

Dédicaces

Ce travail est dédié à mon père **Lahcen BADIE**, décédé quelques jours avant ma soutenance.

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous, ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

Ton souvenir restera à jamais gravé dans mon coeur et ma mémoire. Qu'Allah l'accueille dans son vaste paradis.

اللهم إن رحمتك وسعت كل شيء
فأرحمه رحمة تطمئن بها نفسه
وتقرّ بها عينه .

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du Laboratoire d'Ingénierie, Systèmes et Applications (LISA) de l'École Nationale des Sciences Appliquées de Fès (ENSAF).

L'achèvement de ce manuscrit n'a été possible sans l'aide et le soutien de plusieurs personnes qui ont contribué de près ou de loin à ma formation le long de mes études et recherches scientifiques.

Je tiens particulièrement à remercier vivement mon co-directeur de thèse, Monsieur le professeur **Mohammed ALFIDI**, Professeur à l'École Nationale des Sciences Appliquées de Fès, pour sa confiance en mes capacités, pour la qualité de son encadrement et sa constante disponibilité. J'ai eu le privilège de bénéficier de tous ses précieux conseils dans le domaine de l'Automatique tout au long de l'élaboration de ma thèse, de son soutien et ces qualités humaines, qui m'ont aidé dans la réalisation de ces travaux de thèse.

J'adresse ma profonde gratitude à Monsieur le professeur **Zakaria CHALH**, Professeur à l'École Nationale des Sciences Appliquées de Fès, mon directeur de thèse pour les discussions scientifiques fructueuses et tous les conseils dont il m'a fait bénéficier. Je leur suis reconnaissant pour la formation que j'ai pu acquérir durant cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur le professeur **Abdelmajid SAKA**, Professeur à l'École Nationale des Sciences Appliquées de Fès, de me faire l'honneur de présider le jury de thèse.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à ce travail de thèse Monsieur le professeur **Aziz SOULHI**, Professeur à l'École Nationale de l'Industrie Minérale de Rabat, Monsieur le professeur **Rachid TAOUIL**, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques Errachidia, et Monsieur le professeur **El Houssaine TISSIR**, Professeur à la Faculté des Sciences Dhar El Mehraz de Fès. Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse .

Je remercie également Monsieur le professeur **Hassane MOUSTABCHIR**, Professeur à l'École Nationale des Sciences Appliquées de Fès, et Monsieur **Mhamed SAYYOURI**, Professeur à l'École Nationale des Sciences Appliquées de Fès, d'avoir accepté de participer au processus d'évaluation et de faire partie des membres du jury de la soutenance.

Je remercie Monsieur le professeur **Fernando TADEO**, Professeur à l'Institut des Procédés Durables et l'École d'Ingénierie Industrielle, Université de Valladolid, Espagne pour sa générosité intellectuelle, ses conseils avisés, sa rigueur et son intégrité scientifique. Merci également d'avoir toujours été disponible pour des explications constructives.

Je remercie le **Centre National pour la Recherche Scientifique et Technique (CNRST)** qui a financé cette thèse à travers une bourse d'excellence : **9USMBA2017**.

Enfin, mes remerciements les plus chaleureux vont à ma mère et ma sœur pour leur soutien moral et leurs encouragements.

Table des matières

Introduction générale	12
1 Notions introductives	16
1.1 Introduction	16
1.2 Modèles 2-D	16
1.2.1 Modèles 2-D discrets	16
1.2.1.1 Modèle de Roesser discret	16
1.2.1.2 Modèles de Fornasini-Marchesini discrets	17
1.2.1.3 Passage entre les modèles	17
1.2.2 Modèles 2-D continus	18
1.2.2.1 Modèle de Roesser continu	18
1.2.2.2 Modèles de Fornasini-Marchesini continus	19
1.3 Exemples pratiques des systèmes 2-D	19
1.3.1 Échangeur de chaleur	19
1.3.2 Processus de laminage des métaux	20
1.4 Extensions possibles des modèles 2-D	21
1.4.1 Systèmes 2-D à retards	21
1.4.2 Systèmes 2-D incertains	22
1.4.2.1 Incertitudes polytopiques	22
1.4.2.2 Incertitudes bornées en normes	23
1.4.3 Systèmes 2-D commutés	23
1.4.4 Systèmes 2-D non linéaires flous de type Takagi-Sugeno	24
1.5 A propos de la stabilité	25
1.5.1 Cas discret	25
1.5.2 Cas continu	26
1.6 Outils mathématiques	26
1.6.1 Inégalité matricielle linéaire	26
1.6.2 Lemmes utiles	27
1.7 Conclusion	30
2 Stabilité des systèmes 2-D à retards	31
2.1 Introduction	31
2.2 Stabilité des systèmes 2-D discrets à retards	32
2.2.1 Formulation du problème	32
2.2.2 Résultat principal	33
2.2.3 Exemples numériques	39
2.3 Analyse de la stabilité exponentielle des systèmes 2-D discrets commutés à retards	41
2.3.1 Formulation du problème	41
2.3.2 Résultats principaux	43
2.3.3 Exemples numériques	51

2.4	Stabilité et analyse de la performance H_∞ des systèmes 2-D continus à retards . . .	54
2.4.1	Formulation du problème	54
2.4.2	Résultats principaux	55
2.4.2.1	Analyse de la stabilité	55
2.4.2.2	Analyse de la performance H_∞	62
2.4.3	Exemples numériques	63
2.5	Conclusion	66
3	Commande H_∞ des systèmes 2-D à retards	67
3.1	Introduction	67
3.2	Commande fiable H_∞ des systèmes 2-D discrets commutés avec des retards d'état et des défaillances de l'actionneur	68
3.2.1	Formulation du problème	68
3.2.2	Résultats principaux	71
3.2.2.1	Analyse de la stabilité	71
3.2.2.2	Analyse de la performance H_∞	76
3.2.2.3	Synthèse de la loi de commande fiable H_∞	78
3.2.3	Exemples numériques	81
3.3	Commande robuste H_∞ des systèmes 2-D continus incertains à retards variables .	85
3.3.1	Formulation du problème	85
3.3.2	Résultats principaux	87
3.3.2.1	Analyse de la stabilité	87
3.3.2.2	Analyse de la performance H_∞	96
3.3.2.3	Synthèse de la loi de commande robuste H_∞	98
3.3.3	Exemples numériques	101
3.4	Conclusion	105
4	Filtrage H_∞ des systèmes 2-D	106
4.1	Introduction	106
4.2	Filtrage H_∞ des systèmes 2-D incertains	107
4.2.1	Formulation du problème	107
4.2.2	Résultats principaux	110
4.2.2.1	Analyse de la performance H_∞ robuste	110
4.2.2.2	Synthèse du filtre H_∞ robuste	113
4.2.2.3	Synthèse du filtre H_∞ robuste dépendant du paramètre incertain .	116
4.2.3	Exemples numériques	119
4.3	Filtrage H_∞ des systèmes 2-D discrets commutés	123
4.3.1	Formulation du problème	123
4.3.2	Résultats principaux	125
4.3.2.1	Analyse de la stabilité et de la performance H_∞	125
4.3.2.2	Synthèse du filtre H_∞ commuté	128
4.3.3	Exemples numériques	131
4.4	Filtrage H_∞ des systèmes 2-D non linéaires flous de type Takagi-Sugeno	136
4.4.1	Formulation du problème	136
4.4.2	Résultats principaux	139
4.4.2.1	Analyse de la performance H_∞	139
4.4.2.2	Synthèse du filtre H_∞ flou	141
4.4.3	Exemple numérique	145
4.5	Conclusion	147
	Conclusion générale et perspectives	149

Liste des figures

1.1	Echangeur de chaleur.	20
1.2	Laminage des métaux.	21
1.3	Ensemble polytopique.	23
2.1	Trajectoire d'état $x_1(i, j)$ du système avec $d_2 = 17$	40
2.2	Trajectoire d'état $x_2(i, j)$ du système avec $d_2 = 17$	40
2.3	Système commuté.	42
2.4	Résultats de simulation. (A) : Trajectoire d'état de $x_1^h(i, j)$; (B) : Trajectoire d'état de $x_2^h(i, j)$; (C) : Trajectoire d'état de $x^v(i, j)$; (D) : Signal de commutation $\sigma(i, j)$	52
2.5	Régions de faisabilité des conditions LMIs du corollaire 1 [Huang et al., 2013] (indiqué par ' \times ') et corollaire 2.1 avec $m_h = m_v = 1$ (indiqué par ' \circ ').	54
2.6	Domaine de faisabilité des LMIs.	63
2.7	Indices d'atténuation des perturbations γ_{min} au sens de la performance H_∞ pour différents valeurs de h	66
3.1	Schéma de commande des systèmes commutés.	70
3.2	Trajectoires d'état du système en boucle ouverte.	84
3.3	Trajectoires d'état du système en boucle fermée.	84
3.4	Signal de commutation.	85
3.5	Trajectoires des états du système en boucle ouverte.	103
3.6	Trajectoires des états du système en boucle fermée.	104
3.7	Sortie mesurée du système en boucle fermée.	104
4.1	Schéma de filtrage.	108
4.2	Réponse fréquentielle du système d'erreur de filtrage : 1 ^{er} sommet ($a_1 = 0.15$, $a_2 = 0.35$).	120
4.3	Réponse fréquentielle du système d'erreur de filtrage : 2 ^{ème} sommet ($a_1 = 0.15$, $a_2 = 0.85$).	120
4.4	Réponse fréquentielle du système d'erreur de filtrage : 3 ^{ème} sommet ($a_1 = 0.45$, $a_2 = 0.35$).	121
4.5	(Réponse fréquentielle du système d'erreur de filtrage : 4 ^{ème} sommet ($a_1 = 0.45$, $a_2 = 0.85$).	121
4.6	Indices d'atténuation des perturbations γ_{min} au sens de la performance H_∞ pour différents valeurs de b	122
4.7	Schéma de filtrage des systèmes commutés.	124
4.8	Signal de commutation.	132
4.9	Etat $\hat{x}_1(i, j)$ du filtre H_∞ conçu.	133
4.10	Etat $\hat{x}_2(i, j)$ du filtre H_∞ conçu.	133
4.11	Erreur d'estimation $e(i, j)$	134
4.12	Trajectoires d'état du filtre H_∞	147

4.13 Erreur de filtrage $e(i, j)$ avec le filtre H_∞ proposé. 147

Liste des tableaux

2.1	Maximum de d_2 pour d_1 donné.	41
2.2	Résultats de comparaison pour l'exemple 2.3	53
2.3	Résultats de comparaison pour l'exemple 2.4. (Retards variables)	53
2.4	Résultats de comparaison pour l'exemple 2.4. (Retards constants).	54
2.5	Comparaisons des valeurs maximales de h_2 pour différents valeurs de h_1	64
2.6	Comparaisons des valeurs maximales de h_2	64
2.7	Comparaisons des valeurs maximales de retard.	65
2.8	Comparaison des valeurs de γ_{min} pour différents h	65
3.1	Résultats de comparaison.	82
3.2	Comparaison des valeurs de γ_{min} pour différents d_2 , (Exemple 3.1).	82
3.3	Valeurs de γ_{min} pour différents d , (Exemple 3.2).	83
3.4	Limite supérieure de retard d_2 pour différents d_1 et $\mu_2 = 0.3$	101
3.5	Valeurs de γ_{min} pour des retards donnés d_2 et h_2 avec $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$	102
3.6	Comparaison de γ_{min} pour $\mu_1 = \mu_2 = 0.6$	102
4.1	Comparaison des valeurs de γ_{min} (Exemple 4.1).	120
4.2	Comparaison des valeurs de γ_{min} (Exemple 4.2).	122
4.3	Comparaison des valeurs de γ_{min} (Exemple 4.3).	132
4.4	Comparaison des valeurs de γ_{min} (Exemple 4.4).	136

Abréviations et notations

Abréviations :

1-D	Monodimensionnel,
2-D	Bidimensionnel,
F-M	Fornasini-Marchesini,
T-S	Takagi-Sugeno,
LMI	Inégalité matricielle linéaire,
Nvd	Nombre de variables de décision,
Nlmi	Nombre des LMIs.

Notations :

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels,
\mathbb{Z}	Ensemble des entiers relatifs,
\mathbb{Z}_+	Ensemble des entiers relatifs positifs,
\mathbb{R}^n	Espace réel Euclidien de dimension n ,
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels,
$X > 0$ (resp. < 0)	Matrice X symétrique définie positive (resp. négative),
$X \geq 0$ (resp. < 0)	Matrice X symétrique semi-définie positive (resp. négative),
X^T	Transposée de la matrice X ,
X^{-1}	Inverse de la matrice carrée non-singulière X ,
$sym(X)$	Pour chaque matrice carrée $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $sym(X) = X + X^T$,
$I, 0$	Matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée,
$I_n, 0_{n \times m}$	Matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times n$ (resp. $n \times m$),
$diag\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$	Matrice bloc-diagonale ayant a_1, a_2, \dots, a_n sur sa diagonale,
$col\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	Vecteur colonne : $col\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T]^T$,
*	Quantité transposée dans une matrice symétrique,
$\mathcal{L}_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$	Ensemble de fonctions de carré intégrable sur $\{[0, \infty), [0, \infty)\}$,
$l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$	Ensemble de fonctions des carré sommable sur $\{[0, \infty), [0, \infty)\}$,
$\ x\ $	Norme euclidienne du vecteur x ,
$\ x\ _2$	Norme L_2 du signal $x \in \mathcal{L}_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$ ou $x \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$,
$\ G\ _\infty$	Norme H_∞ d'un 2-D discret $G(z_1, z_2)$,
□	Fin d'une preuve.

Liste des publications

Revue internationale :

- **Badie, K.**, Alfidi, M., Tadeo, F., & Chalh, Z. (2018). Delay-Dependent Stability and H_∞ Performance of 2-D Continuous Systems with Delays. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 37(12), 5333-5350.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2018). New relaxed stability conditions for uncertain two-dimensional discrete systems. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 29(6), 661-669.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019). Robust H_∞ control for 2-D discrete state delayed systems with polytopic uncertainties. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 30(3), 1327-1343.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019). An LMI approach to design robust H_∞ controller for 2-D systems with delays. *International Journal of System of Systems Engineering*, 9(2), 99-116.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019). Robust H_∞ control for uncertain 2D state-delayed systems in the second FM model. *International Journal of Systems, Control and Communications*, 10(3), 218-234.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019). Exponential stability analysis for 2D discrete switched systems with state delays. *Optimal Control Applications and Methods*, 40(6), 1088-1103.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019). Fuzzy H_∞ filtering for nonlinear 2D systems in the Roesser model. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 33(2), 169-178.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2020). H_∞ Filtering for two-dimensional discrete switched systems in the second Fornasini and Marchesini model. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 42(8), 1559-1568.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., Tadeo, F., & Chalh, Z. (2020). Robust H_∞ controller design for uncertain 2D continuous systems with interval time-varying delays. *International Journal of Systems Science*, 51(3), 440-460.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., Oubaidi, M., & Chalh, Z. (2020). Parameter-dependent robust H_∞ filtering for uncertain two-dimensional discrete systems in the FM second model. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, dnz039, <https://doi.org/10.1093/imamci/dnz039>.
- **Badie, K.**, Alfidi, M. & Chalh, Z. Further results on H_∞ filtering for uncertain 2-D discrete systems. *Multidim Syst Sign Process* (2020). <https://doi.org/10.1007/s11045-020-00715-2>.
- **Badie, K.**, Alfidi, M. & Chalh, Z. Reliable H_∞ control for 2-D discrete switched systems with state delays and actuator failures. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2020 ; 1-22. <https://doi.org/10.1002/acs.3156>.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., Tadeo, F., & Chalh, Z. (2020). Robust state feedback for uncertain 2-D discrete switched systems in the Roesser model. *Journal of Control and Decision*, 1-19. <https://doi.org/10.1080/23307706.2020.1803774>.

Conférences internationales :

- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2018, April). Improved delay-dependent stability criteria for 2-D discrete state delayed systems. In 2018 International Conference on Intelligent Systems and Computer Vision (ISCV) (pp. 1-6). IEEE.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., Tadeo, F., & Chalh, Z. (2018, October). Static Output Feedback Control with H_∞ performance for 2-D Discrete Systems in Roesser Model. In 2018 7th International Conference on Systems and Control (ICSC) (pp. 28-33). IEEE.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019, October). Delay-Dependent Exponential Stability of Discrete 2-D Switched Systems with Delays. In 2019 8th International Conference on Systems and Control (ICSC) (pp. 513-518). IEEE.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019, October). H_∞ model reduction for discrete 2-D switched systems in the Roesser model. In 2019 11th International Conference on Integrated Design and Production (CPI).

Conférences nationales :

- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2017, May). Robust stability of uncertain two-dimensional discrete systems in the Roesser model. In Journée de recherche inter-laboratoires : ENSA, Fès, Maroc.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2017, December). H_∞ Filtering design for 2-D discrete systems in Roesser model. In Journée de recherche inter-laboratoires : ENSA, Fès, Maroc.
- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. (2018, June). H_∞ Static Output Feedback Control for 2-D Discrete Systems. Workshop on complex systems Engineering : ENSA, Fès, Maroc.

Travaux soumis

- **Badie, K.**, Alfidi, M., & Chalh, Z. H_∞ model reduction for 2-D discrete Markovian jump systems, Journal of Control, Automation and Electrical Systems. (**Accepté**)
- **Badie, K.**, Alfidi, M., Tadeo, F., & Chalh, Z. Delay-dependent H_∞ Filtering for 2-D continuous state-delayed systems. International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations.

Introduction générale

De manière générale, l'automatique est une discipline scientifique permettant l'étude des problèmes de modélisation, d'analyse et de synthèse des systèmes. Les domaines d'application de cette discipline sont très vastes et variés, tels que l'électricité, la mécanique, l'aérospatial, l'industrie automobile, la robotique, la chimie, etc. Comme l'indique le titre de cette thèse, nous nous intéresserons dans la suite à des problèmes de la stabilité et de la synthèse qui occupent une place fondamentale dans ce domaine. Cette thèse entre dans le cadre de l'étude des systèmes bidimensionnels (2-D) qui représentent une classe importante des systèmes dynamiques. En outre, les systèmes 2-D ont attiré une attention considérable en raison de leur importance théorique et pratique au cours de ces dernières décennies. La caractéristique clé d'un système 2-D est que la propagation de l'information se produit dans deux directions indépendantes. Les modèles d'espace d'état les plus utilisés pour décrire la dynamique des systèmes 2-D sont : Le modèle de Roesser, le modèle de Fornasini-Marchesini (F-M) et le modèle d'Attasi. De nombreux processus physiques, tels que le traitement d'images [Givone et al., 1972, Roesser, 1975], le filtrage des signaux [Lu et al., 1992] et les processus thermiques dans les réacteurs chimiques, les échangeurs de chaleur et les fours à tubes [Kaczorek, 1985], ont des structures bidimensionnelles. Ainsi que la théorie des systèmes 2-D est fréquemment utilisée comme outil d'analyse pour résoudre certains problèmes, par exemple, la commande d'apprentissage itératif [Li et al., 2005] et la commande de processus répétitif [Dymkov et al., 2002, Galkowski et al., 2003]. En effet, l'étude des systèmes 2-D est un sujet intéressant qui a reçu une attention considérable au cours des dernières décennies et de nombreux résultats ont été publiés dans la littérature [Benzaouia et al., 2016, David, 2018, Galkowski et al., 2018, Kaczorek, 2012].

De point de vue pratique, notamment en science de l'ingénieur, les phénomènes de retard apparaissent naturellement dans les processus physiques. Et même si un parmi eux ne contient pas des retards intrinsèques, bien souvent ils apparaissent dans la boucle de commande. Parmi les sources primordiales d'apparition des retards, il faut absolument citer les temps de réactions des capteurs ou des actionneurs, les temps de transmissions des informations entre les différentes composantes des systèmes, ou encore les temps de mesures [Ellouze, 2010]. Alors, dans le but de se rapprocher du processus réel, une meilleure modélisation consiste à prendre en considération les phénomènes de retard. Contrairement aux systèmes ordinaires (systèmes sans retards), l'évolution des systèmes à retards dépend non seulement de la valeur de leurs variables à l'instant présent mais aussi d'une partie de leurs valeurs passées. Dans ce cas, il est nécessaire de mémoriser une partie de "l'histoire" du système pour connaître son évolution. Vu que le retard est très souvent à l'origine des dégradations des performances du système ainsi que de son instabilité, les problèmes d'analyse et de commande ont été bien étudiés et développés pour les systèmes monodimensionnels (1-D) [Di Loreto et al., 2006, Hmamed, 1986, Meng et al., 2010, Tissir et al., 1994, Tissir, 2007, Wu et al., 2010, Zhao et al., 2012], alors que ce problème pour les systèmes 2-D vient de gagner une attention croissante récemment [Xu et al., 2009, Xu et al., 2013, Yao et al., 2013].

La notion des systèmes commutés est bien connue en automatique. Généralement, la classe des systèmes commutés présente une catégorie très importante des systèmes dynamiques hybrides. Un système commuté est composé de plusieurs sous-systèmes dynamiques, qui sont appelés souvent

modes, et un signal de commutation qui spécifie le sous-système actif à chaque instant. En vue de mieux illustrer la notion des systèmes commutés, si on s'intéresse au déplacement d'une voiture dont on souhaite connaître la position et la vitesse à chaque instant [El Hachemi, 2012]. Pour cela, on cherche à spécifier un modèle mathématique au déplacement de la voiture. Or, on sait que la vitesse varie selon le rapport de vitesse enclenché. C'est pour cette raison, nous accordons une équation mathématique à chaque rapport de vitesse pour décrire le déplacement de la voiture, et chaque équation mathématique représente un sous-système (mode). Donc, si la voiture possède 5 rapports de vitesse pour aller en avant, un rapport pour la marche-arrière et un rapport pour la roue-libre. On a alors sept équations pour décrire le mouvement de la voiture. Clairement, un seul rapport de vitesse est activé à chaque instant et donc une seule équation décrira le mouvement à chaque instant. Dans cet exemple, une commutation représente un changement de vitesse et la boîte à vitesses joue le rôle de signal de commutation. De plus, les systèmes commutés surviennent dans de nombreuses applications d'ingénierie, par exemple dans la commande des moteurs électriques [Balluchi et al., 1997], la robotique [Bishop et al., 1998], les systèmes de commande en réseau [Zhang et al., 2001], etc.

L'analyse de la stabilité est un concept fondamental et central des systèmes dynamiques ce qui est à la fois une importance théorique et pratique. Il indique le comportement qualitatif d'un système et joue un rôle capital dans la théorie du contrôle, puisque de nombreuses tâches de conception peuvent être transformées en problème de stabilité [Jin, 2017]. En général, les résultats concernant la stabilité des systèmes à retards sont divisés en deux catégories, à savoir les conditions dépendantes du retard et les conditions indépendantes du retard. Étant donné que la stabilité des systèmes dépend explicitement du retard, les conditions indépendantes du retard est plus conservatives que les conditions dépendantes du retard, et en particulier pour les petits retards. La méthode des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii est la méthode la plus couramment utilisée pour étudier la stabilité des systèmes à retards. Le conservatisme de cette approche provient principalement de la construction de la fonction de Lyapunov-Krasovskii et de l'estimation des termes intégrales (ou sommations) apparaissant dans la dérivée temporelle (ou la différence dans le cas discrète) des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. Très récemment, une grande attention a été accordée à l'étude de la stabilité des systèmes 2-D à retards. De nombreux résultats importants sur de tels systèmes ont été rapportés dans la littérature, (voir [Benhayoun et al., 2013, Benzaouia et al., 2011, Feng et al., 2010, Huang et al., 2013, Hmamed et al., 2016]).

De plus, la commande H_∞ est l'une des approches de commande robuste les plus puissantes lorsque le système est soumis à l'influence des perturbations externes, qui s'est avérée efficace pour atténuer les perturbations exogènes. Afin de réduire les effets des bruits ou des perturbations dans les systèmes 2-D, le problème de commande H_∞ a suscité un intérêt de recherche croissant, à titre d'exemple, le problème de la commande H_∞ dépendante du retard pour les systèmes 2-D discrets commutés, décrit par le second modèle d'espace d'état de F-M à retards a été étudié dans [Duan et al., 2013]. Dans [Ghous et al., 2016b], une solution au problème de commande H_∞ des systèmes 2-D continus commutés à retards variables a été proposé. Le problème de la commande H_∞ des systèmes 2-D continus avec des retards variables et des incertitudes bornées en norme a été traité dans [Ghous et al., 2016a].

Pareil au problème de commande, le problème de filtrage a été largement étudié au cours des dernières décennies. Le filtrage étant l'une des approches les plus fondamentales et les plus populaires pour traiter le bruit externe dans les systèmes. Des efforts de recherche importants ont été consacrés au développement et à la synthèse des filtres [Barbosa et al., 2005, Elsayed et al., 1989, Petersen et al., 1987, Wu et al., 2014]. De façon générale, le problème de filtrage se résume dans l'estimation des états ou d'une combinaison linéaire des états d'un système donné en utilisant les sorties mesurées, tout en minimisant l'influence des perturbations extérieures sur l'erreur d'estimation. Parmi divers schémas d'estimateur d'état, le filtre de Kalman et le filtre H_∞ sont deux outils de filtrage efficaces. Mais dans le cas où les informations statistiques sur le bruit extérieur ne sont pas connues avec précision, le célèbre schéma de filtrage de Kalman n'est plus

applicable. Différente du filtrage traditionnel de Kalman, l'approche du filtrage H_∞ ne nécessite pas de connaître les propriétés statistiques des bruits extérieurs. Ainsi, récemment, une grande attention a été accordée au problème du filtrage H_∞ pour toutes sortes de systèmes dynamiques [El Hellani, 2018, He et al., 2009, Luan et al., 2010, Mahmoud et al., 2012, Shen et al., 2011, Zhang et al., 2006, Zoulagh et al., 2017]. Pour les systèmes 2-D, dans [Gao et al., 2008], le problème de filtrage H_∞ robuste pour les systèmes 2-D incertains décrits par le modèle Roesser avec des incertitudes de type polytopique a été étudié. Dans [Li et al., 2012], le problème de synthèse des filtres H_∞ pour les systèmes 2-D flous de type Takagi-Sugeno (T-S) décrits par le second modèle de F-M a été résolu. Dernièrement, le problème de filtrage H_∞ pour les systèmes 2-D commutés discrets décrits par le second modèle de F-M a été étudié dans [Yang et al., 2018].

Les contributions de cette thèse portent sur le développement de nouvelles méthodes d'analyse de la stabilité et la synthèse des lois de commande H_∞ et des filtres H_∞ pour différentes classes des systèmes 2-D. Les critères présentés ayant pour but la réduction du conservatisme des approches existantes dans la littérature tout en garantissant que les méthodes proposées soient numériquement efficaces. Tous les résultats présentés dans cette thèse sont formulés en termes des contraintes sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). Des exemples numériques et des comparaisons avec des résultats récents de la littérature sont également présentés afin de montrer l'avantage et l'intérêt des approches proposées.

Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est organisé en quatre chapitres de la manière suivante :

Chapitre 1 : Notions introductives. Ce chapitre présente une introduction au systèmes 2-D. Nous commencerons par présenter en détail les principaux modèles discrets et continus exploités dans l'étude des systèmes 2-D, pour mettre en place les fondements nécessaires à la compréhension de nos travaux. Ensuite, nous rappellerons quelques notions de base sur la stabilité de tel systèmes. Et nous terminerons ce premier chapitre par une présentation des outils LMIs et les différentes propriétés matricielles utiles dans la suite du manuscrit.

Chapitre 2 : Stabilité des systèmes 2-D à retards. Dans ce chapitre, le problème de la stabilité des systèmes 2-D à retards sera abordé. Le chapitre est organisé en trois sections. Dans la première section, une nouvelle condition d'analyse de la stabilité asymptotique des systèmes 2-D discrets décrits par le second modèle de F-M sera proposée. Puis, dans la deuxième section, l'analyse de la stabilité exponentielle des systèmes 2-D discrets commutés décrits par le modèle de Roesser à retards variables sera discutée. Et à la fin de ce chapitre, le problème d'analyse de la stabilité avec la performance H_∞ pour des systèmes 2-D continus à retards sera traité dans la troisième section.

Chapitre 3 : Commande H_∞ des systèmes 2-D à retards. Ce chapitre présente des résultats portant sur la commande H_∞ des systèmes 2-D à retards. Le chapitre est organisé en deux sections qui traitent d'une part le problème de la commande fiable H_∞ pour des systèmes 2-D commutés discrets décrits par le second modèle de F-M avec des retards d'état et des défauts d'actionneur, et d'autre part, le problème de la commande robuste H_∞ pour des systèmes 2-D continus incertains avec des retards variables et des incertitudes bornées en normes.

Chapitre 4 : Filtrage H_∞ des systèmes 2-D. Les travaux de ce chapitre concernent la synthèse des filtres H_∞ pour des classes de systèmes 2-D. Ce chapitre est organisé en trois sections dont nous proposerons des solutions aux problèmes de filtrage robuste H_∞ pour des systèmes 2-D discrets incertains, filtrage H_∞ pour les systèmes 2-D commutés discrets et filtrage H_∞ pour les

systèmes 2-D discrets flous de type T-S. L'objectif principale de ce chapitre est de développer des outils de filtrage H_∞ moins conservatifs en utilisant des nouvelles structures de la fonction de Lyapunov.

Chapitre 1

Notions introductives

1.1 Introduction

Lors de l'étude d'un système, la phase de modélisation est indispensable car elle conditionne les méthodes qui seront ensuite utilisées pour analyser ses propriétés. La classe des systèmes étudiée dans cette thèse présente la particularité de posséder la caractéristique bidimensionnelle dans leur dynamique (systèmes 2-D). Au cours des dernières décennies, les systèmes 2-D ont attiré une attention considérable dans la théorie et la pratique, en raison de leurs applications potentielles dans de nombreux domaines, tels que le filtrage des données numériques, le traitement d'images, l'ingénierie de l'énergie thermique, etc. [Du et al., 2002, Lu et al., 1992, Roesser, 1975]. Par rapport aux systèmes monodimensionnels (1-D), la dynamique des systèmes 2-D dépend de deux variables indépendantes, et ces variables indépendantes peuvent toutes les deux être discrètes, continues ou mixtes [Boudellioua et al., 2019]. Les systèmes 2-D peuvent être décrits par divers modèles d'espace d'état tels que le modèle de Roesser [Roesser, 1975], le modèle de Fornasini-Marchesini (F-M) [Fornasini et al., 1989] ou le modèle d'Attasi [Attasi, 1973].

Ce premier chapitre est consacré à une présentation générale des systèmes 2-D. L'importance se portera fondamentalement sur les différents modèles 2-D et quelques extensions possibles vers des modèles 2-D complexes. D'autre part, nous proposons un aperçu sur quelques outils d'analyse de la stabilité des systèmes 2-D et aussi quelques outils mathématiques nécessaires à l'étude des systèmes 2-D.

1.2 Modèles 2-D

Dans cette section, nous allons discuter les principaux modèles discrets et continus exploités dans l'étude des systèmes 2-D, à savoir celui de Roesser et ceux de F-M, premier et second modèles. Nous verrons ensuite quelques passages possibles entre les différents modèles de ces systèmes.

1.2.1 Modèles 2-D discrets

1.2.1.1 Modèle de Roesser discret

Le modèle de Roesser discret a été proposé pour la première fois dans le travail pionnier [Roesser, 1975] par R. P. Roesser pour le traitement d'images, puis ses diverses propriétés ont été largement utilisés pour représenter des systèmes 2-D discrets [Du et al., 2002]. La caractéristique fondamentale de ce modèle est que le vecteur d'état est composé de deux sous-vecteurs indiquant l'état horizontal

et l'état vertical. Ce modèle est alors donné par :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Bu(i, j), \\ y(i, j) = C \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j), \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$ et $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ représentent les vecteurs d'état horizontal et vertical, respectivement. $u(i, j) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée et $y(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie du système. Les matrices A , B et C peuvent être écrites sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \ C_2].$$

Les conditions initiales sont données comme suit :

$$\begin{cases} x^h(0, i) = f^h(i), \\ x^v(i, 0) = f^v(i), \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

avec $f^h(i)$ et $f^v(i)$ sont des vecteurs qui contiennent les valeurs des conditions initiales.

1.2.1.2 Modèles de Fornasini-Marchesini discrets

Fornasini et Marchesini en (1976, 1977, et 1978) ont proposé des représentations d'état pour des fonctions de transfert 2-D dédiées aux filtres numériques 2-D. Différemment au modèle de Roesser, les modèles de Fornasini-Marchesini (F-M) utilisent un seul vecteur pour représenter une fonction de deux variables indépendantes. Le premier et second modèle de F-M sont données par :

- **Premier modèle de Fornasini-Marchesini**

$$\begin{cases} x(i+1, j+1) = A_0x(i, j) + A_1x(i, j+1) + A_2x(i+1, j) + Bu(i, j), \\ y(i, j) = Cx(i, j), \end{cases} \quad (1.2)$$

avec $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état bidimensionnel. $u(i, j) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée et $y(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie du système.

Les conditions initiales sont données comme suit :

$$\begin{cases} x(0, i) = f(i), \\ x(i, 0) = g(i), \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

avec $f(i)$ et $g(i)$ sont des vecteurs qui contiennent les valeurs des conditions initiales.

- **Second modèle de Fornasini-Marchesini**

$$\begin{cases} x(i+1, j+1) = A_1x(i, j+1) + A_2x(i+1, j) + B_1u(i, j+1) + B_2u(i+1, j), \\ y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j), \end{cases} \quad (1.4)$$

avec $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état bidimensionnel. $u(i, j) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée et $y(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie du système. Les conditions initiales sont données par (1.3).

1.2.1.3 Passage entre les modèles

- **De modèle de Roesser au second modèle Fornasini-Marchesini**

Le modèle de Roesser présenté dans (1.1) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x^h(i+1, j) = A_{11}x^h(i, j) + A_{12}x^v(i, j) + B_1u(i, j), \\ x^v(i, j+1) = A_{21}x^h(i, j) + A_{22}x^v(i, j) + B_2u(i, j), \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x^h(i+1, j+1) = A_{11}x^h(i, j+1) + A_{12}x^v(i, j+1) + B_1u(i, j+1), \\ x^v(i+1, j+1) = A_{21}x^h(i+1, j) + A_{22}x^v(i+1, j) + B_2u(i+1, j). \end{cases}$$

Posons : $x(i, j) = [x^{hT}(i, j) \ x^{vT}(i, j)]^T$ avec $n = n_h + n_v$. Alors, le second modèle de F-M est obtenu comme suit :

$$\begin{aligned} x(i+1, j+1) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i, j+1) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(i+1, j) \\ &\quad + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j+1) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i+1, j) \\ y(i, j) &= Cx(i, j) + Du(i, j). \end{aligned}$$

• **De second modèle de Fornasini-Marchesini au modèle de Roesser**

Le modèle de F-M présenté dans (1.4) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} u(i, j), \\ y(i, j) &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} u(i, j), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} x^h(i, j) &= x(i, j+1), & x^v(i, j) &= x(i+1, j), \\ u(i, j) &= \text{diag}\{u(i, j+1), u(i+1, j)\}, \\ y(i, j) &= \text{diag}\{y(i, j+1), y(i+1, j)\}. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent au modèle de Roesser (1.1).

1.2.2 Modèles 2-D continus

1.2.2.1 Modèle de Roesser continu

Semblable au cas discret, le modèle de Roesser continu est largement utilisé pour représenter des systèmes 2-D pratiques. Le vecteur d'état est à nouveau décomposé de deux sous-vecteurs indiquant l'état horizontal et l'état vertical. Le modèle de Roesser continu est alors donné par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Bu(t_1, t_2), \\ y(t_1, t_2) &= C \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Du(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (1.5)$$

avec $x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_h}$ et $x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_v}$ représentent les vecteurs d'état horizontal et vertical, respectivement. $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée, $y(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie du système. Les matrices A , B et C peuvent être écrites sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \ C_2].$$

Les conditions initiales sont données comme suit :

$$\begin{cases} x^h(0, t_2) = f^h(t_2), \\ x^v(t_1, 0) = f^v(t_1), \end{cases}$$

avec $f^h(t_2)$ et $f^v(t_1)$ sont des vecteurs qui contiennent les valeurs des conditions initiales.

1.2.2.2 Modèles de Fornasini-Marchesini continus

Parallèlement au cas discret, les modèles de F-M continus sont définis comme suit :

• **Premier modèle de Fornasini-Marchesini**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &= A_0 x(t_1, t_2) + A_1 \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_1} + A_2 \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_2} + Bu(t_1, t_2), \\ y(t_1, t_2) &= Cx(t_1, t_2) + Dx(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (1.6)$$

avec $x(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état bidimensionnel, $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée et $y(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie du système. Les conditions initiales sont données par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x(0, t_2) = f(t_2), \\ x(t_1, 0) = g(t_1), \end{cases} \quad (1.7)$$

avec $f(t_2)$ et $g(t_1)$ sont des vecteurs qui contiennent les valeurs des conditions initiales.

• **Second modèle de Fornasini-Marchesini**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &= +A_1 \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_1} + A_2 \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_2} + B_1 \frac{\partial u(t_1, t_2)}{\partial t_1} + B_2 \frac{\partial u(t_1, t_2)}{\partial t_2}, \\ y(t_1, t_2) &= Cx(t_1, t_2) + Dx(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (1.8)$$

avec $x(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état bidimensionnel, $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée et $y(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie du système. Les conditions initiales sont données par (1.7).

1.3 Exemples pratiques des systèmes 2-D

1.3.1 Échangeur de chaleur

Un échangeur de chaleur (voir Figures 1.1a et 1.1b) est un système permettant de transférer de l'énergie thermique d'un fluide vers un autre sans les mélanger. Le flux thermique traverse la surface d'échange qui sépare les fluides. Les échangeurs de chaleur sont plus utilisés dans diverses applications, par exemple le radiateur d'une automobile, un condenseur, un évaporateur, etc. Après quelques simplifications l'échangeur de chaleur peut être exprimé par l'équation différentielle suivante [Bu et al., 2017, Kaczorek, 1985, Tandon et al., 2014] :

$$\frac{\partial T(s, t)}{\partial x} = -\frac{\partial T(s, t)}{\partial t} - a_0 T(s, t) + bu(s, t), \quad (1.9)$$

où $T(s, t)$ est la température à s (direction) $\in [0, x_f]$ et t (temps) $\in [0, \infty)$. $u(s, t)$ est la fonction d'entrée, a_0, b sont des coefficients réels. En prenant :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \approx \frac{T(i, j) - T(i-1, j)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \approx \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta t},$$

où $T(x, t) = T(i\Delta x, j\Delta t)$, $u(x, t) = u(i\Delta x, j\Delta t)$. Δx et Δt sont les périodes de discrétisation spatiale et temporelle, respectivement.

En choisissant $x(i, j) = [T^T(i-1, j) \ T^T(i, j)]^T$, il est facile de vérifier que l'équation (1.9) peut être convertie en système 2-D discret décrit par le second modèle de F-M suivant :

$$\begin{aligned} x(i+1, j+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i, j+1) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} & 1 - a_0 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \end{bmatrix} x(i+1, j) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j+1) + \begin{bmatrix} 0 \\ b\Delta t \end{bmatrix} u(i+1, j). \end{aligned}$$

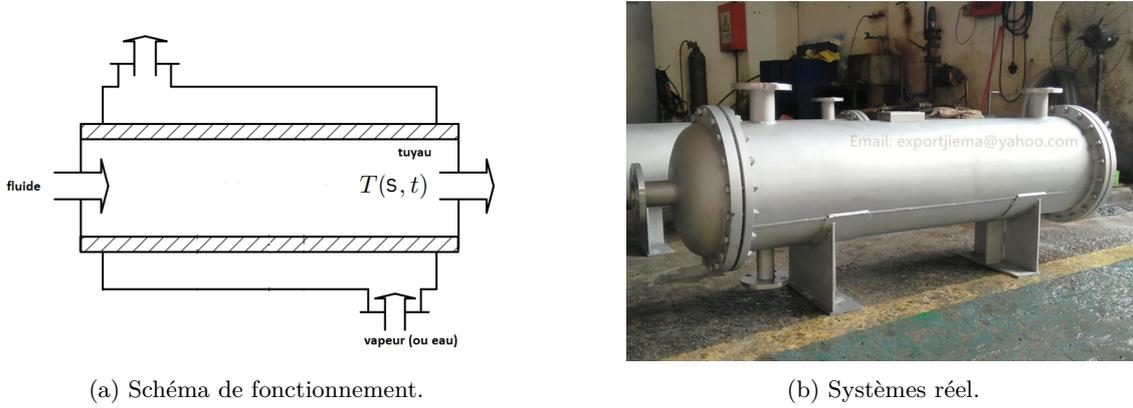


FIGURE 1.1 – Echangeur de chaleur.

1.3.2 Processus de laminage des métaux

Le laminage des métaux est un processus industriel où la déformation de la pièce a lieu entre deux rouleaux d'axes parallèles tournant dans des directions opposées. Figure 1.2a illustre un diagramme schématique du processus, l'approche consiste à faire passer le stock (c'est-à-dire le métal à rayer) à une épaisseur prédéfinie à travers une série de rouleaux pour des réductions successives. Figure 1.2b présente un exemple réel du système de laminage. Le modèle simplifié de ce procédé de laminage de métaux est décrit par l'équation différentielle suivante [Yamada et al., 1999] :

$$y_i(t) = \frac{\lambda}{\lambda + Mp^2} \left\{ \left(1 + \frac{Mp^2}{\lambda_1}\right) y_{i-1}(t) - \frac{1}{\lambda_2} F_m \right\}, \quad (1.10)$$

où p désigne l'opérateur de différenciation d/dt , $y_i(t)$ est la $i^{\text{ème}}$ épaisseur réelle du métal, F_m est la force développée par le moteur, M est la masse localisée du mécanisme de réglage, λ_1 est la rigidité du ressort du mécanisme de réglage, λ_2 est la dureté de la bande métallique et, $\lambda = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ est la rigidité composite de la bande métallique.

En échantillonnant le processus avec la période d'échantillonnage T , approximant la différenciation :

$$\frac{\partial^2 y_i(t)}{\partial t^2} \approx \frac{y_i(t+T) - 2y_i(t) + y_i(t-T)}{T^2},$$

et en définissant :

$$a_1 = \frac{2M - \lambda T^2}{M}, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad a_4 = \frac{\lambda T^2}{M} - \frac{2\lambda}{\lambda_1}, \quad a_5 = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad b = \frac{\lambda T^2}{\lambda_2 M}.$$

et

$$y(i, j) = y_i(jT), \quad u(i, j) = F_m, \quad x^h(i, j) = \begin{bmatrix} y_{i-1}((j+1)T) \\ y_{i-1}(jT) \end{bmatrix}, \quad x^v(i, j) = \begin{bmatrix} y_i(jT) \\ y_i((j-1)T) \\ y_{i-1}((j-1)T) \end{bmatrix}.$$

L'équation (1.10) peut être convertie en système 2-D discret décrit par le modèle de Roesser suivant :

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j).$$

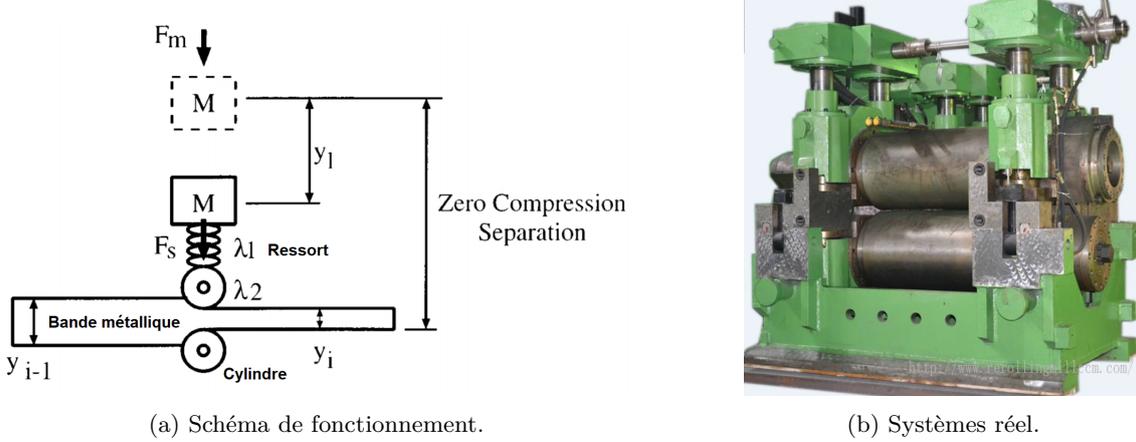


FIGURE 1.2 – Laminage des métaux.

1.4 Extensions possibles des modèles 2-D

La plupart des travaux de recherche effectués dans le domaine d'analyse des systèmes 2-D ont surtout porté sur les modèles linéaires que l'on a présenté dans la section précédente. Quelques chercheurs ont néanmoins généralisé ces modèles pour des systèmes de type complexe ou hybride (par exemple : les systèmes à retards, les systèmes incertains, les systèmes commutés et les systèmes flous), en raison de couvrir un champ d'application plus large. Cependant, il convient de noter que plus le modèle est complexe, plus il sera difficile de l'étudier.

1.4.1 Systèmes 2-D à retards

Les phénomènes de retard sont omniprésents dans une grande diversité des systèmes pratiques tels que les systèmes de communication, les systèmes de procédés chimiques et les systèmes de contrôle en réseau [Yin et al., 2016, Yin et al., 1989, Zhang et al., 2015]. Un système 2-D discret à retards d'état décrit par le modèle de Roesser peuvent être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{d11} & A_{d12} \\ A_{d21} & A_{d22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i-d_h, j) \\ x^v(i, j-d_v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j), \\ y(i, j) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{d1} & C_{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i-d_h, j) \\ x^v(i, j-d_v) \end{bmatrix} + Du(i, j), \end{aligned} \quad (1.11)$$

où $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$ et $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ représentent les vecteurs d'état horizontal et vertical, respectivement. $u(i, j) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée et $y(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie du système. d_h et d_v représentent les retards dans les directions horizontale et verticale, respectivement. Les matrices A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , A_{d11} , A_{d12} , A_{d21} , A_{d22} , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , C_{d1} , C_{d2} et D sont des matrices de dimensions appropriées.

Remarque 1.1. Le système 2-D de Roesser à retards présenté dans (1.11) se réduit à un système 2-D sans retards (1.1) lorsque $A_{d11} = 0$, $A_{d12} = 0$, $A_{d21} = 0$, $A_{d22} = 0$, $C_{d1} = 0$ et $C_{d2} = 0$.

Les autres modèles retardés similaires peuvent être développés pareillement à partir de leurs modèles de base.

1.4.2 Systèmes 2-D incertains

Le terme d'incertitude fait référence aux différences ou aux erreurs entre les modèles mathématiques et les systèmes réels. Donc, l'incertitude est une caractéristique importante à considérer lors de la modélisation de tout système pratique. Comme on le sait, presque tous les systèmes physiques et d'ingénierie existants comportent inévitablement des incertitudes en raison de l'existence de plusieurs sources comme les perturbations externes, les inexactitudes de modélisation ou le vieillissement des composants. Dans cette thèse, nous nous intéressons à deux types d'incertitudes : incertitudes polytopiques et incertitudes bornées en normes

Généralement, un système 2-D discret incertains décrit par le modèle de Roesser peuvent être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}(\alpha) & A_{12}(\alpha) \\ A_{21}(\alpha) & A_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ B_2(\alpha) \end{bmatrix} u(i, j), \\ y(i, j) &= [C_1(\alpha) \ C_2(\alpha)] \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + D(\alpha)u(i, j), \end{aligned} \quad (1.12)$$

où $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$ et $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ représentent les vecteurs d'état horizontal et vertical, respectivement. $u(i, j) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée et $y(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie du système. Les matrices $A_{11}(\alpha)$, $A_{12}(\alpha)$, $A_{21}(\alpha)$, $A_{22}(\alpha)$, $B_1(\alpha)$, $B_2(\alpha)$, $C_1(\alpha)$, $C_2(\alpha)$, et $D(\alpha)$ sont des matrices de dimension appropriée, avec α est le terme incertain. Selon la structure de l'incertitude, ces matrices s'écrivent sous une des formes données ci-après (polytopique ou bornées en normes).

1.4.2.1 Incertitudes polytopiques

Les incertitudes de type polytopiques sont des incertitudes paramétriques. Elles ont été introduites dans les années 80 [Bernussou et al., 1989]. Cette structure permet de décrire un système linéaire incertain par un modèle qui dépend linéairement de paramètres incertains et dont les matrices appartiennent à un domaine de type polytopique. Autrement dit, cette structure équivaut à une modélisation multi-modèle du système réel ou chaque modèle correspond a des conditions de fonctionnement données, ce qui permet de couvrir une vaste plage de fonctionnement du système à étudier. Dans ce cas, les matrices du modèle d'état forment une combinaison linéaire convexe et elle appartient au domaine de type polytopique suivant :

$$\Omega(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} A_{11}(\alpha) & A_{12}(\alpha) & B_1(\alpha) \\ A_{21}(\alpha) & A_{22}(\alpha) & B_2(\alpha) \\ \hline C_1(\alpha) & C_2(\alpha) & D(\alpha) \end{array} \right],$$

où

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{ \Omega(\alpha) \mid \Omega(\alpha) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \Omega_n; \sum_{n=1}^N \alpha_n = 1; \alpha_n \geq 0 \right\}; \quad (1.13)$$

et

$$\Omega_n \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} A_{11n} & A_{12n} & B_{1n} \\ A_{21n} & A_{22n} & B_{2n} \\ \hline C_{1n} & C_{2n} & D_n \end{array} \right]$$

dénote le $n^{\text{ème}}$ sommet du domaine polytopique. N représente le nombre de sommets du polyèdre \mathcal{D} .

Figure 1.3, présente un exemple d'un polyèdre \mathcal{D} . avec cinq sommets ($N = 5$) où Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , Ω_4 et Ω_5 sont les sommets du polyèdre, respectifs.

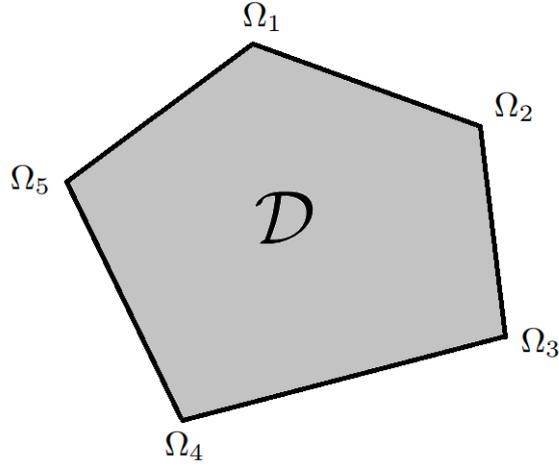


FIGURE 1.3 – Ensemble polytopique.

1.4.2.2 Incertitudes bornées en normes

Les incertitudes bornées en normes ont été traité par [Petersen et al., 1987, Zhou et al., 1988]. Ce type d'incertitudes est considéré moins structuré que les incertitudes polytopiques, et il est définie telle que les matrices du modèle d'état sont données par :

$$A(\alpha) = A + \Delta A, \quad B(\alpha) = B + \Delta B, \quad C(\alpha) = C + \Delta C, \quad D(\alpha) = D + \Delta D,$$

où

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \ C_2],$$

et

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \\ \Delta C & \Delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \mathcal{F}(i, j) [H_1 \ H_2],$$

avec G_1, G_2, H_1 et H_2 sont des matrices constantes connue définissant la structure de l'incertitude et la répartissant sur les éléments des matrices $A(\alpha), A(\alpha), A(\alpha)$ et $D(\alpha)$. En plus $\mathcal{F}(i, j)$ représente le paramètre incertain, et il vérifie la contrainte suivante :

$$\mathcal{F}^T(i, j)\mathcal{F}(i, j) \leq I.$$

Les autres modèles 2-D incertains peuvent être développés d'une manière similaire à partir de leurs modèles de base.

1.4.3 Systèmes 2-D commutés

Un système commuté est un type de système dynamique hybride qui se compose d'un nombre fini de sous-systèmes et d'un signal de commutation, qui affecte un sous-système spécifique activé dans un certain intervalle. De nombreux systèmes dynamiques peuvent être correctement modélisés comme des systèmes commutés tels que les systèmes de contrôle en réseau, le contrôle des avions et les systèmes d'alimentation [Donkers et al., 2011, Wang et al., 2015, Williams et al., 1991].

Généralement, un système 2-D discret commuté décrit par le modèle de Roesser peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}^{\sigma(i,j)} & A_{12}^{\sigma(i,j)} \\ A_{21}^{\sigma(i,j)} & A_{22}^{\sigma(i,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^{\sigma(i,j)} \\ B_2^{\sigma(i,j)} \end{bmatrix} u(i, j), \\ y(i, j) &= \begin{bmatrix} C_1^{\sigma(i,j)} & C_1^{\sigma(i,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + D^{\sigma(i,j)} u(i, j), \end{aligned} \quad (1.14)$$

où $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$ et $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ représentent les vecteurs d'état horizontal et vertical, respectivement. $u(i, j) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée et $y(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie du système. $\sigma(i, j)$ est le signal de commutation, qui prend ses valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\}$ avec $N \geq 1$ est le nombre de sous-systèmes. $\sigma(i, j) = k$, $(\sigma(i, j) = l)$, $k, l \in \mathcal{N}$ indique que le $k^{\text{ème}}$ ($l^{\text{ème}}$) sous-système est activé. Les matrices $A_{11}^k, A_{12}^k, A_{21}^k, A_{22}^k, B_1^k, B_2^k, C_1^k, C_2^k$, et D^k sont des matrices de dimension appropriée.

Remarque 1.2. *S'il n'y a qu'un seul sous-système dans le système (1.14) (c-à-dire $N = 1$), il dégénérera en système 2-D discret (1.1).*

Les autres modèles 2-D commutés similaires peuvent être développés d'une manière similaire à partir de leurs modèles de base.

1.4.4 Systèmes 2-D non linéaires flous de type Takagi-Sugeno

Depuis que le modèle flou Takagi-Sugeno (T-S) a été proposé dans [Takagi et al., 1985], il y a eu un intérêt croissant pour la recherche et l'étude des systèmes non linéaires flous de type T-S, car il fournit une manière flexible et puissante de représenter des systèmes non linéaires complexes. Généralement, l'avantage du modèle flou T-S est son approximation universelle des systèmes non linéaires par un mélange de certains modèles de système linéaire, ce qui rend les théories du système de contrôle linéaire utiles pour résoudre les problèmes non linéaires.

