v \in V$ est fortement semi-continu supérieurement,*

ii. $\forall x \in X,\ \bigcap_{v \in V} \ker v(x) = \{0\}$,

iii. *V est filtrante croissante dans le sens suivant :*

$$\forall v_1, v_2 \in V,\ \forall \lambda > 0,\ \exists v \in V : \lambda^2 v_1^* v_1 \leq v^* v \text{ et } \lambda^2 v_2^* v_2 \leq v^* v.$$

Les espaces pondérés généralisés seront alors définis par

$$CV(X, H) := \{f \in C(X, H) :\ x \mapsto \|v(x)f(x)\| \text{ est borné sur } X,\ v \in V\}.$$

$$CV_0(X, H) := \{f \in CV(X, H) :\ vf \text{ est nulle à l'infini sur } X,\ v \in V\}.$$

Ici, vf est nulle à l'infini signfie que la fonction $x \mapsto \|v(x)f(x)\|$ tend vers 0 à l'infini. La condition ii. dans la définition 1.1.6 assure que les espaces $CV(X, H)$ et $CV_0(X, H)$ sont séparés, alors que la condition iii. assure que la famille des semi-normes $(\| \ \|_v)_{v \in V}$ est filtrante croissante.

Si l'application $x \mapsto \|v(x)f(x)\|$ est s.c.s. sur X pour tous $v \in V$ et $f \in C(X, H)$, alors $CV_0(X, H)$ est constitué de toutes les fonctions continues f de X dans H telles que $x \mapsto \|v(x)f(x)\|$ est nulle à l'infini pour tout $v \in V$. La condition s.c.s. oblige de telle fonction à appartenir à $CV(X,H)$. i.e.,

$$CV_0(X,H) := \{f \in C(X,H) : \ vf \text{ est nulle à l'infini sur } X, \ v \in V\}.$$

Désormais, on dit qu'un sous-espace E de $C(X,H)$ satisfait la propriété (SV) si :

$$\forall f \in E, \ v \in V, \quad x \mapsto \|v(x)f(x)\| \quad \text{est s.c.s. sur } X. \tag{SV}$$

Si $V \subset C(X, \mathcal{L}_\sigma(H))$. C'est-à-dire, tout $v \in V$ est σ-continue sur X, alors tout sous-espace de $C(X,H)$ satisfait (SV).

Notons que, pour tout $y \in H$ non nul, la collection V_y constituée des applications $x \mapsto \delta_y(v(x))$ forme un système de poids scalaires (s.c.s.) sur X. On peut alors considérer les espaces

$$CV_y(X) := \{f \in C(X) : \|f\|_{y,v} = \sup\{|f(x)|\|v(x)y\|, x \in X\} < +\infty, \ v \in V\}$$

et

$$CV_{y,0}(X) := \{f \in C(X) : x \mapsto |f(x)|\|v(x)y\|, \text{ est nulle à l'infini sur } X, \ v \in V\}.$$

On définit également les espaces suivants

$$C\|V\|(X) := \{f \in C(X) : \|f\|_{\|v\|} = \sup\{|f(x)|\|v(x)\|, x \in X\} < +\infty, \ v \in V\}$$

et

$$C\|V\|_0(X) := \{f \in C(X) : x \mapsto |f(x)|\|v(x)\| \text{ est nulle à l'infini sur } X, \ v \in V\}.$$

On munit les deux premiers espaces de la topologie $\tau_{y,V}$ engendrée par les semi-normes $\| \ \|_{y,v}$, $v \in V$ et les deux derniers espaces de la topologie $\tau_{\|V\|}$ engendrée par les semi-normes $\| \ \|_{\|v\|}$, $v \in V$. La condition ii. de la définition 1.1.6 assure que V_y est nécessairement essentiel et donc l'espace localement convexe $CV_y(X)$ est nécessairement séparé. Cependant, on peut facilement montrer que ces espaces sont des $C_b(X)$-modules et que, de ce fait, si U est un voisinage ouvert de $x \in \mathrm{coz}(CV_y(X))$ (resp. $x \in \mathrm{coz}(CV_{y,0}(X))$), il existe une fonction $f \in CV_y(X)$ (resp. $f \in CV_{y,0}(X)$)

telle que $f(x) = 1$, $0 \leq f \leq 1$ et $\mathrm{supp}(f) \subset U$.

Notons que, pour tout $y \in H$ non nul, on a $\mathrm{coz}(CV_y(X)) \subset \mathrm{coz}(CV(X,H))$ et $\mathrm{coz}(CV_{y,0}(X)) \subset \mathrm{coz}(CV_0(X,H))$. De plus, pour tous $f \in CV_y(X)$ et $g \in C\|V\|(X)$, les fonctions $f \otimes y : X \longrightarrow H$, $x \mapsto f(x)y$ et $g \otimes y : X \longrightarrow H$, $x \mapsto g(x)y$ appartiennent à $CV(X,H)$. C'est-à-dire $CV_y(X) \otimes \{y\} \subset CV(X,H)$ pour tout $y \in H$ et $C\|V\|(X) \otimes H \subset CV(X,H)$. De même, $CV_{y,0}(X) \otimes \{y\} \subset CV_0(X,H)$ pour tout $y \in H$ et $C\|V\|_0(X) \otimes H \subset CV_0(X,H)$.

On pose, à partir de maintenant pour simplifier les notations, $X_0 := \mathrm{coz}(CV_0(X,H))$, $X_1 := \mathrm{coz}(CV(X,H))$, et pour tout $y \in H$ non nul, $X_y := \mathrm{coz}(CV_y(X))$, et $X_{y,0} := \mathrm{coz}(CV_{y,0}(X))$.

Remarque 1.1.7. Si on omet la condition ii. dans Définition 1.1.6, les espaces à poids ne sont pas nécessairement séparés comme nous l'avons vu dans l'exemple 1.1.5. Dans une telle situation, si l'on considère les quatre assertions suivantes, alors 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4, où

1. $\forall x \in X_1$ (resp. $\forall x \in X_0$), $\exists v \in V$ tel que $v(x)$ est borné inférieurement,
2. $\forall x \in X_1$ (resp. $\forall x \in X_0$) : $\bigcap\limits_{v \in V} \ker v(x) = \{0\}$,
3. $CV(X,H)$ (resp. $CV_0(X,H)$) est de Hausdorff,
4. $\mathrm{coz}(V) \cap X_1$ (resp. $\mathrm{coz}(V) \cap X_0$) est dense dans X_1 (resp. dans X_0).

En effet, l'assertion 2. dérive évidemment de 1. Pour l'implication 2. $\Rightarrow$ 3., soit $f \in CV(X,H)$ non nulle. Alors il existe $x \in X_1$ tel que $f(x) \neq 0$. D'après 2., il existe $v \in V$ tel que $v(x)f(x) \neq 0$. Par conséquent $\|f\|_v \neq 0$ et $CV(X,H)$ est alors de Hausdorff. Maintenant pour 3. $\Rightarrow$ 4., supposons que $\mathrm{coz}(V) \cap X_1$ n'est pas dense dans X_1. Alors il existe $x \in X_1$ et un voisinage ouvert U de x dans X tels que $U \cap (\mathrm{coz}(V) \cap X_1) = \emptyset$. En particulier $x \notin \mathrm{coz}(V)$ et donc $v(x) = 0$ pour tout $v \in V$. Mais, il existe $f \in CV(X,H)$ avec $f(x) \neq 0$. Puisque X est un espace complètement régulier, il existe $g \in C_b(X)$ telle que $g(x) = 1$, $0 \leq g \leq 1$ et $g \equiv 0$ sur $X \setminus U$. Ainsi $gf \in CV(X,H)$ et $\mathrm{coz}(gf) \subset U$. Mais $\mathrm{coz}(gf) \subset X_1$, donc on a $\mathrm{coz}(gf) \cap \mathrm{coz}(V) = \emptyset$. Alors pour tout $v \in V$, $\mathrm{coz}(gf) \cap \mathrm{coz}(v) = \emptyset$ i.e., $\forall\ v \in V, \forall\ t \in X : v(t)g(t)f(t) = 0$, c'est-à-dire $\|gf\|_v = 0$ pour tout $v \in V$. Ce qui contredit la séparation de $CV(X,H)$.

Maintenant, nous présentons quelques exemples de familles de Nachbin généralisées et d'espaces à poids associés.

Exemple 1.1.8. Soient W une famille de Nachbin classique (i.e., à valeurs réelles positives) sur X, T un opérateur positif non nul sur un espace de Hilbert H et $V := \{wT : w \in W\}$, avec $wT(x) = w(x)T$. Si T est injectif, alors V est une famille de Nachbin généralisée sur X et les inclusions $CW(X,H) \subset CV(X,H)$ et $CW_0(X,H) \subset CV_0(X,H)$ sont des injections continues. En particulier, si $T = I$, on obtient les espaces habituels $CV(X,H) = CW(X,H)$ et $CV_0(X,H) = CW_0(X,H)$.

Exemple 1.1.9. Soient $R : X \to \mathcal{L}(H)$ une application continue, par rapport à la topologie de la norme de $\mathcal{L}(H)$ et W une famille de Nachbin classique sur X. Si $R(x)$ est injectif pour tout $x \in X$, alors $V = \{v_w := wR; w \in W\}$ est une famille de Nachbin généralisée sur X. De plus, en posant $N_w := \{x \in X : w(x) \neq 0\}$, si $R(N_w)$ est une partie bornée de $\mathcal{L}(H)$ pour tout $w \in W$, alors $CW(X,H)$ et $CW_0(X,H)$ sont des sous-ensembles de $CV(X,H)$ et $CV_0(X,H)$ respectivement et les injections sont continues.
Enfin, si la collection $\{R(x), x \in N_w\}$ est équi-bornée inférieurement, les inclusions deviennent des égalités algébriquement et topologiquement.

Exemple 1.1.10. A toute partie compacte K de X, on associe un opérateur non nul $T_K \in \mathcal{L}^+(H)$ de sorte que si K et S sont des parties compactes de X telles que $K \subset S$, on a $T_K^2 \leq T_S^2$. Maintenant, pour un tel compact K, on pose $v_K := \chi_K T_K$, où χ_K désigne la fonction de Minkowski de K. Puisque K est compact, l'application v_K est fortement semi-continue supérieurement. Si en plus on suppose que pour tout $x \in X$, l'ensemble $\bigcap\{\ker T_K, K \subset X \text{ compact contenant } x\}$ est réduit à $\{0\}$, alors

$$\mathcal{K} := \{\lambda v_K; K \subset X \text{ compact et } \lambda > 0\}$$

est une famille de Nachbin généralisée sur X telle que, algébriquement, on a :

$$C\mathcal{K}(X,H) = C\mathcal{K}_0(X,H) = C(X,H).$$

De plus, si on munit $C(X,H)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, l'inclusion $C(X,H) \subset C\mathcal{K}(X,H)$ est continue.
L'égalité est topologique si T_K est supposé borné inférieurement pour tout compact $K \subset X$.

Exemple 1.1.11. Pour tout $T \in \mathcal{L}^+(H)$, on pose :

$$\begin{array}{rccl} v_T : & X & \longrightarrow & \mathcal{L}^+(H) \\ & x & \longmapsto & v_T(x) = T, \end{array}$$

et $\mathcal{Z} = \{\lambda v_T : T \in \mathcal{L}^+(H),\ \lambda > 0\}$. On a :

i. Pour tout $T \in \mathcal{L}^+(H)$, l'application v_T est continue et donc fortement semi-continue supérieurement.

ii. Puisque $I \in \mathcal{L}^+(H)$, on a pour tout $x \in X$, $\bigcap\limits_{T \in \mathcal{L}^+(H)} \ker T = \{0\}$,

iii. Si T et S sont deux éléments de $\mathcal{L}^+(H)$, alors, à partir des inégalités

$$T^2,\ S^2 \leq (I+T)^2 + (I+S)^2,$$

on déduit que $\mathcal{Z}$ est une famille de Nachbin généralisée sur X et on a évidemment $C\mathcal{Z}(X,H) = C_b(X,H)$ et $C\mathcal{Z}_0(X,H) = C_0(X,H)$ algébriquement et topologiquement, où $C_b(X,H)$ et $C_0(X,H)$ sont munis de la topologie de la norme uniforme.

On se demande, pour une famille de Nachbin généralisée V, s'il existe une famille de Nachbin classique U sur X telle que l'égalité $CV(X,H) = CU(X,H)$ est algébrique et topologique. En réalité, l'exemple suivant prouve que ce n'est pas le cas en général. Il fournit une famille de Nachbin généralisée V telle qu'il n'existe pas de famille de Nachbin classique U telle que $CV(X,H)$ est un sous-espace topologique de $CU(X,H)$.

Exemple 1.1.12. Soient $X = \mathbb{N}^*$ et H l'algèbre $\mathbb{C}^2$, équipée de la norme $\|(z_1,z_2)\| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$. On définit l'application v de X dans $\mathcal{L}(H) := \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, ensemble des matrices carrées d'ordre 2, par :

$$v(n) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n^2 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme X est discret, v est continu. De plus, $v(n)$ est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $V := \{\lambda v : \lambda > 0\}$ est une famille de Nachbin généralisée sur X. Nous affirmons qu'il n'y a pas de famille de Nachbin U avec des poids scalaires sur X telle que $(CV(X,H), \tau_V)$ est un sous-espace topologique de $(CU(X,H), \tau_U)$. En effet, supposons qu'une telle famille de Nachbin U existe sur X. Donc il existe $u \in U$ et une constante $d > 0$ tels que :

$$\|f\|_v \leq d\|f\|_u, f \in CV(X,H).$$

Mais aussi, pour tout $u^{'} \in U$, il existe $c^{'} = c(u^{'}) > 0$ tel que :

$$c^{'}\|f\|_{u^{'}} \leq \|f\|_v \leq d\|f\|_u, f \in CV(X,H).$$

Il s'en suit que la topologie induite τ_U sur $CV(X,H)$ est définie par la seule semi-norme $\|\ \|_u$. Désignons par $\delta_{m,n}$ la fonction delta de Kronecker et par $c := c(u)$ la valeur qui satisfait :

$$c\|f\|_u \leq \|f\|_v \leq d\|f\|_u, f \in CV(X,H), \tag{1.1}$$

Considérons maintenant, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $g_m : n \mapsto (\frac{1}{m}\delta_{n,m}, 0)$ et $h_m : n \mapsto (0, \frac{1}{m^2}\delta_{n,m})$. Puisque g_m et h_m appartiennent à $CV(X,H)$ et puisque on a :

$$\begin{aligned}
\|g_m\|_u &= \sup\{u(n)\frac{1}{m}\delta_{n,m}, n \in \mathbb{N}^*\} &= \frac{u(m)}{m},\\
\|g_m\|_v &= \sup\{\frac{1}{m}\|v(n)(\delta_{n,m}, 0)\|, n \in \mathbb{N}^*\} &= \frac{m}{m} = 1.\\
\|h_m\|_u &= \sup\{u(n)\frac{1}{m^2}\delta_{n,m}, n \in \mathbb{N}^*\} &= \frac{u(m)}{m^2},\\
\|h_m\|_v &= \sup\{\frac{1}{m^2}\|v(n)(0, \delta_{n,m})\|, n \in \mathbb{N}^*\} &= \frac{m^2}{m^2} = 1.
\end{aligned}$$

En appliquant une fois (1.1) à g_m, nous obtenons $cu(m) \leq m \leq du(m)$, et une autre fois à h_m, nous obtenons $cu(m) \leq m^2 \leq du(m)$. Par conséquent, $m^2 \leq \frac{d}{c}m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, ce qui est impossible car m est arbitraire.

1.2 Complétude de $CV(X,H)$ et $CV_0(X,H)$

Dans cette section, nous étudions, pour une famille de Nachbin généralisée V sur X, la complétude de $CV(X,H)$ et $CV_0(X,H)$. Pour ceci, considérons, pour tous $v \in V$ et $r > 0$, l'ensemble de niveau défini par :

$$N(v,r) := \{x \in X : \|v(x)y\| \geq r\|y\|,\ \forall y \in H\}.$$

Comme dans le cas des poids scalaires, $CV_0(X,H)$ est fermé dans $CV(X,H)$ comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.2.1. *Pour toute famille de Nachbin généralisée V sur X, $CV_0(X,H)$ est un sous-espace fermé de $CV(X,H)$.*

Démonstration. Soit $f \in CV(X,H)$. Si f appartient à $\overline{CV_0(X,H)}^{CV(X,H)}$, l'adhérence de $CV_0(X,H)$ dans $CV(X,H)$, alors, pour tous $v \in V$ et $\varepsilon > 0$, il existe $g \in CV_0(X,H)$ telle que $\|v(x)(g(x) - f(x))\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in X$. Mais

$$\|v(x)f(x)\| \leq \|v(x)(g(x) - f(x))\| + \|v(x)g(x)\|. \tag{1.2}$$

Puisque $g \in CV_0(X,H)$, il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $\|v(x)g(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \notin K$. Donc pour un tel x on a $\|v(x)f(x)\| < \varepsilon$ d'après (1.2). Par conséquent $f \in CV_0(X,H)$ et ce dernier est fermé dans $CV(X,H)$. $\square$

Afin d'étudier la complétude de $CV(X,H)$ et $CV_0(X,H)$, rappelons la notion de $V_{\mathbb{R}}$-espace.

Définition 1.2.2. *On dit que X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace, si c'est un $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$-espace pour*

$$\mathcal{F} := \{N(v,r),\ v \in V,\ r > 0\}.$$

On obtient alors :

Théorème 1.2.3. *L'espace $CV(X,H)$ (resp. $CV_0(X,H)$) est complet si X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace et, pour tout $x \in X_1$ (resp. $x \in X_0$), il existe $v \in V$ tel que $v(x)$ est borné inférieurement sur H.*

Démonstration. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite de Cauchy dans $CV(X,H)$ (resp. dans $CV_0(X,H)$). Pour tous $v \in V$ et $\varepsilon > 0$, il existe $i_0 \in I$ tel que pour tous $i \geq i_0$ et $j \geq i_0$, on a $\|f_i - f_j\|_v < \varepsilon$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in N(v,r)} r\|f_i(x) - f_j(x)\| &\leq \sup_{x\in N(v,r)} \|v(x)(f_i(x) - f_j(x))\| \\
&\leq \|f_i - f_j\|_v \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément de Cauchy sur $N(v,r)$. Puisque H est complet, $(f_i)_{i\in I}$ converge uniformément vers une fonction $f_{v,r}$ continue sur $N(v,r)$. Comme, par hypothèse, les $N(v,r)$ recouvrent X_1 (resp. X_0), l'application f définie par $f(x) = f_{v,r}(x)$ si $x \in N(v,r)$, est bien définie sur l'ensemble X_1 (resp. X_0) tout entier. On étend f sur X en prenant $f = 0$ sur $X \setminus X_1$ (resp. $X \setminus X_0$). Puisque X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace, f est continue sur X. Pour compléter la preuve, puisque $CV_0(X,H)$ est fermé dans $CV(X,H)$, il suffit de montrer que $f \in CV(X,H)$ et que $(f_i)_{i\in I}$ converge vers f dans $CV(X,H)$. Or pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i_0 \in I$ tel que $\|f_i - f_j\|_v < \varepsilon$ pour tous $i \geq i_0$ et $j \geq i_0$. On a donc $\|v(x)(f_i(x) - f_j(x))\| < \varepsilon$ pour tout $x \in X$. Passant à la limite en j, puisque $v(x)$ est continu, on obtient $\|v(x)(f_i(x) - f(x))\| \leq \varepsilon$, pour tous $x \in X$ et $i_0 \leq i$. Ceci montre à la fois, en utilisant l'inégalité triangulaire $\|f\|_v \leq \|f - f_i\|_v + \|f_i\|_v$, que $f \in CV(X,H)$ et que $(f_i)_{i\in I}$ converge vers f dans $CV(X,H)$. D'où la complétude de $CV(X,H)$ (resp. $CV_0(X,H)$). □

Comme corollaire du Théorème 1.2.3, on a :

Corollaire 1.2.4. *Si X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace et, pour tout $x \in X$, il existe $v \in V$ tel que $v(x)$ est borné inférieurement sur H, alors $CV(X,H)$ (et aussi $CV_0(X,H)$) est complet.*

Dans l'exemple 1.1.8, si T est borné inférieurement donc injectif, alors $CV(X,H)$ et $CV_0(X,H)$ sont complets une fois que X est un $W_{\mathbb{R}}$-espace, car ils coïncident avec $CW(X,H)$ et $CW_0(X,H)$ respectivement.

Dans l'exemple 1.1.9, on suppose que l'ensemble $\{R(x), x \in N(w,r)\}$ est équi-borné inférieurement pour tout $w \in W$ et tout $r > 0$. Si, de plus X est un $W_{\mathbb{R}}$-espace, donc un $V_{\mathbb{R}}$-espace, alors $CV_0(X,H)$ et $CV(X,H)$ sont complets. En effet, soient $w \in W$ et $r > 0$ des éléments donnés. Par hypothèse, il existe $s > 0$ tel que :

$$s\|y\| \leq \|R(x)y\|, \ \forall x \in N(w,r), \ \forall y \in H.$$

Donc

$$rs\|y\| \leq \|w(x)R(x)y\| = \|v_w(x)y\|, \ \forall x \in N(w,r), \ \forall y \in H.$$

Ce qui donne $N(w,r) \subset N(v_w, rs)$ par suite X est $V_{\mathbb{R}}$-espace. À ce point, remarquons que l'équi-bornétude inférieure des ensembles $\{R(x), x \in N(w,r)\}$ est beaucoup

plus faible que celle des ensembles $\{R(x), x \in N_w\}$ qui donne l'égalité $CV(X,H) = CW(X,H)$.
Dans l'exemple 1.1.10, $C\mathcal{K}(X,H)$ est complet lorsque X est un $k_{\mathbb{R}}$-espace et, pour tout $x \in X$, il existe au moins un compact K contenant x tel que T_K est borné inférieurement. En fait cette dernière condition donne que T_S est borné inférieurement pour tout compact S contenant un tel K.
Dans l'exemple 1.1.11, $C\mathcal{Z}(X,H)$ et $C\mathcal{Z}_0(X,H)$ sont évidemment complets car ils coïncident algébriquement et topologiquement respectivement avec $C_b(X,H)$ et $C_0(X,H)$ munis de la norme uniforme.

1.3 Opérateurs de multiplication continus sur $CV(X,H)$

Dans cette section, nous étudions la continuité d'un opérateur de multiplication induit par une application continue ψ sur X à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$.

Théorème 1.3.1. *Soit $\psi : X \to \mathcal{L}_\sigma(H)$ une application continue. Alors M_ψ applique continûment $CV(X,H)$ dans lui-même si $(V\psi)^*(V\psi) \leq V^*V$ sur X_1. La réciproque est vraie si, de plus, $X_1 = X_y$ pour tout $y \in H$ non nul.*

Démonstration. Tout d'abord, on note que la condition $(V\psi)^*(V\psi) \leq V^*V$ sur X_1 n'est rien d'autre que

$$\forall v \in V, \exists u \in V : \forall x \in X_1, \forall y \in H : \|v(x)\psi(x)y\| \leq \|u(x)y\|. \tag{1.3}$$

Soit $f \in CV(X,H)$. Puisque l'application $(T,h) \mapsto T(h)$ est continue de $\mathcal{L}_\sigma(H) \times H$ dans H et puisque $\psi : X \to \mathcal{L}_\sigma(H)$ et $f : X \to H$ sont continues, $M_\psi(f)$ est une application continue. De plus, d'après (1.3) on a :

$$\forall v \in V, \exists u \in V : \forall x \in X_1, : \|v(x)\psi(x)f(x)\| \leq \|u(x)f(x)\|.$$

Cela mène à

$$\|M_\psi(f)\|_v \leq \|f\|_u, \ \forall f \in CV(X,H),$$

ce qui entraîne d'une part que $M_\psi(f) \in CV(X,H)$ pour tout $f \in CV(X,H)$ et d'autre part, puisqu'il est linéaire, que M_ψ est continu.

