كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵉⵡⵍⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵙⵏⵉⵜⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴷ ⴱⵏ ⵄⴰⴱⴷⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques de l'Ingénieur

N° d'ordre 44/2020.

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par :

Omar AIT ZEMZAMI

Discipline: Mathématique

Spécialité : Algèbre

Sujet de la thèse :

Étude de la structure de certains anneaux non commutatifs.

Thèse présentée et soutenue le 12/10/2020 devant le jury composé de :

Pr. El Hassan EL Kinani	FS Meknès	Président
Pr. Aziza Rahmouni Hassani	FST Fès	Rapporteur
Pr. Mohammed Tamekkante	FS Meknès	Rapporteur
Pr. Salah Salhi	CRMEF Errachidia	Rapporteur
Pr. Najib Mahdou	FST Fès	Examinateur
Pr. Abdellah Mamouni	FS Meknès	Examinateur
Pr. Lahcen Oukhtite	FST Fès	Directeur de thèse

Laboratoire d'accueil : Modélisation et Structures Mathématiques.

Etablissement : Faculté des sciences et techniques de Fès.

A mes chers parents, source de vie, d'amour et d'affection.

A ma famille, source d'espoir et de motivation.

A tous ceux qui me sont chers.

Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués au sein du Laboratoire Algèbre, Analyse fonctionnelle et Applications de la Faculté des Sciences et Techniques de Fès. Cette thèse a été réalisée sous la direction du Professeur **Lahcen Oukhtite**.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Monsieur **Lahcen Oukhtite** de m'avoir fait profiter de son expérience dans la recherche et de la qualité de son encadrement pendant toute la durée de la thèse.

Je remercie aussi vivement le professeur **El Hassan EL Kinani**, pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant de présider ce jury.

Mes sincères remerciements vont également aux professeurs **Aziza Rahmouni Hassani**, **Mohammed Tamekkante** et **Salah Salhi** qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et d'avoir pris le temps de lire en détail ce manuscrit.

C'est également avec plaisir que je remercie chaleureusement les professeurs **Najib Mahdou** et **Abdellah Mamouni** d'avoir accepté d'être examinateurs de ce travail. C'est un honneur pour moi de leur présenter mes travaux.

Je tiens à remercier mes parents, mes frères, mes sœurs et toute ma famille pour leur soutien bienveillant tout au long de ces années. Je ne saurais oublier dans mes remerciements tout mes amis qui m'ont soutenu et encouragé à poursuivre mon travail de recherche, cette thèse contient une part d'eux même.

Contents

Author's papers involved in this thesis

1. O. Ait Zemzami and L. Oukhtite, *A study of differential prime rings with involution*, Georgian Mathematical Journal, (2019) Doi.org/10.1515/gmj-2019-2061.

2. O. Ait Zemzami, L. Oukhtite, S. Ali and N. Muthana, *On certain classes of generalized derivations*, Math. Slovaca 69 (2019), No. 5, 1023-1032.

3. O. Ait Zemzami, A. Mamouni and L. Oukhtite, *Generalized derivations on prime rings with involution*, De Gruyter Proc. Math.(2018) 317-339, Berlin, 2018.

4. O. Ait Zemzami, L. Oukhtite and H. E. Bell, *Center-like subsets in prime rings with derivations and endomorphisms*, Submitted.

Introduction

L'un des aspects les plus séduisants des mathématiques est que ses paradoxes les plus épineux peuvent s'épanouir dans de belles théories. Les mathématiques pures sont la poésie des idées logiques. Aujourd'hui, les mathématiques, en particulier les mathématiques pures, ne sont plus les mêmes qu'il y a un siècle. De nombreuses révolutions ont eu lieu et cela a pris de nouvelles formes avec le temps. Nous voudrions souligner que l'application des mathématiques pures est étonnante et est devenue un instrument essentiel dans plusieurs domaines (la physique, la mécanique quantique, la spectroscopie atomique, la physique de l'état solide, la géométrie différentielle et algébrique, les équations différentielles, la théorie espace-temps, la cryptographie. etc.)

L'un des axes perçu des mathématiques pures est la théorie des anneaux considérée comme un sujet de beauté intrinsèque. Elle est une pièce maîtresse de l'unification mathématique, rassemblant plusieurs branches du sujet et créant une machine puissante pour l'étude de problèmes d'importance historique et mathématique considérable. Cependant, l'idée d'un anneau est si fondamentale et également essentielle dans de nombreuses applications en mathématiques. En effet, elle est tellement fondamentale que de nombreux autres outils vitaux des mathématiques appliquées en sont issus. Par exemple, la notion cruciale de linéarité et d'algèbre linéaire, qui est une nécessité pratique en physique, chimie, biologie, finance, économie et ingénierie, repose sur la notion d'espace vectoriel, qui est un type particulier de module sur un anneau. Aussi de nombreuses notions fondamentales sur l'information et sa transmission (sans parler de la protection de l'information) sont toutes naturellement décrites dans le cadre de la théorie des anneaux qui doit son usage intensif à la théorie du codage : un des principaux éléments de la technologie de l'information et de l'informatique modernes. Ainsi, il y a d'innombrables applications de la théorie des anneaux. Cela sans parler d'innombrables problèmes ouverts étonnants ; l'un d'eux est celui de la commutativité d'un anneau. En effet, la commutativité des anneaux est devenue liée au comportement des éléments de l'anneau suivant des identités fonctionnelles.

Une identité fonctionnelle (IF ou FI pour functional identity) peut être décrite de manière informelle comme une relation identique impliquant tous les éléments d'un anneau R (ou plus généralement, tous les éléments d'un certain sous-ensemble de R) avec des fonctions; plus précisément, les éléments sont multipliés par les valeurs des fonctions. Le but de la théorie de l'IF est de déterminer la forme de ces fonctions, ou, lorsque cela n'est pas possible, de déterminer la structure de l'anneau admettant l'IF en question. Cette théorie s'est avérée être un outil puissant pour résoudre une variété de problèmes dans d'autres domaines mathématiques (en particulier, dans la théorie des opérateurs et d'analyse fonctionnelle). Parmi les exemples d'une IF on trouve l'identité polynomiale (IP) où les fonctions sont des polynômes et l'identité différentielle où une fonction est une dérivation. Il n'est pas toujours facile de reconnaître que le problème en question peut être interprété par une IF; c'est souvent la partie la plus intrigante du processus. Mais une fois que l'on réussit à découvrir une IF qui correspond à la théorie générale, cette théorie abstraite donne alors en règle générale les conclusions souhaitées à un haut niveau de généralité. La théorie de l'identité fonctionnelle est relativement nouvelle. Ses racines remonte à la Thèse de doctorat de Matej Brešar en 1990, qui a été suivie par une série d'articles dans lesquels il a étudié quelques IF de base, en particulier ceux concernant les applications commutantes où il a également trouvé les premières applications. Une application f commutante sur un sous emsemble S d'un anneau R est une une application $f : S \longrightarrow R$ vérifiant $f(x)x = xf(x)$ pour tout $x \in S$. Deux exemples basiques et évidents d'applications commutantes : l'application identité et toute application ayant l'image dans le centre $Z(R)$ de R. De plus, la somme et le produit d'applications commutantes sont des applications commutantes. Ainsi, par exemple, l'application:

$$f(x) = \lambda_0(x)x^n + \lambda_1(x)x^{n-1} + ... + \lambda_{n-1}(x)x + \lambda_n(x), \quad \lambda_i : R \longrightarrow Z(R)$$

est commutante pour tout choix de l'application λ_i.

Un des premiers résultats traitant les applications commutantes est celui de Divinsky en 1955 [38] qui a montré qu'un anneau artinien simple admettant un automorphisme commutant est commutatif. Deux ans après Posner [79] a prouvé que dans un anneau premier non commutatif il n'existe aucune dérivation non nulle centralisante. Vingt ans plus tard Mayne [71] a prouvé un résultat analogue à celui de Posner pour les automorphismes centralisants différents de l'identité. Des résultats similaires étendus au cas des idéaux de Lie ont été étudiés par Lanski [62], Lee [64], et au cas des idéaux à gauche par Bell et Martindale [14] et Lanski [63]. Ces résultats ont été affinés et prolongés par un certain nombre d'auteurs. Par exemple, certains chercheurs ont étudié les dérivations généralisées dans le contexte des anneaux premiers et semi-premiers (voir [39, 53, 54, 80]).

La notion de dérivation est relativement ancienne. Elle fut introduite par Newton (1642-1727) et G. W. Leibnitz (1646-1717). Son rôle joué en analyse a vu plusieurs extensions aux diverses branches mathématiques et physiques. Les dérivations constituent un socle de la physique quantique. Par ailleurs, l'introduction des dérivations en algèbre non commutative est récente. La théorie des dérivations figure dans l'inventaire des outils utilisés dans l'étude de la théorie des corps et des algèbres différentielles. L'étude des dérivations sur les algèbres de Von-Neumann a fait l'objet de plusieurs travaux. Kadison, Sakai et Ringrose (Voir [58], [59] et [60]) ont concentré leurs recherches sur l'étude des dérivations sur les C^*-algèbres et les W^*-algèbres. En 1959 Sakai a montré la conjecture de Kaplanski à savoir : Toute dérivation sur une C^*-algèbre est continue. Par ailleurs, Kadison et Sakai ont montré en 1966, que toute dérivation sur une algèbre de Von-Neumann est intérieure. Notons que les C^*-algèbres sont des anneaux semi-premiers alors que les algèbres de Von-Neumann sont des quasi-anneaux premiers.

L'étude des dérivations sur les anneaux a connu un développement remarquable au cours des 50 dernières années où de nombreux auteurs les ont étudiées, en particulier les relations entre les dérivations et la structure des anneaux, ceci grâce à E.C. Posner [79] qui en 1957 établit ces deux célèbres résultats sur les dérivations:

Premier Théorème. Dans un anneau premier de caractéristique différente de deux, si la composée de deux dérivations est aussi une dérivation alors, au moins l'une d'elles est nulle.
Un certain nombre d'auteurs ont généralisé ce théorème de plusieurs manières (voir par exemple J. Bergen[19], M. A. Chebotar [32], C. L. Chuang [35, 33], Y. Hirano et al. [51], B. Hvala [55], D. W. Jensen [56], J. Krempa [61], C. Lanski [62], W. S. Martindale [69] et Y. Ye et al. [86] où d'autres références peuvent être trouvées).

Deuxième Théorème. Un anneau premier, ayant une dérivation non nulle centralisante sur l'anneau tout entier, est nécessairement commutatif.

Le deuxième résultat a bien initié et a été extrêmement influent, au moins indirectement, pour de nombreuses questions discutées dans plusieurs articles. Pourtant les questions que pas mal de chercheurs se posent sont:

1. quelle était la motivation de Posner pour le prouver?

2. pour quelles raisons il a pu conjecturer que le théorème est vrai?

Au cours des 60 dernières années, beaucoup de travaux ont été effectués sur les applications centralisantes et commutantes. Un certain nombre d'auteurs ont étendu ces résultats en considérant des applications centralisantes sur un sous-ensemble bien approprié de l'anneau. Ainsi, en 1973, R. Awtar [6] a travaillé sur les dérivations centralisantes sur les idéaux de Lie et de Jordan. En 1984, J. H. Mayne [73] a étendu son résultat de 1976 [71] et établi que l'automorphisme ou la dérivation n'a besoin que d'être centralisante sur un idéal non nul afin d'assurer la commutativité d'un anneau premier. De nombreuses conditions concernant les applications additives impliquant généralement la même conclusion ont été étudiées par de nombreux algébristes (voir par exemple R. Awtar [6, 7, 8], H.E. Bell [9], H.E. Bell and N. Argaç [10], H.E. Bell and Martindale [14], M. Brešar [20, 22, 24, 26, 27], M. Brešar and J. Vukman [29], M. Hongan [52], J. Luh [66], J. H. Mayne [71, 72, 73, 74], K. McCrimmon [75], J. Vukman [83] et X. K. Wong [85] où d'autres références peuvent être trouvées pour une bibliographie complète.)

M. Brešar [23] a généralisé en 1991 le concept de dérivations en introduisant celui des dérivations généralisées. Dans le contexte des algèbres d'opérateurs, les dérivations généralisées sont apparues pour la première fois dans [70]. Il est facile de voir que les dérivations généralisées d'un anneau R sont exactement les applications F qui peuvent être écrites sous la forme $F = d + f$, où d est une dérivation et f est un multiplicateur à gauche, c'est-à-dire une application additive avec la propriété $f(xy) = f(x)y$ pour tout $x, y \in R$. Ainsi les dérivations généralisées pour lesquelles $d = 0$ généralisent aussi le concept des multiplicateurs à gauche.

O. Gölbasi [44] a introduit le concept des dérivations généralisées dans le cas des quasi-anneaux 3-premier, tandis que W. Jing et S. Lu [57] ont introduit le concept de dérivation de Jordan généralisée et de triple dérivation de Jordan généralisée. Ils ont même conjecturé que dans le cas où $F : R \to R$, avec R un anneau semi-premier sans 2-torsion, est une dérivation de Jordan généralisée ou bien une triple dérivation de Jordan généralisée, alors F est une dérivation généralisée. Cette conjecture a été démontrée en 2007 par Joso Vukman [84].

L'objectif principal de cette thèse est de mettre en évidence des critères de commutativité de certains types d'anneaux en étudiant le comportement des applications définies sur ces anneaux, notamment les dérivations, les dérivations généralisées et les endomorphismes.

La présente thèse est composée de cinq chapitres qui peuvent être évalués et résumés comme suit:

Une introduction aux quelques concepts de base sur la théorie des anneaux est proposée dans le premier chapitre. Ainsi nous avons rapporté les notions liées aux anneaux premiers, aux dérivations et aux dérivations généralisées, avec des résultats principaux et des exemples permettant ainsi une bonne maîtrise de ces notions.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la commutativité d'un anneau premier R muni d'une involution $*$ et admettant des dérivations généralisées satisfaisant certaines identités algébriques. En effet, motivé par les travaux de S. K. Tiwari, R. K. Sharma et B. Dhara ([82]), qui ont considéré les identités suivantes :

$$G(xy) \pm F(x)F(y) \pm yx \in Z(R) \quad \text{pour tout } \ x, y \in I;$$

$$G(xy) \pm F(y)F(x) \pm yx \in Z(R) \quad \text{pour tout } \ x, y \in I;$$

$$G(xy) \pm F(y)F(x) \in Z(R) \quad \text{pour tout } \ x, y \in I;$$

$$G(xy) \pm F(x)F(y) \pm [x, y] \in Z(R) \quad \text{pour tout } \ x, y \in I;$$

$$G(xy) \pm F(x)F(y) \in Z(R) \quad \text{pour tout } \ x, y \in I;$$

$$G(xy) \pm F(y)F(x) \pm [x, y] \in Z(R) \quad \text{pour tout } \ x, y \in I;$$

où I est un idéal non nul de l'anneau premier R, nous avons adopté les mêmes identités algébriques dans le cas d'un anneau premier muni d'une involution de deuxième espèce faisant intervenir seulement une seule variable :

$$G(xx^*) \pm F(x)F(x^*) \pm x^*x \in Z(R) \quad \text{pour tout } \ x \in R;$$

$$G(xx^*) \pm F(x^*)F(x) \pm x^*x \in Z(R) \quad \text{pour tout } \ x \in R;$$

$$G(xx^*) \pm F(x^*)F(x) \in Z(R) \quad \text{pour tout } \ x \in R;$$

$$G(xx^*) \pm F(x)F(x^*) \pm [x, x^*] \in Z(R) \quad \text{pour tout } \ x \in R;$$

$$G(xx^*) \pm F(x)F(x^*) \in Z(R) \quad \text{pour tout } \ x \in R$$

$$G(xx^*) \pm F(x^*)F(x) \pm [x, x^*] \in Z(R) \quad \text{pour tout} \ \ x \in R;$$

dans tous les cas nous avons montré que l'anneau R est nécessairement commutatif. Ce chapitre s'achève par des contre-exemples montrant la nécessité des conditions imposées dans les hypothèses de nos théorèmes.

Le chapitre qui suit est consacré aux quelques résultats sur l'étude des dérivations généralisées vérifiant des identités différentielles, ainsi dans la première section de ce chapitre on s'est appuyer sur le résultat de B. Dhara, N. Rehman et M. Raza([37], Théorème 1) pour montrer la commutativité d'un anneau R premier sans 2-torsion à involution de deuxième espèce faisant intervenir trois dérivations généralisées vérifiant l'identité :

$$F(x)G(x^*) - H(xx^*) \in Z(R) \quad \text{pour tout} \ \ x \in R;$$

Dans la deuxième section nous avons introduit de nouvelles identités différentielles faisant intervenir à la fois le commutateur et l'anti-commutateur. Nous avons montré qu'il n'existe pas de dérivation généralisée non nulle (F, d) sur un anneau premier R à involution de deuxième espèce et sans 2-torsion vérifiant l'une des conditions suivantes : $d(x \circ x^*) = F(x) \circ x^*$ ou $F(x \circ x^*) = d(x) \circ x^*$ pour tout $x \in R$.
La troisième section de ce chapitre permet de valider notre contribution par la construction des contre-exemples qui prouvent d'une part que l'involution de R soit de deuxième espèce est une condition nécessaire et d'autre part la necessite de la primalite de l'anneau R.

Dans le quatrième chapitre, nous avons étudié les classes des dérivations généralisées vérifiant l'une des propriétés suivantes :

$$F[x, y] = [F(x), y] + [F(y), x] \ \ \text{pour tout} \ \ x, y \in R \quad (C_1)$$

$$F[x, y] = F(x) \circ y - F(y) \circ x \ \ \text{pour tout} \ \ x, y \in R. \quad (C_2)$$

Dès lors nous avons introduit les notions de C_1-fonction, C_1^*-fonction, C_2-fonction et C_2^*-fonction. Notre premier résultat nous a permis de donner en plus de la commutativité de l'anneau, la forme exacte d'une dérivation généralisée.

Théorème. (Theorem 3.2.7).
Soient $(R, *)$ un anneau premier sans 2-torsion à involution de deuxième espèce et F une dérivation généralisée non nulle associée à une dérivation d. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) F est une C_1^*-fonction;
(2) F est une C_2^*-fonction;
(3) R est un anneau commutatif.
En outre, si l'assertion (2) est satisfaite, alors il existe un élément λ du centroïde étendu de R tel que $F(x) = \lambda x$ pour tout $x \in R$.

Nous avons ensuite généralisé le travail de S. Ali et N . A. Dar ([2], Main Theorem), qui ont prouvé qu'un anneau $(R, *)$ premier sans 2-torsion à involution de deuxième espèce admettant une dérivation $*$-centralisante telle que $d(Z(R) \cap S(R)) \neq \{0\}$ est nécessairement commutatif, en l'étendant au cas des dérivations généralisées.

Une autre contribution nous a permis de généraliser le travail de B. Nejjar, A. Kacha, A. Mamouni and L. Oukhtite ([76], Theorem 3.7). En effet, nous avons montré que tout anneau premier R à involution de deuxième espèce sans 2-torsion ayant une dérivation généralisée non nulle (F, d) vérifiant la propriété $F(x) \circ x^* \in Z(R)$ pour tout $x \in R$, est nécessairement commutatif.

La dernière section de ce chapitre est dédiée aux contre-exemples où nous avons montré que les restrictions imposées dans nos différents théorèmes ne sont pas superflues. En particulier, nos théorèmes ne peuvent pas s'étendre aux anneaux semi-premiers.

Dans le cinquième et dernier chapitre, nous avons défini de nouveaux ensembles. Ces derniers coïncident, dans certaines situations, avec le centre de l'anneau. Ce travail a été motivé par plusieurs résultats dans la littératures, parmi eux on trouve le résultat classique de Herstein [48] qui a prouvé que l'hypercentre $S(R)$ coïncide avec $Z(R)$ si R n'admet pas de nil idéal non nul. Chacron [30] lui, a établi l'égalité du co-hypercentre $G(R)$ avec le centre $Z(R)$ dans le cas où R est semi-premier. D'autre résultats similaires existent dans [[12], [13], [18]. [34], [42], [43]].