Un système 2-D discret flous de type T-S décrit par le modèle de Roesser peut être écrit sous la forme :

Règle k : **SI** $\theta_1(i, j)$ est $M_{k,1}$, et $\theta_2(i, j)$ est $M_{k,2}, \dots, \theta_s(i, j)$ est $M_{k,s}$ **ALORS :**

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_k^{11} & A_k^{12} \\ A_k^{21} & A_k^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_k^1 \\ B_k^2 \end{bmatrix} u(i, j), \\ y(i, j) &= \begin{bmatrix} C_k^1 & C_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + D_k u(i, j), \quad k = 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (1.15)$$

où $\theta(i, j) = [\theta_1(i, j) \ \theta_2(i, j) \ \dots \ \theta_s(i, j)]$ est appelé vecteur des prémisses; $M_{k,l}$ pour $l = 1, \dots, s$ est les ensembles flous. $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$ et $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ représentent les vecteurs d'état horizontal et vertical, respectivement. $u(i, j) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée et $y(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie du système. r est le nombre de règles floues. Les matrices : $A_k^{11}, A_k^{12}, A_k^{21}, A_k^{22}, B_k^1, B_k^2, C_k^1, C_k^2$, et D_k sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Chaque règle k est pondérée par un poids $\bar{\omega}_k(\theta_l(i, j))$ qui dépend des degrés d'appartenance des $\theta_l(i, j)$ aux $M_{k,l}$, notés $\mu_{k,l}(\theta_l(i, j))$. Le connecteur "et" reliant les prémisses est choisi comme produit conduisant à l'expression suivante :

$$\bar{\omega}_k(\theta_l(i, j)) = \prod_{l=1}^s \mu_{k,l}(\theta_l(i, j)).$$

Les fonctions d'appartenance normalisées sont définies comme suit :

$$h_k(\theta(i, j)) = \frac{\bar{\omega}_k(\theta_l(i, j))}{\sum_{k=1}^r \bar{\omega}_k(\theta_l(i, j))}.$$

Par définition, nous avons :

$$h_k(\theta(i, j)) \geq 0; \quad \sum_{k=1}^r h_k(\theta(i, j)) = 1.$$

Les sorties finales des modèles flous sont alors calculées comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{(i,j)}^{11} & A_{(i,j)}^{12} \\ A_{(i,j)}^{21} & A_{(i,j)}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{(i,j)}^1 \\ B_{(i,j)}^2 \end{bmatrix} u(i, j), \\ y(i, j) &= \begin{bmatrix} C_{(i,j)}^1 & C_{(i,j)}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + D_{(i,j)} u(i, j), \end{aligned} \quad (1.16)$$

où

$$\begin{bmatrix} A_{(i,j)}^{11} & A_{(i,j)}^{12} & B_{(i,j)}^1 \\ A_{(i,j)}^{21} & A_{(i,j)}^{22} & B_{(i,j)}^2 \\ C_{(i,j)}^1 & C_{(i,j)}^2 & D_{(i,j)} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^r h_k(i, j) \begin{bmatrix} A_k^{11} & A_k^{12} & B_k^1 \\ A_k^{21} & A_k^{22} & B_k^2 \\ C_k^1 & C_k^2 & D_k \end{bmatrix}.$$

Les autres modèles 2-D flous de type T-S peuvent être développés d'une manière similaire à partir de leurs modèles de base.

1.5 A propos de la stabilité

La notion de la stabilité des systèmes dynamiques constitue une problématique centrale en automatique, car l'analyse de la stabilité des systèmes est une étape nécessaire pour toute conception. Généralement, la stabilité possède un large éventail de définitions [Goldhirsch et al., 1978, Lu et al., 1994, Rogers et al., 1992]. Dans cette section, nous nous intéresserons à quelques notions particulières de la stabilité des systèmes 2-D, en particulier, on cite la stabilité au sens de Lyapunov. Les résultats que nous développerons aux Chapitres 2, 3 et 4 s'appuieront sur ces concepts pour démontrer des propriétés de stabilité des systèmes 2-D complexes étudiés.

1.5.1 Cas discret

Considérons le système 2-D discret décrit par le modèle d'espace d'état de Roesser suivant :

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Notons $x(i, j) = [x^h(i, j) \ x^v(i, j)]^T$. La suite de cette sous-section est consacré à la présentation de quelques concepts fondamentaux sur la stabilité des systèmes 2-D discrets.

Définition 1.1. [Kaczorek, 1985] *Le système 2-D discret (1.17) est asymptotiquement stable si $\sup_{i,j} \|x(i, j)\| < \infty$ et $\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|x(i, j)\| = 0$ sont satisfaites, pour toute condition initiale satisfaisante $\sup_{i,j} \|x^h(0, j)\| < \infty$ et $\sup_{i,j} \|x^v(i, 0)\| < \infty$.*

Lemme 1.1. [Kaczorek, 1985] *Le système 2-D discret (1.17) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P_h > 0$, $P_v > 0$, avec $P_h \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$, $P_v \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$, telles que la condition suivante soit vérifiée.*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_h & 0 \\ 0 & P_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_h & 0 \\ 0 & P_v \end{bmatrix} < 0.$$

Considérons le système 2-D discret décrit par le second modèle de F-M suivant :

$$x(i+1, j+1) = A_1 x(i, j+1) + A_2 x(i+1, j). \quad (1.18)$$

Notons : $X_r = \sup\{\|x(i, j)\| : i+j = r, i, j \in \mathbb{Z}^+\}$.

Définition 1.2. [Xie et al., 2002] *Le système 2-D discret (1.18) est asymptotiquement stable si $\lim_{r \rightarrow \infty} X_r = 0$ est satisfaite, pour toute condition initiale satisfaisant $X_0 < \infty$.*

Lemme 1.2. [Hinamoto, 1993] *Le système 2-D discret (1.18) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P > 0$, $Q > 0$, avec $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telles que la condition suivante soit vérifiée.*

$$\begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & P - Q \end{bmatrix} < 0.$$

1.5.2 Cas continu

Considérons le système 2-D continu décrit par le modèle d'espace d'état de Roesser suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Par la suite, nous rappelons quelques concepts fondamentaux sur la stabilité du système (1.19).

Définition 1.3. [Benzaouia et al., 2016] *Le système 2-D continu (1.19) est asymptotiquement stable si*

$$\lim_{(t_1, t_2) \rightarrow \infty} x^h(t_1, t_2) = 0, \quad \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow \infty} x^v(t_1, t_2) = 0,$$

est satisfaite, pour toute condition initiale satisfaisant : $\|x^h(0, t_2)\| < \infty$, $\|x^v(t_1, 0)\| < \infty$, $\lim_{t_2 \rightarrow \infty} \|x^h(0, t_2)\| = 0$ et $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \|x^v(t_1, 0)\| = 0$.

Lemme 1.3. [Benzaouia et al., 2016] *Le système 2-D continu (1.19) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P_h > 0$, $P_v > 0$, avec $P_h \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$, $P_v \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$, telles que la condition suivante soit vérifiée.*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_h & 0 \\ 0 & P_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_h & 0 \\ 0 & P_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} < 0.$$

1.6 Outils mathématiques

1.6.1 Inégalité matricielle linéaire

La plupart des résultats présentés dans cette thèse sont obtenus grâce à la résolution des contraintes d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). Dans cette sous-section, nous présentons un bref rappel concernant les inégalités matricielles linéaires. Pour plus de détails, les lecteurs peuvent se référer à [Boyd et al., 1994].

Les inégalités matricielles linéaires sont largement exploités pour résoudre beaucoup des problèmes d'automatique, qui sont généralement difficiles à résoudre de façon analytique. L'avantage des méthodes basées sur les LMIs vient du fait que ces dernières peuvent être résolues en utilisant la programmation convexe. Avec cette méthode, on n'est plus limité aux problèmes ayant une solution analytique. En résolvant ces inégalités, on obtient un domaine de solutions faisables, c'est-à-dire

des solutions satisfaisant ces LMIs, plus vaste que celui généré par la recherche des solutions analytiques. En utilisant le fait qu'une inégalité possède davantage de solutions qu'une équation, il est possible d'employer les degrés de liberté supplémentaires pour inclure d'autres objectifs que ceux initialement retenus. Une LMI a la forme suivante

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (1.20)$$

où $x = [x_1^T, \dots, x_m^T]^T$ est un vecteur de nombres réels (variables de décisions), $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = \{1, \dots, m\}$ sont des matrices à valeurs réelles.

L'inégalité (1.20) implique que : $F(x)$ est une matrice définie positive c'est-à-dire : pour tout $z \in \mathbb{R}$ et $z \neq 0$, $z^T F(x) z > 0$. De manière équivalente, la valeur propre la plus petit de $F(x)$ est positive. La condition LMI (1.20) définit un ensemble convexe sur la variable x , c-a-dire, l'ensemble E défini par $E = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) > 0\}$ est convexe.

Définition 1.4. *Un ensemble E est dit convexe si pour toutes les points $(x_1, x_2) \in E$ et $0 \leq \alpha \leq 1$, alors :*

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in E.$$

Plusieurs algorithmes numériques ont été développés pour la résolution des LMIs. La résolution des LMIs dans cette thèse a été faite à travers de la LMI Toolbox de **MATLAB** [Gahinet et al., 1995]. Dans cette toolbox, des fonctions sont définies permettant de résoudre des problèmes de type LMI, tels que le problème de faisabilité et le problème d'optimisation. Ces problèmes de base sont définis comme suit.

- **Faisabilité** : La condition LMI (1.20) est dit faisable (ou réalisable) si et seulement s'il existe un vecteur x tel que la condition $F(x) > 0$ soit satisfaite.
- **Optimisation** : Le problème d'optimisation consiste à trouver une solution optimale de LMI (1.20) en minimisant un critère donné. L'un des avantages qu'offre l'optimisation convexe est qu'elle permet de garantir que tout minimum local est global.

1.6.2 Lemmes utiles

Dans cette sous-section, nous présentons des lemmes qui seront utiles dans la suite de cette thèse. Les lemmes qui seront présentés ont pour principal but de rendre les inégalités matricielles linéaires en les variables recherchées.

Lemme 1.4. *(Complément de Schur [Boyd et al., 1994]) Soit une matrice symétrique :*

$$S = S^T = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ * & S_{22} \end{bmatrix},$$

avec S_{11} , S_{22} sont des matrices carrées, les conditions suivantes sont équivalentes,

1. $S < 0$;
2. $S_{11} < 0$, $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
3. $S_{22} < 0$, $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

Lemme 1.5. *(Inégalité de sommation basée sur la fonction auxiliaire [Park et al., 2016]) Soient les fonctions vectorielles :*

$$\{\delta(l), \eta(l) \mid l \in [a, a + b - 1]\}$$

où

$$\delta(l) = \eta(l + 1) - \eta(l).$$

Pour toute matrice définie positive R , l'inégalité suivante est vérifiée

$$\sum_{l=a}^{a+n-1} \delta^T(l) R \delta(l) \geq \sum_{k=0}^3 \frac{2k+1}{n} \Xi_k^T R \Xi_k,$$

où

$$\begin{aligned} \Xi_0 &= \eta(a+b) - \eta(a), \\ \Xi_1 &= \eta(a+b) + \eta(a) - \frac{2}{b+1} \sum_{l=a}^{a+b} \eta(l), \\ \Xi_2 &= \eta(a+b) + \eta(a) - \frac{6}{n+1} \sum_{l=a}^{a+b} \eta(l) - \frac{12}{(b+1)(b+2)} \sum_{p=a}^{a+n} \sum_{l=p}^{a+b} \eta(l), \\ \Xi_3 &= \eta(a+b) + \eta(a) - \frac{12}{b+1} \sum_{l=a}^{a+b} \eta(l) + \frac{60}{(b+1)(b+2)} \sum_{p=a}^{a+b} \sum_{l=p}^{a+b} \eta(l) \\ &\quad - \frac{120}{(b+1)(b+2)(b+3)} \sum_{r=a}^{a+b} \sum_{p=r}^{a+b} \sum_{l=p}^{a+b} \eta(l). \end{aligned}$$

Lemme 1.6. (Inégalité de Wirtinger discrète [Seuret et al., 2015].) Soient les fonctions vectorielles :

$$\{\delta(l), \eta(l) \mid l \in [a, a+b-1]\},$$

où

$$\delta(l) = \eta(l+1) - \eta(l).$$

Pour toute matrice définie positive R , l'inégalité suivante est vérifiée

$$\sum_{l=a}^{a+b-1} \delta^T(l) R \delta(l) \geq \frac{1}{b} \Xi_0^T R \Xi_0 + \frac{3}{b} \Xi_1^T R \Xi_1,$$

où

$$\begin{aligned} \Xi_0 &= \eta(a+b) - \eta(a), \\ \Xi_1 &= \eta(a+b) + \eta(a) - \frac{2}{b+1} \sum_{p=a}^{a+b} \eta(p). \end{aligned}$$

Lemme 1.7. [Mathiyalagan et al., 2012] Pour toute matrice définie positivement R , un entier b satisfaisant $b \geq 1$, et toute fonction vectorielle $\eta(i)$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \sum_{q=-b}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \eta^T(p) R \eta(p) &\geq \frac{2}{b(b+1)} \left(\sum_{q=-b}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \eta^T(p) \right)^T R \left(\sum_{q=-b}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \eta(p) \right), \\ \sum_{r=-b}^{-1} \sum_{q=r}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \eta^T(p) R \eta(p) &\geq \frac{6}{b(b+1)(b+2)} \left(\sum_{r=-b}^{-1} \sum_{q=r}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \eta^T(p) \right)^T R \\ &\quad \times \left(\sum_{r=-b}^{-1} \sum_{q=r}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \eta^T(p) \right), \end{aligned}$$

$$\sum_{s=-b}^{-1} \sum_{r=-s}^{-1} \sum_{q=r}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \eta^T(p) R \eta(p) \geq \frac{24}{b(b+1)(b+2)(b+3)} \left(\sum_{s=-b}^{-1} \sum_{r=-s}^{-1} \sum_{q=r}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \eta^T(p) \right)^T R$$

$$\times \left(\sum_{s=-b}^{-1} \sum_{r=-s}^{-1} \sum_{q=r}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \eta^T(p) \right).$$

Lemme 1.8. (Inégalité intégrale basée sur la fonction auxiliaire [Park et al., 2016]) Pour une matrice définie positive R et une fonction différentiable $\{y(u), u \in [a, b]\}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_a^b \dot{y}^T(\alpha) R \dot{y}(\alpha) d\alpha \geq \sum_{i=0}^3 \frac{2i+1}{b-a} \Xi_i^T Z \Xi_i, \quad (1.21)$$

où

$$\begin{aligned} \Xi_0 &= y(b) - y(a), \\ \Xi_1 &= y(b) + y(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b y(\alpha) d\alpha, \\ \Xi_2 &= y(b) - y(a) + \frac{6}{b-a} \int_a^b y(\alpha) d\alpha - \frac{12}{(b-a)^2} \int_a^b \int_\beta^b y(\alpha) d\alpha d\beta, \\ \Xi_3 &= y(b) + y(a) - \frac{12}{b-a} \int_a^b y(\alpha) d\alpha + \frac{60}{(b-a)^2} \int_a^b \int_\beta^b y(\alpha) d\alpha d\beta \\ &\quad - \frac{120}{(b-a)^3} \int_a^b \int_\lambda^b \int_\beta^b y(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda. \end{aligned}$$

Lemme 1.9. (Inégalité de Wirtinger continue [Seuret et al., 2013].) Pour une matrice définie positive R et une fonction différentiable $\{y(u), u \in [a, b]\}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_a^b \dot{y}^T(\alpha) R \dot{y}(\alpha) d\alpha \geq \frac{1}{b-a} \Xi_1^T R \Xi_1 + \frac{3}{b-a} \Xi_2^T R \Xi_2, \quad (1.22)$$

où

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= y(b) - y(a), \\ \Xi_2 &= y(b) + y(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b y(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Lemme 1.10. [Sun et al., 2009] Pour une matrice définie positive R et une fonction différentiable $\{y(u), u \in [a, b]\}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_a^b \int_\beta^b \dot{y}^T(\alpha) R \dot{y}(\alpha) d\alpha d\beta \geq 2\Xi_3^T R \Xi_3, \quad (1.23)$$

$$\int_a^b \int_a^\beta \dot{y}^T(\alpha) R \dot{y}(\alpha) d\alpha d\beta \geq 2\Xi_4^T R \Xi_4, \quad (1.24)$$

où

$$\begin{aligned} \Xi_3 &= y(b) - \frac{1}{b-a} \int_a^b y(\alpha) d\alpha, \\ \Xi_4 &= y(a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b y(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Lemme 1.11. [Sun et al., 2009] Pour toute matrice définie positivement R , un entier positif b , et toute fonction $x(\alpha)$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \int_{-b}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\alpha) R \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta &\geq \frac{2}{b^2} \left(\int_{-b}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta \right)^T R \left(\int_{-b}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta \right), \\ \int_{-b}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\alpha) R \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda &\geq \frac{6}{b^3} \left(\int_{-b}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda \right)^T R \\ &\quad \times \left(\int_{-b}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda \right), \\ \int_{-b}^0 \int_{\delta}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\alpha) R \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda d\delta &\geq \frac{24}{b^4} \left(\int_{-b}^0 \int_{\delta}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda d\delta \right)^T R \\ &\quad \times \left(\int_{-b}^0 \int_{\delta}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda d\delta \right). \end{aligned}$$

Lemme 1.12. (Lemme de convexité réciproque [Park et al., 2011]) Pour tout vecteur $\zeta \in \mathbb{R}^m$, matrices définies positives $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrices $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et scalaire réel $\sigma \in [0, 1]$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$-\frac{1}{\sigma} \zeta^T X_1^T R_1 X_1 \zeta - \frac{1}{1-\sigma} \zeta^T X_2^T R_2 X_2 \zeta \leq -\zeta^T \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & S \\ * & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \zeta,$$

avec $\begin{bmatrix} R_1 & S \\ * & R_2 \end{bmatrix} > 0$.

Lemme 1.13. [Xie et al., 1996] Étant donné les matrices $\Theta = \Theta^T$, Y et Z avec des dimensions appropriées, alors pour tout matrices $\mathcal{F}(t_1, t_2)$ satisfaisant $\mathcal{F}^T(t_1, t_2) \mathcal{F}(t_1, t_2) \leq I$,

$$\Theta + Y \mathcal{F}(t_1, t_2) Z + Z^T \mathcal{F}^T(t_1, t_2) Y^T < 0,$$

si et seulement s'il existe un scalaire $\varepsilon > 0$, tel que

$$\Theta + \varepsilon Y Y^T + \varepsilon^{-1} Z^T Z < 0.$$

Lemme 1.14. [Yang et al., 2014] Pour toutes matrices W_1, W_2 avec des dimensions appropriées, ε étant un scalaire positif, la propriété suivante est vérifiée :

$$W_1 W_2 + W_2^T W_1^T \leq \varepsilon W_1 W_1^T + \varepsilon^{-1} W_2^T W_2.$$

Lemme 1.15. (Congruence [Boyd et al., 1994]) Soient deux matrices X et Y , où Y est de rang plein en colonne, si X est défini positif (resp. Défini négatif), alors la matrice $Y^T X Y$ est défini positive (resp. Défini négatif).

1.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à quelques rappels et notions de base concernant les systèmes 2-D. Aussi, nous avons mis le point sur quelques extensions possibles des modèles 2-D. Ensuite nous avons présenté quelques définitions relatives à la stabilité des systèmes 2-D. Enfin, après avoir décrit le cadre théorique des LMIs et leur utilisation, nous avons conclu ce chapitre en introduisant des outils qui nous seront nécessaires pour mener à bien les objectifs de cette thèse.

Chapitre 2

Stabilité des systèmes 2-D à retards

2.1 Introduction

Comme il est bien connu, les retards existent largement dans de nombreux systèmes pratiques tels que les systèmes chimiques, les réseaux de communication et les systèmes mécaniques [Yin et al., 2016, Yin et al., 1989, Zhang et al., 2015]. L'évolution des systèmes à retards dépend non seulement de la valeur de leurs variables à l'instant présent, mais aussi d'une partie de leurs valeurs passées. En effet, le retard est un événement qui agit sur un système, il peut changer ses propriétés et modifier sa dynamique conduisant à une dégradation des performances du procédé voir à son instabilité. Par conséquent, les problèmes d'analyse de la stabilité et de conception pour divers systèmes en présence des retards ont été largement étudiés dans la littérature [Cao et al., 2001, Fei et al., 2017, Kim et al., 2008, Mohajerpoor et al., 2017, Xu et al., 2005]. Généralement, les résultats existants peuvent être divisés en deux catégories : Des résultats dépendants du retard [Fei et al., 2017, Xu et al., 2005, Mohajerpoor et al., 2017] et des résultats indépendants du retard [Cao et al., 2001, Kim et al., 2008]. Étant donné que les résultats dépendants du retard utilisent des informations sur la largeur des retards, ils sont moins conservatifs que ceux indépendants du retard, et en particulier lorsque le retard est faible. Dans cette thèse, nous optons pour des méthodes d'analyse et de synthèse dépendantes des retards a fin de prendre en compte les effets parfois déstabilisant des retards sur la dynamique du système. il convient de noter que pour un critère de stabilité dépendant du retard, l'une des préoccupations essentielles est d'obtenir une limite supérieure du retard maximale admissible aussi grande que possible de sorte que le système puisse rester stable. Ce qui peut être considérée comme un indice important pour évaluer le conservatisme des critères de stabilité. Afin d'obtenir des critères de stabilité moins conservatifs, de nombreuses techniques sont développées dans la littérature, telles que la technique de transformation [Cao et al., 2000], la technique des matrices de pondération libres [Qiu et al., 2010], la méthode des inégalités intégrale/sommation [Park et al., 2016], la technique de partitionnement de retard [Meng et al., 2010] et la méthode du petit gain [Zhao et al., 2012].

Au cours des dernières années, de nombreux travaux ont porté sur l'étude du problème de la stabilité dépendante du retard pour les systèmes 2-D à retards, par exemple dans [Yao et al., 2013], les matrices de pondération libres ont été introduites pour réduire le conservatisme des conditions d'analyse de la stabilité des systèmes 2-D discrets à retards décrits par le second modèle de F-M. Dans [Hien et al., 2016], des nouvelles inégalités à somme finie ont été développées pour traiter le problème de l'analyse de la stabilité des systèmes 2-D discrets décrits par le modèle de Roesser à retrads variables. Récemment, dans [Peng et al., 2018], la méthode de partitionnement des retards

a été exploité pour analyser la stabilité d'une classe de systèmes 2-D discrets à retards variables.

D'un autre côté, un système commuté est un type de système dynamique hybride qui se compose d'un nombre fini de sous systèmes et un signal de commutation indiquant le sous-système actif dans un certain intervalle. La principale motivation pour étudier de tels systèmes est qu'ils ont une grande flexibilité dans la modélisation d'un grand nombre de systèmes réels tels que les systèmes d'alimentation, les systèmes de contrôle en réseau, le contrôle des avions et les industries de la communication [Donkers et al., 2011, Wang et al., 2015, Williams et al., 1991]. Par conséquent, de nombreux chercheurs se sont concentrés sur l'étude des problèmes d'analyse et de synthèse pour les systèmes commutés [Regaieg et al., 2019, Wang et al., 2012, Zamani et al., 2015]. En relation avec les systèmes 2-D, peu de résultats ont été obtenus concernant les problèmes d'analyse et de synthèse pour les systèmes 2-D commutés à retards, en particulier lorsque les retards sont variables. Par exemple dans [Huang et al., 2013], le problème de l'analyse de la stabilité des systèmes 2-D commutés discrets représentés par le modèle de Roesser à retards d'état a été étudié. Dans [Huang et al., 2014], une solution au problème de la commande fiable et robuste pour une classe de systèmes 2-D commutés discrets incertains avec des retards d'état et des défaillances des actionneurs a été proposée. Le problème de la commande H_∞ des systèmes 2-D commutés à retards et avec saturation de l'actionneur représentés par le second modèle de F-M a été examiné dans [Ghous et al., 2015].

Motivé par la discussion ci-dessus, dans ce chapitre, les problèmes de la stabilité dépendante du retard pour une certaine classe des systèmes 2-D à retards seront traités.

La première section sera dédiée à l'analyse de la stabilité asymptotique des systèmes 2-D discrets décrits par le second modèle de F-M. Différent des méthodes existantes dans la littérature, l'inégalité de sommation basée sur la fonction auxiliaire, qui couvre l'inégalité de Jensen comme un cas spécial sera utilisé. En plus, sur la base d'une fonction de Lyapunov-Krasovskii augmenté, un nouveau critère de stabilité dépendant du retard sera proposé en termes de LMI. Des exemples numériques seront aussi présentés pour démontrer l'efficacité et les avantages du résultat obtenu.

La deuxième section sera consacrée à l'analyse de la stabilité exponentielle des systèmes 2-D discrets commutés décrits par le modèle de Roesser à retards variables. Sur la base d'une fonction de Lyapunov-Krasovskii appropriée et l'approche du temps de séjour moyen, des nouvelles conditions suffisantes pour la stabilité exponentielle du système étudié seront proposées. Dans le but d'obtenir des conditions moins conservatives, la méthode de partitionnement de retard est adoptée ainsi que la technique de matrice de pondération libre. Les conditions seront formulées sous le format LMI. L'efficacité et l'avantage des résultats développés seront montrés par des exemples numériques.

La troisième et dernière section sera réservée à l'analyse de la stabilité et de la performance H_∞ des systèmes 2-D continus à retards. Une approche de partitionnement de retard en combinaison avec l'inégalité intégrale basée sur la fonction auxiliaire, seront utilisés pour développer de nouveaux critères d'analyse de la stabilité et de la performance H_∞ dans un cadre LMI. Quelques exemples numériques seront fournis pour montrer la validité des résultats et le conservatisme réduit par rapport aux résultats de la littérature récente.

2.2 Stabilité des systèmes 2-D discrets à retards

2.2.1 Formulation du problème

Considérons le système 2-D discret à retards décrit par le second modèle de F-M suivant :

$$x(i+1, j+1) = A_1x(i, j+1) + A_2x(i+1, j) + A_{1d}x(i-d_1, j+1) + A_{2d}x(i+1, j-d_2), \quad (2.1)$$

avec $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, d_1 et d_2 sont des entiers positifs constants représentant respectivement des retards dans les directions horizontale et verticale. Les matrices A_1 , A_2 , A_{1d} et A_{2d} sont des matrices constantes avec des dimensions appropriées.

Les conditions initiales sont supposées comme suit :

$$\begin{cases} x_{i,j} = \psi_{i,j}, & \forall 0 \leq j < M_2, \quad -d_1 \leq i \leq 0, \\ x_{i,j} = \varrho_{i,j}, & \forall 0 \leq i < M_1, \quad -d_2 \leq j \leq 0, \\ x_{i,j} = 0, & \forall j \geq M_2, \quad -d_1 \leq i \leq 0, \\ x_{i,j} = 0, & \forall i \geq M_1, \quad -d_2 \leq j \leq 0, \\ \psi_{0,0} = \varrho_{0,0}. \end{cases} \quad (2.2)$$

avec M_1 et M_2 sont des entiers positifs.

La définition suivante sera utilisée dans la preuve du résultat principal :

Définition 2.1. [Paszke et al., 2004] Notons : $X_r = \sup\{x(i, j) : i + j = r, i, j \in \mathbb{Z}\}$. Le système 2-D discret à retards (2.1) avec toute condition initiale (2.2), est asymptotiquement stable si

$$\lim_{r \rightarrow \infty} X_r = 0.$$

Le but de cette section est d'analyser la stabilité du système (2.1). Un nouveau critère de stabilité dépendant du retard avec moins de conservatisme que certains critères existants dans la littérature sera proposé.

2.2.2 Résultat principal

Dans ce paragraphe, nous présenterons un nouveau critère de stabilité dépendant du retard pour le système (2.1).

Théorème 2.1. [Badie et al., 2018a] Le système 2-D à retards (2.1) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P = \text{diag}\{P^h, P^v\} > 0$ et $Q_q = \text{diag}\{Q_q^h, Q_q^v\} > 0$, $q = 1, 2, \dots, 5$, avec $P^h \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $P^v \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $Q_q^h \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q_q^v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que la condition LMI suivante soit vérifiée.

$$W_{P1} P W_{P1}^T - W_{P2} P W_{P2}^T + \Xi_3 < 0, \quad (2.3)$$

où

$$\begin{aligned} \Xi_3 &= \Xi_2 - W_{Q25} Q_2 W_{Q25}^T, \\ \Xi_2 &= \Xi_1 - W_{Q24} Q_2 W_{Q24}^T, \\ \Xi_1 &= \Xi_0 - W_{Q23} Q_2 W_{Q23}^T, \\ \Xi_0 &= W_{Q11} Q_1 W_{Q11}^T - W_{Q12} Q_1 W_{Q12}^T + W_{Q21} Q_2 W_{Q21}^T - W_{Q22} Q_2 W_{Q22}^T \\ &\quad + W_{Q31} Q_3 W_{Q31}^T - W_{Q32} Q_3 W_{Q32}^T + W_{Q41} Q_4 W_{Q41}^T - W_{Q41} Q_4 W_{Q42}^T \\ &\quad + W_{Q11} Q_5 W_{Q51}^T - W_{Q51} Q_5 W_{Q52}^T, \end{aligned}$$

$$W_{P1} = [W_{P1}^h \quad W_{P1}^v], \quad W_{P2} = [W_{P2}^h \quad W_{P2}^v],$$

$$W_{P1}^h = \begin{bmatrix} e_0^T \\ (d_1 + 1)e_5^T - e_3^T \\ (d_1 + 1)(d_1 + 2)e_7^T - (d_1 + 1)e_5^T \\ (d_1 + 1)(d_1 + 2)\{(d_1 + 3)e_9^T - e_7^T\} \end{bmatrix}^T,$$

$$W_{P1}^v = \begin{bmatrix} e_0^T \\ (d_2 + 1)e_6^T - e_4^T \\ (d_2 + 1)(d_2 + 2)e_8^T - (d_2 + 1)e_6^T \\ (d_2 + 1)(d_2 + 2)\{(d_2 + 3)e_{10}^T - e_8^T\} \end{bmatrix}^T,$$

$$\begin{aligned}
 W_{P2}^h &= \begin{bmatrix} e_1^T \\ (d_1+1)e_5^T - e_1^T \\ (d_1+1)(d_1+2)e_7^T - (d_1+1)e_1^T \\ (d_1+1)(d_1+2)\{(d_1+3)e_9^T - \frac{e_1^T}{2}\} \end{bmatrix}^T, \\
 W_{P2}^v &= \begin{bmatrix} e_2^T \\ (d_2+1)e_6^T - e_2^T \\ (d_2+1)(d_2+2)e_8^T - (d_2+1)e_2^T \\ (d_2+1)(d_2+2)\{(d_2+3)e_{10}^T - \frac{e_2^T}{2}\} \end{bmatrix}^T, \\
 W_{Q11} &= \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \end{bmatrix}^T, W_{Q12} = \begin{bmatrix} e_3^T \\ e_4^T \end{bmatrix}^T, W_{Q21} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}(e_0^T - e_1^T) \\ \sqrt{d_2}(e_0^T - e_2^T) \end{bmatrix}^T, \\
 W_{Q22} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}}(e_1^T - e_3^T) \\ \frac{1}{\sqrt{d_2}}(e_2^T - e_4^T) \end{bmatrix}^T, W_{Q23} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{d_1}}(e_1^T + e_3^T - 2e_5^T) \\ \sqrt{\frac{3}{d_2}}(e_2^T + e_4^T - 2e_6^T) \end{bmatrix}^T, \\
 W_{Q24} &= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{5}{d_1}}(e_1^T - e_3^T + 6e_5^T - 12e_7^T) \\ \sqrt{\frac{5}{d_2}}(e_2^T - e_4^T + 6e_6^T - 12e_8^T) \end{bmatrix}^T, \\
 W_{Q25} &= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{7}{d_1}}(e_1^T + e_3^T - 12e_5^T + 60e_7^T - 120e_9^T) \\ \sqrt{\frac{7}{d_2}}(e_2^T + e_4^T - 12e_6^T + 60e_8^T - 120e_{10}^T) \end{bmatrix}^T, \\
 W_{Q31} &= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{d_1(d_1+1)}{2}}(e_0^T - e_1^T) \\ \sqrt{\frac{d_2(d_2+1)}{2}}(e_0^T - e_2^T) \end{bmatrix}^T, W_{Q32} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2(d_1+1)}{d_1}}(e_1^T - e_5^T) \\ \sqrt{\frac{2(d_2+1)}{d_2}}(e_2^T - e_6^T) \end{bmatrix}^T, \\
 W_{Q41} &= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{d_1(d_1+1)(d_1+2)}{6}}(e_0^T - e_1^T) \\ \sqrt{\frac{d_2(d_2+1)(d_2+2)}{6}}(e_0^T - e_2^T) \end{bmatrix}^T, W_{Q42} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{6(d_1+1)(d_1+2)}{d_1}}(\frac{1}{2}e_1^T - e_7^T) \\ \sqrt{\frac{6(d_2+1)(d_2+2)}{d_2}}(\frac{1}{2}e_2^T - e_8^T) \end{bmatrix}^T, \\
 W_{Q51} &= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{d_1(d_1+1)(d_1+2)(d_1+3)}{24}}(e_0^T - e_1^T) \\ \sqrt{\frac{d_2(d_2+1)(d_2+2)(d_2+3)}{24}}(e_0^T - e_2^T) \end{bmatrix}^T, \\
 W_{Q52} &= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{24(d_1+1)(d_1+2)(d_1+3)}{d_1}}(\frac{1}{6}e_1^T - e_9^T) \\ \sqrt{\frac{24(d_2+1)(d_2+2)(d_2+3)}{d_2}}(\frac{1}{6}e_2^T - e_{10}^T) \end{bmatrix}^T, \\
 e_0 &= (A_1 e_1^T + A_2 e_2^T + A_{1d} e_3^T + A_{2d} e_4^T)^T, \\
 e_4^T &= [0_{n \times (p-1)n} \quad I_n \quad 0_{n \times (10-p)n}]^T, \quad p = 1, 2, \dots, 10.
 \end{aligned}$$

Preuve. Motivée par le choix de la fonction de Lyapunov-Krasovskii dans [Park et al., 2016], une fonction de Lyapunov-Krasovskii pour le système 2-D à retard (2.1) est choisie comme suit :

$$V(i, j) = V^h(i, j) + V^v(i, j), \quad (2.4)$$

où

$$V^h(i, j) = \zeta^{hT}(i, j) P^h \zeta^h(i, j) + \sum_{l=i-d_1}^{i-1} x^T(l, j) Q_1^h x(l, j) + \sum_{p=-d_1}^{-1} \sum_{l=i+p}^{i-1} \delta_1^T(l, j) Q_2^h \delta_1(l, j)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=-d_1}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=i+p}^{i-1} \delta_1^T(l, j) Q_3^h \delta_1(l, j) + \sum_{s=-d_1}^{-1} \sum_{r=s}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=i+p}^{i-1} \delta_1^T(l, j) Q_4^h \delta_1(l, j) \\
 & + \sum_{t=-d_1}^{-1} \sum_{s=t}^{-1} \sum_{r=s}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=i+p}^{i-1} \delta_1^T(l, j) Q_5^h \delta_1(l, j), \\
 V^v(i, j) & = \zeta^{vT}(i, j) P^v \zeta_{i,j}^v + \sum_{l=j-d_2}^{i-1} x^T(i, l) Q_1^v x(i, l) + \sum_{p=-d_2}^{-1} \sum_{l=j+p}^{j-1} \delta_2^T(i, l) Q_2^v \delta_2(i, l), \\
 & + \sum_{r=-d_2}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=j+p}^{j-1} \delta_2^T(i, l) Q_3^v \delta_2(i, l) + \sum_{s=-d_2}^{-1} \sum_{r=s}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=j+p}^{j-1} \delta_2^T(i, l) Q_4^v \delta_2(i, l) \\
 & + \sum_{t=-d_2}^{-1} \sum_{s=t}^{-1} \sum_{r=s}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=j+p}^{j-1} \delta_2^T(i, l) Q_5^v \delta_2(i, l),
 \end{aligned}$$

et

$$\delta_1(l, j) = x(l+1, j) - x(l, j), \quad \delta_2(i, l) = x(i, l+1) - x(i, l),$$

$$\zeta^h(i, j) = \begin{bmatrix} x(i, j) \\ \sum_{l=i-d_1}^{i-1} x(l, j) \\ \sum_{p=-d_1}^{-1} \sum_{l=i+p}^{i-1} x(l, j) \\ \sum_{r=-d_1}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=i+p}^{i-1} x(l, j) \end{bmatrix}, \quad \zeta^v(i, j) = \begin{bmatrix} x(i, j) \\ \sum_{l=j-d_2}^{i-1} x(i, l) \\ \sum_{p=-d_2}^{-1} \sum_{l=j+p}^{j-1} x(i, l) \\ \sum_{r=-d_1}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=j+p}^{j-1} x(i, l) \end{bmatrix}.$$

Les différences $\Delta V^h(i, j)$ et $\Delta V^v(i, j)$ de la fonction de Lyapunov-Krasovskii (2.4) sont données par :

$$\begin{aligned}
 \Delta V^h(i, j) & = V^h(i+1, j+1) - V^h(i, j+1) \\
 & = \zeta^{hT}(i+1, j+1) P^h \zeta^h(i+1, j+1) - \zeta^{hT}(i, j+1) P^h \zeta^h(i, j+1) \\
 & \quad + x^T(i, j+1) Q_1^h x(i, j+1) - x^T(i-d_1, j+1) Q_1^h x(i-d_1, j+1) \\
 & \quad + d_1 \delta_1^T(i, j+1) Q_2^h \delta_1(i, j+1) - \sum_{l=i-d_1}^{i-1} y^T(l, j+1) Q_2^h \delta_1(l, j+1) \\
 & \quad + \frac{d_1(d_1+1)}{2} \delta_1^T(l, j+1) Q_3^h \delta_1(l, j+1) \\
 & \quad - \sum_{p=-d_1}^{-1} \sum_{l=i+p}^{i-1} \delta_1^T(l, j+1) Q_3^h \delta_1(l, j+1) \\
 & \quad + \frac{d_1(d_1+1)(d_1+2)}{6} \delta_1^T(l, j+1) Q_4^h \delta_1(l, j+1) \\
 & \quad - \sum_{r=-d_1}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=i+p}^{i-1} \delta_1^T(l, j+1) Q_4^h \delta_1(l, j+1) \\
 & \quad + \frac{d_1(d_1+1)(d_1+2)(d_1+3)}{24} \delta_1^T(l, j+1) Q_5^h \delta_1(l, j+1)
 \end{aligned}$$

$$- \sum_{s=-d_1}^{-1} \sum_{r=s}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=i+p}^{i-1} \delta_1^T(l, j+1) Q_5^h \delta_1(l, j+1),$$

et

$$\begin{aligned} \Delta V^v(i, j) &= V^v(i+1, j+1) - V^v(i+1, j) \\ &= \zeta^{vT}(i+1, j+1) P^v \zeta^v(i+1, j+1) - \zeta^{hT}(i+1, j) P^v \zeta^h(i+1, j) \\ &\quad + x^T(i+1, j) Q_1^v x(i+1, j) - x^T(i+1, j-d_2) Q_1^v x(i+1, j-d_2) \\ &\quad + d_1 \delta_2^T(i+1, j) Q_2^v \delta_2(i+1, j) - \sum_{l=j-d_2}^{j-1} \delta_2^T(i+1, l) Q_2^v \delta_2(i+1, l) \\ &\quad + \frac{d_2(d_2+1)}{2} \delta_2^T(i+1, l) Q_3^v \delta_2(i+1, l) \\ &\quad - \sum_{p=-d_2}^{-1} \sum_{l=j+p}^{j-1} \delta_2^T(i+1, l) Q_3^v \delta_2(i+1, l) \\ &\quad + \frac{d_2(d_2+1)(d_2+2)}{6} \delta_2^T(i+1, l) Q_4^v \delta_2(i+1, l) \\ &\quad - \sum_{r=-d_2}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=j+p}^{j-1} \delta_2^T(i+1, l) Q_4^v \delta_2(i+1, l) \\ &\quad + \frac{d_2(d_2+1)(d_2+2)(d_2+3)}{24} \delta_2^T(i+1, l) Q_5^v \delta_2(i+1, l) \\ &\quad - \sum_{s=-d_2}^{-1} \sum_{r=s}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=j+p}^{j-1} \delta_2^T(i+1, l) Q_5^h \delta_2(i+1, l). \end{aligned}$$

L'application du lemme 1.5 aux termes à seule sommation dans $\Delta V^h(i, j)$ et $\Delta V^v(i, j)$ conduit à :

$$\begin{aligned} \sum_{l=i-d_1}^{i-1} \delta_1^T(l, j+1) Q_2^h \delta_1(l, j+1) &\geq \sum_{k=0}^m \frac{2k+1}{d_1} \Omega_k^{hT} Q_2^h \Omega_k^h, \\ \sum_{l=j-d_2}^{j-1} \delta_2^T(i+1, l) Q_2^v \delta_2(i+1, l) &\geq \sum_{k=0}^m \frac{2k+1}{d_2} \Omega_k^{vT} Q_2^v \Omega_k^v, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Omega_0^h &= x(i, j+1) - x(i-d_1, j+1), \\ \Omega_1^h &= x(i, j+1) + x(i-d_1, j+1) - \frac{2}{d_1+1} \sum_{l=i-d_1}^i x(l, j+1), \\ \Omega_2^h &= x(i, j+1) - x(i-d_1, j+1) + \frac{6}{d_1+1} \sum_{l=i-d_1}^i x(l, j+1) \\ &\quad - \frac{12}{(d_1+1)(d_1+2)} \sum_{p=a}^{a+n} \sum_{l=p}^{a+n} x(l, j+1), \\ \Omega_3^h &= x(i, j+1) + x(i-d_1, j+1) - \frac{12}{d_1+1} \sum_{l=i-d_1}^i x(l, j+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{60}{(d_1 + 1)(d_1 + 2)} \sum_{p=a}^{a+n} \sum_{l=p}^{a+n} x(l, j + 1), \\
 & - \frac{120}{(d_1 + 1)(d_1 + 2)(d_1 + 3)} \sum_{r=a}^{a+n} \sum_{p=r}^{a+n} \sum_{l=p}^{a+n} x(l, j + 1),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Omega_0^v & = x(i + 1, l) - x(i + 1, j - d_2), \\
 \Omega_1^v & = x(i + 1, l) - x(i + 1, j - d_2) - \frac{2}{d_2 + 1} \sum_{l=j-d_2}^i x(i + 1, l), \\
 \Omega_2^v & = x(i + 1, l) - x_{i+1, j-d_2} + \frac{6}{d_2 + 1} \sum_{l=j-d_2}^i x(i + 1, j), \\
 & - \frac{12}{(d_2 + 1)(d_2 + 2)} \sum_{p=a}^{a+n} \sum_{l=p}^{a+n} x(i + 1, l), \\
 \Omega_3^v & = x(i + 1, l) + x(i + 1, j - d_2) - \frac{12}{d_2 + 1} \sum_{l=j-d_2}^i x(i + 1, l), \\
 & + \frac{60}{(d_2 + 1)(d_2 + 2)} \sum_{p=a}^{a+n} \sum_{l=p}^{a+n} x(i + 1, l), \\
 & - \frac{120}{(d_2 + 1)(d_2 + 2)(d_2 + 3)} \sum_{r=a}^{a+n} \sum_{p=r}^{a+n} \sum_{l=p}^{a+n} x(i + 1, l).
 \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.6 pour les termes à double, triple et quadruple sommations dans $\Delta V^h(i, j)$ et $\Delta V^v(i, j)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=-d_1}^{-1} \sum_{l=i+p}^{i-1} \delta_1^T(l, j + 1) Q_3^h \delta_1(l, j + 1) & \geq \frac{2(d_1 + 1)}{d_1} \Theta^{hT} Q_3^h \Theta^h, \\
 \sum_{p=-d_2}^{-1} \sum_{l=j+p}^{j-1} \delta_2^T(i + 1, l) Q_3^v \delta_2(i + 1, l) & \geq \frac{2(d_2 + 1)}{d_2} \Theta^{vT} Q_3^v \Theta^v, \\
 \sum_{r=-d_1}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=i+p}^{i-1} \delta_1^T(l, j + 1) Q_4^h \delta_1(l, j + 1) & \geq \frac{6(d_1 + 1)(d_1 + 2)}{d_1} \Theta_1^{hT} Q_4^h \Theta_1^h, \\
 \sum_{r=-d_2}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=j+p}^{j-1} \delta_2^T(i + 1, l) Q_4^v \delta_2(i + 1, l) & \geq \frac{6(d_2 + 1)(d_2 + 2)}{d_2} \Theta_1^{vT} Q_4^v \Theta_1^v, \\
 \sum_{s=-d_1}^{-1} \sum_{r=s}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=i+p}^{i-1} \delta_1^T(l, j + 1) Q_5^h \delta_1(l, j + 1) & \geq \frac{24(d_1 + 1)(d_1 + 2)(d_1 + 3)}{d_1} \Theta_2^{hT} Q_5^h \Theta_2^h, \\
 \sum_{s=-d_2}^{-1} \sum_{r=s}^{-1} \sum_{p=r}^{-1} \sum_{l=j+p}^{j-1} \delta_2^T(i + 1, l) Q_5^v \delta_2(i + 1, l) & \geq \frac{24(d_2 + 1)(d_2 + 2)(d_2 + 3)}{d_2} \Theta_2^{vT} Q_5^v \Theta_2^v,
 \end{aligned}$$

avec

$$\Theta^h = x(i, j + 1) - \frac{1}{d_1 + 1} \sum_{l=i-d_1}^{i-1} x(l, j + 1),$$

$$\begin{aligned}\Theta_1^h &= \frac{1}{2}x(i, j+1) - \frac{1}{(d_1+1)(d_1+2)} \sum_{p=-d_1}^0 \sum_{l=i+p}^i x(l, j+1), \\ \Theta_2^h &= \frac{1}{6}x(i, j+1) - \frac{1}{(d_1+1)(d_1+2)(d_1+3)} \sum_{r=-d_1}^0 \sum_{p=r}^0 \sum_{l=i+p}^i x(l, j+1), \\ \Theta^v &= x(i+1, j) - \frac{1}{d_2+1} \sum_{l=j-d_2}^{j-1} x(i+1, l), \\ \Theta_1^v &= \frac{1}{2}x(i+1, j) - \frac{1}{(d_2+1)(d_2+2)} \sum_{p=-d_2}^0 \sum_{l=j+p}^i x(i+1, l), \\ \Theta_2^v &= \frac{1}{6}x(i+1, j) - \frac{1}{(d_2+1)(d_2+2)(d_2+3)} \sum_{r=-d_2}^0 \sum_{p=r}^0 \sum_{l=j+p}^i x(i+1, l).\end{aligned}$$

Par la suite, on définit un vecteur d'état augmenté $\Upsilon(i, j)$ comme suit :

$$\Upsilon(i, j) = \begin{bmatrix} x(i, j+1) \\ x(i+1, j) \\ x(i-d_1, j+1) \\ x(i+1, j-d_2) \\ \Gamma(i, j) \end{bmatrix},$$

avec

$$\Gamma(i, j) = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1+1} \sum_{l=i-d_1}^i x(l, j+1) \\ \frac{1}{d_2+1} \sum_{l=j-d_2}^i x(i+1, l) \\ \frac{1}{(d_1+1)(d_1+2)} \sum_{p=-d_1}^0 \sum_{l=i+p}^i x(l, j+1) \\ \frac{1}{(d_2+1)(d_2+2)} \sum_{p=-d_2}^0 \sum_{l=j+p}^i x(i+1, l) \\ \frac{1}{(d_1+1)(d_1+2)(d_1+3)} \sum_{r=-d_1}^0 \sum_{p=r}^0 \sum_{l=i+p}^i x(l, j+1) \\ \frac{1}{(d_2+1)(d_2+2)(d_2+3)} \sum_{r=-d_1}^0 \sum_{p=r}^0 \sum_{l=j+p}^j x(i+1, l) \end{bmatrix}.$$

Notons : $\Delta V(i, j) = \Delta V^h(i, j) + \Delta V^v(i, j)$. Sur la base de l'analyse ci-dessus, on obtient :

$$\Delta V(i, j) \leq \Upsilon^T(i, j) \{ W_{P_1} P W_{P_1}^T - W_{P_2} P W_{P_2}^T + \Xi_3 \} \Upsilon(i, j).$$

Il s'ensuit de l'inégalité (2.3) que :

$$\Delta V(i, j) \leq 0,$$

où l'égalité est valable seulement lorsque $\Upsilon(i, j) = 0$, dans ce cas-là le système (2.1) est certainement stable. Dans le cas où $\Delta V(i, j) < 0$, on obtient :

$$V^h(i+1, j+1) + V^v(i+1, j+1) < V^h(i+1, j) + V^v(i, j+1).$$

Pour tout entier $r > \max\{M_1, M_2\}$ et sous les conditions initiales (2.2), il résulte de l'inégalité ci-dessus que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i+j=r+1} V(i, j) &= \sum_{i+j=r+1} [V^h(i, j) + V^v(i, j)] \\
 &= V^h(r, 1) + V^v(r, 1) + V^h(r-1, 2) + V^v(r-1, 2) + \dots + V^h(1, r) + V^v(1, r) \\
 &< V^h(r-1, 1) + V^v(r, 0) + V^h(r-2, 2) + V^v(r-1, 1) + \dots \\
 &\quad + V^h(0, r) + V^v(1, r-1) \\
 &= V^h(r, 0) + V^v(r, 0) + V^h(r-1, 1) + V^v(r-1, 1) + \dots \\
 &\quad + V^h(r-1, 1) + V^v(r-1, 1) + V^h(r, 0) + V^v(r, 0) \\
 &= \sum_{i+j=r} V(i, j).
 \end{aligned}$$

Cela signifie que l'énergie stockée en tous points $\{(i, j) : i + j = r\}$ est strictement supérieure à celles aux points $\{(i, j) : i + j = r + 1\}$. Ainsi, nous obtenons :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i+j=r} V(i, j) = 0,$$

ce qui implique :

$$\lim_{i+j \rightarrow \infty} V(i, j) = 0, \quad \lim_{i+j \rightarrow \infty} \|x(i, j)\| = 0.$$

Par définition 2.1, le système (2.1) est asymptotiquement stable. La preuve est terminée. \square

Remarque 2.1. *Le critère de stabilité dépendant du retard présenté dans théorème 2.1 concerne les systèmes 2-D à retard sans incertitudes. Cependant, il est facile d'étendre davantage ce résultat à des systèmes incertains, où les matrices : A_1, A_2, A_{1d} et A_{2d} , dans (2.1) contiennent des incertitudes de norme bornée ou polytopiques.*

2.2.3 Exemples numériques

Dans ce paragraphe, deux exemples numériques sont utilisés pour montrer l'efficacité du critère de stabilité proposé par rapport aux résultats donnés dans la littérature.

Exemple 2.1. Dans cet exemple, nous appliquons le résultat obtenu pour analyser la stabilité asymptotique d'un processus thermique (échangeur de chaleur) décrit par l'équation différentielle suivante [Xu et al., 2009] :

$$\frac{\partial T(s, t)}{\partial s} = -\frac{\partial T(s, t)}{\partial t} - a_0 T(s, t) - a_1 T(s, t - \tau) + bu(s, t), \quad (2.5)$$

où $T(s, t)$ est la température à s (direction) $\in [0, x_f]$ et t (temps) $\in [0, \infty)$. $u(s, t)$ est la fonction d'entrée, τ est un retard temporel, a_0, a_1, a_2, b sont des coefficients réels. En prenant $b = 0$ et

$$T(i, j) = T(i\Delta s, j\Delta t), \quad \frac{\partial T(s, t)}{\partial s} \approx \frac{T(i, j) - T(i-1, j)}{\Delta s}, \quad \frac{\partial T(s, t)}{\partial t} \approx \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta t}.$$

On peut écrire (2.5) sous la forme discrète suivante :

$$T(i, j+1) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta s} - a_0 \Delta t\right) T(i, j) + \frac{\Delta t}{\Delta s} T(i-1, j) - a_1 \Delta t T(i, j-d_2),$$

où $d_2 = \text{int}(t/\Delta t + 1)$, $\text{int}(\cdot)$ est une fonction qui rend la valeur entière par défaut.

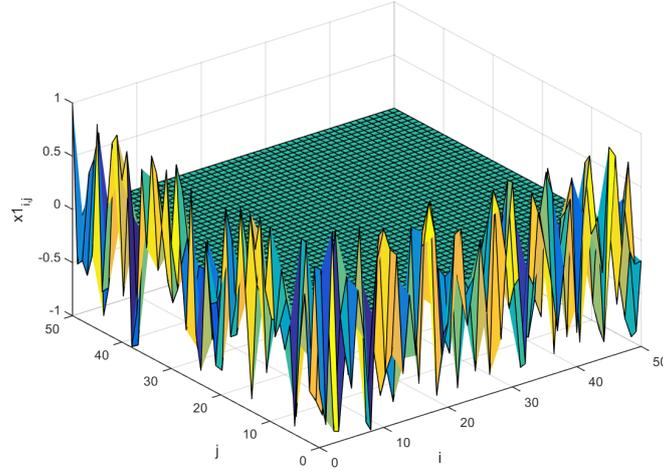


FIGURE 2.1 – Trajectoire d'état $x_1(i, j)$ du système avec $d_2 = 17$.

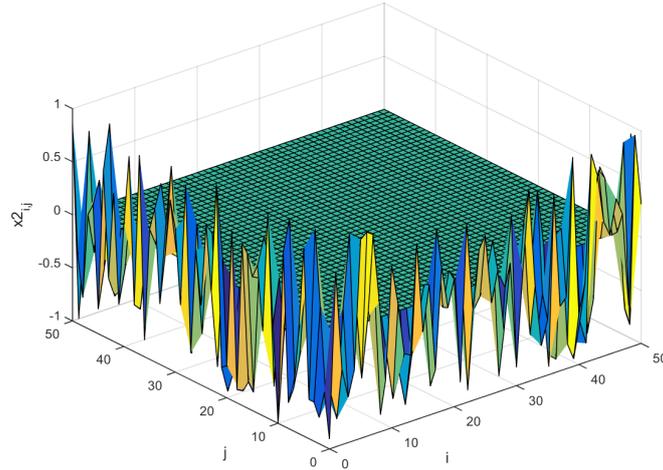


FIGURE 2.2 – Trajectoire d'état $x_2(i, j)$ du système avec $d_2 = 17$.