Réciproquement, on suppose que l'opérateur linéaire M_ψ est continu sur $CV(X,H)$. Alors

$$\forall v \in V, \exists u \in V \ : \|M_\psi(f)\|_v \leq \|f\|_u, \forall f \in CV(X,H). \tag{1.4}$$

On montre que

$$\|v(x)\psi(x)y\| \leq \|u(x)y\|, \forall x \in X_1, \forall y \in H.$$

On prend $x_0 \in X_1$, $y_0 \in H$ et $\varepsilon := \|u(x_0)y_0\|$. Puisque u est fortement semi-continue supérieurement, l'ensemble $G_n := \{x \in X : \|u(x)y_0\| < \varepsilon + \frac{1}{n}\}$ est un voisinage ouvert de x_0, n étant un entier positif non nul. Or $X_1 = X_{y_0}$. Donc il existe $f_n \in CV_{y_0}(X)$ telle que $0 \leq f_n \leq 1$, $f_n(x_0) = 1$ et $f_n = 0$ sur $X \setminus G_n$. Donc $g_n := f_n \otimes y_0$ appartient à $CV(X,H)$ et on a :

$$\|g_n(x)\| \leq \|y_0\|, \forall x \in X, \ \|g_n(x_0)\| = \|y_0\| \text{ et } \ g_n = 0 \text{ sur } X \setminus G_n.$$

Si on pose $h_n := \dfrac{1}{\varepsilon + \frac{1}{n}} g_n$, alors $\|h_n\|_u < 1$ et, d'après (1.4), $\|M_\psi(h_n)\|_v < 1$, i.e., $\|v(x)\psi(x)h_n(x)\| \leq 1$ pour tout $x \in X$. En particulier

$$\|v(x_0)\psi(x_0)y_0\| \leq \|u(x_0)y_0\| + \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n à l'infini, on obtient $\|v(x_0)\psi(x_0)y_0\| \leq \|u(x_0)y_0\|$. Ce qui achève la preuve puisque x_0 est arbitraire. □

Avec une preuve similaire, on peut montrer :

Théorème 1.3.2. *Soit $\psi : X \to \mathcal{L}_\sigma(H)$ une application continue. Alors M_ψ applique continûment $CV_0(X,H)$ dans lui-même si $(V\psi)^*(V\psi) \leq V^*V$ sur X_0. La réciproque est vraie si, de plus, $X_0 = X_{y,0}$ pour tout $y \in H$ non nul.*

Maintenant, comme corollaire des deux théorèmes précédents, on obtient :

Corollaire 1.3.3. *On suppose que $\psi : X \to \mathcal{L}_\sigma(H)$ est une application continue et que $X_0 = X_1 = X_y = X_{y,0}$ pour tout $y \in H$ non nul. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. *M_ψ applique continûment $CV(X,H)$ dans lui-même.*
ii. *M_ψ applique continûment $CV_0(X,H)$ dans lui-même.*
iii. *$(V\psi)^*(V\psi) \leq V^*V$ sur X_0.*

Sous les conditions du Corollaire 1.3.3, si l'opérateur M_ψ applique continûment $CV(X,H)$ dans lui-même, alors il laisse invariant $CV_0(X,H)$.

1.4 Opérateurs de multiplication inversibles

Dans cette section, nous caractérisons les opérateurs de multiplication inversibles M_ψ. Pour cela, nous étendons d'abord au cas des poids à valeurs dans $\mathcal{L}^+(H)$, un résultat d'approximation dû à J. B. Prolla ([75], Lemme 3.0) dans le cas des poids à valeurs scalaires. Nous caractérisons également les opérateurs M_ψ qui sont bornés inférieurement ou sont à image dense.

Théorème 1.4.1. *On suppose que $CV_0(X,H)$ vérifie la propriété (SV) et que W est à la fois un sous-espace vectoriel de $CV_0(X,H)$ et un $C_b(X)$-module. Pour tout $f \in CV_0(X,H)$ donné, si $f(x) \in \overline{W(x)}^H$ pour tout $x \in X_0$, alors $f \in \overline{W}^{CV_0(X,H)}$. La réciproque est vraie si, pour tout $x \in X_0$, il existe $v \in V$ tel que $v(x) \in \mathcal{L}_{bi}(H)$.*

Démonstration. Soit $f \in CV_0(X,H)$ telle que $f(x) \in \overline{W(x)}^H$ pour tout $x \in X_0$ et soient $\varepsilon > 0$ et $v \in V$. Alors

$$\forall x \in X_0,\ \exists g_x \in W :\ \|f(x) - g_x(x)\| < \frac{\varepsilon}{\|v(x)\| + 1}.$$

Donc

$$\|v(x)(f(x) - g_x(x))\| \leq \|v(x)\|\ \|f(x) - g_x(x)\| < \varepsilon.$$

Pour $x \in X_0$, on considère l'ensemble $K_x := \{t \in X : \|v(t)(f(t) - g_x(t))\| \geq \varepsilon\}$. C'est un compact contenu dans X_0 ne contenant pas x puisque $CV_0(X,H)$ vérifie la propriété (SV) et $f - g_x \in CV_0(X,H)$. D'où $\bigcap\limits_{x\in X_0} K_x = \emptyset$. Par compacité, il existe $x_1, \ldots, x_n \in X_0$ tels que $\bigcap\limits_{1\leq i\leq n} K_{x_i} = \emptyset$. Si U_i désigne le complémentaire de K_{x_i} dans le compactifié Stone-Čĕck βX de X, avec $i \in \{1, \ldots, n\}$, on considère une partition de l'unité $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ subordonnée au recouvrement ouvert $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ de βX. C'est-à-dire φ_i est continue, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\varphi_i \equiv 0$ sur $\beta X \setminus U_i$ et $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$. Soient h_i la restriction de φ_i à X et $g := \sum_{i=1}^n h_i g_{x_i}$. Alors g appartient à W et vérifie $\|v(x)(f(x) - g(x))\| \leq \varepsilon$

pour tout $x \in X$. En effet, si $x \notin X_0$, c'est évident. Maintenant, si $x \in X_0$, alors l'ensemble $J_x := \{i : 1 \le i \le n \text{ et } x \notin K_{x_i}\}$ n'est pas vide et

$$\begin{aligned}
\|v(x)(f(x) - g(x))\| &= \|v(x)(f(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i(x) g_{x_i}(x))\| \\
&= \|v(x)(\sum_{i=1}^{n} h_i(x)(f(x) - g_{x_i}(x)))\| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} h_i(x) \|v(x)(f(x) - g_{x_i}(x))\| \\
&= \sum_{i \in J_x} h_i(x) \|v(x)(f(x) - g_{x_i}(x))\| \\
&\le \sum_{i \in J_x} h_i(x) \varepsilon \\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Puisque x est arbitraire, $\|f - g\|_v \le \varepsilon$, d'où $f \in \overline{W}^{CV_0(X,H)}$.
Pour la réciproque, il suffit de montrer que l'évaluation $\delta_x : CV_0(X, H) \to H$, $f \mapsto f(x)$ est continue pour tout $x \in X_0$. On fixe alors un tel x. Par hypothèse, il existe un certain $v \in V$ et un $r > 0$ tels que $r\|h\| \le \|v(x)h\|$ pour tout $h \in H$. En particulier,

$$\|\delta_x(f)\| := \|f(x)\| \le \frac{1}{r}\|v(x)f(x)\| \le \frac{1}{r}\|f\|_v, \ \forall f \in CV_0(X, H).$$

Ce qui achéve la preuve. □

Puisque $C\|V\|_0(X)$ est un $C_b(X)$-module, le produit tensoriel $C\|V\|_0(X) \otimes H$ est aussi un $C_b(X)$-module. Donc si X_0 coïncide avec le cozéro de $C\|V\|_0(X)$, alors pour tous $x \in X_0$ et $y \in H$, il existe $f \in C\|V\|_0(X) \otimes H$ telle que $f(x) = y$. Par conséquent, on obtient comme corollaire du Théorème 1.4.1 le résultat suivant

Corollaire 1.4.2. *Si coz$(C\|V\|_0(X)) = X_0$, alors $C\|V\|_0(X) \otimes H$ est dense dans $CV_0(X, H)$.*

A partir de maintenant, on supposera que, pour tout $y \in H$ non nul, $X_{y,0} = X_0$.

Théorème 1.4.3. *On suppose que $CV_0(X,H)$ satisfait la propriété (SV) et que $\psi : X \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ est une application continue telle que l'opérateur de multiplication M_ψ applique $CV_0(X,H)$ dans lui-même.*
Si $\psi(x)$ est à image dense pour tout $x \in X_0$, alors M_ψ est à image dense.
Si, en outre, $V(x) \cap \mathcal{L}_{bi}(H) \neq \varnothing$ pour tout $x \in X_0$, la réciproque est aussi vraie.

Démonstration. Puisque $X_0 = X_{y,0}$ pour tout $y \in H$ non nul, on a :

$$\forall x \in X_0, \forall y \in H \setminus \{0\}, \exists g \in CV_0(X,H) \ : \ g(x) = y. \tag{1.5}$$

Si on pose $W := M_\psi(CV_0(X,H))$ et on suppose que $\psi(x)$ est à image dense pour tout $x \in X_0$. Soit $f \in CV_0(X,H)$. Selon (1.5), on a :

$$\{\psi(x)y, y \in H\} \subset \{\psi(x)g(x), g \in CV_0(X,H)\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} H = \overline{\{\psi(x)y, y \in H\}}^H & \subset \overline{\{\psi(x)g(x), g \in CV_0(X,H)\}}^H \\ &= \overline{W(x)}^H. \end{aligned}$$

D'où $\overline{W(x)}^H = H$ et, d'après le Théorème 1.4.1, on a $f \in \overline{W}^{CV_0(X,H)}$. Par conséquent M_ψ est à image dense.
Maintenant, on suppose que $V(x) \cap \mathcal{L}_{bi}(H) \neq \varnothing$ pour tout $x \in X_0$ et que M_ψ est à image dense. D'après Théorème 1.4.1, $f(x) \in \overline{W(x)}^H$ pour tous $x \in X_0$ et $f \in CV_0(X,H)$. Soient $x \in X_0$ et $y \in H$. D'après (1.5), il existe $g \in CV_0(X,H)$ telle que $g(x) = y$, donc on a $y = g(x) \in \overline{W(x)}^H$. Ce qui donne $H \subset \overline{W(x)}^H$, puisque $y \in H$ est arbitraire. Donc

$$\begin{aligned} \{\psi(x)y, y \in H\} &= \{\psi(x)g(x), g \in CV_0(X,H)\} \\ \overline{\{\psi(x)y, y \in H\}}^H &= \overline{\{\psi(x)g(x), g \in CV_0(X,H)\}}^H = H. \end{aligned}$$

Par suite $\psi(x)$ est à image dense pour tout $x \in X_0$. □

Théorème 1.4.4. *Soit $\psi : X \to \mathcal{L}(H)$ une application continue telle que M_ψ applique $CV_0(X,H)$ dans lui-même. Si $V^*V \leq (V\psi)^*(V\psi)$ sur X_0, alors M_ψ est borné inférieurement. La réciproque est vraie si $C(X,H)$ satisfait la propriété (SV).*

Démonstration. On suppose que $V^*V \leq (V\psi)^*(V\psi)$ sur X_0, i.e., pour tout $v \in V$, il existe $u \in V$ tel que :

$$\|v(x)y\| \leq \|u(x)\psi(x)y\|, \forall x \in X_0, \forall y \in H.$$

Donc, on obtient

$$\|f\|_v \leq \|M_\psi(f)\|_u, \forall f \in CV_0(X, H).$$

Ce qui signifie que M_ψ est borné inférieurement.

Réciproquement, on suppose que $C(X, H)$ satisfait la propriété (SV) et que M_ψ est borné inférieurement. Alors :

$$\forall v \in V, \exists u \in V : \ \|f\|_v \leq \|M_\psi(f)\|_u, \forall f \in CV_0(X, H).$$

Montrons que

$$\|v(x)y\| \leq 2\|u(x)\psi(x)y\|, \forall x \in X_0, \forall y \in H.$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $x_0 \in X_0$ et $y_0 \in H$ tels que

$$\|v(x_0)y_0\| > 2\|u(x_0)\psi(x_0)y_0\|.$$

Prenons l'ensemble $G := \{x \in X : 2\|u(x)\psi(x)y_0\| < \|v(x_0)y_0\|\}$. Par (SV), G est un ouvert de X contenant x_0. Puisque $X_0 = X_{y_0,0}$, il existe $f \in CV_{y_0,0}(X)$ telle que : $f(x_0) = 1$, $0 \leq f \leq 1$ et $f = 0$ sur $X \setminus G$. Posons $g := \dfrac{2}{\|v(x_0)y_0\|} f \otimes y_0$. Alors $g \in CV_0(X, H)$ et

$$\begin{aligned}
\|u(x)\psi(x)g(x)\| &= \frac{2}{\|v(x_0)y_0\|}\|u(x)\psi(x)f(x)y_0\| \\
&= \frac{2}{\|v(x_0)y_0\|}|f(x)|\|u(x)\psi(x)y_0\|
\end{aligned}$$

D'où $\|u(x)\psi(x)g(x)\| = 0$ si $x \notin G$ et $\|u(x)\psi(x)g(x)\| < 1$ sinon. Ainsi $\|M_\psi(g)\|_u \leq 1$, et par suite $\|g\|_v \leq 1$, c'est-à-dire $\|v(x)g(x)\| \leq 1$, pour tout $x \in X$. En particulier, $\|v(x_0)g(x_0)\| \leq 1$. Mais

$$\|v(x_0)g(x_0\| = \frac{2}{\|v(x_0)y_0\|}\|v(x_0)f(x_0)y_0\| = 2,$$

ce qui est absurde. Ainsi

$$\forall x \in X_0, \forall y \in H : \|v(x)y\| \leq 2\|u(x)\psi(x)y\|$$

ou $V^*V \leq (V\psi)^*(V\psi)$ sur X_0. □

On rappelle que $\mathcal{L}(CV_0(X,H))$ désigne l'algèbre des applications linéaires continues de l'espace localement convexe $CV_0(X,H)$ dans lui-même.

Théorème 1.4.5. *On suppose que $CV_0(X,H)$ est complet et que $\psi : X \to \mathcal{L}(H)$ est une application continue telle que M_ψ appartient à $\mathcal{L}(CV_0(X,H))$.*
On considère les assertions suivantes :

1. *$\psi(x)$ est à image dense pour tout $x \in X_0$ et $V^*V \leq (V\psi)^*(V\psi)$ sur X_0.*

2. *M_ψ est inversible dans $\mathcal{L}(CV_0(X,H))$.*

Si $CV_0(X,H)$ satisfait la propriété (SV), alors ***1.$\Rightarrow$ 2.***
Si $C(X,H)$ satisfait la propriété (SV) et $V(x) \cap \mathcal{L}_{bi}(H) \neq \varnothing$ pour tout $x \in X_0$, alors ***2.$\Rightarrow$ 1.***

Démonstration. On suppose que $\psi(x)$ est à image dense pour tout $x \in X_0$ et que $V^*V \leq (V\psi)^*(V\psi)$ sur X_0. D'après Théorème 1.4.3, M_ψ est à image dense.

Maintenant, soit $g \in CV_0(X,H)$. Alors il existe $(f_i)_{i\in I} \subset CV_0(X,H)$ telle que $\lim_i M_\psi(f_i) = g$. Puisque $V^*V \leq (V\psi)^*(V\psi)$ sur X_0, on a

$$\forall v \in V, \exists u \in V : \|v(x)y\| \leq \|u(x)\psi(x)y\|, \forall x \in X_0, \forall y \in H.$$

Donc

$$\|v(x)(f_i(x) - f_j(x))\| \leq \|u(x)\psi(x)(f_i(x) - f_j(x))\|, \forall x \in X_0.$$

En fait, cette inégalité reste vraie pour tout $x \in X$. Donc

$$\|f_i - f_j\|_v \leq \|M_\psi(f_i) - M_\psi(f_j)\|_u. \tag{1.6}$$

La suite $(M_\psi(f_i))_{i\in I}$ est de Cauchy donc, d'après (1.6), la suite$(f_i)_{i\in I}$ est aussi de Cauchy. Puisque l'espace $CV_0(X,H)$ est complet, $(f_i)_{i\in I}$ converge vers un certain $f \in CV_0(X,H)$. Par conséquent, la continuité de M_ψ entraîne que $g = \lim_i M_\psi(f_i) = M_\psi(f)$ et la surjectivité de M_ψ s'en suit. Maintenant, puisque $V^*V \leq (V\psi)^*(V\psi)$ sur X_0, Théorème 1.4.4 assure que M_ψ est borné inférieurement et donc injectif. Il reste à montrer que $(M_\psi)^{-1}$ est continu. La bornétude inférieure de M_ψ donne :

$$\forall v \in V,\ \exists u \in V : \|f\|_v \leq \|M_\psi(f)\|_u,\ \forall f \in CV_0(X,H).$$

En particulier,

$$\forall v \in V,\ \exists u \in V :\ \|(M_\psi)^{-1}(g)\|_v \leq \|M_\psi(M_\psi^{-1}(g))\|_u,\ \forall g \in CV_0(X,H).$$

C'est-à-dire

$$\forall v \in V,\ \exists u \in V :\ \|(M_\psi)^{-1}(g)\|_v \leq \|g\|_u,\ \forall g \in CV_0(X,H).$$

Ainsi $(M_\psi)^{-1}$ est continu et par conséquent M_ψ est inversible dans $\mathcal{L}(CV_0(X,H)$.
Réciproquement, supposons que $V(x) \cap \mathcal{L}_{bi}(H) \neq \varnothing$ pour tout $x \in X_0$. Si M_ψ est inversible alors M_ψ est à image dense et d'après Théorème 1.4.3 $\psi(x)$ est à image dense pour tout $x \in X_0$. Comme $(M_\psi)^{-1}$ est continu :

$$\forall v \in V, \exists u \in V : \|(M_\psi)^{-1}(g)\|_v \leq \|g\|_u, \forall g \in CV_0(X,H).$$

En particulier, pour $f \in CV_0(X,H)$ on a

$$\|f\|_v = \|(M_\psi)^{-1}(M_\psi(f))\|_v \leq \|M_\psi(f)\|_u.$$

Ce qui signifie que M_ψ est borné inférieurement. Par conséquent, d'après Théorème 1.4.4, on a $V^*V \leq (V\psi)^*(V\psi)$ sur X_0. □

Comme corollaire de ce qui précède, on a :

Corollaire 1.4.6. *On suppose que $C(X,H)$ satisfait la propriété (SV), que $CV_0(X,H)$ est complet et que $\psi : X \to \mathcal{L}(H)$ est une application continue telle que M_ψ applique $CV_0(X,H)$ dans lui-même et $V(x) \cap \mathcal{L}_{bi}(H) \neq \emptyset$, pour tout $x \in X_0$. Alors les asserssions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\psi(x)$ est à image dense pour tout $x \in X_0$ et $(V\psi)^*(V\psi)$ et V^*V sont équivalentes sur X_0,*

2. *M_ψ est inversible dans $\mathcal{L}(CV_0(X,H))$.*

Ce Chapitre fait l'objet de l'article [48]

Chapitre 2

Opérateurs de composition pondérée sur les espaces de Nachbin généralisés, cas normé.

L'ordre sur les opérateurs d'un espace de Hilbert, utilisé dans iii. de la définition d'un système à poids dans [79] ne permet pas de dire que la famille des semi-normes est filtrante croissante ni que les boules unités associées forment une base de voisinages de 0. L'assertion iii. de la définition d'une famille de Nachbin dans [48], traduit exactement la condition sur les poids pour que les boules unités associées forment une base de voisinages de 0. Il s'avère que cette condition se traduit en terme de la norme de H, sans recours au produit scalaire ni aux opérateurs positifs.

Dans ce chapitre, nous considérons les familles de Nachbin généralisés sur X, constituées de poids prenant valeurs dans l'algèbre $\mathcal{L}(A)$ de tous les opérateurs linéaires continus sur un espace vectoriel normé arbitraire $(A, \| \|)$. Cela donne un cadre général intéressant pour l'étude des espaces pondérés. Nous donnons spécialement des conditions sous lesquelles de tels espaces sont complets. Cependant, notre objectif principal dans ce chapitre est d'étudier les opérateurs de composition pondérée ψC_φ d'un sous-espace E d'un espace pondéré $CV(X, A)$ dans un espace pondéré $CU(Y, A)$ ou $CU_0(Y, A)$, où Y est un espace complètement régulier de Hausdorff et V et U sont des familles de Nachbin généralisées respectivement sur X et Y.

Le fait de considérer des sous-espaces de $CV(X,A)$ permet d'élargir le champ d'applications de nos résultats, d'autant plus que ceux-ci sont donnés en termes du cozéro de E.
Nous produisons dans la première section quelques préliminaires, notations et premières propriétés des espaces pondérés généralisés $CV(X,A)$. Nous examinons également la complétude des espaces pondérés $CV(X,A)$ et $CV_0(X,A)$ et aussi le théorème d'approximation de Prolla dans le nouveau contexte. La deuxième section est consacrée à la caractérisation des opérateurs de composition pondérée qui appliquent continûment certains sous-espaces E de $CV(X,A)$ dans $CU(Y,A)$ ou dans $CU_0(Y,A)$. La dernière section s'intéresse aux conditions sous lesquelles ψC_φ est borné ou localement équicontinu.

2.1 Espaces de Nachbin généralisés, cas normé

Tout au long de ce chapitre, nous supposerons, sauf indication contraire, que $(A, \| \|)$ est un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$ et nous noterons la boule fermée de A par B_A. L'algèbre de tous les opérateurs bornés de A dans lui-même sera notée $\mathcal{L}(A)$. On notera $\mathcal{L}_{bi}(A)$ l'ensemble de tous les opérateurs bornés inférieurement $T \in \mathcal{L}(A)$, alors que $\mathcal{L}_\beta(A)$ (resp. $\mathcal{L}_\sigma(A)$) représentera l'espace vectoriel topologique obtenu en équipant $\mathcal{L}(A)$ de la topologie forte β (resp. uniforme σ).
Au chapitre 2, on a introduit la notion de familles de Nachbin généralisées dans le cadre des espaces de Hilbert. Ces familles se composent de fonctions à valeurs opérateurs positifs avec des conditions supplémentaires. Ici, on introduit les familles de Nachbin généralisées dans le cadre d'espaces vectoriels normés arbitraires comme suit :

Définition 2.1.1. *Une famille de Nachbin généralisée sur X est une collection V de fonctions sur X à valeurs dans $\mathcal{L}(A)$ telles que :*

i. *Tout $v \in V$ est fortement semi-continue supérieurement,*

ii. $\forall x \in X$, $\bigcap\{\ker v(x), v \in V\} = \{0\}$,

iii. *V est filtrante croissante dans le sens suivant : pour tous $v_1,\ v_2 \in V$ et tout $\lambda > 0$, il existe $v \in V$ tel que : $\lambda\|v_i(x)a\| \leq \|v(x)a\|$, pour tout $x \in X$, tout $a \in A$, et tout $i = 1, 2$.*

Sans perte de généralité, on suppose que pour tous $v \in V$ et $\lambda > 0$, on a aussi

$\lambda v \in V$. Pour tous $v \in V$ et $f \in C(X, A)$, on écrit vf pour désigner l'application $x \mapsto v(x)(f(x))$. Donc $v(x)f(x)$ signifie $v(x)(f(x))$. A une famille de Nachbin généralisée V sur X, on associe les espaces pondérés généralisés :

$$CV(X, A) := \{f \in C(X, A) : \ (vf)(X) \text{ est borné dans } A, \forall v \in V\}$$

et

$$CV_0(X, A) := \{f \in CV(X, A) : vf \ \text{ est nulle à l'infini sur } X, \ \forall v \in V\}.$$

Les deux espaces $CV(X, A)$ et $CV_0(X, A)$, ainsi que tous leurs sous-espaces, seront munis de la topologie localement convexe séparé τ_V définie par les semi normes :

$$\|f\|_v = \sup\{\|v(x)f(x)\|, x \in X\}, \ v \in V.$$

Désormais, U désignera une famille de Nachbin généralisée sur l'espace complètement régulier séparé Y et E sera un sous-espace vectoriel de $CV(X, A)$ et $\mathrm{coz}(E)$ son ensemble cozéro.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'opérateur de composition pondérée ψC_φ, associé à $\psi : X \to \mathcal{L}(A)$ et $\varphi : Y \to X$, défini de E dans $\mathcal{F}(Y, A)$ par $\psi C_\varphi(f)(y) = \psi_y(f(\varphi(y)))$.

On considère également les ensembles :

$$Y_{E,\varphi} := \{y \in Y : \varphi(y) \in \mathrm{coz}(E)\} = \mathrm{coz}(C_\varphi(E)),$$

$$Y_{E,\varphi,\psi} := \mathrm{coz}(\psi C_\varphi(E)).$$

L'ensemble $Y_{E,\varphi}$ (resp. $Y_{E,\varphi,\psi}$) est un sous-ensemble ouvert de Y une fois que $C_\varphi(E) \subset C(Y, A)$ (resp. $\psi C_\varphi(E) \subset C(Y, A)$), c'est-à-dire que l'image de tout élément de E par C_φ (resp. par ψC_φ) est continue. Pour plus de détails voir [69].

Si $f \in C(X)$ et $a \in A$ sont donnés, on désigne par $f \otimes a$ la fonction définie sur X par $f \otimes a(x) := f(x)a$, $x \in X$.