Récemment, H. E. Bell et M. N. Daif [16] ont introduit les nouveaux sous-ensembles suivants :

$$Z^*(R; f) = \big\{y \in R | [x, y] = [f(y), f(x)] \quad \text{for all} \;\; x \in R\big\};$$

$$Z^{**}(R; f) = \big\{y \in R | [x, y] = [f(x), f(y)] \quad \text{for all} \;\; x \in R\big\};$$

$$Z_1(R; f) = \big\{y \in R | [f(x), f(y)] = [f(y), x] + [y, f(x)] \quad \text{for all} \;\; x \in R\big\}$$

où f est une dérivation ou un endomorphisme surjectif. Ainsi, notre contribution consiste à l'introduction d'un concept plus général en considérant des sous-ensembles faisant intervenir deux dérivations dans un premier temps et deux endomorphismes non nécessairement surjectifs dans un deuxième temps.

$$Z_1(R;d_1;d_2) = \big\{y \in R | [d_1(x), d_2(y)] = [d_2(y), x] + [y, d_1(x)] \quad \text{for all} \;\; x \in R\big\};$$

$$Z^{\wedge\wedge}(R;T_1;T_2) = \{y \in R | [x, y] = [T_1(x), T_2(y)] = [T_2(x), T_1(y)] \quad \text{for all} \;\; x \in R\}.$$

Ceci nous a permis de généraliser les résultats suivants : ([16], Theorem 2.5) et ([16], Theorem 3.4).

Chapter 0

Preliminaries (In French)

L'objectif de ce chapitre est d'introduire quelques définitions préliminaires, concepts de base et fondamentaux, ce qui va nous permettre le développement du sujet du présent mémoire.

0.1 Anneaux premiers et semi-premiers

Le but de cette section est d'introduire deux classes importantes d'anneaux, les anneaux premier et les anneaux semi-premiers. Dans tout ce chapitre, Les anneaux considérés sont associatifs non commutatifs et non nécessairement unitaires.

Définition 0.1.1 *Le centre d'un anneau R est l'ensemble des éléments de R qui commutent avec tous les éléments de R. On le note $Z(R)$:*
$Z(R) = \{a \in R/\forall x \in R, ax = xa\}$.

Définition 0.1.2 *Soit un entier $n > 1$. On dit que R est sans n-torsion si, pour tout $x \in R$, $nx = 0$ entraîne $x = 0$.*

Définition 0.1.3 *On dit qu'un anneau R est de caractéristique n si n est le plus petit entier naturel non nul tel que $nx = 0$ pour chaque $x \in R$.*

Remarques.

- Dans le cas où R est un anneau unitaire, la condition $nx = 0$ pour chaque $x \in R$ est équivalente à $n1 = 0$. Si un tel nombre naturel n n'existe pas, alors nous disons que R est de caractéristique 0. La caractéristique de R sera notée $char(R)$.

- Si R est sans n-torsion alors, $char(R) \neq n$ de plus si R est un anneau premier on a l'équivalence : $char(R) \neq n \Leftrightarrow R$ est sans de n-torsion. En effet, supposons que R est de n-torsion donc il existe $a \in R \backslash \{0\}$ tel que $na = 0$ d'où $naRx = \{0\}$ pour tout $x \in R$. Par conséquent $aRnx = \{0\}$ pour tout $x \in R$. R est premier et $a \neq 0$, impliquent que $nx = 0$ pour tout $x \in R$ il induit donc, $char(R) = n$.

Définition 0.1.4 *Un idéal P de R est premier si $aRb \subseteq P$ entraîne $a \in P$ ou $b \in P$, pour tout $a, b \in R$.*

Définition 0.1.5 *Un anneau est dit premier si l'idéal $\{0\}$ est premier.*

Proposition 0.1.6 *Soit P un idéal de R, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*
1) P est premier*;*
2) $IJ \subset P \implies I \subset P$ ou $J \subset P$, pour tout I et J idéaux de R;
3) $xRy \subseteq P \implies x \in P$ ou $y \in P$, pour tout $x, y \in R$.

Proposition 0.1.7 *Soit R un anneau. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
1) R est premier;
2) $xRy = \{0\} \implies x = 0$ ou $y = 0$, pour tout $x, y \in R$;
3) $IJ = \{0\} \implies I = \{0\}$ ou $J = \{0\}$, pour tout I et J idéaux de R.

Remarque. La notion de primalité généralise l'intégrité, lorsque l'anneau est commutatif.

Exemple :
$M_n(\mathbb{R})$ est un anneau premier.

Définition 0.1.8 *On dit qu'un idéal I d'un anneau R est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^n = \{0\}$.*

Remarque. Dans un idéal nilpotent tous les éléments sont nilpotents la réciproque n'est pas vraie.

Définition 0.1.9 *Un anneau est dit semi-premier s'il n'admet aucun idéal nilpotent autre que son idéal trivial $\{0\}$.*

Proposition 0.1.10 *Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
1) R est semi-premier;
2) l'intersection de ses idéaux premiers est réduite à $\{0\}$;
3) $aRa = 0$ implique que a=0, pour tout $a \in R$.

Remarque. Un idéal d'un anneau premier est encore un anneau premier. De même, l'idéal d'un anneau semi-premier est aussi un anneau semi-premier.

Définition 0.1.11 *Soit $(R, +, .)$ un anneau. L'anneau opposé de R noté $(R^o, +, \circ)$ est tel que $R^o = R$ et $x \circ y = y.x$ pour tout $x, y \in R$.*

Remarque. Tout anneau premier est semi-premier, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

Contre-exemple :
Soient A un anneau premier et R l'anneau défini par $R = A \times A^0$.
Soit $(x, y) \in R$ tel que $(x, y)R(x, y) = 0$, alors

$$xAx = 0 \text{ et } yAy = 0.$$

Or A est premier, donc on obtient $(x, y) = (0, 0)$. D'où R est semi-premier.
D'autre part, on a bien $(1, 0)R(0, 1) = 0$, donc l'anneau R n'est pas premier.

0.2 Involution

Définition 0.2.1 *Une involution sur un anneau R est une application $* : R \longrightarrow R$ vérifiant les conditions suivantes pour tout $a, b \in R$:*

1. $(a + b)^* = a^* + b^*$
2. $(ab)^* = b^* a^*$
3. $(a^*)^* = a$

Autrement dit : $*$ est un anti-automorphisme d'ordre 2.

Exemples :
1- La conjugaison $\sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par : $\sigma(z) = \overline{z}$ est une involution sur $\mathbb{C}$.

2- Si K est un corps, alors l'application transposition :

$$\begin{array}{rccl} t : & M_n(K) & \longrightarrow & M_n(K) \\ & (a_{ij}) & \longmapsto & (a_{ji}) \end{array}$$

est une involution de $M_n(K)$.

3- Si K est un corps, alors l'application

$$\begin{array}{rccl} * : & M_2(K) & \longrightarrow & M_2(K) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{array}$$

est une involution de $M_2(K)$.

4- Soit R un anneau non commutatif et R^o son anneau opposé. L'application

$$\begin{array}{rccl} \tau_{ex} : & R \times R^o & \longrightarrow & R \times R^o \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$$

est une involution dite involution d'échange.

Définition 0.2.2 *Soit $(R, *)$ un anneau à involution*

- *Un élément x de R est dit hermitien si $x^* = x$ et anti-hermitien si $x^* = -x$.*
- *$H(R) = \{x \in R \mid x^* = x\}$ est l'ensemble des éléments symétriques de R.*
- *$S(R) = \{x \in R \mid x^* = -x\}$ est l'ensemble des éléments anti-symétriques de R.*
- *Un anneau à involution $(R, *)$ est dit normal si tous ses éléments sont normaux c.à.d $xx^* = x^*x$ pour tout $x \in R$.*

Définition 0.2.3 *Une involution $*$ est dite de deuxième espèce si sa restriction au centre n'est pas réduite à l'identité, sinon elle est dite de première espèce.*

Remarques. Soit $(R, *)$ un anneau à involution on a:

- $*$ est de première espèce si $Z(R) \subset H(R)$.
- Si $*$ est de deuxième espèce, alors $S(R) \cap Z(R) \neq \{0\}$. En effet, il existe $z_0 \in Z(R)$ tel que $z_0^* \neq z_0$, d'où $s = z_0 - z_0^* \in Z(R) \cap S(R) \backslash \{0\}$.
  De plus si R est premier alors $s^2 \in Z(R) \cap H(R) \backslash \{0\}$.
- Si $char(R) = 2$ alors $S(R) = H(R)$.

Définition 0.2.4 *Un anneau R est appelé $*$-premier si $IJ = 0 \implies I = 0$ ou $J = 0$, pour tout I et J des $*$-idéaux de R.*

Proposition 0.2.5 *Soit $(R, *)$ un anneau à involution alors les assertions suivantes sont équivalentes:*
1) R est $*$-premier;
2) Pour tout $a, b \in R$, si $aRb = aRb^* = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$,
3) $aRb = a^*Rb = 0 \implies a = 0$ ou $b = 0$, pour tout $a, b \in R$.

On note que tout anneau premier muni d'une involution $*$ est un anneau $*$-premier. En revanche, la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple :
Soient R un anneau premier, R^o son opposé, et τ_{ex} l'involution d'échange définie sur $\mathcal{R} = R \times R^o$. On a bien vu que $\mathcal{R}$ n'est pas premier. Pour montrer que $\mathcal{R}$ est τ_{ex}-premier on prend deux τ_{ex}-idéaux de $\mathcal{R}$, L et K, tels que $LK = (0)$. Alors $L = N \times N$ et $K = J \times J$ avec N et J sont deux idéaux de R tels que $NJ = 0$. Puisque R est premier, on obtient $N = (0)$ ou $J = (0)$. Par suite, $L = (0)$ ou $K = (0)$ prouvant ainsi que $\mathcal{R}$ est τ_{ex}-premier.

Notations : Dans toute cette thèse on note

- Le *crochet de Lie* ou *le commutateur* de x et y par: $[x, y] = xy - yx$ pour tout $x, y \in R$.
- Le *produit de Jordan* ou l'*anti-commutateur* de x et y est défini par: $x \circ y = xy + yx$ pour tout $x, y \in R$.

Propriétés 0.2.6 *Soient x, y et z dans R on a:*

- $[x, y] = -[y, x]$;
- $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$;
- $[x, yz] = y[x, z] + [x, y]z$;
- $(xy) \circ z = x(y \circ z) - [x, z]y = (x \circ z)y + x[y, z]$;
- $x \circ (yz) = (x \circ y)z - y[x, z] = y(x \circ z) + [x, y]z$.

0.3 Anneaux des quotients de Martindale

En théorie des anneaux, un domaine commutatif peut être injecté dans un corps, son corps des fractions. Il est donc naturel de chercher une analogie pour les anneaux non commutatifs. Le manque de commutativité engendre des

difficultés considérables. Néanmoins, diverses généralisations de la construction du corps des fractions existent en théorie des anneaux non commutatifs. Nous en discuterons quelques-unes : anneaux centraux des quotients, anneaux classiques des fractions et anneaux des quotients de Martindale.
Une vision sur la construction du corps des fractions $\widehat{Z}$ d'un domaine commutatif Z montre que cela dépend fortement de la commutativité. Il n'y a pas de moyen évident de l'éviter. Cependant, dans cette première discussion, nous allons utiliser essentiellement la même construction pour un anneau non commutatif R, mais ne permet que les éléments dans le centre $Z = Z(R)$ en tant que «dénominateur». Plus précisément, on suppose que les éléments non nuls de Z satisfont à la condition (évidemment nécessaire) de la prochaine définition, et élargir R de manière à ce que ces éléments deviennent inversibles dans le nouveau anneau plus grand.

Définition 0.3.1 *Un élément non nul dans un anneau R est dit* ***régulier*** *s'il n'est pas un diviseur de zéro à gauche ou à droite.*

✠ **Construction de l'anneau central des quotients** $Q_Z(R)$.

Nous supposons que R est un anneau quelconque tel que son centre Z soit non nul, et que tous les éléments de $Z \setminus \{0\}$ soient réguliers; en particulier, Z est un domaine commutatif. On définit une relation binaire sur $R \times Z \setminus \{0\}$ par :

$$(r, z) \sim (r', z') \quad \Longleftrightarrow \quad rz' = r'z.$$

Il est facile de vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence. En outre l'ensemble quotient $Q_Z(R)$ muni de l'addition et la multiplication :

$$\begin{aligned} rz^{-1} + sw^{-1} &:= (rw + sz)(zw)^{-1}, \\ rz^{-1}.\, sw^{-1} &:= rs(zw)^{-1}. \end{aligned}$$

est un anneau.

Définition 0.3.2 $Q_Z(R)$ *est appelé* anneau central des quotients *de R.*

Remarque. Peu importe si R est unitaire ou non, $Q_Z(R)$ l'est. Son unité est $z_0 z_0^{-1}$, où z_0 est un élément arbitraire dans $Z \setminus \{0\}$. Le centre de $Q_Z(R)$, que nous désignons par $\widehat{Z}$, est facilement vu comme composé d'éléments de la forme zw^{-1}; $z, w \in Z,\ w \neq 0$. Si $z \neq 0$, alors wz^{-1} est l'inverse de zw^{-1}. Cependant, $\widehat{Z}$ est un corps qui n'est autre que le corps des fractions de Z.

La construction précédente a résolu le problème dans un cas particulier, ce qui donne un autre volet pour la recherche. Étant donné un anneau R, est-il possible de construire un anneau plus grand Q tel que tous les éléments réguliers dans R, non seulement ceux du centre, sont inversibles dans Q ? Plus précisément, pouvons-nous construire Q de telle sorte que l'ensemble des éléments réguliers jouant le rôle de $Z \setminus \{0\}$ est valable pour Q ? La réponse n'est pas aussi simple que pour l'anneau central de quotients. C'est certainement positive pour certains anneaux (pour un domaine commutatif, par exemple). Mais cela peut être aussi impossible, comme le Théorème suivant l'indique.

Théorème (Théorème de Ore)
Un anneau R a un anneau classique des fractions à droite ssi, R satisfait la condition de Ore à droite i.e. $rS \cap sR \neq \emptyset$ pour tout $r \in R$ $s \in S$.

Définition 0.3.3 *Soit R un anneau et S l'ensemble de tous les éléments réguliers de R. Un anneau Q est appelé* anneau classique des fractions à droite *de R s'il possède les propriétés suivantes :*
(a) *Q est un anneau unitaire contenant R comme un sous-anneau.*
(b) *Chaque élément dans S est inversible dans Q.*
(c) *Chaque élément dans Q est de la forme rs^{-1}, où $r \in R$ et $s \in S$.*

Il est clair que les éléments non réguliers de R ne peuvent pas être inversés dans un anneau plus grand quelconque. L'existence d'un anneau classique des fractions à droite de R est donc la meilleure possibilité que nous espérons si nous souhaitons rendre autant d'éléments dans R inversibles que possible.

Remarque. L'anneau classique des fractions à gauche de R est défini de manière analogue, on remplace rs^{-1} par $s^{-1}r$ dans (c) de la définition précédente.

Bien entendu, des résultats similaires sont valables pour l'anneau classique des fractions à gauche. On définit la condition de Ore à gauche comme $Sr \cap Rs \neq \emptyset$ pour tout $r \in R$ et $s \in S$, et pour la construction de l'anneau classique des fractions à gauche $Q_{lc}(R)$ de R. En d'autres termes, si les conditions de Ore à gauche et à droite sont réalisées, alors $Q_{rc}(R) \cong Q_{lc}(R)$.

Dans cette partie, nous allons remplacer le rôle des idéaux à droite contenant des éléments réguliers par les idéaux bilatéraux (plus faciles à manipuler) non nuls. Malgré les similitudes techniques, la philosophie derrière ces deux constructions est différente. Le but dans la construction suivante n'est pas de rendre les éléments réguliers inversibles, mais de fournir un anneau plus grand qui peut être utilisé comme un outil pour résoudre les problèmes concernant l'anneau original.

✠ Construction d'anneau des quotients de Martindale à droite $Q_r(R)$

Soit $R \neq \{0\}$ un anneau premier. L'ensemble $\mathcal{J}$ de tous les idéaux non nuls de R est stable par multiplication et donc également sous des intersections finies. Nous définissons sur l'ensemble de toutes les paires (f, I), où $I \in \mathcal{J}$ et $f : I \to R$ un homomorphisme de $R-$module à droite, la relation binaire suivante: $(f, I) \sim (g, J)$ si et seulement si, f et g coïncident sur un certain $K \in \mathcal{J}$ tel que $K \subseteq I \cap J$. On vérifie aisément que $\sim$ est une realtion d'équivalence. Désignons par $[f, I]$ la classe d'équivalence associée à (f, I), et par $Q_r(R)$ l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation. On définit sur $Q_r(R)$ une addition et une multiplication de la manière suivante :

$$[f_1, I_1] + [f_2, I_2] := [f_1 + f_2, I_1 \cap I_2],$$

$$[f_1, I_1].[f_2, I_2] := [f_1 f_2, I_2 I_1]$$

Ces opérations confèrent à $Q_r(R)$ une structure d'anneau.

Définition 0.3.4 $Q_r(R)$ *s'appelle* **l'anneau des quotients de Martindale à droite** *de R.*

Notons que l'anneau des quotients de Martindale à gauche $Q_l(R)$ se construit de manière analogue par l'homomorphisme de $R-$module à gauche et en général, $Q_r(R) \ncong Q_l(R)$.

Théorème 0.3.5 ([28], Theorem 7.23)
Soit $R \neq \{0\}$ un anneau premier, et soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des idéaux non nuls de R. L'anneau $Q_r(R)$ possède les propriétés suivantes:
(a) $Q_r(R)$ *est un anneau unitaire contenant R comme un sous anneau.*
(b) *Pour tout $q \in Q_r(R)$ il existe $I \in \mathcal{J}$ tel que $qI \subseteq R$.*
(c) *Pour tout $q \in Q_r(R)$ et $I \in \mathcal{J}$, $qI = 0$ implique $q = 0$.*
(d) *Si $I \in \mathcal{J}$ et $f : I \to R$ un homomorphisme de $R-$module à droite, alors il existe $q \in Q_r(R)$ tel que $f(x) = qx$ pour tout $x \in I$.*

Les propriétés ci-dessus caractérisent $Q_r(R)$ à isomorphisme près.

Exemple :
Si R est un anneau simple unitaire, alors $Q_r(R) = R$. En effet, R a évidemment les propriétés $(a) - (c)$, et vérifions qu'il satisfait également (d) : Si $f : R \to R$ est un homomorphisme de $R-$module à droite, alors $f(x) = f(1x) = f(1)x$ pour tout $x \in R$.

Définition 0.3.6 *Le centre de* $Q_r(R)$ *est appelé le* **centroïde étendu** *de* R *et noté* C.

Théorème 0.3.7 ([28], Theorem 7.33)
Le centroïde étendu C *d'un anneau premier non nul* R *est un corps.*

Brešar (1993), en utilisant le centroïde étendu, a caractérisé les dérivations f, g et h d'un anneau premier vérifiant $f(x) = ag(x) + h(x)b$ pour tout $x \in R$ où a et b des éléments de R. Plus exactement il a montré le résultat suivant :

Théorème 0.3.8 ([25], Theorem 2.1)
Soit R *un anneau premier et soient* f, g, h *des dérivations de* R. *On suppose qu'il existe* $a, b \in R$ *tels que* $f(x) = ag(x) + h(x)b$ *pour tout* $x \in R$.
Si $a \notin Z(R)$ *et* $b \notin Z(R)$, *alors il existe* $\lambda \in C$ *(Centroïde étendu de* R*), tels que* $f(x) = [\lambda ab, x]$, $g(x) = [\lambda b, x]$ *et* $h(x) = [\lambda a, x]$ *pour tout* $x \in R$.

0.4 Dérivations et dérivations généralisées

Définition 0.4.1 *Une application additive* $d : R \longrightarrow R$ *est une dérivation de* R *si* $d(xy) = d(x)y + xd(y)$, *pour tout* x, y *dans* R.

Exemples :
1- La dérivée usuelle dans l'algèbre constituée des fonctions dérivables d'un ensemble donné est une dérivation.

2- Pour tout élément $a \in R$, l'application :

$$\begin{array}{llll} d_a : & R & \longrightarrow & R \\ & x & \longmapsto & [a, x] \end{array}$$

est une dérivation appelée la *dérivation intérieure* de R associée à a.

3- L'application

$$\begin{array}{llll} d : & M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

est une dérivation.

Théorème 0.4.2 (Premier Théorème de Posner ([79], Théorème 1))
Soient R *un anneau premier de caractéristique différente de* 2, d_1 *et* d_2 *deux dérivations de* R *telles que leur composée* $d_1 \circ d_2$ *soit aussi une dérivation. Alors* d_1 *ou* d_2 *est nulle.*

Définition 0.4.3 *Une application $f : R \longrightarrow R$ est centralisante sur une partie S de R, si $[f(x), x] \in Z(R)$ pour tout $x \in S$. En particulier, si $[f(x), x] = 0$ pour tout $x \in S$, alors f est dite commutante sur S.*

Exemple :
Soient A un anneau et $R = M_2(A)$.
$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} / a, b \in A \right\}$ est un sous-anneau de R. En outre, l'application

$$\begin{array}{rccl} d: & R & \longrightarrow & R \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

est une dérivation de R centralisante sur S.