En choisissant $x(i, j) = [T^T(i-1, j) \quad T^T(i, j)]^T$, il est facile de vérifier que l'équation (2.5) peut être converti en second modèle de F-M (2.1) avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.25 & 0.65 \end{bmatrix}, A_{1d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{2d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.12 \end{bmatrix}.$$

La stabilité asymptotique de ce système ne peut pas être assurée par le critère indépendant du retard [Paszke et al., 2004]. En se basant sur les résultats de [Xu et al., 2009], pour toute valeur d_2 satisfaisant $0 < d_2 \leq 5$, le système étudié est asymptotiquement stable. D'après le corollaire 1 dans [Yao et al., 2013], le système est asymptotiquement stable pour $0 < d_2 \leq 13$. De plus, en résolvant le théorème 2.1, le système est asymptotiquement stable pour tout retard constant d_2 satisfaisant $0 < d_2 \leq 17$.

Afin de vérifier les résultats, on effectue une simulation où on choisit $d_2 = 17$ et des conditions initiales arbitraires. Figures 2.1 et 2.2 donnent les trajectoires des deux variables d'état du système étudié. On peut voir clairement que le système étudié est asymptotiquement stable.

Exemple 2.2. Considérons le système (2.1) avec les matrices données dans [Feng et al., 2010] :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.65 \end{bmatrix}, A_{1d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, A_{2d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

Tableau 2.1 – Maximum de d_2 pour d_1 donné.

Méthodes	$d_1 = 1$	$d_1 = 2$	$d_1 = 3$	$d_1 = 4$	$d_1 = 10$	$d_1 = \infty$
Théorème 1 [Feng et al., 2010]	6	4	4	4	4	4
Théorème 2.1 [Badie et al., 2018a]	7	5	4	4	4	4

Pour des valeurs données de d_1 , les bornes supérieures de d_2 obtenues par le théorème 1 dans [Feng et al., 2010] et théorème 2.1 sont données dans le Tableau 2.1. A partir de ce tableau, on voit clairement que les bornes de retard assuré par le théorème 2.1 sont supérieures ou égales à celles obtenues par [Feng et al., 2010], ce qui démontre l'avantage de notre approche.

2.3 Analyse de la stabilité exponentielle des systèmes 2-D discrets commutés à retards

2.3.1 Formulation du problème

Considérons le système 2-D discret commuté suivant décrit par le modèle de Roesser à retards :

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A^{\sigma(i, j)} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + A_d^{\sigma(i, j)} \begin{bmatrix} x^h(i - d_h(i), j) \\ x^v(i, j - d_v(j)) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Où $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$, $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ sont les états horizontal et vertical respectivement avec $(n = n_h + n_v)$. $\sigma(i, j)$ est le signal de commutation, qui prend ses valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\}$ avec $N \geq 1$ est le nombre de sous-systèmes. $\sigma(i, j) = k$, $(\sigma(i, j) = l)$, $k, l \in \mathcal{N}$ indique que le $k^{\text{ème}}$ ($l^{\text{ème}}$) sous-système est activé (Voir Figure 2.3). $d_h(i)$ et $d_v(j)$ sont des retards d'état variables dans les directions horizontale et verticale, respectivement, satisfaisant :

$$\begin{cases} 0 < d_{h1} \leq d_h(i) \leq d_{h2}; \\ 0 < d_{v1} \leq d_v(j) \leq d_{v2}, \end{cases} \quad (2.7)$$

Où d_{h1} , d_{h2} , d_{v1} et d_{v2} sont des scalaires constants représentant respectivement les bornes inférieure et supérieure des retards sur les directions horizontale et verticale. Les matrices :

$$A^k = \begin{bmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{bmatrix}, A_d^k = \begin{bmatrix} A_{d11}^k & A_{d12}^k \\ A_{d21}^k & A_{d22}^k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathcal{N},$$

sont des matrices constantes connues de dimensions appropriées.

Les conditions initiales sont données par :

$$\begin{cases} x^h(r, j) = f_{(r)}(j), & \forall -d_h^k \leq r \leq 0, \quad 0 \leq j \leq T^v, \\ x^h(r, j) = 0, & \forall -d_h^k \leq r \leq 0, \quad j > T^v, \\ x^v(i, u) = g_{(u)}(i), & \forall -d_v^k \leq u \leq 0, \quad 0 \leq i \leq T^h, \\ x^v(i, u) = 0, & \forall -d_v^k \leq u \leq 0, \quad i > T^h. \end{cases} \quad (2.8)$$

où $T^h < \infty$ et $T^v < \infty$ sont des entiers positifs, $f_{(r)}(j)$ et $g_{(u)}(i)$ sont des vecteurs.

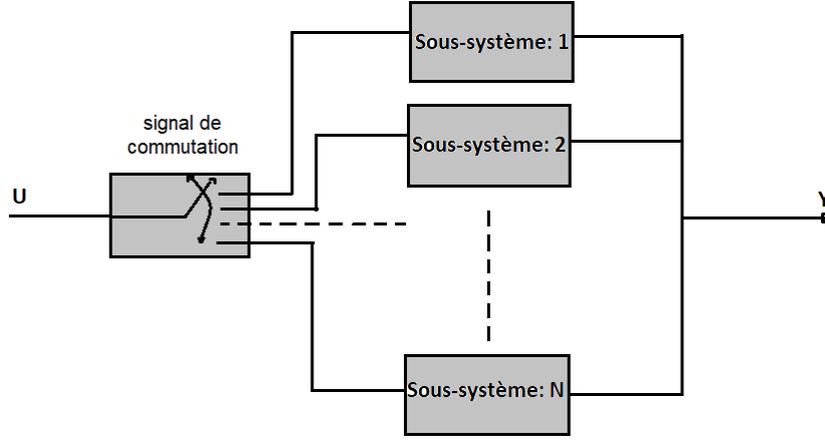


FIGURE 2.3 – Système commuté.

Remarque 2.2. Dans le but de se mettre dans les mêmes conditions que celles de la littérature, on suppose que la valeur de $\sigma(i, j)$ ne dépend que de $i + j$, ce qui indique que pour tout $i + j = m + n$, $\sigma(i, j) = \sigma(m, n)$. Pour plus de détails, nous renvoyons les lecteurs à [Benzaouia et al., 2011]. De plus, notons : $L_s = i_s + j_s$, ($s = 0, 1, 2, \dots$) comme $s^{\text{ème}}$ instant de commutation. Ensuite, la séquence de temps de commutation $\sigma(i, j)$ peut être décrite comme $(L_0, L_1, \dots, L_s, L_{s+1}, \dots)$ avec $(i_0, j_0) = (0, 0)$. Dans de telles situations, le $k^{\text{ème}}$ sous-système est actif sur l'intervalle $[L_s, L_{s+1})$ lorsque $\sigma(i_s, j_s) = k \in \mathcal{N}$.

Avant de poursuivre, nous devons introduire les définitions suivantes de la stabilité exponentielle pour le système 2-D (2.6) et l'approche du temps de séjour moyen qui seront essentielles dans la preuve de nos principaux résultats.

Définition 2.2. [Huang et al., 2013] Sous le signal de commutation $\sigma(i, j)$, le système 2-D (2.1) est dit exponentiellement stable s'il existe des scalaires positifs ϕ et λ tels que :

$$\sum_{i+j=L} \|x(i, j)\|^2 \leq \phi e^{-\lambda(L-L_0)} \sum_{i+j=L_0} \|x(i, j)\|_C^2, \quad L \geq L_0,$$

où

$$\sum_{i+j=L_0} \|x(i, j)\|_C^2 \triangleq \sup_{\substack{\theta^h \in [-d_2^h, 0] \\ \theta^v \in [-d_2^v, 0]}} \sum_{i+j=L_0} \{ \|x^h(i - \theta^h, j)\|^2 + \|x^v(i, j - \theta^v)\|^2, \\ \|s^h(i - \theta_h, j)\|^2 + \|s^v(i, j - \theta_v)\|^2 \}.$$

et

$$\begin{cases} s^h(i, j) = x^h(i + 1, j) - x^h(i, j); \\ s^v(i, j) = x^v(i, j + 1) - x^v(i, j). \end{cases}$$

Remarque 2.3. Il est à noter que la stabilité exponentielle d'un système implique sa stabilité asymptotique mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

Définition 2.3. [Huang et al., 2013] Pour toute $i + j = L \geq L_0 = i_0 + j_0$ et tout signal de commutation $\sigma(i, j)$, soit $N_{\sigma(i, j)(L_0, L)}$ le nombre de commutations de $\sigma(i, j)$ sur l'intervalle $[L_0, L)$.

Si

$$N_{\sigma(i,j)(L_0,L)} \leq N_0 + \frac{(L - L_0)}{T_a}, \quad (2.9)$$

pour $N_0 \geq 0$ et $T_a > 0$, alors T_a est appelé le temps de séjour moyen.

Comme couramment utilisé dans la littérature [Wang et al., 2012, Yang et al., 2018], nous supposons que $N_0 = 0$.

Remarque 2.4. La commutation avec un temps de séjour moyen est une classe typique de signaux de commutation sous contraintes. Selon la définition 2.3, la condition (2.9) avec $N_0 = 0$ est équivalent à :

$$\frac{(L - L_0)}{N_{\sigma(i,j)(L-L_0)}} \geq T_a, \quad (2.10)$$

ce qui signifie qu'en moyenne, le temps de séjour entre deux commutations consécutives n'est pas inférieur à une constante commune T_a .

Notre objectif dans cette section est d'étudier la stabilité du système 2-D discret commuté (2.6) et d'établir de nouvelles conditions de la stabilité exponentielle dépendante du retard qui seront meilleures que celles existantes.

2.3.2 Résultats principaux

Cette sous-section est consacrée au problème de la stabilité exponentielle du système (2.6). Afin d'appliquer l'idée de partitionnement du retard [Meng et al., 2010], nous partitionnons d_{h1} et d_{v1} en m_h et m_v parties, respectivement, comme suit :

$$\begin{cases} d_{h1} = m_h \tau_h, \\ d_{v1} = m_v \tau_v, \end{cases}$$

avec m_h, m_v, τ_h et τ_v étant des entiers positifs. Ensuite, définissons les vecteurs augmentés suivants :

$$\begin{aligned} \Upsilon^h(i, j) &= \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^h(i - \tau_h, j) \\ \vdots \\ x^h(i - (m_h - 1)\tau_h, j) \end{bmatrix}, & \Upsilon^v(i, j) &= \begin{bmatrix} x^v(i, j) \\ x^v(i, j - \tau_v) \\ \vdots \\ x^v(i, j - (m_v - 1)\tau_v) \end{bmatrix}, \\ \xi^h(i, j) &= \begin{bmatrix} \Upsilon^h(i, j) \\ x^h(i - d_{h1}, j) \\ x^h(i - d_h(i), j) \\ x^h(i - d_{h2}, j) \end{bmatrix}, & \xi^v(i, j) &= \begin{bmatrix} \Upsilon^v(i, j) \\ x^v(i, j - d_{v1}) \\ x^v(i, j - d_v(j)) \\ x^v(i, j - d_{v2}) \end{bmatrix}, \\ \xi(i, j) &= \begin{bmatrix} \xi^h(i, j) \\ \xi^v(i, j) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Maintenant, nous présentons le théorème suivant :

Théorème 2.2. [Badie et al., 2019d] Soit le système 2-D discret commuté à retards décrit par le modèle de Roesser (2.6), étant donné les scalaires $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 1$ et les entiers positifs $m_h, m_v, \tau_h, \tau_v, d_{h2}$ et d_{v2} . S'il existe des matrices définies positives $\{P_h^k, Q_{h2}^k, Q_{h3}^k, R_{h1}^k, R_{h2}^k\} \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$, $\{P_v^k, Q_{v2}^k, Q_{v3}^k, R_{v1}^k, R_{v2}^k\} \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$, $Q_{h1}^k \in \mathbb{R}^{(m_h n_h) \times (m_h n_h)}$, $Q_{v1}^k \in \mathbb{R}^{(m_v n_v) \times (m_v n_v)}$ et des matrices $\{M_h^k, N_h^k, S_h^k\} \in \mathbb{R}^{(m_h+3)n_h \times n_h}$, $\{M_v^k, N_v^k, S_v^k\} \in \mathbb{R}^{(m_v+3)n_v \times n_v}$ satisfaisant les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} \Phi^k & M^k & N^k & S^k \\ * & -\bar{\alpha}_1 R_1^k & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{\alpha}_2 R_2^k & 0 \\ * & * & * & -\bar{\alpha}_2 R_2^k \end{bmatrix} < 0, \quad k \in \mathcal{N}, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
 P^k &\leq \mu P^l, & Q_1^k &\leq \mu Q_1^l, \\
 Q_2^k &\leq \mu Q_2^l, & Q_3^k &\leq \mu Q_3^l, \\
 R_1^k &\leq \mu R_1^l, & R_2^k &\leq \mu R_2^l,
 \end{aligned}
 \quad k, l \in \mathcal{N}(k > l), \quad (2.12)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Phi^k &= X^T [-\alpha P^k + \bar{d}_{12} Q_2^k + Q_3^k] X + U_1^T Q_1^k U_1 - \bar{a} U_2^T Q_1^k U_2 \\
 &\quad - \bar{b} X_2^T Q_2^k X_2 - \bar{b} X_3^T Q_3^k X_3 + \text{sym}[M^k(X - X_4) + N^k(X_1 - X_2) + S^k(X_2 - X_3)] \\
 &\quad + E^{kT} P^k E^k + \bar{\tau}(E^k - X)^T R_1^k (E^k - X) + \bar{d}_{12} (E^k - X)^T R_2^k (E^k - X), \\
 P^k &= \begin{bmatrix} P_h^k & 0 \\ * & P_v^k \end{bmatrix}, \quad Q_1^k = \begin{bmatrix} Q_{h1}^k & 0 \\ * & Q_{v1}^k \end{bmatrix}, \quad Q_2^k = \begin{bmatrix} Q_{h2}^k & 0 \\ * & Q_{v2}^k \end{bmatrix}, \quad Q_3^k = \begin{bmatrix} Q_{h3}^k & 0 \\ * & Q_{v3}^k \end{bmatrix}, \\
 R_1^k &= \begin{bmatrix} R_{h1}^k & 0 \\ * & R_{v1}^k \end{bmatrix}, \quad R_2^k = \begin{bmatrix} R_{h2}^k & 0 \\ * & R_{v2}^k \end{bmatrix}, \quad M^k = \begin{bmatrix} M_h^k & 0 \\ 0 & M_v^k \end{bmatrix}, \quad N^k = \begin{bmatrix} N_h^k & 0 \\ 0 & N_v^k \end{bmatrix}, \\
 S^k &= \begin{bmatrix} S_h^k & 0 \\ 0 & S_v^k \end{bmatrix}, \quad \bar{d}_{12} = \begin{bmatrix} d_{h12} I_{n_h} & 0 \\ 0 & d_{v12} I_{n_v} \end{bmatrix}, \quad \bar{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_h I_{n_h} & 0 \\ 0 & \tau_v I_{n_v} \end{bmatrix}, \\
 \bar{a} &= \begin{bmatrix} \alpha^{\tau_h} I_{m_h n_h} & 0 \\ 0 & \alpha^{\tau_v} I_{m_v n_v} \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} \alpha^{d_{h2}} I_{n_h} & 0 \\ 0 & \alpha^{d_{v2}} I_{n_v} \end{bmatrix}, \quad \bar{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{-\tau_h} - 1}{1 - \alpha} I_{n_h} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^{-\tau_v} - 1}{1 - \alpha} I_{n_v} \end{bmatrix}, \\
 \bar{\alpha}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{-d_{h2}} - \alpha^{-d_{h1}}}{1 - \alpha} I_{n_h} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^{-d_{v2}} - \alpha^{-d_{v1}}}{1 - \alpha} I_{n_v} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} I_{n_h} & 0_{n_h, (m_h+2)n_h} & 0_{n_h, (m_v+3)n_v} \\ 0_{n_v, (m_h+3)n_h} & I_{n_v} & 0_{n_v, (m_v+2)n_v} \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 0_{n_h, m_h n_h} & I_{n_h} & 0_{n_h, 2n_h} & 0_{n_h, (m_v+3)n_v} \\ 0_{n_v, (m_h+3)n_h} & 0_{n_v, m_v n_v} & I_{n_v} & 0_{n_v, 2n_v} \end{bmatrix}, \\
 X_2 &= \begin{bmatrix} 0_{n_h, (m_h+1)n_h} & I_{n_h} & 0_{n_h, n_h} & 0_{n_h, (m_v+3)n_v} \\ 0_{n_v, (m_h+3)n_h} & 0_{n_v, (m_v+1)n_v} & I_{n_v} & 0_{n_v, n_v} \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0_{n_h, (m_h+2)n_h} & I_{n_h} & 0_{n_h, (m_v+3)n_v} \\ 0_{n_v, (m_h+3)n_h} & 0_{n_v, (m_v+2)n_v} & I_{n_v} \end{bmatrix}, \\
 X_4 &= \begin{bmatrix} 0_{n_h, n_h} & I_{n_h} & 0_{n_h, (m_h+1)n_h} & 0_{n_h, (m_v+3)n_v} \\ 0_{n_v, (m_h+3)n_h} & 0_{n_v, n_v} & I_{n_v} & 0_{n_v, (m_v+1)n_v} \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} I_{m_h n_h} & 0_{m_h n_h, 3n_h} & 0_{m_h n_h, (m_v+3)n_v} \\ 0_{m_v n_v, (m_h+3)n_h} & I_{m_v n_v} & 0_{m_v n_v, 3n_v} \end{bmatrix}, \\
 U_2 &= \begin{bmatrix} 0_{m_h n_h, n_h} & I_{m_h n_h} & 0_{m_h n_h, 2n_h} & 0_{m_h n_h, (m_v+3)n_v} \\ 0_{m_v n_v, (m_h+3)n_h} & 0_{m_v n_v, n_v} & I_{m_v n_v} & 0_{m_v n_v, 2n_v} \end{bmatrix}, \\
 E^k &= \begin{bmatrix} A_{11}^k & 0_{n_h, m_h n_h} & A_{d11}^k & 0_{n_h, n_h} & A_{12}^k & 0_{n_h, m_v n_v} & A_{d12}^k & 0_{n_h, n_v} \\ A_{21}^k & 0_{n_v, m_h n_h} & A_{d21}^k & 0_{n_v, n_h} & A_{22}^k & 0_{n_v, m_v n_v} & A_{d22}^k & 0_{n_v, n_v} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

alors, le système (2.6) est exponentiellement stable pour tout signal de commutation avec un temps de séjour moyen satisfaisant :

$$T_a > T_a^* = -\frac{\ln(\mu)}{\ln(\alpha)}. \quad (2.13)$$

Preuve. Choisissons la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante pour le système (2.6) :

$$V^k(i, j) = V_h^k(i, j) + V_v^k(i, j), \quad (2.14)$$

avec

$$\begin{aligned}
 V_h^k(i, j) &= \sum_{r=1}^4 V_{hr}^k(i, j), \\
 V_{h1}^k(i, j) &= x^{hT}(i, j) P_h^k x^h(i, j),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{h2}^k(i, j) &= \sum_{p=i-\tau_h}^{i-1} \alpha^{i-p-1} \Upsilon^{hT}(p, j) Q_{h1}^k \Upsilon^h(p, j) + \sum_{p=i-d_{h2}}^{i-1} \alpha^{i-p-1} x^{hT}(p, j) Q_{h3}^k x^h(p, j), \\
 V_{h3}^k(i, j) &= \sum_{q=-d_{h2}+1}^{-m_h \tau_h + 1} \sum_{p=i+q-1}^{i-1} \alpha^{i-p-1} x^{hT}(p, j) Q_{h2}^k x^h(p, j), \\
 V_{h4}^k(i, j) &= \sum_{q=-\tau_h}^{-1} \sum_{p=i+p}^{i-1} \alpha^{i-p-1} s^{hT}(p, j) R_{h1}^k s^h(p, j) + \sum_{q=-d_{h2}}^{m_h \tau_h - 1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \alpha^{i-p-1} s^{hT}(p, j) R_{h2}^k s^h(p, j),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 V_v^k(i, j) &= \sum_{r=1}^4 V_{vr}^k(i, j), \\
 V_{v1}^k(i, j) &= x^{vT}(i, j) P_v^k x^v(i, j), \\
 V_{v2}^k(i, j) &= \sum_{p=j-\tau_v}^{j-1} \alpha^{j-p-1} \Upsilon^{vT}(i, p) Q_{v1}^k \Upsilon^v(i, p) + \sum_{p=i-d_{v2}}^{j-1} \alpha^{j-p-1} x^{vT}(i, p) Q_{v3}^k x^v(i, p), \\
 V_{v3}^k(i, j) &= \sum_{q=-d_{v2}+1}^{-m_v \tau_v + 1} \sum_{p=j+q-1}^{j-1} \alpha^{j-p-1} x^{vT}(i, p) Q_{v2}^k x^v(i, p), \\
 V_{v4}^k(i, j) &= \sum_{q=-\tau_v}^{-1} \sum_{p=j+p}^{j-1} \alpha^{j-p-1} s^{vT}(i, p) R_{v1}^k s^v(i, p) + \sum_{q=-d_{v2}}^{m_v \tau_v - 1} \sum_{p=j+p}^{j-1} \alpha^{j-p-1} s^{vT}(i, p) R_{v2}^k s^v(i, p).
 \end{aligned}$$

En terme de :

$$\begin{aligned}
 \Delta V_h^k(i, j) &= V_h^k(i+1, j) - \alpha V_h^k(i, j), \\
 \Delta V_v^k(i, j) &= V_v^k(i, j+1) - \alpha V_v^k(i, j),
 \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{h1}^k(i, j) &= x^{hT}(i+1, j) P_h^k x^h(i+1, j) - \alpha x^{hT}(i, j) P_h^k x^h(i, j), \\
 \Delta V_{h2}^k(i, j) &= \Upsilon^{hT}(i, j) Q_{h1}^k \Upsilon^h(i, j) - \alpha^{\tau_h} \Upsilon^{hT}(i-\tau_h, j) Q_{h1}^k \Upsilon^h(i-\tau_h, j), \\
 &\quad + x^{hT}(i, j) Q_{h2}^k x^h(i, j) - \alpha^{d_{h2}} x^{hT}(i-d_{h2}, j) Q_{h2}^k x^h(i-d_{h2}, j), \\
 \Delta V_{h3}^k(i, j) &\leq d_{h12} x^{hT}(i, j) Q_{h3}^k x^h(i, j) - \alpha^{d_{h2}} x^{hT}(i-d_h(i), j) Q_{h3}^k x^h(i-d_h(i), j), \\
 \Delta V_{h4}^k(i, j) &= s^{hT}(i, j) (\tau_h R_{h1}^k + d_{h12} R_{h2}^k) s^h(i, j) - \sum_{p=i-\tau_h}^{i-1} \alpha^{i-p} s^{hT}(p, j) R_{h1}^k s^h(p, j) \\
 &\quad - \sum_{p=i-d_h(i)}^{i-m_h \tau_h - 1} \alpha^{i-p} s^{hT}(p, j) R_{h2}^k s^h(p, j) - \sum_{p=i-d_{h2}}^{i-d_h(i)-1} \alpha^{i-p} s^{hT}(p, j) R_{h2}^k s^h(p, j),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{v1}^k(i, j) &= x^{vT}(i, j+1) P_v^k x^v(i, j+1) - \alpha x^{vT}(i, j) P_v^k x^v(i, j), \\
 \Delta V_{v2}^k(i, j) &= \Upsilon^{vT}(i, j) Q_{v1}^k \Upsilon^v(i, j) - \alpha^{\tau_v} \Upsilon^{vT}(i, j-\tau_v) Q_{v1}^k \Upsilon^v(i, j-\tau_v), \\
 &\quad + x^{vT}(i, j) Q_{v2}^k x^v(i, j) - \alpha^{d_{v2}} x^{vT}(i, j-d_{v2}) Q_{v2}^k x^v(i, j-d_{v2}), \\
 \Delta V_{v3}^k(i, j) &\leq d_{v12} x^{vT}(i, j) Q_{v3}^k x^v(i, j) - \alpha^{d_{v2}} x^{vT}(i, j-d_v(j)) Q_{v3}^k x^v(i, j-d_v(j)), \\
 \Delta V_{v4}^k(i, j) &= s^{vT}(i, j) (\tau_v R_{v1}^k + d_{v12} R_{v2}^k) s^v(i, j) - \sum_{p=j-\tau_v}^{j-1} \alpha^{j-p} s^{vT}(i, p) R_{v1}^k s^v(i, p)
 \end{aligned}$$

$$- \sum_{p=j-d_v(j)}^{j-m_v\tau_v-1} \alpha^{j-p} s^{vT}(i,p) R_{v2}^k s^v(i,p) - \sum_{p=j-d_{v2}}^{j-d_v(j)-1} \alpha^{j-p} s^{vT}(i,p) R_{v2}^k s^v(i,p).$$

Selon les expressions de $s^h(i,j)$ et $s^v(i,j)$ dans définition 2.2, et pour toutes les matrices M_h^k , M_v^k , N_h^k , N_v^k , S_h^k et S_v^k , ($k \in \mathcal{N}$), les équations suivantes sont valables :

$$0 = 2\xi^{hT}(i,j) M_h^k \left[x^h(i,j) - x^h(i-\tau_h, j) - \sum_{p=i-\tau_h}^{i-1} s_h(p,j) \right], \quad (2.15)$$

$$0 = 2\xi^{vT}(i,j) M_v^k \left[x^v(i,j) - x^v(i, j-\tau_v) - \sum_{p=j-\tau_v}^{j-1} s_v(i,p) \right], \quad (2.16)$$

$$0 = 2\xi^{hT}(i,j) N_h^k \left[x^h(i-d_1^h, j) - x^h(i-d^h(i), j) - \sum_{p=i-d^h(i)}^{i-d_1^h-1} s_h(p,j) \right], \quad (2.17)$$

$$0 = 2\xi^{vT}(i,j) N_v^k \left[x^v(i, j-d_1^v) - x^v(i, j-d^v(j)) - \sum_{p=j-d^v(j)}^{j-d_1^v-1} s_v(i,p) \right], \quad (2.18)$$

$$0 = 2\xi^{hT}(i,j) S_h^k \left[x^h(i-d^h(i), j) - x^h(i-d_2^h, j) - \sum_{p=i-d_2^h}^{i-d^h(i)-1} s_h(p,j) \right], \quad (2.19)$$

$$0 = 2\xi^{vT}(i,j) S_v^k \left[x^v(i, j-d^v(j)) - x^v(i, j-d_2^v) - \sum_{p=j-d_2^v}^{j-d^v(j)-1} s_v(i,p) \right]. \quad (2.20)$$

En ajoutant les égalités (2.15), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) et (2.20) à $\Delta V_h^k(i,j) + \Delta V_v^k(i,j)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \Delta V^k(i,j) &= \Delta V_h^k(i,j) + \Delta V_v^k(i,j) \\ &\leq \xi^T(i,j) \{ \Phi^k + \bar{\alpha}_1 M^k (R_1^k)^{-1} M^{kT} + \bar{\alpha}_2 N^k (R_2^k)^{-1} N^{kT} + \bar{\alpha}_3 S^k (R_2^k)^{-1} S^{kT} \} \xi(i,j) \\ &\quad - \sum_{p=i-\tau_h}^{i-1} \left[\xi^{hT}(i,j) M_h^k + \alpha^{i-p} s^{hT}(p,j) R_{h1}^k \right] (\alpha^{i-p} R_{h1}^k)^{-1} \\ &\quad \quad \times \left[M_h^{kT} \xi^h(i,j) + \alpha^{i-p} R_{h1}^k s^h(p,j) \right] \\ &\quad - \sum_{p=j-\tau_v}^{j-1} \left[\xi^{vT}(i,j) M_v^k + \alpha^{j-p} s^{vT}(i,p) R_{v1}^k \right] (\alpha^{j-p} R_{v1}^k)^{-1} \\ &\quad \quad \times \left[M_v^{kT} \xi^v(i,j) + \alpha^{j-p} R_{v1}^k s^j(i,p) \right] \\ &\quad - \sum_{p=i-d^h(i)}^{i-d_1^h-1} \left[\xi^{hT}(i,j) N_h^k + \alpha^{i-p} s^{hT}(p,j) R_{h2}^k \right] (\alpha^{i-p} R_{h2}^k)^{-1} \\ &\quad \quad \times \left[N_h^{kT} \xi^h(i,j) + \alpha^{i-p} R_{h2}^k s^h(p,j) \right] \\ &\quad - \sum_{p=j-d^v(j)}^{j-d_1^v-1} \left[\xi^{vT}(i,j) N_v^k + \alpha^{j-p} s^{vT}(i,p) R_{v2}^k \right] (\alpha^{j-p} R_{v2}^k)^{-1} \\ &\quad \quad \times \left[N_v^{kT} \xi^v(i,j) + \alpha^{j-p} R_{v2}^k s^v(i,p) \right] \\ &\quad - \sum_{p=i-d_2^h}^{i-d^h(i)-1} \left[\xi^{hT}(i,j) S_h^k + \alpha^{i-p} s^{hT}(p,j) R_{h2}^k \right] (\alpha^{i-p} R_{h2}^k)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [S_h^{kT} \xi^h(i, j) + \alpha^{i-p} R_{h2}^k s^h(p, j)] \\
 & - \sum_{p=j-d_2^v}^{j-d^v(j)-1} [\xi^{vT}(i, j) S_v^k + \alpha^{j-p} s^{vT}(i, p) R_{v2}^k] (\alpha^{j-p} R_{v2}^k)^{-1} \\
 & \quad \times [S_v^{kT} \xi^v(i, j) + \alpha^{j-p} R_{v2}^k s^v(i, p)]. \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

Notant que les six derniers termes dans (2.21) sont négatifs, on obtient alors :

$$\Delta V^k(i, j) < \xi^T(i, j) \{ \Phi^k + \bar{\alpha}_1 M^k (R_1^k)^{-1} M^{kT} + \bar{\alpha}_2 N^k (R_2^k)^{-1} N^{kT} + \bar{\alpha}_3 S^k (R_2^k)^{-1} S^{kT} \} \xi(i, j).$$

Selon le complément de Schur (Lemme 1.4), la faisabilité de (2.11) implique :

$$V_h^k(i+1, j) + V_v^k(i, j+1) < \alpha V_h^k(i, j) + \alpha V_v^k(i, j). \tag{2.22}$$

Ensuite, à partir de (2.22), nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i+j=L} V^k(i, j) &= V_h^k(0, L) + V_h^k(1, L-1) + \dots + V_h^k(L-1, 1) + V_h^k(L, 0) \\
 & \quad + V_v^k(L, 0) + V_h^k(L-1, 1) + \dots + V_v^k(1, L-1) + V_h^k(L, 0) \\
 & < \alpha (V_h^k(-1, L) + V_v^k(L, -1) + V_h^k(0, L-1) + V_v^k(L-1, 0) + \dots \\
 & \quad + V_h^k(L-2, 1) + V_v^k(1, L-2) + V_h^k(L-1, 0) + V_v^k(0, L-1)) \\
 & = \alpha \sum_{i+j=L-1} V^k(i, j) \\
 & < \alpha^{L-(L-2)} \sum_{i+j=L-2} V^k(i, j) \\
 & < \dots \\
 & < \alpha^{L-R} \sum_{i+j=R} V^k(i, j). \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

En utilisant (2.12) et (2.14), au point de commutation L_s , on obtient :

$$\sum_{i+j=L_s} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j) \leq \mu \sum_{i+j=L_s} V^{\sigma(i_{s-1}, j_{s-1})}(i, j). \tag{2.24}$$

Par conséquent, il résulte de (2.23) et (2.24) que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i+j=L} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j) &< \alpha^{L-L_s} \sum_{i+j=L_s} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j) \\
 &< \mu \alpha^{L-L_s} \sum_{i+j=L_{s-1}} V^{\sigma(i_{s-1}, j_{s-1})}(i, j) \\
 &< \dots \\
 &< \mu^{N_\sigma^{(L_0, L)}} \alpha^{L-L_0} \sum_{i+j=L_0} V^{\sigma(i_0, j_0)}(i, j) \\
 &< e^{-\lambda(L-L_0)} \sum_{i+j=L_0} V^{\sigma(i_0, j_0)}(i, j), \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

avec $\lambda = -\ln(\alpha) - \ln(\mu/\tau)$. En vu de (2.14), il existe deux constantes positives ϕ_1 et ϕ_2 ($\phi_1 \leq \phi_2$) telles que

$$\phi_1 \sum_{i+j=L} \|x(i, j)\|^2 \leq \sum_{i+j=L} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j), \tag{2.26}$$

$$\phi_2 \sum_{i+j=L_0} \|x(i, j)\|_c^2 \geq \sum_{i+j=L_0} V^{\sigma(i_0, j_0)}(i, j). \tag{2.27}$$

En combinant (2.25), (2.26) et (2.27), on obtient :

$$\sum_{i+j=L} \|x(i, j)\|^2 < \phi e^{-\lambda(L-L_0)} \sum_{i+j=L_0} \|x(i, j)\|_c^2,$$

avec $\phi = \phi_2/\phi_1$.

Par conséquent, selon la définition 2.2, le système 2-D discret commuté à retards (2.6) est exponentiellement stable. La preuve est terminée. \square

Remarque 2.5. Lorsque $\mu = 1$, l'inégalité $T_a > T_a^* = -\ln(\mu)/\ln(\alpha)$ devient $T_a > T_a^* = 0$, ce qui signifie que le signal de commutation $\sigma(i, j)$ est arbitraire. Dans ce cas, (2.12) devient $P^k = P$, $Q_1^k = Q_1$, $Q_2^k = Q_2$, $Q_3^k = Q_3$, $R_1^k = R_1$, $R_2^k = R_2$, $\forall k \in \mathcal{N}$, ce qui signifie que les N sous-systèmes emploient une fonction de Lyapunov-Krasovskii commune.

Remarque 2.6. Il convient de noter que l'utilisation de la méthode de partitionnement du retard implique l'introduction des deux vecteurs augmentés $\Upsilon^h(i, j)$ et $\Upsilon^v(i, j)$, ce qui conduit à exploiter plus d'informations sur les tailles des retards $d_h(i)$ et $d_v(j)$. En plus, la complexité de calcul dépend des nombres de partitionnement de retard m_h et m_v , de sorte que lorsque les nombres de partitionnement de retard augmentent, le nombre de variables de décisions augmente aussi. De plus, la formulation de la matrice devient plus complexe et le coût de calcul augmente. Par conséquent, m_h et m_v doivent être choisis de manière appropriée en considérant un compromis entre la conservatisme des résultats et le coût de calcul.

Remarque 2.7. Il est à noter que le résultat du théorème 2.2 donne une condition suffisante dépendante du retard pour garantir la stabilité exponentielle du système 2-D discret commuté (2.6). Lors du développement du résultat dépendant du retard de théorème 2.2, aucune transformation de modèle n'est effectuée pour le système (2.6). De plus, nous avons adopté l'idée de partitionnement de retard ainsi que nous avons introduit quelques matrices de pondération libres, qui aident à éviter le conservatisme possible.

Remarque 2.8. Il est à noter que lors de la dérivation du résultat du théorème 2.2, les bornes inférieures des retards sont supposées être $d_{h1} = m_h \tau_h \geq 1$, $d_{v1} = m_v \tau_v \geq 1$. Cependant, dans de nombreuses applications, les bornes inférieures des retards pourraient être nulles, dans cette situation, nous proposons le résultat de théorème 2.3.

Théorème 2.3. [Badie et al., 2019d] Considérons le système 2-D discret commuté (2.6) avec $0 \leq d_h(i) \leq d_{h2}$, $0 \leq d_v(j) \leq d_{v2}$, étant donné les scalaires $0 < \alpha < 1$ et $\mu \geq 1$. S'il existe des matrices définies positives $\{P_h^k, Q_{h2}^k, Q_{h3}^k, R_h^k\} \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$, $\{P_v^k, Q_{v2}^k, Q_{v3}^k, R_v^k\} \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$, et des matrices $\{N_h^k, S_h^k\} \in \mathbb{R}^{3n_h \times n_h}$, $\{N_v^k, S_v^k\} \in \mathbb{R}^{3n_v \times n_v}$ satisfaisant les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}^k & N^k & S^k \\ * & -\bar{\alpha}_3 R^k & 0 \\ * & * & -\bar{\alpha}_3 R^k \end{bmatrix} < 0, \quad k \in \mathcal{N}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} P^k &\leq \mu P^l, & Q_2^k &\leq \mu Q_2^l, \\ Q_3^k &\leq \mu Q_3^l, & R^k &\leq \mu R^l, \end{aligned} \quad k, l \in \mathcal{N} (k > l). \quad (2.29)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^k &= \bar{X}^T [-\alpha P^k + (\bar{d}_2 + I)Q_2^k + Q_3^k] \bar{X} - \bar{b} \bar{X}_2^T Q_2^k \bar{X}_2 - \bar{b} \bar{X}_3^T Q_3^k \bar{X}_3 \\ &\quad + \text{sym}[N^k(\bar{X} - \bar{X}_2) + S^k(\bar{X}_2 - \bar{X}_3)] + \bar{E}^{kT} P^k \bar{E}^k + \bar{d}_2(\bar{E}^k - \bar{X})^T R^k(\bar{E}^k - \bar{X}), \\ R^k &= \begin{bmatrix} R_h^k & 0 \\ 0 & R_v^k \end{bmatrix}, \quad \bar{d}_2 = \begin{bmatrix} d_{h2} I_{n_h} & 0 \\ 0 & d_{v2} I_{n_v} \end{bmatrix}, \quad \bar{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{-d_{h2}} - 1}{1 - \alpha} I_{n_h} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^{-d_{v2}} - 1}{1 - \alpha} I_{n_v} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \begin{bmatrix} I_{n_h} & 0_{n_h, 2n_h} & 0_{n_h, 3n_v} \\ 0_{n_v, 3n_h} & I_{n_v} & 0_{n_v, 2n_v} \end{bmatrix}, & \bar{X}_2 &= \begin{bmatrix} 0_{n_h, n_h} & I_{n_h} & 0_{n_h, n_h} & 0_{n_h, 3n_v} \\ 0_{n_v, 3n_h} & 0_{n_v, n_v} & I_{n_v} & 0_{n_v, n_v} \end{bmatrix}, \\ \bar{X}_3 &= \begin{bmatrix} 0_{n_h, 2n_h} & I_{n_h} & 0_{n_h, 3n_v} \\ 0_{n_v, 3n_h} & 0_{n_v, 2n_v} & I_{n_v} \end{bmatrix}, & \bar{E}^k &= \begin{bmatrix} A_{11}^k & 0_{n_h, n_h} & A_{d11}^k & A_{12}^k & 0_{n_h, n_v} & A_{d12}^k \\ A_{21}^k & 0_{n_v, n_h} & A_{d21}^k & A_{22}^k & 0_{n_v, n_v} & A_{d22}^k \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Alors, le système (2.6) est exponentiellement stable pour tout signal de commutation avec un temps de séjour moyen satisfaisant (2.13).

Preuve. En choisissant la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$\bar{V}^k(i, j) = \bar{V}_h^k(i, j) + \bar{V}_v^k(i, j),$$

où

$$\begin{aligned}\bar{V}_h^k(i, j) &= x^{hT}(i, j)P_h^k x^h(i, j) + \sum_{q=-d_{h2}+1}^1 \sum_{p=i+q-1}^{i-1} \alpha^{i-p-1} x^{hT}(p, j)Q_{h2}^k x^h(p, j) \\ &+ \sum_{p=i-d_{h2}}^{i-1} \alpha^{i-p-1} x^{hT}(p, j)Q_{h3}^k x^h(p, j) + \sum_{q=-d_{h2}}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \alpha^{i-p-1} s^{hT}(p, j)R_h^k s^h(p, j), \\ \bar{V}_v^k(i, j) &= x^{vT}(i, j)P_v^k x^v(i, j) + \sum_{q=-d_{v2}+1}^1 \sum_{p=j+q-1}^{j-1} \alpha^{j-p-1} x^{vT}(i, p)Q_{v2}^k x^v(i, p) \\ &+ \sum_{p=j-d_{v2}}^{j-1} \alpha^{j-p-1} x^{vT}(i, p)Q_{v3}^k x^v(i, p) + \sum_{q=-d_{v2}}^{-1} \sum_{p=j+q}^{j-1} \alpha^{j-p-1} s^{vT}(i, p)R_v^k s^v(i, p),\end{aligned}$$

et en utilisant les mêmes étapes de la preuve du théorème 2.2 discutées précédemment, on peut facilement arriver au théorème ci-avant. Les détails de la preuve du théorème 2.3 sont donc omis. \square

Il est également plus intéressant de considérer certains cas particuliers des résultats précédents. Notant que lorsque : $d_{h1} = d_{h2} = d_h$ et $d_{v1} = d_{v2} = d_v$, nous pouvons conclure que le système (2.6) devient un système 2-D discret commuté à retards constants, qui a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A^{\sigma(i, j)} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + A_d^{\sigma(i, j)} \begin{bmatrix} x^h(i-d_h, j) \\ x^v(i, j-d_v) \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Sur la base du théorème 2.2, nous pouvons dériver le corollaire suivant :

Corollaire 2.1. [Badie et al., 2019d] *Considérons le système 2-D discret commuté à retards constants (2.30), étant donné les scalaires $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 1$ et les entiers positifs m_h , m_v , τ_h et τ_v . S'il existe des matrices définies positives $\{P_h^k, R_{h1}^k\} \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$, $\{P_v^k, R_{v1}^k\} \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$, $Q_{h1}^k \in \mathbb{R}^{(m_h n_h) \times (m_h n_h)}$, $Q_{v1}^k \in \mathbb{R}^{(m_v n_v) \times (m_v n_v)}$ et des matrices $M_h^k \in \mathbb{R}^{(m_h+1)n_h \times n_h}$, $M_v^k \in \mathbb{R}^{(m_v+1)n_v \times n_v}$ satisfaisant les LMIs suivantes :*

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}^k & M^k \\ * & -\bar{\alpha}_1 R^k \end{bmatrix} < 0, \quad k \in \mathcal{N}, \quad (2.31)$$

$$P^k \leq \mu P^l, \quad Q_1^k \leq \mu Q_1^l, \quad R^k \leq \mu R^l, \quad k, l \in \mathcal{N} (k > l). \quad (2.32)$$

où

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}^k &= \hat{X}^T[-\alpha P^k]\hat{X} + \hat{U}_1^T Q_1^k \hat{U}_1 - \bar{a} \hat{U}_2^T Q_1^k \hat{U}_2 + \text{sym}[M^k(\hat{X} - \hat{X}_1)] \\ &\quad + \hat{E}^{kT} P^k \hat{E}^k + \bar{\tau}(\hat{E}^k - \hat{X})^T R_1^k (\hat{E}^k - \hat{X}),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \begin{bmatrix} I_{n_h} & 0_{n_h, m_h n_h} & 0_{n_h, (m_v+1)n_v} \\ 0_{n_v, (m_h+1)n_h} & I_{n_v} & 0_{n_v, m_v n_v} \end{bmatrix}, & \hat{X}_1 &= \begin{bmatrix} 0_{n_h, n_h} & I_{n_h} & 0_{n_h, (m_h-1)n_h} & 0_{n_h, (m_v+1)n_v} \\ 0_{n_v, (m_h+1)n_h} & 0_{n_v, n_v} & I_{n_v} & 0_{n_v, (m_v-1)n_v} \end{bmatrix}, \\ \hat{U}_1 &= \begin{bmatrix} I_{m_h n_h} & 0_{m_h n_h, n_h} & 0_{m_h n_h, (m_v+1)n_v} \\ 0_{m_v n_v, (m_h+1)n_h} & I_{m_v n_v} & 0_{m_v n_v, n_v} \end{bmatrix}, & \hat{U}_2 &= \begin{bmatrix} 0_{m_h n_h, n_h} & I_{m_h n_h} & 0_{m_h n_h, (m_v+1)n_v} \\ 0_{m_v n_v, (m_h+1)n_h} & 0_{m_v n_v, n_v} & I_{m_v n_v} \end{bmatrix}, \\ \hat{E}^k &= \begin{bmatrix} A_{11}^k & 0_{n_h, (m_h-1)n_h} & A_{d11}^k & A_{12}^k & 0_{n_h, (m_v-1)n_v} & A_{d12}^k \\ A_{21}^k & 0_{n_v, (m_h-1)n_h} & A_{d21}^k & A_{22}^k & 0_{n_v, (m_v-1)n_v} & A_{d22}^k \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Alors, le système (2.30) est exponentiellement stable pour tout signal de commutation avec un temps de séjour moyen satisfaisant (2.13).

Preuve. La preuve du corollaire 2.1 peut être obtenue en utilisant la fonction Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$\hat{V}^k(i, j) = \hat{V}_h^k(i, j) + \hat{V}_v^k(i, j), \quad (2.33)$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{V}_h^k(i, j) &= x^{hT}(i, j) P_h^k x^h(i, j) + \sum_{p=i-m_h \tau_h}^{i-1} \alpha^{i-p-1} \Upsilon^{hT}(p, j) Q_{h1}^k \Upsilon^h(p, j) \\ &\quad \sum_{q=-\tau_h}^{-1} \sum_{p=i+p}^{i-1} \alpha^{i-p-1} s^{hT}(p, j) R_{h1}^k s^h(p, j), \\ \hat{V}_v^k(i, j) &= x^{vT}(i, j) P_v^k x^v(i, j) + \sum_{p=j-m_v \tau_v}^{j-1} \alpha^{j-p-1} \Upsilon^{vT}(i, p) Q_{v1}^k \Upsilon^v(i, p) \\ &\quad \sum_{q=-\tau_v}^{-1} \sum_{p=j+p}^{j-1} \alpha^{j-p-1} s^{vT}(i, p) R_{v1}^k s^v(i, p),\end{aligned}$$

et en suivant les mêmes démarches de la preuve du théorème 2.2. \square

En absence des retards, le système 2-D discret commuté (2.6) devient :

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A^{\sigma(i, j)} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Sur la base de (2.14), nous construisons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_h^k(i, j) = x^{hT}(i, j) P_h^k x^h(i, j), \quad V_v^k(i, j) = x^{vT}(i, j) P_v^k x^v(i, j).$$

Ainsi, nous obtenons le corollaire suivant pour le système (2.34) :

Corollaire 2.2. [Badie et al., 2019d] *Considérons le système 2-D discret commuté sans retards (2.34), étant donné les scalaires $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 1$. S'il existe des matrices définies positives $P_h^k \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$, $P_v^k \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$, satisfaisant les LMIs suivantes :*

$$\begin{aligned}A^{kT} P^k A^k - \alpha P^k &< 0, \quad k \in \mathcal{N}, \\ P^k &\leq \mu P^l, \quad k, l \in \mathcal{N} (k > l).\end{aligned} \quad (2.35)$$

Alors, le système (2.34) est exponentiellement stable pour tout signal de commutation avec un temps de séjour moyen satisfaisant (2.13).

Remarque 2.9. Selon le complément de Schur (Lemme 1.4), la condition LMI (2.35) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} -\alpha P_h^k & 0 & A_{11}^{kT} P_h^k & A_{21}^{kT} P_v^k \\ * & -\alpha P_v^k & A_{12}^{kT} P_h^k & A_{22}^{kT} P_v^k \\ * & * & -P_h^k & 0 \\ * & * & * & -P_v^k \end{bmatrix} < 0. \quad (2.36)$$

Ensuite, en multipliant la LMI (2.36) à gauche et à droite par $\text{diag}\{(P_h^k)^{-1}, (P_v^k)^{-1}, (P_h^k)^{-1}, (P_v^k)^{-1}\}$ et en définissant les variables $X_1^k = (P_h^k)^{-1}$, $X_2^k = (P_v^k)^{-1}$, nous obtenons la condition LMI proposée dans le théorème 1 dans [Xinag et al., 2013].

Remarque 2.10. Généralement, il existe deux méthodes pour obtenir la valeur de μ : l'une consiste à choisir d'abord le scalaire μ , puis à vérifier la faisabilité des contraintes LMIs. Si ces LMIs n'ont pas de solution, nous augmentons progressivement la valeur de μ jusqu'à ce que nous obtenions la faisabilité, et finalement nous choisissons la plus petite valeur de μ qui garantit la faisabilité des conditions LMIs. L'autre méthode consiste à résoudre quelques LMIs, puis à trouver la valeur de μ en fonction des solutions obtenues. La deuxième méthode peut ne pas conduire à un μ approprié.

2.3.3 Exemples numériques

Pour illustrer les résultats proposés et montrer leurs avantages par rapport aux résultats donnés dans la littérature, nous considérons deux exemples numériques.

Exemple 2.3. Considérons le système 2-D discret commuté utilisé dans [Huang et al., 2013], qui se compose de deux sous-systèmes ($N = 2$). Pour le sous-système 1, les paramètres sont donnés par :

$$A^1 = \left[\begin{array}{cc|c} 0.8 & -0.6 & 0.018 \\ 0.15 & 0.04 & 0 \\ \hline 0.025 & 0 & 0.12 \end{array} \right], \quad A_d^1 = \left[\begin{array}{cc|c} 0.12 & 0 & 0.06 \\ 0.12 & 0.03 & 0 \\ \hline 0.035 & 0.12 & 0.04 \end{array} \right],$$

tandis que les paramètres du deuxième sous-système sont donnés par :

$$A^2 = \left[\begin{array}{cc|c} 0.9 & -0.5 & 0.02 \\ 0.1 & 0.3 & 0 \\ \hline 0.02 & 0 & 0.09 \end{array} \right], \quad A_d^2 = \left[\begin{array}{cc|c} 0.1 & 0 & 0.05 \\ 0.1 & 0.02 & 0 \\ \hline 0.03 & 0.12 & 0.03 \end{array} \right].$$

Les retards sont donnés par :

$$d_h(i) = 3 + \sin\left(\frac{\pi i}{2}\right), \quad d_v(j) = 4 + \sin\left(\frac{\pi j}{2}\right),$$

ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} 2 \leq d_h(i) \leq 4; \\ 3 \leq d_v(j) \leq 5. \end{cases} \quad (2.37)$$

Afin de comparer nos résultats avec ceux de [Huang et al., 2013], nous utilisons le théorème 2.2 avec $\mu = 8.4841$, le Tableau 2.2 donne les résultats de la comparaison sur l'intervalle de α pour le théorème 1 dans [Huang et al., 2013] et le théorème 2.2 avec différentes valeurs de m_h et m_v . Grâce à la comparaison des résultats donnés, on peut constater que les résultats du théorème 2.2 pour les systèmes 2-D discrets commutés sont moins conservatifs que ceux de [Huang et al., 2013].

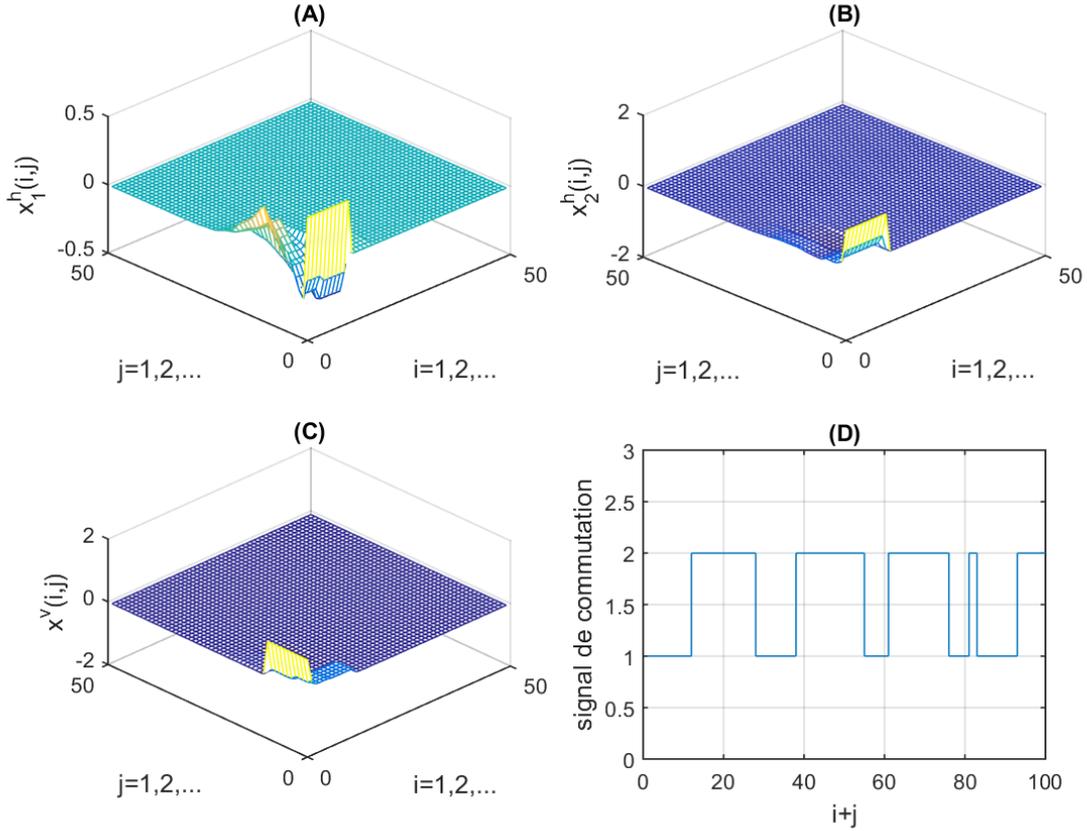


FIGURE 2.4 – Résultats de simulation. (A) : Trajectoire d'état de $x_1^h(i, j)$; (B) : Trajectoire d'état de $x_2^h(i, j)$; (C) : Trajectoire d'état de $x^v(i, j)$; (D) : Signal de commutation $\sigma(i, j)$.