Dans [69] la propriété "$\forall a \in A, \ \forall f \in E, \ \|f\| \otimes a \in E$", dite (M), entre en force dans les résultats obtenus là bas. Ici, nous allons considérer les propriétés suivantes, dont les deux premières sont plus faibles que (M), sur un espace $E \subset CV(X, A)$:

$$\forall a \in A, \ \forall x \in \mathrm{coz}(E), \ \exists f \in E : \ f(x) = a, \tag{P}$$

$$\forall a \in A,\ \forall x \in \operatorname{coz}(E),\ \exists g \in C(X) :\ g(x) \neq 0 \text{ et } g \otimes a \in E, \tag{P'}$$

Il est facile de voir que (M) implique (P') et que (P') implique (P). De plus, si X est localement compact tel que $\mathcal{K}(X) \otimes A \subset E$, alors E satisfait (P'). C'est en particulier le cas où $E = CV(X,A)$ ou $E = CV_0(X,A)$ à condition que ce dernier satisfasse (SV). Notons à ce point que, si $V \subset C(X, \mathcal{L}_\sigma(A))$, alors toute partie E de $CV(X,A)$ satisfait (SV).
Les exemples donnés au chapitre précédent peuvent être étendus au cas d'un espace normé A au lieu d'un espace de Hilbert H. Ils constituent ainsi des exemples d'espaces à poids dans ce nouveau contexte. La condition (P') est satisfaite dans de nombreuses situations. C'est le cas par exemple lorsque $E = CW(X,A)$ et T est supposé borné inférieurement dans l'exemple 1.1.8. C'est aussi le cas si $E = \mathcal{K}(X,A) \cap CW(X,A)$ dans l'exemple 1.1.9 et si $E = C(X,A)$ dans l'exemple 1.1.10, où A désigne dans les différents exemples ci-dessus un espace normé. Quoi qu'il en soit, si tout $x \in \operatorname{coz}(E)$ possède un voisinage Ω_x tel que $v(\Omega_x)$ est β-borné pour tout $v \in V$, alors $CV(X,A)$ satisfait (P'). En particulier, ceci est vrai si $v(X)$ est β-borné pour tout $v \in V$.
Si E vérifie (P), l'égalité $Y_{E,\varphi,\psi} = Y_{E,\varphi} \cap \operatorname{coz}(\psi)$ est vérifiée. De plus, si E est un $C_b(X)$-module et vérifie (P'), alors pour tout $x \in \operatorname{coz}(E)$ et tout $a \in A$, on peut trouver f dans $C(X)$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 1$, et $f \otimes a \in E$. En effet, soient $x \in \operatorname{coz}(E)$ et $a \in A$. Alors il existe $g \in C(X)$ telle que $g(x) = 1$ et $g \otimes a \in E$. L'ensemble $U = \{x \in X : g(x) > \frac{1}{2}\}$ est ouvert contenant x. Comme X est complètement régulier, il existe $h \in C_b(X)$ telle que $0 \leq h \leq 1$, $h(x) = 1$ et $h(X \setminus U) = 0$.
On définit la fonction k de X dans $\mathbb{R}$ par $k(t) = \min(\frac{1}{|g(t)|}, h(t))$, si $|g(t)| \neq 0$ et $k(t) = 0$, si $|g(t)| = 0$. Alors k est continue sur X et bornée puisque h l'est. Comme E est un $C_b(X)$-module vérifiant (P'), $f \otimes a \in E$ où $f := kg$ avec $f(x) = 1$, $0 \leq f \leq 1$ et $f(X \setminus U) = 0$.

A la fin de cette section, nous présentons des résultats similaires à ceux obtenus dans le chapitre prédédent, dont les preuves sont résumées, concernant la complétude de $CV(X,A)$ et $CV_0(X,A)$ et Théorème d'approximation de Prolla dans un cadre plus large. Pour cela, on considère encore, pour tous $v \in V$ et $r > 0$, l'ensemble de niveau

$$N(v,r) := \{x \in X : \|v(x)a\| \geq r\|a\|, \ \forall a \in A\}.$$

Notons, pour la simplicité, $X_0 := \mathrm{coz}(CV_0(X,A))$ et $X_1 := \mathrm{coz}(CV(X,A))$.

Proposition 2.1.2. *Pour toute famille de Nachbin généralisée V sur X, $CV_0(X,A)$ est un sous-espace fermé de $CV(X,A)$.*

Puisque $N(v,r) = N(\frac{1}{r}v, 1)$ et $\frac{1}{r}v \in V$, X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace, si et seulement si, il est $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$-espace, où $\mathcal{N} := \{N(v,1), \ v \in V\}$.

Théorème 2.1.3. *L'espace $CV(X,A)$ (resp. $CV_0(X,A)$) est complet si les conditions suivantes sont remplies :*

1. *$\forall x \in X_1$ (resp. $\forall x \in X_0$), $\exists v \in V : v(x) \in \mathcal{L}_{bi}(A)$,*

2. *A est complet,*

3. *X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace.*

La preuve est similaire à celle du Théorème 1.2.3. En fait, si $(f_i)_{i\in I}$ est une suite généralisée de Cauchy dans $CV(X,A)$, d'après ***1.***, $(\delta_x(f_i))_{i\in I}$ est de Cauchy dans A, $x \in X_1$. D'après ***2.***, $(\delta_x(f_i))_{i\in I}$ converge vers un certain $f(x)$. On étend f sur X par 0. D'après ***3.***, f est continue sur X. On montre à la fois que $f \in CV(X,A)$ et $(f_i)_{i\in I}$ converge vers f dans $CV(X,A)$.
Le théorème d'approximation de Prolla énoncé au chapitre précédent a pour but de caractériser les sous-espace vectoriels denses de $CV_0(X,A)$. Ici, nous étendons ce théorème afin de caractériser les sous-espaces vectoriels denses dans un sous-espace vectoriel E de $CV_0(X,A)$, lorsque A est un espace normé.

Théorème 2.1.4. *On suppose que $E \subset CV_0(X,A)$ vérifie la propriété (SV) et que W est à la fois un sous-espace vectoriel de E et un $C_b(X)$-module. Pour tout $f \in E$ donné, si $f(x) \in \overline{W(x)}^A$ pour tout $x \in coz(E)$, alors $f \in \overline{W}^E$. La réciproque est vraie si, pour tout $x \in coz(E)$, il existe $v \in V$ tel que $v(x) \in \mathcal{L}_{bi}(A)$.*

Démonstration. Soit $f \in E$ telle que $f(x) \in \overline{W(x)}^A$, pour tout $x \in \mathrm{coz}(E)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $v \in V$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{coz}(E)$, il existe $g_x \in W$ tel que $\|f(x) - g_x(x)\| < \frac{\varepsilon}{\|v(x)\|+1}$. Donc $\|v(x)(f(x) - g_x(x))\| < \varepsilon$.

L'ensemble $K_x := \{t \in X : \|v(t)(f(t) - g_x(t))\| \geq \varepsilon\}$ est un compact contenu dans $\mathrm{coz}(E)$ ne contenant pas x. Donc $\bigcap\limits_{x \in \mathrm{coz}(E)} K_x = \emptyset$. Par compacité, il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{coz}(E)$ tels que $\bigcap\limits_{1 \leq i \leq n} K_{x_i} = \emptyset$. En posant $U_i := \beta X \setminus K_{x_i}$, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et en considérant une partition de l'unité $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ subordonnée au recouvrement ouvert $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ de βX, soient h_i la restriction de φ_i à X et $g := \sum_{i=1}^{n} h_i g_{x_i}$. Alors, on montre de façon similaire que dans le théorème 1.4.1, que g appartient à W et vérifie $\|f - g\|_v \leq \varepsilon$, d'où $f \in \overline{W}^E$.
Pour la réciproque, il suffit de remarquer que, pour tout $x \in \mathrm{coz}(E)$, l'évaluation $\delta_x : E \to A$, $f \mapsto f(x)$ est continue. □

Dans tout le reste, sauf indication expresse du contraire, on supposera que E est un $C_b(X)$-module qui satisfait les conditions raisonnables (P) et (SV). Notre but ici est d'étudier la relation entre les poids et certaines propriétés topologiques de l'opérateur ψC_φ. On suppose alors que ψC_φ applique E dans $C(X, A)$. C'est-à-dire que l'image de tout élément de E par ψC_φ est continue.

2.2 Opérateurs de composition pondérée continus

Le théorème suivant caractérise les opérateurs continus ψC_φ d'un sous-espace E de $CV(X, A)$ dans $CU(Y, A)$.

Théorème 2.2.1. *L'opérateur ψC_φ applique continûment E dans $CU(Y, A)$ si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée.*

$$\forall\ u \in U,\ \exists\ v \in V : \|u(y)\psi_y(a)\| \leq \|v(\varphi(y))a\|,\ \forall a \in A,\ y \in Y_{E,\varphi}. \tag{2.1}$$

Démonstration. Nécessité : Puisque $\psi C_\varphi : E \to CU(Y, A)$ est continu, pour tout $u \in U$, il existe $v \in V$ tel que :

$$\|\psi C_\varphi(f)\|_u \leq \|f\|_v,\ \forall f \in E.$$

Donc pour tout $y \in Y$, on a :

$$\|u(y)\psi_y(f(\varphi(y))\| \leq \sup\{\|v(x)f(x)\|,\ x \in X\}. \tag{2.2}$$

Soient y_0 dans $Y_{E,\varphi}$ et a dans A des éléments donnés. Alors $x_0 := \varphi(y_0)$ appartient à coz(E). D'où, par (P), il existe $f \in E$ telle que $f(x_0) = a$. Pour un entier naturel arbitraire $n > 0$, on pose

$$U_n := \{x \in X : \|v(x)f(x)\| < \|v(x_0)a\| + \frac{1}{n}\}.$$

En raison de (SV), l'ensemble U_n est un voisinage ouvert de x_0. Considérons $g_n \in C_b(X)$ dont le support est contenu dans U_n telle que $g_n(x_0) = 1$ et $0 \leq g_n \leq 1$. Alors $h_n := g_n f$ appartient à E et d'après (2.2),

$$\begin{aligned} \|u(y_0)\psi_{y_0}(a)\| &\leq \sup\{\|v(x)h_n(x)\|,\ x \in X\} \\ &\leq \|v(x_0)a\| + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\|u(y_0)\psi_{y_0}(a)\| \leq \|v(\varphi(y_0))a\|$
Suffisance : Soient $f \in E$ et $u \in U$. D'après (2.1) il existe $v \in V$ tel que

$$\|u(y)\psi_y(f(\varphi(y)))\| \leq \|v(\varphi(y))f(\varphi(y))\|, \forall\ y \in Y.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|\psi C_\varphi(f)\|_u &= \sup\{\|u(y)\psi_y(f(\varphi(y)))\| : y \in Y\} \\ &\leq \sup\{\|v(\varphi(y))f(\varphi(y))\| : y \in Y\} \\ &\leq \sup\{\|v(x)f(x)\| : x \in \varphi(Y)\} \\ &\leq \|f\|_v < \infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre à la fois que $\psi C_\varphi(f) \in CU(Y, A)$ et que ψC_φ est continu. $\square$

Dans le cas des opérateurs de multiplication (c'est-à-dire $X = Y$ et φ est l'identité de X), on obtient :

Corollaire 2.2.2. *M_ψ applique continûment E dans $CU(X, A)$ si et seulement si, on a :*

$$\forall\ u \in U,\ \exists\ v \in V : \|u(x)\psi_x(a)\| \leq \|v(x)a\|,\ a \in A,\ x \in coz(E). \tag{2.3}$$

De même, dans le cas des opérateurs de composition (c'est-à-dire ψ est l'application constante avec valeur l'identité de A), on obtient :

Corollaire 2.2.3. *C_φ applique continûment E dans $CU(Y, A)$ si et seulement si, on a :*

$$\forall\ u \in U,\ \exists\ v \in V : \|u(y)a\| \leq \|v(\varphi(y))a\|,\ a \in A,\ y \in Y_{E,\varphi}. \tag{2.4}$$

Ensuite, on étudie la continuité de ψC_φ de E dans $CU_0(Y, A)$. Cette condition est bien sûr beaucoup plus contraignante. Pour cela, on définit comme dans [69]

$$\mathrm{Cst}(E) := \{K \subset X :\ \forall a \in A,\ \exists f \in E \text{ avec } f \equiv a \text{ sur } K\}.$$

On voit facilement que tout $K \in \mathrm{Cst}(E)$ est contenu dans $\mathrm{coz}(E)$ et que tout $v \in V$ est β-borné sur un tel K. Par conséquent, s'il arrive que A soit tonnelé, a fortiori si c'est un Banach, alors $\{v(x), x \in K\}$ sera aussi σ-borné.

Maintenant, pour $v \in V$ et $f \in E$, on pose $N(v, f) := \{x \in X : \|v(x)f(x)\| \geq 1\}$ et on dit que E satisfait la propriété (C) si $N(v, f)$ appartient à $\mathrm{Cst}(E)$ pour tous $v \in V$ et $f \in E$. Le lemme suivant, qui étend le lemme 6 de [69], donne des situations où E satisfait (C).

Lemme 2.2.4. *On suppose que E vérifie (P') (par exemple X est localement compact et $\mathcal{K}(X) \otimes A \subset E$). Si $K \subset coz(E)$ est un ensemble compact et $C \subset X$ est un ensemble fermé tels que $K \cap C = \emptyset$, alors, pour tout $a \in A$, il existe $f \in E$ tel que $f \equiv a$ sur K et $f \equiv 0$ sur C.*

Démonstration. Pour tout $f \in C(X)$, on note $\Gamma(f)$ l'application qui associe à $x \in X$, $|f(x)|$ si $|f(x)| \leq 1$ et $\dfrac{1}{|f(x)|}$ sinon. C'est une fonction continue bornée sur X. Maintenant, pour tous $a \in A$ et $x \in K$, dû à (P'), il existe $g \in C(X)$ telle que $g(x) = 1$ et $g \otimes a \in E$. Si $\gamma := |g|^2\Gamma(g^2)$, alors $\gamma \otimes a = (\overline{g}\Gamma(g^2))g \otimes a$ appartient à E. On choisit alors $g_x \in C_b(X)$ avec $g_x(x) = 1$, $0 \leq g_x \leq 1$ et $g_x = 0$ sur C et on pose $h_x = g_x\gamma$. Par compacité, il existe $x_1, \ldots, x_m$ dans K tels que $K \subset \cup_{i=1}^m \{t \in X : h_{x_i}(t) > \frac{1}{2}\}$. Il s'ensuit que la fonction $h := \sum_{i=1}^n h_{x_i}$ satisfait $h(t) > \frac{1}{2}$ pour tout $t \in K$. Ainsi, la fonction $k = (2\Gamma(2h))h \otimes a$ appartient à E et vérifie la condition souhaitée. □

Théorème 2.2.5. *On suppose que E satisfait (C). Si ψC_φ applique continûment E dans $CU_0(Y, A)$, alors (2.1) est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : \|u(y)\psi_y(a)\| \geq 1\}$*

est relativement compact, pour tout $K \in Cst(E)$, tout $u \in U$, et tout $a \in A \setminus \{0\}$. La réciproque est vraie si pour tous $v \in V$ et $f \in E$, $f(N(v,f))$ est précompact et $v(N(v,f))$ est équicontinu sur A.

Démonstration. On suppose que ψC_φ applique continûment E dans $CU_0(Y,A)$. Donc (2.1) provient du Théorème 2.2.1. Maintenant, on fixe $K \in$ Cst(E), $u \in U$, et $a \in A$, avec $a \neq 0$. On choisit $f \in E$ telle que $f \equiv a$ sur K. Comme $\psi C_\varphi(f)$ appartient à $CU_0(Y,A)$, l'ensemble

$$S := \{y \in Y : \|u(y)\psi_y(f(\varphi(y)))\| \geq 1\}$$

est relativement compact et contient $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : \|u(y)\psi_y(a)\| \geq 1\}$. Par conséquent, ce dernier ensemble est relativement compact.

Pour la réciproque, d'après Théorème 2.2.1, la condition (2.1) implique que ψC_φ applique continûment E dans $CU(Y,A)$. Il reste à prouver l'inclusion $\psi C_\varphi(E) \subset CU_0(Y,A)$. Pour cela, il suffit de montrer que, pour tous $f \in E$ et $u \in U$, l'ensemble S défini ci-dessus est relativement compact. Soient $f \in E$ et $u \in U$. D'après (2.1), il existe $v \in V$ tel que :

$$\|u(y)\psi_y(a)\| \leq \|v(\varphi(y))a\|, \ \forall a \in A, y \in Y_{E,\varphi}.$$

Ce qui donne $\varphi(S) \subset N(v,f)$, ou $S \subset \varphi^{-1}(N(v,f))$. Puisque $K := N(v,f)$ appartient à Cst(E), il suffit de montrer que S est contenu dans une réunion finie d'ensembles de la forme $C_i := \{y \in Y : \|2u(y)\psi_y(a_i)\| \geq 1\}$, pour un certain $a_i \in A \setminus \{0\}$. Mais, puisque l'ensemble $v(K)$ est équicontinu, on a :

$$\exists M > 0 : \|v(x)a\| \leq M\|a\|, \ a \in A, \ x \in K. \tag{2.5}$$

De plus, comme $f(K)$ est précompact, $f(\varphi(S))$ est aussi précompact dans A. Par conséquent, il existe $y_1, \ldots, y_n \in S$ tels que :

$$f(\varphi(S)) \subset \bigcup \{f(\varphi(y_i)) + \frac{1}{2M}B_A, i = 1, \ldots, n\}.$$

Ainsi, pour $y \in S$, il existe un certain $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\|f(\varphi(y)) - f(\varphi(y_i))\| \leq \dfrac{1}{2M}$. D'après (2.5), on a :

$$\|v(\varphi(y))(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y_i)))\| \leq \frac{1}{2}.$$

En utilisant (2.1), on obtient $\|u(y)\psi_y(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y_i)))\| \leq \frac{1}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} 1 &\leq \|u(y)\psi_y(f(\varphi(y)))\| \\ &\leq \|u(y)\psi_y(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y_i)))\| + \|u(y)\psi_y(f(\varphi(y_i)))\| \\ &\leq \frac{1}{2} + \|u(y)\psi_y(f(\varphi(y_i)))\|. \end{aligned}$$

D'où $\|2u(y)\psi_y(f(\varphi(y_i)))\| \geq 1$. Par conséquent

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{y \in Y : \|2u(y)\psi_y(a_i)\| \geq 1\},$$

avec $a_i = f(\varphi(y_i))(\neq 0)$. Puisque $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : \|2u(y)\psi_y(a_i)\| \geq 1\}$ est relativement compact pour tout i, il en ait de même pour S. $\square$

Dans le cas des opérateurs de multiplication, on obtient :

Corollaire 2.2.6. *Si E satisfait (C) et, pour tous $v \in V$ et $f \in E$, $f(N(v, f))$ est précompact et $v(N(v, f))$ est équicontinu sur A, alors M_ψ applique continûment E dans $CU_0(X, A)$ si et seulement si,* (2.3) *est vérifiée et $K \cap \{x \in X : \|u(x)\psi_x(a)\| \geq 1\}$ est relativemrnt compact, pour tout $K \in Cst(E)$, tout $u \in U$ et tout $a \in A \setminus \{0\}$.*

De façon similaire, dans le cas des opérateurs de composition, on obtient :

Corollaire 2.2.7. *Avec les mêmes conditions que dans Corollaire 2.2.6, C_φ applique continûment E dans $CU_0(Y, A)$ si et seulement si,* (2.4) *est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : \|u(y)a\| \geq 1\}$ est relativement compact, pour tout $K \in Cst(E)$, tout $u \in U$ et tout $a \in A \setminus \{0\}$.*

Si E vérifie (P') et que les poids $v \in V$ sont tous σ-continus, la réciproque du Théorème 2.2.5 est vérifiée si, au lieu de considérer tous les membres K de $\mathrm{Cst}(E)$, on prend les sous-ensembles compacts K de $\mathrm{coz}(E)$. À ce stade, on signale que, si E contient les fonctions constantes, alors X est lui-même dans $\mathrm{Cst}(E)$ mais non nécessairement compact.

Théorème 2.2.8. *On suppose que $V \subset C(X, \mathcal{L}_\sigma(A))$ et que $E \subset CV_0(X, A)$ satisfait (P'). Alors ψC_φ applique continûment E dans $CU_0(Y, A)$ si et seulement si,* (2.1) *est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : \|u(y)\psi_y(a)\| \geq 1\}$ est relativement compact, pour tout compact $K \subset coz(E)$, tout $u \in U$ et tout $a \in A \setminus \{0\}$.*

Dans le cas des opérateurs de multiplication, on obtient :

Corollaire 2.2.9. *Avec les mêmes conditions que dans Théorème 2.2.8, M_ψ applique continûment E dans $CU_0(X, A)$ si et seulement si,* (2.3) *est vérifiée.*

De même, dans le cas des opérateurs de composition, on obtient :

Corollaire 2.2.10. *Avec les mêmes conditions que dans Théorème 2.2.8, C_φ applique continûment E dans $CU_0(Y, A)$ si et seulement si,* (2.4) *est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : \|u(y)a\| \geq 1\}$ est relativement compact, pour tout compact $K \subset coz(E)$, tout $u \in U$ et tout $a \in A \setminus \{0\}$.*

On remarque que si E vérifie (C) et si A est tonnelé, alors l'image $v(N(v, f))$ est automatiquement équicontinue, car elle est β-bornée. De plus, si $E \subset CV_0(X, A)$, alors $f(N(v, f))$ est aussi automatiquement précompacte, puisque $N(v, f)$ est compact, dû à (SV), et f est continue. On obtient ainsi comme corollaire, le résultat suivant :

Théorème 2.2.11. *On suppose que A est tonnelé et que $E \subset CV_0(X, A)$ satisfait (C). Alors ψC_φ applique continûment E dans $CU_0(Y, A)$ si et seulement si,* (2.1) *est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : \|u(y)\psi_y(a)\| \geq 1\}$ est relativement compact, pour tout $K \in Cst(E)$, tout $u \in U$ et tout $a \in A \setminus \{0\}$.*

2.3 Opérateurs de composition pondérée bornés

On rappelle qu'une application linéaire θ d'un espace localement convexe vers un autre est dite bornée si l'image d'un certain voisinage de 0 par θ est bornée. i.e., en termes de semi-normes, si $\theta : (A, \mathbb{P}) \to (B, \mathbb{P}')$ est une application linéaire, alors elle est bornée si, et seulement si, il existe un $P \in \mathbb{P}$ tel que pour tout $P' \in \mathbb{P}'$, il existe $\lambda > 0$ vérifiant $P'(\theta(a)) \leq \lambda P(a)$ pour tout $a \in A$. Ici $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ sont des familles de semi-normes définissant les topologies des espaces localement convexes A et B respectivement.

Si θ est à valeurs dans un espace de fonctions continues sur un espace topologique Z et $Z_0 \subset Z$, elle est dite localement Z_0-équicontinue, si l'image de tout ensemble borné, par cette application, est équicontinue sur Z_0.