Théorème 0.4.4 (Deuxième Théorème de Posner, [79]) *La seule dérivation centralisante dans un anneau premier non commutatif est la dérivation nulle.*

Remarque. Il est évident par l'exemple suivant que le deuxième théorème de Posner ne peut pas être étendu pour des anneaux arbitraires. Considérons un anneau $R = R_1 \times R_2$, où R_1 et R_2 sont des anneaux non nuls. Si R_1 est un anneau commutatif ayant une dérivation non nulle d_1 et R_2 est un anneau non commutatif, alors R est non commutatif et $d(x_1, x_2) = (d_1(x_1), 0)$ est une dérivation commutante non nulle sur R. Cependant, R n'est pas commutatif. Ceci est un exemple trivial, mais il explique bien pourquoi l'hypothèse de primalité est nécessaire dans le deuxième théorème de Posner.

Soit f un automorphisme d'un anneau R. Si on pose $\Delta = f - id_R$ alors Δ satisfait l'identité suivante :

$$\Delta(xy) = \Delta(x)f(y) + x\Delta(y)$$

Motivé par cette remarque, Mayne a prouvé l'analogue du theoreme de Posner pour les automorphismes comme suit :

Théorème 0.4.5 ([71]) *Si R est un anneau premier admettant un automorphisme centralisant non trivial, alors R est un anneau commutatif.*

Brešar [25] a décrit la structure d'une application additive arbitraire centralisante sur un anneau premier et a prouvé le résultat suivant:

Théorème 0.4.6 *([25], Theorem A) Soient R un anneau premier et F une application additive centralisante sur R. Si R est de caractéristique différente* *de deux ou F est commutante sur R, alors F est de la forme $F = \lambda id_R + \zeta$, où λ est un élément du centroïde étendu C de R et ζ est une application additive de R dans C.*

Définition 0.4.7 *Une application additive $F : R \to R$ est une dérivation généralisée s'il existe une dérivation d sur R telle que $F(xy) = F(x)y + xd(y)$, pour tout $x, y \in R$.*
Dans ce cas, on dit que F est une dérivation généralisée associée à d.

Exemples :
1- La dérivation d'un anneau R.

2- Le multiplicateur à gauche (application additive satisfaisant : $f(xy) = f(x)y$ pour tout $x, y \in R$).

3- Toute application de la forme $F(x) = ax + xb$ (où a, $b \in R$).

Remarque. Une dérivation généralisée n'est pas forcément une dérivation.

Contre-exemple :
Soient R un anneau et $a, b \in R$. L'application

$$\begin{aligned} F_{a,b} : \quad R &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto ax + xb \end{aligned}$$

est une dérivation généralisée qui n'est pas une dérivation. En effet, pour tout $x, y \in R$ on a $F_{a,b}(xy) = F_{a,b}(x)y + xd_b(y)$, où d_b est la dérivation intérieure associée à b.

Il est clair que le premier théorème de Posner concernant la composée de deux dérivations ne peut être étendu au cas des dérivations généralisées, néanmoins il existe un résultat de B. Hvala [55]:

Théorème 0.4.8 *([55], Theorem 1) Soient R un anneau premier sans 2-torsion, $R_c = RC$ la clôture centrale et $F_1, F_2 : R \longrightarrow R$ deux dérivations généralisées. La composée $F_1 o F_2$ est aussi une dérivation généralisée si,et seulement si, l'une des propriétés suivantes est vérifiée:*

- *il existe $\lambda \in C$ tel que soit $F_1(x) = \lambda x$ ou bien $F_2(x) = \lambda x$;*
- *il existe $a, b \in Q_r(R_c)$ tels que $F_1(x) = xa$ et $F_2(x) = xb$;*

- *il existe* $a, b \in Q_r(R_c)$ *tels que* $F_1(x) = ax$ *et* $F_2(x) = bx$;
- *il existe* $a, b \in Q_r(R_c)$ *et* $\lambda, \mu \in C$ *tels que* $F_1(x) = ax + xb$ *et* $F_2(x) = \lambda x + \mu(ax - xb)$.

Théorème 0.4.9 *([55], Theorem 2) Soient* R *un anneau premier (non commutatif) sans 2-torsion et* $F_1, F_2 : R \longrightarrow R$ *deux dérivations généralisées non nulles satisfaisant:*
$[F_1(x), F_2(x)] = 0$ *pour tout* $x \in R$.
Alors, il existe $\lambda \in C$ *tel que* $F_1(x) = \lambda F_2(x),\ x \in R$.

Un résultat analogue à celui de Posner au anneaux $*$-premiers impliquant les dérivations généralisées est:

Théorème 0.4.10 *([78], Theorem 1) Soient* R *un anneau* $*$*-premier sans 2-torsion et* F *une dérivation généralisée associée à la dérivation non nulle* d*. Si* F *est centralisante sur un* $*$*-idéal de Jordan* J *non nul, alors* R *est commutatif.*

Définition 0.4.11 *Une application additive* $d : R \to R$ *est une dérivation de Jordan si* $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$ *pour tout* $x \in R$.

Proposition 0.4.12 *([46]) Soit* R *un anneau sans 2-torsion et* d *une dérivation de Jordan, alors on a :*

- $d(x \circ y) = d(x) \circ y + x \circ d(y)$, *pour tout* $x, y \in R$
- $d(xyx) = d(x)yx + xd(y)x + xyd(x)$, *pour tout* $x, y \in R$
- $d(xyz + zyx) = d(x)yz + xd(y)z + xyd(z) + d(z)yx + zd(y)x + zyd(x)$, *pour tout* $x, y, z \in R$

Remarque. Toute dérivation est une dérivation de Jordan, la réciproque n'est pas vraie en général.

Exemple :
Soient R un anneau de caractéristique différente de 2 et $a \in R$ tel que $xax = 0$ pour tout $x \in R$, mais $xay \neq 0$ pour $x \neq y \in R$. L'application définie par $d(x) = ax$ pour tout $x \in R$ est une dérivation de Jordan, laquelle n'est pas une dérivation.

Théorème 0.4.13 ([47], Theorem 3.3), *Toute dérivation de Jordan dans un anneau premier de caractéristique différente de 2 est une dérivation.*

Une généralisation de ce Théorème au cas d'un anneau semi-premier sans 2-torsion a été donné par Cusack [36].

Définition 0.4.14 *Une application additive F sur R est une dérivation généralisée de Jordan s'il existe une dérivation de Jordan d telle que $F(x^2) = F(x)x + xd(x)$ pour tout $x \in R$. Dans ce cas, on dit que F est une dérivation généralisée de Jordan associée à d.*

Toute dérivation de Jordan d est une dérivation généralisée de Jordan associée à d, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

0.5 Semi-dérivations

Bergen dans [17], a introduit la notion d'une semi-dérivation sur un anneau R comme suit : une application additive $d : R \to R$ est appelée une semi-dérivation s'il existe une fonction $g : R \longrightarrow R$ tel que

1. $d(xy) = d(x)g(y) + xd(y) = d(x)y + g(x)d(y)$ et
2. $d(g(x)) = g(d(x))$ pour tout x, y dans R.

Dans le cas où g est l'application identité sur R, d est une dérivation. En outre si $g : R \to R$ est un homomorphisme où $g \neq id_R$, alors $d = g - id_R$ est une semi-dérivation qui n'est pas une dérivation.
Un autre exemple donnant l'existence d'une semi-dérivation, laquelle n'est pas une dérivation est:

Contre-exemple :
Soit $R = R_1 \times R_2$ où R_1 et R_2 sont deux anneaux. Soient $f_1 : R_1 \to R_1$ une application additive et $f_2 : R_2 \to R_2$ un homomorphisme de R_2-module à gauche et à droite qui n'est pas une dérivation. Soient

$$\begin{aligned} d: \quad R &\longrightarrow R \\ (r_1, r_2) &\longmapsto (0, f_2(r_2)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g: \quad R &\longrightarrow R \\ (r_1, r_2) &\longmapsto (f_1(r_1), 0). \end{aligned}$$

Alors on peut conclure que d est une semi-dérivation qui n'est pas une dérivation.

Dans le cas où R est un anneau premier et $d \neq 0$, J. C. Chang [31] a montré que g est nécessairement un endomorphisme d'anneau.

En 1990 M. Brešar a donné une classification des semi-dérivations comme suit:

Théorème 0.5.1 ([21], Theorem) *Soient R un anneau premier et d une semi-dérivation associée à une fonction g, alors d est une dérivation ordinaire ou il existe $\lambda \in C$ où C est le centroïde étendu de R tel que $d = \lambda(id_R - g)$ où g est un endomorphisme.*

Chapter 1

Generalized derivations on prime rings with involution

O. Ait Zemzami , A. Mamouni and L. Oukhtite, *Generalized derivations on prime rings with involution*, De Gruyter Proc. Math.(2018) 317-339, Berlin, 2018.

Abstract. In the present chapter, we study some commutativity criteria for a prime ring with involution (R, $*$) which admits generalized derivations F and G satisfying various identities. Further, examples are given to demonstrate that the restrictions imposed on the hypothesis of our results are not superfluous.

1.1 Introduction

Throughout this chapter R will represent an associative ring with center $Z(R)$. For any $x, y \in R$, the symbol $[x, y]$ will denote the commutator $xy - yx$; while the symbol $x \circ y$ will stand for the anti-commutator $xy + yx$. R is prime if $aRb = 0$ implies $a = 0$ or $b = 0$. An additive map $* : R \longrightarrow R$ is called an involution if $*$ is an anti-automorphism of order 2; that is $(x^*)^* = x$ for all $x \in R$. An element x in a ring with involution $(R, *)$ is said to be hermitian if $x^* = x$ and skew-hermitian if $x^* = -x$. The sets of all hermitian and skew-hermitian elements of R will be denote by $H(R)$ and $S(R)$, respectively. The involution is said to be of the first kind if $Z(R) \subseteq H(R)$, otherwise it is said to be of the second kind. In the later case $S(R) \cap Z(R) \neq (0)$. An element x is *normal* if $xx^* = x^*x$. If all elements in R are normal, then R is called a *normal ring* (or equivalently, $*$ is commuting).

An additive mapping $d : R \longrightarrow R$ is a derivation on R if $d(xy) = d(x)y+xd(y)$ for all $x, y \in R$. Let $a \in R$ be a fixed element. A map $d : R \longrightarrow R$ defined by $d(x) = [a, x] = ax - xa$, $x \in R$, is a derivation on R, which is called an inner derivation defined by a. In [23], Brešar introduced the notion of generalized derivations in rings: an additive mapping $F : R \longrightarrow R$ is called generalized derivation if there exists a derivation d such that $F(xy) = F(x)y+xd(y)$ holds for all $x, y \in R$, and d is called the associated derivation of F. Obviously, the concept of generalized derivations covers both the concepts of a derivation and of a left multiplier (i.e., an additive mapping satisfying $f(xy) = f(x)y$ for all $x, y \in R$). Basic examples of generalized derivations are the following: (i) $F(x) = ax + xb$ for $a, b \in R$; (ii) $F(x) = ax$ for some $a \in R$.

Many results in the literature indicate how the global structure of a ring R is often tightly connected to the behavior of additive mappings defined on R. Recently many authors have studied commutativity of prime and semi-prime rings admitting suitably constrained additive mappings, as automorphisms, derivations, skew derivations and generalized derivations acting on appropriate subsets of the rings (see [1]-[4],[45],[81] and [82] for further details).

Motivated by some results in the literature, especially recent work of S. Ali and al. (see [2] and [3] for further references), here we continue the line of investigation regarding the study of commutativity for a ring with involution of the second kind provided with generalized derivations satisfying various identities.

1.2 Preliminary results

The following Lemmas are essential for developing the proofs of our results.

Lemma 1.2.1 ([76], Fact 1) *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution provided with a derivation d. Then $d(h) = 0$ for all $h \in H(R)\cap Z(R)$ implies that $d(z) = 0$ for all $z \in Z(R)$.*

Lemma 1.2.2 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind. If there exists a derivation d of R such that one of the following hold:*
(1) $(xy + y^*x^*)d(h)^2 \in Z(R)$ for all $x, y \in R$ and $h \in Z(R) \cap H(R)$
(2) $(xy + y^*x^*)d(h) \in Z(R)$ for all $x, y \in R$ and $h \in Z(R) \cap H(R)$
then R is commutative or $d(Z(R)) = \{0\}$.

Proof. Assume that $(xy + y^*x^*)d(h)^2 \in Z(R)$ for all $x, y \in R$ and $h \in Z(R) \cap H(R)$. Using the fact that R is prime, it follows that either $xy + y^*x^* \in Z(R)$ for all $x, y \in R$ or $d(h)^2 = 0$ for all $h \in Z(R) \cap H(R)$.
Suppose $xy + y^*x^* \in Z(R)$ for all $x, y \in R$; in particular taking $y = s$ where $s \in Z(R) \cap S(R)\backslash\{0\}$, we get $(x - x^*)s \in Z(R)$. Therefore $x - x^* \in Z(R)$ for all $x \in R$ and thus $[x, x^*] = 0$ for all $x \in R$. This further implies that R is normal and ([3], Lemma 1) assures that R is commutative.
If $d(h)^2 = 0$ for all $h \in Z(R) \cap H(R)$, then $d(h) = 0$ for all $h \in Z(R) \cap H(R)$ in which case Lemma 1.2.1 yields that $d(z) = 0$ for all $z \in Z(R)$.
Now suppose $(xy + y^*x^*)d(h) \in Z(R)$ for all $x, y \in R$ and $h \in Z(R) \cap H(R)$; then using the primeness of R, we get either $xy + y^*x^* \in Z(R)$ or $d(h) = 0$.
If $xy + y^*x^* \in Z(R)$ for all $x, y \in R$, then using a similar proof as above, we may conclude that R is commutative.
If $d(h) = 0$ for all $h \in Z(R) \cap H(R)$, then by virtue of Lemma 1.2.1 we are forced to conclude that $d(z) = 0$ for all $z \in Z(R)$. ■

1.3 Main results

Theorem 1.3.1 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind. If (F, d) and (G, g) are nonzero generalized derivations, then the following assertions are equivalent:*
(1) $G(xx^*) + F(x)F(x^*) \pm x^*x \in Z(R)$ for all $x \in R$;
(2) $G(xx^*) - F(x)F(x^*) \pm x^*x \in Z(R)$ for all $x \in R$;
(3) $G(xx^*) + F(x^*)F(x) \pm x^*x \in Z(R)$ for all $x \in R$;
(4) $G(xx^*) - F(x^*)F(x) \pm x^*x \in Z(R)$ for all $x \in R$;
(5) R is commutative.

Proof. It is obvious that (5) implies (1), (2), (3) and (4). So we need to prove that (1) $\Longrightarrow$ (5), (2) $\Longrightarrow$ (5), (3) $\Longrightarrow$ (5), and (4) $\Longrightarrow$ (5).
(1) $\Longrightarrow$ (5) By the assumption, we have

$$G(xx^*) + F(x)F(x^*) + x^*x \in Z(R) \quad \text{for all } x \in R. \tag{1.1}$$

A linearization of (1.1) yields that

$$G(xy^*) + G(yx^*) + F(x)F(y^*) + F(y)F(x^*) + x^*y + y^*x \in Z(R). \tag{1.2}$$

First we assume that $g = d = 0$. Then substituting ys for y in (1.2), where $0 \neq s \in Z(R) \cap S(R)$, we get

$$G(xy) + F(x)F(y) + yx \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{1.3}$$

Using ([82], Theorem 1), the last expression forces us to conclude that R is commutative.

If $g = 0$ and $d \neq 0$, then writing $y = yh$ in (1.2), where $0 \neq h \in Z(R) \cap H(R)$, we get

$$(F(x)y^* + yF(x^*))d(h) \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{1.4}$$

Replacing x by xh, with $0 \neq h \in Z(R) \cap H(R)$, the last expression leads to

$$(xy + y^*x^*)d(h)^2 \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{1.5}$$

By Lemma 1.2.2, we conclude that R is commutative or $d(Z(R)) = \{0\}$.
In the latter case, setting $y = ys$ in (1.2), where $0 \neq s \in Z(R) \cap S(R)$, we arrive at

$$G(xy) + F(x)F(y) + yx \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R \tag{1.6}$$

and ([82], Theorem 1) gives that R is commutative ring.
If $g \neq 0$ and $d = 0$, then substituting yh for y in (1.2), where $h \in Z(R) \cap H(R) \backslash \{0\}$, we may write

$$(xy + y^*x^*)g(h) \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{1.7}$$

Applying Lemma 1.2.2 again, it follows that R is commutative or $g(Z(R)) = \{0\}$.
Suppose that $g(z) = 0$ for all $z \in Z(R)$; taking $y = ys$ in (1.2), where $0 \neq s \in Z(R) \cap S(R)$, we obtain

$$G(xy) + F(x)F(y) + yx \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R \tag{1.8}$$

so R is commutative by ([82], Theorem 1).

Now we consider the remaining case $g \neq 0$ and $d \neq 0$; putting $y = yh$ in (1.2), where $0 \neq h \in Z(R) \cap H(R)$, we find that

$$(xy^* + yx^*)g(h) + (F(x)y^* + yF(x^*))d(h) \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{1.9}$$

Replacing x by xh in (1.9), with $0 \neq h \in Z(R) \cap H(R)$, we arrive at

$$(xy + y^*x^*)d(h)^2 \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{1.10}$$

Invoking Lemma 1.2.2, either R is commutative or $d(Z(R)) = \{0\}$.
In the latter case equation (1.9) reduces to

$$(xy + y^*x^*)g(h) \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R \tag{1.11}$$

and Lemma 1.2.2 implies that either R is commutative or $g(Z(R)) = \{0\}$.
Suppose that $g(z) = 0$ for all $z \in Z(R)$, then replacing y by ys in (1.2), where $0 \neq s \in Z(R) \cap S(R)$, we get

$$G(xy) + F(x)F(y) + yx \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{1.12}$$

and we are done by ([82], Theorem 1).
Arguing as above, with slight modifications, it is obvious to show that $G(xx^*)+F(x)F(x^*)-x^*x \in Z(R)$ for all $x \in R$ implies that R is commutative.
(2) $\Longrightarrow$ (5) We are assuming that

$$G(xx^*) - F(x)F(x^*) \pm x^*x \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R \tag{1.13}$$

and therefore

$$-G(xx^*) + F(x)F(x^*) \pm x^*x \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R. \tag{1.14}$$

Let $G^{'} = -G$, it is obvious that $G^{'}$ is a generalized derivation associated with the derivation $g^{'} = -g$ such that

$$G^{'}(xx^*) + F(x)F(x^*) \pm x^*x \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R. \tag{1.15}$$

Since (1.15) is exactly the hypothesis of (1), then R is commutative.
(3) $\Longrightarrow$ (5) By the assumption, we have

$$G(xx^*) + F(x^*)F(x) + x^*x \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R. \tag{1.16}$$

A linearization of (1.16) implies that

$$G(xy^*)+G(yx^*)+F(x^*)F(y)+F(y^*)F(x)+x^*y+y^*x \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{1.17}$$

Taking yh instead of y, where $0 \neq h \in Z(R) \cap H(R)$, we find that

$$(xy^* + yx^*)g(h) + (F(x^*)y + y^*F(x))d(h) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{1.18}$$

Replacing x by xh, where $h \in Z(R) \cap H(R) \backslash \{0\}$, we get

$$(xy + y^*x^*)d(h)^2 \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{1.19}$$

Using Lemma 1.2.2, we conclude that R is commutative or $d(Z(R)) = \{0\}$.
In the latter case equation (1.18) becomes

$$(xy + y^*x^*)g(h) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{1.20}$$

and Lemma 1.2.2 implies that R is commutative or $g(Z(R)) = \{0\}$.
If $g(Z(R)) = \{0\}$, then replacing y by ys in (1.17) where $0 \neq s \in Z(R) \cap S(R)$ we obtain

$$G(xy) + F(y)F(x) + yx \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{1.21}$$

Hence ([82], Theorem 3) assures that R is commutative, or $d = g = 0$.