Afin de vérifier les résultats, nous choisissons $\alpha = 0.7639$ et à partir de (2.13) nous obtenons $T_a > T_a^* = -\ln(\mu)/\ln(\alpha) = 7,94$, en outre, supposons que les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} x^h(r, j) = [0.4 & 1.1]^T, & \forall -4 \leq r \leq 0, \quad 0 \leq j \leq 10, \\ x^h(r, j) = [0 & 0]^T, & \forall -4 \leq r \leq 0, \quad j > 10, \\ x^v(i, u) = 1.1, & \forall -5 \leq u \leq 0, \quad 0 \leq i \leq 10, \\ x^v(i, u) = 0, & \forall -5 \leq u \leq 0, \quad i > 10. \end{cases}$$

Les résultats de la simulation sont présentés dans la Figure 2.4. D'après la Figure 2.4 (A), (B) et (C). On peut voir que les états horizontal et vertical du système considéré convergent vers zéro, avec un signal de commutation donné par la Figure 2.4 (D) satisfaisant un temps de séjour moyen : $T_a = 9.4$. Les résultats de la simulation impliquent donc que l'objectif souhaité est bien atteint.

Remarque 2.11. Selon (2.9) et (2.13), on peut voir que le temps de séjour moyen T_a dépend du paramètre α , de sorte que lorsque α diminue, T_a diminue également, ce qui augmente la complexité du signal de commutation. Dans l'exemple 2.3, il est noté que dans le Tableau 2.2, le théorème 2.2 assure des intervalles de α plus larges que ceux obtenus par le théorème 1 dans [Huang et al., 2013], ce qui signifie que notre approche proposée est moins conservatrice que [Huang et al., 2013].

Tableau 2.2 – Résultats de comparaison pour l'exemple 2.3 .

Méthodes	Intervalle de α
Théorème 1 [Huang et al., 2013]	[0.810, 1)
Théorème 2.2 ($m_h = 1, m_v = 1$) [Badie et al., 2019d]	[0.7644, 1)
Théorème 2.2 ($m_h = 2, m_v = 3$) [Badie et al., 2019d]	[0.7639, 1)

Exemple 2.4. Considérons le système 2-D discret commuté (2.6) avec $N = 2$ et les paramètres suivants

sous-système 1 :

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0.52 \end{bmatrix}, \quad A_d^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.03 & -0.04 \end{bmatrix},$$

sous-système 2 :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0.58 \end{bmatrix}, \quad A_d^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.02 & -0.04 \end{bmatrix}.$$

Tableau 2.3 – Résultats de comparaison pour l'exemple 2.4. (Retards variables)

Méthodes	$d_1 = 2$	$d_1 = 4$	$d_1 = 6$
Théorème 1 [Huang et al., 2013]	4	6	8
Théorème 2.2 ($m_h = m_v = 1$) [Badie et al., 2019d]	12	12	13
Théorème 2.2 ($m_h = m_v = d_{h1} = d_{v1}$) [Badie et al., 2019d]	12	13	14

Afin de comparer nos résultats avec [Huang et al., 2013], nous choisissons ($\alpha = 0.9665, \mu = 2$), le Tableau 2.3 donne les résultats de la comparaison sur la limite supérieure des retards ($d_{h2} = d_{v2}$) selon le théorème 1 dans [Huang et al., 2013] et le théorème 2.2 avec différents valeurs de partitions (m_h et m_v) et $d_1 = d_{h1} = d_{v1}$. Grâce à la comparaison dans le Tableau 2.3, il est clair que la méthode développée dans notre théorème donne des résultats moins conservatifs que les conditions présentées dans le théorème 1 dans [Huang et al., 2013].

Pour démontrer l'avantage du corollaire 2.1 sur le corollaire 1 dans [Huang et al., 2013], nous considérons le cas où les retards sont constants, c'est-à-dire $d_{h1} = d_{h2} = d_h$ et $d_{v1} = d_{v2} = d_v$. Pour ($\alpha = 0.85, \mu = 2$), les régions possibles de retards selon le corollaire 1 [Huang et al., 2013], (indiqué par ' \times ') et le corollaire 2.1 avec $m_h = m_v = 1$ (indiqué par ' \circ ') sont illustrés dans la Figure 2.5. On peut voir clairement que les conditions de la stabilité proposées dans le corollaire 2.1 donnent le plus grand domaine d'application.

Dans le cas où les retards sont constants avec ($d_h(i) = d_v(j) = h$), en choisissant $\mu = 2$ et en appliquant le corollaire 1 dans [Huang et al., 2013], et corollaire 2.1 pour $m_h = m_v = 1$ et $m_h = m_v = h$. Le Tableau 2.4 présente les limites maximales de reatrd obtenues pour différentes valeurs de α . Le Tableau 2.4 montre clairement que notre méthode donne des limites de retard beaucoup plus grandes que le résultat de [Huang et al., 2013]. On peut également voir que ces limites augmentent encore lorsque m_h et m_v augmentent. Alors, l'avantage de notre résultats proposés est évident.

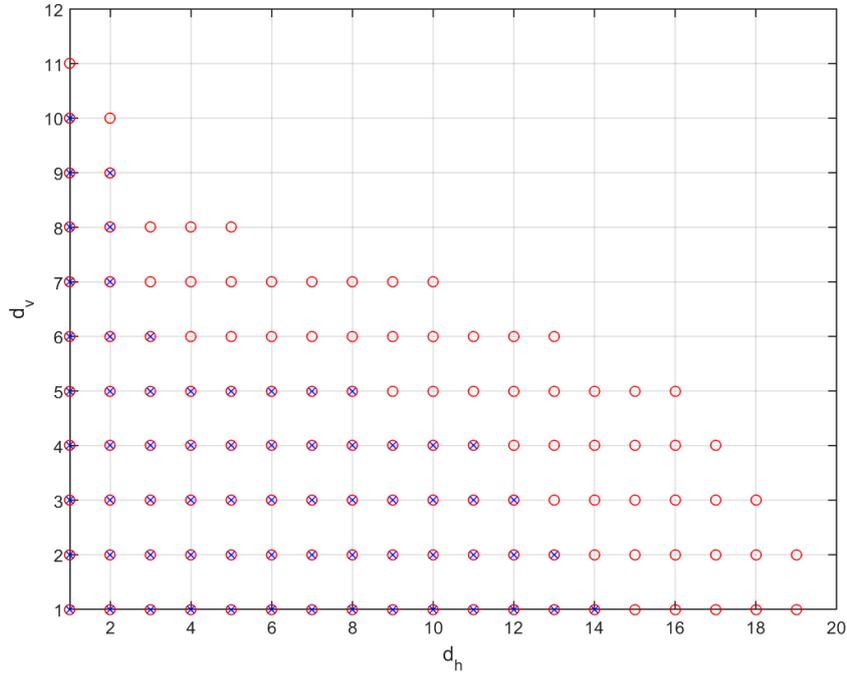


FIGURE 2.5 – Régions de faisabilité des conditions LMIs du corollaire 1 [Huang et al., 2013] (indiqué par 'x') et corollaire 2.1 avec $m_h = m_v = 1$ (indiqué par 'o').

Tableau 2.4 – Résultats de comparaison pour l'exemple 2.4. (Retards constants).

Méthodes	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 0.9$
Corollaire 1 [Huang et al., 2013]	2	3	5	9
Corollaire 2.1 ($m_h = m_v = 1$) [Badie et al., 2019d]	3	4	7	12
Corollaire 2.1 ($m_h = m_v = h$) [Badie et al., 2019d]	3	5	8	14

Remarque 2.12. *Il convient de noter que dans le travail [Badie et al., 2019f], nous avons proposé également une condition dépendante du retard pour étudier la stabilité exponentielle des systèmes 2-D discrets commutés décrits par le modèle de Roesser à retards, Dans ce travail nous avons opté sur l'utilisation de l'inégalité de Wirtinger discrète afin de développer une condition moins conservative avec un nombre de variables de décision réduite.*

2.4 Stabilité et analyse de la performance H_∞ des systèmes 2-D continus à retards

2.4.1 Formulation du problème

Considérons le système 2-D continu décrit par le modèle de Roesser à retards :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{d11} & A_{d12} \\ A_{d21} & A_{d22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1 - h_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - h_2) \end{bmatrix}$$

$$z(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Dw(t_1, t_2), \quad (2.38)$$

où $x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_h}$, $x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_v}$, sont les états horizontal et vertical, respectivement, $w(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est l'entrée de perturbation (qui appartient à $\mathcal{L}_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$), $z(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est la sortie, h_1 et h_2 sont les retards dans les directions horizontale et verticale, respectivement. Enfin, A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , A_{d11} , A_{d12} , A_{d21} , A_{d22} , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 et D sont des matrices constantes avec des dimensions appropriées.

Les conditions initiales sont données par :

$$\begin{cases} x^h(\theta, t_2) = f_\theta(t_2), & -h_1 \leq \theta \leq 0, & 0 \leq t_2 \leq T_2, \\ x^h(\theta, t_2) = 0, & -h_1 \leq \theta \leq 0, & t_2 \geq T_2, \\ x^v(t_1, \delta) = g_\delta(t_1), & -h_2 \leq \delta \leq 0, & 0 \leq t_1 \leq T_1, \\ x^v(t_1, \delta) = 0, & -h_2 \leq \delta \leq 0, & t_1 \geq T_1, \end{cases} \quad (2.39)$$

où $T_1 < \infty$ et $T_2 < \infty$ sont des constantes positives, $f_\theta(t_2)$ et $g_\delta(t_1)$ reçoivent des vecteurs.

Lorsque $w(t_1, t_2) = 0$, le système (2.38) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{d11} & A_{d12} \\ A_{d21} & A_{d22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1 - h_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - h_2) \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Avant de poursuivre, nous rappelons les définitions et le lemme suivants, qui seront utilisés dans la preuve de nos principaux résultats.

Définition 2.4. [Ghamgui et al., 2015] Le système 2-D continu à retards (2.40) avec les conditions initiales (2.39) est asymptotiquement stable si

$$\lim_{(t_1+t_2) \rightarrow \infty} (\|x^h(t_1, t_2)\| + \|x^v(t_1, t_2)\|) = 0. \quad (2.41)$$

Définition 2.5. [Galkowski et al., 2003] Soit $V(t_1, t_2) = V^h(t_1, t_2) + V^v(t_1, t_2)$ une fonction de Lyapunov pour le système (2.40), alors sa dérivée unidirectionnelle est donnée par :

$$\dot{V}_u(t_1, t_2) = \frac{\partial V^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \frac{\partial V^v(t_1, t_2)}{\partial t_2}. \quad (2.42)$$

Lemme 2.1. [Benzaouia et al., 2011] Le système 2-D (2.40) est asymptotiquement stable si sa dérivée unidirectionnelle (2.42) est définie négative.

Définition 2.6. [Ghous et al., 2016a] On dit que le système 2-D continu à retards (2.38) a un niveau γ d'atténuation des perturbations de la performance H_∞ s'il est asymptotiquement stable et sous des conditions initiales nulles il satisfait la condition suivante :

$$\|z(t_1, t_2)\|_2 < \gamma \|w(t_1, t_2)\|_2. \quad (2.43)$$

Le but de cette section est de proposer des conditions pour analyser la stabilité dépendante du retard du système (2.40). Et aussi développer des conditions pour l'analyse de la stabilité avec la satisfaction de la performance H_∞ pour le système (2.38).

2.4.2 Résultats principaux

2.4.2.1 Analyse de la stabilité

Dans cette sous-section, le problème d'analyse de la stabilité du système 2-D continu à retards (2.40) est étudié :

Théorème 2.4. [Badie et al., 2018b] Étant donné un entier $m \geq 1$, le système 2-D continu à retards (2.40) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P = \text{diag}\{P^h, P^v\} > 0$, $Q_i = \text{diag}\{Q_i^h, Q_i^v\} > 0$, $i = \{1, \dots, 5\}$, de telle sorte que la condition LMI suivante soit faisable

$$\Xi < 0, \quad (2.44)$$

avec

$$\begin{aligned} \Xi = & \text{sym}(X_1^T P X_2) + Y_1^T Q_1 Y_1 - Y_2^T Q_1 Y_2 + E_1^T (H_2 Q_2 + H_3 Q_3 + H_4 Q_4 \\ & + H_5 Q_5) E_1 - E_2^T Q_2 E_2 - E_3^T Q_2 E_3 - E_4^T Q_2 E_4 - E_5^T Q_2 E_5 - F^T Q_3 F \\ & - G^T Q_4 G - L^T Q_5 L, \end{aligned} \quad (2.45)$$

et

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{bmatrix}, Y_1 = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \end{bmatrix}, \\ E_2 &= \begin{bmatrix} E_{21} \\ E_{22} \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} E_{31} \\ E_{32} \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} E_{41} \\ E_{42} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \\ L_1 &= \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, \\ H_2 &= \text{diag} \left\{ \left(\frac{h_1}{m} \right) I_{n_h}, \left(\frac{h_2}{m} \right) I_{n_v} \right\}, H_3 = \frac{1}{2} \text{diag} \left\{ \left(\frac{h_1}{m} \right)^2 I_{n_h}, \left(\frac{h_2}{m} \right)^2 I_{n_v} \right\}, \\ H_4 &= \frac{1}{6} \text{diag} \left\{ \left(\frac{h_1}{m} \right)^3 I_{n_h}, \left(\frac{h_2}{m} \right)^3 I_{n_v} \right\}, H_5 = \frac{1}{24} \text{diag} \left\{ \left(\frac{h_1}{m} \right)^4 I_{n_h}, \left(\frac{h_2}{m} \right)^4 I_{n_v} \right\}, \\ X_{11} &= \begin{bmatrix} \Upsilon_1 0_{n_h, (m+3)n} \\ 0_{n_h, (m+1)n} \frac{h_1}{m} \Upsilon_1 0_{n_h, 2n} \\ 0_{n_h, (m+2)n} \left(\frac{h_1}{m} \right)^2 \Upsilon_1 0_{n_h, n} \\ 0_{n_h, (m+3)n} \left(\frac{h_1}{m} \right)^3 \Upsilon_1 \end{bmatrix}, X_{12} = \begin{bmatrix} \Upsilon_2 0_{n_v, (m+3)n} \\ 0_{n_v, (m+1)n} \frac{h_2}{m} \Upsilon_2 0_{n_v, 2n} \\ 0_{n_v, (m+2)n} \left(\frac{h_2}{m} \right)^2 \Upsilon_2 0_{n_v, n} \\ 0_{n_v, (m+3)n} \left(\frac{h_2}{m} \right)^3 \Upsilon_2 \end{bmatrix}, \\ X_{21} &= \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} 0_{n_h, (m-1)n} A_{d11} A_{d12} 0_{n_h, 3n} \\ \Upsilon_1 0_{n_h, (m-1)n} - \Upsilon_1 0_{n_h, 3n} \\ \frac{h_1}{m} \Upsilon_1 0_{n_h, mn} - \frac{h_1}{m} \Upsilon_1 0_{n_h, 2n} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{m} \right)^2 \Upsilon_1 0_{n_h, (m+1)n} - \left(\frac{h_1}{m} \right)^2 \Upsilon_1 0_{n_h, n} \end{bmatrix}, \\ X_{22} &= \begin{bmatrix} A_{21} A_{22} 0_{n_v, (m-1)n} A_{d21} A_{d22} 0_{n_v, 3n} \\ \Upsilon_2 0_{n_v, (m-1)n} - \Upsilon_2 0_{n_v, 3n} \\ \frac{h_2}{m} \Upsilon_2 0_{n_v, mn} - \frac{h_2}{m} \Upsilon_2 0_{n_v, 2n} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{h_2}{m} \right)^2 \Upsilon_2 0_{n_v, (m+1)n} - \left(\frac{h_2}{m} \right)^2 \Upsilon_2 0_{n_v, n} \end{bmatrix}, \\ Y_{11} &= \begin{bmatrix} \Upsilon_1 0_{n_h, (m+3)n} \\ 0_{n_h, n} \Upsilon_1 0_{n_h, (m+2)n} \\ \vdots \\ 0_{n_h, (m-1)n} \Upsilon_1 0_{n_h, 4n} \end{bmatrix}, Y_{12} = \begin{bmatrix} \Upsilon_2 0_{n_v, (m+3)n} \\ 0_{n_v, n} \Upsilon_2 0_{n_v, (m+2)n} \\ \vdots \\ 0_{n_v, (m-1)n} \Upsilon_2 0_{n_v, 4n} \end{bmatrix}, \\ Y_{21} &= \begin{bmatrix} 0_{n_h, n} \Upsilon_1 0_{n_h, (m+2)n} \\ 0_{n_h, 2n} \Upsilon_1 0_{n_h, (m+1)n} \\ \vdots \\ 0_{n_h, mn} \Upsilon_1 0_{n_h, 3n} \end{bmatrix}, Y_{22} = \begin{bmatrix} 0_{n_v, n} \Upsilon_2 0_{n_v, (m+2)n} \\ 0_{n_v, 2n} \Upsilon_2 0_{n_v, (m+1)n} \\ \vdots \\ 0_{n_v, mn} \Upsilon_2 0_{n_v, 3n} \end{bmatrix}, \\ E_{11} &= [A_{11} A_{12} 0_{n_h, (m-1)n} A_{d11} A_{d12} 0_{n_h, 3n}], \\ E_{12} &= [A_{21} A_{22} 0_{n_v, (m-1)n} A_{d21} A_{d22} 0_{n_v, 3n}], \\ E_{21} &= \sqrt{\frac{m}{h_1}} [\Upsilon_1 - \Upsilon_1 0_{n_h, (m+2)n}], E_{22} = \sqrt{\frac{m}{h_2}} [\Upsilon_2 - \Upsilon_2 0_{n_v, (m+2)n}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{31} &= \sqrt{\frac{3m}{h_1}} [\Upsilon_1 \ \Upsilon_1 \ 0_{n_h, (m-1)n} \ -2\Upsilon_1 \ 0_{n_h, 2n}], \\
 E_{32} &= \sqrt{\frac{3m}{h_2}} [\Upsilon_2 \ \Upsilon_2 \ 0_{n_v, (m-1)n} \ -2\Upsilon_2 \ 0_{n_v, 2n}], \\
 E_{41} &= \sqrt{\frac{5m}{h_1}} [\Upsilon_1 \ -\Upsilon_1 \ 0_{n_h, (m-1)n} \ 6\Upsilon_1 \ -12\Upsilon_1 \ 0_{n_h, n}], \\
 E_{42} &= \sqrt{\frac{5m}{h_2}} [\Upsilon_2 \ -\Upsilon_2 \ 0_{n_v, (m-1)n} \ 6\Upsilon_2 \ -12\Upsilon_2 \ 0_{n_v, n}], \\
 E_{51} &= \sqrt{\frac{7m}{h_1}} [\Upsilon_1 \ \Upsilon_1 \ 0_{n_h, (m-1)n} \ -12\Upsilon_1 \ 60\Upsilon_1 \ -120\Upsilon_1], \\
 E_{52} &= \sqrt{\frac{7m}{h_2}} [\Upsilon_2 \ \Upsilon_2 \ 0_{n_v, (m-1)n} \ -12\Upsilon_2 \ 60\Upsilon_2 \ -120\Upsilon_2], \\
 F_1 &= \sqrt{2} [\Upsilon_1 \ 0_{n_h, mn} \ -\Upsilon_1 \ 0_{n_h, 2n}], \ F_2 = \sqrt{2} [\Upsilon_2 \ 0_{n_v, mn} \ -\Upsilon_2 \ 0_{n_v, 2n}], \\
 G_1 &= \sqrt{\frac{6h_1}{m}} [\frac{1}{2}\Upsilon_1 \ 0_{n_h, (m+1)n} \ -\Upsilon_1 \ 0_{n_h, n}], \\
 G_2 &= \sqrt{\frac{6h_2}{m}} [\frac{1}{2}\Upsilon_2 \ 0_{n_v, (m+1)n} \ -\Upsilon_2 \ 0_{n_v, n}], \\
 L_1 &= \sqrt{24}\frac{h_1}{m} [\frac{1}{6}\Upsilon_1 \ 0_{n_h, (m+2)n} \ -\Upsilon_1], \ L_2 = \sqrt{24}\frac{h_2}{m} [\frac{1}{6}\Upsilon_2 \ 0_{n_v, (m+2)n} \ -\Upsilon_2], \\
 \Upsilon_1 &= [I_{n_h} \ 0_{n_h, n_v}], \ \Upsilon_2 = [0_{n_v, n_h} \ I_{n_v}], \ n = n_h + n_v.
 \end{aligned}$$

Preuve. Choisissons la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante pour le système (2.40) :

$$V(t_1, t_2) = V^h(t_1, t_2) + V^v(t_1, t_2), \quad (2.46)$$

où

$$\begin{aligned}
 V^h(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^5 V_i^h(t_1, t_2), \\
 V_0^h(t_1, t_2) &= \zeta^{hT}(t_1, t_2) P^h \zeta^h(t_1, t_2), \\
 V_1^h(t_1, t_2) &= \int_{t_1 - \frac{h_1}{m}}^{t_1} \Gamma^{hT}(\alpha, t_2) Q_1^h \Gamma^h(\alpha, t_2) d\alpha, \\
 V_2^h(t_1, t_2) &= \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{t_1 + \beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Q_2^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta, \\
 V_3^h(t_1, t_2) &= \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_1 + \beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Q_3^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta d\lambda, \\
 V_4^h(t_1, t_2) &= \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{\delta}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_1 + \beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Q_4^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta d\lambda d\delta, \\
 V_5^h(t_1, t_2) &= \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{\varepsilon}^0 \int_{\delta}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_1 + \beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Q_5^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta d\lambda d\delta d\varepsilon,
 \end{aligned}$$

et

$$V^v(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^5 V_i^v(t_1, t_2),$$

$$\begin{aligned}
 V_0^v(t_1, t_2) &= \zeta^{vT}(t_1, t_2)P^v\zeta^v(t_1, t_2), \\
 V_1^v(t_1, t_2) &= \int_{t_2 - \frac{h_2}{m}}^{t_2} \Gamma^{vT}(t_1, \alpha)Q_1^v\Gamma^v(t_1, \alpha)d\alpha, \\
 V_2^v(t_1, t_2) &= \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha)Q_2^v\dot{x}^v(t_1, \alpha)d\alpha d\beta, \\
 V_3^v(t_1, t_2) &= \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha)Q_3^v\dot{x}^v(t_1, \alpha)d\alpha d\beta d\lambda, \\
 V_4^v(t_1, t_2) &= \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{\delta}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{hT}(t_1, \alpha)Q_4^v\dot{x}^v(t_1, \alpha)d\alpha d\beta d\lambda d\delta, \\
 V_5^v(t_1, t_2) &= \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{\varepsilon}^0 \int_{\delta}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{hT}(t_1, \alpha)Q_5^v\dot{x}^v(t_1, \alpha)d\alpha d\beta d\lambda d\delta d\varepsilon,
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \zeta^h(t_1, t_2) &= \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ \int_{t_1 - \frac{h_1}{m}}^{t_1} x^h(\alpha, t_2)d\alpha \\ \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} x^h(\alpha, t_2)d\alpha d\beta \\ \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} x^h(\alpha, t_2)d\alpha d\beta d\lambda \end{bmatrix}, \\
 \zeta^v(t_1, t_2) &= \begin{bmatrix} x^v(t_1, t_2) \\ \int_{t_2 - \frac{h_2}{m}}^{t_2} x^v(t_1, \alpha)d\alpha \\ \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} x^v(t_1, \alpha)d\alpha d\beta \\ \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} x^v(t_1, \alpha)d\alpha d\beta d\lambda \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\Gamma^h(\alpha, t_2) = \begin{bmatrix} x^h(\alpha, t_2) \\ x^h(\alpha - \frac{h_1}{m}, t_2) \\ \vdots \\ x^h(\alpha - \frac{m-1}{m}h_1, t_2) \end{bmatrix}, \Gamma^v(t_1, \alpha) = \begin{bmatrix} x^v(t_1, \alpha) \\ x^v(t_1, \alpha - \frac{h_2}{m}) \\ \vdots \\ x^v(t_1, \alpha - \frac{m-1}{m}h_2) \end{bmatrix},$$

$$\text{et } \dot{x}^h(\alpha, t_2) = \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \Big|_{t_1=\alpha}, \quad \dot{x}^v(t_1, \alpha) = \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \Big|_{t_2=\alpha}.$$

On pose :

$$\begin{aligned}
 x^h &= x^h(t_1, t_2), \quad x^v = x^v(t_1, t_2), \quad x_\tau^h = x^h(t_1 - \tau, t_2), \\
 x_\tau^v &= x^v(t_1, t_2 - \tau), \quad x^h(s) = x^h(s, t_2), \quad x^v(s) = x^v(t_1, s).
 \end{aligned}$$

La dérivée unidirectionnelle de la fonction de Lyapunov-Krasovskii donne l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_u(t_1, t_2) &= 2\zeta^{hT}P^h\dot{\zeta}^h + 2\zeta^{vT}P^v\dot{\zeta}^v + \Gamma^{hT}(t_1, t_2)Q^h\Gamma^h(t_1, t_2) \\
 &\quad - \Gamma^{hT}(t_1 - \frac{h_1}{m}, t_2)Q^h\Gamma^h(t_1 - \frac{h_1}{m}, t_2) + \Gamma^{vT}(t_1, t_2)Q^v\Gamma^v(t_1, t_2) \\
 &\quad - \Gamma^{vT}(t_1, t_2 - \frac{h_2}{m})Q^v\Gamma^v(t_1, t_2 - \frac{h_2}{m}) \\
 &\quad + \dot{x}^{hT} \left(\frac{h_1}{m}Q_2^h + \frac{h_1^2}{2m^2}Q_3^h + \frac{h_1^3}{6m^3}Q_4^h + \frac{h_1^4}{24m^4}Q_5^h \right) \dot{x}^h \\
 &\quad + \dot{x}^{vT} \left(\frac{h_2}{m}Q_2^v + \frac{h_2^2}{2m^2}Q_3^v + \frac{h_2^3}{6m^3}Q_4^v + \frac{h_2^4}{24m^4}Q_5^v \right) \dot{x}^v
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t_1 - \frac{h_1}{m}}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha_1) Q_2^h \dot{x}^h(\alpha_1) d\alpha_1 - \int_{t_2 - \frac{h_2}{m}}^{t_2} \dot{x}^{vT}(\alpha_2) Q_2^v \dot{x}^v(\alpha_2) d\alpha_2 \\
 & - \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{t_1 + \beta_1}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha_1) Q_3^h \dot{x}^h(\alpha_1) d\alpha_1 d\beta_1 \\
 & - \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{t_2 + \beta_2}^{t_2} \dot{x}^{vT}(\alpha_2) Q_3^v \dot{x}^v(\alpha_2) d\alpha_2 d\beta_2 \\
 & - \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{\lambda_1}^0 \int_{t_1 + \beta_1}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha_1) Q_4^h \dot{x}^h(\alpha_1) d\alpha_1 d\beta_1 d\lambda_1 \\
 & - \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{\lambda_2}^0 \int_{t_2 + \beta_2}^{t_2} \dot{x}^{vT}(\alpha_2) Q_4^v \dot{x}^v(\alpha_2) d\alpha_2 d\beta_2 d\lambda_2 \\
 & - \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{\delta_1}^0 \int_{\lambda_1}^0 \int_{t_1 + \beta_1}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha_1) Q_5^h \dot{x}^h(\alpha_1) d\alpha_1 d\beta_1 d\lambda_1 d\delta_1 \\
 & - \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{\delta_2}^0 \int_{\lambda_2}^0 \int_{t_2 + \beta_2}^{t_2} \dot{x}^{vT}(\alpha_2) Q_5^v \dot{x}^v(\alpha_2) d\alpha_2 d\beta_2 d\lambda_2 d\delta_2,
 \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.8 aux termes ayant une seule integrale dans $\dot{V}_u(t_1, t_2)$, on obtient :

$$\int_{t_1 - \frac{h_1}{m}}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha) Q_2^h \dot{x}^h(\alpha) d\alpha \geq \sum_{i=0}^3 \frac{(2i+1)m}{h_1} \Theta_i^T Q_2^h \Theta_i, \quad (2.47)$$

$$\int_{t_2 - \frac{h_2}{m}}^{t_2} \dot{x}^{vT}(\alpha) Q_2^v \dot{x}^v(\alpha) d\alpha \geq \sum_{i=0}^3 \frac{(2i+1)m}{h_2} \Phi_i^T Q_2^v \Phi_i, \quad (2.48)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Theta_0 &= x^h - x^{\frac{h}{m}}, \\
 \Theta_1 &= x^h + x^{\frac{h}{m}} - \frac{2m}{h_1} \int_{t_1 - \frac{h_1}{m}}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha, \\
 \Theta_2 &= x^h - x^{\frac{h}{m}} + \frac{6m}{h_1} \int_{t_1 - \frac{h_1}{m}}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha - \frac{12m^2}{h_1^2} \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{t_1 + \beta}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha d\beta, \\
 \Theta_3 &= x^h + x^{\frac{h}{m}} - \frac{12m}{h_1} \int_{t_1 - \frac{h_1}{m}}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha + \frac{60m^2}{h_1^2} \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{t_1 + \beta}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha d\beta, \\
 & - \frac{120m^3}{h_1^3} \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_1 + \beta}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda, \\
 \Phi_0 &= x^v - x^{\frac{v}{m}}, \\
 \Phi_1 &= x^v + x^{\frac{v}{m}} - \frac{2m}{h_2} \int_{t_2 - \frac{h_2}{m}}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha, \\
 \Phi_2 &= x^v - x^{\frac{v}{m}} + \frac{6m}{h_2} \int_{t_2 - \frac{h_2}{m}}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha - \frac{12m^2}{h_2^2} \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{t_2 + \beta}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha d\beta, \\
 \Phi_3 &= x^v + x^{\frac{v}{m}} - \frac{12m}{h_2} \int_{t_2 - \frac{h_2}{m}}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha + \frac{60m^2}{h_2^2} \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{t_2 + \beta}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha d\beta, \\
 & - \frac{120m^3}{h_2^3} \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_2 + \beta}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda,
 \end{aligned}$$

L'application du lemme 1.14 aux termes d'intégral double, triple et quadruple dans $\dot{V}_u(t_1, t_2)$ conduit à :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha) Q_3^h \dot{x}^h(\alpha) d\alpha d\beta &\geq 2 \left(x^h - \frac{m}{h_1} \int_{t_1-\frac{h_1}{m}}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha \right)^T Q_3^h \\
 &\quad \times \left(x^h - \frac{m}{h_1} \int_{t_1-\frac{h_1}{m}}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha \right), \\
 \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(\alpha) Q_3^v \dot{x}^v(\alpha) d\alpha d\beta &\geq 2 \left(x^v - \frac{m}{h_2} \int_{t_2-\frac{h_2}{m}}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha \right)^T Q_3^v \\
 &\quad \times \left(x^v - \frac{m}{h_2} \int_{t_2-\frac{h_2}{m}}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha \right), \\
 \\
 \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha) Q_4^h \dot{x}^h(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda &\geq \\
 \frac{6h_1}{m} \left(\frac{1}{2} x^h - \frac{m^2}{h_1^2} \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha d\beta \right)^T &Q_4^h \\
 \times \left(\frac{1}{2} x^h - \frac{m^2}{h_1^2} \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha d\beta \right), & \\
 \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(\alpha) Q_4^v \dot{x}^v(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda &\geq \\
 \frac{6h_2}{m} \left(\frac{1}{2} x^v - \frac{m^2}{h_2^2} \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha d\beta \right)^T &Q_4^v \\
 \times \left(\frac{1}{2} x^v - \frac{m^2}{h_2^2} \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha d\beta \right), & \\
 \\
 \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{\delta}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha) Q_5^h \dot{x}^h(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda d\delta &\geq \\
 \frac{24h_1^2}{m} \left(\frac{1}{6} x^h - \frac{m^3}{h_1^3} \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda \right)^T &Q_5^h \\
 \left(\frac{1}{6} x^h - \frac{m^3}{h_1^3} \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda \right), & \\
 \\
 \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{\delta}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(\alpha) Q_5^v \dot{x}^v(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda d\delta &\geq \\
 \frac{24h_2^2}{m} \left(\frac{1}{6} x^v - \frac{m^3}{h_2^3} \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda \right)^T &Q_5^v \\
 \left(\frac{1}{6} x^v - \frac{m^3}{h_2^3} \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda \right). &
 \end{aligned}$$

Ensuite, en définissant :

$$\xi(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \Gamma \\ x_{h_1}^h \\ x_{h_2}^v \\ \frac{m}{h_1} \int_{t_1 - \frac{h_1}{m}}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha \\ \frac{m}{h_2} \int_{t_2 - \frac{h_2}{m}}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha \\ \frac{m^2}{h_1^2} \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{t_1 + \beta}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha d\beta \\ \frac{m^2}{h_2^2} \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{t_2 + \beta}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha d\beta \\ \frac{m^3}{h_1^3} \int_{-\frac{h_1}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_1 + \beta}^{t_1} x^h(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda \\ \frac{m^3}{h_2^3} \int_{-\frac{h_2}{m}}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_2 + \beta}^{t_2} x^v(\alpha) d\alpha d\beta d\lambda \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} x^h \\ x^v \\ x_{\frac{h_1}{m}}^h \\ x_{\frac{h_2}{m}}^v \\ \vdots \\ x_{\frac{m-1}{m}h_1}^h \\ x_{\frac{m-1}{m}h_2}^v \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_u(t_1, t_2) \leq & \xi^T(t_1, t_2) \{ \text{sym}(X_1^T P X_2) + Y_1^T Q_1 Y_1 - Y_2^T Q_1 Y_2 \\ & + E_1^T (H_2 Q_2 + H_3 Q_3 + H_4 Q_4 + H_5 Q_5) E_1 - E_2^T Q_2 E_2 \\ & - E_3^T Q_2 E_3 - E_4^T Q_2 E_4 - E_5^T Q_2 E_5 - F^T Q_3 F - G^T Q_4 G \\ & - L^T Q_5 L \} \xi(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Par conséquent, il est clair que si (2.44) est satisfaite, alors nous obtenons $\dot{V}_u(t_1, t_2) < 0$, ce qui complète la preuve. \square

Remarque 2.13. La fonction de Lyapunov-Krasovskii définie dans (2.46) est plus générale par rapport aux fonctions utilisées dans la littérature, grâce à l'utilisation des vecteurs augmentés $\zeta^h(t_1, t_2)$, $\zeta^v(t_1, t_2)$, $\Gamma^h(t_1, t_2)$ et $\Gamma^v(t_1, t_2)$. Par exemple :

- ★ Lorsque $P^h = \text{diag}\{P_1, 0_{3n, 3n}\}$, la fonction $V_0^h(t_1, t_2)$ se réduit à $V_1^h(x)$ dans [Benhayoun et al., 2013, Hmamed et al., 2016] et à la première fonction de $V_1(t_1, t_2)$ dans [Benzaouia et al., 2011].
- ★ Lorsque $P^v = \text{diag}\{P_2, 0_{3n, 3n}\}$, la fonction $V_0^v(t_1, t_2)$ se réduit à $V_1^v(x)$ dans [Benhayoun et al., 2013, Hmamed et al., 2016] et à la première fonction de $V_2(t_1, t_2)$ de [Benzaouia et al., 2011].
- ★ Lorsque $Q^h = \text{diag}\{Q_1, Q_1, \dots, Q_1\}$, la fonction $V_2^h(t_1, t_2)$ se réduit à $V_3^h(x)$ dans [Benhayoun et al., 2013] et à la deuxième fonction de $V_1(t_1, t_2)$ dans [Benzaouia et al., 2011].
- ★ Lorsque $Q^v = \text{diag}\{Q_2, Q_2, \dots, Q_2\}$, la fonction $V_2^v(t_1, t_2)$ se réduit à $V_3^v(x)$ dans [Benhayoun et al., 2013] et à la deuxième fonction de $V_2(t_1, t_2)$ dans [Benzaouia et al., 2011].

De plus, par rapport aux fonctions de Lyapunov-Krasovskii existantes pour les systèmes 2-D continus à retards, celle proposée dans cette thèse contient des termes intégrales triples, quadruples et quintuples qui sont très efficaces pour réduire le conservatisme [Feng et al., 2016, Park et al., 2016]. C'est une raison supplémentaire pour justifier que nos résultats sont moins conservatifs que ceux donnés dans la littérature.

Remarque 2.14. Il convient de mentionner que le nombre de variables de décision utilisées dans le théorème 2.4 est $Nvd = (\frac{m^2}{2} + 10)n^2 + (\frac{m}{2} + 4)n$. A partir de ce nombre, on peut voir que le nombre de variables de décision Nvd est lié au paramètre de partitionnement de retard m , et il augmentera si m augmente. Les exemples à la fin de cette section montrent comment l'augmentation de m permet de réduire davantage le conservatisme, bien qu'avec le compromis de l'augmentation du coût de calcul.

2.4.2.2 Analyse de la performance H_∞

Cette sous-section présente une condition suffisante pour garantir un niveau d'atténuation γ des perturbations H_∞ donné pour le système (2.38).

Théorème 2.5. [Badie et al., 2018b] *Étant donné un entier $m \geq 1$, le système 2-D continu à retards (2.38) avec des conditions initiales nulles est asymptotiquement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ , s'il existe des matrices $P = \text{diag}\{P^h, P^v\} > 0$, $Q_i = \text{diag}\{Q_i^h, Q_i^v\} > 0$, $i = \{1, \dots, 5\}$, de sorte que la condition LMI suivante est faisable*

$$\widehat{\Xi} + \widehat{E}_z^T \widehat{E}_z - \gamma^2 \widehat{E}_w^T \widehat{E}_w < 0, \quad (2.51)$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{\Xi} = & \text{sym}(\widehat{X}_1^T P \widehat{X}_2) + \widehat{Y}_1^T Q_1 \widehat{Y}_1 - \widehat{Y}_2^T Q_1 \widehat{Y}_2 + \widehat{E}_1^T (H_2 Q_2 + H_3 Q_3 + H_4 Q_4 \\ & + H_5 Q_5) \widehat{E}_1 - \widehat{E}_2^T Q_2 \widehat{E}_2 - \widehat{E}_3^T Q_2 \widehat{E}_3 - \widehat{E}_4^T Q_2 \widehat{E}_4 - \widehat{E}_5^T Q_2 \widehat{E}_5 - \widehat{F}^T Q_3 \widehat{F} \\ & - \widehat{G}^T Q_4 \widehat{G} - \widehat{L}^T Q_5 \widehat{L}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{X}_1 &= [X_1 \ 0_{4n, n_w}], \widehat{Y}_1 = [Y_1 \ 0_{mn, n_w}], \widehat{Y}_2 = [Y_2 \ 0_{mn, n_w}], \widehat{E}_2 = [E_2 \ 0_{n, n_w}], \\ \widehat{E}_3 &= [E_3 \ 0_{n, n_w}], \widehat{E}_4 = [E_4 \ 0_{n, n_w}], \widehat{E}_5 = [E_5 \ 0_{n, n_w}], \widehat{F} = [F \ 0_{n, n_w}], \\ \widehat{G} &= [G \ 0_{n, n_w}], \widehat{L} = [L \ 0_{n, n_w}], \\ \widehat{E}_z &= [C_1 \ C_2 \ 0_{n_z, (m+3)n} \ D], \widehat{E}_w = [0_{n_w, (m+4)n} \ I_{n_w}], \\ \widehat{X}_2 &= \begin{bmatrix} X_{21} & \mathcal{B}_1 \\ X_{22} & \mathcal{B}_2 \end{bmatrix}, \widehat{E}_1 = \begin{bmatrix} E_{11} & B_1 \\ E_{12} & B_2 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{3n_h, n_w} \end{bmatrix}, \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0_{3n_v, n_w} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les matrices : $X_1, Y_1, Y_2, E_{11}, E_{12}, E_2, E_3, E_4, E_5, F, G, L, H_2, H_3, H_4$ et H_5 partagent les mêmes expressions que celles du théorème 2.4.

Preuve. En définissant :

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty \int_0^\infty \{ z^T(t_1, t_2) z(t_1, t_2) - \gamma^2 \omega^T(t_1, t_2) \omega(t_1, t_2) \} dt_1 dt_2,$$

sous les conditions initiales nulles, nous avons :

$$\mathcal{J} \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \{ \dot{V}_u(t_1, t_2) + z^T(t_1, t_2) z(t_1, t_2) - \gamma^2 w^T(t_1, t_2) w(t_1, t_2) \} dt_1 dt_2.$$

Ce qui équivaut à :

$$\mathcal{J} \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \widehat{\xi}^T(t_1, t_2) \left\{ \widehat{\Xi} + \widehat{E}_z^T \widehat{E}_z - \gamma^2 \widehat{E}_w^T \widehat{E}_w \right\} \widehat{\xi}(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

avec $\widehat{\xi}(t_1, t_2) = [\xi^T(t_1, t_2) \ w^T(t_1, t_2)]^T$. L'inégalité matricielle (2.51) implique :

$$\|z(t_1, t_2)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t_1, t_2)\|_2^2.$$

La preuve est terminée. \square

Remarque 2.15. *La contribution principale des théorèmes 2.4 et 2.5 est liée à la construction de la nouvelle fonction de Lyapunov-Krasovskii ainsi la combinaison d'une méthode de partitionnement de retard avec l'inégalité intégrale basée sur la fonction auxiliaire. Ce qui conduit à réduire le conservatisme des résultats existants dans la littérature.*

Remarque 2.16. La stabilité dépendante du retard et les conditions de la performance H_∞ proposées dans les théorèmes 2.4 et 2.5 ont été dérivées pour des systèmes nominaux (sans incertitude). Néanmoins, il est à souligner qu'il n'est pas difficile d'étendre davantage les résultats aux systèmes avec des incertitudes, où les matrices de système (2.38) contiennent des incertitudes bornées en normes ou polytopiques, ce qui est laissé comme travaux ultérieurs.

2.4.3 Exemples numériques

Dans cette sous-section, trois exemples sont utilisés pour illustrer l'efficacité et les avantages des résultats développés.

Exemple 2.5. Considérons le système 2-D continu à retards (2.40) décrit par les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} -1 & -0.5 & 0.4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, & A_{12} &= \begin{bmatrix} 0.1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & A_{22} &= \begin{bmatrix} -0.5 & -0.3 & 0 \\ 0 & -1 & -0.6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \\ A_{d11} &= \begin{bmatrix} -0.5 & -0.25 & 0.2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}, & A_{d12} &= \begin{bmatrix} 0.02 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{d21} &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, & A_{d22} &= \begin{bmatrix} -0.2 & -0.12 & 0 \\ 0 & -0.4 & -0.24 \\ 0 & 0 & -0.8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La stabilité de ce système 2-D ne peut pas être assurée par le critère indépendant du retard dans [Benzaouia et al., 2011], mais peut être traitée avec l'approche développée dans cette section. Par exemple, pour h_1 donné, le retard maximum admissible h_2 qui assure la stabilité asymptotique du système en utilisant la méthode proposée dans théorème 2.4 est donné dans le Tableau 2.5. D'après ces résultats, il est clair que le théorème 2.4 est moins conservatif que les résultats récemment donnés dans [Benhayoun et al., 2013, Hmamed et al., 2016].

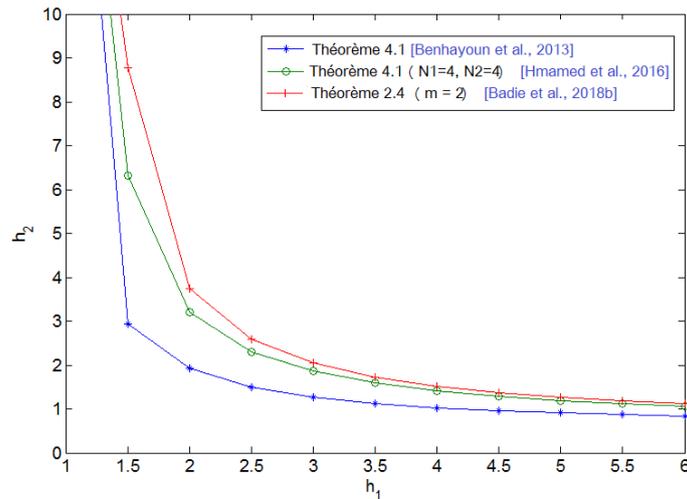


FIGURE 2.6 – Domaine de faisabilité des LMIs.

Tableau 2.5 – Comparaisons des valeurs maximales de h_2 pour différents valeurs de h_1 .

Méthodes	$h_1 = 2$	$h_1 = 3$	$h_1 = 4$	$h_1 = 5$
Théorème 4.1 [Benhayoun et al., 2013]	1.91	1.26	1.02	0.90
Théorème 4.1 $_{N_1=2 N_2=2}$ [Hmamed et al., 2016]	2.88	1.72	1.32	1.12
Théorème 4.1 $_{N_1=4 N_2=4}$ [Hmamed et al., 2016]	3.19	1.86	1.40	1.18
Théorème 2.4 ($m = 1$) [Badie et al., 2018b]	3.725	2.041	1.512	1.256
Théorème 2.4 ($m = 2$) [Badie et al., 2018b]	3.734	2.046	1.519	1.263

Le domaine de faisabilité des conditions LMIs est présenté sur la Figure 2.6. Il est clair que le domaine de stabilité obtenu en utilisant le théorème 2.4 inclut les domaines obtenus en utilisant les méthodes proposées dans [Benhayoun et al., 2013] et [Hmamed et al., 2016].

Exemple 2.6. Considérons le système dynamique bien connu (impliqué dans le chauffage du courant d'eau par absorption de gaz et le séchage de l'air) décrit par l'équation de Darboux avec retard [Dymkov et al., 2008] suivante :

$$\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x \partial t} = a_1 \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + a_2 \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} + a_0 q(x, t) + a_3 q(x, t - h_2) + bu(x, t), \quad (2.52)$$

avec $q(x, t)$ est une fonction inconnue à $x(direction) \in [0, x_f]$ et $t(temps) \in [0, \infty)$, a_0, a_1, a_2, a_3 et b sont des coefficients réels, h_2 est le retard, et $u(x, t)$ est la fonction d'entrée. Définissons :

$$x^h(x, t) = \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} - a_2 q(x, t), \quad x^v(x, t) = q(x, t).$$

Il est facile de vérifier que l'équation (2.52) peut être convertie à la forme (2.40) avec :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 + a_1 a_2 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{d11} & A_{d12} \\ A_{d21} & A_{d22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour effectuer une étude numérique, les paramètres suivants sont également fixés : $a_0 = 0, 2$, $a_1 = -3$, $a_2 = -1$, $a_3 = -0, 4$, $b = 0$.

La stabilité de ce système ne peut pas être résolue par le critère indépendant du retard dans [Benzaouia et al., 2011]. Au contraire, en utilisant le théorème 2.4, une solution réalisable peut être trouvée pour les retards constants comme indiqué dans le Tableau 2.6.

Tableau 2.6 – Comparaisons des valeurs maximales de h_2 .

Méthodes	h_2
Corollaire 1 [El-Kasri et al., 2013]	2.4601
Théorème 4.1 [Benhayoun et al., 2013]	3.7416
Théorème 4.1 $_{N_1=2 N_2=2}$ [Hmamed et al., 2016]	4.0772
Théorème 4.1 $_{N_1=3 N_2=3}$ [Hmamed et al., 2016]	4.0772
Théorème 2.4 ($m = 1$) [Badie et al., 2018b]	4.6815
Théorème 2.4 ($m = 3$) [Badie et al., 2018b]	4.6815

Exemple 2.7. Considérons le système 2-D continu à retards suivant étudié dans [Hmamed et al., 2016]

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1 - h_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - h_2) \end{bmatrix},$$

où les retards maximaux acceptables pour la stabilité sont $h_1 = \infty$ et $h_2 = 6.1725$.

Une comparaison détaillée entre les retards maximaux garantissant la stabilité obtenue en utilisant le théorème 2.4 et les méthodes dépendantes du retard proposées dans [Benhayoun et al., 2013, Hmamed et al., 2016] est résumée dans le Tableau 2.7.

Tableau 2.7 – Comparaisons des valeurs maximales de retard.

Méthodes	h_1	h_2
Théorème 4.1 [Benhayoun et al., 2013]	2.5800	4.4721
Théorème 4.1 $_{N_1=2 N_2=2}$ [Hmamed et al., 2016]	∞	5.7175
Théorème 4.1 $_{N_1=3 N_2=3}$ [Hmamed et al., 2016]	∞	5.9677
Théorème 4.1 $_{N_1=4 N_2=4}$ [Hmamed et al., 2016]	∞	6.0568
Théorème 2.4 ($m = 1$) [Badie et al., 2018b]	∞	6.1719
Théorème 2.4 ($m = 2$) [Badie et al., 2018b]	∞	6.1725

On peut voir que le critère de la stabilité proposé dans le théorème 2.4 fournit des bornes de retard plus grandes que les résultats précédents énumérés dans Tableau 2.7.

Considérons le problème d'analyse de la performance H_∞ , le système (2.52) est modélisé sous la forme (2.38) avec :

$$B_1 = 1, \quad B_2 = 0, \quad C_1 = 2, \quad C_2 = 1, \quad D = 0.$$

Maintenant, nous appliquons le théorème 2.5 pour calculer le minimum du niveau d'atténuation des perturbations de la performance H_∞ (γ_{min}) pour différentes valeurs du retard constant ($h = h_1 = h_2$) qui garantissent la stabilité asymptotique avec un niveau γ de la performance H_∞ du système (2.38). Les résultats de la comparaison sont répertoriés dans le Tableau 2.8.

Tableau 2.8 – Comparaison des valeurs de γ_{min} pour différents h .

Méthodes	$h = 0.2$	$h = 0.3$	$h = 0.4$	$h = 0.5$	$h = 0.6$
Théorème 2 [Ghous et al., 2016a]	0.6832	0.7082	0.7709	0.9137	1.0754
Théorème 2.5 ($m = 1$) [Badie et al., 2018b]	0.6677	0.6734	0.7354	0.8443	0.9697
Théorème 2.5 ($m = 2$) [Badie et al., 2018b]	0.6677	0.6730	0.7346	0.8440	0.9684
Théorème 2.5 ($m = 3$) [Badie et al., 2018b]	0.6677	0.6730	0.7344	0.8438	0.9680

La Figure 2.7 montre la variation de l'indice γ_{min} de la performance H_∞ obtenue en utilisant le théorème 2.5 et [Ghous et al., 2016a], pour différentes valeurs de h .

On remarque que la valeur de γ_{min} augmente lorsque les valeurs du retard h augmentent également. Le même comportement est remarqué dans [Ghous et al., 2016a]. En plus les comparaisons des performances effectuées montrent que le théorème 2.5 fournit des valeurs de γ_{min} plus petites, ce qui montre l'avantage et l'efficacité de la méthode proposée.

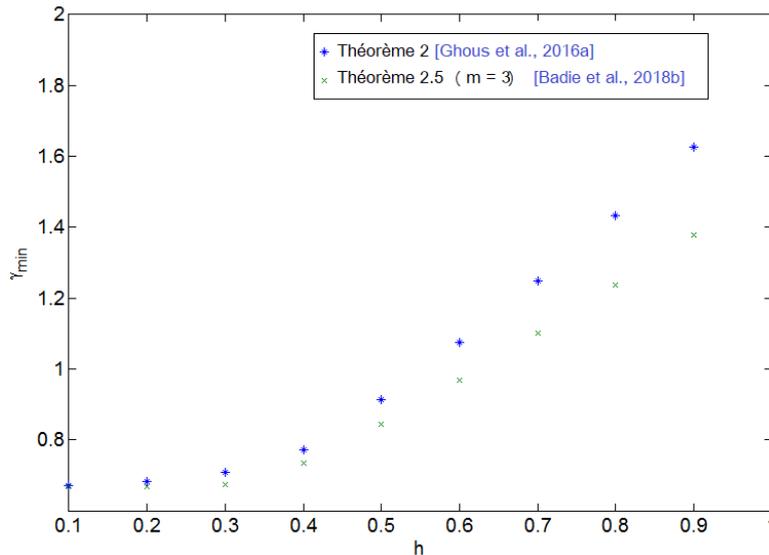


FIGURE 2.7 – Indices d’atténuation des perturbations γ_{min} au sens de la performance H_∞ pour différents valeurs de h .

2.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l’analyse de la stabilité dépendante du retard pour une certaine classe des systèmes 2-D à retards.

Dans la première section, le problème de la stabilité dépendante du retard des systèmes 2-D discrets décrits par le second modèle de F-M à retards a été considéré. Sans introduire des matrices de pondération libres, un nouveau critère de stabilité dépendant du retard moins conservatif a été obtenu en utilisant une fonction de Lyapunov-Krasovskii augmentée et en utilisant l’inégalité de sommation basée sur la fonction auxiliaire [Park et al., 2016]. L’efficacité du critère proposé a été démontrée à l’aide de deux exemples numériques.

La deuxième section a permis d’étudier les systèmes 2-D commutés. En utilisant l’approche du temps de séjour moyen et en construisant une fonction de Lyapunov-Krasovskii appropriée, des nouvelles conditions suffisantes dépendantes du retard ont été dérivées pour garantir la stabilité exponentielle des systèmes 2-D discrets commutés décrits par le modèle de Roesser à retards variables. Pour réduire le conservatisme des conditions dépendantes du retard, nous avons adopté l’idée de partitionnement du retard ainsi que la technique de la matrice de pondération libre. Deux exemples sont exploités pour illustrer que la méthode proposée est efficace et peut fournir un résultat moins conservatif.

Dans la dernière section, les problèmes de la stabilité dépendante du retard et de la performance H_∞ ont été étudiés, pour des systèmes 2-D continus à retards. En combinant une méthode de partitionnement des retards avec une inégalité intégrale basée sur une fonction auxiliaire [Park et al., 2016], des critères de la stabilité asymptotique et de la performance H_∞ ont été développés, et qui sont moins conservatifs que les résultats existants, comme le montrent plusieurs exemples numériques. De plus, les résultats peuvent être facilement étendus au cas incertain.