On obtient la caractérisation suivante des opérateurs de composition pondérée bornés :

Théorème 2.3.1. *L'opérateur ψC_φ de E dans $CU(Y,A)$ est borné si et seulement si, il existe un $v \in V$ tel que :*

$$\forall\ u \in U,\ \exists\ \lambda > 0 : \|u(y)\psi_y(a)\| \leq \lambda\|v(\varphi(y))a\|, \forall\ a \in A,\ y \in Y_{E,\varphi}. \tag{2.6}$$

Démonstration. Nécessité : puisque ψC_φ est borné de E dans $CU(Y,A)$, il existe $v \in V$ tel que, pour tout $u \in U$, il existe $\lambda > 0$ de sorte que

$$\|\psi C_\varphi(f)\|_u \leq \lambda\|f\|_v,\ f \in E.$$

Donc pour tout $y \in Y$, on a

$$\|u(y)\psi_y(f(\varphi(y))\| \leq \lambda \sup\{\|v(x)f(x)\|,\ x \in X\}. \tag{2.7}$$

On se donne $y_0 \in Y_{E,\varphi}$ et $a \in A$ et on pose $x_0 := \varphi(y_0)$. Comme dans la preuve du Théorème 2.2.1, on considère une fonction $f \in E$ telle que $f(x_0) = a$. Pour tout entier $n > 0$, on définit l'ensemble

$$U_n := \{x \in X : \|v(x)f(x)\| < \|v(x_0)a\| + \frac{1}{n}\}.$$

En raison de (SV), U_n est un voisinage ouvert de x_0. On choisit $g_n \in C_b(X)$ qui s'annule en dehors de U_n telle que $g_n(x_0) = 1$ et $0 \leq g_n \leq 1$. Donc $h_n := g_n f$ appartient à E et d'après (2.7),

$$\begin{aligned}\|u(y_0)\psi_{y_0}(a)\| &\leq \lambda \sup\{\|v(x)h_n(x)\|,\ x \in X\}\\ &\leq \lambda(\|v(x_0)a\| + \frac{1}{n}).\end{aligned}$$

En faisant tendre n à l'infini, on obtient :

$$\|u(y_0)\psi_{y_0}(a)\| \leq \lambda\|v(\varphi(y_0))a\|.$$

Suffisance : On suppose qu'il existe $v \in V$ de sorte que (2.6) soit valide. Soit $u \in U$. Pour $f \in E$ et $y \in Y$, on a :

$$\|u(y)\psi_y(f(\varphi(y)))\| \leq \lambda \|v(\varphi(y))f(\varphi(y))\|,\ y \in Y.$$

En particulier, pour $f \in B_v$, on obtient

$$\|u(y)\psi_y(f(\varphi(y)))\| \leq \lambda,\ y \in Y.$$

Ce qui donne

$$\|\psi C_\varphi(f)\|_u \leq \lambda,\ f \in B_v.$$

$\square$

Dans le cas des opérateurs de multiplication, on obtient :

Corollaire 2.3.2. *L'opérateur de multiplication M_ψ de E dans $CU(X, A)$ est borné si, et seulement si, il existe $v \in V$ tel que :*

$$\forall\ u \in U;\ \exists\ \lambda > 0 : \|u(x)\psi_x(a)\| \leq \lambda \|v(x)a\|, \forall\ a \in A,\ x \in coz(E). \tag{2.8}$$

De même, dans le cas des opérateurs de composition, on obtient :

Corollaire 2.3.3. *L'opérateur de composition C_φ de E dans $CU(Y, A)$ est borné si, et seulement si, il existe $v \in V$ tel que :*

$$\forall\ u \in U;\ \exists\ \lambda > 0 : \|u(y)a\| \leq \lambda \|v(\varphi(y))a\|, \forall\ a \in A,\ y \in Y_{E,\varphi}. \tag{2.9}$$

En combinant convenablement Théorème 2.2.8 et Théorème 2.3.1, on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.3.4. *On suppose que $V \subset C(X, \mathcal{L}_\sigma(A))$ et que $E \subset CV_0(X, A)$ vérifie (P'). Alors ψC_φ est borné de E dans $CU_0(Y, A)$ si, et seulement si,* (2.6) *est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : \|u(y)\psi_y(a)\| \geq 1\}$ est relativement compact, pour tous compact $K \subset coz(E)$, $u \in U$ et $a \in A \setminus \{0\}$.*

Dans le cas des opérateurs de multiplication, on obtient :

Corollaire 2.3.5. *Avec les mêmes conditions que dans Théorème 2.3.4, l'opérateur* M_ψ *est borné de* E *dans* $CU_0(X, A)$ *si et seulement si,* (2.8) *est vérifiée.*

De même, dans le cas des opérateurs de composition, on obtient :

Corollaire 2.3.6. *Avec les mêmes conditions que dans Théorème 2.3.4, l'opérateur* C_φ *est borné de* E *dans* $CU_0(Y, A)$ *si et seulement si,* (2.9) *est vérifiée et* $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : \|u(y)a\| \geq 1\}$ *est relativement compact, pour tout compact* $K \subset coz(E)$*, tout* $u \in U$ *et tout* $a \in A \setminus \{0\}$*.*

On examine maintenant l'équicontinuité locale de ψC_φ. Notons que, dans le cas des poids à valeurs scalaires, tout $x \in X$ admet un voisinage Ω tel que tout $v \in V$ est borné sur Ω. On donne la définition suivante :

Définition 2.3.7. *On dit que* X *est localement* V*-*σ*-borné si :*

$$\forall\ x \in X, \exists\ \Omega_x \in \mathcal{V}_x :\ \{v(t),\ t \in \Omega_x\} \text{ est borné dans } \mathcal{L}_\sigma(A),\ \forall v \in V.$$

Théorème 2.3.8. *On suppose que* X *est localement* V*-*σ*-borné et que, pour tout* $x \in X$*,* $V(x) \cap \mathcal{L}_{bi}(A) \neq \emptyset$*. Alors* ψC_φ *est localement* $Y_{E,\varphi,\psi}$*-équicontinu, si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. φ *est localement constante sur* $Y_{E,\varphi,\psi}$*.*

2. ψ *est continu de* $Y_{E,\varphi,\psi}$ *dans* $\mathcal{L}_\sigma(A)$*.*

Démonstration. Nécessité : On suppose que l'opérateur ψC_φ est localement $Y_{E,\varphi,\psi}$-équicontinu et que, pour un certain $y_0 \in Y_{E,\varphi,\psi}$, φ n'est constante sur aucun voisinage de y_0. Si on choisit $f_0 \in E$ avec $\psi_{y_0}(f_0(\varphi(y_0))) \neq 0$, alors tout $\Omega \in \mathcal{V}_{y_0}$ contient un certain y_Ω avec $\varphi(y_0) \neq \varphi(y_\Omega)$. On considère $f_\Omega \in C_b(X)$ telle que $0 \leq f_\Omega \leq 1$, $f_\Omega(\varphi(y_\Omega)) = 0$, et $f_\Omega(\varphi(y_0)) = 1$. On pose $g_\Omega := f_\Omega f_0$. Alors l'ensemble $C := \{g_\Omega,\ \Omega \in \mathcal{V}_{y_0}\}$ est borné dans E et donc $\psi C_\varphi(C)$ est équicontinue en y_0. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\Omega' \in \mathcal{V}_{y_0}$ tel que :

$$\|\psi_y(g_\Omega(\varphi(y))) - \psi_{y_0}(g_\Omega(\varphi(y_0)))\| \leq \varepsilon,\ y \in \Omega',\ \Omega \in \mathcal{V}_{y_0}.$$

Ainsi, pour tous $\Omega \subset \Omega'$ et $y = y_\Omega$, on obtient $\|\psi_{y_0}(f_0(\varphi(y_0)))\| \leq \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $\psi_{y_0}(f_0(\varphi(y_0))) = 0$, ce qui conduit à une contradiction, d'où ***1.*** est satisfaite.

2. Soient y_0 un élement quelconque de $Y_{E,\varphi,\psi}$ et $\varepsilon > 0$ un réel donné. D'après ***1.***, il existe un voisinage Ω_0 de y_0 sur lequel φ est constante prenant une valeur x_0. Puisque X est localement V-σ-borné, il existe $\Omega_{x_0} \in \mathcal{V}_{x_0}$ tel que, pour tout $v \in V$, il existe un certain $M_v > 0$ avec $\|v(t)\| \leq M_v$, pour tout $t \in \Omega_{x_0}$. Pour un $b \in A$ arbitraire avec $\|b\| = 1$, on choisit une fonction $f_b \in E$ telle que $f_b(x_0) = b$. Ceci est possible dû à (P). Ensuite, l'ensemble $U_b := \{x \in X : \frac{1}{2} < \|f_b(x)\| < \frac{3}{2}\}$ est ouvert et contient x_0. On choisit $g_b \in C_b(X)$ telle que $g_b(x_0) = 1$, $0 \leq g_b \leq 1$, et $\mathrm{Supp}(g_b) \subset U_b \cap \Omega_{x_0}$. L'ensemble $K := \{g_b f_b, \|b\| = 1\}$ est borné dans E. En effet, pour tout $v \in V$, on a :

$$\begin{aligned}
\|g_b f_b\|_v &= \sup\{g_b(x)\|v(x) f_b(x)\| : x \in X\} \\
&\leq \sup\{\|v(x) f_b(x)\| : x \in U_b \cap \Omega_{x_0}\} \\
&\leq \frac{3}{2} M_v,
\end{aligned}$$

Ainsi $\psi C_\varphi(K)$ est équicontinue en y_0. Par conséquent, il existe un certain voisinage de y_0, Ω contenu dans Ω_0 tel que :

$$\|\psi_y \left(g_b(\varphi(y)) f_b(\varphi(y))\right) - \psi_{y_0} \left(g_b(\varphi(y_0)) f_b(\varphi(y_0))\right)\| \leq \varepsilon,\ y \in \Omega,\ \|b\| = 1.$$

D'où $\|\psi_y - \psi_{y_0}\| \leq \varepsilon$, pour tout $y \in \Omega$, montrant que ψ est σ-continu en y_0. Puisque y_0 est choisi arbitraire dans $Y_{E,\varphi,\psi}$, ψ est σ-continu sur $Y_{E,\varphi,\psi}$.

Suffisance : Soient $\mathbb{B} \subset E$ un ensemble borné, $y_0 \in Y_{E,\varphi,\psi}$ et $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage Ω_0 de y_0 tel que φ est constante sur Ω_0 prenant une valeur x_0. Si on choisit $v \in V$ avec $v(x_0)$ borné inférieurement. Alors il existe $r > 0$ tel que $r\|a\| \leq \|v(x_0)a\|$, $a \in A$. Donc l'ensemble $B := \{f(x_0), f \in \mathbb{B}\}$ est borné dans A. Donc, pour un certain $M > 0$, $\|f(x_0)\| \leq M$ pour tout $f \in \mathbb{B}$. Puisque ψ est σ-continu en y_0, il esiste un autre voisinage Ω de y_0 tel que $\Omega \subset \Omega_0$ et $\|\psi_y - \psi_{y_0}\| < \varepsilon$, $y \in \Omega$. Par conséquent

$$\|\psi_y(f(x_0)) - \psi_{y_0}(f(x_0))\| \leq M\varepsilon, y \in \Omega,\ f \in \mathbb{B}.$$

Donc

$$\|\psi C_\varphi(f)(y) - \psi C_\varphi(f)(y_0)\| \leq M\varepsilon,\ y \in \Omega, f \in \mathbb{B}.$$

Il en résulte que $\psi C_\varphi(\mathbb{B})$ est équicontinu en y_0 et par suite sur $Y_{E,\varphi,\psi}$ puisque y_0 était choisi arbitraire. $\square$

Une conséquence triviale du Théorème 2.3.8 est

Corollaire 2.3.9. *On suppose que E satisfait les conditions du Théorème 2.3.8. Si φ n'est constante sur aucun ensemble ouvert (en particulier, si X n'a pas de point isolé et φ est injective), alors ψC_φ est localement $Y_{E,\varphi,\psi}$-équicontinu de E dans $C(Y, A)$ si, et seulement si, il est identique à zéro.*

Ce Chapitre fait l'objet de l'article [49]

Chapitre 3

Précompacité dans les espaces pondérés généralisés

L'exemple 1.1.12 montre que les espaces à poids généralisés, en général, ne peuvent être des espaces à poids classiques où les poids sont scalaires. Il est donc naturel de se demander sur la précompacité dans les espaces à poids généralisés. La première étude de la précompacité, puis aussi de la compacité, dans les espaces pondérés classiques de fonctions continues semble être l'œuvre de W. M. Ruess et W. H. Summers [76], où les auteurs ont donné des caractérisations des sous-ensembles précompacts des sous-espaces $CV_0(X, A)$ et $CV_P(X, A)$ de $CV(X, A)$, A étant un espace localement convexe.

Après W. M. Ruess et W. H. Summers, L. A. Khan et L. Oubbi dans [46] ont traité le théorème d'Arzelà-Ascoli dans des espaces pondérés non localement convexes. Dans le présent chapitre, nous caractérisons les sous-ensembles précompacts des espaces pondérés $CV_0(X, A)$ et $CV_P(X, A)$ où A est un espace vectoriel normé arbitraire et V une famille de Nachbin généralisée sur X. Cela étend au cas des poids à valeurs opérateurs les théorèmes de type Arzelà-Ascoli donnés dans [76] et [46]. Puisque un ensemble précompact est compact si et seulement s'il est complet, cette caractérisation s'avère être une caractérisation de la compacité relative, une fois que l'espace considéré est quasi-complet.

Nous retenons toutes les définitions, notions et notations du chapitre précédent.

Soit V une famille de Nachbin généralisée sur X telle que pour tous $v \in V$ et $\lambda > 0$, on a aussi $\lambda v \in V$.

$$CV_P(X,A) := \{f \in C(X,A) : vf(X) \text{ est précompact dans } A, \ \forall v \in V\}.$$

On a clairement $CV_0(X,A) \subset CV_P(X,A) \subset CV(X,A)$. Ces espaces seront munis de la topologie localement convexe séparée τ_V définie par les semi normes :

$$\|f\|_v = \sup\{\|v(x)f(x)\|, x \in X\}, \ v \in V.$$

La boule unité fermée, associée à $\| \ \|_v$, est notée par B_v.
On suppose, tout au long de ce chapitre, que V satisfait la propriété (bi), c'est-à-dire $V(x) \cap \mathcal{L}_{bi}(A) \neq \emptyset$, pour tout $x \in X$.

Maintenant, sur des exemples du chapitre précédent, nous considérons des familles de Nachbin généralisées particulières.

Exemple 3.0.1. Si U est une famille de Nachbin classique (c'est-à-dire constituée de fonctions à valeurs réelles positives s.c.s.) sur X. Alors, en identifiant $u(x)$ avec l'opérateur $u(x)I_A$ pour $u \in U$, U est une famille de Nachbin généralisée et les espaces $CU(X,A)$, $CU_0(X,A)$ et $CU_P(X,A)$ sont exactement les espaces pondérés classiques. En particulier, si $U = Z = \{\lambda\chi_X : \lambda > 0\}$, l'ensemble de toutes les fonctions constantes positives sur X, alors $CZ(X,A) = C_b(X,A)$, $CZ_0(X,A) = C_0(X,A)$, $CZ_P(X,A) = C_P(X,A)$, et τ_Z est la topologie uniforme σ.

Exemple 3.0.2. Prenons une famille Nachbin classique U, $T \in \mathcal{L}(A)$ un opérateur continu non nul sur A, et $V := \{uT : u \in U\}$, où $uT(x) := u(x)T$. Si T est injectif, alors V est une famille de Nachbin généralisée sur X et les inclusions $CU(X,A) \subset CV(X,A)$, $CU_0(X,A) \subset CV_0(X,A)$ et $CU_P(X,A) \subset CV_P(X,A)$ tiennent et sont continues. Ces inclusions deviennent des égalités algébriques et topologiques si T est supposé borné inférieurement. En particulier, si $T = I_A$, nous sommes dans la situation de l'exemple 3.0.1.
Si, en plus, $U = S_0^+$, l'ensemble de toutes les fonctions semi-continues supérieurement sur X qui s'annule à l'infini, alors $CV(X,A) = CV_P(X,A) = CV_0(X,A) = CS_0^+(X,A) = C(S_0^+)_P(X,A) = C(S_0^+)_0(X,A) = C_b(X,A)$ et τ_V est la topologie stricte β ,
ou en plus, $U = K = \{\lambda\chi_K : \lambda > 0 \text{ et } K \subset X, K \text{ compact}\}$, alors $CV(X,A) =$

$CV_P(X,A) = CV_0(X,A) = CK(X,A) = CK_P(X,A) = CK_0(X,A) = C(X,A)$ et τ_V est la topologie τ_k de la convergence sur les compacts de X. ou en plus, $U = F = \{\lambda\chi_F : \lambda > 0 \text{ et } F \subset X, F \text{ fini}\}$, alors $CV(X,A) = CV_P(X,A) = CV_0(X,A) = CF(X,A) = CF_P(X,A) = CF_0(X,A) = C(X,A)$ et τ_V est la toplogie simple τ_s.

3.1 Précompacité dans $CV_0(X,A)$

Dans cette section, nous caractérisons les sous-ensembles précompacts de $CV_0(X,A)$. Puisque V satisfait la propriété (bi), pour tout $x \in X$, l'application évaluation en x, $\delta_x : f \longmapsto f(x)$ est continue de $CV(X,A)$ dans A.

Le lemme suivant étend au cas des poids à valeurs opérateurs, un résultat donné initialement dans [10] et repris dans [76] puis dans [69]. Sa preuve va dans le sens de ces références, mais nous l'incluons pour le confort du lecteur.

Lemme 3.1.1. *L'application $\Delta : X \longrightarrow \mathcal{L}_c(CV(X,A),A), x \mapsto \delta_x$ est continue en $x_0 \in X$ si, et seulement si, tout sous-ensemble précompact de $CV(X,A)$ est équicontinu en x_0. En particulier, si X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace, alors tout sous-ensemble précompact de $CV(X,A)$ est équicontinu.*

Démonstration. L'application Δ est continue en x_0 si, et seulement si, pour tout sous-ensemble précompact H de $CV(X,A)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V_{x_0,H}$ de x_0 tel que $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$, pour tous $f \in H$ et $x \in V_{x_0,H}$. Mais ceci est vrai si, et seulement si, tout précompact H est équicontinu en x_0.
Maintenant, si X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace, montrons que Δ est continue sur tous les ensembles de niveaux $N(v,1)$, $v \in V$. Fixons $v \in V$, $x \in N(v,1)$, $\varepsilon > 0$ et un sous-ensemble précompact H de $CV(X,A)$. Posons $N(H,\varepsilon) := \{T \in \mathcal{L}(CV(X,A),A); \|T\|_H := \sup_{h\in H} \|T(h)\| < \varepsilon\}$. L'ensemble $\Lambda_x := \delta_x + N(H,\varepsilon)$ est un voisinage de δ_x. Puisque H est précompact, il existe $h_1,\dots,h_n$ dans H tels que

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{n} (h_i + \frac{\varepsilon}{3} B_v).$$

La famille finie $(h_i)_{1\leq i\leq n}$ étant équicontinue, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}_x$ contenant x tel que $\|h_i(t) - h_i(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et tout $t \in \mathcal{O}_x$. Maintenant, pour $t \in \mathcal{O}_x \cap N(v, 1)$ et $f \in H$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\|f - h_i\|_v \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Donc

$$\begin{aligned}
\|\Delta(t)(f) - \Delta(x)(f)\| &= \|f(t) - f(x)\| \\
&\leq \|f(t) - h_i(t)\| + \|h_i(t) - h_i(x)\| + \|h_i(x) - f(x)\| \\
&\leq \|v(t)(f(t) - h_i(t))\| + \|h_i(t) - h_i(x)\| + \|v(x)(h_i(x) - f(x))\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in \mathcal{O}_x \cap N(v, 1)$, on a : $\|\Delta(t) - \Delta(x)\|_H \leq \varepsilon$, ce qui signifie que $\Delta(\mathcal{O}_x \cap N(v, 1)) \subset \Lambda_x$. Par conséquent Δ est continue en x. □

Dans toute la suite de ce chapitre, on supposera que l'image de tout compact par tout $v \in V$ est un borné de $\mathcal{L}_\sigma(A)$. Ceci est satisfait, par exemple, si l'application $t \mapsto \|v(t)\|$ est semi-continue supérieurement pour tout $v \in V$. C'est aussi vrai si A est tonnelé, a fortiori si A est un Banach.

Définition 3.1.2. *Soient $v \in V$ et $H \subset C(X, A)$. On dit que vH est nulle à l'infini sur X si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subset X$ tel que $\|v(x)h(x)\| < \varepsilon$, pour tous $h \in H$ et $x \notin K$.*

Nous obtenons une généralisation du théorème d'Ascoli

Théorème 3.1.3. *Soit H un sous-ensemble de $CV_0(X, A)$. Alors H est précompact si les conditions suivantes sont remplies.*

i. *H est équicontinu,*

ii. *$H(x) = \{h(x) : h \in H\}$ est précompact dans A, pour tout $x \in X$,*

iii. *Pour tout $v \in V$, vH est nulle à l'infini sur X.*

Si X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace, la réciproque est aussi vraie.

Démonstration. Soit $H \subset CV_0(X, A)$. Supposons que i., ii. et iii. sont valides. Puisque $CV_0(X, A) \subset C(X, A)$, la condition i. implique que H est un sous-ensemble équicontinu de $C(X, A)$. la condition ii. implique que H est τ_s-précompact.

Il résulte de ([91], Théorème 13.3.2, page 289) que H est un sous-ensemble précompact de $(C(X, A), \tau_k)$, car la topologie de la convergence simple et la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X coïncident sur les parties équicontinues de

$C(X,A)$. Pour que la preuve soit complète, nous allons montrer directement que H est un sous-ensemble précompact de $(C(X,A),\tau_k)$. Soit $K\subset X$ un compact. Pour tout $x\in K$, il existe un voisinage V_x de x tel que $\|h(t)-h(x)\|\leq\frac{\varepsilon}{3}$ pour tous $t\in V_x$ et $h\in H$. Par compacité, il existe $x_1,\ldots,x_m\in K$ tels que $K\subset\bigcup\limits_{j=1}^{m}V_{x_j}$. Posons $F=\{x_1,\ldots,x_m\}$. Comme H est τ_s-précompact, il existe $h_1,\ldots,h_n$ dans H tels que

$$H\subset\bigcup_{i=1}^{n}(h_i+N(F,\frac{\varepsilon}{3})).$$

Soit $h\in H$. Il existe $i\in\{1,\ldots,n\}$ tel que

$$\|h(x_j)-h_i(x_j)\|\leq\frac{\varepsilon}{3},\ \forall j\in\{1,\ldots,m\}.$$

Pour $x\in K$, il existe $j_x\in\{j_1,\ldots,j_m\}$ tel que $x\in V_{x_{j_x}}$, i.e.,

$$\|h(x)-h(x_{j_x})\|\leq\frac{\varepsilon}{3},\ \forall h\in H.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|h(x)-h_i(x)\| &\leq \|h(x)-h(x_{j_x})\|+\|h(x_{j_x})-h_i(x_{j_x})\|+\|h_i(x_{j_x})-h_i(x)\|\\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{3}+\tfrac{\varepsilon}{3}+\tfrac{\varepsilon}{3}\\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sup\limits_{x\in K}\|h(x)-h_i(x)\|\leq\varepsilon$, i.e., $\|h-h_i\|_K\leq\varepsilon$. Ainsi,

$$H\subset\bigcup_{i=1}^{n}(h_i+N(K,\varepsilon)).$$

Pour établir que H est précompact dans $CV_0(X,A)$, on se donne $v\in V$ et $\varepsilon>0$. D'après iii., Il existe un compact $K\subset X$ tel que

$$\|v(x)h(x)\|\leq\frac{\varepsilon}{2},\ h\in H,\ x\notin K. \tag{3.1}$$

Puisque V est $\|\ \|$-borné sur tout compact de X, $\|v\|_K:=\sup_{t\in K}\|v(t)\|$ est fini. Comme H est précompact dans $(C(X,A),\tau_k)$, il existe $h_1,\ldots,h_n$ dans H tels que

$$H\subset\bigcup_{i=1}^{n}(h_i+N(K,\frac{\varepsilon}{2(\|v\|_K+1)})). \tag{3.2}$$

Nous affirmons $H \subset \bigcup_{i=1}^{n}(h_i + \varepsilon B_v)$. En effet, soient $h \in H$ et $x \in X$. D'après (3.2), il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ satisfaisant $\|h(t) - h_i(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(\|v\|_K+1)}$, pour tout $t \in K$. En particulier, si $x \in K$, on a donc

$$\begin{aligned}\|v(x)(h(x) - h_i(x))\| &\leq \|v(x)\|\|(h(x) - h_i(x))\| \\ &\leq \frac{\|v\|_K.\varepsilon}{2(\|v\|_K + 1)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Si $x \notin K$, alors, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, (3.1) entraîne $\|v(x)(h(x) - h_j(x))\| \leq \|v(x)h(x)\| + \|v(x)h_j(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. En particulier, pour $j = i$, on a $\|v(x)(h(x) - h_i(x))\| \leq \varepsilon$. Donc $\|h - h_i\|_v \leq \varepsilon$. Par suite $H \subset \bigcup_{i=1}^{n}(h_i + \varepsilon B_v)$ et H est précompact dans $CV_0(X,A)$.

Supposons maintenant que X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace et que H est un sous-ensemble précompact de $CV_0(X,A)$. D'après Lemme 3.1.1, H est équicontinu. Alors i. est acquise. D'autre part, puisque V satisfait la propriété (bi), l'application linéaire δ_x est continue, pour tout $x \in X$. Par conséquent, $H(x) = \delta_x(H)$ est précompact dans A. Donc ii. est vérifiée. Pour prouver iii., Soient $v \in V$ et $\varepsilon > 0$ des éléments arbitraires. La précompacité de H donne $h_1,\dots,h_n$ dans H tels que

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{n}(h_i + \frac{\varepsilon}{2}B_v). \tag{3.3}$$

Posons $K := \bigcup_{i=1}^{n}\{t \in X : \|v(t)h_i(t)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$. Puisque $\{h_i : 1 \leq i \leq n\} \subset CV_0(X,A)$, K est contenu dans un compact K_0. Maintenant, pour $h \in H$ et $t \notin K_0$, d'après (3.3), il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\|h - h_i\|_v \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}\|v(t)h(t)\| &\leq \|v(t)(h(t) - h_i(t))\| + \|v(t)h_i(t)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall h \in H, \forall t \notin K_0 : \|v(t)h(t)\| < \varepsilon.$$

D'où iii. □

Quand X est un k-espace, $V = K$, l'équicontinuité sur X est équivalent à l'équicontinuité sur chaque sous-ensemble compact de X. Si, en plus, A est un espace de Banach alors $CK_0(X, A) = (C(X, A), \tau_k)$ est complet. Donc la précompacité est équivalente à la compacité relative. La condition iii. dans Théorème 3.1.3 est automatique. Nous obtenons, comme corollaire, le résultat suivant :

Corollaire 3.1.4. *([47], page 81) Si X est un k-espace et A est un espace de Banach. Un sous-ensemble H de $(C(X, A), \tau_k)$ est relativement compact si, et seulement si, les conditions suivantes sont remplies.*
i. *H est équicontinu sur chaque sous-ensemble compact de X,*
ii. *$H(x)$ est relativement compact dans A pour tout $x \in X$.*

Mais en général, on obtient :

Corollaire 3.1.5. *Si X est un $k_{\mathbb{R}}$-espace et A est un espace de Banach. Un sous-ensemble H de $(C(X, A), \tau_k)$ est précompact si, et seulement si, les conditions suivantes sont remplies.*
i. *H est équicontinu sur X,*
ii. *$H(x)$ est précompact dans A pour tout $x \in X$.*

Si l'on prend $V = S_0^+$, alors $C(S_0^+)_0(X, A) = (C_b(X, A), \beta)$. Avec le même argument, comme ci-dessus. On obtient, comme corollaire du Théorème 3.1.3, le résultat suivant :

Corollaire 3.1.6. *([42], Théorème 3.6) Soient X un $k_{\mathbb{R}}$-espace et A un espace de Banach. Un sous-ensemble H de $(C_b(X, A), \beta)$ est relativement compact si, et seulement si, les conditions suivantes sont remplies.*
i. *H est équicontinu sur X,*
ii. *$H(x)$ est relativement compact dans A pour tout $x \in X$,*
iii. *H est uniformément borné (c'est-à-dire que $H(X)$ est borné dans A).*

Lorsque X est localement compact, $V = Z$, $CZ_0(X, A) = (C_0(X, A), \sigma)$. Si, en outre, A est un espace de Banach alors $CZ_0(X, A)$ est complet et donc la précompacité est équivalente à la compacité relative. Théorème 3.1.3 est équivalent dans ce cas au corollaire suivant :

Corollaire 3.1.7. *Soient X un espace localement compact et A un espace de Banach. Un sous-ensemble H de $(C_0(X,A),\sigma)$ est relativement compact si, et seulement si, les conditions suivantes sont remplies.*

i. *H est équicontinu,*

ii. *$H(x)$ est relativement compact dans A pour tout $x \in X$,*

iii. *H est uniformément nulle à l'infini sur X (c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subset X$ tel que $\|h(x)\| \leq \varepsilon$, pour tout $h \in H$ et tout $x \in X \setminus K$).*

3.2 Précompacité dans $CV_P(X,A)$

Dans cette section, nous caractérisons les sous-ensembles précompacts de $CV_P(X,A)$. Le résultat suivant est une extension du Théorème 2.2 de [76] dans le cas des poids à valeurs opérateurs. Ce dernier a déja été étendu dans le cas des poids scalaires au cas où A est un espace non localement convexe [46].