If $d = g = 0$, then substituting xt for x in (1.21), where $t \in R$, one can see that

$$G(x)ty + F(y)F(x)t + yxt \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y, t \in R \tag{1.22}$$

that is

$$G(x)ty - G(xy)t + (G(xy) + F(y)F(x) + yx)t \in Z(R). \tag{1.23}$$

Using (1.21) together with (1.23) we conclude that

$$[G(x)[t, y], t] = 0 \quad \text{for all } \ x, y, t \in R \tag{1.24}$$

thereby obtaining

$$G(x)\Big[[t, y], t\Big] + [G(x), t][t, y] = 0 \quad \text{for all } \ x, y, t \in R \tag{1.25}$$

which leads to

$$G(x)\Big[[y, t], t\Big] + [G(x), t][y, t] = 0 \quad \text{for all } \ x, y, t \in R. \tag{1.26}$$

Substituting xu for x, where $u \in R$, we find that

$$G(x)u\Big[[y, t], t\Big] + [G(x)u, t][y, t] = 0 \quad \text{for all } \ x, y, t, u \in R. \tag{1.27}$$

Thus we have

$$G(x)u\Big[[y, t], t\Big] + G(x)[u, t][y, t] + [G(x), t]u[y, t] = 0. \tag{1.28}$$

In particular for $u = G(x)$, according to (1.26), we obtain

$$[G(x), t]G(x)[y, t] = 0 \quad \text{for all } \ x, y, t \in R \tag{1.29}$$

which reduces to

$$[G(x), t]G(x)R[y, t] = 0 \quad \text{for all } \ x, y, t \in R. \tag{1.30}$$

In view of the primeness, the last equation assures that $[G(x),t]G(x) = 0$ or $[y,t] = 0$ for all $x, y, t \in R$. Hence R is the union of the subgroups:

$H = \{t \in R | [r,t] = 0 \text{ for all } r \in R\}$ and $K = \{t \in R | [G(x),t]G(x) = 0 \text{ for all } x \in R\}$.

Accordingly, either $R = H$ or $R = K$. Since the first case implies that R is commutative, then we need only consider the case $[G(x),t]G(x) = 0$ for all $x, t \in R$ and thus $[G(x),t]RG(x) = 0$ which leads to $[G(x),t] = 0$ for all $x, t \in R$. Therefore, because of $g = 0$, it follows that $G(x)R[y,t] = 0$ for all $x, y, t \in R$. Using the fact that $G \neq 0$, then we conclude that R is commutative. Using a similar proof, with slight modifications, it is obvious to show that $G(xx^*) + F(x^*)F(x) - x^*x \in Z(R)$ for all $x \in R$ yields that R is commutative.
(4) $\Longrightarrow$ (5) We are given that

$$G(xx^*) - F(x^*)F(x) \pm x^*x \in Z(R) \quad \text{for all } x \in R \tag{1.31}$$

thereby

$$-G(xx^*) + F(x^*)F(x) \pm x^*x \in Z(R) \quad \text{for all } x \in R. \tag{1.32}$$

Consider $G^{'} = -G$, the last expression can be written as

$$G^{'}(xx^*) + F(x^*)F(x) \pm x^*x \in Z(R) \quad \text{for all } x \in R. \tag{1.33}$$

Since (1.33) is exactly the hypothesis of (3), then R is commutative. This completes the proof of the theorem. ■

Corollary 1.3.2 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind. If $(F, d)$and (G, g) are nonzero generalized derivations, then the following assertions are equivalent:*
(1) $G(xy) \pm F(x)F(y) \pm yx \in Z(R)$ for all $x, y \in R$;
(2) $G(xy) \pm F(y)F(x) \pm yx \in Z(R)$ for all $x, y \in R$;
(3) R is commutative.

Theorem 1.3.3 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind. If $(F, d)$and (G, g) are non zero generalized derivations, then the following assertions are equivalent:*
(1) $G(xx^*) + F(x^*)F(x) \in Z(R)$ for all $x \in R$;
(2) $G(xx^*) - F(x^*)F(x) \in Z(R)$ for all $x \in R$;
(3) $G(xx^*) + F(x)F(x^*) \pm [x, x^*] \in Z(R)$ for all $x \in R$
(4) $G(xx^*) - F(x)F(x^*) \pm [x, x^*] \in Z(R)$ for all $x \in R$
(5) R is commutative.

Proof. It is obvious that (5) implies (1), (2), (3) and (4). So we need to prove that (1) $\Longrightarrow$ (5), (2) $\Longrightarrow$ (5), (3) $\Longrightarrow$ (5), and (4) $\Longrightarrow$ (5).
(1) $\Longrightarrow$ (5) Assume that

$$G(xx^*) + F(x^*)F(x) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R. \tag{1.34}$$

Linearizing equation (1.34), one can see that

$$G(xy^*) + G(yx^*) + F(x^*)F(y) + F(y^*)F(x) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{1.35}$$

If $g \neq 0$ and $d \neq 0$, then replacing y by yh, where $0 \neq h \in Z(R) \cap H(R)$, we obtain

$$(xy^* + yx^*)g(h) + (F(x^*)y + y^*F(x))d(h) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{1.36}$$

Writing xh instead of x, where $0 \neq h \in Z(R) \cap H(R)$, we get

$$(xy + y^*x^*)d(h)^2 \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{1.37}$$

Using Lemma 1.2.2 together with the preceding equation, either R is commutative or $d(Z(R)) = \{0\}$.
In the second case, because of $d(h) = 0$, equation (1.36) can be rewritten as

$$(xy + y^*x^*)g(h) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{1.38}$$

Applying Lemma 1.2.2 again, we obtain R is commutative or $g(z) = 0$ for all $z \in Z(R)$. In the latter case replacing y by ys in (1.35), where $0 \neq s \in Z(R) \cap S(R)$, we arrive at

$$G(xy) + F(y)F(x) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{1.39}$$

and R is commutative by ([82], Corollary 1).

If $d = g = 0$, then putting $y = ys$ in (1.35) with $0 \neq s \in Z(R) \cap S(R)$ we easily get

$$G(xy) + F(y)F(x) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{1.40}$$

Substituting xt for x in the last expression, it follows that

$$G(x)ty + F(y)F(x)t \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y, t \in R \tag{1.41}$$

in consequence of which

$$[G(x)ty - G(xy)t, t] = 0 \quad \text{for all } \ x, y, t \in R \tag{1.42}$$

that is

$$\Big[G(x)[t,y],t\Big]=0 \quad \text{for all } \ x,y,t\in R. \tag{1.43}$$

Since (1.43) is the same as (1.24), we conclude that R is commutative.

Assume that $d=0$ and $g\neq 0$; replacing y by yh in (1.35) with $0\neq h\in Z(R)\cap H(R)$, we obtain

$$(xy+y^*x^*)g(h)\in Z(R) \quad \text{for all } \ x,y\in R. \tag{1.44}$$

The above equation, when combined with Lemma 1.2.2, shows that R is commutative or $g(z)=0$ for all $z\in Z(R)$.
In the latter case, replacing y by ys in (1.35) with $0\neq s\in Z(R)\cap S(R)$, one can see that

$$G(xy)+F(y)F(x)\in Z(R) \quad \text{for all } \ x,y\in R. \tag{1.45}$$

Substituting xt for x in the preceding equation, we find that

$$G(x)ty+xg(ty)+F(y)F(x)t\in Z(R) \quad \text{for all } \ x,y,t\in R \tag{1.46}$$

and thus

$$[G(x)ty+xg(ty)-G(xy)t,t]=0 \quad \text{for all } \ x,y,t\in R \tag{1.47}$$

in consequence of which

$$\Big[G(x)[t,y],t\Big]+[xg(ty)-xg(y)t,t]=0 \quad \text{for all } \ x,y,t\in R. \tag{1.48}$$

Setting $y=t^2$ in (1.48), we obviously get

$$[xt^2g(t),t]=0 \quad \text{for all } \ x,t\in R \tag{1.49}$$

which yields

$$x[t^2g(t),t]+[x,t]t^2g(t)=0 \quad \text{for all } \ x,t\in R. \tag{1.50}$$

Writing yx instead of x, we find that

$$[y,t]xt^2g(t)=0 \quad \text{for all } \ x,y,t\in R \tag{1.51}$$

and thus

$$[y,t]Rt^2g(t)=0 \quad \text{for all } \ y,t\in R. \tag{1.52}$$

By primeness we conclude that for each $t \in R$ either $t \in Z(R)$ or $t^2 g(t) = 0$.
Let $t \in Z(R)$, substituting yt for y in (1.45) we obtain

$$xyg(t) \in Z(R) \quad \text{for all} \ \ x, y \in R \tag{1.53}$$

in consequence of which, either $xy \in Z(R)$ and hence R is commutative or $g(t) = 0$.
Accordingly, (1.52) assures that either R is commutative or $t^2 g(t) = 0$ for all $t \in R$.
In the second condition, linearization yields that $(x + y)^2 g(x + y) = 0$ for all $x, y \in R$. Let us fix x a nonzero element in $Z(R)$, then we have

$$g(y)x^2 + y^2 g(x) + 2yxg(x) + 2yxg(y) = 0 \quad \text{for all} \ \ y \in R. \tag{1.54}$$

Replacing y by yx in (1.54), the fact that $x \in Z(R)$ forces

$$g(y) + 2yg(y) = 0 \quad \text{for all} \ \ y \in R. \tag{1.55}$$

Substituting y^2 for y in (1.55), we find that

$$g(y^2) = 0 \quad \text{for all} \ \ y \in R. \tag{1.56}$$

Then by virtu of ([78], Lemma 3) we get $g = 0$, a contradiction.

Now suppose $d \neq 0$ and $g = 0$; replacing y by yh in (1.35) with $0 \neq h \in Z(R) \cap H(R)$, we find that

$$(F(x^*)y + y^* F(x))d(h) \in Z(R) \quad \text{for all} \ \ x, y \in R. \tag{1.57}$$

Writing xh instead of x where h is a nonzero element in $Z(R) \cap H(R)$, we get

$$(xy + y^* x^*)d(h)^2 \in Z(R) \quad \text{for all} \ \ x, y \in R. \tag{1.58}$$

which together with Lemma 1.2.2, yields that R is commutative or $d(Z(R)) = \{0\}$.
In the latter case, replacing y by ys in (1.35) with $0 \neq s \in Z(R) \cap S(R)$, we get

$$G(xy) + F(y)F(x) \in Z(R) \quad \text{for all} \ \ x, y \in R. \tag{1.59}$$

Substituting xt for x in the above equation, we easily get

$$G(x)ty + F(y)F(x)t + F(y)xd(t) \in Z(R) \quad \text{for all} \ \ x, y, t \in R. \tag{1.60}$$

Therefore

$$[G(x)ty - G(xy)t + F(y)xd(t), t] = 0 \quad \text{for all} \ \ x, y, t \in R \tag{1.61}$$

that is

$$\Big[G(x)[t,y],t\Big] + [F(y)xd(t),t] = 0 \quad \text{for all } \ x,y,t \in R. \tag{1.62}$$

Replacing x with tx and y with t in (1.62), we find that

$$[F(t)txd(t),t] = 0 \quad \text{for all } \ x,t \in R. \tag{1.63}$$

Putting $y = t^2$ in (1.62), we get

$$[F(t^2)xd(t),t] = 0 \quad \text{for all } \ x,t \in R \tag{1.64}$$

this equation, when combined with (1.63), shows that

$$[td(t)xd(t),t] = 0 \quad \text{for all } \ x,t \in R. \tag{1.65}$$

Substituting tx for x in the above equation, we arrive at

$$[td(t)txd(t),t] = 0 \quad \text{for all } \ x,t \in R. \tag{1.66}$$

Left multiplying (1.65) by t and then subtracting from (1.66), we find that

$$\Big[t[d(t),t]xd(t),t\Big] = 0 \quad \text{for all } \ x,t \in R. \tag{1.67}$$

Now substituting xt for x, we get

$$\Big[t[d(t),t]xtd(t),t\Big] = 0 \quad \text{for all } \ x,t \in R. \tag{1.68}$$

Right multiplying (1.67) by t and then subtracting from (1.68), we get

$$\Big[t[d(t),t]x[d(t),t],t\Big] = 0 \quad \text{for all } \ x,t \in R. \tag{1.69}$$

Putting $x = xt$, we have

$$\Big[t[d(t),t]xt[d(t),t],t\Big] = 0 \quad \text{for all } \ x,t \in R \tag{1.70}$$

which implies that

$$t[d(t),t]xt[d(t),t]t - t^2[d(t),t]xt[d(t),t] = 0 \quad \text{for all } \ x,t \in R. \tag{1.71}$$

Substituting $xt[d(t),t]u$ for x in (1.71), we find that

$$t[d(t),t]xt[d(t),t]ut[d(t),t]t - t^2[d(t),t]xt[d(t),t]ut[d(t),t] = 0. \tag{1.72}$$

Comparing (1.71) and (1.72) shows that

$$t[d(t),t]xt^2[d(t),t]ut[d(t),t]-t[d(t),t]xt[d(t),t]tut[d(t),t]=0 \tag{1.73}$$

that is

$$t[d(t),t]x\Big[t[d(t),t],t\Big]ut[d(t),t]=0 \quad \text{for all } \ x,t,u\in R. \tag{1.74}$$

Replacing x by tx, we get

$$t[d(t),t]tx\Big[t[d(t),t],t\Big]ut[d(t),t]=0 \quad \text{for all } \ x,t,u\in R. \tag{1.75}$$

Left multiplying (1.74) by t and then subtracting from (1.75), we find that

$$\Big[t[d(t),t],t\Big]x\Big[t[d(t),t],t\Big]ut[d(t),t]=0 \quad \text{for all } \ x,t,u\in R. \tag{1.76}$$

Substituting ut for u in the above equation, we get

$$\Big[t[d(t),t],t\Big]x\Big[t[d(t),t],t\Big]ut^2[d(t),t]=0 \quad \text{for all } \ x,t,u\in R. \tag{1.77}$$

Right multiplying (1.76) by t and then subtracting from (1.77), we obtain

$$\Big[t[d(t),t],t\Big]x\Big[t[d(t),t],t\Big]u\Big[t[d(t),t],t\Big]=0 \quad \text{for all } \ x,t,u\in R. \tag{1.78}$$

Since R is prime, then for each $t\in R$ we have $\Big[t[d(t),t],t\Big]=0$. Hence ([65], Theorem 2) implies that R is commutative.
(2) $\Longrightarrow$ (5) We are given that

$$G(xx^*)-F(x^*)F(x)\in Z(R) \quad \text{for all } \ x\in R \tag{1.79}$$

therefore

$$-G(xx^*)+F(x^*)F(x)\in Z(R) \quad \text{for all } \ x\in R. \tag{1.80}$$

Define $G^{'}=-G$, the last relation becomes

$$G^{'}(xx^*)+F(x^*)F(x)\in Z(R) \quad \text{for all } \ x\in R. \tag{1.81}$$

Since (1.81) is exactly the hypothesis of (1), then R is commutative.
(3) $\Longrightarrow$ (5) Assume that

$$G(xx^*)+F(x)F(x^*)+[x,x^*]\in Z(R) \quad \text{for all } \ x\in R. \tag{1.82}$$

Linearizing (1.82), we find that

$$G(xy^*) + G(yx^*) + F(x)F(y^*) + F(y)F(x^*) + [x, y^*] + [y, x^*] \in Z(R). \quad (1.83)$$

Replacing y by yh, where $h \in Z(R) \cap H(R) \backslash \{0\}$, we obtain

$$(xy^* + yx^*)g(h) + (F(x)y^* + yF(x^*))d(h) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \quad (1.84)$$

Substituting xh for x where h is a nonzero element in $Z(R) \cap H(R)$, we arrive at

$$(xy + y^*x^*)d(h)^2 \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \quad (1.85)$$

Applying Lemma 1.2.2, we conclude that either R is commutative or $d(Z(R)) = \{0\}$.
Assume that $d(Z(R)) = \{0\}$; then equation (1.84) reduces to

$$(xy + y^*x^*)g(h) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R \quad (1.86)$$

which together with Lemma 1.2.2, shows that R is commutative or $g(Z(R)) = \{0\}$.
Suppose that $g(z) = 0$ for all $z \in Z(R)$; replacing y by ys in (1.83) where s is a nonzero element in $Z(R) \cap S(R)$, we get

$$G(xy) + F(x)F(y) + [x, y] \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \quad (1.87)$$

Using ([82], Theorem 8), we conclude that R is commutative or $d = g = 0$.

Assume that $d = g = 0$; substituting yt for y in (1.87) we obtain

$$G(xy)t + F(x)F(y)t + y[x, t] + [x, y]t \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y, t \in R. \quad (1.88)$$

Commuting with t and invoking (1.87), it is easy to see that

$$\Big[y[x, t], t\Big] = 0 \quad \text{for all } \ x, y, t \in R \quad (1.89)$$

and thus

$$y\Big[[x, t], t\Big] + [y, t][x, t] = 0 \quad \text{for all } \ x, y, t \in R. \quad (1.90)$$

Putting $y = uy$ in the above equation, one can verify that

$$[u, t]y[x, t] = 0 \quad \text{for all } \ x, y, t, u \in R. \quad (1.91)$$

In light of primeness, equation (1.91) shows that R is commutative.
Using a similar proof, with slight modifications, it is easy to show that

$G(xx^*) + F(x)F(x^*) - [x, x^*] \in Z(R)$ for all $x \in R$ implies that R is commutative.
(4) $\Longrightarrow$ (5) Suppose that

$$G(xx^*) - F(x)F(x^*) \pm [x, x^*] \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x \in R. \tag{1.92}$$

Hence

$$-G(xx^*) + F(x)F(x^*) \pm [x, x^*] \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x \in R. \tag{1.93}$$

Let $G^{'} = -G$, the last relation yields

$$G^{'}(xx^*) + F(x)F(x^*) \pm [x, x^*] \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x \in R. \tag{1.94}$$

Since (1.94) is exactly the hypothesis of (3), then R is commutative. ■

Corollary 1.3.4 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind. If (F, d) and (G, g) are nonzero generalized derivations, then the following assertions are equivalent:*
(1) $G(xy) \pm F(y)F(x) \in Z(R)$ for all $x, y \in R$;
(2) $G(xy) \pm F(x)F(y) \pm [x, y] \in Z(R)$ for all $x, y \in R$
(3) R is commutative.

Theorem 1.3.5 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind. If (F, d) and (G, g) are generalized derivations where $d \neq 0$ or $g \neq 0$, then the following assertions are equivalent:*
(1) $G(xx^*) + F(x)F(x^*) \in Z(R)$ for all $x \in R$
(2) $G(xx^*) - F(x)F(x^*) \in Z(R)$ for all $x \in R$
(3) $G(xx^*) + F(x^*)F(x) \pm [x, x^*] \in Z(R)$ for all $x \in R$
(4) $G(xx^*) - F(x^*)F(x) \pm [x, x^*] \in Z(R)$ for all $x \in R$
(5) R is commutative.

Proof. We need only prove (1) $\Longrightarrow$ (5), (2) $\Longrightarrow$ (5), (3) $\Longrightarrow$ (5), and (4) $\Longrightarrow$ (5).
(1) $\Longrightarrow$ (5) Assume that

$$G(xx^*) + F(x)F(x^*) \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x \in R. \tag{1.95}$$

Linearizing (1.95), we find that

$$G(xy^*) + G(yx^*) + F(x)F(y^*) + F(y)F(x^*) \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x, y \in R. \tag{1.96}$$

Taking $y = yh$ in (1.96), where $h \in Z(R) \cap H(R)\backslash\{0\}$, we get

$$(xy^* + yx^*)g(h) + (F(x)y^* + yF(x^*))d(h) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \quad (1.97)$$

Substituting xh for x, where $h \in Z(R) \cap H(R)\backslash\{0\}$, we obtain

$$(xy + y^*x^*)d(h)^2 \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \quad (1.98)$$

Invoking Lemma 1.2.2, R is commutative or $d(Z(R)) = \{0\}$.
In the last case, equation (1.97) reduces to

$$(xy + y^*x^*)g(h) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \quad (1.99)$$

Applying Lemma 1.2.2 again, we conclude that R is commutative or $g(Z(R)) = \{0\}$.
Assume that $g(z) = 0$ for all $z \in Z(R)$; replacing y by ys in (1.96) where s is a nonzero element in $Z(R) \cap S(R)$, we obviously get

$$G(xy) + F(x)F(y) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R \quad (1.100)$$

hence R is commutative by ([82], Corollary 5).
(2) $\Longrightarrow$ (5) Suppose

$$G(xx^*) - F(x)F(x^*) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R \quad (1.101)$$

therefore

$$-G(xx^*) + F(x)F(x^*) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R. \quad (1.102)$$

Let G' be the generalized derivation defined by $G^{'} = -G$, the last relation becomes

$$G^{'}(xx^*) + F(x)F(x^*) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R. \quad (1.103)$$

Since (1.103) is exactly the hypothesis of (1), then R is commutative.
(3) $\Longrightarrow$ (5) Suppose that

$$G(xx^*) + F(x^*)F(x) + [x, x^*] \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R. \quad (1.104)$$

Linearization of (1.104) yields

$$G(xy^*) + G(yx^*) + F(x^*)F(y) + F(y^*)F(x) + [x, y^*] + [y, x^*] \in Z(R). \quad (1.105)$$

Replacing y by yh, where $h \in Z(R) \cap H(R)\backslash\{0\}$, we get

$$(xy^* + yx^*)g(h) + (F(x^*)y + y^*F(x))d(h) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \quad (1.106)$$

If we set $x = xh$ where $h \in Z(R) \cap H(R) \backslash \{0\}$, then we obtain

$$(xy + y^*x^*)d(h)^2 \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{1.107}$$

which when combined with Lemma 1.2.2, shows that R is commutative or $d(Z(R)) = \{0\}$.
Assume that $d(Z(R)) = \{0\}$; equation (1.106) reduces to

$$(xy + y^*x^*)g(h) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{1.108}$$

Once again using Lemma 1.2.2, we conclude that R is commutative or $g(Z(R)) = \{0\}$. Suppose that $g(z) = 0$ for all $z \in Z(R)$; replacing y by ys in (1.105) with $0 \neq s \in Z(R) \cap S(R)$ thereby obtaining

$$G(xy) + F(y)F(x) + [x, y] \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{1.109}$$

Hence ([82], Theorem 7) proves that R is commutative.
Using a similar proof, with slight modifications, one can easily prove that $G(xx^*) + F(x^*)F(x) - [x, x^*] \in Z(R)$ for all $x \in R$ implies that R is commutative.
(4) $\Longrightarrow$ (5) We are given that

$$G(xx^*) - F(x^*)F(x) \pm [x, x^*] \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R \tag{1.110}$$

therefore

$$-G(xx^*) + F(x^*)F(x) \pm [x, x^*] \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R. \tag{1.111}$$

Set $G' = -G$, from the last relation it follows that

$$G'(xx^*) + F(x^*)F(x) \pm [x, x^*] \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R. \tag{1.112}$$

Since (1.112) is exactly the hypothesis of (3), then R is commutative. ■

Corollary 1.3.6 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind. If (F, d) and (G, g) are generalized derivations where $d \neq 0$ or $g \neq 0$, then the following assertions are equivalent:*
(1) $G(xy) \pm F(x)F(y) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R$
(2) $G(xy) \pm F(y)F(x) \pm [x, y] \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R$
(3) R is commutative.