Chapitre 3

Commande H_∞ des systèmes 2-D à retards

3.1 Introduction

La théorie de la commande H_∞ a été introduite par Zames au début des années 80 [Zames, 1981]. D'une manière générale, la commande H_∞ est l'une des approches de la commande optimales les plus importantes lorsque le système est soumis à l'influence des perturbations externes, qui s'est avérée efficace pour atténuer les perturbations [Wei et al., 2018], et a donc trouvé de nombreuses applications dans une large classe de systèmes, par exemple : La théorie du commande H_∞ a été appliquée à un bâtiment réel à Tokyo, au Japon, à l'aide d'une paire d'amortisseurs de masse pour réduire le mouvement de flexion-torsion dû aux tremblements de terre [Fujinami et al., 2001]. Dans [He et al., 2005], le problème de la commande d'un satellite a été aussi étudié. Et des applications en commande de la suspension active des véhicules automobiles ont été élaborés dans [Sun et al., 2010]. De plus, de nombreux chercheurs se sont consacrés à l'étude du problème de la commande H_∞ pour différent type des systèmes 1-D, par exemple, les systèmes à retards [Fornasini et al., 2003, Vembarasan et al., 2014], les systèmes non linéaires [Liu et al., 2015, Wei et al., 2014] et les systèmes singuliers [Feng et al., 2013, Long et al., 2016]. Et au cours des dernières années, de nombreux travaux ont portés sur l'étude du problème de la commande H_∞ pour les systèmes 2-D linéaires [Badie et al., 2018d, Peng et al., 2009a, Xu et al., 2009]. Pour les systèmes 2-D commutés à retards et les systèmes 2-D continus à retards, peu de résultats ont été publiés dans la littérature concernant ces classes de systèmes : Dans [Duan et al., 2013], le problème de la commande H_∞ dépendant du retard pour les systèmes 2-D discrets commutés décrits par le second modèle de F-M à retards a été étudié. Dans [Ghous et al., 2015], le problème de la commande H_∞ des systèmes 2-D commutés discrets à retards et avec saturation de l'actionneur décrits par le second modèle de F-M a été résolu. Le problème de la commande H_∞ des systèmes 2-D continus commutés représentés par le modèle de Roesser à retards a été abordé dans [Ghous et al., 2016b].

Néanmoins, bien que les méthodes de conception des lois de commande pour les systèmes 2-D à retards ont été bien développées, ces conceptions peuvent entraîner des performances insatisfaisantes, voire une instabilité, lorsque les composants de commande rencontrent des défaillances (c'est-à-dire, défaillances des capteurs ou défaillances des actionneurs). D'une manière générale, la commande fiable consiste à concevoir une loi de commande pour garantir la stabilité des systèmes en boucle fermée non seulement lorsque tous les composants de commande fonctionnent correctement, mais également dans le cas de certaines défaillances admissibles des composants de commande. Par conséquent, en raison des exigences croissantes de fiabilité pour les systèmes dans de nombreux domaines, tels que l'aérospatiale et les processus industriels, le problème de la com-

mande fiable a attiré beaucoup d'attention ces dernières années, et des résultats correspondants ont été publiés dans la littérature [Sakthivel et al., 2015, Song et al., 2019, Ye et al., 2017]. Bien qu'il y ait eu jusqu'à présent une littérature riche et substantielle sur les problèmes de la commande fiables. Cependant, ce dernier pour les systèmes 2-D commutés discrets à retards n'a pas été entièrement pris en compte, seulement en [Huang et al., 2014] où le problème de la commande fiable pour les systèmes 2-D commutés discrets incertains ayant des retards dans l'état et des défauts d'actionneur décrits par le modèle 2-D de Roesser a été résolu, ce qui constitue la principale motivation de ce chapitre.

De plus, presque tous les systèmes physiques et d'ingénierie existants comportent inévitablement des incertitudes. Généralement, les incertitudes paramétriques sont dues aux erreurs d'identification ou aux variations de certains paramètres physiques du système. Pour ces raisons, la présence des incertitudes doit être prise en compte dans les modèles mathématiques.

Par conséquent, sur la base des discussions ci-dessus, dans ce chapitre, les problèmes de la commande fiable H_∞ et la commande robuste H_∞ pour une certaine classe des systèmes 2-D à retards seront abordés.

Dans la première section, le problème de la commande fiable H_∞ pour des systèmes 2-D commutés discrets décrits par le second modèle de F-M ayant des retards dans l'état et des défauts d'actionneur sera étudié. L'objectif principal est de concevoir une loi de commande H_∞ fiable qui garantie, pour toutes les défaillances admissibles des actionneurs, que le système en boucle fermée résultant sera stable de façon exponentielle avec une performance H_∞ pondérée γ . Sur la base de l'approche du temps de séjour moyen, la fonction de Lyapunov-Krasovskii et l'inégalité de Wirtinger, des nouvelles conditions suffisantes pour l'analyse de la stabilité exponentielle et de la performance H_∞ pondérée seront développées en termes des LMIs. Ensuite, une approche de conception en termes de conditions LMIs sera proposée et une expression explicite pour la loi de commande fiable H_∞ par retour d'état sera présentée. Enfin, des exemples numériques seront fournis pour montrer la validité et l'efficacité des résultats proposés.

Dans la deuxième section, nous aborderons le problème de la commande robuste H_∞ pour des systèmes 2-D continus incertains ayant des retards variables et des incertitudes bornées en normes. En construisant une fonction de Lyapunov-Krasovskii, et en utilisant l'inégalité de Wirtinger et la technique de combinaison convexe réciproque, une nouvelle approche sera développée pour analyser la stabilité, qui peut obtenir des résultats moins conservatifs que ceux donnés dans [El-Kasri et al., 2013, Ghouss et al., 2016a]. Ensuite, l'analyse de la performance H_∞ pour les systèmes 2-D continus incertains à retards sera proposée. En conséquence, une loi de commande robuste sera conçue. Deux exemples numériques seront utilisés pour démontrer l'efficacité des résultats proposés.

3.2 Commande fiable H_∞ des systèmes 2-D discrets commutés avec des retards d'état et des défaillances de l'actionneur

3.2.1 Formulation du problème

Considérons le système 2-D discret commuté suivant avec des retards d'état et des défauts d'actionneur décrit par le second modèle de F-M :

$$\begin{aligned}
 x(i+1, j+1) &= A_1^{\sigma(i, j+1)} x(i, j+1) + A_2^{\sigma(i+1, j)} x(i+1, j) + A_{1d}^{\sigma(i, j+1)} x(i-d_1, j+1) \\
 &\quad + A_{2d}^{\sigma(i+1, j)} x(i+1, j-d_2) \\
 &\quad + B_1^{\sigma(i, j+1)} u_f(i, j+1) + B_2^{\sigma(i+1, j)} u_f(i+1, j) \\
 &\quad + B_{1w}^{\sigma(i, j+1)} w(i, j+1) + B_{2w}^{\sigma(i+1, j)} w(i+1, j), \\
 z(i, j) &= C^{\sigma(i, j)} x(i, j) + D_w^{\sigma(i, j)} w(i, j).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u_f(i, j) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est l'entrée de commande du défaut de l'actionneur, $w(i, j) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est l'entrée de perturbation qui appartient à $l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$, $z(i, j) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est la sortie commandé, $\sigma(i, j)$ est le signal de commutation qui prend sa valeur de l'ensemble d'index $\mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\}$ avec $N \geq 1$ est le nombre de sous-systèmes. $A_1^k, A_2^k, A_{1d}^k, A_{2d}^k, B_1^k, B_2^k, B_{1w}^k, B_{2w}^k, C^k$ et D_w^k sont des matrices réelles et constantes avec des dimensions appropriées pour $k \in \mathcal{N}$. $d_1 > 0$ et $d_2 > 0$ sont des retards dans les directions horizontale et verticale, respectivement.

Les conditions initiales du système (3.1) sont spécifiées comme suit :

$$\begin{cases} x(i, j) = \rho_{i,j}, & \forall 0 \leq j < T_2, \quad -d_1 \leq i \leq 0, \\ x(i, j) = \varphi_{i,j}, & \forall 0 \leq i < T_1, \quad -d_2 \leq j \leq 0, \\ x(i, j) = 0, & \forall j \geq T_2, \quad -d_1 \leq i \leq 0, \\ x(i, j) = 0, & \forall i \geq T_1, \quad -d_2 \leq j \leq 0, \\ \rho_{0,0} = \varphi_{0,0}, \end{cases} \quad (3.2)$$

où T_1 et T_2 sont des entiers positifs. $\rho_{i,j}$ et $\varphi_{i,j}$ sont des vecteurs.

Remarque 3.1. Dans le but de se mettre dans les même conditions que celles de la littérature, la commutation entre différents sous-systèmes est supposée se produire à chacun des points i ou j . Il convient de mentionner que la valeur de $\sigma(i, j)$ ne dépend que de $i + j$, ce qui signifie que pour tous $i + j = \bar{i} + \bar{j}$, $\sigma(i, j) = \sigma(\bar{i}, \bar{j})$, pour plus de détails, (voir [Benzaouia et al., 2011]). De plus, notons : $m_s = i_s + j_s$, ($s = 0, 1, 2, \dots$) comme s -ième point de commutation. Ensuite, la séquence de commutation de $\sigma(i, j)$ peut être représentée par $(m_0, m_1, \dots, m_s, m_{s+1}, \dots)$ avec $(i_0, j_0) = (0, 0)$. Dans telles situations, le k -ième sous-système est actif sur l'intervalle $[m_s, m_{s+1})$ lorsque $\sigma(i_s, j_s) = k \in \mathcal{N}$.

L'entrée de commande du défaut de l'actionneur est donnée par :

$$u_f(i, j) = \Theta^{\sigma(i,j)} u(i, j) = \Theta^{\sigma(i,j)} K^{\sigma(i,j)} x(i, j), \quad (3.3)$$

où $K^k \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $k \in \mathcal{N}$, est le gain de la loi de commande à concevoir. Θ^k est la matrice de défaut de l'actionneur définie comme suit :

$$\Theta^k = \text{diag}\{\theta_1^k, \theta_2^k, \dots, \theta_m^k\}, \quad 0 \leq \underline{\theta}_g^k \leq \theta_g^k \leq \bar{\theta}_g^k \leq 1, \quad (3.4)$$

où $\underline{\theta}_g^k$ et $\bar{\theta}_g^k$ avec $g = 1, 2, \dots, n_u$ sont des constantes donnés. $\theta_g^k = 0$ signifie que le $g^{\text{ème}}$ actionneur est complètement en défaillance, $\theta_g^k = 1$ signifie que le $g^{\text{ème}}$ actionneur est normal et $0 < \theta_g^k < 1$ signifie que le $g^{\text{ème}}$ actionneur a une défaillance partielle.

Pour simplifier, nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Theta_0^k &= \text{diag}\{\theta_{01}^k, \theta_{02}^k, \dots, \theta_{0m}^k\}, & \Theta_{0g}^k &= \frac{1}{2}(\bar{\theta}_g^k + \underline{\theta}_g^k), \\ \Theta_1^k &= \text{diag}\{\theta_{11}^k, \theta_{12}^k, \dots, \theta_{1m}^k\}, & \Theta_{1g}^k &= \frac{1}{2}(\bar{\theta}_g^k - \underline{\theta}_g^k). \end{aligned} \quad (3.5)$$

A partir de (3.4) et (3.5), la matrice Θ^k peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Theta^k = \Theta_0^k + \Delta^k, \quad |\Delta^k| \leq \Theta_1^k, \quad (3.6)$$

avec $|\Delta^k| = \text{diag}\{|\delta_1^k|, |\delta_2^k|, \dots, |\delta_m^k|\}$.

Ensuite, à partir de (3.1) et (3.3), nous obtenons le système en boucle fermée suivant :

$$\begin{aligned} x(i+1, j+1) &= (A_1^{\sigma(i,j+1)} + B_1^{\sigma(i,j+1)} \Theta^{\sigma(i,j+1)} K^{\sigma(i,j+1)}) x(i, j+1) \\ &\quad + (A_2^{\sigma(i+1,j)} + B_2^{\sigma(i+1,j)} \Theta^{\sigma(i+1,j)} K^{\sigma(i+1,j)}) x(i+1, j) \\ &\quad + A_{1d}^{\sigma(i,j+1)} x(i-d_1, j+1) + A_{2d}^{\sigma(i+1,j)} x(i+1, j-d_2) \\ &\quad + B_{1w}^{\sigma(i,j+1)} w(i, j+1) + B_{2w}^{\sigma(i+1,j)} w(i+1, j), \\ z(i, j) &= C^{\sigma(i,j)} x(i, j) + D_w^{\sigma(i,j)} w(i, j). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Remarque 3.2. Il convient de noter que la loi de commande (3.3) partage le même signal de commutation avec le système 2-D commuté (3.1). Ainsi, lorsque le signal de commutation $\sigma(i, j)$ passe d'un mode à un autre, les commutations entre les sous-systèmes du système (3.1) et de la loi de commande (3.3) se produisent simultanément (Voir Figure 3.1).

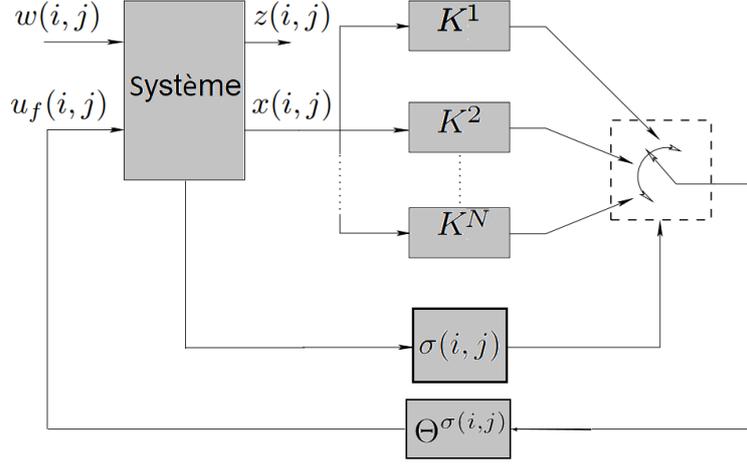


FIGURE 3.1 – Schéma de commande des systèmes commutés.

Les définitions suivantes seront utilisées dans la preuve de nos résultats.

Définition 3.1. [Huang et al., 2013] Le système (3.1) avec $w(i, j) = 0$ et $u_f(i, j) = 0$ est dit exponentiellement stable s'il existe des scalaires positifs ϕ et λ tel que :

$$\sum_{i+j=L} \|x(i, j)\|^2 \leq \phi e^{-\lambda(L-Z)} \sum_{i+j=Z} \|x(i, j)\|_C^2, \quad L > Z,$$

où

$$\sum_{i+j=Z} \|x(i, j)\|_C^2 \triangleq \sup_{\substack{\vartheta_1 \in [-d_1, 0] \\ \vartheta_2 \in [-d_2, 0]}} \sum_{i+j=Z} \{ \|x(i - \vartheta_1, j)\|^2 + \|x(i, j - \vartheta_2)\|^2, \\ \|s_1(i - \vartheta_1, j)\|^2 + \|s_2(i, j - \vartheta_2)\|^2 \},$$

et

$$\begin{cases} s_1(i, j) = x(i + 1, j) - x(i, j); \\ s_2(i, j) = x(i, j + 1) - x(i, j). \end{cases}$$

Définition 3.2. Pour des scalaires donnés $0 < \alpha < 1$ et $\gamma > 0$, le système 2-D commuté (3.1) est dit exponentiellement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ pondérée, si sous le signal de commutation $\sigma(i, j)$, $w(i, j) = 0$ et $u_f(i, j) = 0$, le système (3.1) est exponentiellement stable, et dans des conditions initiales nulles, et pour tout $w(i, j)$ différent de zéro et $w(i, j) \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$, la condition suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{i+j} \|\tilde{z}\|_2^2 < \gamma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{w}\|_2^2,$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{z} &\triangleq \begin{bmatrix} z(i, j+1) \\ z(i+1, j) \end{bmatrix}, & \|\tilde{z}\|_2^2 &\triangleq \|z(i, j+1)\|_2^2 + \|z(i+1, j)\|_2^2, \\ \tilde{w} &\triangleq \begin{bmatrix} w(i, j+1) \\ w(i+1, j) \end{bmatrix}, & \|\tilde{w}\|_2^2 &\triangleq \|w(i, j+1)\|_2^2 + \|w(i+1, j)\|_2^2.\end{aligned}$$

Définition 3.3. [Huang et al., 2013] Pour toute $i+j = L \geq Z = i_t + j_t$, soit $N_\sigma(Z, L)$ le nombre de commutations de $\sigma(i, j)$ sur l'intervalle $[Z, L]$. Si

$$N_\sigma(Z, L) \leq N_0 + \frac{(L - Z)}{\tau_a}, \quad (3.8)$$

pour $N_0 \geq 0$ et $\tau_a > 0$, alors τ_a est appelé le temps de séjour moyen. Comme couramment utilisé dans la littérature [Wang et al., 2012, Yang et al., 2018], nous supposons que $N_0 = 0$.

3.2.2 Résultats principaux

3.2.2.1 Analyse de la stabilité

Cette sous-section se focalise sur l'analyse de la stabilité exponentielle des systèmes 2-D commutés discrets (3.1), avec $w(i, j) = 0$ et $u_f(i, j) = 0$.

Théorème 3.1. [Badie et al., 2020e] Considérons le système 2-D commuté discret (3.1) avec $w(i, j) = 0$ et $u_f(i, j) = 0$, étant donné les scalaires $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 1$. S'il existe des matrices définies positives $\{P_1^k, P_2^k\} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\{Q_1^k, Q_2^k, R_1^k, R_2^k, S_1^k, S_2^k\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et toute matrice $M^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ($k \in \mathcal{N}$) satisfaisant les LMIs suivantes :

$$\Phi^k < 0, \quad k \in \mathcal{N}, \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} P_1^k \leq \mu P_1^l, & P_2^k \leq \mu P_2^l, \\ Q_1^k \leq \mu Q_1^l, & Q_2^k \leq \mu Q_2^l, \\ R_1^k \leq \mu R_1^l, & R_2^k \leq \mu R_2^l, \\ S_1^k \leq \mu S_1^l, & S_2^k \leq \mu S_2^l, \end{cases} \quad k, l \in \mathcal{N} (k > l), \quad (3.10)$$

où

$$\begin{aligned}\Phi^k &= \text{sym}(e_5^T M^k \mathcal{A}^k J) + \Gamma_1^T P_1^k \Gamma_1 - \alpha \Omega_1^T P_1^k \Omega_1 + \Gamma_2^T P_2^k \Gamma_2 - \alpha \Omega_2^T P_2^k \Omega_2 \\ &\quad + e_1^T Q_1^k e_1 - \alpha^{d_1} e_3^T Q_1^k e_3 + e_2^T Q_2^k e_2 - \alpha^{d_2} e_4^T Q_2^k e_4 \\ &\quad + (e_5 - e_1)^T [d_1 R_1^k + \frac{d_1(d_1+1)}{2} S_1^k] (e_5 - e_1) - \alpha^{d_1} (X_1^T \mathcal{R}_1^k X_1 + Y_1^T S_1^k Y_1) \\ &\quad + (e_5 - e_2)^T [d_2 R_2^k + \frac{d_2(d_2+1)}{2} S_2^k] (e_5 - e_2) - \alpha^{d_2} (X_2^T \mathcal{R}_2^k X_2 + Y_2^T S_2^k Y_2),\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}^k = [A_1^k \ A_2^k \ A_{1d}^k \ A_{2d}^k \ -I], \quad J = [e_1^T \ e_2^T \ e_3^T \ e_4^T \ e_7^T]^T,$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} e_7 \\ (d_1+1)e_5 - e_3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} e_7 \\ (d_2+1)e_6 - e_4 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ (d_1+1)e_5 - e_1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} e_2 \\ (d_2+1)e_6 - e_2 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} e_1 - e_3 \\ e_1 + e_3 - 2e_5 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} e_2 - e_4 \\ e_2 + e_4 - 2e_6 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = e_1 - e_5, \quad Y_2 = e_2 - e_6,$$

$$\mathcal{R}_1^k = \text{diag}\{R_1^k, 3R_1^k\}, \quad \mathcal{R}_2^k = \text{diag}\{R_2^k, 3R_2^k\},$$

$$e_\kappa = [0_{n \times (\kappa-1)n} \ I_{n \times n} \ 0_{n \times (7-\kappa)n}], \quad \kappa = 1, 2, \dots, 7.$$

Alors, le système (3.1) est exponentiellement stable pour tout signal de commutation avec un temps de séjour moyen satisfaisant :

$$\tau_a > \tau_a^* = -\frac{\ln(\mu)}{\ln(\alpha)}. \quad (3.11)$$

Preuve. Choisissons la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante pour le système (3.1) :

$$V^k(i, j) = V_1^k(i, j) + V_2^k(i, j), \quad (3.12)$$

avec

$$\begin{aligned} V_1^k(i, j) &= \tilde{x}_1^T(i, j)P_1^k\tilde{x}_1(i, j) + \sum_{p=i-d_1}^{i-1} \alpha^{i-p-1}x^T(p, j)Q_1^kx(p, j) \\ &\quad + d_1 \sum_{q=-d_1}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \alpha^{i-p-1}s_1^T(p, j)R_1^ks_1(p, j) \\ &\quad + \sum_{r=-d_1}^{-1} \sum_{q=r}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} \alpha^{i-p-1}s_1^T(p, j)S_1^ks_1(p, j), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} V_2^k(i, j) &= \tilde{x}_2^T(i, j)P_2^k\tilde{x}_2(i, j) + \sum_{p=j-d_1}^{j-1} \alpha^{j-p-1}x^T(i, p)Q_2^kx(i, p) \\ &\quad + d_2 \sum_{q=-d_2}^{-1} \sum_{p=j+q}^{j-1} \alpha^{j-p-1}s_2^T(i, p)R_2^ks_2(i, p) \\ &\quad + \sum_{r=-d_2}^{-1} \sum_{q=r}^{-1} \sum_{p=j+q}^{j-1} \alpha^{j-p-1}s_2^T(i, p)S_2^ks_2(i, p), \end{aligned} \quad (3.14)$$

et

$$\tilde{x}_1(i, j) = \begin{bmatrix} x(i, j) \\ \sum_{p=i-d_1}^{i-1} x(p, j) \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_2(i, j) = \begin{bmatrix} x(i, j) \\ \sum_{p=j-d_2}^{j-1} x(i, p) \end{bmatrix}.$$

Ensuite, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V_1^k(i+1, j+1) - \alpha V_1^k(i, j+1) &\leq \tilde{x}_1^T(i+1, j+1)P_1^k\tilde{x}_1(i+1, j+1) \\ &\quad - \alpha \tilde{x}_1^T(i, j+1)P_1^k\tilde{x}_1(i, j+1) + x^T(i, j+1)Q_1^kx(i, j+1) \\ &\quad - \alpha^{d_1}x^T(i-d_1, j+1)Q_1^kx(i-d_1, j+1) \\ &\quad + s_1^T(i, j+1)[d_1^2R_1^k + \frac{d_1(d_1+1)}{2}S_1^k]s_1(i, j+1) \\ &\quad - \alpha^{d_1} \sum_{p=i-d_1}^{i-1} s_1^T(p, j)R_1^ks_1(p, j) \\ &\quad - \alpha^{d_1} \sum_{q=-d_1}^{-1} \sum_{p=i+q}^{i-1} s_1^T(p, j)S_1^ks_1(p, j), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
 V_2^k(i+1, j+1) - \alpha V_2^k(i+1, j) &\leq \tilde{x}_1^T(i+1, j+1)P_2^k \tilde{x}_1(i+1, j+1) \\
 &\quad - \alpha \tilde{x}_1^T(i+1, j)P_2^k \tilde{x}_1(i+1, j) + x^T(i+1, j)Q_2^k x(i+1, j) \\
 &\quad - \alpha^{d_2} x^T(i+1, j-d_2)Q_2^k x(i+1, j-d_2) \\
 &\quad + s_2^T(i+1, j)[d_2^2 R_2^k + \frac{d_2(d_2+1)}{2} S_2^k] s_2(i+1, j) \\
 &\quad - \alpha^{d_2} \sum_{p=j-d_2}^{j-1} s_1^T(i, p)R_2^k s_2(i, p) \\
 &\quad - \alpha^{d_2} \sum_{q=-d_1}^{-1} \sum_{p=j+q}^{j-1} s_2^T(i, p)S_2^k s_2(i, p). \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

En Définissons :

$$\xi(i, j) = \text{col} \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x(i, j+1) \\ x(i+1, j) \\ x(i-d_1, j) \\ x(i, j-d_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{(d_1+1)} \sum_{p=i-d_1}^i x(p, j+1) \\ \frac{1}{(d_2+1)} \sum_{p=j-d_2}^j x(i+1, p) \\ x(i+1, j+1) \end{pmatrix} \end{array} \right\},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_1(i+1, j+1) &= \Gamma_1 \xi(i, j), & \tilde{x}_1(i, j+1) &= \Omega_1 \xi(i, j), \\
 \tilde{x}_2(i+1, j+1) &= \Gamma_2 \xi(i, j), & \tilde{x}_2(i, j+1) &= \Omega_2 \xi(i, j).
 \end{aligned}$$

L'utilisation du lemme 1.6 pour les termes à seule sommation dans (3.15) et (3.16), donne :

$$\begin{aligned}
 -\alpha^{d_1} \sum_{p=i-d_1}^{i-1} s_1^T(p, j)R_1^k s_1(p, j) &\leq -\alpha^{d_1} \xi^T(i, j)[X_1^T \mathcal{R}_1^k X_1] \xi(i, j), \\
 -\alpha^{d_2} \sum_{p=j-d_2}^{j-1} s_2^T(i, p)R_2^k s_2(i, p) &\leq -\alpha^{d_2} \xi^T(i, j)[X_2^T \mathcal{R}_2^k X_2] \xi(i, j).
 \end{aligned}$$

L'utilisation du lemme 1.7 pour les termes à double sommation dans (3.15) et (3.16), donne :

$$\begin{aligned}
 -\alpha^{d_1} \sum_{q=-d_1}^{-1} \sum_{p=i-d_1}^{i+q} s_1^T(p, j)S_1^k s_1(p, j) &\leq -\alpha^{d_1} \xi^T(i, j)[Y_1^T S_1^k Y_1] \xi(i, j), \\
 -\alpha^{d_2} \sum_{q=-d_2}^{-1} \sum_{p=j-d_2}^{j+q} s_2^T(i, p)S_2^k s_2(i, p) &\leq -\alpha^{d_2} \xi^T(i, j)[Y_2^T S_2^k Y_2] \xi(i, j).
 \end{aligned}$$

De plus, de (3.1) avec $w(i, j) = 0$ et $u_f(i, j) = 0$, et pour toute matrice libre M^k , ($k \in \mathcal{N}$) de dimension appropriée, nous avons :

$$\begin{aligned}
 0 &= 2x^T(i+1, j+1)M^k[A_1^k x(i, j+1) + A_2^k x(i+1, j) + A_{1d}^k x(i-d_1, j+1) + A_{2d}^k x(i+1, j-d_2) \\
 &\quad - x(i+1, j+1)] \\
 0 &= \xi^T(i, j)[\text{sym}(e_7^T M^k \mathcal{A}^k J)] \xi(i, j). \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

La combinaison de (3.15)-(3.17) donne :

$$\begin{aligned}
 & V_1^k(i+1, j+1) + V_2^k(i+1, j+1) - \alpha V_1^k(i, j+1) - \alpha V_2^k(i+1, j) \leq \xi^T(i, j) \{ \text{sym}(e_5^T M^k \mathcal{A}^k J) \\
 & + \Gamma_1^T P_1^k \Gamma_1 - \alpha \Omega_1^T P_1^k \Omega_1 + \Gamma_2^T P_2^k \Gamma_2 - \alpha \Omega_2^T P_2^k \Omega_2 + e_1^T Q_1^k e_1 - \alpha^{d_1} e_3^T Q_1^k e_3 + e_2^T Q_2^k e_2 - \alpha^{d_2} e_4^T Q_2^k e_4 \\
 & + (e_5 - e_1)^T [d_1 R_1^k + \frac{d_1(d_1+1)}{2} S_1^k] (e_5 - e_1) + (e_5 - e_2)^T [d_2 R_2^k + \frac{d_2(d_2+1)}{2} S_2^k] (e_5 - e_2) \\
 & - \alpha^{d_1} (X_1^T \mathcal{R}_1^k X_1 + Y_1^T \mathcal{S}_1^k Y_1) - \alpha^{d_2} (X_2^T \mathcal{R}_2^k X_2 + Y_2^T \mathcal{S}_2^k Y_2) \} \xi(i, j) \\
 & = \xi^T(i, j) [\Phi^k] \xi(i, j).
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Évidemment, si $\Phi^k < 0$ et $\xi(i, j) \neq 0$, alors :

$$V_1^k(i+1, j+1) + V_2^k(i+1, j+1) < \alpha V_1^k(i, j+1) + \alpha V_2^k(i+1, j). \tag{3.19}$$

Pour tout entier non négatif $L > Z = \max(T_1, T_2)$, nous avons : $V_1^k(0, L) = V_2^k(L, 0) = 0$. Alors, à partir de (3.19), nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i+j=L} V^k(i, j) & = V_1^k(L, 0) + V_1^k(L-1, 1) + V_1^k(L-2, 2) + \dots + V_1^k(1, L-1) + V_1^k(0, L) \\
 & \quad + V_2^k(L, 0) + V_2^k(L-1, 1) + V_2^k(L-2, 2) + \dots + V_2^k(1, L-1) + V_2^k(0, L) \\
 & < \alpha \{ V_1^k(L-1, 0) + V_1^k(L-2, 1) + V_1^k(L-3, 2) + \dots + V_1^k(0, L-1) + 0 \\
 & \quad + 0 + V_2^k(L-1, 0) + V_2^k(L-2, 1) + \dots + V_2^k(1, L-2) + V_2^k(0, L-1) \} \\
 & = \alpha \sum_{i+j=L} V^k(i, j) < \dots < \alpha^{D-Z} \sum_{i+j=Z} V^k(i, j).
 \end{aligned}$$

Nous supposons qu'il y a ν points de commutation de $\sigma(i, j)$ dans l'intervalle (Z, L) , ce qui signifie que $N_\sigma(Z, L) = \nu$. De plus $(m_{s-\nu+1}, m_{s-\nu+2}, \dots, m_{s-1}, m_s)$ représentent les points de commutation dans l'intervalle (Z, L) . Donc, pour $L > m_s$, nous avons :

$$\sum_{i+j=L} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j) < \alpha^{L-m_s} \sum_{i+j=m_s} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j). \tag{3.20}$$

En utilisant (3.10), (3.14) et (3.13), au point de commutation m_s , on obtient :

$$\sum_{i+j=m_s} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j) < \mu \sum_{i+j=m_s^-} V^{\sigma(i_{s-1}, j_{s-1})}(i, j). \tag{3.21}$$

Par conséquent, de (3.20) et (3.21), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i+j=L} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j) & < \alpha^{L-m_s} \sum_{i+j=m_s} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j) \\
 & \leq \mu \alpha^{L-m_s} \sum_{i+j=m_s^-} V^{\sigma(i_{s-1}, j_{s-1})}(i, j) \\
 & < \mu \alpha^{L-m_{s-1}} \sum_{i+j=m_{s-1}} V^{\sigma(i_{s-1}, j_{s-1})}(i, j) \\
 & \leq \mu^2 \alpha^{L-m_{s-1}} \sum_{i+j=m_{s-1}^-} V^{\sigma(i_{s-2}, j_{s-2})}(i, j) \\
 & < \mu^2 \alpha^{L-m_{s-2}} \sum_{i+j=m_{s-2}} V^{\sigma(i_{s-2}, j_{s-2})}(i, j) \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \mu^\nu \alpha^{L-m_{s-\nu}+1} \sum_{i+j=m_{s-m_{s-\nu}+1}} V^{\sigma(i_{s-\nu}, j_{s-\nu})}(i, j) \\
 &< \mu^\nu \alpha^{L-m_{s-\nu}} \sum_{i+j=m_{s-\nu}} V^{\sigma(i_{s-\nu}, j_{s-\nu})}(i, j) \\
 &\leq \mu^\nu \alpha^{L-Z} \sum_{i+j=Z} V^{\sigma(i_{s-\nu}, j_{s-\nu})}(i, j). \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

En vu de (3.12)-(3.14), il existe deux constantes positives a_1 et a_2 telles que :

$$\sum_{i+j=L} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j) \geq a_1 \sum_{i+j=L} \|x(i, j)\|^2, \tag{3.23}$$

$$\sum_{i+j=Z} V^{\sigma(i_{s-\nu}, j_{s-\nu})}(i, j) \leq a_2 \sum_{i+j=Z} \|x(i, j)\|_c^2. \tag{3.24}$$

La combinaison de (3.22), (3.23) et (3.24) permet d'écrire :

$$\sum_{i+j=L} \|x(i, j)\|^2 \leq \frac{a_2}{a_1} \mu^\nu \alpha^{L-Z} \sum_{i+j=Z} \|x(i, j)\|_c^2. \tag{3.25}$$

En utilisant (3.8), l'inégalité (3.25) peut être réécrite comme suit :

$$\sum_{i+j=L} \|x(i, j)\|^2 \leq \frac{a_2}{a_1} e^{-(-\ln(\alpha) - \ln(\mu)/\tau_a)(L-T)} \sum_{i+j=Z} \|x(i, j)\|_c^2. \tag{3.26}$$

Il résulte de (3.11) que : $(-\ln(\alpha) - \ln(\mu)/\tau_a) > 0$. Par conséquent, selon la définition 3.1, le système 2-D (3.1) est exponentiellement stable. La preuve est terminée. \square

Remarque 3.3. Il est à noter que lorsque $\mu = 1$ dans (3.11), nous obtenons $\tau_a > \tau_a^* = 0$, ce qui signifie que le signal de commutation $\sigma(i, j)$ peut être arbitraire. Dans le même cas, (3.10) donne $P_1^k = P_1^l = P_1$, $P_2^k = P_2^l = P_2$, $Q_1^k = Q_1^l = Q_1$, $Q_2^k = Q_2^l = Q_2$, $R_1^k = R_1^l = R_1$, $R_2^k = R_2^l = R_2$, $S_1^k = S_1^l = S_1$, $S_2^k = S_2^l = S_2$, ($k, l \in \mathcal{N}$) et cela signifie que le système nécessite une fonction de Lyapunov commune pour tous les sous-systèmes. En revanche, lorsque $\alpha = 1$ dans (3.11), nous obtenons $\tau_a \rightarrow \infty$, ce qui implique qu'il n'y a pas de commutation. Dans ce cas, le système commuté fonctionne sur l'un des sous-systèmes tout le temps.

Remarque 3.4. Il est généralement connu que le choix de la fonction de Lyapunov-Krasovskii joue un rôle considérable dans la réduction du conservatisme des critères de stabilité. Dans cette section, une fonction augmentée de Lyapunov-Krasovskii comprenant les termes : $\sum_{p=i-d_1}^{i-1} x(p, j)$ et $\sum_{p=j-d_2}^{j-1} x(i, p)$ a été utilisé, ce qui conduit à exploiter plus d'informations sur l'historique de $x(i, j)$, afin de dériver un critère de stabilité qui ne crée pas un conservatisme significatif dans les résultats. De plus, la fonction de Lyapunov-Krasovskii (3.12) contient des termes de triple sommation qui donnent des critères de stabilité dépendant du retard moins conservatifs.

Remarque 3.5. Il convient de noter qu'en plus du choix de la fonction de Lyapunov-Krasovskii, le conservatisme des critères de stabilité dépendants du retard dépend également des techniques utilisées pour estimer les termes de sommation apparaissant dans la différence de la fonction de Lyapunov-Krasovskii. Contrairement au lemme 1 dans [Duan et al., 2013], dans cette section, nous appliquons l'inégalité de Wirtinger pour estimer les termes de sommation apparaissant dans la différence de la fonction de Lyapunov-Krasovskii. Par conséquent, certains termes croisés supplémentaires tels que :

$$3\alpha^{d_1} \xi^T(i, j) \{ (e_1 + e_3 - 2e_5)^T R_1^k (e_1 + e_3 - 2e_5) \} \xi(i, j),$$

ont été utilisés dans les critères de stabilité, ce qui contribue à réduire le conservatisme.

3.2.2.2 Analyse de la performance H_∞

Dans cette sous-section, compte tenu des perturbations, l'analyse de la performance H_∞ pondérée pour le systèmes 2-D discret commuté (3.1) est considérée.

Théorème 3.2. [Badie et al., 2020e] *Considérons le système 2-D commuté discret (3.1) avec $u(i, j) = 0$, étant donné les scalaires $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 1$ et $\gamma > 0$. S'il existe des matrices définies positives $\{P_1^k, P_2^k\} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\{Q_1^k, Q_2^k, R_1^k, R_2^k, S_1^k, S_2^k\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et toute matrice $M^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ($k \in \mathcal{N}$) satisfaisant les conditions LMIs (3.27) et (3.10)*

$$\begin{bmatrix} \Phi_w^k - \gamma^2 f_{w1}^T f_{w1} - \gamma^2 f_{w2}^T f_{w2} & f_{z1}^{kT} & f_{z2}^{kT} \\ * & -I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad k \in \mathcal{N}, \quad (3.27)$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_w^k &= \text{sym}(f_5^T M^k \mathcal{A}_w^k J_w) + \Gamma_{w1}^T P_1^k \Gamma_{w1} - \alpha \Omega_{w1}^T P_1^k \Omega_{w1} + \Gamma_{w2}^T P_2^k \Gamma_{w2} - \alpha \Omega_{w2}^T P_2^k \Omega_{w2} \\ &\quad + f_1^T Q_1^k f_1 - \alpha^{d_1} f_3^T Q_1^k f_3 + f_2^T Q_2^k f_2 - \alpha^{d_2} f_4^T Q_2^k f_4 \\ &\quad + (f_7 - f_1)^T [d_1 R_1^k + \frac{d_1(d_1+1)}{2} S_1^k] (f_7 - f_1) - \alpha^{d_1} (X_{w1}^T \mathcal{R}_1^k X_{w1} + Y_{w1}^T S_1^k Y_{w1}) \\ &\quad + (f_7 - f_2)^T [d_2 R_2^k + \frac{d_2(d_2+1)}{2} S_2^k] (f_7 - f_2) - \alpha^{d_2} (X_{w2}^T \mathcal{R}_2^k X_{w2} + Y_{w2}^T S_2^k Y_{w2}), \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_w^k = [A_1^k \ A_2^k \ A_d^k \ A_{2d}^k \ -I \ B_{1w}^k \ B_{2w}^k], \quad J_w = [f_1^T \ f_2^T \ f_3^T \ f_4^T \ f_7^T \ f_{w1}^T \ f_{w2}^T]^T,$$

$$\Gamma_{w1} = \begin{bmatrix} f_7 \\ (d_1+1)f_5 - f_3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{w2} = \begin{bmatrix} f_7 \\ (d_2+1)f_6 - f_4 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{w1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ (d_1+1)f_5 - f_1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{w2} = \begin{bmatrix} f_2 \\ (d_2+1)f_6 - f_2 \end{bmatrix},$$

$$X_{w1} = \begin{bmatrix} f_1 - f_3 \\ f_1 + f_3 - 2f_5 \end{bmatrix}, \quad X_{w2} = \begin{bmatrix} f_2 - f_4 \\ f_2 + f_4 - 2f_6 \end{bmatrix},$$

$$Y_{w1} = f_3 - f_5, \quad Y_{w2} = f_4 - f_6,$$

$$f_\kappa = [e_\kappa \ 0_{n \times 2n_w}], \quad f_{w1} = [0_{n_w, 7n} \ I_{n_w \times n_w} \ 0_{n_w \times n_w}], \quad f_{w2} = [0_{n_w, 7n} \ 0_{n_w \times n_w} \ I_{n_w \times n_w}],$$

$$f_{z1}^k = C^k f_1 + D_w^k f_{w1}, \quad f_{z2}^k = C^k f_2 + D_w^k f_{w2}.$$

Alors, le système (3.1) avec $u(i, j) = 0$ est exponentiellement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ pondérée, pour tout signal de commutation avec un temps de séjour moyen satisfaisant (3.11).

Preuve. En vu de (3.1) avec $u(i, j) = 0$, $w(i, j) \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$, et similaire à l'égalité (3.17), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^T(i+1, j+1)M^k[A_1^k x(i, j+1) + A_2^k x(i+1, j) + A_{1d}^k x(i-d_1, j+1) + A_{2d}^k x(i+1, j-d_2) \\ &\quad + B_1^k w(i, j+1) + B_2^k w(i+1, j) - x(i+1, j+1)] \\ &= \xi_w^T(i, j)[\text{sym}(f_5^T M^k \mathcal{A}_w^k J_w)]\xi_w(i, j), \end{aligned} \quad (3.28)$$

avec $\xi_w(i, j) = [\xi^T(i, j) \ w^T(i, j+1) \ w^T(i+1, j)]^T$. En utilisant (3.28) et similaire à (3.18), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &V_1^k(i+1, j+1) + V_2^k(i+1, j+1) - \alpha V_1^k(i, j+1) - \alpha V_2^k(i+1, j) \\ &\quad + \tilde{z}^T(i, j)\tilde{z}(i, j) - \gamma^2 \tilde{w}^T(i, j)\tilde{w}(i, j) \leq \\ &\quad \xi_w^T(i, j)\{\Phi^k - \gamma^2 f_{w1}^T f_{w1} - \gamma^2 f_{w2}^T f_{w2} + f_{z1}^{kT} f_{z1}^k + f_{z2}^{kT} f_{z2}^k\}\xi_w(i, j). \end{aligned}$$

Ainsi, si $\Phi^k - \gamma^2 f_{w1}^T f_{w1} - \gamma^2 f_{w2}^T f_{w2} + f_{z1}^{kT} f_{z1}^k + f_{z2}^{kT} f_{z2}^k < 0$, ($k \in \mathcal{N}$) qui est équivalent à (3.27) par le lemme du complément de Schur (Lemme 1.4), alors on obtient :

$$\begin{aligned} & V_1^k(i+1, j+1) + V_2^k(i+1, j+1) - \alpha V_1^k(i, j+1) - \alpha V_2^k(i+1, j) \\ & + \tilde{z}^T(i, j) \tilde{z}(i, j) - \gamma^2 \tilde{w}^T(i, j) \tilde{w}(i, j) < 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Définissons $\Lambda(i, j) = \|\tilde{z}\|_2^2 - \gamma^2 \|\tilde{w}\|_2^2$, à partir de (3.29), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=L} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j) & < \alpha \sum_{i+j=L-1} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j) - \sum_{i+j=L-2} \Lambda(i, j) \\ & < \alpha^{L-m_s} \sum_{i+j=m_s} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i, j) - \sum_{m=m_s-1}^{L-2} \sum_{i+j=m} \alpha^{L-2-m} \Lambda(i, j) \\ & \leq \mu \alpha^{L-m_s} \sum_{i+j=m_s^-} V^{\sigma(i_{s-1}, j_{s-1})}(i, j) - \sum_{m=m_s-1}^{L-2} \sum_{i+j=m} \alpha^{L-2-m} \Lambda(i, j) \\ & < \mu \alpha^{L-m_s} \left[\alpha \sum_{i+j=m_s-1} V^{\sigma(i_{s-1}, j_{s-1})}(i, j) - \sum_{m=m_s-2} \Lambda(i, j) \right] \\ & \quad - \sum_{m=m_s-1}^{L-2} \sum_{i+j=m} \alpha^{L-2-m} \Lambda(i, j) \\ & = \mu^{N_\sigma(m_s-1, L)} \sum_{i+j=m_s-1} \alpha^{L-(m_s-1)} V^{\sigma(i_{s-1}, j_{s-1})}(i, j) \\ & \quad - \mu^{N_\sigma(m_s-1, L)} \sum_{m=m_s-2}^{m_s-2} \sum_{i+j=m} \alpha^{L-m_s-2} \Lambda(i, j) \\ & \quad - \mu^{N_\sigma(m_s, L)} \sum_{m=m_s-1}^{L-2} \sum_{i+j=m} \alpha^{L-2-m} \Lambda(i, j) \\ & = \sum_{i+j=m_s-1} \mu^{N_\sigma(i+j, L)} \alpha^{L-(m_s-1)} V^{\sigma(i_{s-1}, j_{s-1})}(i, j) \\ & \quad - \sum_{m=m_s-1}^{L-2} \sum_{i+j=m} \mu^{N_\sigma(m+1, L)} \alpha^{L-2-m} \Lambda(i, j) \\ & \quad \sum_{i+j=m_s-1} \mu^{N_\sigma(i+j, L)} \alpha^{L-(m_s-1)} V^{\sigma(i_{s-1}, j_{s-1})}(i, j) \\ & \quad - \sum_{m=m_s-1-1}^{L-2} \sum_{i+j=m} \mu^{N_\sigma(m+1, L)} \alpha^{L-2-m} \Lambda(i, j) \\ & < \dots \\ & < \sum_{i+j=m_1} \mu^{N_\sigma(i+j, L)} \alpha^{L-m_1} V^{\sigma(i_1, j_1)}(i, j) \\ & \quad - \sum_{m=m_1-1}^{L-2} \sum_{i+j=m} \mu^{N_\sigma(m+1, L)} \alpha^{L-2-m} \Lambda(i, j) \\ & \leq \sum_{i+j=1} \mu^{N_\sigma(i+j, L)} \alpha^{L-1} V^{\sigma(0,1)}(i, j) - \sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} \mu^{N_\sigma(m+1, L)} \alpha^{L-2-m} \Lambda(i, j). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Avec des conditions initiales nulles, nous avons : $\sum_{i+j=1} \mu^{N_\sigma(i+j,L)} \alpha^{L-1} V^{\sigma(0,1)}(i,j) = 0$. Et considérant $\sum_{i+j=L} V^{\sigma(i_s, j_s)}(i,j) \geq 0$, alors, nous pouvons obtenir à partir de (3.30) :

$$\sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} \mu^{N_\sigma(m+1,L)} \alpha^{L-2-m} \Lambda(i,j) < 0,$$

ce qui équivaut à :

$$\sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} \mu^{N_\sigma(m+1,L)} \alpha^{L-2-m} \|\tilde{z}\|_2^2 < \gamma^2 \sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} \mu^{N_\sigma(m+1,L)} \alpha^{L-2-m} \|\tilde{w}\|_2^2.$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $\mu^{-N_\sigma(1,L)}$, nous obtenons :

$$\sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} \mu^{-N_\sigma(1,m+1)} \alpha^{L-2-m} \|\tilde{z}\|_2^2 < \gamma^2 \sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} \mu^{-N_\sigma(1,m+1)} \alpha^{L-2-m} \|\tilde{w}\|_2^2.$$

De (2.9) et (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} e^{-m \ln(\alpha)} \alpha^{L-2-m} \|\tilde{z}\|_2^2 &< \gamma^2 \sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} \mu^{-N_\sigma(1,m+1)} \alpha^{L-2-m} \|\tilde{w}\|_2^2, \\ \sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} \alpha^{L-2} \|\tilde{z}\|_2^2 &< \gamma^2 \sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} \mu^{-N_\sigma(1,m+1)} \alpha^{L-2-m} \|\tilde{w}\|_2^2 \leq \gamma^2 \sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} \alpha^{L-2-m} \|\tilde{w}\|_2^2. \end{aligned}$$

De plus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{L=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} \alpha^{L-2} \|\tilde{z}\|_2^2 &< \gamma^2 \sum_{L=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-2} \sum_{i+j=m} \alpha^{L-2-m} \|\tilde{w}\|_2^2, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{L=m+2}^{\infty} \alpha^{L-2-m} \sum_{i+j=m} \alpha^m \|\tilde{z}\|_2^2 &< \gamma^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{L=m+2}^{\infty} \alpha^{L-2-m} \sum_{i+j=m} \|\tilde{w}\|_2^2. \end{aligned}$$

Et, nous avons : $\sum_{L=m+2}^{\infty} \alpha^{L-2-m} = \frac{1}{1-\alpha}$. Ainsi, il résulte de l'inégalité ci-dessus que :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i+j=m} \alpha^m \|\tilde{z}\|_2^2 &< \gamma^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i+j=m} \|\tilde{w}\|_2^2, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{i+j} \|\tilde{z}\|_2^2 &< \gamma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{w}\|_2^2. \end{aligned}$$

Selon la définition 3.2, le système (3.1) avec $u_f(i,j) = 0$ est exponentiellement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ pondérée. La preuve est terminée. \square

3.2.2.3 Synthèse de la loi de commande fiable H_∞

Dans cette sous-section, nous sommes prêts à résoudre le problème de synthèse de la loi de commande fiable H_∞ pour des systèmes 2-D commutés discrets à retards. Nous considérons tout d'abord le cas où le système en boucle fermée (3.7) a des paramètres de défaillance des actionneurs connus.

Théorème 3.3. [Badie et al., 2020e] Considérons le système 2-D commuté discret en boucle fermée (3.7) avec une matrice de défaillance des actionneurs Θ^k connue, $k \in \mathcal{N}$, étant donné les scalaires $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 1$ et $\gamma > 0$. S'il existe des matrices définies positives $\{\bar{P}_1^k, \bar{P}_2^k\} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\{\bar{Q}_1^k, \bar{Q}_2^k, \bar{R}_1^k, \bar{R}_2^k, \bar{S}_1^k, \bar{S}_2^k\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices de dimensions appropriées $W^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y^k \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ satisfaisant les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} \Psi^k & \bar{f}_{z1}^T & \bar{f}_{z2}^T \\ * & -I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad k \in \mathcal{N}, \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} \bar{P}_1^k \leq \mu \bar{P}_1^l, & \bar{P}_2^k \leq \mu \bar{P}_2^l, \\ \bar{Q}_1^k \leq \mu \bar{Q}_1^l, & \bar{Q}_2^k \leq \mu \bar{Q}_2^l, \\ \bar{R}_1^k \leq \mu \bar{R}_1^l, & \bar{R}_2^k \leq \mu \bar{R}_2^l, \\ \bar{S}_1^k \leq \mu \bar{S}_1^l, & \bar{S}_2^k \leq \mu \bar{S}_2^l, \end{cases} \quad k, l \in \mathcal{N} (k > l), \quad (3.32)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi^k &= \bar{\Phi}_w^k - \gamma^2 f_{w1}^T f_{w1} - \gamma^2 f_{w2}^T f_{w2} + \text{sym}(f_7^T B_1^k \Theta^k Y^k f_1 + f_7^T B_2^k \Theta^k Y^k f_2) \\ \bar{\Phi}_w^k &= \text{sym}(f_5^T M^k \bar{\mathcal{A}}_w^k J) + \Gamma_{w1}^T \bar{P}_1^k \Gamma_{w1} - \alpha \Omega_{w1}^T \bar{P}_1^k \Omega_{w1} + \Gamma_{w2}^T \bar{P}_2^k \Gamma_{w2} - \alpha \Omega_{w2}^T \bar{P}_2^k \Omega_{w2} \\ &\quad + f_1^T \bar{Q}_1^k f_1 - \alpha^{d_1} f_3^T \bar{Q}_1^k f_3 + f_2^T \bar{Q}_2^k f_2 - \alpha^{d_2} f_4^T \bar{Q}_2^k f_4 \\ &\quad + (f_7 - f_1)^T [d_1 \bar{R}_1^k + \frac{d_1(d_1 + 1)}{2} \bar{S}_1^k] (f_7 - f_1) - \alpha^{d_1} (X_{w1}^T \bar{\mathcal{R}}_1^k X_{w1} + Y_{w1}^T \bar{S}_1^k Y_{w1}) \\ &\quad + (f_7 - f_2)^T [d_2 \bar{R}_2^k + \frac{d_2(d_2 + 1)}{2} \bar{S}_2^k] (f_7 - f_2) - \alpha^{d_2} (X_{w2}^T \bar{\mathcal{R}}_2^k X_{w2} + Y_{w2}^T \bar{S}_2^k Y_{w2}), \\ \bar{\mathcal{A}}_w^k &= [A_1^k W^{kT} \quad A_2^k W^{kT} \quad A_{1d}^k W^{kT} \quad A_{2d}^k W^{kT} \quad -W^{kT} \quad B_{1w}^k \quad B_{2w}^k], \\ \bar{\mathcal{R}}_1^k &= \text{diag}\{\bar{R}_1^k, 3\bar{R}_1^k\}, \quad \bar{\mathcal{R}}_2^k = \text{diag}\{\bar{R}_2^k, 3\bar{R}_2^k\}, \\ \bar{f}_{z1}^k &= C^k W^{kT} f_1 + D_w^k f_{w1}, \quad \bar{f}_{z2}^k = C^k W^{kT} f_2 + D_w^k f_{w2}. \end{aligned}$$

Alors, sous la condition de temps de séjour moyen (3.11), il existe une loi de commande fiable :

$$u(i, j) = K^{\sigma(i, j)} x(i, j), \quad K^k = Y^k (W^k)^{-T}, \quad k \in \mathcal{N},$$

ce qui peut garantir que le système en boucle fermée (3.7) est exponentiellement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ pondérée.

Preuve. Remplaçons A_1^k et A_2^k dans (3.27) par $A_1^k + B_1^k \Theta^k K^k$ et $A_2^k + B_2^k \Theta^k K^k$, respectivement, et définissant :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^k &= \text{diag}\{(M^k)^{-1}, (M^k)^{-1}\}, \\ \mathcal{M}_2^k &= \text{diag}\{(M^k)^{-1}, (M^k)^{-1}, \dots, (M^k)^{-1}\} \in \mathbb{R}^{9n \times 9n} \\ \mathcal{M}^k &= \text{diag}\{\mathcal{M}_2^k, I, I, I, I\}. \end{aligned}$$

Ensuite, considérons les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} \bar{P}_1^k &= \mathcal{M}_1^k P_1^k \mathcal{M}_1^{kT}, \quad \bar{Q}_1^k = M^k Q_1^k M^{kT}, \quad \bar{R}_1^k = M^k R_1^k M^{kT}, \\ \bar{S}_1^k &= M^k S_1^k M^{kT}, \quad \bar{P}_2^k = \mathcal{M}_1^k P_2^k \mathcal{M}_1^{kT}, \quad \bar{Q}_2^k = M^k Q_2^k M^{kT}, \\ \bar{R}_2^k &= M^k R_2^k M^{kT}, \quad \bar{S}_2^k = M^k S_2^k M^{kT}, \quad Y^k = K^k M^{kT}, \\ W^k &= (M^k)^{-1}. \end{aligned}$$

Puis, multipliant à gauche et à droite (3.27) par \mathcal{M}^k et \mathcal{M}^{kT} , respectivement, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \Phi_w^k - \gamma^2 f_{w1}^T f_{w1} - \gamma^2 f_{w2}^T f_{w2} + \text{sym}(f_7^T B_1^k \Theta^k Y^k f_1 + f_7^T B_2^k \Theta^k Y^k f_2) & \bar{f}_{z1}^T & \bar{f}_{z2}^T \\ * & -I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0,$$

ce qui équivaut à (3.31). La preuve est terminée. \square

Remarque 3.6. Avec des paramètres de défaillance des actionneurs connus, le théorème 3.3 présente une condition suffisante dépendante du retard pour le problème de la commande fiable H_∞ pour une classe de systèmes 2-D discrets commutés à retards. Dans ce qui suit et sur la base des résultats du théorème 3.3, une méthode de synthèse du loi de commande fiable H_∞ sera présentée dans le cas où la matrice de défaillance des actionneurs est inconnue mais remplit les conditions dans (3.4).