En suivant W. M. Ruess et W. H. Summers, nous définissons, pour tout $H \subset CV_P(X,A)$, tout $v \in V$ et tout $\varepsilon > 0$, les ensembles

$$T_x(H,v,\varepsilon) = \{t \in X : \|v(t)h(t) - v(x)h(x)\| \leq \varepsilon, \forall h \in H\},\ x \in X.$$

Théorème 3.2.1. *Soit $H \subset CV_P(X,A)$. On considère les assertions suivantes :*

a. i. *H est équicontinu,*

ii. *$H(x)$ est précompact dans A, pour tout $x \in X$,*

iii. *Étant donnés $v \in V$ et $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subset X$ tel que $\{T_x(H,v,\varepsilon) : x \in K\}$ recouvre X.*

b. i. *$vH(X) = \{v(x)h(x) : x \in X, h \in H\}$ est précompact dans A, pour tout $v \in V$,*

ii. *Étant donnés $v \in V$ et $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $F \subset X$ tel que $\{T_x(H,v,\varepsilon) : x \in F\}$ recouvre X.*

c. i. *$H(x)$ est précompact dans A, pour tout $x \in X$,*

ii. *Étant donnés $v \in V$ et $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $F \subset X$ tel que $\{T_x(H,v,\varepsilon) : x \in F\}$ recouvre X.*

d. H est précompact dans $CV_P(X,A)$.

Alors a. $\Rightarrow$ b. $\Rightarrow$ c. $\Rightarrow$ d.

Si X est en plus un $V_{\mathbb{R}}$-espace, alors d. $\Rightarrow$ a..

Démonstration. $a. \Rightarrow b.$ Supposons que $a.$ est valide. Remarquons d'abord que les deux conditions reunies i. et ii., comme dans la preuve du Théorème 3.1.3, impliquent que H est un sous-ensemble précompact de $(C(X,A),\tau_k)$.
Vérifions $b.$ i. Pour cela, on se donne $v \in V$ et $\varepsilon > 0$. D'après $a.$ iii., il existe un compact $K \subset X$ tel que

$$X = \bigcup_{x \in K} T_x(H, v, \frac{\varepsilon}{3}). \tag{3.4}$$

Puisque H est précompact dans $(C(X,A),\tau_k)$, il existe $h_1, \ldots, h_n \in H$ tels que

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{n} (h_i + N(K, \frac{\varepsilon}{3(\|v\|_K + 1)})),$$

c'est-à-dire pour tout $h \in H$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que :

$$\|h(x) - h_i(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3(\|v\|_K + 1)},\ \forall x \in K. \tag{3.5}$$

Puisque chaque $h_i \in CV_P(X,A)$, $vh_i(K)$ est un sous-ensemble précompact de A. Alors le sous-ensemble $D = \{(v(k)h_1(k), \ldots, v(k)h_n(k)) : k \in K\}$ du produit $\prod_{i=1}^{n} vh_i(K)$ est précompact. Donc il existe $k_1, \ldots, k_m$ dans K tels que

$$D \subset \bigcup_{j=1}^{m} (\prod_{i=1}^{n} v(k_j)h_i(k_j) + (\frac{\varepsilon}{3}B_A)^n).$$

Ce qui signifie que, pour $k \in K$, il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que

$$(v(k)h_1(k), \ldots, v(k)h_n(k)) - (v(k_j)h_1(k_j), \ldots, v(k_j)h_n(k_j)) \in (\frac{\varepsilon}{3}B_A)^n.$$

C'est-à-dire

$$v(k)h_i(k) - v(k_j)h_i(k_j) \in \frac{\varepsilon}{3}B_A, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

ou encore

$$\|v(k)h_i(k) - v(k_j)h_i(k_j)\| \leq \frac{\varepsilon}{3},\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Ainsi, pour tout $k \in K$, il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que :

$$\|v(k)h_i(k) - v(k_j)h_i(k_j)\| \leq \frac{\varepsilon}{3},\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.6}$$

Maintenant, soient $t \in X$ et $h \in H$. D'après (3.4), il existe $x \in K$ tel que $t \in T_x(H, v, \frac{\varepsilon}{3})$. C'est-à-dire

$$\|v(t)l(t) - v(x)l(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall l \in H. \tag{3.7}$$

D'après (3.5), il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\|h(k) - h_i(k)\| \leq \frac{\varepsilon}{3(\|v\|_K + 1)}, \forall k \in K. \tag{3.8}$$

D'après (3.6), il existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$\|v(x)h_i(x) - v(k_j)h_i(k_j)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall i \in \{1, \dots, n\}. \tag{3.9}$$

D'après (3.7), (3.8) et (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|v(t)h(t) - v(k_j)h_i(k_j)\| &\leq \|v(t)h(t) - v(x)h(x)\| + \|v(x)\|\|h(x) - h_i(x)\| \\
&\quad + \|v(x)h_i(x) - v(k_j)h_i(k_j)\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\|v\|_K \varepsilon}{3(\|v\|_K + 1)} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|v(t)h(t) - v(k_j)h_i(k_j)\| \leq \varepsilon. \tag{3.10}$$

Ainsi

$$vH(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\bigcup_{j=1}^{m} (v(k_j)h_i(k_j) + \varepsilon B_A)),$$

c'est-à-dire $vH(X)$ est précompact dans A.

Pour vérifier b. ii., soient $v \in V$ et $\varepsilon > 0$. On construit de la même manière, tout comme dans la preuve de b. i. les éléments h_i et k_j. Posons $F := \{k_j : 1 \leq j \leq m\}$. Pour $t \in X$ et $h \in H$, les deux résultats (3.8) et (3.10) donnent :

$$\begin{aligned}
\|v(t)h(t) - v(k_j)h(k_j)\| &\leq \|v(t)h(t) - v(k_j)h_i(k_j)\| + \|v(k_j)\|\|h_i(k_j) - h(k_j)\| \\
&\leq \varepsilon + \frac{\|v\|_K}{3(\|v\|_K + 1)}\varepsilon \\
&\leq \frac{4}{3}\varepsilon,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, $t \in T_x(H, v, \frac{4}{3}\varepsilon)$ avec $x \in F$. Par conséquent $\{T_x(H, v, \frac{4}{3}\varepsilon) : x \in F\}$ recouvre X.

b. $\Rightarrow$ *c.* C'est évident.

c. $\Rightarrow$ *d.* Supposons que *c.* est vérifiée. Fixons un $v \in V$ et un $\varepsilon > 0$. D'après *c.* ii., il existe un ensemble fini $F \subset X$ tel que $\{T_x(H, v, \frac{\varepsilon}{3}) : x \in F\}$ recouvre X. D'après *c.* i., H est τ_s-précompact. Alors il existe $h_1, \dots, h_n \in H$ tels que

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{n}(h_i + N(F, \frac{\varepsilon}{3(\|v\|_F + 1)})). \tag{3.11}$$

Il reste à prouver que $H \subset \bigcup_{i=1}^{n}(h_i + \varepsilon B_v)$. Soit $h \in H$, d'après (3.11) il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\|h(x) - h_i(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3(\|v\|_F + 1)}, \forall x \in F.$$

Pour $t \in X$ il existe $x \in F$ tel que $t \in T_x(H, v, \frac{\varepsilon}{3})$ et donc

$$\begin{aligned} \|v(t)h(t) - v(t)h_i(t)\| &\leq \|v(t)h(t) - v(x)h(x)\| + \|v(x)\|\|h(x) - h_i(x)\| \\ &\quad + \|v(x)h_i(x) - v(t)h_i(t)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\|v\|_F}{3(\|v\|_F + 1)}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $H \subset \bigcup_{i=1}^{n}(h_i + \varepsilon B_v)$, c'est-à-dire H est précompact dans $CV_P(X, A)$.

d. $\Rightarrow$ *a.* Maintenant, supposons que X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace et soit H un ensemble précompact dans $CV_P(X, A)$. D'après Lemme 3.1.1, H est équicontinu, d'où *a.* i. est réalisée. Puisque V satisfait la propriété (bi), pour $x \in X$ donné, l'évaluation δ_x est continue donc $H(x) = \delta_x(H)$ est précompact dans A. Donc *a.* ii. est valide.

Pour établir *a.* iii., on se donne $v \in V$ et $\varepsilon > 0$. Puisque H est précompact, il existe $h_1, \dots, h_n \in H$ tels que

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{n}(h_i + \frac{\varepsilon}{3}B_v). \tag{3.12}$$

On définit maintenant la fonction

$$\begin{array}{rccl} k: & X & \longrightarrow & A^n \\ & x & \longmapsto & k(x) = (h_1(x), \ldots, h_n(x)). \end{array}$$

La fonction k est continue et le sous-ensemble $(vk)(X)$ du produit précompact $\prod_{i=1}^{n} vh_i(X)$ est précompact. Donc pour le voisinage $(\frac{\varepsilon}{3}B_A)^n$, il existe un sous-ensemble fini F de X tel que $vk(X) \subset \bigcup_{x \in F}(vk(x) + (\frac{\varepsilon}{3}B_A)^n)$. Donc

$$\forall t \in X,\ \exists x \in F : v(t)k(t) - v(x)k(x) \in (\frac{\varepsilon}{3}B_A)^n,$$

i.e.,

$$\|v(t)h_i(t) - v(x)h_i(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

ou encore

$$t \in T_x(\{h_1, \ldots, h_n\}, v, \frac{\varepsilon}{3}).$$

Ainsi

$$X \subset \bigcup_{x \in F}(T_x(\{h_1, \ldots, h_n\}, v, \frac{\varepsilon}{3}). \tag{3.13}$$

Montrons maintenant que $\{T_x(H, v, \varepsilon) : x \in F\}$ recouvre X. Fixons $t \in X$, d'après (3.13), il existe $x \in F$ tel que $t \in T_x(\{h_1, \ldots, h_n\}, v, \frac{\varepsilon}{3})$ et ainsi

$$\|v(t)h_i(t) - v(x)h_i(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.14}$$

Soit $h \in H$, d'après (3.12), il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\|h - h_i\|_v \leq \frac{\varepsilon}{3}$, i.e.,

$$\|v(z)(h(z) - h_i(z))\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall z \in X. \tag{3.15}$$

Ensuite, d'après (3.14) et (3.15)

$$\begin{array}{rcl} \|v(t)h(t) - v(x)h(x)\| & \leq & \|v(t)(h(t) - h_i(t))\| + \|v(t)h_i(t) - v(x)h_i(x)\| \\ & & + \|v(x)(h_i(x) - h(x))\| \\ & \leq & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ & \leq & \varepsilon \end{array}$$

Ainsi $t \in T_x(H, v, \varepsilon)$, c'est-à-dire a. iii. est remplie. □

Lorsque X est localement compact et $V = Z$, on a X est un $Z_{\mathbb{R}}$-espace, $CZ(X, A) = (C(X, A), \sigma)$ et $CZ_P(X, A) = (C_P(X, A), \sigma)$. Si, en outre, A est un espace de Banach alors $CZ(X, A)$ est complet et donc la précompacité est équivalente à la compacité relative. Théorème 3.2.1 est équivalent dans ce cas au corollaire suivant :

Corollaire 3.2.2. *Soient X un espace localement compact et A un espace de Banach. Un sous-ensemble H de $(C_P(X, A), \sigma)$ est relativement compact si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées.*

i. *$H(X)$ est relativement compact dans A,*

ii. *étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini d'ouverts $\{K_i : i = 1, \ldots, n\}$ de X tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tous $x, y \in K_i$,*

$$\|h(x) - h(y)\| \leq \varepsilon, \forall h \in H.$$

Chapitre 4

Opérateurs de composition pondérée sur les espaces de Nachbin généralisés, cas d'un espace vectoriel topologique

La notion de poids à valeurs opérateurs a été introduite dans le cadre des espaces de Hilbert. Au chapitre 3, nous l'avons étendue au cas d'un espace normé. Au cours du temps, en travaillant avec cette notion, nous nous sommes rendu compte que rien ne nous empèche d'étendre cette notion à des espaces plus généraux, à savoir aux espaces vectoriels topologiques quelconques. Certaines difficultés paraîtront certes, mais nous avons trouvé les moyens pour mener à bien une telle étude.

Dans ce chapitre, notre but est d'étudier les opérateurs de composition pondérée ψC_φ d'un sous-espace E de l'espace de Nachbin généralisé $CV(X, A)$ dans un autre $CU(Y, A)$ ou $CU_0(Y, A)$, A étant un espace vectoriel topologique de Hausdorff arbitraire, Y un espace complètement régulier de Hausdorff et U une famille de Nachbin généralisée sur Y. En section 2, on donne quelques préliminaires, quelques notations et quelques propriétés topologiques des espaces $CV(X, A)$, tandis que dans la section 3, nous étudions la complétude des espaces $CV(X, A)$ et $CV_0(X, A)$. Dans la section 4, nous caractérisons les opérateurs de composition pondérée qui appliquent continûment

E dans $CU(Y, A)$ ou dans $CU_0(Y, A)$. La section 5 est consacrée aux conditions sous lesquelles ψC_φ est borné. La section 6 traite l'équicontinuité (locale) de l'opérateur ψC_φ.

Notons que, dans la plupart des travaux sur les espaces pondérés, l'essentialité telle qu'elle est définie par Prolla dans [73] joue un rôle important. Ici, nous nous libérons de cette condition pour couvrir beaucoup plus de situations.

4.1 Espaces de Nachbin généralisés, cas e.v.t.

Tout au long de ce chapitre, sauf indication expresse du contraire, A désigne un espace vectoriel topologique de Hausdorff non-trivial sur le corps $\mathbb{K}$ et $\mathcal{N}$ représente une base locale formée de voisinages fermés équilibrés et rétractables.

Pour tout $a \in A$ et tout $G \in \mathcal{N}$, $\delta_{G,a}$ désigne l'évaluation de la jauge en a. C'est $\delta_{G,a}(T) := P_G(T(a))$, pour tout $T \in \mathcal{L}(A)$.

Définition 4.1.1. ***1.*** *Une application v de X à valeurs dans $\mathcal{L}(A)$ est dite fortement semi-continue supérieurement si, pour tous $a \in A$ et $G \in \mathcal{N}$, l'application à valeurs réelles $\delta_{G,a} \circ v$ est semi-continue supérieurement sur X.*

2. *Une application $\nu : X \to A$ est dite nulle à l'infini sur X si, pour tout $G \in \mathcal{N}$, la fonction réelle $x \mapsto P_G(\nu(x))$ est nulle à l'infini sur X.*

Remarque 4.1.2. L'application $\nu : X \to A$ est nulle à l'infini sur X si, et seulement si, pour tout $G \in \mathcal{N}$ (ou voisinage ouvert G de zéro), il existe un sous-ensemble compact K_G de X tel que $\nu(x) \in G$ pour tout $x \notin K_G$. S'il se trouve que l'application $x \mapsto P_G(\nu(x))$ est semi-continue supérieurement, pour tout $G \in \mathcal{N}$, alors ν est nulle à l'infini si, et seulement si, $\{x \in X : P_G(\nu(x)) \geq \varepsilon\}$ est compact pour tout $G \in \mathcal{N}$ et tout $\varepsilon > 0$.

Ici, on introduit les familles de Nachbin généralisées dans le cadre d'espaces vectoriels topologiques arbitraires comme suit :

Définition 4.1.3. *Une famille de Nachbin généralisée sur X est une collection V de fonctions de X à valeurs dans $\mathcal{L}(A)$ telle que*

i. *tout $v \in V$ est fortement semi-continue supérieurement,*

ii. $\forall x \in X$, $\bigcap\{\ker v(x), v \in V\} = \{0\}$,

iii. *V est filtrante croissante dans le sens suivant : pour tous $v_1,\ v_2 \in V$, $G \in \mathcal{N}$, et $\lambda > 0$, il existe $v \in V$ tel que :*

$$P_G(\lambda v_i(x)a) \leq P_G(v(x)a), \forall x \in X, \forall a \in A, \ \text{et } i = 1, 2.$$

Sans perte de généralité, on suppose que pour tous $v \in V$ et $\lambda > 0$, on a aussi $\lambda v \in V$.
Si V est une famille de Nachbin généralisée sur X, on considère les espaces pondérés généralisés de fonctions continues vectorielles :

$$CV(X,A) := \{f \in C(X,A) : \ (vf)(X) \text{ est borné dans } A, \forall v \in V\}$$

et

$$CV_0(X,A) := \{f \in CV(X,A) : vf \ \text{ est nulle à l'infini sur } X, \ \forall v \in V\}.$$

L'espace $CV(X,A)$ ainsi que tous ses sous-espaces, en particulier $CV_0(X,A)$, seront dotés de la topologie linéaire pondérée τ_V dont la base de voisinages de zéro est constituée de tous les ensembles de la forme

$$B_{G,v} := \{f \in CV(X,A), (vf)(X) \subset G\},$$

où G parcourt $\mathcal{N}$ et v parcourt V. La jauge d'un tel ensemble est notée $P_{G,v}$. C'est

$$P_{G,v}(f) := \sup\{P_G(v(x)f(x)), x \in X\}, f \in CV(X,A).$$

La condition ii. dans Définition 4.1.3 assure que l'espace $CV(X,A)$ est séparé, alors que la condition iii. assure que la famille $P_{G,v},\ v \in V,\ G \in \mathcal{N}$, est filtrante croissante. S'il arrive que l'application $x \mapsto P_G(v(x)g(x))$ soit s.c.s. sur X, pour tous $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$ et tout $g \in C(X,A)$, l'égalité suivante est acquise.

$$CV_0(X,A) = \{f \in C(X,A) : vf \ \text{ est nulle à l'infini sur } X, \ \forall v \in V\}.$$

C'est-à-dire que $CV_0(X,A)$ est exactement l'ensemble des fonctions continues f de X dans A telles que vf s'annule à l'infini sur X, pour tout $v \in V$.

Dorénavant, V et U seront des familles de Nachbin généralisées sur X et Y respectivement. Signalons qu'une application linéaire T de $CV(X,A)$ dans $CU(Y,A)$ est continue si, et seulement si, pour tous $u \in U$ et $G \in \mathcal{N}$, il existe $v \in V$ et $H \in \mathcal{N}$ tels que

$$P_{G,u}(T(f)) \leq P_{H,v}(f), \quad \forall f \in CV(X,A).$$

Ici, nous nous intéressons à l'opérateur de composition pondérée ψC_φ, associé à $\psi : X \to \mathcal{L}(A)$ et $\varphi : Y \to X$, défini sur $CV(X,A)$.
Dans toute la suite, E est un sous-espace vectoriel de $CV(X,A)$ et $\text{coz}(E)$ son ensemble cozéro. Nous considérons également les ensembles

$$Y_{E,\varphi} := \{y \in Y : \varphi(y) \in \text{coz}(E)\} = \text{coz}(C_\varphi(E)),$$

$$Y_{E,\varphi,\psi} := \text{coz}(\psi C_\varphi(E)).$$

Les propiétés (P) et (P') introduites au chapitre précédent restent les mêmes ici. Cependant (M) et (SV) changent un peu.

Définition 4.1.4. *On dit que E satisfait la propriété*

1. (M) *si, pour tous $a \in A$, $G \in \mathcal{N}$ et $f \in E$, la fonction $P_G o f \otimes a : x \mapsto P_G(f(x))a$ appartient à E.*

2. (SV) *si la fonction $x \mapsto P_G(v(x)f(x))$ est semi-continue supérieurement pour tous $G \in \mathcal{N}$, $v \in V$ et $f \in E$.*

Il est facile de voir que, comme dans le cas où A est normé, E satisfait (P) s'il satisfait (M) ou (P'), ou si X est localement compact et l' inclusion $\mathcal{K}(X) \otimes A \subset E$ est vérifiée. De plus, si E satisfait (P), l'égalité suivante est vraie :

$$Y_{E,\varphi,\psi} = Y_{E,\varphi} \cap \text{coz}(\psi).$$

Si E est un $C_b(X)$-module qui satisfait (P'), alors pour tout $x \in \text{coz}(E)$ et tout $a \in A$, on peut trouver $f \in C(X)$ tel que $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 1$, et $f \otimes a \in E$.

4.2 Complétude de $CV(X,A)$ et $CV_0(X,A)$

Dans cette section, nous étudions, pour une famille de Nachbin généralisée V sur X, la complétude de $CV(X,A)$ et $CV_0(X,A)$. Pour cela, nous introduisons, pour tous

$v \in V$, $G \in \mathcal{N}$ et $H \in \mathcal{N}$, l'ensemble de niveau

$$N(v, G, H) := \{x \in X : P_G(a) \leq P_H(v(x)a),\ \forall a \in A\},$$

et on notera toujours $X_0 := \operatorname{coz}(CV_0(X, A))$ et $X_1 := \operatorname{coz}(CV(X, A))$. Comme dans le cas des poids à valeurs opérateurs sur un espace normé, $CV_0(X, A)$ est également fermé dans $CV(X, A)$ comme le montre la proposition suivante :

Proposition 4.2.1. *Pour toute famille de Nachbin généralisée V sur X, $CV_0(X, A)$ est un sous-espace fermé de $CV(X, A)$.*

Démonstration. Soit f un élément de $\overline{CV_0(X, A)}^{CV(X,A)}$, la fermeture de $CV_0(X, A)$ dans $CV(X, A)$. Pour un $G \in \mathcal{N}$ donné, choisissons $H \in \mathcal{N}$ tel que $H + H \subset G$. Alors pour tout $v \in V$, il existe $g \in CV_0(X, A)$ tel que $v(f-g)(X) \subset H$. Puisque g appartient à $CV_0(X, A)$, il existe un sous-ensemble compact K de X tel que $v(x)g(x) \in H$, pour tout $x \notin K$. Par conséquent, pour un tel x, nous avons : $v(x)f(x) = v(x)(f(x) - g(x)) + v(x)g(x) \in H + H \subset G$. Ce qui implique $f \in CV_0(X, A)$ puisque G et v sont arbitraires. $\square$

On définit, d'après Lemme 0.4.13, les $V_{\mathbb{R}}$-espaces de la façon suivante.