1.4 Examples proving necessity of our conditions

The following example proves that the condition "* is of the second kind" is necessary in our Theorems.

Example 1.
Let us consider $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ and $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
It is straightforward to check that $(R, *)$ is a prime ring with involution of the first kind. Moreover, for all $x \in R$ we have

$$xx^* = x^*x \in Z(R)$$

Let us define $F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$, then F is a generalized derivation associated with the nonzero derivation d. Furthermore, if we take $G = F$, then the conditions of our theorems are satisfies, but R is a noncommutative prime ring.

The following example shows that our results cannot be extended to semi-prime rings.

Example 2.
Let us consider $(R,\ *)$, F and G as in the preceding example. Let $\mathbb{C}$ be the field of complex numbers with the conjugation involution. If we set $\mathcal{K} = R \times \mathbb{C}$, then it is obvious to verify that $(\mathcal{K}, \tau)$ is a semi-prime ring with involution of the second kind where

$$\tau(r, z) = (r^*, \overline{z}) \quad \text{for all} \quad (r, z) \in R \times \mathbb{C}.$$

It is straightforward to check that the map

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \ : \quad \mathcal{K} \quad &\longrightarrow \mathcal{K} \\ (r, z) \quad &\longmapsto (F(r), 0) \end{aligned}$$

is a generalized derivation associated with the derivation

$$\begin{aligned} D \ : \quad \mathcal{K} \quad &\longrightarrow \mathcal{K} \\ (r, z) \quad &\longmapsto (d(r), 0) \end{aligned}$$

On the other hand, if we put $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, then it is easy to verify that $\mathcal{G}$ and $\mathcal{F}$ satisfy the conditions of our Theorems but $\mathcal{K}$ is a noncommutative ring.

Chapter 2

A study of differential prime rings with involution

O. Ait Zemzami and L. Oukhtite, *A study of differential prime rings with involution.* Georgian Mathematical Journal, (2019) Doi.org/10.1515/gmj-2019-2061.

Abstract. The main goal of the present chapter is to study some results concerning generalized derivations of prime rings with involution. Moreover, we provide examples to show that the assumed restriction cannot be relaxed.

2.1 Introduction

Throughout this chapter R will represent an associative ring with center $Z(R)$.

Many results in literature indicate how the global structure of a ring R is often tightly connected to the behavior of derivations defined on R. More recently several authors consider similar situation in the case the derivation d is replaced by a generalized derivation.
During the last years there have been many results concerning conditions that force a prime and semi-prime ring to be commutative.

In this chapter we continue the line of investigation regarding the study of commutativity for rings with involution satisfying certain differential identities involving generalized derivations.

2.2 Results involving three generalized derivations

The following Lemma is essential for developing the proofs of our results.

Lemma 2.2.1 ([76], Fact 1) Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution provided with a derivation d. Then $d(h) = 0$ for all $h \in H(R) \cap Z(R)$ implies that $d(z) = 0$ for all $z \in Z(R)$.

Theorem 2.2.2 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind and let (F, f), (G, g) and (H, h) be generalized derivations, where $f \neq 0$ and $g \neq 0$. Then the following assertions are equivalent:*
(1) $F(x)G(x^*) - H(xx^*) \in Z(R)$ for all $x \in R$;
(2) R is commutative.

Proof. For the non trivial implication assume that

$$F(x)G(x^*) - H(xx^*) \in Z(R) \quad \text{for all } x \in R \tag{2.1}$$

and R is not commutative. Linearizing (2.1) we easily get

$$F(x)G(y^*) + F(y)G(x^*) - H(xy^*) - H(yx^*) \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{2.2}$$

Replacing y by ya, where $0 \neq a \in Z(R) \cap H(R)$ and using the last equation, we obtain

$$F(x)y^*g(a) + yG(x^*)f(a) - (xy^* + yx^*)h(a) \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{2.3}$$

Substituting yb for y in (2.3), with $b \in Z(R) \cap S(R)\backslash\{0\}$, we find that

$$-F(x)y^*g(a) + yG(x^*)f(a) - (-xy^* + yx^*)h(a) \in Z(R)$$

which when combined with (2.3) shows that

$$y\Big(G(x)f(a) - xh(a)\Big) \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{2.4}$$

Taking xa instead of x in (2.4), one can obviously see that

$$yxg(a)f(a) \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{2.5}$$

Invoking the primeness, because of $g(a)f(a) \in Z(R)$, equation (2.5) assures that either $yx \in Z(R)$ for all $x, y \in R$ or $f(a)g(a) = 0$. By virtue of the non-commutativity of R, we are forced to conclude that $f(a)g(a) = 0$ thereby

$g(a) = 0$ or $f(a) = 0$ for all $a \in Z(R) \cap H(R)$.
Let $a_0 \in Z(R) \cap H(R)$ such that $g(a_0) = 0$; from equation (2.3) it follows that

$$xf(a_0)G(y^*) - (xy^* + yx^*)h(a_0) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{2.6}$$

Substituting ys for y, where $s \in Z(R) \cap S(R) \backslash \{0\}$, one can conclude that

$$- xf(a_0)G(y^*)s - xf(a_0)y^*g(s) - (yx^* - xy^*)sh(a_0) \in Z(R). \tag{2.7}$$

Multiplying (2.6) by s and comparing with (2.7) we find that

$$- xf(a_0)y^*g(s) - 2yx^*sh(a_0) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{2.8}$$

Replacing y by ys in (2.8), where $s \in Z(R) \cap S(R) \backslash \{0\}$, and using (2.8) multiplies by s we obviously get

$$yx^*s^2h(a_0) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{2.9}$$

in consequence of which

$$yx^*h(a_0) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{2.10}$$

Once again using primeness, since R is noncommutative, equation (2.10) implies that $h(a_0) = 0$. Hence (2.6) becomes

$$f(a_0)xG(y^*) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{2.11}$$

accordingly, either $f(a_0) = 0$ or $xG(y) \in Z(R)$ for all $x, y \in R$.
Assume that $xG(y) \in Z(R)$ for all $x, y \in R$; from $[xG(y), G(y)] = 0$ it follows that $[x, G(y)]G(y) = 0$ which, because of $G \neq 0$, leads to $[x, G(y)] = 0$ for all $x, y \in R$. Applying ([78], Theorem 2) we conclude that R is commutative, a contradiction. Accordingly, $f(a_0) = 0$.
Similarly, one can easily prove that $f(a_0) = 0 \Rightarrow h(a_0) = g(a_0) = 0$ (resp. $h(a_0) = 0 \Rightarrow f(a_0) = g(a_0) = 0$). In conclusion, $f(z) = g(z) = h(z) = 0$ for all $z \in Z(R)$.
Replacing y by yz in equation (2.2), where $0 \neq z \in Z(R) \cap S(R)$, we arrive at

$$\Big[- F(x)G(y^*) + F(y)G(x^*) + H(xy^*) - H(yx^*) \Big] z \in Z(R)$$

thus

$$- F(x)G(y^*) + F(y)G(x^*) + H(xy^*) - H(yx^*) \in Z(R) \tag{2.12}$$

which, because of 2-torsion freeness, when compared with (2.2) assures that

$$F(y)G(x^*) - H(yx^*) \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{2.13}$$

Hence

$$F(x)G(y) - H(xy) \in Z(R) \quad \text{for all } x, y \in R \tag{2.14}$$

and R is commutative by ([37], Theorem 1) contradicting our hypothesis. Consequently, R must be a commutative ring. ■

Corollary 2.2.3 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind and let (F, f), (G, g) and (H, h) be generalized derivations, where $f \neq 0$ and $g \neq 0$. Then the following assertions are equivalent:*
(1) $F(x)G(y) - H(xy) \in Z(R)$ for all $x, y \in R$;
(2) R is commutative.

2.3 Identities with commutator and anti-commutator

Theorem 2.3.1 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind. If F is a nonzero generalized derivation associated with a derivation d, then the following assertions are equivalent:*
(1) $F[x, x^*] = [d(x), x^*]$ for all $x \in R$;
(2) $d[x, x^*] = [F(x), x^*]$ for all $x \in R$;
(3) R is commutative.

Proof. We need only prove that (1) $\Longrightarrow$ (3) and (2) $\Longrightarrow$ (3).
(1) $\Longrightarrow$ (3) Assume that

$$F[x, x^*] = [d(x), x^*] \quad \text{for all } x \in R. \tag{2.15}$$

A linearization of (2.15) yields that

$$F[x, y^*] + F[y, x^*] = [d(x), y^*] + [d(y), x^*] \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{2.16}$$

If $d = 0$ then F is a left multiplier and (2.16) reduces to

$$F[x, y^*] + F[y, x^*] = 0 \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{2.17}$$

Replacing y by ys in (2.17), where $s \in Z(R) \cap S(R) \backslash \{0\}$, one can see that

$$- F[x, y^*] + F[y, x^*] = 0 \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{2.18}$$

Adding relations (2.17) and (2.18) we find that

$$F[y, x] = 0 \quad \text{for all } x, y \in R. \tag{2.19}$$

Substituting ry for y in (2.19), we obviously get $F(r)[y,x]=0$ and thus

$$F(r)R[y,x]=0 \quad \text{for all } \; r,x,y\in R. \tag{2.20}$$

Since $F\neq 0$, the last relation implies that R is commutative.
Thus, we need only consider the case $d\neq 0$; replacing y by yh in (2.16) where h is a nonzero element in $Z(R)\cap H(R)$, we obtain $[x,y^*]d(h)=0$ which leads to

$$[x,y]d(h)=0 \quad \text{for all } \; x,y\in R. \tag{2.21}$$

By view of primeness, it follows that either $[x,y]=0$ for all $x,y\in R$ in which case R is commutative or $d(h)=0$.
If $d(h)=0$ for all $h\in Z(R)\cap H(R)$, then Lemma 2.2.1 implies that

$$d(z)=0 \quad \text{for all } \; z\in Z(R). \tag{2.22}$$

Putting $y=ys$ in (2.16), where $s\in Z(R)\cap S(R)\backslash\{0\}$, we get

$$\Big[-F[x,y^*]+F[y,x^*]\Big]s=\Big[-[d(x),y^*]+[d(y),x^*]\Big]s \quad \text{for all } \; x,y\in R$$

hence

$$-F[x,y^*]+F[y,x^*]=-[d(x),y^*]+[d(y),x^*] \quad \text{for all } \; x,y\in R \tag{2.23}$$

and comparing with (2.16), one conclude that

$$F[y,x]-[d(y),x]=0 \quad \text{for all } \; x,y\in R \tag{2.24}$$

proving that

$$[d(x),x]=0 \quad \text{for all } \; x\in R. \tag{2.25}$$

That is d is a nonzero commuting derivation thereby [79] assures that R is commutative.
(2) $\Longrightarrow$ (3) We are given that

$$d[x,x^*]=[F(x),x^*] \quad \text{for all } \; x\in R. \tag{2.26}$$

A linearization of (2.26) yields that

$$d[x,y^*]+d[y,x^*]=[F(x),y^*]+[F(y),x^*] \quad \text{for all } \; x,y\in R. \tag{2.27}$$

Replacing y by yh in (2.27), where $h\in Z(R)\cap H(R)\backslash\{0\}$ and using (2.27) we obtain

$$([x,y^*]+[y,x^*])d(h)=[y,x^*]d(h) \quad \text{for all } \; x,y\in R \tag{2.28}$$

and hence

$$[x,y]d(h)=0 \quad \text{for all} \quad x,y\in R. \tag{2.29}$$

Since R is prime, then either $d(h)=0$ or R is commutative.
If $d(h)=0$ for all $h\in Z(R)\cap H(R)$, then Lemma 2.2.1 yields that

$$d(z)=0 \quad \text{for all} \quad z\in Z(R). \tag{2.30}$$

Putting $y=ys$ in (2.27), where $s\in Z(R)\cap S(R)\backslash\{0\}$, one can arrive at

$$-d[x,y^*]+d[y,x^*]=-[F(x),y^*]+[F(y),x^*] \quad \text{for all} \quad x,y\in R \tag{2.31}$$

and therefore

$$d[x,y]-[F(x),y]=0 \quad \text{for all} \quad x,y\in R. \tag{2.32}$$

Taking $y=x$ in (2.32), it follows that $[F(x),x]=0$ for all $x\in R$ hence F is a commuting generalized derivation.
If $d\neq 0$, then applying ([78], Theorem 2) we conclude that R is commutative.
To complete the proof we need only consider the case $d=0$. Under this assumption equation (2.32) reduces to

$$[F(x),y]=0 \quad \text{for all} \quad x,y\in R \tag{2.33}$$

and writing rx instead of x in (2.33), we get $F(r)[x,y]=0$ so that

$$F(r)R[x,y]=0 \quad \text{for all} \quad r,x,y\in R. \tag{2.34}$$

Since $F\neq 0$ the primeness hypothesis assures that R is commutative. ■

Corollary 2.3.2 *Let $(R,*)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind. If F is a nonzero generalized derivation associated with a derivation d, then the following assertions are equivalent:*
(1) $F[x,y]=[d(x),y]$ for all $x,y\in R$;
(2) $d[x,y]=[F(x),y]$ for all $x,y\in R$;
(3) R is commutative.

Theorem 2.3.3 *Let $(R,*)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind. There is no nonzero generalized derivation (F,d) satisfying one of the following assertions:*
(1) $d(x\circ x^*)=F(x)\circ x^*$ for all $x\in R$;
(2) $F(x\circ x^*)=d(x)\circ x^*$ for all $x\in R$.

Proof. (1) Assume there exists a generalized derivation (F, d) such that

$$d(x \circ x^*) = F(x) \circ x^* \quad \text{for all } \ x \in R. \tag{2.35}$$

Linearizing (2.35) we find that

$$d(x \circ y^*) + d(y \circ x^*) = F(x) \circ y^* + F(y) \circ x^* \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{2.36}$$

Replacing y by yh in (2.36), where $h \in Z(R) \cap H(R) \backslash \{0\}$, and using (2.36) we get

$$(x \circ y^* + y \circ x^*)d(h) = (y \circ x^*)d(h) \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{2.37}$$

thereby obtaining

$$(x \circ y^*)d(h) = 0 \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{2.38}$$

By virtue of the primeness hypothesis, it follows that either $d(h) = 0$ or $x \circ y = 0$ for all $x, y \in R$.
In the later case, it is easy to see that $R = \{0\}$ which is impossible. Thus we need only consider the case $d(h) = 0$ for all $h \in Z(R) \cap H(R)$, assumption under which Lemma 2.2.1 yields

$$d(z) = 0 \quad \text{for all } \ z \in Z(R). \tag{2.39}$$

Replacing y by ys in (2.36), where $s \in Z(R) \cap S(R) \backslash \{0\}$, one can see that

$$\Big[- d(x \circ y^*) + d(y \circ x^*) \Big] s = \Big[- (F(x) \circ y^*) + F(y) \circ x^* \Big] s$$

therefore

$$- d(x \circ y^*) + d(y \circ x^*) = -(F(x) \circ y^*) + F(y) \circ x^* \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{2.40}$$

Comparing equations (2.36) and (2.40) we arrive at $d(y \circ x^*) = F(y) \circ x^*$ in such a way that

$$d(x \circ y) = F(x) \circ y \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{2.41}$$

Let $y = z$ be a nonzero element in $Z(R)$, from (2.41) it follows that $(d(x) - F(x))z = 0$ and therefore $d = F$. Hence equation (2.41) becomes

$$d(x \circ y) = d(x) \circ y \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{2.42}$$

that is

$$x \circ d(y) = 0 \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{2.43}$$

Substituting xr for x in (2.43) and using (2.43), we obtain $x[d(y), r] = 0$ so that

$$xR[d(y), r] = 0 \quad \text{for all } \ r, x, y \in R. \tag{2.44}$$

Hence $d(y) \in Z(R)$ for all $y \in R$ and (2.43) reduces to $xd(y) = 0$ for all $x, y \in R$. Accordingly, $d = 0$ proving that $F = 0$, a contradiction.

(2) Assume there exists a generalized derivation (F, d) such that

$$F(x \circ x^*) = d(x) \circ x^* \quad \text{for all } \ x \in R. \tag{2.45}$$

Linearizing equation (2.45), one can see that

$$F(x \circ y^*) + F(y \circ x^*) = d(x) \circ y^* + d(y) \circ x^* \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{2.46}$$

Replacing y by yh in (2.46), where $h \in Z(R) \cap H(R) \backslash \{0\}$, and using (2.46) we obtain

$$(x \circ y^* + y \circ x^*)d(h) = (y \circ x^*)d(h) \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{2.47}$$

thereby obtaining

$$(x \circ y^*)d(h) = 0 \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{2.48}$$

Arguing as above, the primeness hypothesis assures that $d(h) = 0$ for all $h \in Z(R) \cap H(R)$. Applying Lemma 2.2.1 we get

$$d(z) = 0 \quad \text{for all } \ z \in Z(R). \tag{2.49}$$

Replacing y by ys in (2.46), where $s \in Z(R) \cap S(R) \backslash \{0\}$, one can obviously verify that

$$\Big[- F(x \circ y^*) + F(y \circ x^*) \Big] s = \Big[- d(x) \circ y^* + d(y) \circ x^* \Big] s$$

so that

$$- F(x \circ y^*) + F(y \circ x^*) = -d(x) \circ y^* + d(y) \circ x^* \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{2.50}$$

this equation, when combined with (2.46), shows that $F(y \circ x^*) = d(y) \circ x^*$ and therefore

$$F(x \circ y) = d(x) \circ y \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{2.51}$$

Putting $y = z$, where $z \in Z(R) \backslash \{0\}$ in (2.51), we easily get

$$(F(x) - d(x))z = 0 \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{2.52}$$

which, in light of primeness, implies that $F = d$. Therefore equation (2.51) becomes

$$d(x \circ y) = d(x) \circ y \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{2.53}$$

since this equation is exactly (2.42), then $d = F = 0$ a contradiction. This completes the proof of our theorem. ■

2.4 Examples proving necessity of our conditions

The following example demonstrates that the condition “* is of the second kind" is necessary in Theorems 2.2.2 and 2.3.1 .

Example 1.
Let us consider the noncommutative prime ring $R = M_2(\mathbb{Z})$ provided with the involution of the first kind $*$ defined by

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1) Let us define

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

Clearly F is a generalized derivation associated with the nonzero derivation d. Moreover, if we set $G = H = F$ then

$$F(M)F(M^*) - F(MM^*) \in Z(R) \quad \text{for all } M \in R.$$

2) Let us define $F = id$ the identity map associated with the derivation $d = 0$, then

$$[M, M^*] = 0 \quad \text{for all } M \in R$$

so the condition (1) of Theorem 2.3.1 is satisfied.

The following example proves that Theorems 2.2.2 and 2.3.1 cannot be extended to semi-prime rings.