Théorème 3.4. [Badie et al., 2020e] Considérons le système 2-D commuté discret en boucle fermée présenté dans (3.7), étant donné des scalaires $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 1$ et $\gamma > 0$. S'il existe des matrices définies positives : $\{\bar{P}_1^k, \bar{P}_2^k\} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\{\bar{Q}_1^k, \bar{Q}_2^k, \bar{R}_1^k, \bar{R}_2^k, \bar{S}_1^k, \bar{S}_2^k\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices de dimensions appropriées $W^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y^k \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ et des scalaires positifs $\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k$, ($k \in \mathcal{N}$) satisfaisant les conditions LMIs (3.32) et (3.33)

$$\begin{bmatrix} \Psi^k + \varepsilon_1^k f_7^T B_1^k B_1^{kT} f_7 + \varepsilon_2^k f_7^T B_2^k B_2^{kT} f_7 & \bar{f}_{z1}^T & \bar{f}_{z2}^T & f_1^T Y^{kT} \Theta_1^k & f_2^T Y^{kT} \Theta_1^k \\ * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1^k I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2^k I \end{bmatrix} < 0, \quad k \in \mathcal{N}. \quad (3.33)$$

Alors, sous la condition de temps de séjour moyen (3.11), il existe une loi de commande fiable :

$$u(i, j) = K^\sigma(i, j) x(i, j), \quad K^k = Y^k (W^k)^{-T}, \quad k \in \mathcal{N},$$

qui peut garantir que le système en boucle fermée (3.7) est exponentiellement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ pondérée.

Preuve. A partir de (3.31), en remplaçant Θ^k par $\Theta_0^k + \Delta^k$, nous obtenons la condition suivante :

$$\begin{bmatrix} \Phi_w^k - \gamma^2 f_{w1}^T f_{w1} - \gamma^2 f_{w2}^T f_{w2} + \text{sym}(f_7^T B_1^k \Theta^k Y^k f_1 + f_7^T B_2^k \Theta^k Y^k f_2) & \bar{f}_{z1}^T & \bar{f}_{z2}^T \\ * & -I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} + \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} f_7^T B_1^k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\Delta^k Y^k f_1 \ 0 \ 0] + \begin{bmatrix} f_7^T B_2^k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\Delta^k Y^k f_2 \ 0 \ 0]^T \right\} < 0.$$

Par le lemme 1.14, pour tous scalaires positifs $\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k$, nous obtenons que la condition ci-dessus peut être garantie par l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \Phi_w^k - \gamma^2 f_{w1}^T f_{w1} - \gamma^2 f_{w2}^T f_{w2} + \text{sym}(f_7^T B_1^k \Theta^k Y^k f_1 + f_7^T B_2^k \Theta^k Y^k f_2) & \bar{f}_{z1}^T & \bar{f}_{z2}^T \\ * & -I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} + \varepsilon_1^k \begin{bmatrix} f_7^T B_1^k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [B_1^{kT} f_7 \ 0 \ 0] + (\varepsilon_1^k)^{-1} \begin{bmatrix} f_1^T Y^{kT} \Theta_1^k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\Theta_1^k Y^k f_1 \ 0 \ 0] + \varepsilon_2^k \begin{bmatrix} f_7^T B_2^k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [f_7^T B_2^k \ 0 \ 0]^T + (\varepsilon_2^k)^{-1} \begin{bmatrix} f_2^T Y^{kT} \Theta_1^k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\Theta_1^k Y^k f_2 \ 0 \ 0] < 0. \quad (3.34)$$

D'après le lemme du complément de Schur (Lemme 1.4), il s'ensuit que (3.34) est équivalent à (3.33). La preuve est terminée. \square

Remarque 3.7. Dans les résultats présentés dans cette section, le paramètre α joue un rôle significatif dans le contrôle de la borne inférieure du temps de séjour moyen, ce qui peut être observé clairement à partir de (3.11). Plus précisément, avec un μ fixe, si α reçoit une valeur plus petite, la limite inférieure du temps de séjour moyen devient plus petite, ce qui peut entraîner l'instabilité du système.

Remarque 3.8. Dernièrement, l'inégalité de Wirtinger a été largement exploitée pour développer des critères de stabilité dépendants du retard moins conservatifs [Nam et al., 2015, Shu et al., 2016, Yang et al., 2019]. Cependant, il convient de souligner que la plupart des résultats existants ne considéraient que l'analyse de la stabilité, ils n'ont pas étudié le problème de la synthèse des lois de commande. La raison principale est que l'inégalité de Wirtinger et la fonction augmentée de Lyapunov-Krasovskii impliquent l'utilisation des termes croisés supplémentaires, ce qui complique la tâche de synthèse du loi de commande. Contrairement, dans cette section, nous avons résolu le problème de la synthèse des lois de commande H_∞ pour une classe de systèmes 2-D discrets commutés à retards, en utilisant la matrice commutée M^k dans (3.17), ce qui aide à faciliter la tâche de synthèse.

Remarque 3.9. De nombreux systèmes pratiques compliqués peuvent être décrits par le système (3.39), car ce modèle 2-D prend en compte plus de facteurs qui pourraient être rencontrés dans la réalité, y compris la nature commutée, les retards, la défaillance des actionneurs et les perturbations. Un exemple typique des systèmes pratiques est le procédé thermique.

3.2.3 Exemples numériques

Dans cette sous-section, deux exemples sont présentés pour démontrer l'efficacité et l'applicabilité des approches proposées. l'exemple 3.1 sera fourni pour comparer l'efficacité de la méthode de synthèse des lois de commande par retour d'état proposée, avec le résultat dans [Duan et al., 2013] lorsque les actionneurs sont normaux. L'exemple 3.2 sera fourni pour démontrer l'efficacité de la méthode de synthèse des lois de commande fiable par retour d'état, en présence des défaillances des actionneurs.

Exemple 3.1. Dans cet exemple, nous considérons les processus thermiques dans les réacteurs chimiques, qui peuvent être exprimés par l'équation différentielle suivante [Duan et al., 2013] :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - a_0^{\sigma(x, t)} T(x, t) - a_1^{\sigma(x, t)} T(x, t - h) + b^{\sigma(x, t)} \Theta^{\sigma(x, t)} u(x, t). \quad (3.35)$$

où $T(x, t)$ est la température à x (*direction*) $\in [0, x_f]$ et t (*temps*) $\in [0, \infty)$, $u(x, t)$ est la fonction d'entrée, h est le retard. $a_0^{\sigma(x, t)}$, $a_1^{\sigma(x, t)}$, $a_2^{\sigma(x, t)}$, $b^{\sigma(x, t)}$ et $\Theta^{\sigma(x, t)}$ sont des coefficients réels en fonction du signal de commutation $\sigma(x, t)$. Similaire à la technique utilisée dans [Duan et al., 2013], prenons :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \approx \frac{T(i, j) - T(i - 1, j)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \approx \frac{T(i, j + 1) - T(i, j)}{\Delta t},$$

où $T(x, t) = T(i\Delta x, j\Delta t)$, $u(x, t) = u(i\Delta x, j\Delta t)$, $\sigma(x, t) = \sigma(i\Delta x, j\Delta t)$. Δx et Δt sont respectivement des périodes de discrétisation spatiale et temporelle.

L'équation (3.35) peut être exprimée sous la forme discrète :

$$T(i, j + 1) = \left(1 - a_0^{\sigma(i, j)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) T(i, j) - \frac{\Delta t}{\Delta x} T(i - 1, j) - a_1^{\sigma(i, j)} \Delta t T(i, j - d_2) + b^{\sigma(i, j)} \Delta t u_f(i, j). \quad (3.36)$$

où $d_2 = \text{int}(h/\Delta t + 1)$, $\text{int}(\cdot)$ est une fonction qui rend la valeur entière par défaut et $u_f(i, j) = \Theta^{\sigma(i, j)} u(i, j)$.

En choisissant $x(i, j) = [T^T(i - 1, j) \ T^T(i, j)]^T$, il est facile de vérifier que l'équation (3.36) peut être convertie en système (3.1) avec

$$A_1^{\sigma(i, j)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2^{\sigma(i, j)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} & 1 - a_0^{\sigma(i, j)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \end{bmatrix}, A_{1d}^{\sigma(i, j)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{2d}^{\sigma(i, j)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_1^{\sigma(i, j)} \Delta t \end{bmatrix}, B_1^{\sigma(i, j)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2^{\sigma(i, j)} = \begin{bmatrix} 0 \\ b^{\sigma(i, j)} \Delta t \end{bmatrix}.$$

Nous supposons maintenant que le système 2-D commuté est décrit par deux sous-systèmes avec $a_0^1 = 1$, $a_1^1 = 1.2$, $b^1 = 1$, $a_0^2 = 1.2$, $a_1^2 = 1$, $b^2 = 1.2$, $\Delta x = 0.4$ et $\Delta t = 0.1$. En considérant le problème d'atténuation des perturbations H_∞ , le processus thermique est modélisé sous la forme de (3.1) avec les paramètres suivants :

Sous-système 1 :

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.25 & 0.65 \end{bmatrix}, A_{1d}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{2d}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.12 \end{bmatrix}, B_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\ B_{1w}^1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.004 \end{bmatrix}, B_{2w}^1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.004 \end{bmatrix}, C^1 = [1 \ 1], D_w^1 = 0.5.$$

Sous-système 2 :

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.23 & 0.62 \end{bmatrix}, A_{1d}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{2d}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, B_1^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.12 \end{bmatrix}, \\ B_{1w}^2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.04 \end{bmatrix}, B_{2w}^2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.04 \end{bmatrix}, C^2 = [1 \ 1], D_w^2 = 0.5.$$

L'objectif principal est d'étudier le problème de la commande H_∞ . Afin de comparer nos résultats avec ceux de [Duan et al., 2013], nous considérons le cas où $\Theta^k = I$, ($k \in \mathcal{N}$) c'est-à-dire que le système n'a pas de défaillance des actionneurs. Soit $d_1 = d_2 = 3$, $\gamma = 2$ et $\mu = 1.32$. Le Tableau 3.1 répertorie les résultats de la comparaison sur les intervalles de α et τ_a entre le théorème 2 de [Duan et al., 2013] et le théorème 3.3, le Tableau 3.1 montre également le nombre de variables de décision (Nvd) impliquées dans chaque méthode. Il est évident que le théorème 3.3 donne le plus grand domaine d'application en sacrifiant plus de nombre de variables de décision.

Tableau 3.1 – Résultats de comparaison.

Méthodes	intervalle de α	intervalle de τ_a	Nvd
Théorème 2 [Duan et al., 2013]	[0.6748, 1)	[0.7058, ∞)	64
Théorème 3.3 [Badie et al., 2020e]	[0.4459, 1)	[0.3437, ∞)	92

Tableau 3.2 – Comparaison des valeurs de γ_{min} pour différents d_2 , (Exemple 3.1).

Méthodes	$d_2 = 1$	$d_2 = 2$	$d_2 = 3$	$d_2 = 4$	$d_2 = 5$
Théorème 2 [Duan et al., 2013]	1.4559	1.5252	1.7040	4.3674	Infaisable
Théorème 3.3 [Badie et al., 2020e]	1.3828	1.4312	1.4438	1.4508	1.4593

Pour plus de comparaison, on pose $d_1 = 3$, $\alpha = 0.75$ et $\mu = 1.32$. Une comparaison détaillée entre les indices minimaux d'atténuation des perturbations γ_{min} obtenus en utilisant le théorème 2 dans [Duan et al., 2013] et le théorème 3.3, pour divers valeurs de d_2 est répertoriée dans le Tableau 3.2. Il est clair du tableau que nos résultats sont mieux marqués que ceux obtenus dans [Duan et al., 2013].

Exemple 3.2. Considérons le système 2-D discret commuté (3.1) avec $N = 2$, et les paramètres suivants :

Sous-système 1 :

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, A_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.65 \end{bmatrix}, A_{1d}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix}, A_{2d}^1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \\ B_1^1 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, B_2^1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}, B_{1w}^1 = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.04 \end{bmatrix}, B_{2w}^1 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.04 \end{bmatrix}, \\ C^1 &= [1 \ 1], D_w^1 = 0.1. \end{aligned}$$

Sous-système 2 :

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.65 \end{bmatrix}, A_{1d}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix}, A_{2d}^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \\ B_1^2 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, B_2^2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}, B_{1w}^2 = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{bmatrix}, B_{2w}^2 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.04 \end{bmatrix}, \\ C^2 &= [1 \ 1], D_w^2 = 0.1. \end{aligned}$$

Nous choisissons : $\alpha = 0.95$ et $\mu = 1.5$, et nous considérons les deux cas de défaillance possibles des actionneurs :

- **Cas 1** : Les actionneurs sont en pannes partielles (les paramètres de défaillance des actionneurs sont connus),

$$\Theta_k = \text{diag}\{0.6, 0.7\}, \quad k \in \mathcal{N}.$$

- **Cas 2** : Les actionneurs sont en pannes partielles (les paramètres de défaillance des actionneurs sont inconnus),

$$\text{diag}\{0.5, 0.6\} \leq \Theta_k \leq \text{diag}\{0.7, 0.8\}, \quad k \in \mathcal{N}.$$

En appliquant les théorèmes 3.3 et 3.4, pour les deux cas des défaillances des actionneurs et pour divers valeur de retard d , ($d = d_1 = d_2$), les indices γ_{min} de la performance H_∞ , du système en boucle fermée sont données dans le Tableau 3.3. Il convient de noter que les problèmes des cas 1 et 2 ne peuvent pas être résolus par l'approche dans [Duan et al., 2013], en raison de la défaillance des actionneurs. Le Tableau 3.3 montre clairement que la valeur de γ_{min} augmente lorsque les valeurs de défaillance des actionneurs du système augmentent également.

Tableau 3.3 – Valeurs de γ_{min} pour différents d , (Exemple 3.2).

Cas	Méthodes	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$
Cas 1	Théorème 3.3 [Badie et al., 2020e]	0.1434	0.1630	0.2204	0.3363	0.4214
Cas 2	Théorème 3.4 [Badie et al., 2020e]	0.1727	0.2613	0.5355	0.8173	1.0214

Pour vérifier les résultats, prenons $d_1 = 5$, $d_2 = 5$, $\alpha = 0.95$ et $\mu = 1.5$. En appliquant le théorème 3.3, on obtient en effet une solution réalisable avec $\gamma_{min} = 0.4214$ et les gains de la loi de commande sont donnés par :

$$K^1 = \begin{bmatrix} -0.3843 & -1.2173 \\ 1.7983 & 3.7910 \end{bmatrix}, \quad K^2 = \begin{bmatrix} -0.3936 & -1.2614 \\ 1.7269 & 3.7867 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

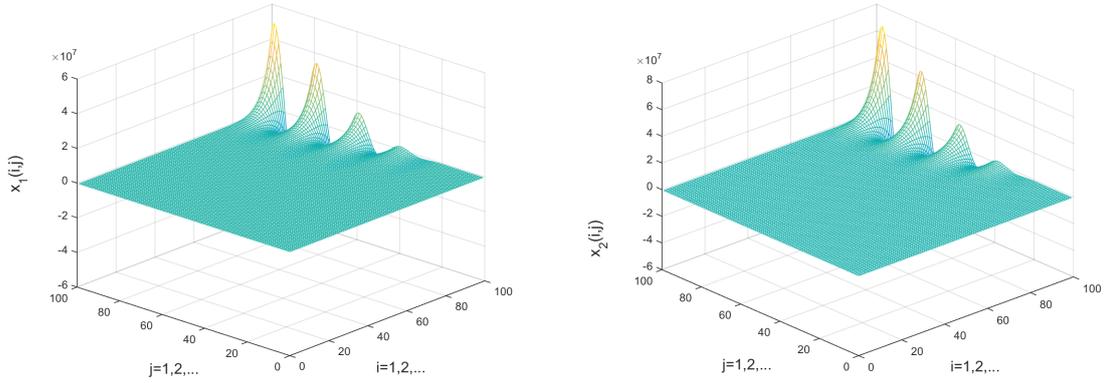


FIGURE 3.2 – Trajectoires d'état du système en boucle ouverte.

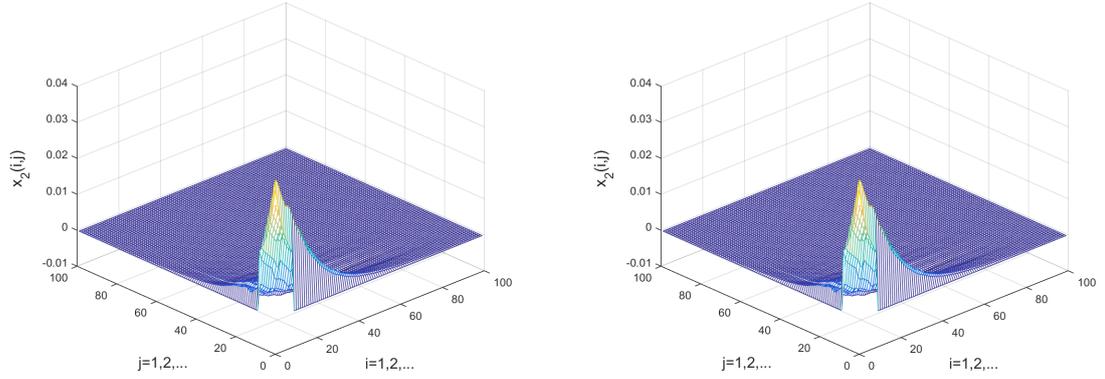


FIGURE 3.3 – Trajectoires d'état du système en boucle fermée.

De (3.11), on obtient : $\tau_a^* = \ln(\mu)/\ln(\alpha) = 7.9048$, en plus, pour la simulation on suppose que les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} x(i, j) = [0.15/(j+1) \quad 0.25/(j+1)]^T, & \forall 0 \leq j < 8, \quad -5 \leq i \leq 0, \\ x(i, j) = [0.15/(i+1) \quad 0.25/(i+1)]^T, & \forall 0 \leq i < 8, \quad -5 \leq j \leq 0, \\ x(i, j) = [0 \quad 0]^T, & \forall j \geq 8, \quad -5 \leq i \leq 0, \\ x(i, j) = [0 \quad 0]^T, & \forall i \geq 8, \quad -5 \leq j \leq 0, \end{cases} \quad (3.38)$$

et l'entrée de perturbation est :

$$w(i, j) = \exp(-0.027\pi(i + j)).$$

Les Figures 3.2 et 3.3 donnent les résultats de simulation du système en boucle ouverte et du système en boucle fermée, avec le signal de commutation présenté dans la Figure 3.4. D'après la Figure 3.2, on peut voir que le système en boucle ouverte est instable. Cependant, après avoir appliqué la loi de commande (3.37), le système en boucle fermée est stabilisé comme illustré dans la Figure 3.3 avec un signal de commutation montré dans la Figure 3.4 satisfaisant $\tau_a > 8$. À partir de ces figures, on peut confirmer que la loi de commande par retour d'état conçu est efficace.

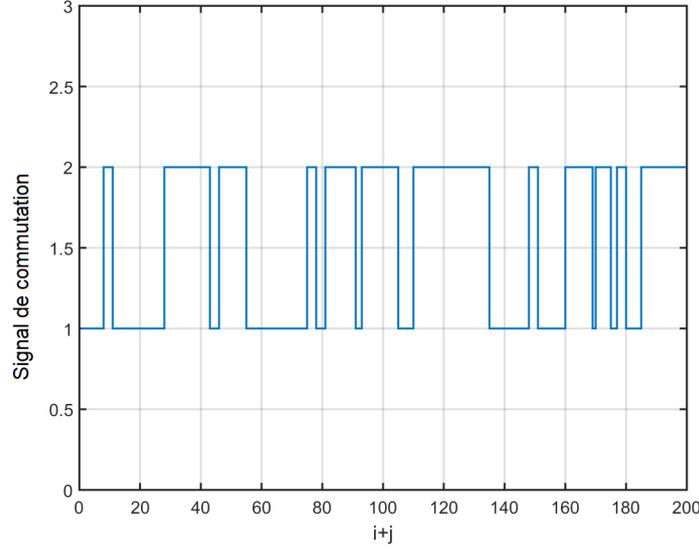


FIGURE 3.4 – Signal de commutation.

Remarque 3.10. *Il convient de noter que les conditions de la commande H_∞ dépendant du retard présentées dans cette section peuvent être utilisées pour remédier à la situation de défaillance des actionneurs, tandis que les conditions présentées dans [Duan et al., 2013] ne s’appliquent pas dans ce cas. Par conséquent, les résultats proposés dans cette section peuvent couvrir une large classe de systèmes. En revanche, selon les résultats de comparaison présentés dans les Tableaux 3.1 et 3.2, on peut voir que notre méthode donne des résultats moins conservatifs que la méthode de [Duan et al., 2013] en sacrifiant un plus grand nombre de variables de décision, qui proviennent principalement de l’utilisation de la fonction augmentée de Lyapunov-Krasovskii.*

3.3 Commande robuste H_∞ des systèmes 2-D continus incertains à retards variables

3.3.1 Formulation du problème

Cette section considère la classe suivante des systèmes 2-D continus incertains décrits par le modèle de Roesser à retards variables :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} &= \hat{A} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \hat{A}_d \begin{bmatrix} x^h(t_1 - h(t_1), t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - d(t_2)) \end{bmatrix} + \hat{B}w(t_1, t_2) + Eu(t_1, t_2), \\ z(t_1, t_2) &= C \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + C_d \begin{bmatrix} x^h(t_1 - h(t_1), t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - d(t_2)) \end{bmatrix} + Dw(t_1, t_2) + Fu(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.39)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A + \Delta A, \quad \hat{A}_d = A_d + \Delta A_d, \quad \hat{B} = B + \Delta B, \\ A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} A_{d11} & A_{d12} \\ A_{d21} & A_{d22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$C = [C_1 \ C_2], \quad C_d = [C_{d1} \ C_{d2}],$$

$x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_h}$, est le vecteur d'état horizontal, $x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_v}$ est le vecteur d'état vertical, $w(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est l'entrée de perturbation, qui appartient à $\mathcal{L}_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$ et $z(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est la sortie mesurée. $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{d11}, A_{d12}, A_{d21}, A_{d22}, B_1, B_2, E_1, E_2, C_1, C_2, C_{d1}, C_{d2}, D$ et F sont supposées être des matrices constantes avec des dimensions appropriées. $\Delta A, \Delta A_d$ et ΔB sont des matrices incertaines de la forme suivante :

$$[\Delta A \ \Delta A_d \ \Delta B] = G\mathcal{F}(t_1, t_2) [H_1 \ H_2 \ H_3], \quad (3.40)$$

où

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \quad H_1 = [H_{11} \ H_{12}], \quad H_2 = [H_{21} \ H_{22}],$$

et H_3 sont des matrices constantes réelles connues, et $\mathcal{F}(t_1, t_2)$ est une matrice continue inconnue satisfaisant :

$$\mathcal{F}^T(t_1, t_2)\mathcal{F}(t_1, t_2) \leq I. \quad (3.41)$$

$h(t_1)$ et $d(t_2)$ sont des fonctions différentielles continues, qui représentent respectivement les retards d'état variables le long de la direction horizontale et de la direction verticale, satisfaisant :

$$\begin{cases} h_1 \leq h(t_1) \leq h_2, & \dot{h}(t_1) \leq \mu_1 \leq 1, & h_{12} = h_2 - h_1, \\ d_1 \leq d(t_2) \leq d_2, & \dot{d}(t_2) \leq \mu_2 \leq 1, & d_{12} = d_2 - d_1, \end{cases} \quad (3.42)$$

avec $h_1, h_2, d_1, d_2, \mu_1$ et μ_2 sont des scalaires positifs. Les conditions initiales sont données par :

$$\begin{cases} x^h(\theta, t_2) = \phi_\theta(t_2), & -h_2 \leq \theta \leq 0, & 0 \leq t_2 \leq T_2, \\ x^h(\theta, t_2) = 0, & -h_2 \leq \theta \leq 0, & t_2 \geq T_2, \\ x^v(t_1, \delta) = \varphi_\delta(t_1), & -d_2 \leq \delta \leq 0, & 0 \leq t_1 \leq T_1, \\ x^v(t_1, \delta) = 0, & -d_2 \leq \delta \leq 0, & t_1 \geq T_1, \end{cases} \quad (3.43)$$

où $T_1 < \infty$ et $T_2 < \infty$ sont des constantes positives, $\phi_\theta(t_2)$ et $\varphi_\delta(t_1)$ sont des vecteurs continus.

Remarque 3.11. *Le terme d'incertitude fait référence aux différences entre les modèles et les systèmes réels. Les incertitudes polytopiques et bornées en norme sont les représentations les plus utilisées dans la littérature. Dans cette section, nous considérons les problèmes de la stabilité et de la commande robuste H_∞ pour les systèmes 2-D continus incertains avec des retards variables et des incertitudes bornées en norme.*

Remarque 3.12. *Lorsque les bornes inférieures des retards h_1 et d_1 sont nulles et $C_d = 0$, le système (3.39) se réduit au système étudié dans [Ghous et al., 2016a]. Par conséquent, le système (3.39) est plus général que celui considéré dans [Ghous et al., 2016a].*

Les matrices incertaines $\Delta A, \Delta A_d$ et ΔB sont dites admissibles si les conditions (3.40) et (3.41) sont valides. Lorsque $w(t_1, t_2) = 0$ et $u(t_1, t_2) = 0$, le système (3.39) devient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \hat{A}_d \begin{bmatrix} x^h(t_1 - h(t_1), t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - d(t_2)) \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Dans cette section, le problème de la commande robuste H_∞ sera résolu pour le système 2-D continu à retards (3.39) en utilisant la loi de commande par retour d'état suivante :

$$u(t_1, t_2) = K \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

où $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$ est le gain de la loi de commande à déterminer.

A partir de (3.39) et (3.45), nous obtenons le système en boucle fermée suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} &= \hat{A}_c \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \hat{A}_d \begin{bmatrix} x^h(t_1 - h(t_1), t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - d(t_2)) \end{bmatrix} + \hat{B}w(t_1, t_2), \\ z(t_1, t_2) &= C_c \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + C_d \begin{bmatrix} x^h(t_1 - h(t_1), t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - d(t_2)) \end{bmatrix} + Dw(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.46)$$

avec

$$\hat{A}_c = A + \Delta A + EK, \quad C_c = C + FK.$$

Alors, le problème de la commande robuste H_∞ à résoudre dans cette section peut être formulé comme suit :

Étant donné le système 2-D continu à retards (3.39) et un niveau d'atténuation des perturbations $\gamma > 0$, le but est de déterminer les matrices K_1 et K_2 de la loi de commande (3.45) telles que les conditions suivantes sont remplies :

- (i) Le système en boucle fermée (3.46) avec $w(t_1, t_2) = 0$ est robustement asymptotiquement stable
- (ii) Sous les conditions initiales nulles, la condition suivante est vérifiée

$$\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2, \quad (3.47)$$

pour un réel $\gamma > 0$ donné.

3.3.2 Résultats principaux

3.3.2.1 Analyse de la stabilité

Cette sous-section se concentre sur le problème de l'analyse de la stabilité robuste pour le système 2-D continu incertain à retards variables (3.44).

Théorème 3.5. [Badie et al., 2020b] *Le système 2-D continu (3.44) avec des incertitudes bornées en norme (3.40)-(3.41), des retards variables (3.42) et des conditions initiales (3.43) est robustement asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques définies positives $P^h, P^v, Q_i^h, Q_i^v, R_j^h, R_j^v, Z_k^h, Z_k^v$, matrices de dimensions appropriées M_i^h, M_i^v, S^h, S^v et des scalaires positifs ε_k , ($i = 1, 2, 3$), ($j = 1, 2$), ($k = 1, \dots, 4$), de sorte que les conditions LMIs suivantes sont faisables.*

$$\Upsilon_{11} = \begin{bmatrix} \mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{11} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1) & J_1^T \mathcal{M} G & \varepsilon_1 J_1^T H^T \\ * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.48a)$$

$$\Upsilon_{12} = \begin{bmatrix} \mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{12} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1) & J_1^T \mathcal{M} G & \varepsilon_2 J_1^T H^T \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.48b)$$

$$\Upsilon_{21} = \begin{bmatrix} \mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{21} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1) & J_1^T \mathcal{M} G & \varepsilon_3 J_1^T H^T \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.48c)$$

$$\Upsilon_{22} = \begin{bmatrix} \mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{22} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1) & J_1^T \mathcal{M} G & \varepsilon_4 J_1^T H^T \\ * & -\varepsilon_4 I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_4 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.48d)$$

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \text{diag}\{(R_2^h + Z_3^h), 3(R_2^h + Z_3^h)\} & S^h \\ * & \text{diag}\{(R_2^h + Z_4^h), 3(R_2^h + Z_4^h)\} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.48e)$$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} \text{diag}\{(R_2^v + Z_3^v), 3(R_2^v + Z_3^v)\} & S^v \\ * & \text{diag}\{(R_2^v + Z_4^v), 3(R_2^v + Z_4^v)\} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.48f)$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \Sigma + \Lambda^{hT} \Phi^h \Lambda^h + \Lambda^{vT} \Phi^v \Lambda^v, \\ \mathcal{U}_{11} &= \mathcal{G}^{hT} P^h \mathcal{D}_1^h + \mathcal{G}^{vT} P^v \mathcal{D}_1^v, \\ \mathcal{U}_{12} &= \mathcal{G}^{hT} P^h \mathcal{D}_1^h + \mathcal{G}^{vT} P^v \mathcal{D}_2^v, \\ \mathcal{U}_{21} &= \mathcal{G}^{hT} P^h \mathcal{D}_2^h + \mathcal{G}^{vT} P^v \mathcal{D}_1^v, \\ \mathcal{U}_{22} &= \mathcal{G}^{hT} P^h \mathcal{D}_2^h + \mathcal{G}^{vT} P^v \mathcal{D}_2^v,\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{G}^h = \begin{bmatrix} e_9 \\ e_1 - e_3 \\ e_3 - e_7 \end{bmatrix}, \mathcal{D}_1^h = \begin{bmatrix} e_1 \\ h_1 e_{11} \\ h_{12} e_{13} \end{bmatrix}, \mathcal{D}_2^h = \begin{bmatrix} e_1 \\ h_1 e_{11} \\ h_{12} e_{15} \end{bmatrix}, \mathcal{G}^v = \begin{bmatrix} e_{10} \\ e_2 - e_4 \\ e_4 - e_6 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_1^v = \begin{bmatrix} e_2 \\ d_1 e_{12} \\ d_{12} e_{14} \end{bmatrix}, \mathcal{D}_2^v = \begin{bmatrix} e_2 \\ d_1 e_{12} \\ d_{12} e_{16} \end{bmatrix},$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_9 \\ e_{10} \end{bmatrix}, \mathcal{M} = \begin{bmatrix} M_1^h & 0 \\ 0 & M_1^v \\ M_2^h & 0 \\ 0 & M_2^v \\ M_3^h & 0 \\ 0 & M_3^v \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{d11}^T & A_{d21}^T \\ A_{d12}^T & A_{d22}^T \\ -I_{n_h} & 0 \\ 0 & -I_{n_v} \end{bmatrix}^T, H = \begin{bmatrix} H_{11}^T \\ H_{12}^T \\ H_{21}^T \\ H_{22}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\Lambda^h = \begin{bmatrix} e_3 - e_5 \\ e_3 + e_5 - 2e_{13} \\ e_5 - e_7 \\ e_5 + e_7 - 2e_{15} \end{bmatrix}, \Lambda^v = \begin{bmatrix} e_4 - e_6 \\ e_4 + e_6 - 2e_{14} \\ e_6 - e_8 \\ e_6 + e_8 - 2e_{16} \end{bmatrix},$$

$$\Phi^h = \begin{bmatrix} \text{diag}\{R_2^h, 3R_2^h\} & S^h \\ * & \text{diag}\{R_2^h, 3R_2^h\} \end{bmatrix}, \Phi^v = \begin{bmatrix} \text{diag}\{R_2^v, 3R_2^v\} & S^v \\ * & \text{diag}\{R_2^v, 3R_2^v\} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\Sigma &= e_1^T (Q_1^h + Q_2^h + Q_3^h) e_1 - e_3^T Q_1^h e_3 - e_7^T Q_2^h e_7 - (1 - \mu_1) e_5^T Q_3^h e_5 \\ &+ e_2^T (Q_1^v + Q_2^v + Q_3^v) e_2 - e_4^T Q_1^v e_4 - e_8^T Q_2^v e_8 - (1 - \mu_2) e_6^T Q_3^v e_6 \\ &+ h_1^2 e_9^T R_1^h e_9 - (e_1 - e_3)^T R_1^h (e_1 - e_3) - 3(e_1 + e_3 - 2e_{11})^T R_1^h (e_1 + e_3 - 2e_{11}) \\ &+ d_1^2 e_{10}^T R_1^v e_{10} - (e_2 - e_4)^T R_1^v (e_2 - e_4) \\ &- 3(e_2 + e_4 - 2e_{12})^T R_1^v (e_2 + e_4 - 2e_{12}) + h_{12}^2 e_9^T R_2^h e_9 \\ &+ d_{12}^2 e_{10}^T R_2^v e_{10} + \frac{h_1^2}{2} e_9^T Z_1^h e_9 - 2(e_1 - e_{11})^T Z_1^h (e_1 - e_{11}) \\ &+ \frac{d_1^2}{2} e_{10}^T Z_1^v e_{10} - 2(e_2 - e_{12})^T Z_1^v (e_2 - e_{12}) + \frac{h_1^2}{2} e_9^T Z_2^h e_9 \\ &- 2(e_3 - e_{11})^T Z_1^h (e_3 - e_{11}) + \frac{d_1^2}{2} e_{10}^T Z_2^v e_{10} - 2(e_4 - e_{12})^T Z_2^v (e_4 - e_{12}) \\ &+ \frac{h_{12}^2}{2} e_9^T Z_3^h e_9 - 2(e_3 - e_{13})^T Z_3^h (e_3 - e_{13}) - 2(e_5 - e_{15})^T Z_3^h (e_5 - e_{15}) \\ &+ \frac{d_{12}^2}{2} e_{10}^T Z_3^v e_{10} - 2(e_4 - e_{14})^T Z_3^v (e_4 - e_{14}) - 2(e_6 - e_{16})^T Z_3^v (e_6 - e_{16}) \\ &+ \frac{h_{12}^2}{2} e_9^T Z_4^h e_9 - 2(e_5 - e_{13})^T Z_4^h (e_5 - e_{13}) - 2(e_7 - e_{15})^T Z_4^h (e_7 - e_{15}) \\ &+ \frac{d_{12}^2}{2} e_{10}^T Z_4^v e_{10} - 2(e_6 - e_{14})^T Z_4^v (e_6 - e_{14}) - 2(e_8 - e_{16})^T Z_4^v (e_8 - e_{16}),\end{aligned}$$

et les matrices élémentaires e_m , ($m = 1, 2, \dots, 16$) sont définies par :

$$e_m = \begin{cases} [0_{n_h, (p-1)n} \ N_h \ 0_{n_h, (8-p)n}], & (p = \frac{m-1}{2}), \text{ si } m \text{ est impair;} \\ [0_{n_v, (p-1)n} \ N_v \ 0_{n_v, (8-p)n}], & (p = \frac{m}{2}), \text{ si } m \text{ est pair;} \end{cases}$$

avec $N_h = [I_{n_h} \ 0_{n_h, n_v}]$, $N_v = [0_{n_v, n_h} \ I_{n_v}]$.

Preuve. Afin de prouver la stabilité du système (3.39), nous choisisons la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(t_1, t_2) = V^h(t_1, t_2) + V^v(t_1, t_2), \quad (3.49)$$

où

$$\begin{aligned} V^h(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^7 V_i^h(t_1, t_2), \\ V_0^h(t_1, t_2) &= \zeta^{hT}(t_1, t_2) P^h \zeta^h(t_1, t_2), \\ V_1^h(t_1, t_2) &= \sum_{i=1}^2 \int_{t_1-h_i}^{t_1} x^{hT}(\alpha, t_2) Q_i^h x^h(\alpha, t_2) d\alpha + \int_{t_1-h(t_1)}^{t_1} x^{hT}(\alpha, t_2) Q_3^h x^h(\alpha, t_2) d\alpha, \\ V_2^h(t_1, t_2) &= h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) R_1^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta, \\ V_3^h(t_1, t_2) &= h_{12} \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t_1+\beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) R_2^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta, \\ V_4^h(t_1, t_2) &= \int_{-h_1}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_1^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta d\lambda, \\ V_5^h(t_1, t_2) &= \int_{-h_1}^0 \int_{-h_1}^{\lambda} \int_{t_1+\beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_2^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta d\lambda, \\ V_6^h(t_1, t_2) &= \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{\lambda}^{-h_1} \int_{t_1+\beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_3^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta d\lambda, \\ V_7^h(t_1, t_2) &= \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{-h_2}^{\lambda} \int_{t_1+\beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_4^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta d\lambda, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V^v(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^7 V_i^v(t_1, t_2), \\ V_0^v(t_1, t_2) &= \zeta^{vT}(t_1, t_2) P^v \zeta^v(t_1, t_2), \\ V_1^v(t_1, t_2) &= \sum_{i=1}^2 \int_{t_2-d_i}^{t_2} x^{vT}(t_1, \alpha) Q_i^v x^v(t_2, \alpha) d\alpha + \int_{t_2-d(t_2)}^{t_2} x^{vT}(t_1, \alpha) Q_3^v x^v(t_1, \alpha) d\alpha, \\ V_2^v(t_1, t_2) &= d_1 \int_{-d_1}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha) R_1^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta, \\ V_3^v(t_1, t_2) &= d_{12} \int_{-d_2}^{-d_1} \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha) R_2^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta, \\ V_4^v(t_1, t_2) &= \int_{-d_1}^0 \int_{\lambda}^0 \int_{d_1+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(\alpha, t_2) Z_1^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta d\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_5^v(t_1, t_2) &= \int_{-d_1}^0 \int_{-d_1}^\lambda \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(\alpha, t_2) Z_2^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta d\lambda, \\
 V_6^v(t_1, t_2) &= \int_{-d_2}^{-d_1} \int_{-\lambda}^{-d_1} \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha) Z_3^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta d\lambda, \\
 V_7^v(t_1, t_2) &= \int_{-d_2}^{-d_1} \int_{-d_2}^\lambda \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha) Z_4^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta d\lambda,
 \end{aligned}$$

avec

$$\zeta^h(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ \int_{t_1-h_1}^{t_1} x^h(\alpha, t_2) d\alpha \\ \int_{t_1-h_2}^{t_1-h_1} x^h(\alpha, t_2) d\alpha \end{bmatrix}, \quad \zeta^v(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} x^v(t_1, t_2) \\ \int_{t_2-d_1}^{t_2} x^v(t_1, \alpha) d\alpha \\ \int_{t_2-d_2}^{t_2-d_1} x^v(t_1, \alpha) d\alpha \end{bmatrix},$$

et $\dot{x}^h(\alpha, t_2) = \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \Big|_{t_1=\alpha}$, $\dot{x}^v(t_1, \alpha) = \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \Big|_{t_2=\alpha}$.

En définissant :

$$\xi(t_1, t_2) = \text{col} \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \\ x^h(t_1 - h_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - d_1) \\ x^h(t_1 - h(t_1), t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - d(t_2)) \\ x^h(t_1 - h_2, t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - d_2) \\ \dot{x}^h(t_1, t_2) \\ \dot{x}^v(t_1, t_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \int_{t_1-h_1}^{t_1} x^h(\alpha, t_2) d\alpha \\ \frac{1}{d_1} \int_{t_2-d_1}^{t_2} x^v(t_2, \alpha) d\alpha \\ \frac{1}{h(t_1)-h_1} \int_{t_1-h(t_1)}^{t_1-h_1} x^h(\alpha, t_2) d\alpha \\ \frac{1}{d(t_2)-d_1} \int_{t_2-d(t_2)}^{t_2-d_1} x^v(t_2, \alpha) d\alpha \\ \frac{1}{h_2-h(t_1)} \int_{t_1-h_2}^{t_1-h(t_1)} x^h(\alpha, t_2) d\alpha \\ \frac{1}{d_2-d(t_2)} \int_{t_2-d_2}^{t_2-d(t_2)} x^v(t_2, \alpha) d\alpha \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

Et calculant la dérivée unidirectionnelle de (3.49), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} &= 2\xi^{hT}(t_1, t_2) \mathcal{G}^{hT} P^h \mathcal{D}^h \xi(t_1, t_2) + x^{hT}(t_1, t_2) (Q_1^h + Q_2^h + Q_3^h) x^h(t_1, t_2) \\
 &\quad - x^{hT}(t_1 - h_1, t_2) Q_1^h x^h(t_1 - h_1, t_2) - x^{hT}(t_1 - h_2, t_2) Q_1^h x^h(t_1 - h_2, t_2) \\
 &\quad - (1 - \dot{h}(t_1)) x^{hT}(t_1 - h(t_1), t_2) Q_1^h x^h(t_1 - h(t_1), t_2) \\
 &\quad + \frac{h_1^2}{2} \dot{x}^{hT}(t_1, t_2) (2R_1^h + Z_1^h + Z_2^h) \dot{x}^h(t_1, t_2) \\
 &\quad + \frac{h_{12}^2}{2} \dot{x}^{hT}(t_1, t_2) (2R_2^h + Z_3^h + Z_4^h) \dot{x}^h(t_1, t_2) \\
 &\quad - h_1 \int_{t_1-h_1}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) R_1^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha \\
 &\quad - h_{12} \int_{t_1-h_2}^{t_1-h_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) R_2^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha \\
 &\quad - \int_{-h_1}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_1^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta \\
 &\quad - \int_{-h_1}^0 \int_{t_1-h_1}^{t_1+\beta} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_2^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta \\
 &\quad - \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t_1+\beta}^{t_1-h_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_3^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta \\
 &\quad - \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t_1-h_2}^{t_1+\beta} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_4^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta,
 \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{D}^h = [e_1^T \ h_1 e_{11}^T \ (h_2 - h(t_1))e_{13}^T + (h(t_1) - h_1)e_{15}^T]^T,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= 2\xi^{vT}(t_1, t_2)\mathcal{G}^{vT}P^v\mathcal{D}^v\xi^v(t_1, t_2) + x^{vT}(t_1, t_2)(Q_1^v + Q_2^v + Q_3^v)x^v(t_1, t_2) \\ &\quad - x^{vT}(t_1, t_2 - d_1)Q_1^v x^v(t_1, t_2 - d_1) - x^{vT}(t_1, t_2 - d_2)Q_2^v x^v(t_1, t_2 - d_2) \\ &\quad - (1 - \dot{d}(t_2))x^{vT}(t_1, t_2 - d(t_2))Q_1^v x^v(t_1, t_2 - d(t_2)) \\ &\quad + \frac{d_1^2}{2}\dot{x}^{vT}(t_1, t_2)(2R_1^v + Z_1^v + Z_2^v)\dot{x}^v(t_1, t_2) \\ &\quad + \frac{d_{12}^2}{2}\dot{x}^{vT}(t_1, t_2)(2R_2^v + Z_3^v + Z_4^v)\dot{x}^v(t_1, t_2) \\ &\quad - d_1 \int_{t_2-d_1}^{t_2} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha)R_1^v \dot{x}^v(t_1, \alpha)d\alpha \\ &\quad - d_{12} \int_{t_2-d_2}^{t_2-d_1} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha)R_2^v \dot{x}^v(t_1, \alpha)d\alpha \\ &\quad - \int_{-d_1}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(t_2, \alpha)Z_1^v \dot{x}^v(t_1, \alpha)d\alpha d\beta \\ &\quad - \int_{-d_1}^0 \int_{t_2-d_1}^{t_2+\beta} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha)Z_2^v \dot{x}^v(t_1, \alpha)d\alpha d\beta \\ &\quad - \int_{-d_2}^{-d_1} \int_{t_2+\beta}^{t_2-d_1} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha)Z_3^v \dot{x}^v(t_1, \alpha)d\alpha d\beta \\ &\quad - \int_{-d_2}^{-d_1} \int_{t_2-d_2}^{t_2+\beta} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha)Z_4^v \dot{x}^v(t_1, \alpha)d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{D}^v = [e_2^T \ d_1 e_{12}^T \ (d_2 - d(t_2))e_{14}^T + (d(t_2) - d_1)e_{16}^T]^T.$$

En définissant $\lambda^h = \frac{h(t_1)-h_1}{h_{12}}$ et $\lambda^v = \frac{d(t_2)-d_1}{d_{12}}$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^h &= \lambda^h \mathcal{D}_1^h + (1 - \lambda^h) \mathcal{D}_2^h, \\ &= \lambda^v \lambda^h \mathcal{D}_1^h + (1 - \lambda^v) \lambda^h \mathcal{D}_1^h + \lambda^v (1 - \lambda^h) \mathcal{D}_2^h + (1 - \lambda^v) (1 - \lambda^h) \mathcal{D}_2^h, \\ \mathcal{D}^v &= \lambda^v \mathcal{D}_1^v + (1 - \lambda^v) \mathcal{D}_2^v, \\ &= \lambda^h \lambda^v \mathcal{D}_1^v + (1 - \lambda^h) \lambda^v \mathcal{D}_1^v + \lambda^h (1 - \lambda^v) \mathcal{D}_2^v + (1 - \lambda^h) (1 - \lambda^v) \mathcal{D}_2^v. \end{aligned}$$

Il résulte des inégalités intégrales dans le lemme 1.9 et lemme 1.10 que :

$$\begin{aligned} \star h_1 \int_{t_1-h_1}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) R_1^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha &\geq \xi^T(t_1, t_2) \{ (e_1 - e_3)^T R_1^h (e_1 - e_3) \\ &\quad + 3(e_1 + e_3 - 2e_{11})^T R_1^h (e_1 + e_3 - 2e_{11}) \} \xi(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.50a)$$

$$\begin{aligned} \star d_1 \int_{t_2-d_1}^{t_2} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha) R_1^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha &\geq \xi^T(t_1, t_2) \{ (e_2 - e_4)^T R_1^v (e_2 - e_4) \\ &\quad + 3(e_2 + e_4 - 2e_{12})^T R_1^v (e_2 + e_4 - 2e_{12}) \} \xi(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.50b)$$

$$\star h_{12} \int_{t_1-h_2}^{t_1-h_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) R_2^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha = h_{12} \int_{t_1-h(t_1)}^{t_1-h_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) R_2^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha$$

$$\begin{aligned}
 & + h_{12} \int_{t_1-h_2}^{t_1-h(t_1)} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) R_2^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha \geq \\
 & \frac{h_{12}}{h_2 - h(t_1)} \xi^T(t_1, t_2) \{ (e_5 - e_7)^T R_2^h (e_5 - e_7) \\
 & + 3(e_5 + e_7 - 2e_{15})^T R_2^h (e_5 + e_7 - 2e_{15}) \} \xi(t_1, t_2) \\
 & + \frac{h_{12}}{h(t_1) - h_1} \xi^T(t_1, t_2) \{ (e_3 - e_5)^T R_2^h (e_3 - e_5) \\
 & + 3(e_3 + e_5 - 2e_{13})^T R_2^h (e_3 + e_5 - 2e_{13}) \} \xi(t_1, t_2), \tag{3.50c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \star d_{12} \int_{t_2-d_2}^{t_2-d_1} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha) R_2^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha & = d_{12} \int_{t_2-d(t_2)}^{t_2-d_1} \dot{x}^{vT}(t_2, \alpha) R_2^v \dot{x}^v(t_2, \alpha) d\alpha \\
 & + d_{12} \int_{t_2-d_2}^{t_2-d(t_2)} \dot{x}^{vT}(t_2, \alpha) R_2^v \dot{x}^v(t_2, \alpha) d\alpha \geq \\
 & \frac{d_{12}}{d_2 - d(t_2)} \xi^T(t_1, t_2) \{ (e_6 - e_8)^T R_2^v (e_6 - e_8) \\
 & + 3(e_6 + e_8 - 2e_{16})^T R_2^v (e_6 + e_8 - 2e_{16}) \} \xi(t_1, t_2) \\
 & + \frac{d_{12}}{d(t_2) - d_1} \xi^T(t_1, t_2) \{ (e_4 - e_6)^T R_2^v (e_4 - e_6) \\
 & + 3(e_4 + e_6 - 2e_{14})^T R_2^v (e_4 + e_6 - 2e_{14}) \} \xi(t_1, t_2), \tag{3.50d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \star \int_{-h_1}^0 \int_{t_1+\beta}^{t_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_1^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta & \geq \\
 \xi^T(t_1, t_2) \{ 2(e_1 - e_{11})^T Z_1^h (e_1 - e_{11}) \} \xi(t_1, t_2), \tag{3.50e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \star \int_{-d_1}^0 \int_{t_2+\beta}^{t_2} \dot{x}^{vT}(t_2, \alpha) Z_1^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta & \geq \\
 \xi^T(t_1, t_2) \{ 2(e_2 - e_{12})^T Z_1^v (e_2 - e_{12}) \} \xi(t_1, t_2), \tag{3.50f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \star \int_{-h_1}^0 \int_{t_1-h_1}^{t_1+\beta} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_2^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta & \\
 \xi^T(t_1, t_2) \{ 2(e_3 - e_{11})^T Z_2^h (e_3 - e_{11}) \} \xi(t_1, t_2), \tag{3.50g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \star \int_{-d_1}^0 \int_{t_2-d_1}^{t_2+\beta} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha) Z_2^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta & \\
 \xi^T(t_1, t_2) \{ 2(e_4 - e_{12})^T Z_2^v (e_4 - e_{12}) \} \xi(t_1, t_2), \tag{3.50h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \star \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t_1+\beta}^{t_1-h_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_3^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta & = \\
 \int_{-h(t_1)}^{-h_1} \int_{t_1+\beta}^{t_1-h_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_3^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta \\
 + \int_{-h_2}^{-h(t_1)} \int_{t_1+\beta}^{t_1-h(t_1)} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_3^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta \\
 + (h_2 - h(t_1)) \int_{t_1-h(t_1)}^{t_1-h_1} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_3^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta \geq \\
 \xi^T(t_1, t_2) \{ 2(e_3 - e_{13})^T Z_3^h (e_3 - e_{13}) + 2(e_5 - e_{15})^T Z_3^h (e_5 - e_{15}) \\
 + \frac{h_2 - h(t_1)}{h(t_1) - h_1} (e_3 - e_5)^T Z_3^h (e_3 - e_5) \}
 \end{aligned}$$

$$+ 3 \frac{h_2 - h(t_1)}{h(t_1) - h_1} (e_3 + e_5 - 2e_{13})^T Z_3^h (e_3 + e_5 - 2e_{13}) \} \xi(t_1, t_2), \quad (3.50i)$$

$$\begin{aligned} \star \int_{-d_2}^{-d_1} \int_{t_2+\beta}^{t_2-d_1} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha) Z_3^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta = \\ \int_{-d(t_2)}^{-d_1} \int_{t_2+\beta}^{t_2-d_1} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha) Z_3^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta \\ + \int_{-d_2}^{-d(t_2)} \int_{t_2+\beta}^{t_2-d(t_2)} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha) Z_3^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta \\ + (d_2 - d(t_2)) \int_{t_2-d(t_2)}^{t_2-d_2} \dot{x}^{vT}(t_2, \alpha) Z_3^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta \geq \\ \xi^T(t_1, t_2) \{ 2(e_4 - e_{14})^T Z_3^v (e_4 - e_{14}) + 2(e_6 - e_{16})^T Z_3^v (e_6 - e_{16}) \\ + \frac{d_2 - d(t_2)}{d(t_2) - d_1} (e_4 - e_6)^T Z_3^v (e_4 - e_6) \\ + 3 \frac{d_2 - d(t_2)}{d(t_2) - d_1} (e_4 + e_6 - 2e_{14})^T Z_3^v (e_4 + e_6 - 2e_{14}) \} \xi(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.50j)$$

$$\begin{aligned} \star \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t_1-h_2}^{t_1+\beta} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_4^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta = \\ \int_{-h(t_1)}^{-h_1} \int_{t_1-h(t_1)}^{t_1+\beta} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_4^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta \\ + \int_{-h_2}^{-h(t_1)} \int_{t_1-h_2}^{t_1+\beta} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_4^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta \\ + (h(t_1) - h_1) \int_{t_1-h_2}^{t_1-h(t_1)} \dot{x}^{hT}(\alpha, t_2) Z_4^h \dot{x}^h(\alpha, t_2) d\alpha d\beta \geq \\ \xi^T(t_1, t_2) \{ 2(e_5 - e_{13})^T Z_4^h (e_5 - e_{13}) \} \xi(t_1, t_2) + 2(e_7 - e_{15})^T Z_4^h (e_7 - e_{15}) \\ + \frac{h(t_1) - h_1}{h_2 - h(t_1)} (e_5 - e_7)^T Z_4^h (e_5 - e_7) \\ + 3 \frac{h(t_1) - h_1}{h_2 - h(t_1)} (e_5 + e_7 - 2e_{15})^T Z_4^h (e_5 + e_7 - 2e_{15}) \} \xi(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.50k)$$

$$\begin{aligned} \star \int_{-d_2}^{-d_1} \int_{t_2-d_2}^{t_2+\beta} \dot{x}^{vT}(t_1, \alpha) Z_4^v \dot{x}^v(t_1, \alpha) d\alpha d\beta = \\ \int_{-d(t_2)}^{-d_1} \int_{t_2-d(t_2)}^{t_2+\beta} \dot{x}^{vT}(t_2, \alpha) Z_4^v \dot{x}^h(t_2, \alpha) d\alpha d\beta \\ + \int_{-d_2}^{-d(t_2)} \int_{t_2-d_2}^{t_2+\beta} \dot{x}^{vT}(t_2, \alpha) Z_4^v \dot{x}^v(t_2, \alpha) d\alpha d\beta \\ + (d(t_2) - d_1) \int_{t_2-d_2}^{t_2-d(t_2)} \dot{x}^{vT}(t_2, \alpha) Z_4^v \dot{x}^v(t_2, \alpha) d\alpha d\beta \geq \\ \xi^T(t_1, t_2) \{ 2(e_6 - e_{14})^T Z_4^v (e_6 - e_{14}) + 2(e_8 - e_{16})^T Z_4^v (e_8 - e_{16}) \\ + \frac{d(t_2) - d_1}{d_2 - d(t_2)} (e_6 - e_8)^T Z_4^v (e_6 - e_8) \\ + 3 \frac{d(t_2) - d_1}{d_2 - d(t_2)} (e_6 + e_8 - 2e_{16})^T Z_4^v (e_6 + e_8 - 2e_{16}) \} \xi(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (3.50l)$$

Selon le lemme 1.12, nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\lambda^h} \xi(t_1, t_2)^T \{ (e_3 - e_5)^T (R_2^h + Z_3^h) (e_3 - e_5) \\
 & \quad + 3(e_3 + e_5 - 2e_{13})^T (R_2^h + Z_3^h) (e_3 + e_5 - 2e_{13}) \} \xi(t_1, t_2) \\
 & + \frac{1}{1 - \lambda^h} \xi(t_1, t_2)^T \{ (e_5 - e_7)^T (R_2^h + Z_4^h) (e_5 - e_7) \\
 & \quad + 3(e_5 + e_7 - 2e_{15})^T (R_2^h + Z_4^h) (e_5 + e_7 - 2e_{15}) \} \xi(t_1, t_2) \\
 & - \xi(t_1, t_2)^T \{ (e_3 - e_5)^T Z_3^h (e_3 - e_5) + (e_3 + e_5 - 2e_{13})^T Z_3^h (e_3 + e_5 - 2e_{13}) \\
 & \quad + (e_5 - e_7)^T Z_4^h (e_5 - e_7) + 3(e_5 + e_7 - 2e_{15})^T Z_4^h (e_5 + e_7 - 2e_{15}) \} \xi(t_1, t_2) \\
 & \geq \xi^T(t_1, t_2) \Lambda_h^T \Phi_h \Lambda^h \xi(t_1, t_2),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\lambda^v} \xi(t_1, t_2)^T \{ (e_4 - e_6)^T (R_2^v + Z_3^v) (e_4 - e_6) \\
 & \quad + 3(e_4 + e_6 - 2e_{14})^T (R_2^v + Z_3^v) (e_4 + e_6 - 2e_{14}) \} \xi(t_1, t_2) \\
 & + \frac{1}{1 - \lambda^h} \xi(t_1, t_2)^T \{ (e_6 - e_8)^T (R_2^v + Z_4^v) (e_6 - e_8) \\
 & \quad + 3(e_6 + e_8 - 2e_{16})^T (R_2^v + Z_4^v) (e_6 + e_8 - 2e_{16}) \} \xi(t_1, t_2) \\
 & - \xi(t_1, t_2)^T \{ (e_4 - e_6)^T Z_3^v (e_4 - e_6) + (e_4 + e_6 - 2e_{14})^T Z_3^v (e_4 + e_6 - 2e_{14}) \\
 & \quad + (e_6 - e_8)^T Z_4^v (e_6 - e_8) + 3(e_6 + e_8 - 2e_{16})^T Z_4^v (e_6 + e_8 - 2e_{16}) \} \xi(t_1, t_2) \\
 & \geq \xi^T(t_1, t_2) \Lambda_v^T \Phi_v \Lambda^v \xi(t_1, t_2).
 \end{aligned}$$

D'après (3.44), pour toutes matrices libres M_1^h , M_2^h , M_3^h , M_1^v , M_2^v et M_3^v , avec des dimensions appropriées, nous avons :

$$\begin{aligned}
 0 & = 2 \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1^h & 0 \\ 0 & M_1^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^h(t_1 - h(t_1), t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - d(t_2)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_2^h & 0 \\ 0 & M_2^v \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_3^h & 0 \\ 0 & M_3^v \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \\
 & \times \left\{ \hat{A} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \hat{A}_d \begin{bmatrix} x^h(t_1 - h(t_1), t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - d(t_2)) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} \right\} \\
 & = \xi^T(t_1, t_2) \{ \text{sym}(J_1^T \mathcal{M}(\mathcal{A} + G\mathcal{F}(t_1, t_2)H)J_1) \} \xi(t_1, t_2). \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

Alors, la combinaison (3.50a)-(3.53) donne :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_u(t_1, t_2) & \leq \xi^T(t_1, t_2) \{ \mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1 + J_1^T G \mathcal{F}(t_1, t_2) H J_1) \} \xi(t_1, t_2) \\
 & = \xi^T(t_1, t_2) \{ \lambda^h \lambda^v \Pi_{11} + (1 - \lambda^h) \lambda^v \Pi_{12} + \lambda^h (1 - \lambda^v) \Pi_{21} \\
 & \quad + (1 - \lambda^h) (1 - \lambda^v) \Pi_{22} \} \xi(t_1, t_2),
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Pi_{11} & = \mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{11} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1 + J_1^T \mathcal{M} G \mathcal{F}(t_1, t_2) H J_1), \\
 \Pi_{12} & = \mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{12} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1 + J_1^T \mathcal{M} G \mathcal{F}(t_1, t_2) H J_1), \\
 \Pi_{21} & = \mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{21} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1 + J_1^T \mathcal{M} G \mathcal{F}(t_1, t_2) H J_1), \\
 \Pi_{22} & = \mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{22} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1 + J_1^T \mathcal{M} G \mathcal{F}(t_1, t_2) H J_1).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\Pi_{11} < 0$, $\Pi_{12} < 0$, $\Pi_{21} < 0$ et $\Pi_{22} < 0$, sont satisfaits, alors $\dot{V}_u(t_1, t_2) < 0$, ce qui garantit la stabilité asymptotique robuste du système (3.44) selon le lemme 2.1. Ensuite, en appliquant le lemme 1.13, s'il existe des scalaires positifs ε_1 , ε_2 , ε_3 et ε_4 , les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{11} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1) + \varepsilon_1^{-1} J_1^T \mathcal{M} G G^T \mathcal{M}^T J_1 + \varepsilon_1 J_1^T H^T H J_1 < 0, \quad (3.54a)$$

$$\mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{12} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1) + \varepsilon_2^{-1} J_1^T \mathcal{M} G G^T \mathcal{M}^T J_1 + \varepsilon_2 J_1^T H^T H J_1 < 0, \quad (3.54b)$$

$$\mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{21} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1) + \varepsilon_3^{-1} J_1^T \mathcal{M} G G^T \mathcal{M}^T J_1 + \varepsilon_3 J_1^T H^T H J_1 < 0, \quad (3.54c)$$

$$\mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{22} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1) + \varepsilon_4^{-1} J_1^T \mathcal{M} G G^T \mathcal{M}^T J_1 + \varepsilon_4 J_1^T H^T H J_1 < 0. \quad (3.54d)$$

En utilisant le lemme 1.4, les inégalités (3.48a),(3.48b),(3.48c) et (3.48d) sont équivalentes aux conditions (3.54a),(3.54b),(3.54c) et (3.54d), respectivement. Ceci complète la preuve. \square

En absence des incertitudes, le théorème 3.1 se réduit au corollaire suivant.