Définition 4.2.2. *On dit que X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace, si c'est un $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$-espace pour*

$$\mathcal{F} := \{N(v, G, H),\ v \in V,\ G \in \mathcal{N},\ H \in \mathcal{N}\}.$$

Théorème 4.2.3. *L'espace $CV(X, A)$ (resp. $CV_0(X, A)$) est complet si les quatre conditions suivantes sont remplies :*

1. *$\forall x \in X_1$ (resp. $\forall x \in X_0$), $\exists v \in V : v(x) \in \mathcal{L}_{bi}(A)$,*
2. *A est complet,*
3. *X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace,*
4. *Pour tous $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$, $H \in \mathcal{N}$ et $x \in N(v, G, H)$, il existe $\Omega \in \mathcal{V}_x$ tel que $\{v(t) : t \in \Omega \cap N(v, G, H)\}$ est équi-borné inférieurement.*

Démonstration. Soit $(f_i)_{i \in \mathfrak{I}}$ une suite généralisée de Cauchy dans $CV(X, A)$ (resp. dans $CV_0(X, A)$). D'après 1., pour tout $x \in X_1$ (resp. $x \in X_0$), l'application évaluation en

x de $CV(X, A)$ (resp. $CV_0(X, A)$) dans A, $\delta_x : f \mapsto f(x)$ est continue. Donc $(f_i(x))_{i\in\mathfrak{I}}$ est une suite généralisée de Cauchy dans A. Puisque A est complet, $(f_i(x))_{i\in\mathfrak{I}}$ converge vers un certain $f(x) \in A$. On étend la fonction ainsi définie f sur X tout entier en posant $f \equiv 0$ sur $X \setminus X_1$ (resp. $X \setminus X_0$). Nous établissons que $f \in CV(X, A)$ (resp. $f \in CV_0(X, A)$) et que $(f_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ converge vers f dans $CV(X, A)$ (resp. $CV_0(X, A)$).
Puisque X est un $V_{\mathbb{R}}$-espace, pour montrer que f est continue sur X, il suffit de montrer que sa restriction à chaque $N(v, G, H)$ l'est aussi. Soient alors $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$, $H \in \mathcal{N}$ et $x \in N(v, G, H)$ donnés. D'après 4., il existe $\Omega \in \mathcal{V}_x$ tel que $\{v(t) : t \in \Omega \cap N(v, G, H)\}$ est équi-borné inférieurement. Par conséquent, pour tout $I \in \mathcal{N}$, soient I', $J \in \mathcal{N}$ satisfaisant $I' + I' + I' \subset I$ et $P_{I'}(a) \leq P_J(v(t)a)$, pour tout $a \in A$ et tout $t \in \Omega \cap N(v, G, H)$. Nous avons alors en particulier :

$$P_{I'}(f_i(t) - f_j(t)) \leq P_J(v(t)(f_i(t) - f_j(t))),\ t \in \Omega \cap N(v, G, H).$$

Par suite

$$P_{I'}(f_i(t) - f_j(t)) \leq P_{J,v}(f_i - f_j),\ t \in \Omega \cap N(v, G, H).$$

Puisque $(f_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ est de Cauchy, pour J et v, il existe $i_0 \in \mathfrak{I}$ tel que $f_i - f_j \in B_{J,v}$ dès que $i_0 \leq i$ et $i_0 \leq j$. Donc $f_{i_0}(t) - f_j(t) \in I'$, pour tous $t \in \Omega \cap N(v, G, H)$ et tout j avec $i_0 \leq j$. Passant à la limite en j, nous obtenons

$$f_{i_0}(t) - f(t) \in I',\ \forall t \in \Omega \cap N(v, G, H). \tag{4.1}$$

D'après la continuité de f_{i_0}, il existe $\Omega' \in \mathcal{V}_x$ tel que

$$f_{i_0}(t) - f_{i_0}(x) \in I',\ \forall t \in \Omega'. \tag{4.2}$$

Pour $t \in \Omega' \cap \Omega \cap N(v, G, H)$, d'après (4.1) et (4.2), on a

$$\begin{aligned} f(t) - f(x) &= (f(t) - f_{i_0}(t)) + (f_{i_0}(t) - f_{i_0}(x)) + (f_{i_0}(x) - f(x)) \\ &\in I' + I' + I' \subset I. \end{aligned}$$

Donc $f(t) - f(x) \in I$, pour tout $t \in \Omega' \cap \Omega \cap N(v, G, H)$. Il s'ensuit que f, restreinte à $N(v, G, H)$, est continue. Pour achever la preuve, il suffit, puisque $CV_0(X, A)$ est fermé dans $CV(X, A)$, de montrer que $(f_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ converge dans $CV(X, A)$ vers f.

Soient $u \in V$, $K \in \mathcal{N}$ des éléments arbitraires. Puisque $(f_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ est de Cauchy, il existe $i_0 \in \mathfrak{I}$ tel que $f_i - f_j \in B_{K,u}$ dès que $i_0 \leq i$ et $i_0 \leq j$. C'est-à-dire $u(t)(f_i(t) - f_j(t)) \in K, t \in X$. Puisque $u(t)$ est continu et K est fermé, en passant à la limite en j, on obtient $u(t)(f_i(t) - f(t)) \in K$, $\forall t \in X$ et $i_0 \leq i$. Par suite

$$f_i - f \in B_{K,u}, i_0 \leq i.$$

Maintenant, puisque $f = (f - f_i) + f_i$, f appartient à $CV(X,A)$. □

Dans le cas où $(A, \| \ \|)$ est un espace normé, les ensembles de niveaux sont de la forme $N(v,r) := \{x \in X : r\|a\| \leq \|v(x)a\|, \ \forall a \in A\}$. ou tout simplement $N(v,1) := \{x \in X : \|a\| \leq \|v(x)a\|, \ \forall a \in A\}$. Dans cette situation, le théorème 2.1.3 devient un corollaire du théorème 4.2.3.

Remarque 4.2.4. 1. Un résultat similaire au Théorème 4.2.3 peut être alors démontré dans le cas où A est un espace localement borné. En fait, dans cette situation aussi, les ensembles de niveaux peuvent être restreints à ceux de la forme $N(v,r) := N(v, G, \frac{1}{r}G)$, où G est un voisinage borné de 0 appartenant à $\mathcal{N}$ et $r > 0$.

2. La condition 4. du Théorème 4.2.3 s'avère être équivalente au fait que, pour tous $v \in V$, $G, \ H \in \mathcal{N}$ et $x \in N(v,G,H)$, il existe $\Omega \in \mathcal{V}_x$ tel que :

$$\forall I \in \mathcal{N}, \exists J \in \mathcal{N} : \Omega \cap N(v,G,H) \subset \Omega \cap N(v, G\cap I, H \cap J). \tag{N}$$

En effet, soient $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$ et $H \in \mathcal{N}$ des éléments donnés. Pour $x \in N(v,G,H)$, soit $\Omega \in \mathcal{V}_x$ tel que $\{v(t) : t \in \Omega \cap N(v,G,H)\}$ est équi-borné inférieurement. Donc pour tout $I \in \mathcal{N}$, il existe $J \in \mathcal{N}$ tel que

$$P_{G\cap I}(a) \leq P_J(v(t)a), \ \forall t \in \Omega, \ a \in A.$$

Par suite

$$P_{G\cap I}(a) \leq P_{H\cap J}(v(t)a), \ \forall t \in \Omega, \ a \in A$$

et donc $t \in \Omega \cap N(v, G\cap I, H \cap J)$. Par conséquent $\Omega \cap N(v,G,H) \subset \Omega \cap N(v, G\cap I, H\cap J)$. Supposons maintenant que la propriété (N) soit satisfaite et soient $v \in V$, $G, H \in \mathcal{N}$ donnés. D'après (N), il existe $\Omega \in \mathcal{V}_x$ tel que pour tout $I \in \mathcal{N}$, il y a un $J \in \mathcal{N}$ avec

$\Omega \cap N(v, G, H) \subset \Omega \cap N(v, G \cap I, H \cap J)$. Donc chaque $t \in \Omega \cap N(v, G, H)$ appartient à $\Omega \cap N(v, G \cap I, H \cap J)$. Ce qui signifie $P_{G \cap I}(a) \leq P_{H \cap J}(v(t)a), \ \ a \in A$. Ainsi

$$P_I(a) \leq P_{G \cap I}(a) \leq P_{H \cap J}(v(t)a), \forall t \in \Omega \cap N(v, G, H), \ a \in A.$$

Par conséquent

$$P_I(a) \leq P_{J'}(v(t)a), \forall a \in A, t \in \Omega \cap N(v, G, H) \text{ avec } J' = H \cap J.$$

Ainsi $\{v(t) : t \in \Omega \cap N(v, G, H)\}$ est équi-borné inférieurement.

A la fin de cette section, nous présentons Théorème d'approximation de Prolla dans le cas où A est un espace localement convexe. Rappelons que, dans ce cas, la base locale considérée $\mathcal{N}$ est formée de voisinages fermés équilibrés et convexes G dont la jauge P_G est évidemment une semi-norme.

Théorème 4.2.5. *On suppose que $E \subset CV_0(X, A)$ vérifie la propriété (SV) et que W est à la fois un sous-espace vectoriel de E et un $C_b(X)$-module. Pour tout $f \in E$ donné, si $f(x) \in \overline{W(x)}^A$ pour tout $x \in coz(E)$, alors $f \in \overline{W}^E$. La réciproque est vraie si, pour tout $x \in coz(E)$, il existe $v \in V$ tel que $v(x) \in \mathcal{L}_{bi}(A)$.*

Démonstration. Soit $f \in E$ telle que $f(x) \in \overline{W(x)}^A$ pour tout $x \in \operatorname{coz}(E)$ et soient $G \in \mathcal{N}$, $\varepsilon > 0$ et $v \in V$. Pour $x \in \operatorname{coz}(E)$, $v(x)$ est continu sur A donc il existe $H \in \mathcal{N}$ tel que $P_G(v(x)a) \leq P_H(a)$, pour tout $a \in A$. Alors, il existe $g_x \in W : \ P_H(f(x) - g_x(x)) < \varepsilon$.

$$P_G(v(x)(f(x) - g_x(x))) \leq P_x(f(x) - g_x(x)) < \varepsilon.$$

Pour chaque $x \in \operatorname{coz}(E)$, on considère l'ensemble $K_x := \{t \in X : P_G(v(t)(f(t) - g_x(t))) \geq \varepsilon\}$. C'est un compact contenu dans $\operatorname{coz}(E)$ ne contenant pas x puisque E vérifie la propriété (SV) et $f - g_x \in E$. D'où $\bigcap\limits_{x \in \operatorname{coz}(E)} K_x = \emptyset$. Par compacité, il existe $x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{coz}(E)$ tels que $\bigcap\limits_{1 \leq i \leq n} K_{x_i} = \emptyset$. Si U_i désigne le complémentaire de K_{x_i} dans le compactifié Stone-Cĕck βX de X, avec $i \in \{1, \ldots, n\}$, on considère une partition de l'unité $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ subordonnée au recouvrement ouvert $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ de βX. C'est-à-dire φ_i est continue, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\varphi_i \equiv 0$ sur $\beta X \setminus U_i$ et $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$. Soient h_i la restriction de φ_i à X et $g := \sum_{i=1}^n h_i g_{x_i}$. Alors g appartient à W et vérifie $P_G(v(x)(f(x) - g(x))) \leq \varepsilon$

pour tout $x \in X$. En effet, si $x \notin \mathrm{coz}(E)$, c'est évident. Maintenant, si $x \in \mathrm{coz}(E)$, alors l' ensemble $J_x := \{i : 1 \leq i \leq n \text{ et } x \notin K_{x_i}\}$ n'est pas vide et

$$\begin{aligned}
P_G(v(x)(f(x) - g(x))) &= P_G(v(x)(f(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i(x) g_{x_i}(x))) \\
&= P_G(v(x)(\sum_{i=1}^{n} h_i(x)(f(x) - g_{x_i}(x)))) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} h_i(x) P_G(v(x)(f(x) - g_{x_i}(x))) \\
&= \sum_{i \in J_x} h_i(x) P_G(v(x)(f(x) - g_{x_i}(x))) \\
&\leq \sum_{i \in J_x} h_i(x) \varepsilon \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Puisque x est arbitraire, $P_{G,v}(f - g) \leq \varepsilon$, d'où $f \in \overline{W}^E$.
Pour la réciproque, il suffit de montrer que l'évaluation $\delta_x : E \to A$, $f \mapsto f(x)$ est continue pour tout $x \in \mathrm{coz}(E)$. On fixe alors un tel x et soit $G \in \mathcal{N}$. Par hypothèse, il existe un $v \in V$ avec $v(x)$ borné inférieurement sur A. Donc il existe $H \in \mathcal{N}$ tel que $P_G(a) \leq P_H(v(x)a)$, pour tout $a \in A$. En particulier,

$$P_G(\delta_x(f)) := P_G(f(x)) \leq P_H(v(x)f(x)) \leq P_{H,v}(f), \ \forall f \in E.$$

Ce qui achéve la preuve. □

Dans tout le reste, sauf indication contraire, nous supposerons que E est à la fois un sous-espace vectoriel de $CV(X, A)$ et un $C_b(X)$-module et que l'inclusion $\psi C_\varphi(E) \subset C(Y, A)$ est vérifiée, c'est-à-dire que pour tout $f \in E$, $\psi C_\varphi(f)$ est continue sur Y.

4.3 Opérateurs de composition pondérée continus.

Nous allons caractériser les opérateurs continus ψC_φ de E dans $CU(Y, A)$.

Théorème 4.3.1. *Sous l'une des conditions i., ii., ou iii. ci-dessous, l'opérateur ψC_φ applique continûment E dans $CU(Y,A)$ si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée $\forall G \in \mathcal{N},\ u \in U,\ \exists\ H \in \mathcal{N}, v \in V$ tels que*

$$P_G(u(y)\psi_y(a)) \leq P_H(v(\varphi(y))a),\ \forall a \in A,\ y \in Y_{E,\varphi}. \tag{4.3}$$

i. E satisfait (M),

ii. E satisfait à la fois (P) et (SV),

iii. X est localement compact et $\mathcal{K}(X) \otimes A \subset E$.

Démonstration. Nécessité : Puisque $\psi C_\varphi : E \to CU(Y,A)$ est continu, pour tous $G \in \mathcal{N}$ et $u \in U$, il existe $H \in \mathcal{N}$ et $v \in V$ tels que

$$P_{G,u}(\psi C_\varphi(f)) \leq P_{H,v}(f),\ \forall f \in E.$$

Donc pour tout $y \in Y$, on a

$$P_G(u(y)\psi_y(f(\varphi(y))) \leq \sup\{P_H(v(x)f(x)),\ x \in X\}. \tag{4.4}$$

Soient y_0 dans $Y_{E,\varphi}$ et a dans A des éléments donnés. Alors $x_0 := \varphi(y_0)$ appartient à $\mathrm{coz}(E)$.

Sous chacune des conditions $i.$, $ii.$ ou $iii.$, Pour tout entier $n > 0$, nous construisons un voisinage ouvert U_n de x_0 et une fonction $h_n \in E$ dont le support est contenu dans U_n et $h_n(x_0) = a$ telle que, une fois que nous appliquons (4.4) à h_n et que nous faisons tendre n vers l'infini, on obtient l'inégalité voulue : $P_G(u(y_0)\psi_{y_0}(a)) \leq P_H(v(\varphi(y_0))a)$.

Maintenant, si E vérifie $i.$, alors il existe $f \in E$ et $K \in \mathcal{N}$ tels que $P_K(f(x_0)) = 1$. On prend alors

$$U_n := \{x \in X : P_K(f(x)) < 1 + \frac{1}{n} \ \text{ et } \ P_H(v(x)a) < P_H(v(x_0)a) + \frac{1}{n}\}$$

et $h_n := g_n P_K \circ f \otimes a$, où $g_n \in C_b(X)$ est choisi de telle sorte que $g_n(x_0) = 1$, $0 \leq g_n \leq 1$ et $\mathrm{supp}(g_n) \subset U_n$. Puisque v est fortement semi-continue supérieurement et P_K est continue, U_n est un voisinage ouvert de x_0.

Si E satisfait $ii.$, alors il existe $f \in E$ tel que $f(x_0) = a$. On pose alors

$$U_n := \{x \in X :\ P_H(v(x)f(x)) < P_H(v(x_0)f(x_0)) + \frac{1}{n}\}$$

et $h_n := g_n f$, où encore $g_n \in C_b(X)$ est choisi de sorte que $g_n(x_0) = 1$, $0 \leq g_n \leq 1$ et $\operatorname{supp}(g_n) \subset U_n$. Notons que, d'après (SV), U_n est un voisinage ouvert de x_0.
Enfin, si E satisfait $iii.$, alors il existe $f \in C(X, \mathbb{R}^+)$ tel que $f(x_0) = 1$, $\operatorname{supp}(f)$ est compact, et $f \otimes a \in E$. On prend alors

$$U_n := \{x \in X : \ P_H(v(x)f(x)a) < P_H(v(x_0)a) + \frac{1}{n}\}$$

et $h_n = g_n f \otimes a$, où encore une fois $g_n \in C_b(X)$ satisfait $g_n(x_0) = 1$, $0 \leq g_n \leq 1$ et $\operatorname{supp}(g_n) \subset U_n$. Puisque $x \mapsto f(x)P_H(v(x)a)$ est semi-continue supérieurement, U_n est un ouvert contenant x_0.
Suffisance : Soient $f \in E, G \in \mathcal{N}$ et $u \in U$ des éléments donnés. D'après (4.3) il existe $H \in \mathcal{N}$ et $v \in V$ tels que

$$P_G(u(y)\psi_y(f(\varphi(y)))) \leq P_H(v(\varphi(y))f(\varphi(y))), \forall\, y \in Y.$$

Donc,

$$\begin{aligned} P_{G,u}(\psi C_\varphi(f)) =& \sup\{P_G(u(y)\psi_y(f(\varphi(y)))) : y \in Y\} \\ \leq& \sup\{P_H(v(\varphi(y))f(\varphi(y))) : y \in Y\} \\ \leq& \sup\{P_H(v(x)f(x)) : x \in \varphi(Y)\} \\ \leq& P_{H,v}(f) < \infty. \end{aligned}$$

Cela montre à la fois que $\psi C_\varphi(f) \in CU(Y, A)$ et que ψC_φ est continu. □

Dans le cas des opérateurs de multiplication, on obtient :

Corollaire 4.3.2. *Si E satisfait l'une des conditions i., ii., ou iii. du Théorème 4.3.1, alors M_ψ est continu de E dans $CU(X, A)$ si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée : $\forall\ G \in \mathcal{N}, u \in U,\ \exists\ H \in \mathcal{N}, v \in V$ tels que*

$$P_G(u(x)\psi_x(a)) \leq P_H(v(x)a),\ \forall a \in A,\ x \in \ coz(E). \tag{4.5}$$

D'une façon similaire, dans le cas des opérateurs de composition, on obtient :

Corollaire 4.3.3. *Si E satisfait l'une des conditions i., ii., ou iii du Théorème 4.3.1, alors C_φ est continu de E dans $CU(Y, A)$ si, et seulement si, on a la condition suivante : $\forall\ G \in \mathcal{N}, u \in U,\ \exists\ H \in \mathcal{N}, v \in V$ tels que*

$$P_G(u(y)a) \leq P_H(v(\varphi(y))a),\ \forall a \in A,\ y \in Y_{E,\varphi}. \tag{4.6}$$

Dans le cas où $(A, \| \ \|)$ est un espace normé, notons que les propriétés (M) et (SV) définies ci-dessus ne sont rien d'autre que celles données au chapitre 2. On obtient ainsi le corollaire suivant qui généralise, en fait, Théorème 2.2.1.

Corollaire 4.3.4. *Si $(A, \| \ \|)$ est un espace normé et E remplit l'une des conditions i., ii., ou iii. du Théorème 4.3.1, alors ψC_φ applique continûment E dans $CU(Y, A)$ si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée :*

$$\forall u \in U, \exists v \in V : \|u(y)\psi_y(a)\| \leq \|v(\varphi(y))a\|, \ a \in A, \ y \in Y_{E,\varphi}. \tag{4.7}$$

Ensuite, nous étudions la continuité de ψC_φ de E dans $CU_0(Y, A)$. Pour cela, on considère encore l'ensemble $\mathrm{Cst}(E)$ introduit au chapitre 2. On voit facilement, ici aussi, que tout $v \in V$ est β-borné sur tout $K \in \mathrm{Cst}(E)$.

Pour $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$ et $f \in E$, posons

$$N(G, v, f) := \{x \in X : v(x)f(x) \notin \overset{\circ}{G}\}.$$

En fait, nous avons aussi $N(G, v, f) = \{x \in X : P_G(v(x)f(x)) \geq 1\}$.

Définition 4.3.5. *On dit que E satisfait la propriété (C) si, pour tous $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$ et $f \in E$, $N(G, v, f)$ appartient à Cst(E).*

Théorème 4.3.6. *Supposons que E vérifie (C) et l'une des conditions i., ii. ou iii. du Théorème 4.3.1. Si ψC_φ applique continûment E dans $CU_0(Y, A)$, alors (4.3) est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : u(y)\psi_y(a) \notin \overset{\circ}{G}\}$ est relativement compact, pour tous $K \in$ Cst(E), $G \in \mathcal{N}$, $u \in U$ et $a \in A \setminus \{0\}$.*
La réciproque est vraie si $f(N(G, v, f))$ est précompact dans A et $v(N(G, v, f))$ est équicontinu sur A, pour tous $G \in \mathcal{N}$, $v \in V$ et $f \in E$.

Démonstration. Supposons que ψC_φ applique continûment E dans $CU_0(Y, A)$, alors de toute évidence (4.3) découle du Théorème 4.3.1. Fixons maintenant $K \in \mathrm{Cst}(E)$, $u \in U$, $G \in \mathcal{N}$ et $a \neq 0$. Choisissons $f \in E$ tel que $f \equiv a$ sur K. Comme $\psi C_\varphi(f)$ appartient à $CU_0(Y, A)$, l'ensemble

$$S := \{y \in Y : u(y)\psi_y(f(\varphi(y))) \notin \overset{\circ}{G}\}$$

est relativement compact et contient

$$\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : u(y)\psi_y(a) \notin \overset{\circ}{G}\}.$$

Par conséquent, ce dernier est relativement compact.
Réciproquement, d'après Théorème 4.3.1, la condition (4.3) implique que ψC_φ applique continûment E dans $CU(Y, A)$. Il reste à montrer l'inclusion $\psi C_\varphi(E) \subset CU_0(Y, A)$. On se donne $f \in E$, $G \in \mathcal{N}$ et $u \in U$, et on considére à nouveau l'ensemble S défini comme ci-dessus. On montre que S est relativement compact et par conséquent $\psi C_\varphi(f) \in CU_0(Y, A)$. En effet, soit $H \in \mathcal{N}$ satisfaisant $H + H \subset \overset{\circ}{G}$. D'après (4.3), il existe $I \in \mathcal{N}$ et $v \in V$ tels que

$$P_H(u(y)\psi_y(a)) \leq P_I(v(\varphi(y)a), \ \forall a \in A, \ y \in Y_{E,\varphi}. \tag{4.8}$$

Mais $K := N(I, v, f)$ appartient à $\mathrm{Cst}(E)$ et contient $\varphi(S)$. Donc pour montrer que $\psi C_\varphi(f)$ appartient à $CU_0(Y, A)$, il suffit de montrer que S est contenu dans une réunion finie d' ensembles de la forme

$$C_i := \{y \in Y : u(y)\psi_y(a_i) \notin \overset{\circ}{H}\}$$

avec $a_i \in A \setminus \{0\}$. Mais l'ensemble $v(K)$ est équicontinu. Donc il existe $J \in \mathcal{N}$ tel que

$$v(x)J \subset I, \ \forall x \in N(I, v, f). \tag{4.9}$$

De plus, comme $f(K)$ est précompact dans A, $f(\varphi(S))$ l'est aussi. Par conséquent, il existe $y_1, \ldots, y_n \in S$ tels que

$$f(\varphi(S)) \subset \bigcup_{i=1}^{n}(f(\varphi(y_i)) + J).$$

Ainsi, pour $y \in S$, il existe un certain $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $f(\varphi(y)) - f(\varphi(y_i)) \in J$. D'après (4.8) et (4.9), on obtient $u(y)\psi_y(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y_i))) \in H$. Donc $u(y)\psi_y(f(\varphi(y_i))) \notin \overset{\circ}{H}$. Sinon,

$$\begin{aligned} u(y)\psi_y(f(\varphi(y))) &= [u(y)\psi_y(f(\varphi(y)) - f(\varphi(y_i)))] + u(y)\psi_y(f(\varphi(y_i))) \\ &\in H + \overset{\circ}{H} \subset \overset{\circ}{G}, \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{y \in Y : u(y)\psi_y(a_i) \notin \overset{\circ}{H}\},$$

avec $a_i = f(\varphi(y_i))(\neq 0)$. □

Il est à noter que, chaque fois que $E \subset CV_0(X, A)$, l'ensemble $N(G, v, f)$ est contenu dans un ensemble compact pour tout $f \in E$. Par conséquent, $f(N(G, v, f))$ est précompact. Si, en plus, il arrive que A est un espace localement convexe tonnelé, alors aussi $v(N(G, v, f))$ est équicontinu, car il est fortement borné. Cela donne beaucoup de résultats en corollaires.

Dans le cas des opérateurs de multiplication, on obtient :

Corollaire 4.3.7. *Supposons que E vérifie (C) et l'une des conditions i., ii. ou iii. du Théorème 4.3.1. Si $f(N(G, v, f))$ est précompact dans A et $v(N(G, v, f))$ est équicontinu sur A, pour tous $G \in \mathcal{N}$, $v \in V$ et $f \in E$, alors M_ψ applique continûment E dans $CU_0(Y, A)$ si, et seulement si, (4.5) est vérifiée et $K \cap \{y \in Y : u(y)\psi_y(a) \notin \overset{\circ}{G}\}$ est relativement compact, pour tous $K \in Cst(E)$, $G \in \mathcal{N}$, $u \in U$ et $a \in A \setminus \{0\}$.*

De façon similaire, dans le cas des opérateurs de composition, on obtient :

Corollaire 4.3.8. *Supposons que E vérifie (C) et l'une des conditions i., ii. ou iii. du Théorème 4.3.1. Si $f(N(G, v, f))$ est précompact dans A et $v(N(G, v, f))$ est équicontinu sur A, pour tous $G \in \mathcal{N}$, $v \in V$ et $f \in E$, alors C_φ applique continûment E dans $CU_0(Y, A)$ si, et seulement si, (4.6) est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{x \in X : u(x)a \notin \overset{\circ}{G}\}$ est relativement compact, pour tous $K \in Cst(E)$, $G \in \mathcal{N}$, $u \in U$ et $a \in A \setminus \{0\}$.*

Dans le cas où $(A, \| \ \|)$ est un espace normé, les ensembles $N(G, v, f)$ peuvent être remplacés par les ensembles $N(v, f) := \{x \in X : \|v(x)f(x)\| \geq 1\}$, $v \in V$ et $f \in E$. Ainsi, nous obtenons le corollaire suivant, qui est aussi une extension du Théorème 2.2.5 dans un cadre plus large.