Example 2.
Let us consider $(R, *)$. Let $\mathbb{C}$ the field of complex numbers with the conjugation involution. If we set $\mathcal{K} = R \times \mathbb{C}$, then it is obvious to verify that $(\mathcal{K}, \tau)$ is a semi-prime ring with involution of the second kind, where

$$\tau(r, z) = (r^*, \overline{z}) \quad \text{for all} \quad (r, z) \in R \times \mathbb{C}.$$

1) Let F be as in the example 1; it is straightforward to check that the map

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \mathcal{K} &\longrightarrow \mathcal{K} \\ (r, z) &\longmapsto (F(r), 0) \end{aligned}$$

is a generalized derivation associated with the derivation

$$\begin{aligned} D \ : \quad \mathcal{K} \quad &\longrightarrow \mathcal{K} \\ (r,z) \ &\longmapsto (d(r),0) \end{aligned}$$

Taking $\mathcal{H} = \mathcal{G} = \mathcal{F}$, it is easy to verify that $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ and $\mathcal{F}$ satisfy the conditions of Theorem 2.2.2 but $\mathcal{K}$ is noncommutative.
2) Let us define $F = id$ the identity map associated with the derivation $d = 0$ and consider

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \ : \quad \mathcal{K} \quad &\longrightarrow \mathcal{K} \\ (r,z) \ &\longmapsto (F(r),0) = (r,0) \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ is a generalized derivation associated with the null derivation $\mathcal{D}$. Moreover, it is easy to see that $\mathcal{F}$ and $\mathcal{D}$ satisfy conditions of Theorem 2.3.1, but $\mathcal{K}$ is noncommutative.

CHAPTER 3

ON CERTAIN CLASSES OF GENERALIZED DERIVATIONS

`O. Ait Zemzami, L. Oukhtite, S. Ali and N. Muthana`, On certain classes of generalized derivations, Math. Slovaca 69 (2019), No. 5, 1023-1032.

Abstract. Our purpose in this chapter is to investigate some particular classes of generalized derivations and their relationship with commutativity of prime rings with involution. Some well-known results characterizing commutativity of prime rings have been generalized. Furthermore, we provide examples to show that the assumed restrictions cannot be relaxed.

3.1 Introduction

Throughout this chapter R will represent an associative ring with center $Z(R)$. Following [2], a mapping $f : R \longrightarrow R$ is said to be $*$-centralizing on a subset S of R if $[f(x), x^*] \in Z(R)$ for all $x \in S$, and is called $*$-commuting on S if $[f(x), x^*] = 0$ for all $x \in S$.

A classic problem in ring theory is to find combinations of properties that force a ring to be commutative. The pursuit of this line of inquiry inspired several authors over the past decades to have a constant interest concerning the relationship between the commutativity of a ring and the existence of certain specific additive mappings, as automorphisms, derivations, skew derivations and generalized derivations acting on appropriate subsets of the rings (see [5], [41], [15], [40], [67], [77], [78] and reference their in).

Our purpose in this chapter is to continue the line of investigation by studying the commutativity of rings with involution via some particular classes of generalized derivations. Finally, the restrictions imposed in the hypotheses have been justified by the classical examples.

3.2 Some classes of generalized derivations

Motivated by various results in the literature, our purpose in this section is to study generalized derivation F satisfying any one of the following properties :

$$F[x,y] = [F(x),y] + [F(y),x] \text{ for all } x,y \in R \quad (C_1)$$

$$F[x,y] = F(x) \circ y - F(y) \circ x \text{ for all } x,y \in R. \quad (C_2)$$

More precisely, we will discuss existence of such mappings and their relationship with commutativity in case of prime rings. We begin with the following notions.

Definition 3.2.1 *Let R be a ring and $F : R \longrightarrow R$ a function. Then, we call F to be a C_1-function if it satisfies the property C_1.*

Example 1.

1. If R is a commutative ring, then every function is a C_1-function.
2. The zero function Θ_R is a C_1-function.
3. If characteristic of a ring R is 2, then every Lie derivation is a C_1-function.

Definition 3.2.2 *Let $(R,*)$ be a ring with involution. A function $F : R \longrightarrow R$ is said to be a C_1^*-function if $F[x,x^*] = [F(x),x^*] + [F(x^*),x]$ for all $x \in R$.*

Remark. If $(R,*)$ is a ring with involution, then every C_1-function is a C_1^*-function. However, the converse statement need not be true in general.

Counter-example 1. Let us consider $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ and define *: $R \longrightarrow R$ by $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. It is easy to see that $*$ is an involution on R such that

$$[x,x^*] = 0 \text{ for all } x \in R.$$

Next, let $F = I_R$, the identity map on R. Then, it is straightforward to check that F is a C_1^*-function. Further, for $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, one can easily verify that $F[x, y] \neq [F(x), y] + [F(y), x]$ and thus F is not a C_1-function.

Definition 3.2.3 *Let R be a ring and $F : R \longrightarrow R$ a function. F is called a C_2-function if it satisfies the property C_2.*

Example 2.

1. If R is a commutative ring, then the identity mapping I_R is a C_2-function.

2. The zero mapping Θ_R is a C_2-function.

3. If R is a Boolean ring, then every function satisfying $f(0) = 0$ is a C_2-function.

Definition 3.2.4 *Let $(R, *)$ be a ring with involution. A function $F : R \longrightarrow R$ is called a C_2^*-function if $F[x, x^*] = F(x) \circ x^* - F(x^*) \circ x$ for all $x \in R$.*

Remark. If $(R, *)$ is a ring with involution, then every C_2-function is a C_2^*-function but the converse is not true.

Counter-example 2.
Let $(R, *)$ be the ring with involution considered in Counter-example 1. Let F be the function defined on R by $F(x) = ax$ where $a \in Z(R)\backslash\{0\}$. Then, it is easy to verify that F is a C_2^*-function but not a C_2-function.

In order to classify generalized derivations of prime rings that are C_i-functions (resp. C_i^*-functions) for $i \in \{1, 2\}$, we need the following two lemmas for developing the proofs of our main results. We begin our discussion with the following lemmas.

Lemma 3.2.5 ([21], Lemma) *Let R be a prime ring. If functions $F : R \longrightarrow R$ and $G : R \longrightarrow R$ are such that $F(x)yG(z) = G(x)yF(z)$ for all $x, y, z \in R$, and $F \neq 0$, then there exists λ in the extended centroid of R such that $F(x) = \lambda G(x)$ for all $x \in R$.*

Lemma 3.2.6 ([76], Fact 1) *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution provided with a derivation d. Then $d(h) = 0$ for all $h \in H(R) \cap Z(R)$ implies that $d(z) = 0$ for all $z \in Z(R)$.*

The following theorem classifies generalized derivations of prime rings with involution of the second kind that are C_i-functions (resp. C_i^*-functions). Moreover, existence of such generalized derivations assures that the considered ring must be a commutative integral domain.

Theorem 3.2.7 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind and F a nonzero generalized derivation associated with a derivation d. Then the following assertions are equivalent:*
(1) F is a C_1^*-function;
(2) F is a C_2^*-function;
(3) R is a commutative integral domain.
Moreover, if (2) is satisfied then there exists λ in the extended centroid of R such that $F(x) = \lambda x$ for all $x \in R$.

Proof. We need only prove nontrivial implications.
(1) $\Longrightarrow$ (3) Suppose that

$$F[x, x^*] = [F(x), x^*] + [F(x^*), x] \quad \text{for all} \;\; x \in R. \tag{3.1}$$

Linearizing (3.1), we easily get

$$F[x, y^*] + F[y, x^*] = [F(x), y^*] + [F(y), x^*] + [F(x^*), y] + [F(y^*), x].$$

This implies that

$$F[x, y] + F[y^*, x^*] = [F(x), y] + [F(y^*), x^*] + [F(x^*), y^*] + [F(y), x]. \tag{3.2}$$

Replacing y by yh in (3.2), where $h \in Z(R) \cap H(R)\backslash\{0\}$, and using (3.2), we obtain $[x, y]d(h) = 0$ for all $x, y \in R$. Since R is prime, it follows that either R is commutative or $d(h) = 0$ for all $h \in Z(R) \cap H(R)$, in which case Lemma 3.2.6 forces $d(s) = 0$ for all $s \in Z(R) \cap S(R)$.
In the latter case, putting $y = ys$ in (3.2) with $s \in Z(R) \cap S(R)\backslash\{0\}$ we obtain

$$F[x, y] - F[y^*, x^*] = [F(x), y] - [F(y^*), x^*] - [F(x^*), y^*] + [F(y), x]. \tag{3.3}$$

Comparing (3.2) with (3.3), it is obvious to verify that

$$F[x, y] = [F(x), y] + [F(y), x] \quad \text{for all} \;\; x, y \in R. \tag{3.4}$$

Writing yx instead of y in the last equation, one can see that

$$2[x, y]d(x) = y[F(x), x] + y[d(x), x] \quad \text{for all} \;\; x, y \in R. \tag{3.5}$$

Substituting yz for y in (3.5), we get $[x,y]zd(x)=0$ for all $x,y,z\in R$ which proves that either R is commutative or $d=0$.
If $d=0$, then equation (3.4) reduces to

$$2F(y)x = yF(x)+xF(y) \quad \text{for all } \ x,y\in R$$

thereby obtaining

$$[F(r),t]=0 \quad \text{for all } \ r,t\in R.$$

Putting rs instead of r we obtain $F(r)[s,t]=0$ for all $r,s,t\in R$, which because of $F\neq 0$ and R is prime, implies that R is commutative.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Assume that

$$F[x,x^*]=F(x)\circ x^* - F(x^*)\circ x \quad \text{for all } \ x\in R. \tag{3.6}$$

Linearizing (3.6) we find that

$$F[x,y^*]+F[y,x^*]=F(x)\circ y^*+F(y)\circ x^*-F(x^*)\circ y-F(y^*)\circ x$$

in such a way that

$$F[x,y]+F[y^*,x^*]=F(x)\circ y+F(y^*)\circ x^*-F(x^*)\circ y^*-F(y)\circ x. \tag{3.7}$$

Putting $y=yh$ in (3.7), where $h\in Z(R)\cap H(R)\backslash\{0\}$, we get

$$\Big([x,y]+[y^*,x^*]\Big)d(h)=\Big(y^*\circ x^*-y\circ x\Big)d(h) \quad \text{for all } \ x,y\in R \tag{3.8}$$

thereby obtaining

$$\Big(xy-x^*y^*\Big)d(h)=0 \quad \text{for all } \ x,y\in R. \tag{3.9}$$

By virtue of primeness, the above expression assures that either $d(h)=0$ or $xy=x^*y^*$ which leads to $r=r^*$ for all $r\in R$ contradicting the fact that $*$ is of the second kind. Consequently, $d(h)=0$ for all $h\in Z(R)\cap H(R)$ and invoking Lemma 3.2.6 it follows that $d(s)=0$ for all $s\in Z(R)\cap S(R)$.
Replacing y by ys in (3.7), where $s\in Z(R)\cap S(R)\backslash\{0\}$, we have

$$F[x,y]-F[y^*,x^*]=F(x)\circ y-F(y^*)\circ x^*+F(x^*)\circ y^*-F(y)\circ x \tag{3.10}$$

Combining equations (3.7) and (3.10), we may write

$$F[x,y]=F(x)\circ y-F(y)\circ x \quad \text{for all } \ x,y\in R. \tag{3.11}$$

Substituting yx for y in (3.11), we obtain

$$2[x,y]d(x) = -y[F(x),x] - y\big(d(x)\circ x\big) \quad \text{for all } \ x,y \in R. \tag{3.12}$$

Once again replacing y by zy we easily get

$$[x,z]yd(x) = 0 \quad \text{for all } \ x,y,z \in R$$

proving that $d = 0$ or R is commutative. If $d = 0$, then equation (3.11) reduces to

$$yF(x) = xF(y) \text{ for all } \ x,y \in R$$

thereby obtaining

$$[F(x),y] = 0 \text{ for all } \ x,y \in R.$$

Reasoning as in the preceding implication, one can see that R is commutative. In conclusion, in all cases we have proved that R is a commutative integral domain.

Now suppose that (2) is satisfied, then as we have seen R is commutative and equation (3.11) becomes $F(x)y = F(y)x$. Replacing x by xr, we find that $xyd(r) = 0$ for all $x,y,r \in R$ so that $d = 0$. Accordingly, equation (3.11) can be rewritten

$$F(y)x = yF(x) \quad \text{for all } \ x,y \in R. \tag{3.13}$$

Replacing y by yz in (3.13), we obviously get

$$F(y)zx = yzF(x) \quad \text{for all } \ x,y,z \in R.$$

Invoking Lemma 3.2.5, there exists λ in the extended centroid of R such that $F(x) = \lambda x$ for all $x \in R$. ■

Corollary 3.2.8 *Let $(R,*)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind and F a nonzero generalized derivation associated with a derivation d. Then the following assertions are equivalent:*
(1) F is a C_1-function;
(2) F is a C_2-function;
(3) R is a commutative integral domain.
Moreover, if (2) is satisfied then there exists λ in the extended centroid of R such that $F(x) = \lambda x$ for all $x \in R$.

Remark. The preceding theorem shows that in the case of prime rings with involution of the second kind, the previous classes coincide for generalized derivations. More precisely, we have the following result.

Corollary 3.2.9 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind and F a nonzero generalized derivation associated with a derivation d. Then the following assertions are equivalent:*
(1) F is a C_1-function;
(2) F is a C_1^*-function;
(3) F is a C_2-function;
(4) F is a C_2^*-function.

3.3 $*$-Centralizing generalized derivations

In ([2], Main Theorem), Ali and Dar proved that if $(R, *)$ is a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind and d is a nonzero derivation such that $d(Z(R) \cap S(R)) \neq \{0\}$, then R must be commutative if d is $*$-centralizing. The purpose of the following theorem is to extend this result for generalized derivations.

Theorem 3.3.1 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind and F a nonzero generalized derivation associated with a derivation d. Then the following conditions are equivalent:*
(1) *F is $*$-centralizing on R;*
(2) *$[F(x), x^*] + [d(x^*), x] \in Z(R)$ for all $x \in R$;*
(3) *R is a commutative integral domain.*

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (3) Suppose that

$$[F(x), x^*] \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x \in R.$$

A linearization of this equation yields that

$$[F(x), y] + [F(y^*), x^*] \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x, y \in R. \tag{3.14}$$

Replacing x by xh in (3.14), where $h \in Z(R) \cap H(R) \backslash \{0\}$, we get $[x, y]d(h) \in Z(R)$. Therefore either R is commutative or $d(h) = 0$ in which case Lemma 3.2.6 proves that $d(s) = 0$ for all $s \in Z(R) \cap S(R) \backslash \{0\}$. In the later case, putting $y = ys$ in (3.14) with s is a nonzero element in $Z(R) \cap S(R)$ we get

$$[F(x), y] - [F(y^*), x^*] \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x, y \in R. \tag{3.15}$$

This equation, when combined with (3.14), shows that

$$[F(x), y] \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x, y \in R. \tag{3.16}$$

a) If $d = 0$, then replacing x by xy in (3.16) we may write

$$[F(x), y]y \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{3.17}$$

Since R is prime, then we obtain $[F(x), y] = 0$ for all $x, y \in R$ or R is commutative. Accordingly, in both the cases we have

$$[F(x), y] = 0 \quad \text{for all } \ x, y \in R.$$

Reasoning as in the proof of Theorem 1, the fact that $F \neq 0$, implies that R is commutative.

b) If $d \neq 0$, then equation (3.16) yields that

$$[F(x), x] \in Z(R) \ \text{ for all } \ x \in R$$

hence F is centralizing and the commutativity of R follows from ([78], Theorem 2).

(2) $\Longrightarrow$ (3) We are given that

$$[F(x), x^*] + [d(x^*), x] \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R.$$

We may assume that $d \neq 0$; otherwise R is commutative by the first implication. Linearizing the above equation, we get

$$[F(x), y] + [F(y^*), x^*] + [d(x^*), y^*] + [d(y), x] \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{3.18}$$

Substituting yh for y by in (3.18), where h is a nonzero element in $Z(R) \cap H(R)$, we obtain

$$\Big([x, y] + [x^*, y^*]\Big) d(h) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R.$$

Accordingly, either $[x, y] + [x^*, y^*] \in Z(R)$ in which case R is commutative or $d(h) = 0$.

Assume that $d(h) = 0$ for all $h \in Z(R) \cap H(R)$, in particular we have $d(s^2) = 0$ for all $s \in Z(R) \cap S(R)$ so that $d(s) = 0$. Replacing y by ys in (3.18), where $s \in Z(R) \cap S(R) \backslash \{0\}$, we arrive at

$$[F(x), y] - [F(y^*), x^*] - [d(x^*), y^*] + [d(y), x] \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{3.19}$$

Combining the last equation with (3.18) we find that

$$[F(x), y] + [d(y), x] \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R.$$

Substituting y^2 by x in the above expression, we obtain

$$[F(y), y]y + 2y[d(y), y] + [d(y), y]y \in Z(R) \quad \text{for all } \ y \in R \tag{3.20}$$

thereby obtaining

$$y\Big[[d(y), y], y\Big] = 0 \quad \text{for all} \;\; y \in R$$

hence the commutativity of R follows from ([65], Theorem 2.(ii)). ■
The following corollaries are immediate consequences of Theorem 3.3.1.

Corollary 3.3.2 ([2], Main Theorem) *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind and d a nonzero derivation of R such that $[d(x), x^*] \in Z(R)$ for all $x \in R$. Then, R is a commutative integral domain.*

Corollary 3.3.3 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind and F a nonzero generalized derivation associated with a derivation d. Then the following conditions are equivalent:*
(1) *$[F(x), y] \in Z(R)$ for all $x, y \in R$;*
(2) *$[F(x), y] + [d(y), x] \in Z(R)$ for all $x, y \in R$;*
(3) *R is a commutative integral domain.*

It is natural to ask what can we say about the commutativity of R if the commutator in the preceding theorem is replaced by anti-commutator. We have studied this problem and proved that the commutativity can be characterized by the same condition on anti-commutator.

Theorem 3.3.4 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind and F a nonzero generalized derivation associated with a derivation d. Then the following conditions are equivalent:*
(1) *$F(x) \circ x^* \in Z(R)$ for all $x \in R$;*
(2) *$F(x) \circ x^* + d(x^*) \circ x \in Z(R)$ for all $x \in R$;*
(3) *R is a commutative integral domain.*

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (3) We are given that

$$F(x) \circ x^* \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x \in R.$$

Linearizing the above relation we get $F(x) \circ y^* + F(y) \circ x^* \in Z(R)$ and therefore

$$F(x) \circ y + F(y^*) \circ x^* \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x, y \in R. \tag{3.21}$$

Substituting xh for x in (3.21), where $h \in Z(R) \cap H(R) \backslash \{0\}$, we obtain

$$\Big(x \circ y\Big) d(h) \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x, y \in R.$$

In light of primeness, it follows that either $d(h) = 0$ or $x \circ y \in Z(R)$ in which case R is commutative.

Assume that $d(h) = 0$ for all $h \in Z(R) \cap H(R)$, then in particular $d(s^2) = 0$ for all $s \in Z(R) \cap S(R)$ in such a way that $d(s) = 0$.
Replacing y by ys in (3.21), where $s \in Z(R) \cap S(R)\backslash\{0\}$, we find that

$$F(x) \circ y - F(y^*) \circ x^* \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{3.22}$$

Comparing (3.21) and (3.22), we get

$$F(x) \circ y \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R.$$

In particular, for $y = h \in Z(R) \cap H(R)\backslash\{0\}$, the last expression forces $F(x) \in Z(R)$ for all $x \in R$. Arguing as in the proof Theorem 3.3.1, we conclude that R is commutative.
(2) $\Longrightarrow$ (3) We may assume that $d \neq 0$, indeed otherwise our hypothesis reduces to $F(x) \circ x^* \in Z(R)$ for all $x \in R$ and R is commutative by the first implication. Assume that

$$F(x) \circ x^* + d(x^*) \circ x \in Z(R) \quad \text{for all } \ x \in R.$$

Linearizing this equation, we get

$$F(x) \circ y^* + F(y) \circ x^* + d(x^*) \circ y + d(y^*) \circ x \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R \tag{3.23}$$

and thus

$$F(x) \circ y + F(y^*) \circ x^* + d(x^*) \circ y^* + d(y) \circ x \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{3.24}$$

Substituting xh for x in (3.24), where $h \in Z(R) \cap H(R)\backslash\{0\}$, we obtain

$$\Big(x \circ y + x^* \circ y^*\Big) d(h) \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R.$$

Since R is prime, then either $x \circ y + x^* \circ y^* \in Z(R)$ or $d(h) = 0$.
Suppose that

$$x \circ y + x^* \circ y^* \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{3.25}$$

In particular, for $y = s \in Z(R) \cap S(R)\backslash\{0\}$ the above expression yields that $x - x^* \in Z(R)$.
Similarly, taking $y = h \in Z(R) \cap H(R)\backslash\{0\}$, equation (3.25) shows that $x + x^* \in Z(R)$. In light of 2-torsion freeness, it follows that R is commutative.
Now assume that $d(h) = 0$ for all $h \in Z(R) \cap H(R)$, then $d(s) = 0$ for all $s \in Z(R) \cap S(R)$. Replacing y by ys in (3.24), with $s \in Z(R) \cap S(R)\backslash\{0\}$, we find that

$$F(x) \circ y - F(y^*) \circ x^* - d(x^*) \circ y^* + d(y) \circ x \in Z(R) \quad \text{for all } \ x, y \in R. \tag{3.26}$$

Combining (3.24) with (3.26), we obviously get

$$F(x) \circ y + d(y) \circ x \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x, y \in R.$$

Replacing y by h in the above expression,where $h \in Z(R) \cap H(R) \backslash \{0\}$, we obtain

$$F(x) \in Z(R) \quad \text{for all} \;\; x \in R. \tag{3.27}$$

Arguing as above, we conclude that R is a commutative integral domain. ■

Corollary 3.3.5 ([76], Theorem 3.7) *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind and d a nonzero derivation of R. Then R is a commutative integral domain if and only if $d(x) \circ x^* \in Z(R)$ for all $x \in R$.*

Corollary 3.3.6 *Let $(R, *)$ be a 2-torsion free prime ring with involution of the second kind and F a nonzero generalized derivation associated with a derivation d. Then the following conditions are equivalent:*
(1) *$F(x) \circ y \in Z(R)$ for all $x, y \in R$;*
(2) *$F(x) \circ y + d(y) \circ x \in Z(R)$ for all $x, y \in R$;*
(3) *R is a commutative integral domain.*

3.4 Examples proving necessity of our conditions

The following example proves that the condition of $*$ `is of the second kind` in our theorems is necessary.