Corollaire 3.1. [Badie et al., 2020b] *Le système 2-D continu (3.44) sans incertitudes (3.40)-(3.41), à retards variables (3.42) et les conditions initiales (3.43) est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices symétriques, définies positives P^h , P^v , Q_i^h , Q_i^v , R_j^h , R_j^v , Z_k^h , Z_k^v et des matrices de dimensions appropriées M_i^h , M_i^v , S^h , S^v , ($i = 1, 2, 3$), ($j = 1, 2$), ($k = 1, \dots, 4$), tels que les LMIs (3.48e), (3.48f), (3.55a), (3.55b), (3.55c) et (3.55d) sont faisables.*

$$\mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{11} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1) < 0, \quad (3.55a)$$

$$\mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{12} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1) < 0, \quad (3.55b)$$

$$\mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{21} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1) < 0, \quad (3.55c)$$

$$\mathcal{W} + \text{sym}(\mathcal{U}_{22} + J_1^T \mathcal{M} \mathcal{A} J_1) < 0, \quad (3.55d)$$

Remarque 3.13. *Les nombres de variables de décision utilisés dans le corollaire 3.1 et le théorème 1 dans [Ghous et al., 2016a] sont $12n_h^2 + 12n_v^2 + 6n_h + 6n_v$ et $11.5n_h^2 + 11.5n_v^2 + 2.5n_h + 2.5n_v$, respectivement.*

Remarque 3.14. *Il est bien connu que le choix de la fonction de Lyapunov-Krasovskii joue un rôle important dans la réduction de conservatisme des critères de la stabilité. Dans cette section, une fonction augmentée de Lyapunov-Krasovskii incluant certains termes intégraux a été utilisée, ce qui conduit à exploiter plus d'informations sur les tailles des retards, afin de développer une condition de la stabilité qui ne crée pas de conservatisme significatif dans les résultats. De plus, par rapport aux résultats existants, la fonction de Lyapunov-Krasovskii utilisée dans cette section contient quelques termes supplémentaires à triple intégrale, qui jouent un rôle important dans la réduction de conservatisme. À notre connaissance, c'est la première fois que cette fonction de Lyapunov-Krasovskii est utilisée pour résoudre le problème de la stabilité robuste dépendante du retard pour les systèmes 2-D continus à retards variables.*

Remarque 3.15. *Il est bien connu que le conservatisme des critères de stabilité dépendants du retard dépend non seulement du choix de la fonction de Lyapunov-Krasovskii mais également de l'estimation des termes intégraux apparaissant dans la dérivée de certaines fonctions de Lyapunov-Krasovskii. Différent de la technique des matrices de pondération libres utilisée dans [Ghous et al., 2016a], Dans cette section, on a utilisé l'inégalité de Wirtinger pour estimer la dérivée de la fonction de Lyapunov-Krasovskii. En conséquence, des termes croisés supplémentaires tels que :*

$$3 \frac{h_{12}}{h_2 - h(t_1)} \xi^T(t_1, t_2) \{ (e_5 + e_7 - 2e_{15})^T R_2^h (e_5 + e_7 - 2e_{15}) \} \xi(t_1, t_2)$$

ont été utilisés dans la condition de stabilité dépendante du retard, qui sont efficaces dans la réduction du conservatisme.

3.3.2.2 Analyse de la performance H_∞

Théorème 3.6. [Badie et al., 2020b] Pour des scalaires donnés $0 \leq h_1 \leq h_2$, $0 \leq d_1 \leq d_2$, μ_1 , μ_2 et $\gamma > 0$, le système 2-D continu à retards (3.39) avec $u(t_1, t_2) = 0$ est robustement asymptotiquement stable et satisfait la condition (3.47), s'il existe des matrices symétriques définies positives P^h , P^v , Q_i^h , Q_i^v , R_j^h , R_j^v , Z_k^h , Z_k^v , des matrices de dimensions appropriées M_i^h , M_i^v , S^h , S^v et des scalaires positifs ε_k , ($i = 1, 2, 3$), ($j = 1, 2$), ($k = 1, \dots, 4$), tels que les conditions LMIs (3.48e), (3.48f), (3.56a), (3.56b), (3.56c) et (3.56d), sont vérifiées.

$$\Upsilon_{11w} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_{11w} + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w) - \gamma^2 f_w^T f_w & f_z^T & J_w^T \mathcal{M}_w G & \varepsilon_1 J_w^T H_w^T \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.56a)$$

$$\Upsilon_{12w} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_{12w} + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w) - \gamma^2 f_w^T f_w & f_z^T & J_w^T \mathcal{M}_w G & \varepsilon_2 J_w^T H_w^T \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.56b)$$

$$\Upsilon_{21w} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_{21w} + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w) - \gamma^2 f_w^T f_w & f_z^T & J_w^T \mathcal{M}_w G & \varepsilon_3 J_w^T H_w^T \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.56c)$$

$$\Upsilon_{22w} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_{22w} + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w) - \gamma^2 f_w^T f_w & f_z^T & J_w^T \mathcal{M}_w G & \varepsilon_4 J_w^T H_w^T \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_4 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_4 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.56d)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_w &= \Sigma_w + \Lambda_w^{hT} \Phi^h \Lambda_w^h + \Lambda_w^{vT} \Phi^v \Lambda_w^v, \\ \mathcal{U}_{11w} &= \mathcal{G}_w^{hT} P^h \mathcal{D}_{1w}^h + \mathcal{G}_w^{vT} P^v \mathcal{D}_{1w}^v, \\ \mathcal{U}_{12w} &= \mathcal{G}_w^{hT} P^h \mathcal{D}_{1w}^h + \mathcal{G}_w^{vT} P^v \mathcal{D}_{2w}^v, \\ \mathcal{U}_{21w} &= \mathcal{G}_w^{hT} P^h \mathcal{D}_{2w}^h + \mathcal{G}_w^{vT} P^v \mathcal{D}_{1w}^v, \\ \mathcal{U}_{22w} &= \mathcal{G}_w^{hT} P^h \mathcal{D}_{2w}^h + \mathcal{G}_w^{vT} P^v \mathcal{D}_{2w}^v, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_w^h &= \begin{bmatrix} f_9 \\ f_1 - f_3 \\ f_3 - f_7 \end{bmatrix}, \mathcal{D}_{1w}^h = \begin{bmatrix} f_1 \\ h_1 f_{11} \\ h_{12} f_{13} \end{bmatrix}, \mathcal{D}_{2w}^h = \begin{bmatrix} f_1 \\ h_1 f_{11} \\ h_{12} f_{15} \end{bmatrix}, \mathcal{G}_w^v = \begin{bmatrix} f_{10} \\ f_2 - f_4 \\ f_4 - f_6 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D}_{1w}^v &= \begin{bmatrix} f_2 \\ d_1 f_{12} \\ d_{12} f_{14} \end{bmatrix}, \mathcal{D}_{2w}^v = \begin{bmatrix} f_2 \\ d_1 f_{12} \\ d_{12} f_{16} \end{bmatrix}, \\ J_w &= \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_w \end{bmatrix}, \mathcal{M}_w = \begin{bmatrix} M_1^h & 0 \\ 0 & M_1^v \\ M_2^h & 0 \\ 0 & M_2^v \\ M_3^h & 0 \\ 0 & M_3^v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{d11}^T & A_{d21}^T \\ A_{d12}^T & A_{d22}^T \\ -I_{n_h} & 0 \\ 0 & -I_{n_v} \\ B_1^T & B_2^T \end{bmatrix}^T, H_w = \begin{bmatrix} H_{11}^T \\ H_{12}^T \\ H_{21}^T \\ H_{22}^T \\ 0 \\ 0 \\ H_3^T \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

$$\Lambda_w^h = \begin{bmatrix} f_3 - f_5 \\ f_3 + f_5 - 2f_{13} \\ f_5 - f_7 \\ f_5 + f_7 - 2f_{15} \end{bmatrix}, \Lambda_w^v = \begin{bmatrix} f_4 - f_6 \\ f_4 + f_6 - 2f_{14} \\ f_6 - f_8 \\ f_6 + f_8 - 2f_{16} \end{bmatrix}, f_w = [0_{n_w, 8n} \ I_{n_w}],$$

$$f_z = C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_{d1} f_5 + C_{d2} f_6 + D f_w,$$

$$\begin{aligned} \Sigma_w = & f_1^T (Q_1^h + Q_2^h + Q_3^h) f_1 - f_3^T Q_1^h f_3 - f_7^T Q_2^h f_7 - (1 - \mu_1) f_5^T Q_3^h f_5 \\ & + f_2^T (Q_1^v + Q_2^v + Q_3^v) f_2 - f_4^T Q_1^v f_4 - f_8^T Q_2^v f_8 - (1 - \mu_2) f_6^T Q_3^v f_6 \\ & + h_1^2 f_9^T R_1^h f_9 - (f_1 - f_3)^T R_1^h (f_1 - f_3) - 3(f_1 + f_3 - 2f_{11})^T R_1^h (f_1 + f_3 - 2f_{11}) \\ & + d_1^2 f_{10}^T R_1^v f_{10} - (f_2 - f_4)^T R_1^v (f_2 - f_4) \\ & - 3(f_2 + f_4 - 2f_{12})^T R_1^v (f_2 + f_4 - 2f_{12}) + h_{12}^2 f_9^T R_2^h f_9 \\ & + d_{12}^2 f_{10}^T R_2^v f_{10} + \frac{h_1^2}{2} f_9^T Z_1^h f_9 - 2(f_1 - f_{11})^T Z_1^h (f_1 - f_{11}) \\ & + \frac{d_1^2}{2} f_{10}^T Z_1^v f_{10} - 2(f_2 - f_{12})^T Z_1^v (f_2 - f_{12}) + \frac{h_1^2}{2} f_9^T Z_2^h f_9 \\ & - 2(f_3 - f_{11})^T Z_1^h (f_3 - f_{11}) + \frac{d_1^2}{2} f_{10}^T Z_2^v f_{10} - 2(f_4 - f_{12})^T Z_2^v (f_4 - f_{12}) \\ & + \frac{h_{12}^2}{2} f_9^T Z_3^h f_9 - 2(f_3 - f_{13})^T Z_3^h (f_3 - f_{13}) - 2(f_5 - f_{15})^T Z_3^h (f_5 - f_{15}) \\ & + \frac{d_{12}^2}{2} f_{10}^T Z_3^v f_{10} - 2(f_4 - f_{14})^T Z_3^v (f_4 - f_{14}) - 2(f_6 - f_{16})^T Z_3^v (f_6 - f_{16}) \\ & + \frac{h_{12}^2}{2} f_9^T Z_4^h f_9 - 2(f_5 - f_{13})^T Z_4^h (f_5 - f_{13}) - 2(f_7 - f_{15})^T Z_4^h (f_7 - f_{15}) \\ & + \frac{d_{12}^2}{2} f_{10}^T Z_4^v f_{10} - 2(f_6 - f_{14})^T Z_4^v (f_6 - f_{14}) - 2(f_8 - f_{16})^T Z_4^v (f_8 - f_{16}), \end{aligned}$$

et les matrices $f_m (m = 1, 2, \dots, 16)$ sont définies par :

$$f_m = \begin{cases} [e_m \ 0_{n_h, n_w}], & \text{si } m \text{ est impair;} \\ [e_m \ 0_{n_v, n_w}], & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases}$$

Preuve. D'après (3.39), avec $u(t_1, t_2) = 0$, $w(t_1, t_2) \in \mathcal{L}_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$, et similaire à l'égalité (3.53) on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = & 2 \left\{ \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1^h & 0 \\ 0 & M_1^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^h(t_1 - h(t_1), t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - d(t_2)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_2^h & 0 \\ 0 & M_2^v \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_3^h & 0 \\ 0 & M_3^v \end{bmatrix} \right\} \\ & \times \left\{ \hat{A} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \hat{A}_d \begin{bmatrix} x^h(t_1 - h(t_1), t_2) \\ x^v(t_1, t_2 - d(t_2)) \end{bmatrix} + \hat{B} w(t_1, t_2) - \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} \right\} \\ = & \xi_w^T(t_1, t_2) \{ \text{sym}(J_w^T \mathcal{M}_w(\mathcal{A} + G\mathcal{F}(t_1, t_2)H_w)J_w) \} \xi_w(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.57)$$

où $\xi_w(t_1, t_2) = [\xi^T(t_1, t_2) \ w^T(t_1, t_2)]^T$. De plus, en définissant :

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty \int_0^\infty \{ z^T(t_1, t_2) z(t_1, t_2) - w^T(t_1, t_2) w(t_1, t_2) \} dt_1 dt_2,$$

considérant les fonctions de Lyapunov–Krasovskii dans (3.49), et en supposant que les conditions

initiales sont nulles, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J} &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \{ \dot{V}_w(t_1, t_2) + z^T(t_1, t_2)z(t_1, t_2) - w^T(t_1, t_2)w(t_1, t_2) \} dt_1 dt_2, \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \xi_w^T(t_1, t_2) \{ \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_w + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w + J_w^T G F(t_1, t_2) H_w J_w) \\
 &\quad + f_z^T f_z - \gamma^2 f_w^T f_w \} \xi_w(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \xi_w^T(t_1, t_2) \{ \lambda^h \lambda^v \Pi_{11w} + (1 - \lambda^h) \lambda^v \Pi_{12w} + \lambda^h (1 - \lambda^v) \Pi_{21w} \\
 &\quad + (1 - \lambda^h) (1 - \lambda^v) \Pi_{22w} \} \xi_w(t_1, t_2) dt_1 dt_2,
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Pi_{11w} &= \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_{11w} + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w + J_w^T \mathcal{M}_w G F(t_1, t_2) H_w J_w) \\
 &\quad + f_z^T f_z - \gamma^2 f_w^T f_w, \\
 \Pi_{12w} &= \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_{12w} + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w + J_w^T \mathcal{M}_w G F(t_1, t_2) H_w J_w) \\
 &\quad + f_z^T f_z - \gamma^2 f_w^T f_w, \\
 \Pi_{21w} &= \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_{21w} + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w + J_w^T \mathcal{M}_w G F(t_1, t_2) H_w J_w) \\
 &\quad + f_z^T f_z - \gamma^2 f_w^T f_w, \\
 \Pi_{22w} &= \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_{22w} + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w + J_w^T \mathcal{M}_w G F(t_1, t_2) H_w J_w) \\
 &\quad + f_z^T f_z - \gamma^2 f_w^T f_w.
 \end{aligned}$$

Si $\Pi_{11w} < 0$, $\Pi_{12w} < 0$, $\Pi_{21w} < 0$ et $\Pi_{22w} < 0$, nous obtenons $\mathcal{J} < 0$, ce qui implique :

$$\|z\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2.$$

Ensuite, en appliquant le lemme 1.13, s'il existe des scalaires positifs ε_1 , ε_2 , ε_3 et ε_4 , les inégalités suivantes sont vérifiées.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_{11w} + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w) + \varepsilon_1^{-1} J_w^T \mathcal{M}_w G G^T \mathcal{M}_w^T J_w + \varepsilon_1 J_w^T H_w^T H_w J_w \\
 + f_z^T f_z - \gamma^2 f_w^T f_w < 0,
 \end{aligned} \tag{3.58a}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_{12w} + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w) + \varepsilon_2^{-1} J_w^T \mathcal{M}_w G G^T \mathcal{M}_w^T J_w + \varepsilon_2 J_w^T H_w^T H_w J_w \\
 + f_z^T f_z - \gamma^2 f_w^T f_w < 0,
 \end{aligned} \tag{3.58b}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_{21w} + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w) + \varepsilon_3^{-1} J_w^T \mathcal{M}_w G G^T \mathcal{M}_w^T J_w + \varepsilon_3 J_w^T H_w^T H_w J_w \\
 + f_z^T f_z - \gamma^2 f_w^T f_w < 0,
 \end{aligned} \tag{3.58c}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_w + \text{sym}(\mathcal{U}_{22w} + J_w^T \mathcal{M}_w \mathcal{A}_w J_w) + \varepsilon_4^{-1} J_w^T \mathcal{M}_w G G^T \mathcal{M}_w^T J_w + \varepsilon_4 J_w^T H_w^T H_w J_w \\
 + f_z^T f_z - \gamma^2 f_w^T f_w < 0.
 \end{aligned} \tag{3.58d}$$

En utilisant le lemme 1.4, les LMIs (3.56a), (3.56b), (3.56c) et (3.56d), sont équivalentes aux inégalités (3.58a), (3.58b), (3.58c) et (3.58d), respectivement. Ceci complète la preuve. \square

3.3.2.3 Synthèse de la loi de commande robuste H_∞

Théorème 3.7. [Badie et al., 2020b] Pour certains scalaires donnés $h_1 \leq h_2 \leq 0$, $d_1 \leq d_2 \leq 0$ et μ_1 , μ_2 et $\gamma > 0$, le système 2-D en boucle fermée (3.46) est robustement asymptotiquement stable et satisfait la condition (3.47), s'il existe des matrices symétriques définies positives : \bar{P}^h , \bar{P}^v , \bar{Q}_i^h , \bar{Q}_i^v , \bar{R}_j^h , \bar{R}_j^v , \bar{Z}_k^h , \bar{Z}_k^v , des matrices de dimensions appropriées W_i^h , W_i^v , \bar{S}^h , \bar{S}^v , Y_1 , Y_2 et

des scalaires positifs η_k , ($i = 1, 2, 3$), ($j = 1, 2$), ($k = 1, \dots, 4$), de sorte que les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_w + \text{sym}(\bar{U}_{11w} + J_w^T \bar{M}_w \bar{A}_w J_w) - \gamma^2 f_w^T f_w & \bar{f}_z^T & J_w^T \bar{M}_w G & \varepsilon_1 J_w^T \bar{H}_w^T \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & -\eta_1 I & 0 \\ * & * & * & -\eta_1 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.59a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_w + \text{sym}(\bar{U}_{12w} + J_w^T \bar{M}_w \bar{A}_w J_w) - \gamma^2 f_w^T f_w & \bar{f}_z^T & J_w^T \bar{M}_w G & \varepsilon_2 J_w^T \bar{H}_w^T \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & -\eta_2 I & 0 \\ * & * & * & -\eta_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.59b)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_w + \text{sym}(\bar{U}_{21w} + J_w^T \bar{M}_w \bar{A}_w J_w) - \gamma^2 f_w^T f_w & \bar{f}_z^T & J_w^T \bar{M}_w G & \varepsilon_3 J_w^T \bar{H}_w^T \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & -\eta_3 I & 0 \\ * & * & * & -\eta_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.59c)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_w + \text{sym}(\bar{U}_{22w} + J_w^T \bar{M}_w \bar{A}_w J_w) - \gamma^2 f_w^T f_w & \bar{f}_z^T & J_w^T \bar{M}_w G & \varepsilon_4 J_w^T \bar{H}_w^T \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & -\eta_4 I & 0 \\ * & * & * & -\eta_4 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.59d)$$

$$\begin{bmatrix} \text{diag}\{(\bar{R}_2^h + \bar{Z}_3^h), 3(\bar{R}_2^h + \bar{Z}_3^h)\} & \bar{S}^h \\ * & \text{diag}\{(\bar{R}_2^h + \bar{Z}_4^h), 3(\bar{R}_2^h + \bar{Z}_4^h)\} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.59e)$$

$$\begin{bmatrix} \text{diag}\{(\bar{R}_2^v + \bar{Z}_3^v), 3(\bar{R}_2^v + \bar{Z}_3^v)\} & \bar{S}^v \\ * & \text{diag}\{(\bar{R}_2^v + \bar{Z}_4^v), 3(\bar{R}_2^v + \bar{Z}_4^v)\} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.59f)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{W}_w &= \bar{\Sigma}_w + \Lambda_w^{hT} \bar{\Phi}^h \Lambda_w^h + \Lambda_w^{vT} \bar{\Phi}^v \Lambda_w^v, \\ \bar{U}_{11w} &= \mathcal{G}_w^{hT} \bar{P}^h \mathcal{D}_{1w}^h + \mathcal{G}_w^{vT} \bar{P}^v \mathcal{D}_{1w}^v, \\ \bar{U}_{12w} &= \mathcal{G}_w^{hT} \bar{P}^h \mathcal{D}_{1w}^h + \mathcal{G}_w^{vT} \bar{P}^v \mathcal{D}_{2w}^v, \\ \bar{U}_{21w} &= \mathcal{G}_w^{hT} \bar{P}^h \mathcal{D}_{2w}^h + \mathcal{G}_w^{vT} \bar{P}^v \mathcal{D}_{1w}^v, \\ \bar{U}_{22w} &= \mathcal{G}_w^{hT} \bar{P}^h \mathcal{D}_{2w}^h + \mathcal{G}_w^{vT} \bar{P}^v \mathcal{D}_{2w}^v, \end{aligned}$$

avec

$$\bar{\mathcal{M}}_w = \begin{bmatrix} I_{n_h} & 0 \\ 0 & I_{n_v} \\ I_{n_h} & 0 \\ 0 & I_{n_v} \\ I_{n_h} & 0 \\ 0 & I_{n_v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{A}}_w = \begin{bmatrix} W^h A_{11}^T + Y_1^T E_1^T & W^h A_{21}^T + Y_1^T E_2^T \\ W^v A_{12}^T + Y_2^T E_1^T & W^v A_{22}^T + Y_2^T E_2^T \\ W^h A_{d11}^T & W^h A_{d21}^T \\ W^v A_{d12}^T & W^v A_{d22}^T \\ -W^h & 0 \\ 0 & -W^v \\ B_1^T & B_2^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\bar{H}_w = [H_{11} W^h \ H_{12} W^v \ H_{21} W^h \ H_{22} W^v \ 0 \ 0 \ H_3],$$

$$\bar{\Phi}^h = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\bar{R}_2^h, 3\bar{R}_2^h\} & \bar{S}^h \\ * & \text{diag}\{\bar{R}_2^h, 3\bar{R}_2^h\} \end{bmatrix}, \bar{\Phi}^v = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\bar{R}_2^v, 3\bar{R}_2^v\} & \bar{S}^v \\ * & \text{diag}\{\bar{R}_2^v, 3\bar{R}_2^v\} \end{bmatrix},$$

$$\bar{f}_z = (C_1 W^{hT} + F Y_1) f_1 + (C_2 W^{vT} + F Y_2) f_2 + C_{d1} W^{hT} f_5 + C_{d2} W^{vT} f_6 + D f_w,$$

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_w &= f_1^T (\bar{Q}_1^h + \bar{Q}_2^h + \bar{Q}_3^h) f_1 - f_3^T \bar{Q}_1^h f_3 - f_7^T \bar{Q}_2^h f_7 - (1 - \mu_1) f_5^T \bar{Q}_3^h f_5 \\ &+ f_2^T (\bar{Q}_1^v + \bar{Q}_2^v + \bar{Q}_3^v) f_2 - f_4^T \bar{Q}_1^v f_4 - f_8^T \bar{Q}_2^v f_8 - (1 - \mu_2) f_6^T \bar{Q}_3^v f_6 \\ &+ h_1^2 f_9^T \bar{R}_1^h f_9 - (f_1 - f_3)^T \bar{R}_1^h (f_1 - f_3) - 3(f_1 + f_3 - 2f_{11})^T \bar{R}_1^h (f_1 + f_3 - 2f_{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +d_1^2 f_{10}^T \bar{R}_1^v f_{10} - (f_2 - f_4)^T \bar{R}_1^v (f_2 - f_4) \\
 & -3(f_2 + f_4 - 2f_{12})^T \bar{R}_1^v (f_2 + f_4 - 2f_{12}) + h_{12}^2 f_9^T \bar{R}_2^h f_9 \\
 & +d_{12}^2 f_{10}^T \bar{R}_2^v f_{10} + \frac{h_1^2}{2} f_9^T Z_1^h f_9 - 2(f_1 - f_{11})^T \bar{Z}_1^h (f_1 - f_{11}) \\
 & +\frac{d_1^2}{2} f_{10}^T \bar{Z}_1^v f_{10} - 2(f_2 - f_{12})^T \bar{Z}_1^v (f_2 - f_{12}) + \frac{h_1^2}{2} f_9^T \bar{Z}_2^h f_9 \\
 & -2(f_3 - f_{11})^T \bar{Z}_1^h (f_3 - f_{11}) + \frac{d_1^2}{2} f_{10}^T \bar{Z}_2^v f_{10} - 2(f_4 - f_{12})^T \bar{Z}_2^v (f_4 - f_{12}) \\
 & +\frac{h_{12}^2}{2} f_9^T \bar{Z}_3^h f_9 - 2(f_3 - f_{13})^T Z_3^h (f_3 - f_{13}) - 2(f_5 - f_{15})^T \bar{Z}_3^h (f_5 - f_{15}) \\
 & +\frac{d_{12}^2}{2} f_{10}^T \bar{Z}_3^v f_{10} - 2(f_4 - f_{14})^T \bar{Z}_3^v (f_4 - f_{14}) - 2(f_6 - f_{16})^T \bar{Z}_3^v (f_6 - f_{16}) \\
 & +\frac{h_{12}^2}{2} f_9^T \bar{Z}_4^h f_9 - 2(f_5 - f_{13})^T \bar{Z}_4^h (f_5 - f_{13}) - 2(f_7 - f_{15})^T \bar{Z}_4^h (f_7 - f_{15}) \\
 & +\frac{d_{12}^2}{2} f_{10}^T \bar{Z}_4^v f_{10} - 2(f_6 - f_{14})^T \bar{Z}_4^v (f_6 - f_{14}) - 2(f_8 - f_{16})^T \bar{Z}_4^v (f_8 - f_{16}).
 \end{aligned}$$

De plus, les gains de la loi de commande par retour d'état sont donnés par : $K_1 = Y_1(W^h)^{-T}$, et $K_2 = Y_2(W^v)^{-T}$.

Preuve. En remplaçons A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , C_1 et C_2 dans (3.56a), (3.56b), (3.56c) et (3.56d) par $A_{11} + E_1 K_1$, $A_{12} + E_1 K_2$, $A_{21} + E_2 K_1$, $A_{22} + E_2 K_2$, $C_1 + F K_1$ et $C_2 + F K_2$, respectivement, et posons $M_1^h = M_2^h = M_3^h = M^h$ et $M_1^v = M_2^v = M_v^v = M^v$.

En plus, en définissons les matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
 L &= \text{diag} = \{M^{h-1}, M^{v-1}, M^{h-1}, M^{v-1}, \dots, M^{h-1}, M^{v-1}\} \in \mathbb{R}^{8n \times 8n}, \\
 L_q &= \text{diag}\{L, I_{n_w}, I_{n_z}, \varepsilon_k^{-1} I_n, \varepsilon_k^{-1} I_n\}, \quad k = \{1, 2, 3, 4\}, \\
 L_5 &= \text{diag} = \{M^{h-1}, M^{h-1}, M^{h-1}, M^{h-1}\}, \\
 L_6 &= \text{diag} = \{M^{v-1}, M^{v-1}, M^{h-1}, M^{v-1}\}.
 \end{aligned}$$

Et considérons les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned}
 \bar{P}^h &= L_5 P^h L_5^T; \quad \bar{P}^v = L_6 P^v L_6^T; \quad \bar{Q}_i^h = M^{h-1} Q_i^h M^{h-T}; \quad \bar{Q}_i^v = M^{v-1} Q_i^v M^{v-T}; \\
 \bar{R}_j^h &= M^{h-1} R_j^h M^{h-T}; \quad \bar{R}_j^v = M^{v-1} R_j^v M^{v-T}; \quad \bar{Z}_k^h = M^{h-1} Z_k^h M^{h-T}; \quad \eta_k = \varepsilon_k^{-1}; \\
 \bar{Z}_k^v &= M^{v-1} Z_k^v M^{v-T}; \quad \bar{S}^h = \text{diag}\{M^{h-1}, M^{h-1}\} S^h \text{diag}\{M^{h-T}, M^{h-T}\}; \\
 \bar{S}^v &= \text{diag}\{M^{v-1}, M^{v-1}\} S^v \text{diag}\{M^{v-T}, M^{v-T}\}; \quad W_h = M^{h-1}; \quad W_v = M^{v-1}; \\
 Y_1 &= K_1 M^{h-T}; \quad Y_2 = K_2 M^{v-T}; \quad (i = 1, 2, 3), \quad (j = 1, 2), \quad (k = 1, \dots, 4).
 \end{aligned}$$

Alors, les inégalités (3.60a)-(3.60f) sont équivalents aux conditions LMIs (3.59a)-(3.59f) respectivement.

$$L_1^T \Upsilon_{11w} L_1 < 0; \quad (3.60a)$$

$$L_2^T \Upsilon_{12w} L_2 < 0; \quad (3.60b)$$

$$L_3^T \Upsilon_{21w} L_3 < 0; \quad (3.60c)$$

$$L_4^T \Upsilon_{22w} L_4 < 0; \quad (3.60d)$$

$$L_5^T \Psi_1 L_5 < 0; \quad (3.60e)$$

$$L_6^T \Psi_2 L_6 < 0. \quad (3.60f)$$

Ceci complète la preuve. \square

Remarque 3.16. *Récemment, l'inégalité de Wirtinger a été appliquée pour développer des conditions de stabilité dépendantes du retard moins conservatives pour des systèmes à retard [Park et al., 2015, Seuret et al., 2013]. Cependant, la plupart des résultats existants se sont concentrés uniquement sur l'analyse de la stabilité, sans traiter le problème de synthèse des lois de commande. La raison principale est que l'inégalité de Wirtinger implique l'introduction d'une fonction de Lyapunov-Krasovskii augmentée, ce qui rend la tâche de synthèse des lois de commande plus complexe. Dans cette section, nous avons résolu le problème de la synthèse robuste d'une loi de commande H_∞ pour des systèmes 2-D continus incertains à retards variables, en utilisant des matrices libres dans (3.57), ce qui a facilité la tâche de synthèse.*

3.3.3 Exemples numériques

Exemple 3.3. Considérons le système dynamique bien connu (utilisé dans le chauffage et le séchage de l'air par absorption de gaz) décrit par l'équation de Darboux suivante avec des retards, qui a été employée dans [Ghous et al., 2016a] :

$$\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x \partial t} = a_1 \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + a_2 \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} + a_0 q(x, t) + a_3 q(x, t - d(t)) + bu(x, t), \quad (3.61)$$

avec $q(x, t)$ est une fonction inconnue à $x(\text{direction}) \in [0, x_f]$ et $t(\text{temps}) \in [0, \infty)$, a_0, a_1, a_2, a_3 et b sont des coefficients réels, $d(t)$ est un retard variable et $u(x, t)$ est la fonction d'entrée de commande. Définissons :

$$x^h(x, t) = \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} - a_2 q(x, t), \quad x^v(x, t) = q(x, t).$$

Il est facile de vérifier que l'équation (3.61) peut être convertie en modèle continu à retard (3.39) avec :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 + a_1 a_2 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour effectuer une étude numérique, les paramètres a_0, a_1, a_2, a_3 et b sont fixés comme suit : $a_0 = 0.2, a_1 = -3, a_2 = -1, a_3 = -0.4, b = 0$.

La stabilité de ce système ne peut pas être résolue par les méthodes indépendantes du retard dans [Benzaouia et al., 2011, Hmamed et al., 2013]. Cependant, la résolution des conditions LMIs développées dans [El-Kasri et al., 2013, Ghous et al., 2016a] et celles dans le corollaire 3.1 donnent les limites supérieures de d_2 qui assurent la stabilité du système (3.61) pour $\mu = 0.3$ et différentes valeurs de d_1 . Les résultats de comparaison sont listés dans le Tableau 3.4. On peut voir clairement que le corollaire 3.1 assure une limite de retard plus grande que les résultats précédents lorsque $d_1 = 0$. De plus, les conditions de la stabilité fournies par [El-Kasri et al., 2013, Ghous et al., 2016a] ne peuvent pas traiter les cas où $d_1 \neq 0$.

Tableau 3.4 – Limite supérieure de retard d_2 pour différents d_1 et $\mu_2 = 0.3$.

Méthodes	$d_1 = 0$	$d_1 = 0.5$	$d_1 = 1$
Corollaire 1 [El-Kasri et al., 2013]	2.1843	—	—
Corollaire 1 [Ghous et al., 2016a]	3.9829	—	—
Corollaire 3.1 [Badie et al., 2020b]	4.1685	4.2949	4.3945

Remarque 3.17. *L'une des préoccupations essentielles des conditions de la stabilité dépendantes du retard est d'obtenir une limite supérieure de retard maximale admissible aussi grande que possible de sorte que le système puisse rester stable. Ainsi, la limite supérieure maximale obtenue peut être considérée comme un indice significatif pour évaluer le conservatisme du critère de la stabilité dépendant du retard. Selon le Tableau 3.4, nous pouvons conclure que le critère de la stabilité présenté dans cette section est moins conservatif que ceux de [El-Kasri et al., 2013, Ghous et al., 2016a].*

Exemple 3.4. Considérons le système 2-D continu à retard (3.39) avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{d11} & A_{d12} \\ A_{d21} & A_{d22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \\ [C_1 \ C_2] &= [0.8 \ 2], \quad [C_{d1} \ C_{d2}] = [0 \ 0], \quad D = 1, \quad F = 0.1, \\ [H_{11} \ H_{12}] &= [0.1 \ 0.3], \quad [H_{21} \ H_{22}] = [0.1 \ 0.2], \quad H_3 = 0.1. \end{aligned}$$

Le but est de concevoir une loi de commande robuste sous la forme de (3.45) de telle sorte que le système en boucle fermée soit robustement asymptotiquement stable et satisfasse la contrainte de la performance H_∞ (4.5).

Tableau 3.5 – Valeurs de γ_{min} pour des retards donnés d_2 et h_2 avec $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$.

Méthodes	$d_2 = h_2 = 0.4$	$d_2 = h_2 = 0.8$	$d_2 = h_2 = 1.2$	Nvd
Théorème 3 [Ghous et al., 2016a]	1.1025	1.5198	Infaisable	32
Théorème 3.7 [Badie et al., 2020b]	1.0922	1.1776	1.4958	47

Tableau 3.6 – Comparaison de γ_{min} pour $\mu_1 = \mu_2 = 0.6$.

$d_1 = h_1$	$d_2 = h_2$	γ_{min}	Gain du retour d'état K
0.2	0.6	1.1227	$[-1.4518 \ -5.6650]$
	0.8	1.1749	$[-1.1434 \ -4.7879]$
	1	1.2486	$[-0.9303 \ -3.8634]$
0.4	0.8	1.1719	$[-1.1523 \ -4.8618]$
	1	1.2455	$[-0.9266 \ -3.9396]$
	1.2	1.4105	$[-0.8034 \ -2.9520]$
0.6	1	1.2411	$[-1.1523 \ -4.8618]$
	1.2	1.3800	$[-0.8059 \ -2.9895]$
	1.4	Infaisable	—

Pour comparer nos résultats avec ceux de [Ghous et al., 2016a], nous utilisons le théorème 3.7 avec $d_1 = h_1 = 0$. Le Tableau 3.5 montre une comparaison des résultats de l'atténuation des

perturbations γ_{min} pour différentes valeurs de d_2 et h_2 et $\mu = 0.9$. Le Tableau 3.5 indique également le nombre de variables de décision (Nvd) utilisé dans chaque méthode.

Dans le cas où $h_1 > 0$ et $d_1 > 0$, le Tableau 3.6 montre les indices γ_{min} de la performance H_∞ , et les gains de la loi de commande correspondants basés sur le théorème 3.7. Il est clair que les valeurs de γ_{min} atteints et les gains de la loi de commande correspondant K sont liés aux limites inférieures et supérieures des retards.

Pour la simulation, nous définissons :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t_1, t_2) &= \sin(0.3(t_1 + t_2)), \\ w(t_1, t_2) &= 0.1e^{-0.5(t_1+t_2)}\cos(0.1(t_1 + t_2)), \\ h(t_1) &= 0.9 + 0.3\cos(0.6\pi t_1), \\ d(t_2) &= 0.9 + 0.3\cos(0.6\pi t_2). \end{aligned}$$

Les retards variables $h(t_1)$ et $d(t_2)$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} 0.6 \leq h(t_1) \leq 1.2, & \quad \dot{h}(t_1) \leq 0.6, \\ 0.6 \leq d(t_2) \leq 1.2, & \quad \dot{d}(t_2) \leq 0.6. \end{aligned}$$

Les conditions initiales sont supposées comme suit :

$$\begin{cases} x^h(\theta, t_2) = 2, & -h_2 \leq \theta \leq 0, & 0 \leq t_2 \leq 2.4, \\ x^h(\theta, t_2) = 0, & -h_2 \leq \theta \leq 0, & t_2 \geq 1.2, \\ x^v(t_1, \delta) = 2, & -d_2 \leq \delta \leq 0, & 0 \leq t_1 \leq 2.4, \\ x^v(t_1, \delta) = 0, & -d_2 \leq \delta \leq 0, & t_1 \geq 1.2. \end{cases}$$

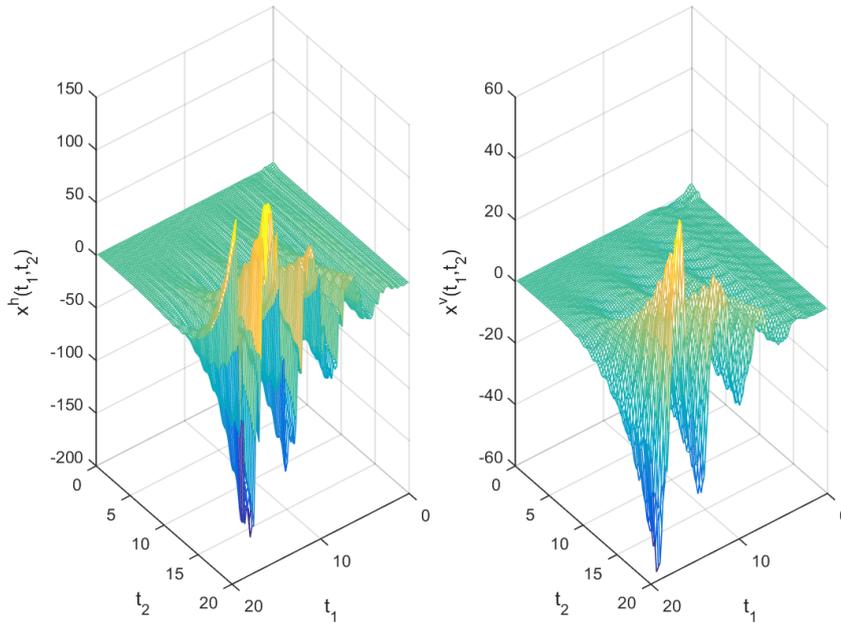


FIGURE 3.5 – Trajectoires des états du système en boucle ouverte.

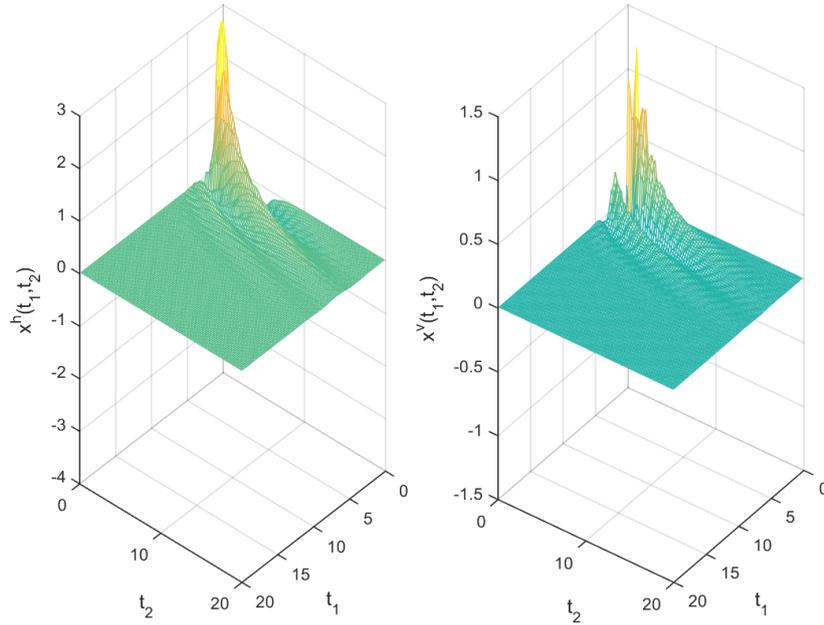


FIGURE 3.6 – Trajectoires des états du système en boucle fermée.

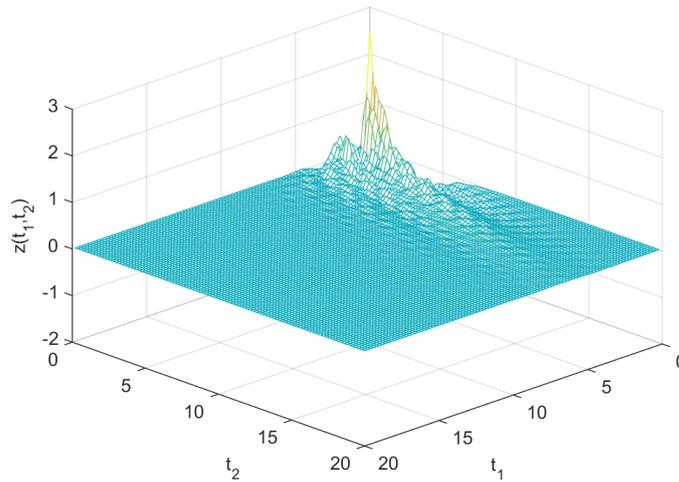


FIGURE 3.7 – Sortie mesurée du système en boucle fermée.

Il convient de souligner que le système en boucle ouverte est instable (voir Figure 3.5). Ce problème ne peut pas être résolu par l'approche dans [Ghous et al., 2016a], car $h_1 \neq 0$ et $d_1 \neq 0$. Au contraire, en appliquant le théorème 3.7, nous obtenons une solution réalisable comme suit : $\gamma_{min} = 1.3800$ et $K = [-0, 8059 \quad -2, 9895]$. Après avoir appliqué la loi de commande $u(t_1, t_2) = K [x^{hT}(t_1, t_2) \quad x^{vT}(t_1, t_2)]^T$, le système en boucle fermée est stabilisé comme illustré dans les trajectoires d'état du système en boucle fermée et la sortie mesurée dans les Figures 3.6 et 3.7,

respectivement, ce qui confirme que la loi de commande par retour d'état conçu est efficace.

Remarque 3.18. *Dans ce chapitre, nous avons présenté des critères dépendants du retard pour résoudre les problèmes de commande H_∞ des systèmes 2-D à retards, ces critères sont plus performants que les conditions indépendantes du retard car ils contiennent des informations sur les valeurs des retards. Par contre, lorsque ces informations ne sont pas disponibles, les critères dépendants du retard ne sont plus applicables. Dans cette situation, nous avons également proposé dans [Badie et al., 2019a, Badie et al., 2019b, Badie et al., 2019c], des solutions indépendantes du retard pour les problèmes de la commande H_∞ des systèmes 2-D à retards.*

3.4 Conclusion

Nous avons consacré ce chapitre à l'étude des problèmes de la commande fiable H_∞ et la commande robuste H_∞ pour certaine classe des systèmes 2-D à retards.

La première section a été dédiée à l'étude du problème de la commande fiable H_∞ pour des systèmes 2-D discrets commutés décrits par le second modèle de F-M avec des retards d'état et des défauts d'actionneur. Premièrement, sur la base de l'approche du temps de séjour moyen, la fonction de Lyapunov-Krasovskii et de l'inégalité de Wirtinger, des conditions dépendantes du retard suffisantes pour la stabilité exponentielle et l'analyse de la performance H_∞ pondérée des systèmes 2-D commutés discrets à retards ont été proposées. Ensuite, le résultat a été étendu pour concevoir une loi de commande H_∞ fiable de sorte que le système en boucle fermée soit exponentiellement stable avec un niveau d'atténuation des perturbations H_∞ pondéré, pour toutes défaillances de l'actionneur. Enfin, afin d'illustrer l'efficacité des résultats, deux exemples numériques ont été présentés.

La deuxième section a permis d'étudier le problème de la commande robuste H_∞ pour des systèmes 2-D continus incertains, avec des retrads variables et des incertitudes bornées en normes. Plus précisément, une nouvelle condition de stabilité dépendante du retard moins conservatrice est proposée, grâce à la structure augmentée de la fonction de Lyapunov-Krasovskii et à l'utilisation de l'inégalité de Wirtinger. Sur la base de cette condition, une loi de commande par retour d'état a été conçu pour résoudre le problème de commande robuste H_∞ . Des exemples numériques ont été traités pour démontrer l'efficacité des résultats.

Chapitre 4

Filtrage H_∞ des systèmes 2-D

4.1 Introduction

L'estimation des états ou d'une combinaison linéaire des états d'un système donné sert dans de nombreuses applications pratiques. Par exemple, pour atténuer les effets des perturbations sur les mesures, pour faire de la commande par retour d'état ou retour de sortie estimés, pour estimer certaines variables non accessibles, pour faire de la supervision ou du diagnostic des procédés industriels [Halabi et al., 2005]. Parmi divers schémas d'estimateur d'état, il existe deux approches de filtrage importantes : le filtrage de Kalman et le filtrage H_∞ . Lorsque, a priori, les informations statistiques sur le bruit externe ne sont pas connues avec précision, le célèbre schéma de filtrage de Kalman [Kumar et al., 2019, Xie et al., 1994] n'est plus applicable et le filtrage H_∞ est adapté à cette situation. Pour le filtrage H_∞ , les sources de bruit sont des signaux arbitraires avec une énergie finie, et l'objectif principal était d'estimer les états ou une combinaison linéaire des états d'un système en utilisant des mesures de sortie tout en minimisant la norme H_∞ du système d'erreur de filtrage. Plusieurs résultats ont été obtenus pour le problème de filtrage H_∞ pour les systèmes dynamiques 1-D tels que les systèmes à retards [He et al., 2009, Zoulagh et al., 2017], les systèmes commutés [Mahmoud et al., 2012, Zhang et al., 2006] et les systèmes non linéaires [Luan et al., 2010, Shen et al., 2011].

Au cours des dernières années, le problème du filtrage H_∞ a été étudié pour plusieurs type de systèmes 2-D, par exemple, les problèmes de filtrage H_∞ indépendants du retard et dépendants du retard pour les systèmes 2-D discrets décrits par le second modèle de F-M à retards ont été considérés dans [Peng et al., 2009b, Zhao et al., 2012]. Dans [Li et al., 2013], le problème de synthèse du filtre flou H_∞ pour les systèmes 2-D flous de type Takagi-Sugeno (T-S) dans le second modèle de F-M a été résolu. Le problème de filtrage H_∞ pour les systèmes 2-D commutés discrets décrits par le second modèle de F-M a été étudié dans [Yang et al., 2018]. Dernièrement, le problème de synthèse du filtre H_∞ à fréquence finie pour les systèmes 2-D non linéaires discrets décrits par le modèle flou de T-S (T-S) a été étudié dans [Duan et al., 2019].

Motivé par la discussion ci-dessus, dans ce chapitre, le problème de filtrage H_∞ pour différentes classes de systèmes 2-D sera étudié. La contribution principale est issue de l'utilisation d'une nouvelle structure de la fonction de Lyapunov. Cette nouvelle structure offre des degrés de libertés qui permettront de relaxer les contraintes LMIs, ce qui conduit à une amélioration des performances des filtres proposés.

Dans la première section, nous aborderons le problème du filtrage robuste H_∞ pour des systèmes 2-D discrets incertains, les incertitudes des paramètres sont de type polytopique. Premièrement, une nouvelle condition d'analyse de la performance H_∞ pour le système d'erreur de filtrage sera présentée en exploitant une nouvelle structure de la fonction de Lyapunov et certaines techniques d'analyse. Deuxièmement, sur la base de la condition obtenue, les filtres H_∞ indépendants des

paramètres et dépendants des paramètres qui assurent la stabilité asymptotique robuste et un niveau de performance H_∞ pour les systèmes d'erreur de filtrage correspondants seront conçus en termes des LMIs. Et finalement, deux exemples numériques seront présentés pour montrer que nos résultats sont moins conservatifs que certains existants.