Corollaire 4.3.9. *Supposons que A est un espace normé, que E satisfait (C) et, au moins, l'une des conditions i., ii. ou iii. du Théorème 4.3.1. Si ψC_φ applique* *continûment E dans $CU_0(Y,A)$ alors (4.7) est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : \|u(y)\psi_y(a)\| \geq 1\}$ est relativement compact pour tous $K \in Cst(E)$, $u \in U$ et $a \in A \setminus \{0\}$.*

La réciproque est vraie si $f(N(v,f))$ est précompact dans A et $v(N(v,f))$ est équicontinu sur A, pour tous $v \in V$ et $f \in E$.

Remarque 4.3.10. ***1.*** Notons que Lemme 2.2.4 reste aussi vraie avec la nouvelle définition de la propriété (M) donnée dans ce chapitre.

2. Les éléments de $\mathrm{Cst}(E)$ ne sont pas nécessairement compacts. A ce point, notons que, si E contient les fonctions constantes, alors X est dans $\mathrm{Cst}(E)$ sans qu'il soit nécessairement compact. Sous les conditions du Lemme 2.2.4, les compacts appartenant à $\mathrm{Cst}(E)$ sont exactement les compacts contenu dans $\mathrm{coz}(E)$.

3. Sous les conditions du Lemme 2.2.4 et dans le cas $E \subset CV_0(X,A)$, la propriété (C) est équivalente au fait que $\overline{N(G,v,f)}^X \subset \mathrm{coz}(E)$ pour tous $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$ et $f \in E$. Cette condition est réalisée si E satisfait en plus (SV). En particulier, si les éléments de V sont σ-continus.

4. Si E vétifie (P') et les poids $v \in V$ sont tous σ-continus, la réciproque du Théorème 4.3.6 reste vraie avec les compacts K de $\mathrm{coz}(E)$ à la place de tous les membres de $\mathrm{Cst}(E)$.

Dans le cas $E \subset CV_0(X,A)$, on caractérise dans le théorème suivant, la continuité de ψC_φ tout comme Théorème 4.3.6. Mais au lieu de considérer tous les éléments de $\mathrm{Cst}(E)$ dont les compacts de $\mathrm{coz}(E)$ font partie, on se réstreint aux compacts de $\mathrm{coz}(E)$.

Théorème 4.3.11. *Supposons que $E \subset CV_0(X,A)$ satisfait (C) et que, pour tous $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$ et $f \in E$, l'ensemble $v(N(G,v,f))$ est équicontinu sur A. Alors, sous chacune des conditions ci-dessous i., ii'., ou iii., ψC_φ est continu de E dans $CU_0(Y,A)$ si, et seulement si, (4.3) est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : u(y)\psi_y(a) \notin \overset{\circ}{G}\}$ est relativement compact, pour tout compact $K \subset coz(E)$, et tous $G \in \mathcal{N}$, $u \in U$ et $a \in A \setminus \{0\}$. Où*

i. E satisfait (M),

ii'. E satisfait (P') et (SV),

iii. X est localement compact et $\mathcal{K}(X) \otimes A \subset E$.

Démonstration. En prenant en considération Lemme 2.2.4 et que (P') implique (P), la nécessité est la même que dans Théorème 4.3.6.
Suffisance : Pour tous $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$, $f \in E$ et $H \in \mathcal{N}$, l'ensemble $N(G, v, f)$ est relativement compact. D'après (C), il existe $g \in E$ tel que $g = a$ sur $N(G, v, f)$, avec $a \in A \setminus \{0\}$. Donc $N(G, v, f) \subset g^{-1}(\{a\})$ qui est fermé. Par conséquent, la fermeture de $N(G, v, f)$ dans X est un sous-ensemble compact contenu dans $\mathrm{coz}(E)$. Donc

$$\varphi^{-1}(N(G, v, f)) \cap \{y \in Y : u(y)\psi_y(a) \notin \mathring{H}\}$$

est relativement compact et $f(N(G, v, f))$ est précompact dans A. Nous concluons tout comme dans la preuve du Théorème 4.3.6. $\square$

Dans le cas des opérateurs de multiplication, on obtient :

Corollaire 4.3.12. *Supposons que $E \subset CV_0(X, A)$ satisfait (C) et, au moins, l'une des conditions du Théorème 4.3.11, et que, pour tous $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$ et $f \in E$, l'ensemble $v(N(G, v, f))$ est équicontinu sur A. Alors M_ψ est continu de E dans $CU_0(Y, A)$ si, et seulement si, (4.5) est vérifiée.*

De façon similaire, dans le cas des opérateurs de composition, on ontient :

Corollaire 4.3.13. *Supposons que $E \subset CV_0(X, A)$ satisfait (C) et, au moins, l'une des conditions du Théorème 4.3.11, et que, pour tous $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$ et $f \in E$, l'ensemble $v(N(G, v, f))$ est équicontinu sur A. Alors C_φ est continu de E dans $CU_0(Y, A)$ si, et seulement si, (4.6) est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{x \in X : u(x)a \notin \mathring{G}\}$ est relativement compact, pour tout compact $K \subset coz(E)$, et tous $G \in \mathcal{N}$, $u \in U$ et $a \in A \setminus \{0\}$.*

Dans le cas où A est un espace localement convexe tonnelé (en particulier un espace de Banach), chaque ensemble β-borné dans $\mathcal{L}(A)$ est équicontinu, donc aussi σ-borné. Par la semi-continuité supérieure de la fonction $P_{G,v} : x \mapsto P_G(v(x)a)$, pour chaque $a \in A$, l'application v est β-borné sur les parties compacts de X. Puisque $N(G, v, f)$ est contenu dans un ensemble compact, $v(N(G, v, f))$ est équicontinu. On obtient :

Corollaire 4.3.14. *Supposons que A est un espace normé tonnelé et que $E \subset CV_0(X, A)$ satisfait (C). Alors, sous l'une des conditions i., ii'. ou iii. du Théorème 4.3.11, ψC_φ*

est continu de E dans $CU_0(Y,A)$ si, et seulement si, (4.7) est vérifiée et $\varphi^{-1}(K)\cap\{y\in Y : \|u(y)\psi_y(a)\|\geq 1\}$ est relativement compact, pour tout compact $K\subset coz(E)$, et tous $u\in U$ et $a\in A\setminus\{0\}$.

4.4 Opérateurs de composition pondérée bornés.

Rappelons qu'une application linéaire θ est dite bornée s'il existe un voisinage de 0 dont l'image, par cette application, est bornée.

Théorème 4.4.1. *Supposons que l'une des conditions i., ii. ou iii. du Théorème 4.3.1 est satisfaite. Alors ψC_φ est borné de E dans $CU(Y,A)$ si, et seulement si, il existe $H\in\mathcal{N}$ et $v\in V$ tels que pour tous $G\in\mathcal{N}$ et $u\in U$, il existe $\lambda>0$:*

$$P_G(u(y)\psi_y(a))\leq\lambda P_H(v(\varphi(y))a),\quad a\in A,\ y\in Y_{E,\varphi}. \tag{4.10}$$

Démonstration. Nécessité : Puisque ψC_φ est borné de E dans $CU(Y,A)$, il existe $H\in\mathcal{N}$ et $v\in V$ tels que, pour tous $G\in\mathcal{N}$ et $u\in U$, il existe $\lambda>0$ vérifiant

$$P_{G,u}(\psi C_\varphi(f))\leq\lambda,\ f\in B_{H,v}.$$

Donc,

$$P_{G,u}(\psi C_\varphi(f))\leq\lambda P_{H,v}(f),\ f\in E.$$

Par suite, pour tout $y\in Y$, on a

$$P_G(u(y)\psi_y(f(\varphi(y)))\leq\lambda\sup\{P_H(v(x)f(x)),x\in X\}. \tag{4.11}$$

Soient $y_0\in Y_{E,\varphi}$ et $a\in A$ des éléments donnés et posons $x_0:=\varphi(y_0)$.
Considérons la fonction h_n construite dans la preuve du Théorème 4.3.1 et correspondant à chacun des trois cas. En appliquant (4.11) à h_n et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$P_G(u(y_0)\psi_{y_0}(a))\leq\lambda P_H(v(\varphi(y_0))a),\ a\in A.$$

Suffisance : Supposons qu'il existe $H\in\mathcal{N}$ et $v\in V$ tels que (4.10) est valide. On se donne $G\in\mathcal{N}$ et $u\in U$. Donc, pour $f\in E$ et $y\in Y$, on a

$$P_G(u(y)\psi_y(f(\varphi(y))))\leq\lambda P_H(v(\varphi(y)f(\varphi(y))),\ y\in Y.$$

En particulier, pour $f \in B_{H,v}$, on obtient

$$P_G(u(y)\psi_y(f(\varphi(y)))) \leq \lambda,\ y \in Y.$$

Ce qui donne

$$P_{G,u}(\psi C_\varphi(f)) \leq \lambda,\ f \in B_{H,v}.$$

□

Dans le cas des opérateurs de multiplication, on obtient :

Corollaire 4.4.2. *Si E vérifie l'une des conditions i., ii. ou iii. du Théorème 4.3.1, alors M_ψ est borné de E dans $CU(X,A)$ si, et seulement si, il existe $H \in \mathcal{N}$ et $v \in V$ tels que :*

$$\forall G \in \mathcal{N}, u \in U,\ \exists \lambda > 0 : P_G(u(x)\psi_x(a)) \leq \lambda P_H(v(x)a),\quad a \in A,\ x \in\ coz(E).$$

De même, dans le cas des opérateurs de composition, on obtient :

Corollaire 4.4.3. *Si E vérifie l'une des conditions i., ii. ou iii. du Théorème 4.3.1, alors C_φ est borné de E dans $CU(X,A)$ si, et seulement si, il existe $H \in \mathcal{N}$ et $v \in V$ tels que :*

$$\forall G \in \mathcal{N}, u \in U,\ \exists \lambda > 0 : P_G(u(y)a) \leq \lambda P_H(v(\varphi(y))a),\quad a \in A,\ y \in Y_{E,\varphi}.$$

Lorsque $(A, \|\ \|)$ est un espace normé, les choses deviennent beaucoup plus faciles, à savoir :

Corollaire 4.4.4. *Supposons que $(A, \|\ \|)$ est un espace normé et que l'une des conditions i., ii. ou iii. du Théorème 4.3.1 est satisfaite. Alors ψC_φ est borné de E dans $CU(Y,A)$ si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée :*

$$\exists\ v \in V, \forall\ u \in U, \exists\ \lambda > 0 : \|u(y)\psi_y(a)\| \leq \lambda \|v(\varphi(y))a\|,\quad a \in A,\ y \in Y_{E,\varphi}. \tag{4.12}$$

En combinant convenablement les preuves des Théorèmes (4.3.11) et (4.4.1), on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.4.5. *Supposons que $E \subset CV_0(X, A)$ vérifie la propriété (C) et l'une des conditions i., ii'. ou iii. du Théorème 4.3.11. Si, pour tous $v \in V$, $G \in \mathcal{N}$ et $f \in E$, $v(N(G, v, f)$ est équicontinu sur A, alors ψC_φ est borné de E dans $CU_0(Y, A)$ si, et seulement si,* (4.10) *est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : u(y)\psi_y(a) \notin \overset{\circ}{G}\}$ est relativement compact, pour tout compact $K \subset coz(E)$, et tous $G \in \mathcal{N}$, $u \in U$ et $a \in A \setminus \{0\}$.*

Démonstration. Nécessité : (4.10) découle du Théorème 4.4.1. Comme ψC_φ est borné de E dans $CU_0(Y, A)$, il applique continûment E dans $CU_0(Y, A)$. Donc la conclusion dérive du Théorème 4.3.11.
Suffisance : D'après Théorème 4.4.1, la condition (4.10) implique que ψC_φ est borné de E dans $CU(Y, A)$. Par suite il applique continûment E dans $CU(Y, A)$. D'après Théorème 4.3.11, la deuxième condition montre que ψC_φ est à image dans $CU_0(Y, A)$. □

Dans le cas où $(A, \| \ \|)$ est un espace normé, on obtient :

Corollaire 4.4.6. *Supposons que $E \subset CV_0(X, A)$ satisfait (C) et l'une des conditions i., ii'. ou iii. du Théorème 4.3.11. Supposons aussi que, pour tous $v \in V$ et $f \in E$, l'ensemble $v(N(v, f))$ est équicontinu sur A. Alors ψC_φ est borné de E dans $CU_0(Y, A)$ si, et seulement si,* (4.12) *est vérifiée et $\varphi^{-1}(K) \cap \{y \in Y : \|u(y)\psi_y(a)\| \geq 1\}$ est relativement compact, pour tout compact $K \subset coz(E)$, et tous $u \in U$ et $a \in A \setminus \{0\}$.*

4.5 Opérateurs de composition pondérée équicontinus.

Rappelons que, si une application linéaire θ est à valeurs dans un espace de fonctions continues sur un espace topologique Z, on dit qu'elle est équicontinue sur $Z_0 \subset Z$, si l'image par θ d'un certain voisinage de 0 est équicontinue en tout point $z \in Z_0$.

Nous examinons maintenant l'équicontinuité locale de ψC_φ. Notons que, dans le cas des poids à valeurs scalaires, tout $x \in X$ admet un voisinage Ω tel que tout $v \in V$ est borné sur Ω.

Définition 4.5.1. *On dit que X est localement V-σ-borné si, pour tout $x \in X$, il existe $\Omega_x \in \mathcal{V}_x$ tel que l'ensemble $\{v(t) : t \in \Omega_x\}$ est borné dans $\mathcal{L}_\sigma(A)$, pour tout $v \in V$.*

Théorème 4.5.2. *Supposons que l'une des conditions i., ii'. ou iii. du Théorème 4.3.11 est satisfaite, que X est localement V-σ-borné, et que, pour tout $x \in X$, $V(x) \cap \mathcal{L}_{bi}(A) \neq \emptyset$. Alors ψC_φ est localement équicontinu sur $Y_{E,\varphi,\psi}$ si, et seulement si, les conditions suivantes sont remplies :*

1. *φ est localement constante sur $Y_{E,\varphi,\psi}$.*

2. *ψ est continu de $Y_{E,\varphi,\psi}$ dans $\mathcal{L}_\sigma(A)$.*

Démonstration. Nécessité : ***1.*** Supposons que φ n'est constante sur aucun voisinage de $y_0 \in Y_{E,\varphi,\psi}$ et choisissons $f_0 \in E$ avec $\psi_{y_0}(f_0(\varphi(y_0))) \neq 0$. Alors tout $\Omega \in \mathcal{V}_{y_0}$ contient un y_Ω avec $\varphi(y_0) \neq \varphi(y_\Omega)$. Considérons $f_\Omega \in C_b(X)$ tel que $0 \leq f_\Omega \leq 1$, $f_\Omega(\varphi(y_\Omega)) = 0$ et $f_\Omega(\varphi(y_0)) = 1$. L'ensemble $\{g_\Omega := f_\Omega f_0,\ \Omega \in \mathcal{V}_{y_0}\}$ est borné dans E et alors son image par ψC_φ est équicontinue en y_0. Donc, pour tout $G \in \mathcal{N}$, il existe $\Omega' \in \mathcal{V}_{y_0}$ tel que

$$\psi_y(g_\Omega(\varphi(y))) - \psi_{y_0}(g_\Omega(\varphi(y_0))) \in G,\ y \in \Omega',\ \Omega \in \mathcal{V}_{y_0}.$$

Ainsi, pour tous $\Omega \subset \Omega'$ et $y = y_\Omega$, nous obtenons $\psi_{y_0}(f_0(\varphi(y_0))) \in G$. Puisque G est arbitraire, $\psi_{y_0}(f_0(\varphi(y_0))) = 0$, ce qui est une contradiction.

2. Soient $y_0 \in Y_{E,\varphi,\psi}$ et B un ensemble borné dans A. D'après 1., il existe un voisinage Ω_0 de y_0 sur lequel φ est constante prenant une valeur x_0. Puisque X est localement V-σ-borné, il existe $\Omega_{x_0} \in \mathcal{V}_{x_0}$ tel que $\{v(t) : t \in \Omega_{x_0}\}$ est σ-borné, $\forall v \in V$. Donc, pour tous $v \in V$ et $G \in \mathcal{N}$

$$\exists M_{G,v} > 0 : P_G(v(t)b) \leq M_{G,v},\ t \in \Omega_{x_0},\ b \in B.$$

Sous la condition $i.$:

Choisissons $f_0 \in E$ et $H \in \mathcal{N}$ de sorte que $\psi_{y_0}(f_0(x_0)) \neq 0$ et $P_H(f_0(x_0)) = 1$ et considérons le sous-ensemble ouvert $U := \{x \in X : \dfrac{1}{2} < P_H(f_0(x)) < \dfrac{3}{2}\}$ contenant x_0 et $g \in C_b(X)$ tel que $g(x_0) = 1$, $0 \leq g \leq 1$ et $\mathrm{supp}(g) \subset U \cap \Omega_{x_0}$. Posons

$$K := \{gP_H o f_0 \otimes b, b \in B\}.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}P_{G,v}(gP_H of_0 \otimes b) &= \sup\{g(x)P_H(f_0(x))P_G(v(x)b) : x \in X\}\\ &\leq \sup\{P_H(f_0(x))P_G(v(x)b) : x \in U \cap \Omega_{x_0}\}\\ &\leq \frac{3}{2}M_{G,v}.\end{aligned}$$

Ainsi K est borné dans E. Par conséquent, $\psi C_\varphi(K)$ est équicontinu en y_0. D'où il existe un voisinage de y_0, Ω contenu dans Ω_0 tel que

$$\psi_y(g(\varphi(y)P_H(f_0(\varphi(y))b) - \psi_{y_0}(g(\varphi(y_0)P_H(f_0(\varphi(y_0))b) \in G,\ y \in \Omega,\ b \in B.$$

i.e.,

$$\psi_y(b) - \psi_{y_0}(b) \in G,\ y \in \Omega,\ b \in B.$$

Ceci donne $\psi_y - \psi_{y_0} \in N(B,G)$ pour tout $y \in \Omega$, ce qui montre que ψ est σ-continu en y_0. Comme y_0 est arbitraire dans $Y_{E,\varphi,\psi}$, ψ est σ-continu sur $Y_{E,\varphi,\psi}$.
Sous la condition ii'. :
Pour $b \in B$, choisissons la fonction $f_b \in C(X)$ telle que $f_b \otimes b \in E$, $f_b(x_0) = 1$ et $0 \leq f_b \leq 1$ et considérons le sous-ensemble ouvert $U_b := \{x \in X : \frac{1}{2} < f_b(x)\}$ contenant x_0 et $g_b \in C_b(X)$ tels que $g_b(x_0) = 1$, $0 \leq g_b \leq 1$ et $\mathrm{supp}(g_b) \subset U_b \cap \Omega_{x_0}$. Alors $K := \{g_b f_b \otimes b, b \in B\}$ est un borné de E. En effet

$$\begin{aligned}P_{G,v}(g_b f_b \otimes b) &= \sup\{g_b(x)f_b(x)P_G(v(x)b) : x \in X\}\\ &\leq \sup\{P_G(v(x)b) : x \in U_b \cap \Omega_{x_0}\}\\ &\leq\ M_{G,v}.\end{aligned}$$

Par conséquent $\psi C_\varphi(K)$ est équicontinu en y_0. Il existe donc un voisinage Ω de y_0, contenu dans Ω_0 et tel que

$$\psi_y(g_b(\varphi(y))f_b(\varphi(y))b) - \psi_{y_0}(g_b(\varphi(y_0))f_b(\varphi(y_0))b) \in G,\ y \in \Omega,\ b \in B.$$

i.e.,

$$\psi_y(b) - \psi_{y_0}(b) \in G,\ y \in \Omega,\ b \in B.$$

Cela donne $\psi_y - \psi_{y_0} \in N(B,G)$ pour tout $y \in \Omega$, montrant que ψ est σ-continu en y_0. Par suite, ψ est σ-continu sur $Y_{E,\varphi,\psi}$.

Sous la condition *iii.* :
Il existe $f \in C(X, \mathbb{R}^+)$ tel que $f(x_0) = 1$ et $\text{supp}(f) \subset \Omega_{x_0}$ est compact. En considérant le sous-ensemble ouvert $U := \{x \in X : \frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}\}$ et en raisonnant de la même manière que ci-dessus. On arrive à la σ-continuité de ψ sur $Y_{E,\varphi,\psi}$.
Suffisance : On se donne un ensemble borné $\mathbb{B} \subset E$, $y_0 \in Y_{E,\varphi,\psi}$ et $G \in \mathcal{N}$. D'après notre hypothèse, il existe un voisinage Ω_0 de y_0 où φ est constante prenant une valeur x_0. Choisissons $v \in V$ avec $v(x_0)$ borné inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe $H \in \mathcal{N}$ et $r > 0 : rP_G(a) \leq P_H(v(x_0)a)), a \in A$. Donc, l'ensemble

$$B := \{f(x_0), f \in \mathbb{B}\}$$

est borné dans A. Comme ψ est σ-continu en y_0, il existe un autre voisinage Ω de y_0 tel que $\Omega \subset \Omega_0$ et

$$\psi_y - \psi_{y_0} \in N(B, G),\ y \in \Omega.$$

C'est-à-dire

$$\psi_y(f(x_0)) - \psi_{y_0}(f(x_0)) \in G,\ y \in \Omega,\ f \in \mathbb{B}.$$

Ce qui donne

$$\psi C_\varphi(f)(y) - \psi C_\varphi(f)(y_0) \in G,\ y \in \Omega,\ f \in \mathbb{B}.$$

Par suite $\psi C_\varphi(\mathbb{B})$ est équicontinu en y_0 et donc sur $Y_{E,\varphi,\psi}$. □

Une conséquence triviale du Théorème 4.5.2 est

Corollaire 4.5.3. *Supposons que E satisfait les conditions du Théorème 4.5.2. Si φ n'est constante sur aucun ensemble ouvert (en particulier, si X n'a pas de point isolé et φ est injective), alors ψC_φ est localement équicontinu de E dans $C(Y, A)$ si, et seulement si, il est identiquement nul.*

Définition 4.5.4. *On dit qu'un poids v est localement équicontinu sur X, si pour tout $x \in X$, il existe $\Omega \in \mathcal{V}_x$ tel que $v(\Omega)$ est équicontinu sur A (c'est-à-dire pour tout $G \in \mathcal{N}$ il existe $H \in \mathcal{N}$ tel que $v(x)(H) \subset G$, pour tout $x \in \Omega$).*
On dit qu'une famille V est localement équicontinue sur X si tout $v \in V$ est localement équicontinu sur X.

Notons que $v(x)(H) \subset G$ n'est rien d'autre que $P_G(v(x)a) \leq P_H(a)$ pour tout $a \in A$.

Théorème 4.5.5. *Supposons que l'une des conditions i., ii'. ou iii. du Théorème 4.3.11 est satisfaite et que, pour tout $x \in X$, $V(x) \cap \mathcal{L}_{bi}(A) \neq \emptyset$. Alors ψC_φ est équicontinu sur $Y_{E,\varphi,\psi}$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *φ est localement constante sur $Y_{E,\varphi,\psi}$.*

2. *Il existe $G \in \mathcal{N}$ tel que, pour tous $y_0 \in Y_{E,\varphi,\psi}$ et $H \in \mathcal{N}$, il existe un voisinage Ω de y_0 telle que $\psi_y - \psi_{y_0} \in N(G,H)$ pour tout $y \in \Omega$.*

La réciproque est vraie si V est supposé localement équicontinue sur X.

Démonstration. Supposons que les conditions ***1.*** et ***2.*** sont satisfaites. Soit $y_0 \in Y_{E,\varphi,\psi}$. D'après ***1.***, il existe un voisinage Ω_0 de y_0 sur lequel φ est constante prenant une valeur x_0. D'après ***2.***, il existe $G \in \mathcal{N}$ tel que, pour tout $H \in \mathcal{N}$, il existe un voisinage Ω de y_0 tel que

$$\psi_y - \psi_{y_0} \in N(G,H),\ \forall y \in \Omega.$$

c'est-à-dire

$$\psi_y(a) - \psi_{y_0}(a) \in H,\ \forall y \in \Omega,\ a \in G.$$

Soit $v \in V$ tel que $v(x_0)$ est borné inférieurement. Alors il existe $G' \in \mathcal{N}$ tel que $P_G(a) \leq P_{G'}(v(x_0)a)$, $a \in A$. Pour tout $f \in B_{G',v}$, on a $f(x_0) \in G$. Donc, pour tout $y \in \Omega \cap \Omega_0$

$$\psi_y(f(\varphi(y))) - \psi_{y_0}(f(\varphi(y_0))) \in H.$$

En résumé, il existe $v \in V$ et $G' \in \mathcal{N}$ tels que pour tout $H \in \mathcal{N}$

$$\psi_y(f(\varphi(y))) - \psi_{y_0}(f(\varphi(y_0))) \in H,\ \forall y \in \Omega \cap \Omega_0,\ \forall f \in B_{G',v}$$

c'est-à-dire $\psi C_\varphi(B_{G',v})$ est équicontinu en y_0. Ainsi ψC_φ est équicontinu sur $Y_{E,\varphi,\psi}$.