Example 3.
Let us consider $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ and $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
It is easy to check that $(R, *)$ is a prime ring with involution of the first kind. Moreover, for $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R$ we have

$$[x, x^*] = 0 \quad \text{and} \quad x^* \circ x = x \circ x^* = 2 \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \in Z(R).$$

Furthermore, if we consider the generalized derivation $F = I_R$ with its associated derivation $d = 0$, then the conditions of our theorems are satisfied but R is a non commutative prime ring.

Our last example demonstrates that the previous results cannot be extended to semi-prime rings.

Example 4.
Let $(R,\ *)$ be as in the preceding example and let $\mathbb{C}$ be the field of complex numbers with the conjugation involution. If we set $\mathcal{R} = R \times \mathbb{C}$, then it is obvious to verify that $(\mathcal{R}, \tau)$ is a semi-prime ring with involution of the second kind where

$$\tau(r, z) = (r^*, \overline{z}) \quad \text{for all} \quad (r, z) \in R \times \mathbb{C}.$$

Furthermore, it is straightforward to check that the map

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \ : \quad \mathcal{R} \quad &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (r, z) \quad &\longmapsto (r, 0) \end{aligned}$$

is a generalized derivation associated with $d = 0$ (that is; $\mathcal{F}$ is a left multiplier) and $\mathcal{F}$ satisfies the conditions of our results, but $\mathcal{R}$ is a non commutative ring.

CHAPTER 4

Center-like subsets in prime rings with derivations and endomorphisms

Article soumis

Abstract. Let R be a prime ring. In this chapter it's proved that certain subsets of R defined by conditions involving derivations and endomorphisms coincide with the center of R. In fact, our results generalize and improve several results obtained earlier on center-like subsets in prime rings.

4.1 Introduction

Throughout this paper R will represent an associative ring with center $Z(R)$; in case R is prime, by C we denote the extended centroid of R (see [49] or [68] for the notion of the extended centroid). If S is a nonempty subset of R, then $C_R(S)$ and $A_l(S)$ denote, respectively, the centralizer of S in R and the left annihilator of S. A mapping F of R into itself is called centralizing on a subset S of R if $[F(s), s] \in Z(R)$ for all $s \in S$; in the special case where $[F(s), s] = 0$ for all $s \in S$, the mapping F is said to be commuting on S. Various results in the literature indicate how the global structure of a ring R is often tightly connected to the behavior of derivations defined on R. The classical result of Posner [79] states that the existence of a nonzero centralizing derivation on a prime ring forces the ring to be commutative. Mayne [71] proved the analogous result for centralizing automorphisms. A number of authors have extended these theorems of Posner and Mayne in several ways ([6], [14], [73], [74], [77]).

Many results in the literature assert that certain subsets of a ring R, defined by some sort of commutativity condition, must coincide with its center $Z(R)$. Herstein [48] proved that for a ring R with no nil ideals the hypercenter

$$S(R) = \{a \in R | ax^n = x^n a \quad \text{for all } x \in R, \text{ for some } n = n(a, x) \geq 1\}$$

coincides with the center $Z(R)$ of R. Motivated by Herstein's hypercenter, Chacron [30] introduced a more general concept that he called the *cohypercenter* $T(R)$ of R defined by

$$T(R) = \{a \in R | [a, x - x^2 p(x)] = 0 \text{ for all } x \in R, \text{ and } p(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ depends on (a, x) } \}.$$

More precisely, he proved ([30], Theorem 1) that the cohypercenter of a semiprime ring R is exactly the center of R. Herstein [50] introduced the set

$$H(R; d) = \{a \in R | ad(x) = d(x)a \text{ for all } x \in R\}$$

and proved that if R is a 2-torsion free prime ring and d a nonzero derivation, then $H(R; d) = Z(R)$.
Recently, H. E. Bell and M. N. Daif [16] introduced and studied the following new center-like subsets :

$$Z^*(R; f) = \{y \in R | [x, y] = [f(y), f(x)] \quad \text{for all } \ x \in R\};$$

$$Z^{**}(R; f) = \{y \in R | [x, y] = [f(x), f(y)] \quad \text{for all } \ x \in R\};$$

$$Z_1(R; f) = \{y \in R | [f(x), f(y)] = [f(y), x] + [y, f(x)] \quad \text{for all } \ x \in R\}$$

where f is either an epimorphism or a derivation. In fact, they succeeded to compare each one of the above subsets with the center of R for the class of prime (semiprime) rings with some additional assumptions. In this paper we continue this line of investigation regarding the study of center-like subsets in prime rings involving more general identities.

4.2 Center-like subsets involving derivations

Motivated by the results of [16], we define the following subsets for a ring R equipped with derivations d_1 and d_2 :

$$Z^*(R; d_1; d_2) = \{y \in R | [x, y] = [d_1(y), d_2(x)] \quad \text{for all } \ x \in R\};$$

$$Z^{**}(R;d_1;d_2) = \{y \in R | [x,y] = [d_1(x), d_2(y)] \quad \text{for all} \ \ x \in R\};$$

$$Z_1(R;d_1;d_2) = \{y \in R | [d_1(x), d_2(y)] = [d_2(y), x] + [y, d_1(x)] \quad \text{for all} \ \ x \in R\}.$$

It is worthwhile to mention that in the special case where $d_1 = d_2$, the above subsets are precisely the subsets introduced and studied in [16].

Lemma 4.2.1 ([25], Lemma 2.3) *Let R be a prime ring, and let d, f, g and h be derivations of R. Suppose that*

$$d(x)g(y) = h(x)f(y) \quad \textit{for all} \ \ x, y \in R.$$

If $d \neq 0$ and $f \neq 0$ then there exists $\lambda \in C$ such that $g(x) = \lambda f(x)$ and $h(x) = \lambda d(x)$ for all $x \in R$.

The following Lemma appears in a conference proceedings, not easily available, so we will reproduce its proof here.

Lemma 4.2.2 ([11], Lemma 3.1)

Let R be a 2-torsion free semiprime ring and L a left ideal of R. If a, $b \in R$, then the relation

$$axb + bxa = 0 \quad \textit{for all} \ \ x \in L,$$

implies that $axb = bxa = 0$ for all $x \in L$.

Proof. We are given that

$$axb + bxa = 0 \quad \text{for all} \ \ x \in L. \tag{4.1}$$

By repeating a computation of Brešar. Let x, $y \in L$. Apply (4.1) three times, to obtain

$$axbyaxb = -(bxa)yaxb = -[b(xay)a]xb = [a(xay)b]xb = ax(ayb)xb = -ax(bya)xb.$$

Thus, $axbRyaxb = \{0\} = yaxbRyaxb$. Since R is semi-prime,we have

$$LaLb = \{0\}$$

Let $\{P_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ be a family of prime ideals of R such that $\cap P_\alpha = \{0\}$. For a typical P_α, either $La \subseteq P_\alpha$ or $Lb \subseteq P_\alpha$, so that $bLa \subseteq P_\alpha$ or $aLb \subseteq P_\alpha$. It follows by (4.1) that $aLb \subseteq \cap P_\alpha$. Hence, $aLb = bLa = \{0\}$. ■

Theorem 4.2.3 *Let R be a 2-torsion free prime ring, and U a nonzero right ideal, and d_1 and d_2 derivations on R. If $A_l(U) = \{0\}$ or $d_2(U)U \neq \{0\}$, then*

$$Z^*(U;d_1;d_2) = \{y \in U | [x,y] = [d_1(y), d_2(x)] \quad \textit{for all} \ \ x \in U\} = Z(R).$$

Proof. Let $y \in Z^*(U; d_1; d_2)$, then

$$[x, y] = [d_1(y), d_2(x)] \quad \text{for all } \; x \in U. \tag{4.2}$$

Substituting xz for x in (4.2) where $z \in U$, and using (4.2), we get

$$d_2(x)[d_1(y), z] + [d_1(y), x]d_2(z) = 0 \quad \text{for all } \; x, z \in U,$$

Replacing z by zw for $w \in U$ gives

$$d_2(x)z[d_1(y), w] + [d_1(y), x]zd_2(w) = 0 \quad \text{for all } \; x, z, w \in U;$$

and taking $w = x$ yields

$$d_2(x)z[d_1(y), x] + [d_1(y), x]zd_2(x) = 0 \quad \text{for all } \; x, z \in U. \tag{4.3}$$

By Lemma 4.2.2, $d_2(x)U[d_1(y), x] = \{0\} = d_2(x)UR[d_1(y), x]$ for all $x \in U$; and since R is prime $d_2(x)U = \{0\}$ or $[d_1(y), x] = 0$ for each $x \in U$. The sets of x for which these two conditions hold an additive subgroups of U, hence either $d_2(U)U = \{0\}$ or $d_1(y) \in C_R(U)$. But $C_R(U) = Z(R)$, so either $d_2(U)U = \{0\}$ or $d_1(y) \in Z(R)$. If $d_2(U)U \neq \{0\}$ it follows from 4.2 that $y \in C_R(U) = Z(R)$, so we need only consider the case $A_l(U) = \{0\} = d_2(U)U$. This yields $d_2(U) = \{0\}$, so again an appeal to 4.2 gives $y \in Z(R.)$ ■

Corollary 4.2.4 *Let R be a 2-torsion free prime ring, and I a nonzero ideal, and d_1 and d_2 derivations on R. If $A_l(I) = \{0\}$ or $d_2(I)I \neq \{0\}$, then*

$$Z^*(I; d_1; d_2) = \{y \in I | [x, y] = [d_1(y), d_2(x)] \quad \textit{for all } \; x \in I\} = Z(R).$$

Corollary 4.2.5 *Let R be a 2-torsion free prime ring. If d_1 and d_2 are derivations on R. Then $Z^*(R; d_1; d_2) = Z(R)$.*

Corollary 4.2.6 *Let d_1 and d_2 be nonzero derivations of a 2-torsion prime ring R. The following assertions are equivalent :*
1) $\big[x, [y, d_1(y)]\big] = \big[[y, d_1^2(y)], d_2(x)\big]$ for all $x, y \in R$
2) R is a commutative integral domain.

Proof. For the nontrivial implication, assume that

$$\big[x, [y, d_1(y)]\big] = \big[[y, d_1^2(y)], d_2(x)\big] \quad \text{for all } \; x, y \in R.$$

Therefore $[y, d_1(y)] \in Z^*(R; d_1; d_2)$ for all $y \in R$. In Light of Corollary 4.2.5, we may write $[y, d_1(y)] \in Z(R)$ for all $y \in R$, that is d_1 is centralizing on

R. Applying Posner's Theorem, we conclude that R is a commutative integral domain. ■

Using a similar proof, with slight modifications, it is easy to prove the following Theorem.

Theorem 4.2.7 *Let R be a 2-torsion free prime ring, and U a nonzero right ideal, and d_1 and d_2 derivations on R. If $A_l(U) = \{0\}$ or $d_2(U)U \neq \{0\}$, then*

$$Z^{**}(U; d_1; d_2) = \{y \in U | [x, y] = [d_1(x), d_2(y)] \quad \textit{for all} \;\; x \in U\} = Z(R).$$

Corollary 4.2.8 *Let R be a 2-torsion free prime ring, and I a nonzero right ideal, and d_1 and d_2 derivations on R. If $A_l(I) = \{0\}$ or $d_2(I)I \neq \{0\}$, then*

$$Z^{**}(I; d_1; d_2) = \{y \in I | [x, y] = [d_1(x), d_2(y)] \quad \textit{for all} \;\; x \in I\} = Z(R).$$

Corollary 4.2.9 *Let d_1 and d_2 be derivations of a 2-torsion free prime ring R. Then $Z^{**}(R; d_1; d_2) = Z(R)$.*

Corollary 4.2.10 *Let d_1 and d_2 be nonzero derivations of a 2-torsion prime ring R. The following assertions are equivalent :*
1) $\big[x, [y, d_2(y)]\big] = \big[d_1(x), [y, d_2^2(y)]\big]$ for all $x, y \in R$.
2) R is a commutative integral domain.

Proof. For the nontrivial implication, assume that

$$\big[x, [y, d_2(y)]\big] = \big[d_1(x), [y, d_2^2(y)]\big] \quad \text{for all} \;\; x, y \in R.$$

Hence $[y, d_2(y)] \in Z^{**}(R; d_1; d_2)$ for all $y \in R$ and Corollary 4.2.9 yields that $[y, d_2(y)] \in Z(R)$ for all $y \in R$. Accordingly, d_2 is centralizing on R and Posner's Theorem assures that R is a commutative integral domain. ■

The following Theorem generalizes ([16], Theorem 2.5).

Theorem 4.2.11 *Let R be a 2-torsion free prime ring. If d_1 and d_2 are nonzero derivations of R, then $Z_1(R; d_1; d_2) = Z(R)$.*

Proof. It is obvious that $Z(R) \subset Z_1(R; d_1; d_2)$, hence we need to prove that $Z_1(R; d_1; d_2) \subset Z(R)$. Let us fix an element y in $Z_1(R; d_1; d_2)$, then

$$[d_1(x), d_2(y)] = [d_2(y), x] + [y, d_1(x)] \quad \text{for all} \;\; x \in R. \tag{4.4}$$

Replacing x by xz in (4.4), we get

$$d_1(x)[z, d_2(y)] + [x, d_2(y)]d_1(z) = d_1(x)[y, z] + [y, x]d_1(z) \tag{4.5}$$

thereby obtaining

$$d_1(x)([z, d_2(y)] + [z, y]) = ([y, x] - [x, d_2(y)])d_1(z) \quad \text{for all } \ x, z \in R. \tag{4.6}$$

Accordingly,

$$d_1(x)[z, d_2(y) + y] = -[x, d_2(y) + y]d_1(z) \quad \text{for all } \ x, z \in R, \tag{4.7}$$

If d_3 denotes the inner derivation induced by $d_2(y) + y$, then equation (4.7) can be rewritten as

$$d_1(x)d_3(z) = d_4(x)d_1(z) \quad \text{for all } \ x, z \in R \tag{4.8}$$

where $d_4 = -d_3$. Since $d_1 \neq 0$, then Lemma 4.2.1 assures existence of $\lambda \in C$ such that $d_3 = \lambda d_1$ and $d_4 = \lambda d_1$ where C is the extended centroid of R. Therefore $\lambda d_1 = -\lambda d_1$ and 2-torsion freeness forces $\lambda = 0$ in such a way that $d_3 = 0$. Consequently, $[d_2(y) + y, z] = 0$ for all $z \in R$ and thus

$$-[d_2(y), z] = [y, z] \quad \text{for all } \ z \in R. \tag{4.9}$$

Hence equation (4.4) reduces to

$$[y, d_1(x)] = -[y, x] + [y, d_1(x)] \quad \text{for all } \ x \in R \tag{4.10}$$

in such a way that $[y, x] = 0$ for all $x \in R$ proving that $y \in Z(R)$. ■

Application of Theorem 4.2.11 in the particular case where $d_1 = d_2$ yields Theorem 2.5 of [16].

Corollary 4.2.12 ([16], Theorem 2.5) *Let R be a 2-torsion free prime ring and d a nonzero derivation of R. Then*

$$Z_1(R; d) = \{y \in R | d[x, y] = -[d(x), d(y)] \quad \textit{for all } \ x \in R\} = Z(R).$$

Let d be a derivation, and define

$$Z_2(R; d) = \big\{y \in R | d([x, y]) = 0 \quad \text{for all } \ x \in R\big\};$$

$$Z_3(R; d) = \big\{y \in R | [x, y] = d([x, y]) \quad \text{for all } \ x \in R\big\}.$$

Theorem 4.2.13 *Let R be a 2-torsion free prime ring, U a nonzero ideal of R, and d a nonzero derivation on R. Then $Z_2(U;d) = Z(R)$.*

Proof. Let $y \in Z_2(U;d)$. Then

$$d[x,y] = 0 \quad \text{for all } x \in U, \tag{4.11}$$

which may be restated as

$$[d(x),y] = [d(y),x] \quad \text{for all } x \in U, \tag{4.12}$$

Replacing x by xz in (4.12), where $z \in U$, and using (4.12), we obtain

$$d(x)[z,y] + [x,y]d(z) = 0 \quad \text{for all } x,z \in U, \tag{4.13}$$

Therefore $d(x)[zw,y] + [x,y]d(zw) = 0$; and by expanding this equation and using (4.13), we get

$$d(x)z[w,y] + [x,y]zd(w) = 0 \quad \text{for all } x,z,w \in U.$$

In particular,

$$d(x)z[x,y] + [x,y]zd(x) = 0 \quad \text{for all } x,z \in U;$$

and Lemma 4.2.2 yields that for each $x \in U$, $d(x)z[x,y] = 0$ for all $z \in U$, so that $d(x) = 0$ or $[x,y] = 0$. Since U is not the union of two proper additive subgroups, either $d(U) = \{0\}$ or $y \in C_R(U) = Z(R)$. But $d(U) = \{0\}$ implies $d = 0$, contrary to our initial hypothesis; hence $Z_2(U;d) = Z(R)$. ■

Theorem 4.2.14 *Let R be a 2-torsion free prime ring, U a nonzero ideal of R, and d a derivation on R. Then $Z_3(U;d) = Z(R)$.*

Proof. Let $y \in Z_3(U;d)$. Then

$$[x,y] = d[x,y] \quad \text{for all } x \in U. \tag{4.14}$$

This may be rewritten as

$$[x,y] = [d(x),y] - [d(y),x] \quad \text{for all } x \in U \tag{4.15}$$

or

$$[x,y] + [d(y),x] - [d(x),y] \quad \text{for all } x \in U \tag{4.16}$$

For $z \in U$, replace x by xz in (4.15), and by appropriate expansion, obtain for all $x, z \in U$

$$x([z,y]+[d(y),z]-[d(z),y])+([x,y]+[d(y),x]-[d(x),y])z = d(x)[z,y]+[x,y]d(z)$$

in view of (4.16), this equality reduces to

$$d(x)[z,y] + [x,y]d(z) = 0 \quad \text{for all } x, z \in U. \tag{4.17}$$

Now (4.17) is the same as (4.13), so if $d \neq 0$, we may use the same argument as in the proof of Theorem 4.2.13 to get $Z_3(U;d) = Z(R)$. If $d = 0$, it is immediate from (4.14) that $y \in C_R(U) = Z(R)$. ■

4.3 Center-like subsets with endomorphisms

To start this section, we introduced the following subsets involving endomorphisms $T_1 : R \longrightarrow R$ and $T_2 : R \longrightarrow R$:

$$Z^{\wedge}(R;T_1;T_2) = \{y \in R | [x,y] = [T_1(y),T_2(x)] = [T_2(y),T_1(x)] \quad \text{for all } x \in R\};$$

$$Z^{\wedge\wedge}(R;T_1;T_2) = \{y \in R | [x,y] = [T_1(x),T_2(y)] = [T_2(x),T_1(y)] \quad \text{for all } x \in R\};$$

Throughout this paragraph an endomorphism T of R is said to be nontrivial, it T is not the identity map.