Réciproquement, Supposoons que V est localement équicontinue et ψC_φ est équicontinu. Alors ψC_φ est localement équicontinu. Donc ***1.*** découle du Théorème 4.5.2. Quant à ***2.***, on se donne $y_0 \in Y_{E,\varphi,\psi}$. Puisque ψC_φ est équicontinu, il existe $G \in \mathcal{N}$ et $v \in V$ tels que $\psi C_\varphi(B_{G,v})$ est équicontinu sur $Y_{E,\varphi,\psi}$, donc en y_0. D'après ***1.***, il existe un voisinage Ω_0 de y_0 sur lequel φ est constante prenant une valeur x_0. Soit maintenant $H \in \mathcal{N}$. Comme V est localement équicontinue sur X, il existe $\Omega_{x_0} \in \mathcal{V}_{x_0}$ et $G' \in \mathcal{N}$ tels que :

$$v(x)G' \subset G \cap H, \ \forall x \in \Omega_{x_0}.$$

Sous la condition $i.$:
Il existe $f_0 \in E$ tel que $\psi_{y_0}(f_0(\varphi(y_0))) \neq 0$. Donc $f_0(\varphi(y_0)) \neq 0$ et il existe aussi $I \in \mathcal{N}$ tel que $P_I(f_0(x_0)) = 1$. Considérons le sous-ensemble ouvert

$$U := \{x \in X : \frac{1}{2} < P_I(f_0(x)) < \frac{3}{2}\}$$

contenant x_0. Il existe $g \in C_b(X)$ tel que $g(x_0) = 1$, $0 \leq g \leq 1$ et $\mathrm{supp}(g) \subset U \cap \Omega_{x_0}$. L' ensemble

$$K := \{gP_I o f_0 \otimes a, \ a \in G'\}$$

est contenu dans $\frac{3}{2}B_{G,v}$. Donc $\psi C_\varphi(K)$ est équicontinu en y_0. Par conséquent, il existe un voisinage Ω' de y_0, contenu dans Ω_0 tel que

$$\psi_y(g(\varphi(y))P_I(f_0(\varphi(y))a)) - \psi_{y_0}(g(\varphi(y_0))P_I(f_0(\varphi(y_0))a)) \in H, \ y \in \Omega', \ a \in G'.$$

C'est-à-dire

$$\psi_y(a) - \psi_{y_0}(a) \in H, \quad y \in \Omega', \ a \in G'.$$

ou encore $\psi_y - \psi_{y_0} \in N(G', H)$ pour tout $y \in \Omega'$.
Sous la condition $ii'.$:
Il existe $f_a \in C(X)$ tel que $f_a \otimes a \in E$ et $f_a(x_0) = 1$. Donc l'ensemble $U_a := \{x \in X : \frac{1}{2} < f_a(x) < \frac{3}{2}\}$ est un voisinage ouvert de x_0. Il existe $g_a \in C_b(X)$ tel que $g_a(x_0) = 1$, $0 \leq g_a \leq 1$ et $\mathrm{supp}(g_a) \subset U_a \cap \Omega_{x_0}$. L'ensemble $K := \{g_a f_a \otimes a, \ a \in G'\}$ est contenu dans $\frac{3}{2}B_{G,v}$. Donc $\psi C_\varphi(K)$ est équicontinu en y_0. Par conséquent, il existe un voisinage Ω' de y_0, contenu dans Ω_0 tel que

$$\psi_y(g_a(\varphi(y))f_a(\varphi(y))a) - \psi_{y_0}(g_a(\varphi(y_0))f_a(\varphi(y_0))a) \in H, \ y \in \Omega', \ a \in G'.$$

i.e.,

$$\psi_y(a) - \psi_{y_0}(a) \in H, \quad y \in \Omega', \ a \in G'.$$

Ce qui implique $\psi_y - \psi_{y_0} \in N(G', H)$ pour tout $y \in \Omega'$.
Sous la condition $iii.$:

Il existe $f \in C(X, \mathbb{R}^+)$ tel que $f(x_0) = 1$, $0 \leq f \leq 1$ et $\text{supp}(f) \subset \Omega_{x_0}$ est compact. La fonction $f \otimes a \in E$, pour tout $a \in G'$. L'ensemble

$$K := \{f \otimes a,\ a \in G'\}.$$

est contenu dans $B_{G,v}$. Donc $\psi C_\varphi(K)$ est équicontinu en y_0. Par conséquent, il existe un voisinage Ω' de y_0, contenu dans Ω_0 tel que

$$\psi_y(f(\varphi(y))a) - \psi_{y_0}(f(\varphi(y_0))a) \in H,\ y \in \Omega',\ a \in G'.$$

i.e.,

$$\psi_y(a) - \psi_{y_0}(a) \in H,\ y \in \Omega',\ a \in G'.$$

C'est-à-dire $\psi_y - \psi_{y_0} \in N(G', H)$ pour tout $y \in \Omega'$. $\square$

Dans le cas où $(A, \|\ \|)$ est un espace normé, on obtient :

Corollaire 4.5.6. *Supposons que l'une des conditions i., ii'. ou iii. du Théorème 4.3.11 est satisfaite, et que, pour tout $x \in X$ il existe $v \in V$ tel que $v(x)$ est borné inférieurement sur A. Alors ψC_φ est équicontinu sur $Y_{E,\varphi,\psi}$, si les deux conditions suivantes sont remplies :*

1. φ est localement constante sur $Y_{E,\varphi,\psi}$.

2. Pour tous $y_0 \in Y_{E,\varphi,\psi}$ et $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage Ω de y_0 tel que $\|\psi_y - \psi_{y_0}\| \leq \varepsilon$ pour tout $y \in \Omega$.

La réciproque est vraie si V est localement équicontinue sur X.

Ce Chapitre fait l'objet de l'article [50]

Conclusion et perspectives

Cette thèse est une contribution à l'étude des espaces à poids de Nachbin $CV(X, A)$, ensemble des fonctions continues sur un espace complètement régulier X et à valeurs dans un espace vectoriel topologique A, et à celle de certains opérateurs sur ces espaces. Nous nous sommes particulièrement intéressé à l'étude des opérateurs de multiplication, des opérateurs de composition et à ceux de composition pondérée.

Ici, nous avons repris l'étude des espaces à poids généralisés initiée par C. Shekhar et B. S. Komal. Ajustant leur définition d'une famille de Nachbin, nous avons donné, pour la première fois, une définition rigoureuse d'une famille de Nachbin généralisée et par la suite d'un espace à poids généralisé. Nous avons alors établi plusieurs propriétés de ces espaces $CV(X, A)$ dans différents contexts, à savoir lorsque A est un espace de Hilbert, un espace normé ou tout simplement un espace vectoriel topologique. Nous avons aussi donné un théorème du tyupe Stone-Weierstrass caractérisant les parties denses dans un sous-espace vectoriel E de $CV_0(X, A)$ et obtenu plusieurs théorèmes du type Arzelà-Ascoli dans des sous-espaces particuliers de $CV(X, A)$, particulièrement lorsque A est un espace normé.

L'essentiel de notre contribution cependant s'inscrit dans le cadre de l'étude des opérateurs de multiplication, des opérateurs de composition et de ceux de composition pondérée d'un sous-espace vectoriel E de $CV(X, A)$ dans un autre espace à poids généralisé $CU(Y, A)$. Nous avons obtenu plusieurs résultats caractérisant parmi ces opérateurs ceux qui sont continus, bornés inférieurement, à images dense, inversibles ou équicontinus, et ceux dans différents contexts selon la nature de A.

Parmi nos perspectives, nous projetons de :

1. Compléter l'étude des espaces à poids généralisés, particulièrement lorsque A est une

algèbre topologique d'un certain type.
2. Etudier l'inversibilité et la compacité des opérateurs considérés dans cette thèse et dont nous n'avons pas examiné ces propriétés.
3. Caractériser les différents spectres desdits opérateurs.
4. Etendre une telle étude aux espaces à poids généralisés de fonctions holomorphes ou de fonctions harmoniques sur un ouvert de $\mathbb{C}$ ou encore sur une variété ainsi que les opérateurs de multiplication, de composition ou de composition pondérée sur ces espaces.

Bibliographie

[1] M. B. Abrahamse, *Multiplication Operators : Hilbert Space Operators*, Lecture Notes in Math. (Springer-Verlag), **693** (1978), 17-36.

[2] J. Arazy, Multipliers of Bloch Functions, University of Haifa Mathematics Publication Series 54, University of Haifa, 1982.

[3] R. F. Arens, *A topology for spaces of transformations* , Ann. of Math.(2) **47** (1946), 480-495.

[4] C. Arzelà, *Funzioni di linee*, Atti della R. Accad. dei Lincei. Rend. Cl. Sei. Fis. Mat. Nat. **5** (4)(1889), 842–848.

[5] C. Arzelà, *Sulle funzioni di linee*, Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Mat., **5** (5) (1895), 55-74.

[6] G. Ascoli, *Le curve limiti di una varietà data di curve* . Atti R. Accad. Lincei, Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) **18** (1883-1884), 521-586.

[7] S. Axler, *Multiplication Operators on Bergman Spaces*, J. Reine Angew Math., 336 (1982), 26-44.

[8] S. Axler, *Zero Multipliers of Bergman Spaces*, Canad. Math. Bull., **28** (1985), 237-242.

[9] K. D. Bierstedt, *Gewichtete räume stetiger vektorwertiger funktionen und das injektive tensorproduct I*, J. Reine Angew. Math. 259 (1973), 186-210 ; II, J. Reine Angew. Math. **260** (1973), 133-146.

[10] K. D. Bierstedt, *Tensor product of weighted spaces*, Bonner Math. Schriften **81** (1975), 25-58.

[11] K. D. Bierstedt, J. Bonet, A. Galbis, *Weighted spaces of holomorphic functions on balanced domains*, Michigan Math. J. **40** (1993), no. 2, 271-297.

[12] K. D. Bierstedt, R.G. Meise, W.H. Summers, *A projective description of weighted inductive limits* , Trans. Amer. Math. Soc. **272** (1982), n. 1, 107-160.

[13] K. D. Bierstedt, J. Bonet, *Some recent results on $\mathcal{V}C(X)$* , Advances in the theory of Frechet spaces, Klawer (1989), 181-194.

[14] K. D. Bierstedt, J. Bonet, *Completeness of the (LB)-spaces $\mathcal{V}C(X)$* , Arch. Math.(Basel) **56** n.3 (1991), 281-285.

[15] K. D. Bierstedt, J. Bonet, *Weighted (LF)-spaces of Continuous Functions* , Math. Nachr. **165** n.1 ? (1994), 25-48.

[16] J. Bonet, M. C. Gomez-Collado, D. Jornet, E. Wolf, *Operator-weighted composition operators between weigheted spaces of vector-valued analytic functions.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **37**,(2012), 319-338.

[17] J. Bonet, P. Domanski, M. Lindström, *Pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic functions*, Studia Math. 137 (2) (1999), 177 194.

[18] J. Bonet, *On weighted inductive limits of spaces of continuous functions*, Math. Z., **192** (1986), 9-20.

[19] J. Bonet, D. Vukotić, *Superposition operators between weighted Banach spaces of analytic functions of controlled growth*, Monatsh Math, **170** (3) (2013), 311-323.

[20] J. Bonet, E. Wolf, *A note on weighted Banach spaces of holomorphic functions*, Arch. Math. (Basel), **81** (6) (2003), 650-654.

[21] N. Bourbaki, Topologie générale, Hermann & Cie, 1971.

[22] C. Boyd, P. Rueda, *Bergman and Reinhardt weighted spaces of holomorphic functions*, Illinois J. Math. **49**, (1) (2005), 217-236.

[23] C. Boyd, P. Rueda, *The v-boundary of weighted spaces of holomorphic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **30** (2005), 337-352.

[24] C. Boyd, P. Rueda, *Complete weights and v-peak points of spaces of weighted holonrnhic functions*, Israel J. Math. **155** (2006) 57-80.

[25] C. Boyd, P. Rueda, *Isometries of weighted spaces of holomorphic functions on unbounded domains*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh sect. A **139** (2009), 253-271.

[26] C. Boyd, P. Rueda, *The biduality problem and M-ideals in weighted spaces of holomorphic functions*, J. Convex Anal. **18**(4) (2011), 1065-1074.

[27]] C. Boyd, P. Rueda, *Superposition operators between weighted spaces of analytic functions*, Quaest. Math. **36** (2013), 411-419.

[28] H. Brézis, Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[29] N. S. Feldman, *Pointwise Multpliers from the Hardy Space to the Bergman Space*, Illinois J. Math., **43** (1999), 211-221.

[30] M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (thèse), Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **22** (1) (1906), 1-72.

[31] D. Gale, *Compact sets of functions and function rings*, Proc. Amer. Math.Soc. **1** (1950), 303-308.

[32] L. Gillman, M. Jerison, Rings of continuous functions, Grad. Texts in Math. **43**, Springer-Verlag ?, New York, (1976).

[33] P. R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, Springer-Verlag, New York, 1982.

[34] S. Izumi, *On the compactness of a class of functions*, Proc. Imp. Acad. Tokyo. **15** (1939),111-113.

[35] J.E. Jamison, M. Rajagopalan, *Weighted composition operators on $C(X, E)$*, J. Operator Theory 19 (1988), 307-317.

[36] J-S. Jeang, N-C. Wong, *Weighted composition operators of $C_0(X)'s$*, J. Math. Anal. Appl. 201 (1996), 981 993.

[37] A. Goullet de Rugy, *Espaces de fonctions pondérables*, Israel J. Math. **12** (1972), 147-160.

[38] W. Govaerts, *Homomorphisms of weighted algebras of continuous functions*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **116** (1978), 151-158.

[39] J. L. Kelley, General topology, Princeton : (Van Nostrand, 1955). ? ? ?

[40] V. Klee, *Shrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces*, Math. Ann. **141** (1960), 281 285.

[41] G. Kleinstück, *Duals of weighted spaces of continuous functions*, Bonner Math. Schriften **81**,(1975),98-114.

[42] L. A. Khan, *The strict topology on a space of vector-valued functions*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **22** (1) (1979), 35-41.

[43] L.A. Khan, *Weighted topology in the non-locally convex setting*, Mat. Vesnik. **37** (1985), 189 195.

[44] H. Kamowitz, *Compact weighted endomorphisms of C(X)*, Proc. Amer. Math. Soc., **83** (3) (1981), 517-521.

[45] B.O. Koopmann, *Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **17** (1931), 315-318.

[46] L. A. Khan, L. Oubbi :*The Arzelà-Ascoli theorem for non-locally convex weighted spaces*, Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza. **60** (2005), 107-115.

[47] J. L. Kelley, I. Namioka et co-authors : Linear topological spaces, (Van Nostrand, 1963).

[48] M. Klilou, L. Oubbi, *Multiplication operators on generalized weighted spaces of continuous functions*, Mediterr. J. Math. **13** (2016), 3265-3280. DOI 10.1007/s00009-016-0684-x.

[49] M. Klilou et L. Oubbi, *Weighted composition operators on Nachbin spaces with operator-valued weights*, Commun. Korean Math. Soc. **33** (2018), No. 4, pp. 1125-1140.

[50] M. Klilou et L. Oubbi, *Weighted composition operators on non locally convex weighted spaces*, Contemporary Math. (A.M.S.) Proceedings of the International Conference on Algebra and Related Topics (ICART 2018) (à paraitre)

[51] L. A. Khan and A. B. Thaheem, *Multiplication Operators on Weighted Spaces in the Nonlocally Convex Framework*, Internat. J. Math. & Math. Sci., **20** (1997), 75-80.

[52] L.A. Khan, A.B. Thaheem, *Operator-valued multiplication operators on weighted function spaces*, Demonstr. Math., **25** (2002), 599-605.

[53] K. Kour, B. Singh, *Weighted composition operators on non-locally convex weighted spaces of continuous functions*, J. Indian Math. Soc. 66 (1999), 17 25.

[54] M. Lindström, J. Lliavona, *Compact and weakly compact homomorphisms between algebras of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl., **166** (1992), 325-330.

[55] W. Lusky, *On weighted spaces of harmonic and holomorphic functions*, J. Lond. Math. Soc. (2) **51**,(1995), 309-320.

[56] W. Lusky, *On the structure of* $Hv_0(D)$ *and* $hv_0(D)$, Math. Nachr. **159**,(1992), 279-289.

[57] W. Lusky, *On the isomorphism classes of weighted spaces of harmonic and holomorphic functions*, Studia Math. **175**, (2006), 19-45.

[58] J.S. Manhas, R.K. Singh, *Weighted composition operators on non-locally convex weighted spaces of continuous functions*, Anal. Math. 24 (1998), 275 292.

[59] G.j. Murphy, $\mathbb{C}^*-$*algebras and operator theory.* Academic Press, Inc. (1990)

[60] S.B. Myers, *Equicontinuous sets of mappings*, Ann. of Math. (2) **47** (1946) No. 3, 496-502.

[61] L. Nachbin, Elements of approximation theory, Math. Studies, **14**, D. Van Nostrand Company , Princeton, N.J., (1967).

[62] L. Nachbin, *Weighted approximation for algebras and. modules of continuous functions : real and self-adjoint complex cases*, Ann. of Math.(2) **81**(1965) No. 2, 289-302.

[63] E.A. Nordgren, *Composition operators on Hilbert spaces*, Lecture Notes in Mathematics, **693**, Springer Verlag, Berlin (1978), 37-63.

[64] J. S. Manhas, *Multiplication Operators on Nonlocally Convex Weighted Spaces of Continuous Functions*, Indian J. Math., **45** (2003), 301-313.

[65] J. S. Manhas, *Compact Multiplication Operators on Weighted Spaces of Vector-Valued Continuous Functions*, Rocky Mountain J. Math., **34** (2004), 1047-1057.

[66] J. S. Manhas, *Compact and Weakly Compact Multiplication Operators on Weighted Spaces of Vector-Valued Continuous Functions*, Acta Sci. Math. (Szeged), **70** (2004), 361-372.

[67] L. Oubbi, *Weighted algebras of continuous functions*, Results Math. **24** (1993), 298-307.

[68] L. Oubbi, *Algèbres A-convexes à poids*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp.) , **89**(1-2) (1995), 99-110.

[69] L. Oubbi, *Weighted Composition Operators on Non-locally Convex Weighted Spaces*, Rocky Mountain J. Math. **35** (6) (2005), 2065-2087.

[70] L. Oubbi, *On different algebras contained in $CV(X)$*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **6** (1999), 111-120.

[71] L. Oubbi, *Multiplication operators on weighted spaces of continuous functions*, Port. Math. (N. S.), **59** (1) (2002), 111-124.

[72] L. Oubbi, *Extended composition operators in weighted spaces*, Port. Math. **57** (3), 329-344 (2000).

[73] J. B. Prolla, *Weighted spaces of vector-valued continuous functions*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **89** (1971), 145-158.

[74] J. B. Prolla, Approximation of Vector-valued Functions, North-Holland Mathematics Studies No. **25**, (1977).

[75] J. B. Prolla, *topological algebras of vector-valued continuous functions*, Adv. Math. Suppl. Studies, **7B**, (1981), 727-740.

[76] W. M. Ruess, W. H. Summers, *Compactness in spaces of vector-valued continuous functions and assymptotic almost periodicity* , Math. Nachr. **135** (1988), 7-33.

[77] W. Rudin, Analyse Réelle et Complexe, Third édition, Dunod, Paris, 1998.

[78] J. Schmets, Espace de Fonctions continues, Lecture Notes Math. **519** Springer-Verlag (1976)

[79] C. Shekhar, B. S. Komal, *Multiplication operators on weighted spaces of continuous functions with operator-valued weights*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. **7**, 2012, no. **38**, 1889 - 1894.

[80] B. Singh, K. Kour, *On weighted composition operators on non-locally convex function spaces*, Indian J. Pure Appl. Math. 28 (1997), 1505 1512.

[81] R. K. Singh, J. S. Manhas, *Multiplication operators on weighted spaces of continuous functions*, J. Aust. Math. Soc. (Series A), **50** (1991), 98-107.

[82] R. K. Singh, J. S. Manhas, *Multiplication operators and dynamical systems*, J. Aust. Math. Soc. (Series A) **53** (1992), 92-102.

[83] R. K. Singh and J. S. Manhas, *Multiplication Operators and Dynamical Systems on Weighted Spaces of Cross-Sections*, Proc. Amer. Math. Soc., **119** (1993), 547-554.

[84] R. K. Singh and J. S. Manhas, *Invertible Multiplication Operators on Weighted Function Spaces*, Nonlinear Anal. Forum, **6** (1) (2001), 249-256.

[85] R. K. Singh, W. H. Summers, *Composition operators on weighted spaces of continuous functions*, J. Aust. Math. Soc., **45** (A) (1988), 303-319.

[86] R. K. Singh, W. H. Summers, *Compact operators on weighted spaces of continuous functions*, J. Aust. Math. Soc. **45** (1988), 303 319.

[87] W. H. Summers, *The bounded case of the weighted approximation problems*, Lecture notes in Math. **384**, Springer-Verlag, N. York, (1974), 177-183.

[88] W. H. Summers, *The general complex bounded case of the strict weighted approximation problem*, Math. Ann. **192**(1971), 90-98.

[89] A. L. Shields and D. L. Williams, *Bounded Projections, Duality and Multipliers in Spaces of Analytic Funtions*, Trans. Amer. Math. Soc., **162** (1971), 287-302.

[90] H. Takagi and K. Yokouchi, *Multiplication and Composition Operators Between two L^p-Spaces*, Contemp. Math., (A.M.S), 232 (1999), 321-338.

[91] A. Wilansky, Topology for analysis (Ginn, Waltham 1970).

ROYAUME DU MAROC
Université Mohammed V - RABAT -
جامعة محمد الخامس – الرباط –
Faculté des sciences
كلية العلوم
CENTRE D'ETUDES DOCTORALES - SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Résumé

Cette thèse est une contribution à l'étude des espaces à poids de fonctions continues sur un espace complètement régulier X et à valeurs dans un espace vectoriel topologique A. La recherche dans ce domaine a connu un essor considérable pendant les dernières décennies. S'il est de tradition de considérer des familles V de Nachbin constituées de fonctions réelles (poids) semi-continues supérieurement sur X, nous considérons ici pour la première foisdes familles de Nachbin, définies de manière rigoureuse, dont les poids sont à valeurs opérateurs sur A. Notons qu'un tel essai a été entrepris par Shekhar et Komal dans le cas d'un espace de Hilbert H, mais leur travail contenait plusieurs imperfections. Nous avons remédié à ces imperfections et présenté un cadre approprié pour mener une étude systématique sur ces nouveaux espaces à poids, dit généralisés ou non commutatifs. Ceci constitue une belle généralisation des espaces à poids classiques. Nous nous sommes alors intéressés à certaines propriétés de ces espaces CV(X, A), telle la séparation et la complétude. Nous avons donné un théorème de densité caractérisant les parties denses dans un sous-espace vectoriel E de CV_0(X, A). Ce résultat est en fait une extension du fameux théorème de Stone-Weierstrass aux espaces à poids. Nous avons aussi obtenu plusieurs théorèmes de type Arzelà-Ascoli dans des sous-espaces particuliers de CV(X,A). Le gros de notre contribution cependant s'inscritdans l'étude des opérateurs de multiplication, de composition et de composition pondérée d'un sous-espace vectoriel E de CV(X, A) dans un autre espace à poids généralisé CU(Y, A). Nous avons obtenu plusieurs résultats concernant les propriétés topologiques de ces opérateurs dans différents contextes, selon que A est un espace de Hilbert, un espace normé ou seulement un espace vectoriel topologique.

Mots-clés : Opérateurs de multiplication, de composition ou de composition pondérée, famille de Nachbin généralisée, approximation dans les espaces à poids généralisés.

Abstract

This work is a contribution to the study of weighted spaces of continuous functions on a completely regular space X with values in a topological vector space A. The research in this area has known a considerable growth during the last decades. If traditionally the Nachbin families consist of upper semi-continuous real functions on X, we consider here for the first time, in a rigorous way, Nachbin families whose elements (the weights) take values in the algebra L(A) of continuous operators on A. Note here that such an essay has been attempted by Shekhar and Komal in the Hilbert space case H, their work contained several imperfections. We have remedied these imperfections and presented an appropriate framework to conduct a systematic study of these new weighted spaces, qualified as generalized or non commutative. This is a nice generalization of classical weighted spaces. We then characterized some properties of these spaces CV(X, A), such as separation and completeness. We gave a density theorem characterizing the dense subspaces in a vector subspace E ofCV_0(X, A). This result is actually an extension of the famous theorem of Stone-Weierstrass to weighted spaces. We have also obtained several Arzela-Ascoli type theorems in particular subspaces of CV(X, A). The essential of our contribution however concerns the study of multiplication, composition and weighted composition operators from a vector subspace E of CV(X, A) into another generalized weighted space CU(Y, A). We obtained several results concerning the topological properties of these operators in different contexts, according to whether A is a Hilbert space, a normed space or only a topological vector space.

Keywords : Multiplication, Composition or Weighted composition operators, generalized Nachbin family, approximation in Generalized weighted spaces.

✉ Faculté des Sciences, avenue Ibn Battouta, BP. 1014 RP, Rabat –Maroc
☎ 00212(05) 37 77 18 76 📠 00212(05) 37 77 42 61 ; http://www.fsr.um5.ac.ma