In ([16], Theorem 3.4) it is proved that if T is an *epimorphism*, then $Z^{\wedge\wedge}(R;T) = Z(R)$. Our aim in the following theorem, is to study a more general situation involving two endomorphisms that are not necessarily epimorphisms.

Theorem 4.3.1 *Let R be a 2-torsion prime ring. If T_1 and T_2 are nontrivial endomorphisms of R, then $Z^{\wedge\wedge}(R;T_1;T_2) \subset Z(R)$.*

Proof. Let $y \in Z^{\wedge\wedge}(R;T_1;T_2)$, then

$$[T_1(x),T_2(y)] = [x,y] = [T_2(x),T_1(y)] \quad \text{for all } x \in R. \tag{4.18}$$

Substituting xz for x and applying (4.18) we get

$$T_1(x)[z,y] + [x,y]T_1(z) = x[z,y] + [x,y]z \quad \text{for all } x, z \in R \tag{4.19}$$

and thus

$$(T_1(x) - x)[z,y] + [x,y](T_1(z) - z) = 0 \quad \text{for all } x, z \in R. \tag{4.20}$$

Letting $x = y$ in (4.20), then we have

$$(T_1(y) - y)[z, y] = 0 \quad \text{for all } \ z \in R. \tag{4.21}$$

Since R is prime, it follows that either $y \in Z(R)$ or $T_1(y) = y$.
Assume that $T_1(y) = y$, taking $x = xz$ in (4.18) the relation which we obtain can be written in the form

$$(T_2(x) - x)[z, y] + [x, y](T_2(z) - z) = 0 \quad \text{for all } \ x, z \in R. \tag{4.22}$$

Now let $x = y$ in (4.22); then we obtain

$$(T_2(y) - y)[z, y] = 0 \quad \text{for all } \ z \in R. \tag{4.23}$$

Using primeness of R, it follows from the above expression that either $y \in Z(R)$ or $T_2(y) = y$. In the later case we have $T_1(y) = T_2(y) = y$ and invoking (4.18) it follows that

$$T_1([r, y]) = [T_1(r), y] = [r, y] \quad \text{for all } \ r \in R.$$

Substituting $[r, y]$ for x in (4.22), we then get

$$[[r, y], y](T_2(z) - z) = 0 \quad \text{for all } \ r, z \in R. \tag{4.24}$$

Replacing z by zt, the last equation implies that

$$[[r, y], y]zt = [[r, y], y]T_2(zt) = [[r, y], y]T_2(z)T_2(t) = [[r, y], y]zT_2(t) \ \text{ for all } r, z, t \in R$$

in such a way that $[[r, y], y]z(T_2(t) - t)$ for all $r, z, t \in R$. Using the primeness of R and the fact that T_2 is nontrivial, it follows that

$$[[r, y], y] = 0 \ \text{ for all } \ r \in R.$$

Substituting tr for r in the last equation, one can easily verify that

$$[t, y][r, y] = 0 \quad \text{for all } \ t, r \in R.$$

Once again using the primeness of R, we may conclude that $y \in Z(R)$ and the proof of the theorem is complete. ■

As an application of our Theorem, we get an improved version of (Theorem 3.4, [16]) without the epimorphism hypothesis.

Corollary 4.3.2 *Let R be a 2-torsion prime ring and T a nontrivial endomorphism of R. Then $Z^{\wedge\wedge}(R;T) = Z(R)$.*

Theorem 4.3.3 *Let R be a 2-torsion free prime ring and T_1, T_2 epimorphisms of R such that $T_1 \neq T_2$. Then $Z^{\wedge}(R;T_1;T_2) = Z(R)$.*

Proof. For the nontrivial inclusion, let $y \in Z^{\wedge}(R;T_1;T_2)$ this means that

$$[T_1(y), T_2(x)] = [x, y] = [T_2(y), T_1(x)] \quad \text{for all } x \in R. \tag{4.25}$$

Substituting xz for x in (4.25), we get

$$x[z, y] + [x, y]z = T_2(x)[T_1(y), T_2(z)] + [T_1(y), T_2(x)]T_2(z) \tag{4.26}$$

thereby obtaining

$$x[z, y] + [x, y]z = T_2(x)[z, y] + [x, y]T_2(z) \quad \text{for all } x, z \in R \tag{4.27}$$

hence

$$(T_2(x) - x)[z, y] + [x, y](T_2(z) - z) = 0 \quad \text{for all } x, z \in R. \tag{4.28}$$

Now let $x = y$ in (4.28), then we obtain

$$(T_2(y) - y)[z, y] = 0 \quad \text{for all } z \in R. \tag{4.29}$$

Since R is prime, it follows that either $y \in Z(R)$ or $T_2(y) = y$.
Suppose that $T_2(y) = y$, putting $x = xz$ in (4.25) we get

$$x[z, y] + [x, y]z = [y, T_1(x)]T_1(z) + T_1(x)[y, T_1(z)] \quad \text{for all } x, z \in R, \tag{4.30}$$

which, because of (4.25), gives

$$x[z, y] + [x, y]z = [x, y]T_1(z) + T_1(x)[z, y] \quad \text{for all } x, z \in R, \tag{4.31}$$

and therefore

$$(T_1(x) - x)[z, y] + [x, y](T_1(z) - z) = 0 \quad \text{for all } x, z \in R. \tag{4.32}$$

Putting $x = y$, equation (4.32) becomes

$$(T_1(y) - y)[z, y] = 0 \quad \text{for all } z \in R \tag{4.33}$$

In the light of primeness, the above relations assures that either $y \in Z(R)$ or $T_1(y) = y$. In the later case equation our hypothesis reduces to

$$[y, T_2(x)] = [x, y] = [y, T_1(x)] \quad \text{for all } x \in R$$

this means that

$$T_2([y,x]) = [x,y] = T_1([y,x]) \quad \text{for all } \; x \in R.$$

Substituting $[r,y]$ for x in (4.28), we get

$$-2[r,y][z,y] + [[r,y],y](T_2(z) - z) = 0 \quad \text{for all } \; r,z \in R. \tag{4.34}$$

Replacing x by $[r,y]$ in (4.32), one can see that

$$-2[r,y][z,y] + [[r,y],y](T_1(z) - z) = 0 \quad \text{for all } \; r,z \in R. \tag{4.35}$$

Combining (4.34) with (4.35), it follows that

$$[[r,y],y](T_1(z) - T_2(z)) = 0 \quad \text{for all } \; r,z \in R. \tag{4.36}$$

Taking $z = zt$ and applying (4.36), we then get

$$[[r,y],y]T_1(z)T_1(t) = [[r,y],y]T_2(z)T_2(t) = [[r,y],y]T_1(z)T_2(t) \quad \text{for all } \; z,t \in R$$

thereby obtaining

$$[[r,y],y]T_1(z)(T_1(t) - T_2(t)) = 0 \quad \text{for all } \; z,t \in R.$$

Since $T_1 \neq T_2$ and T_1 is an epimorphism, invoking the primeness of R, we are forced to conclude that

$$[[r,y],y] = 0 \quad \text{for all } \; r \in R.$$

Arguing as above, the last relation assures that $y \in Z(R)$. ■

Bibliography

[1] Albas, E. Generalized derivations on ideals of prime rings. Miskolc Math. Notes. 14, 1 (2013), 3–9.

[2] ALi, S., and Dar, N. A. On $*$-centralizing mappings in rings with involution. Georgian Math. J. 21, 1 (2014), 25–28.

[3] Ali, S., Dar, N. A., and Khan, A. N. On strong commutativity preserving like maps in rings with involution. Miskolc Math. Notes. 16, 1 (2015), 17–24.

[4] Ali, S., Dhara, B., and Fošner, A. Some commutativity theorems concerning additive mappings and derivations on semiprime rings. In Contemporary ring theory 2011. (2012), World Sci. Publ, pp. 135–143.

[5] Ashraf, M., and Quadri, M. A. Some conditions for the commutativity of rings. Acta Math. Hungar. 61, 1-2 (1993), 73–77.

[6] Awtar, R. Lie ideals and jordan structures in prime rings with derivations. Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), 67–74.

[7] Awtar, R. On a theorem of posner. Proc. Cambridge Phil. Soc 73 (1973), 25–27.

[8] Awtar, R. Lie ideals and jordan derivations of prime rings. Proc. Amer. Math. Soc 90, 1 (1984), 9–14.

[9] Bell, H. E On the commutativity of prime rings with derivation. Quaestiones Mathematicae 22 (1999), 329–335.

[10] Bell, H. E, and Argac, N. Derivations, products of derivations and commutativity in near-rings. Algebra Colloquium 8, 2 (2001), 399–407.

[11] Bell, H. E. Some commutativity results involving derivations. Trends in Theory of Rings and Modules. Anamaya Publishers, New Delhi, India (2005), 11–16.

[12] Bell, H. E, and Klein, A. A. On some centre-like subsets of rings. Math. Proc. R. Ir. Acad. 105, 1 (2005), 11–16.

[13] Bell, H. E, and Klein, A. A. Neumann near-rings and Neumann centers. New Zealand J. Math. 35, 1 (2006), 31–36.

[14] Bell, H. E, and Martindale, W. S. Centralizing mappings of semiprime rings. Can. Math. Bull. 30, (1987), 92–101.

[15] Bell, H. E., Boua, A., and Oukhtite, L. Semigroup ideals and commutativity in 3-prime near rings. Comm. Algebra. 43, 5 (2015), 1757–1770.

[16] Bell, H. E., and Daif, M. N. Center-like subsets in rings with derivations or epimorphisms. Bull. Iranian Math. Soc. 42, 4 (2016), 873–878.

[17] Bergen, J. Derivations in prime rings. Canad. Math. Bull. 26, (1983), 267–270.

[18] Bergen, J., and Herstein, I. N. The algebraic hypercenter and some applications. J. Algebra 85, 1 (1983), 217–242.

[19] Bergen, J. Lie ideals with regular and nilpotent elements and a result on derivations. Rend. Circ. Mat. Palermo (Ser. 2) 33 (1984), 99–108.

[20] Brešar, M. A note on derivations. Math. J. Okayama Univ 32 (1990), 83–88.

[21] Brešar, M. Semiderivations of prime rings. Proc. Amer. Math. Soc. 108, 4 (1990), 859–860.

[22] Brešar, M. Centralizing mappings on von neumann algebra. Proc. Amer. Math. Soc 111 (1991), 501–510.

[23] Brešar, M. On the distance of composition of two derivations to the generalized derivations. Glasgow Math.J. 33 (1991), 89–93.

[24] Brešar, M. On a generalization of the notion of centralizing mappings. Proc. Amer. Math. Soc 114 (1992), 641–649.

[25] BREŠAR, M. Centralizing mappings and derivations in prime rings. J. Algebra 156, 2 (1993), 385–394.

[26] BREŠAR, M. Commuting traces of biadditive mappings, commutativity-preserving mappings and lie mappings. Trans. Amer. Math. Soc 335 (1993), 525–546.

[27] BREŠAR, M. On certain subring of prime ring with derivations. J. Austral. Math. Soc 54 (1993), 133–141.

[28] BREŠAR, M. Introduction to noncommutative algebra. University of Ljubljana and Maribor Slovenia (March 2014).

[29] BREŠAR, M., AND VUKMAN, J. On some additive mappings in ring with involution. Aequationes Math 38 (1989), 178–185.

[30] CHACRON, M. A commutativity theorem for rings. Proc. Amer. Math. Soc. 59, 2 (1976), 211–216.

[31] CHANG, J. C. On semiderivations of prime rings. Chinese J. Math. 12 (1984), 255–262.

[32] CHEBOTAR, M. A. On a composition of derivations of prime rings. Mascow Univ. Math. Bull 50 (1995), 22–25.

[33] CHUANG, C. L. On compositions of derivations of prime rings. Proc. Amer. Math. Soc 180, (1990), 647–652.

[34] CHUANG, C. L., AND LEE, T. K. On the one-sided version of hypercenter theorem. Chinese J. Math. 23, 3 (1995), 211–223.

[35] CHUANG, C. L., AND LEE, T. K. Finite products of derivations in prime rings. Comm. Algebra 30, 5 (2002), 2183–2190.

[36] CUSACK, J. Jordan derivations on rings. Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975), 321–324.

[37] DHARA, B., REHMAN, N., AND RAZA, M. Lie ideals and action of generalized derivations in rings. Miskolc Mathematical Notes. 16, 2 (2015), 769–779.

[38] DIVINSKY, N. On commuting automorphisms of rings. Trans. Roy. Soc. Canada. Sect. III. 49, 3 (1955), 19–22.

[39] Filippis, V. D., and Huang, S. Generalized derivations on semiprime rings. Bull. Korean Math. Soc. 48, 6 (2011), 1253–1259.

[40] Filippis, V. D., Mamouni, A., and Oukhtite, L. Generalized jordan semiderivations in prime rings. Canad. Math. Bull. 58, 2 (2015), 263–270.

[41] Fosner, A.,Liang, X.-F., and Wei, F. Centralizing traces with automorphisms on triangular algebras. Acta Math. Hungar. 154, 2 (2018), 315–342.

[42] Giambruno, A. Some generalizations of the center of a ring. Rend. Circ. Mat. Palermo 27, 2 (1978), 270–282.

[43] Giambruno, A. On the symmetric hypercenter of a ring. Canad. J. Math. 36, 3 (1984), 421–435.

[44] Golbasi, O. Notes on prime near-rings with generalized derivation. Southeast Asian Bulletin of Mathematics 30 (2006), 49–54.

[45] Golbasi, O., and Koc, E. Notes on commutativity of prime rings with generalized derivations. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat. 58, 2 (2009), 39–46.

[46] Herstein, I. N. Jordan derivations of prime rings. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 1104–1110.

[47] Herstein, I. N. Topic in ring theory. Chicago : University of Chicago Press (1969), 132 pp.

[48] Herstein, I. N. On the hypercenter of a ring. J. Algebra 36, 1 (1975), 151–157.

[49] Herstein, I. N. Rings with involution. Chicago : University of Chicago Press (1976).

[50] Herstein, I. N. A note on derivations ii. Canad. Math. Bull. 22, 4 (1979), 509–511.

[51] Hirano, Y., Tominaga, H., and Trezepizur, A. On a theorem of posner. Math. J. Okayama Univ 27 (1985), 25–32.

[52] Hongan, M. A generalization of a theorem of posner. Math. J. Okayama Univ 33 (1991), 97–101.

[53] Huang, S., and Chuzhou. Derivations with engel conditions in prime and semiprime rings. Czechoslovak Math. J. 61, 136 (2011), 1135–1140.

[54] Huang, S., and Davvaz, B. Generalized derivations of rings and banach algebras. Commun. Algebra. 41 (2013), 1188–1194.

[55] Hvala, B. Generalized derivations in rings. Comm. Algebra 26, 4 (1998), 1147–1166.

[56] Jensen, D. W. Nilpotency of derivations in prime rings. Proc. Amer. Math. Soc 123, 9 (1995), 2633–2636.

[57] Jing, W., and Lu, S. Generalized jordan derivations on prime rings and standard operator algebras. Taiwanese J. Math 7 (2003), 605–613.

[58] Kadison, R. V. Derivations of operator algebras. Ann. of Math. 83 (1966), 280–293.

[59] Kadison, R. V., and Ringrose, J. Derivations of opperator group algebras. Ann. of Math. 83 (1966), 562–576.

[60] Kadison, R. V, and Ringrose, J. Derivations and automorphisms of opperator algebras. Comm. Math. Phys. 4 (1967), 32–63.

[61] Krempa, J., and Matczuk, J. On algebraic derivations of prime rings. Methods in Ring Theory (1984), 211–229.

[62] Lanski, C. Differential identities, lie ideals, and posner's theorem. Pacific J. Math. 134, 2 (1988), 275–297.

[63] Lanski, C. Left ideals and derivations in semiprime rings. J. Algebra. 277 (2004), 658–667.

[64] Lee, P. H., and Lee, T. K. Lie ideals of prime rings with derivations. Bull. Inst. Math. Acad. Sin. 11 (1983), 75–80.

[65] Lee, T. K., and Shiue, K. W. A result on derivations with engel condition in prime rings. Southeast Asian Bull. Math. 23 (1999), 437–446.

[66] Luh, J. A not on commuting automorphism of prime rings. Amer. Math. Monthly 77 (1970), 61–62.

[67] Mamouni, A., Oukhtite, L., and Nejjar, B. On $*$-semiderivations and $*$-generalized semiderivations. J. Algebra Appl. 16, 4 (2017).

[68] Martindale, W. S. Prime rings satisfying a generalized polynomial identity. J. Algebra 12 (1969), 576–584.

[69] Martindale, W. S., and Miers, C. R. On the iterates of derivations of prime rings. Pacific J. Math 104 (1983), 179–190.

[70] Mathieu, M. Elementary operators and applications. Proceedings of the International Workshop held in Blaubeuren,World Scientific, River Edge, NJ, USA (1992).

[71] Mayne, J. H. Centralizing automorphisms of prime rings. Can. Math. Bull. 19 (1976), 113–115.

[72] Mayne, J. H. Ideals and centralizing mappings in prime rings. Proc. Amer. Math. Soc 86 (1982), 211–212.

[73] Mayne, J. H. Centralizing mappings of prime rings. Canad. Math. Bull. 27 (1984), 122–126.

[74] Mayne, J. H. Centralizing automorphisms of lie ideals in prime rings. Canad. Math. Bull. 35 (1992), 510–514.

[75] McCrimmon, K. The zelmanov approach to jordan homomorphisms of associative algebras. J. Algebra 123, 2 (1989), 457–477.

[76] Nejjar, B., Kacha, A., Mamouni, A., and Oukhtite, L. Commutativity theorems in rings with involution. Comm. Algebra 45, 2 (2017), 698–708.

[77] Oukhtite, L. Posner's second theorem for jordan ideals in rings with involution. Expo. Math. 29, 4 (2011), 415–419.

[78] Oukhtite, L., and Mamouni, A. Generalized derivation centralizing on jordan ideals of rings with involution. Turkish J. Math. 38, 2 (2014), 225–232.

[79] Posner, E. C. Derivations in prime rings. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 1093–1100.

[80] Rehman, N., and Filippis, V. D. On n-commuting and n-skew commuting maps with generalized derivations in prime and semiprime rings. Sib. Math. J. 52, 3 (2011), 516–523.

[81] Rehman, N., and Raza, M. A. Generalized derivation as homomorphism or an anti-homomorphism on lie ideals. Arab J. Math Sci. 22, 1 (2016), 22–28.

[82] Tiwari, S. K., Sharma, R. K., and Dhara, B. Identities related to generalized derivation on ideal in prime rings. Beitr. Algebra Geom. 57, 4 (2016), 809–821.

[83] Vukman, J. Commuting and centralizing mappings in prime rings. Proc. Amer. Math. Soc 109 (1990), 47–52.

[84] Vukman, J. A note on generalized derivations of semiprime rings. Taiwanese J. Math 11 (2007), 367–370.

[85] Wang, X. K. Derivations in prime near-rings. Proc. Amer.Math. Soc 121, 2 (1994), 361–366.

[86] Ye, Y., and Luh, J. Derivations of higher order in prime rings. Canad. Math. Bull 39 (1996), 376–384.

Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques de l'Ingénieur

Résumé :

La structure des anneaux non commutatifs via le comportement de certaines applications additives (dérivations, dérivations généralisées, homomorphismes,…) sur les anneaux en considération ou localement sur des sous-ensembles, appropriés, des anneaux a été l'objet de plusieurs études durant ces 60 dernières années surtout après le fameux résultat de Posner en 1957.
Les contributions présentées dans le cadre de cette thèse sont motivées par ces travaux de recherche. Ainsi on a élaboré des identités différentielles faisant intervenir des dérivations ou des dérivations généralisées permettant de déterminer la structure de certains anneaux non commutatifs.

Après le rappel de quelques notions de base, des définitions préliminaires et des résultats importants, qui sont utilisés par la suite, nous avons étudié la commutativité d'un anneau premier sans 2-torsion à involution de deuxième espèce admettant des dérivations généralisées satisfaisant certaines identités algébriques spécifiques. De plus, dans certaines situations, on a prouvé que l'existence de telles dérivations généralisées est impossible. Ensuite nous avons introduit de nouvelles notions permettant ainsi la classifications de certaines dérivations généralisées. Ceci nous a accordé des résultats concernant des propriétés algébriques de certains anneaux : la commutativité et dans certains cas la forme exacte des dérivations généralisées. En outre, quelques résultats caractérisant la commutativité des anneaux premiers ont été généralisés. À la fin, nous avons étudié le centre d'un anneau premier. Ainsi, d'autres caractérisations du centre ont été données en faisant intervenir des applications additives.

Notre contribution tout au long de cette thèse, a été validée par des contre-exemples justifiant la nécessité des conditions imposées.

Mots clés : Anneaux premiers, involutions, dérivations, dérivations généralisées.