Dans la deuxième section, nous nous intéresserons au problème de filtrage H_∞ pour les systèmes 2-D commutés discrets décrits par le second modèle de F-M sous un signal de commutation arbitraire, les filtres d'ordre complet et d'ordre réduit seront concernés. En construisant une fonction de Lyapunov commutée appropriée et en utilisant certaines techniques d'analyse, une nouvelle condition suffisante pour la stabilité du système d'erreur de filtrage avec un niveau de performance H_∞ sera présentée, et à son tour la synthèse du filtre sera développée, où les gains du filtre approprié seront obtenus en résolvant un ensemble des conditions LMIs. Deux exemples numériques seront donnés pour montrer les avantages des résultats

La troisième section sera consacrée à l'étude de problème de filtrage H_∞ pour des systèmes 2-D discrets flous de type T-S décrits par le modèle de Roesser. En utilisant une nouvelle structure de la fonction de Lyapunov floue et certaines techniques d'analyse, la stabilité et un indice de performance H_∞ seront garantis pour le système d'erreur de filtrage, de sorte que le couplage entre la matrice de Lyapunov et les matrices de système sera supprimé. De plus, des conditions suffisantes pour l'existence du filtre seront établies en terme des conditions LMIs. Un exemple numérique sera présenté pour démontrer l'efficacité des résultats.

4.2 Filtrage H_∞ des systèmes 2-D incertains

4.2.1 Formulation du problème

Considérons un système 2-D discret avec des incertitudes polytopiques décrit par le modèle de l'espace d'état de Roesser :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= A(\alpha) \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + B(\alpha)w(i, j), \\ y(i, j) &= C(\alpha) \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + D(\alpha)w(i, j), \\ z(i, j) &= E(\alpha) \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + F(\alpha)w(i, j), \end{aligned} \quad (4.1)$$

où $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$ et $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ sont les vecteurs d'état horizontal et vertical, respectivement, $w(i, j) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est l'entrée de perturbation, qui est supposée appartenir à $l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$. $y(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie mesurée et $z(i, j) \in \mathbb{R}^z$ est le signal à estimé. Les matrices :

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \begin{bmatrix} A_{11}(\alpha) & A_{12}(\alpha) \\ A_{21}(\alpha) & A_{22}(\alpha) \end{bmatrix}, & B(\alpha) &= \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ B_2(\alpha) \end{bmatrix}, \\ C(\alpha) &= [C_1(\alpha) \ C_2(\alpha)], & E(\alpha) &= [E_1(\alpha) \ E_2(\alpha)], \end{aligned}$$

$D(\alpha)$ et $F(\alpha)$ sont supposés appartenir à un domaine polytopique borné convexe connu \mathcal{D} qui est décrit par N sommets, c'est-à-dire :

$$\Omega(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} A_{11}(\alpha) & A_{12}(\alpha) & B_1(\alpha) \\ A_{21}(\alpha) & A_{22}(\alpha) & B_2(\alpha) \\ \hline C_1(\alpha) & C_2(\alpha) & D(\alpha) \\ \hline E_1(\alpha) & E_2(\alpha) & F(\alpha) \end{array} \right] \in \mathcal{D};$$

où

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{ \Omega(\alpha) \mid \Omega(\alpha) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \Omega_n; \sum_{n=1}^N \alpha_n = 1; \alpha_n \geq 0 \right\}; \quad (4.2)$$

avec

$$\Omega_n = \begin{bmatrix} A_{11n} & A_{12n} & B_{1n} \\ A_{21n} & A_{22n} & B_{2n} \\ C_{1n} & C_{2n} & D_n \\ E_{1n} & E_{2n} & F_n \end{bmatrix};$$

dénote le $n^{\text{ème}}$ sommet du domaine polytopique. Les conditions initiales sont supposées satisfaire :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^r (|x^h(0, p)|^2 + |x^v(q, 0)|^2) < \infty.$$

Le but de cette section est d'estimer le signal $z(i, j)$ avec une performance H_∞ . À cette fin, le filtre indépendant du paramètre incertain d'ordre complet suivant sera considéré premierement (Voir Figure 4.1).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_F^h(i+1, j) \\ x_F^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= A_F \begin{bmatrix} x_F^h(i, j) \\ x_F^v(i, j) \end{bmatrix} + B_F y(i, j); \\ z_F(i, j) &= C_F \begin{bmatrix} x_F^h(i, j) \\ x_F^v(i, j) \end{bmatrix} + D_F y(i, j); \\ x_F^h(0, j) &= x_F^v(i, 0) = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

où $x_F^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$ et $x_F^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ sont les vecteurs d'état horizontal et vertical du filtre, $z_F(i, j)$ dénote l'estimation du signal $z(i, j)$. Les matrices :

$$A_F = \begin{bmatrix} A_{F11} & A_{F12} \\ A_{F21} & A_{F22} \end{bmatrix}, \quad B_F = \begin{bmatrix} B_{F1} \\ B_{F2} \end{bmatrix}, \quad C_F = [C_{F1} \ C_{F2}],$$

et D_F doivent être déterminés.

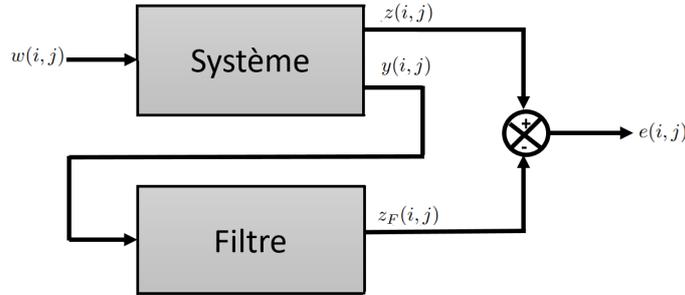


FIGURE 4.1 – Schéma de filtrage.

En augmentant le système 2-D (4.1) pour inclure les états du filtre (4.3), nous obtenons le système d'erreur de filtrage suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i+1, j) \\ \hat{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \hat{A}(\alpha) \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i, j) \\ \hat{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \hat{B}(\alpha) w(i, j); \\ e(i, j) &= \hat{C}(\alpha) \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i, j) \\ \hat{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \hat{D}(\alpha) w(i, j); \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $\hat{x}^h(i, j) = [x^{hT}(i, j) \ x_F^{hT}(i, j)]^T$, $\hat{x}^v(i, j) = [x^{vT}(i, j) \ x_F^{vT}(i, j)]^T$ et $e(i, j) = z(i, j) - z_F(i, j)$,

avec

$$\begin{aligned}\hat{A}(\alpha) &= \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11}(\alpha) & \hat{A}_{12}(\alpha) \\ \hat{A}_{21}(\alpha) & \hat{A}_{22}(\alpha) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{11}(\alpha) & 0 & A_{12}(\alpha) & 0 \\ B_{F1}C_1(\alpha) & A_{F11} & B_{F1}C_2(\alpha) & A_{F12} \\ \hline A_{21}(\alpha) & 0 & A_{22}(\alpha) & 0 \\ B_{F2}C_1(\alpha) & A_{F21} & B_{F2}C_2(\alpha) & A_{F22} \end{array} \right]; \\ \hat{B}(\alpha) &= \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1(\alpha) \\ \hat{B}_2(\alpha) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} B_1(\alpha) \\ B_{F1}D(\alpha) \\ B_2(\alpha) \\ B_{F2}D(\alpha) \end{array} \right]; \\ \hat{C}(\alpha) &= [\hat{C}_1(\alpha) | \hat{C}_2(\alpha)] \\ &= [E_1(\alpha) - D_F C_1(\alpha) \quad -C_{F1} | E_2(\alpha) - D_F C_2(\alpha) \quad -C_{F2}]; \\ \hat{D}(\alpha) &= F(\alpha) - D_F D(\alpha).\end{aligned}$$

Ensuite, le problème de filtrage robuste H_∞ à résoudre dans cette section peut être exprimé comme suit :

Étant donné un système 2-D (4.1) et un niveau d'atténuation des perturbations $\gamma > 0$, l'objectif c'est de déterminer les matrices A_{F11} , A_{F12} , A_{F21} , A_{F22} , B_{F1} , B_{F2} , C_{F1} , C_{F2} et D_F du filtre 2-D (4.3) de sorte que les exigences suivantes soient vérifiées :

- (i) Le système d'erreur de filtrage (4.4) avec $w(i, j) = 0$ est robustement asymptotiquement stable.
- (ii) Sous les conditions initiales nulles, la condition suivante est vérifiée

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e^T(i, j)e(i, j) < \gamma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} w^T(i, j)w(i, j), \quad (4.5)$$

pour toute $w(i, j) \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$ et un réel $\gamma > 0$ donné.

La fonction de transfert $G_{FE}(z_1, z_2)$ du système d'erreur de filtrage (4.4) de l'entrée de perturbation $w(i, j)$ à l'erreur de filtrage $e(i, j)$ est donnée par :

$$G_{FE}(z_1, z_2) = \hat{C}(\alpha)[\mathcal{I}_{FE}(z_1, z_2) - \hat{A}(\alpha)]^{-1}\hat{B}(\alpha) + \hat{D}(\alpha).$$

où $\mathcal{I}_{FE}(z_1, z_2) = \text{diag}\{z_1 I_{2n_h}, z_2 I_{2n_v}\}$.

Et la norme H_∞ de $G_{FE}(z_1, z_2)$ est donnée par :

$$\|G_{FE}(z_1, z_2)\|_\infty = \sup_{\omega_1, \omega_2 \in [0, 2\pi]} \sigma_{\max}[G_{FE}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})].$$

où $\sigma_{\max}(\cdot)$ désigne la valeur singulière maximale d'une matrice.

Remarque 4.1. En utilisant le théorème de Parseval 2-D [Du et al., 2002], il est facile de montrer que, dans le cas des conditions initiales nulles, la condition dans (4.5) est équivalente à :

$$\|G_{FE}(z_1, z_2)\|_\infty < \gamma.$$

Remarque 4.2. Le problème de filtrage H_∞ est important en raison de sa valeur théorique et pratique dans les domaines d'ingénierie, de contrôle et de traitement du signal. Dans cette section, nous considérons le problème du filtrage robuste H_∞ pour une classe de systèmes 2-D discrets incertains avec des incertitudes polytopiques. Le modèle utilisé dans cette section peut trouver de nombreuses applications, par exemple, les processus thermiques dans les réacteurs chimiques [Badie et al., 2019a], les processus de chauffage et de séchage à l'air [De Souza et al., 2010].

4.2.2 Résultats principaux

Dans cette section, nous proposerons une nouvelle technique pour résoudre le problème de filtrage robuste H_∞ . Cette technique permet de concevoir des filtres H_∞ robustes vis-à-vis les incertitudes, et plus performants que ceux des résultats existants.

4.2.2.1 Analyse de la performance H_∞ robuste

Ce paragraphe présente une analyse de la performance H_∞ du système d'erreur de filtrage (4.4), qui sera utilisée dans la sous-section suivante pour concevoir un filtre H_∞ robuste.

Lemme 4.1. [Badie et al., 2020d] *Étant donné le système 2-D discret incertain (4.1) et un filtre 2-D (4.3), le système d'erreur de filtrage (4.4) est robustement asymptotiquement stable avec un niveau H_∞ d'atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ , s'il existe des matrices symétriques définies positives $R^h(\alpha)$, $R^v(\alpha)$, et des matrices H , U , de sorte que l'inégalité suivante est valide*

$$\Xi(\alpha) = \begin{bmatrix} \Xi_1(\alpha) & 0 & \Xi_2^T(\alpha) & \Xi_3^T(\alpha) & \mathcal{C}^T(\alpha) \\ * & -\gamma^2 I & \hat{B}_1^T(\alpha)H^T & \hat{B}_2^T(\alpha)U^T & \hat{D}^T(\alpha) \\ * & * & -R^h(\alpha) & 0 & 0 \\ * & * & * & -R^v(\alpha) & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0; \quad (4.6)$$

où

$$\Xi_1(\alpha) = \begin{bmatrix} -\text{sym}(H) & 0 & \frac{H^T}{2} + R^{hT}(\alpha) & 0 \\ * & -\text{sym}(U) & 0 & \frac{U^T}{2} + R^{vT}(\alpha) \\ * & * & -2R^h(\alpha) & 0 \\ * & * & * & -2R^v(\alpha) \end{bmatrix};$$

$$\Xi_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11}^T(\alpha)H^T \\ \hat{A}_{12}^T(\alpha)H^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T; \quad \Xi_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{21}^T(\alpha)U^T \\ \hat{A}_{22}^T(\alpha)U^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T; \quad \mathcal{C}(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{C}_1^T(\alpha) \\ \hat{C}_2^T(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

Preuve. Supposons que les matrices dépendantes des paramètres $R^h(\alpha)$ et $R^v(\alpha)$ ont la structure suivante :

$$\begin{cases} R^h(\alpha) = \sum_{n=1}^N \alpha_n R_n^h, R_n^h > 0; \\ R^v(\alpha) = \sum_{n=1}^N \alpha_n R_n^v, R_n^v > 0; \end{cases} \quad n = \{1, \dots, N\}.$$

Ensuite, nous choisissons la fonction de Lyapunov suivante pour le système d'erreur de filtrage (4.4)

$$V(i, j) = V^h(i, j) + V^v(i, j);$$

avec :

$$V^h(i, j) = \hat{x}^{hT}(i, j)H^T(R^h(\alpha))^{-1}H\hat{x}^h(i, j); \quad (4.7)$$

$$V^v(i, j) = \hat{x}^{vT}(i, j)U^T(R^v(\alpha))^{-1}U\hat{x}^v(i, j); \quad (4.8)$$

où H et U sont des matrices de dimension appropriée. La différence de la fonction $V(i, j)$ est donné par :

$$\Delta V(i, j) = \Delta V^h(i, j) + \Delta V^v(i, j),$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta V^h(i, j) &= V^h(i+1, j) - V^h(i, j) \\ &= \hat{x}^{hT}(i+1, j)H^T(R^h(\alpha))^{-1}H\hat{x}^h(i+1, j) - \hat{x}^{hT}(i, j)H^T(R^h(\alpha))^{-1}H\hat{x}^h(i, j); \\ \Delta V^v(i, j) &= V^v(i, j+1) - V^v(i, j) \\ &= \hat{x}^{vT}(i, j+1)U^T(R^v(\alpha))^{-1}U\hat{x}^v(i, j+1) - \hat{x}^{vT}(i, j)U^T(R^v(\alpha))^{-1}U\hat{x}^v(i, j). \end{aligned}$$

Par addition et soustraction des mêmes termes, les deux équations suivantes sont vraies

$$\begin{aligned} \Lambda^h &= 2\{\hat{x}^{hT}(i, j)H^T(R^h(\alpha))^{-1}H\hat{x}^h(i, j) + \hat{x}^{hT}(i, j)R^h(\alpha)(R^h(\alpha))^{-1}H\hat{x}^h(i, j) \\ &\quad - \hat{x}^{hT}(i, j)H^T(R^h(\alpha))^{-1}R^h(\alpha)(R^h(\alpha))^{-1}H\hat{x}^h(i, j) - \hat{x}^{hT}(i, j)H\hat{x}^h(i, j)\} \\ &= 0; \\ \Lambda^v &= 2\{\hat{x}^{vT}(i, j)U^T(R^v(\alpha))^{-1}U\hat{x}^v(i, j) + \hat{x}^{vT}(i, j)R^v(\alpha)(R^v(\alpha))^{-1}V\hat{x}^v(i, j) \\ &\quad - \hat{x}^{vT}(i, j)U^T(R^v(\alpha))^{-1}R^v(\alpha)(R^v(\alpha))^{-1}V\hat{x}^v(i, j) - \hat{x}^{vT}(i, j)H\hat{x}^v(i, j)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

En définissant :

$$\xi(i, j) = \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i, j) \\ \hat{x}^v(i, j) \\ (R^h(\alpha))^{-1}H\hat{x}^h(i, j) \\ (R^v(\alpha))^{-1}U\hat{x}^v(i, j) \end{bmatrix},$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta V(i, j) &= \Delta V(i, j) + \Lambda^h + \Lambda^v \\ &= \xi^T(i, j)\{\Xi_1(\alpha) + \Xi_2^T(\alpha)(R^h(\alpha))^{-1}\Xi_2(\alpha) + \Xi_3^T(\alpha)(R^v(\alpha))^{-1}\Xi_3(\alpha)\}\xi(i, j). \end{aligned}$$

Si l'inégalité suivante est satisfaite

$$\Xi_1(\alpha) + \Xi_2^T(\alpha)(R^h(\alpha))^{-1}\Xi_2(\alpha) + \Xi_3^T(\alpha)(R^v(\alpha))^{-1}\Xi_3(\alpha) < 0; \quad (4.9)$$

alors $\Delta V(i, j) < 0$. Ainsi, la stabilité asymptotique robuste du système d'erreur de filtrage (4.4) avec $w(i, j) = 0$ est garantie. En utilisant le lemme 1.4, la condition (4.9) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} \Xi_1(\alpha) & \Xi_2^T(\alpha) & \Xi_3^T(\alpha) \\ * & -R^h(\alpha) & 0 \\ * & * & -R^v(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \quad (4.10)$$

De plus, si l'inégalité (4.6) est vraie, selon le lemme 1.15, on a :

$$T_1^T \Xi(\alpha) T_1 = \begin{bmatrix} \Xi_1(\alpha) & \Xi_2^T(\alpha) & \Xi_3^T(\alpha) & 0 & \mathcal{C}^T(\alpha) \\ * & -R^h(\alpha) & 0 & H\hat{B}_1(\alpha) & 0 \\ * & * & -R^v(\alpha) & U\hat{B}_2(\alpha) & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & \hat{D}^T(\alpha) \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0,$$

où

$$T_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

ce qui implique que l'inégalité (4.10) est satisfaite, donc la stabilité asymptotique robuste du système d'erreur de filtrage (4.4) avec $w(i, j) = 0$ est assurée par le lemme 4.1.

Ensuite, nous prouverons que la condition (4.5) est satisfaite dans des conditions initiales nulles et pour tout $w(i, j) \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$. Pour cet objectif, définissant $\xi_w(i, j) = [\xi^T(i, j) \ w^T(i, j)]^T$ et

$$\mathcal{J} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \{e^T(i, j)e(i, j) - \gamma^2 w^T(i, j)w(i, j)\}.$$

Sous les conditions initiales nulles, on a $V^h(0, j) = 0$ et $V^v(i, 0) = 0$, alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \{e^T(i, j)e(i, j) - \gamma^2 w^T(i, j)w(i, j) + \Delta V(i, j)\} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\infty} V^h(\infty, j) - \sum_{i=0}^{\infty} V^v(i, \infty) \\ &< \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \{e^T(i, j)e(i, j) - \gamma^2 w^T(i, j)w(i, j) + \Delta V(i, j)\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \{e^T(i, j)e(i, j) - \gamma^2 w^T(i, j)w(i, j) + \Delta V(i, j) + \Lambda^h + \Lambda^v\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \xi_w^T(i, j) \left\{ \begin{bmatrix} \Xi_1(\alpha) & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \right. \\ &\quad + \begin{bmatrix} \Xi_2^T(\alpha) \\ B_1^T(\alpha) H^T \end{bmatrix} (R^h(\alpha))^{-1} \begin{bmatrix} \Xi_2^T(\alpha) \\ B_1^T(\alpha) H^T \end{bmatrix}^T \\ &\quad + \begin{bmatrix} \Xi_3^T(\alpha) \\ B_2^T(\alpha) U^T \end{bmatrix} (R^v(\alpha))^{-1} \begin{bmatrix} \Xi_3^T(\alpha) \\ B_2^T(\alpha) U^T \end{bmatrix}^T \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \mathcal{C}^T(\alpha) \\ \hat{D}^T(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}^T(\alpha) \\ \hat{D}^T(\alpha) \end{bmatrix}^T \right\} \xi_w(i, j). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.4, l'inégalité (4.6) est équivalente à :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Xi_1(\alpha) & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Xi_2^T(\alpha) \\ B_1^T(\alpha) H^T \end{bmatrix} (R^h(\alpha))^{-1} \begin{bmatrix} \Xi_2^T(\alpha) \\ B_1^T(\alpha) H^T \end{bmatrix}^T \\ &+ \begin{bmatrix} \Xi_3^T(\alpha) \\ B_2^T(\alpha) U^T \end{bmatrix} (R^v(\alpha))^{-1} \begin{bmatrix} \Xi_3^T(\alpha) \\ B_2^T(\alpha) U^T \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \mathcal{C}^T(\alpha) \\ \hat{D}^T(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}^T(\alpha) \\ \hat{D}^T(\alpha) \end{bmatrix}^T < 0; \end{aligned}$$

ce qui garantit $\mathcal{J} < 0$, alors :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e^T(i, j)e(i, j) < \gamma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} w^T(i, j)w(i, j). \quad (4.11)$$

La preuve est terminée. \square

4.2.2.2 Synthèse du filtre H_∞ robuste

Dans le paragraphe précédent, nous avons développé une nouvelle condition d'analyse de la performance H_∞ pour le système d'erreur de filtrage (4.4). Cependant, les matrices du filtre (4.3) n'ont pas été déterminées à partir de l'inégalité (4.6). Donc, dans cette sous-section, nous proposerons une méthode pour résoudre le problème de synthèse du filtre H_∞ .

Théorème 4.1. [Badie et al., 2020d] *Considérons le système 2-D discret incertain (4.1) et étant donné un scalaire positif γ , un filtre d'ordre complet (4.3) existe assurant la stabilité asymptotique robuste et une performance H_∞ pour le système d'erreur de filtrage dans (4.4), s'il existe des matrices $\mathcal{R}_n^h > 0$, $\mathcal{R}_n^v > 0$ $n \in \{1, \dots, N\}$, \mathcal{H} , \mathcal{U} , \mathcal{A}_{F11} , \mathcal{A}_{F12} , \mathcal{A}_{F21} , \mathcal{A}_{F22} , \mathcal{B}_{F1} , \mathcal{B}_{F2} , \mathcal{C}_{F1} , \mathcal{C}_{F2} et \mathcal{D}_F tels que la condition LMI (4.12) est faisable pour $n \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\Psi_n = \begin{bmatrix} -\text{sym}(\mathcal{H}) & 0 & \Upsilon_{1n} & 0 & 0 & \Upsilon_{2n} & \Upsilon_{3n} & \Upsilon_{4n} \\ * & -\text{sym}(\mathcal{U}) & 0 & \Upsilon_{5n} & 0 & \Upsilon_{6n} & \Upsilon_{7n} & \Upsilon_{8n} \\ * & * & -2\mathcal{R}_n^h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2\mathcal{R}_n^v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & \Upsilon_{9n} & \Upsilon_{10n} & \Upsilon_{11n} \\ * & * & * & * & * & -\mathcal{R}_n^h & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\mathcal{R}_n^v & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0; \quad (4.12)$$

avec

$$\mathcal{R}_n^h = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11n}^h & \mathcal{R}_{12n}^h \\ * & \mathcal{R}_{22n}^h \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_n^v = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11n}^v & \mathcal{R}_{12n}^v \\ * & \mathcal{R}_{22n}^v \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} \\ \mathcal{H}_{21} & \mathcal{H}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{11} & \mathcal{U}_{12} \\ \mathcal{U}_{21} & \mathcal{U}_{22} \end{bmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} \Upsilon_{1n} &= \mathcal{R}_n^h + \frac{\mathcal{H}^T}{2}, & \Upsilon_{5n} &= \mathcal{R}_n^v + \frac{\mathcal{U}^T}{2} & \Upsilon_{11n} &= F_n^T - D_n^T \mathcal{D}_F^T, \\ \Upsilon_{2n} &= \begin{bmatrix} A_{11n}^T \mathcal{H}_{11}^T + C_{1n}^T \mathcal{B}_{F1}^T & A_{11n}^T \mathcal{H}_{21}^T + C_{1n}^T \mathcal{B}_{F1}^T \\ \mathcal{A}_{F11}^T & \mathcal{A}_{F11}^T \end{bmatrix}, & \Upsilon_{4n} &= \begin{bmatrix} E_{1n}^T - C_{1n}^T \mathcal{D}_F^T \\ -C_{F1}^T \end{bmatrix}, \\ \Upsilon_{3n} &= \begin{bmatrix} A_{21n}^T \mathcal{U}_{11}^T + C_{1n}^T \mathcal{B}_{F2}^T & A_{21n}^T \mathcal{U}_{21}^T + C_{1n}^T \mathcal{B}_{F2}^T \\ \mathcal{A}_{F21}^T & \mathcal{A}_{F21}^T \end{bmatrix}, & \Upsilon_{8n} &= \begin{bmatrix} E_{2n}^T - C_{2n}^T \mathcal{D}_F^T \\ -C_{F2}^T \end{bmatrix}, \\ \Upsilon_{6n} &= \begin{bmatrix} A_{12n}^T \mathcal{H}_{11}^T + C_{2n}^T \mathcal{B}_{F1}^T & A_{12n}^T \mathcal{H}_{21}^T + C_{2n}^T \mathcal{B}_{F1}^T \\ \mathcal{A}_{F12}^T & \mathcal{A}_{F12}^T \end{bmatrix}, \\ \Upsilon_{7n} &= \begin{bmatrix} A_{22n}^T \mathcal{U}_{11}^T + C_{2n}^T \mathcal{B}_{F2}^T & A_{22n}^T \mathcal{U}_{21}^T + C_{2n}^T \mathcal{B}_{F2}^T \\ \mathcal{A}_{F22}^T & \mathcal{A}_{F22}^T \end{bmatrix}, \\ \Upsilon_{9n} &= [B_{1n}^T \mathcal{H}_{11}^T + D_n^T \mathcal{B}_{F1}^T \quad B_{1n}^T \mathcal{H}_{21}^T + D_n^T \mathcal{B}_{F1}^T], \\ \Upsilon_{10n} &= [B_{2n}^T \mathcal{U}_{11}^T + D_n^T \mathcal{B}_{F2}^T \quad B_{2n}^T \mathcal{U}_{21}^T + D_n^T \mathcal{B}_{F2}^T]. \end{aligned}$$

De plus, un filtre approprié sous la forme de (4.3) est donné par :

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{F11} & A_{F12} & B_{F1} \\ A_{F21} & A_{F22} & B_{F2} \\ \hline C_{F1} & C_{F2} & D_F \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} \mathcal{A}_{F11} & \mathcal{A}_{F12} & \mathcal{B}_{F1} \\ \mathcal{A}_{F21} & \mathcal{A}_{F22} & \mathcal{B}_{F2} \\ \hline \mathcal{C}_{F1} & \mathcal{C}_{F2} & \mathcal{D}_F \end{array} \right], \quad (4.13)$$

ou

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{F11} & A_{F12} & B_{F1} \\ A_{F21} & A_{F22} & B_{F2} \\ \hline C_{F1} & C_{F2} & D_F \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \mathcal{A}_{F11} & \mathcal{A}_{F12} & \mathcal{B}_{F1} \\ \mathcal{A}_{F21} & \mathcal{A}_{F22} & \mathcal{B}_{F2} \\ \hline \mathcal{C}_{F1} & \mathcal{C}_{F2} & \mathcal{D}_F \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Preuve. On pose :

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},$$

$$R^h(\alpha) = \begin{bmatrix} R_{11}^h(\alpha) & R_{12}^h(\alpha) \\ * & R_{22}^h(\alpha) \end{bmatrix}, \quad R^v(\alpha) = \begin{bmatrix} R_{11}^v(\alpha) & R_{12}^v(\alpha) \\ * & R_{22}^v(\alpha) \end{bmatrix}.$$

On suppose que les matrices H_{12} , H_{22} , U_{12} et U_{22} sont non singuliers et on définit les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^h &= \text{diag}\{I, H_{22}^{-T} H_{12}^T\}; \\ \mathcal{T}^v &= \text{diag}\{I, U_{22}^{-T} U_{12}^T\}; \\ \mathcal{T} &= \text{diag}\{\mathcal{T}^h, \mathcal{T}^v, \mathcal{T}^h, \mathcal{T}^v, I, \mathcal{T}^h, \mathcal{T}^v, I\}. \end{aligned}$$

En multipliant à gauche et à droite $\Xi(\alpha)$ dans (4.1) par \mathcal{T}^T et \mathcal{T} , respectivement, et en considérant les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{hT} R^h(\alpha) \mathcal{T}^h &= \mathcal{R}^h(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11}^h(\alpha) & \mathcal{R}_{12}^h(\alpha) \\ * & \mathcal{R}_{22}^h(\alpha) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11n}^h & \mathcal{R}_{12n}^h \\ * & \mathcal{R}_{22n}^h \end{bmatrix}, \\ \mathcal{T}^{vT} R^v(\alpha) \mathcal{T}^v &= \mathcal{R}^v(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11}^v(\alpha) & \mathcal{R}_{12}^v(\alpha) \\ * & \mathcal{R}_{22}^v(\alpha) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11n}^v & \mathcal{R}_{12n}^v \\ * & \mathcal{R}_{22n}^v \end{bmatrix}, \\ \mathcal{T}^{hT} H \mathcal{T}^h &= \mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} \\ \mathcal{H}_{21} & \mathcal{H}_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}^{vT} U \mathcal{T}^v = \mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{11} & \mathcal{U}_{12} \\ \mathcal{U}_{21} & \mathcal{U}_{12} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{F11} & \mathcal{A}_{F12} \\ \mathcal{A}_{F21} & \mathcal{A}_{F22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{12} & 0 \\ 0 & U_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{F11} & A_{F12} \\ A_{F21} & A_{F22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{22}^{-T} H_{12}^T & 0 \\ 0 & U_{22}^{-T} U_{12}^T \end{bmatrix} \quad (4.15a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{F1} \\ \mathcal{B}_{F2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{12} & 0 \\ 0 & U_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{F1} \\ B_{F2} \end{bmatrix}, \quad (4.15b)$$

$$[\mathcal{C}_{F1} \ \mathcal{C}_{F2}] = [\mathcal{C}_{F1} \ \mathcal{C}_{F2}] \begin{bmatrix} H_{22}^{-T} H_{12}^T & 0 \\ 0 & U_{22}^{-T} U_{12}^T \end{bmatrix}. \quad (4.15c)$$

Alors, nous obtenons que le système d'erreur de filtrage (4.4) est robustement asymptotiquement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ , si l'inégalité suivante est vérifiée

$$\Psi(\alpha) = \mathcal{T}^T \Xi(\alpha) \mathcal{T} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \Psi_n < 0. \quad (4.16)$$

On observe que la condition LMI (4.12) pour $n \in \{1, \dots, N\}$, garantie (4.16).

De plus, les égalités (4.15a)–(4.15c) peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{F11} & \mathcal{A}_{F12} \\ \mathcal{A}_{F21} & \mathcal{A}_{F22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & U_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{F11} & A_{F12} \\ A_{F21} & A_{F22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{12}^{-T} H_{22}^T & 0 \\ 0 & U_{12}^{-T} U_{22}^T \end{bmatrix}, \quad (4.17a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{F1} \\ \mathcal{B}_{F2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & U_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{F1} \\ B_{F2} \end{bmatrix}, \quad (4.17b)$$

$$[\mathcal{C}_{F1} \ \mathcal{C}_{F2}] = [\mathcal{C}_{F1} \ \mathcal{C}_{F2}] \begin{bmatrix} H_{12}^{-T} H_{22}^T & 0 \\ 0 & U_{12}^{-T} U_{22}^T \end{bmatrix}. \quad (4.17c)$$

La fonction de transfert de $y(i, j)$ à $z_F(i, j)$ du filtre indépendant du paramètre incertain est donnée par :

$$G_F(z_1, z_2) = C_F (\mathcal{I}_F(z_1, z_2) - A_F)^{-1} B_F + D_F, \quad (4.18)$$

où $\mathcal{I}_F(z_1, z_2) = \text{diag}\{z_1 I_{n_h}, z_2 I_{n_v}\}$. En considérant les matrices suivantes :

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{12} & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_F = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{F11} & \mathcal{A}_{F12} \\ \mathcal{A}_{F21} & \mathcal{A}_{F22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_F = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{F1} \\ \mathcal{B}_{F2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_F = [\mathcal{C}_{F1} \quad \mathcal{C}_{F2}],$$

et en remplaçant les matrices de filtre par (4.17a)–(4.17c) dans (4.18).

$$\begin{aligned} G_F(z_1, z_2) &= C_F (\mathcal{I}_F(z_1, z_2) - A_F)^{-1} B_F + D_F \\ &= C_F (\mathcal{I}_F(z_1, z_2) \mathcal{W} - A_F)^{-1} \mathcal{B}_F + \mathcal{D}_F \\ &= C_F (\mathcal{I}_F(z_1, z_2) - \mathcal{W}^{-1} A_F)^{-1} \mathcal{W}^{-1} \mathcal{B}_F + \mathcal{D}_F \\ &= C_F \mathcal{W}^{-1} (\mathcal{I}_F(z_1, z_2) - A_F \mathcal{W}^{-1})^{-1} \mathcal{B}_F + \mathcal{D}_F. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Alors, les matrices de filtre peuvent être calculées à partir de (4.13) ou (4.14). La preuve est complétée. \square

Remarque 4.3. *Il est à noter que les fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres dans (4.62) et (4.63) se réduisent aux fonctions de Lyapunov quadratiques lorsque :*

$$\begin{cases} R_n^h = R^h, \\ R_n^v = R^v, \end{cases} \quad n \in \{1, \dots, N\}.$$

A partir du théorème 4.1 et de remarque 4.3, nous pouvons déduire le corollaire suivant :

Corollaire 4.1. *[Badie et al., 2020d] Considérons le système 2-D incertain (4.1) et étant donné un scalaire γ positif, un filtre 2-D sous la forme de (4.3) existe, de telle sorte que le système d'erreur de filtrage (4.4) est robustement asymptotiquement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ , s'il existe des matrices $\mathcal{R}^h > 0$, $\mathcal{R}^v > 0$, \mathcal{H} , \mathcal{U} , \mathcal{A}_{F11} , \mathcal{A}_{F12} , \mathcal{A}_{F21} , \mathcal{A}_{F22} , \mathcal{B}_{F1} , \mathcal{B}_{F2} , \mathcal{C}_{F1} , \mathcal{C}_{F2} et \mathcal{D}_F tels que la condition LMI (4.20) est faisable pour $n \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\begin{bmatrix} -\text{sym}(\mathcal{H}) & 0 & \Upsilon_1 & 0 & 0 & \Upsilon_{2n} & \Upsilon_{3n} & \Upsilon_{4n} \\ * & -\text{sym}(\mathcal{U}) & 0 & \Upsilon_5 & 0 & \Upsilon_{6n} & \Upsilon_{7n} & \Upsilon_{8n} \\ * & * & -2\mathcal{R}^h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2\mathcal{R}^v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & \Upsilon_{9n} & \Upsilon_{10n} & \Upsilon_{11n} \\ * & * & * & * & * & -\mathcal{R}^h & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\mathcal{R}^v & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0; \quad (4.20)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^h &= \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11}^h & \mathcal{R}_{12}^h \\ * & \mathcal{R}_{22}^h \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}^v = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11}^v & \mathcal{R}_{12}^v \\ * & \mathcal{R}_{22}^v \end{bmatrix}, \\ \Upsilon_1 &= \mathcal{R}^h + \frac{\mathcal{H}^T}{2}, \quad \Upsilon_5 = \mathcal{R}^v + \frac{\mathcal{U}^T}{2}, \end{aligned}$$

où les matrices \mathcal{H} , \mathcal{U} , Υ_{2n} , Υ_{3n} , Υ_{4n} , Υ_{6n} , Υ_{7n} , Υ_{8n} , Υ_{9n} , Υ_{10n} , et Υ_{11n} ont les mêmes expressions que celles du théorème 4.1. De plus, un filtre approprié sous la forme de (4.4) est donné par (4.13) ou (4.14).

4.2.2.3 Synthèse du filtre H_∞ robuste dépendant du paramètre incertain

Dans cette sous-section, nous nous concentrerons sur la synthèse d'un filtre H_∞ robuste dépendant du paramètre incertain, où les matrices du filtre varient en fonction du paramètre α . À cette fin, et comme dans [Chang et al., 2015], nous supposons que le paramètre α peut être mesuré ou estimé en ligne. Et nous considérons un filtre d'ordre complet dépendant du paramètre incertain de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_F^h(i+1, j) \\ x_F^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= A_F(\alpha) \begin{bmatrix} x_F^h(i, j) \\ x_F^v(i, j) \end{bmatrix} + B_F(\alpha)y(i, j); \\ z_F(i, j) &= C_F(\alpha) \begin{bmatrix} x_F^h(i, j) \\ x_F^v(i, j) \end{bmatrix} + D_F(\alpha)w(i, j); \\ x_F^h(0, j) &= x_F^v(i, 0) = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

où

$$\begin{aligned} A_F(\alpha) &= \begin{bmatrix} A_{F11}(\alpha) & A_{F12}(\alpha) \\ A_{F21}(\alpha) & A_{F22}(\alpha) \end{bmatrix}, \quad B_F(\alpha) = \begin{bmatrix} B_{F1}(\alpha) \\ B_{F2}(\alpha) \end{bmatrix}, \\ C_F(\alpha) &= [C_{F1}(\alpha) \ C_{F2}(\alpha)], \end{aligned}$$

et $D_F(\alpha)$ sont des matrices de filtre dépendantes des paramètres à déterminer.

Remarque 4.4. *Le filtre dans (4.21) est appelé filtre dépendant du paramètre incertain, car il dépend du paramètre α déterminé ou estimé en ligne. Étant donné que les valeurs instantanées des paramètres du système sont utilisées dans la méthode de filtrage dépendante des paramètres, le filtre dépendant du paramètre incertain (4.21) devrait être plus performant que le filtre indépendant du paramètre incertain (4.4). De plus, il est à noter que le filtre (4.21) se réduit au filtre (4.4) lorsque $A_F(\alpha) = A_F$, $B_F(\alpha) = B_F$, $C_F(\alpha) = C_F$ et $D_F(\alpha) = D_F$. Nous observerons dans la sous-section des exemples numériques que le filtre dépendant du paramètre incertain peut généralement obtenir de meilleures performances que le filtre indépendant du paramètre incertain lorsque le paramètre α peut être mesuré ou estimé en ligne.*

Théorème 4.2. [Badie et al., 2020d] *Considérons le système 2-D incertain dans (4.1) et étant donné un scalaire γ positif, un filtre dépendant du paramètre incertain sous la forme de (4.21) existe, de sorte que le système d'erreur de filtrage correspondant est robustement asymptotiquement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ , s'il existe des matrices $\mathcal{R}_n^h > 0$, $\mathcal{R}_n^v > 0$, \mathcal{H} , \mathcal{U} , \mathcal{A}_{F11n} , \mathcal{A}_{F12n} , \mathcal{A}_{F21n} , \mathcal{A}_{F22n} , \mathcal{B}_{F1n} , \mathcal{B}_{F2n} , \mathcal{C}_{F1n} , \mathcal{C}_{F2n} et \mathcal{D}_{Fn} $n \in \{1, \dots, N\}$ tels que les LMIs suivants sont faisables :*

$$\Theta_{nn} < 0, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (4.22)$$

$$\Theta_{np} + \Theta_{pn} < 0, \quad 1 \leq n < p \leq N; \quad (4.23)$$

où

$$\begin{aligned} \Theta_{np} &= \begin{bmatrix} -\text{sym}(\mathcal{H}) & 0 & \Theta_{1n} & 0 & 0 & \Theta_{2np} & \Theta_{3np} & \Theta_{4np} \\ * & -\text{sym}(\mathcal{U}) & 0 & \Theta_{5n} & 0 & \Theta_{6np} & \Theta_{7np} & \Theta_{8np} \\ * & * & -2\mathcal{R}_n^h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2\mathcal{R}_n^v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & \Theta_{9np} & \Theta_{10np} & \Theta_{11np} \\ * & * & * & * & * & -\mathcal{R}_{np}^h & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\mathcal{R}_{np}^v & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}; \\ \Theta_{1n} &= \mathcal{R}_n^h + \frac{\mathcal{H}^T}{2}, \quad \Theta_{5n} = \mathcal{R}_n^v + \frac{\mathcal{U}^T}{2}, \quad \Theta_{11np} = F_n^T - D_p^T \mathcal{D}_{Fn}^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{2np} &= \begin{bmatrix} A_{11n}^T \mathcal{H}_{11}^T + C_{1p}^T \mathcal{B}_{F1n}^T & A_{11n}^T \mathcal{H}_{21}^T + C_{1p}^T \mathcal{B}_{F1n}^T \\ \mathcal{A}_{F11n}^T & \mathcal{A}_{F11n}^T \end{bmatrix}, \\
 \Theta_{3np} &= \begin{bmatrix} A_{21n}^T \mathcal{U}_{11}^T + C_{1p}^T \mathcal{B}_{F2n}^T(\alpha) & A_{21n}^T \mathcal{U}_{21}^T + C_{1p}^T \mathcal{B}_{F2n}^T \\ \mathcal{A}_{F21n}^T & \mathcal{A}_{F21n}^T \end{bmatrix}, \\
 \Theta_{4np} &= \begin{bmatrix} E_{1n}^T - C_{1n}^T \mathcal{D}_{Fp} \\ -C_{F1n}^T \end{bmatrix}, \quad \Theta_{8np} = \begin{bmatrix} E_{2n}^T - C_{2n}^T \mathcal{D}_{Fp} \\ -C_{F2n}^T \end{bmatrix}, \\
 \Theta_{6np} &= \begin{bmatrix} A_{12n}^T \mathcal{H}_{11}^T + C_{2p}^T \mathcal{B}_{F1n}^T & A_{12n}^T \mathcal{H}_{21}^T + C_{2p}^T \mathcal{B}_{F1n}^T \\ \mathcal{A}_{F12n}^T & \mathcal{A}_{F12n}^T \end{bmatrix}, \\
 \Theta_{7np} &= \begin{bmatrix} A_{22n}^T \mathcal{U}_{11}^T + C_{2p}^T \mathcal{B}_{F2n}^T & A_{22n}^T \mathcal{U}_{21}^T + C_{2p}^T \mathcal{B}_{F2n}^T \\ \mathcal{A}_{F22n}^T & \mathcal{A}_{F22n}^T \end{bmatrix}, \\
 \Theta_{9np} &= [B_{1n}^T \mathcal{H}_{11}^T + D_p^T \mathcal{B}_{F1n}^T \quad B_{1n}^T \mathcal{H}_{21}^T + D_p^T \mathcal{B}_{F1n}^T], \\
 \Theta_{10np} &= [B_{2n}^T \mathcal{U}_{11}^T + D_p^T \mathcal{B}_{F2n}^T \quad B_{2n}^T \mathcal{U}_{21}^T + D_p^T \mathcal{B}_{F2n}^T].
 \end{aligned}$$

De plus, un filtre approprié sous la forme de (4.21) est donné par :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{F11n} & \mathcal{A}_{F12n} & \mathcal{B}_{F1n} \\ \mathcal{A}_{F21n} & \mathcal{A}_{F22n} & \mathcal{B}_{F2n} \\ \mathcal{C}_{F1n} & \mathcal{C}_{F2n} & \mathcal{D}_{Fn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{F11n} & \mathcal{A}_{F12n} & \mathcal{B}_{F1n} \\ \mathcal{A}_{F21n} & \mathcal{A}_{F22n} & \mathcal{B}_{F2n} \\ \mathcal{C}_{F1n} & \mathcal{C}_{F2n} & \mathcal{D}_{Fn} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{F11n} & \mathcal{A}_{F12n} & \mathcal{B}_{F1n} \\ \mathcal{A}_{F21n} & \mathcal{A}_{F22n} & \mathcal{B}_{F2n} \\ \mathcal{C}_{F1n} & \mathcal{C}_{F2n} & \mathcal{D}_{Fn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{F11n} & \mathcal{A}_{F12n} & \mathcal{B}_{F1n} \\ \mathcal{A}_{F21n} & \mathcal{A}_{F22n} & \mathcal{B}_{F2n} \\ \mathcal{C}_{F1n} & \mathcal{C}_{F2n} & \mathcal{D}_{Fn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Preuve. Semblable à la preuve du théorème 4.1, compte tenu du système 2-D discret incertain dans (4.1) et du filtre dépendant du paramètre incertain (4.21), le système d'erreur de filtrage correspondant est robustement asymptotiquement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ , si l'inégalité suivante est vérifiée

$$\Theta(\alpha) = \begin{bmatrix} -\text{sym}(\mathcal{H}) & 0 & \Theta_1(\alpha) & 0 & 0 & \Theta_2(\alpha) & \Theta_3(\alpha) & \Theta_4(\alpha) \\ * & -\text{sym}(\mathcal{U}) & 0 & \Theta_5(\alpha) & 0 & \Theta_6(\alpha) & \Theta_7(\alpha) & \Theta_8(\alpha) \\ * & * & -2\mathcal{R}^h(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2\mathcal{R}^v(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & \Theta_9(\alpha) & \Theta_{10}(\alpha) & \Theta_{11}(\alpha) \\ * & * & * & * & * & -\mathcal{R}^h(\alpha) & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\mathcal{R}^v(\alpha) & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0; \quad (4.26)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Theta_1(\alpha) &= \mathcal{R}^h(\alpha) + \frac{\mathcal{H}^T}{2}, \quad \Theta_5(\alpha) = \mathcal{R}^v(\alpha) + \frac{\mathcal{U}^T}{2}, \\
 \Theta_2(\alpha) &= \begin{bmatrix} A_{11}^T(\alpha) \mathcal{H}_{11}^T + C_1^T(\alpha) \mathcal{B}_{F1}^T(\alpha) & A_{11}^T(\alpha) \mathcal{H}_{21}^T + C_1^T(\alpha) \mathcal{B}_{F1}^T(\alpha) \\ \mathcal{A}_{F11}^T(\alpha) & \mathcal{A}_{F11}^T(\alpha) \end{bmatrix}, \\
 \Theta_3(\alpha) &= \begin{bmatrix} A_{21}^T(\alpha) \mathcal{U}_{11}^T + C_1^T(\alpha) \mathcal{B}_{F2}^T(\alpha) & A_{21}^T(\alpha) \mathcal{U}_{21}^T + C_1^T(\alpha) \mathcal{B}_{F2}^T(\alpha) \\ \mathcal{A}_{F21}^T(\alpha) & \mathcal{A}_{F21}^T(\alpha) \end{bmatrix}, \\
 \Theta_4(\alpha) &= \begin{bmatrix} L_1^T(\alpha) \\ -C_{F1}^T(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \Theta_8(\alpha) = \begin{bmatrix} L_2^T(\alpha) \\ -C_{F2}^T(\alpha) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_6(\alpha) &= \begin{bmatrix} A_{12}^T(\alpha)\mathcal{H}_{11}^T + C_2^T(\alpha)\mathcal{B}_{F_1}^T(\alpha) & A_{12}^T(\alpha)\mathcal{H}_{21}^T + C_2^T(\alpha)\mathcal{B}_{F_1}^T(\alpha) \\ \mathcal{A}_{F_{12}}^T(\alpha) & \mathcal{A}_{F_{12}}^T(\alpha) \end{bmatrix}, \\
 \Theta_7(\alpha) &= \begin{bmatrix} A_{22}^T(\alpha)\mathcal{U}_{11}^T + C_2^T(\alpha)\mathcal{B}_{F_2}^T(\alpha) & A_{22}^T(\alpha)\mathcal{U}_{21}^T + C_2^T(\alpha)\mathcal{B}_{F_2}^T(\alpha) \\ \mathcal{A}_{F_{22}}^T(\alpha) & \mathcal{A}_{F_{22}}^T(\alpha) \end{bmatrix}, \\
 \Theta_9(\alpha) &= [B_1^T(\alpha)\mathcal{H}_{11}^T + D^T(\alpha)\mathcal{B}_{F_1}^T(\alpha) \quad B_1^T(\alpha)\mathcal{H}_{21}^T + D^T(\alpha)\mathcal{B}_{F_1}^T(\alpha)], \\
 \Theta_{10}(\alpha) &= [B_2^T(\alpha)\mathcal{U}_{11}^T + D^T(\alpha)\mathcal{B}_{F_2}^T(\alpha) \quad B_2^T(\alpha)\mathcal{U}_{21}^T + D^T(\alpha)\mathcal{B}_{F_2}^T(\alpha)], \\
 \Theta_{11}(\alpha) &= F^T(\alpha) - D^T(\alpha)\mathcal{D}_F^T(\alpha).
 \end{aligned}$$

Alors, $\Theta(\alpha)$ dans (4.26) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \Theta(\alpha) &= \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^N \alpha_n \alpha_p \Theta_{np} \\
 &= \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \Theta_{nn} + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{p=n+1}^N \alpha_n \alpha_p (\Theta_{np} + \Theta_{pn}).
 \end{aligned}$$

Il est à noter que les LMIs (4.22) et (4.23) garantissent (4.26).

De l'autre côté, et similaire à (4.74), pour un α spécifique, la fonction de transfert de $y(i, j)$ à $z_F(i, j)$ du filtre dépendant du paramètre incertain est donnée par :

$$\begin{aligned}
 G_F(z_1, z_2, \alpha) &= C_F(\alpha)(\mathcal{I}_F(z_1, z_2) - \mathcal{A}_F(\alpha))^{-1} B_F(\alpha) + D_F(\alpha) \\
 &= C_F(\alpha)(\mathcal{I}_F(z_1, z_2)\mathcal{W} - \mathcal{A}_F(\alpha))^{-1} \mathcal{B}_F(\alpha) + \mathcal{D}_F(\alpha) \\
 &= C_F(\mathcal{I}_F(z_1, z_2) - \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}_F(\alpha))^{-1} \mathcal{W}^{-1} \mathcal{B}_F(\alpha) + \mathcal{D}_F(\alpha) \\
 &= C_F(\alpha)\mathcal{W}^{-1}(\mathcal{I}_F(z_1, z_2) - \mathcal{A}_F(\alpha)\mathcal{W}^{-1})^{-1} \mathcal{B}_F(\alpha) + \mathcal{D}_F(\alpha).
 \end{aligned}$$

Finalement, les matrices de filtre peuvent être calculées à partir de (4.24) ou (4.25). La preuve est complétée. \square

Remarque 4.5. *L'avantage principal des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres (4.62) et (4.63) réside dans l'introduction de deux variables H et U , ce qui conduit à découpler les produits entre les matrices de Lyapunov ($R^h(\alpha)$, $R^v(\alpha)$) et les matrices du système. Cette fonctionnalité permet d'utiliser des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres pour l'ensemble du domaine incertain. De plus, cette fonction de découplage augmente le degré de liberté, facilite la tâche de synthèse du filtre robuste et assure ainsi des meilleures performances.*

Remarque 4.6. *Conformément au théorème 4.1 (Théorème 4.2, respectivement), le problème de filtrage H_∞ pour les systèmes 2-D discrets incertains peut être résolu au moyen de la faisabilité de la condition LMI (4.12) (des conditions LMIs (4.22) et (4.23), respectivement). Par exemple, pour le théorème 4.2, il est utile de souligner que les inégalités matricielles (4.22) et (4.23) sont des LMIs en fonction des variables \mathcal{R}_n^h , \mathcal{R}_n^v , \mathcal{H} , \mathcal{U} , $\mathcal{A}_{F_{11n}}$, $\mathcal{A}_{F_{12n}}$, $\mathcal{A}_{F_{21n}}$, $\mathcal{A}_{F_{22n}}$, $\mathcal{B}_{F_{1n}}$, $\mathcal{B}_{F_{2n}}$, $\mathcal{C}_{F_{1n}}$, $\mathcal{C}_{F_{2n}}$, \mathcal{D}_{F_n} , $n \in \{1, \dots, N\}$ et γ^2 . Par conséquent, si les LMIs (4.22) et (4.23) sont faisables, les matrices du filtre peuvent être calculées à partir de (4.24) ou (4.25). De l'autre côté, en résolvant le problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\min \delta \text{ sujet de (4.22) et (4.22) avec } \delta \triangleq \gamma^2,$$

nous pouvons obtenir à partir de (4.24) ou (4.25) les matrices du filtre optimal dépendant du paramètre incertain de telle sorte que l'indice γ de la performance H_∞ du système d'erreur de filtrage correspondant soit minimisé.

Remarque 4.7. Il convient de mentionner que la méthode LMI a été largement utilisée pour résoudre de nombreux problèmes optimaux dans la théorie du contrôle. Comme il est bien connu, lorsque le nombre de variables de décision devient important ou lorsque la taille des LMIs augmente, il y aura une complexité de calcul relativement élevée. Dans [Boukili et al., 2016, El-Kasri et al., 2012, Gao et al., 2008, Gao et al., 2014], les auteurs utilisent des fonctions de Lyapunov polynomiales, pour traiter le problème de filtrage H_∞ robuste. Par conséquent, la complexité dans [Boukili et al., 2016, El-Kasri et al., 2012, Gao et al., 2008, Gao et al., 2014] est liée à la dimension des états (n_h, n_v) , le nombre de sommets (N) et le degré des matrices polynomiales homogènes (g) . tandis que la complexité du théorème 4.1, corollaire 4.1 et théorème 4.2 ne dépend que de n_h , n_v et N . De plus, l'utilisation des résultats développés dans [Boukili et al., 2016] nécessite la recherche des valeurs optimales de quelques scalaires supplémentaires. Au contraire, le théorème 4.1, le corollaire 4.1 et le théorème 4.2 ne nécessitent aucune recherche des paramètres.

4.2.3 Exemples numériques

Dans cette sous-section, deux exemples sont fournis pour démontrer l'avantage et l'applicabilité des approches proposées. L'exemple 4.1 sera présenté pour comparer l'efficacité et la complexité des méthodes de synthèse des filtres indépendantes des paramètres proposées avec certains résultats précédents. Et l'exemple 4.2 sera fourni pour démontrer la supériorité de la méthode de synthèse des filtres dépendants des paramètres sur les méthodes de synthèse des filtres indépendantes des paramètres.

Exemple 4.1. Considérons le système 2-D discret avec des incertitudes polytopiques étudié dans [Gao et al., 2008].

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w(i, j), \\ y(i, j) &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w(i, j), \\ z(i, j) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Où a_1 et a_2 sont deux paramètres inconnus satisfaisant $0.15 \leq a_1 \leq 0.45$, $0.35 \leq a_2 \leq 0.85$. Il est à noter que ce système incertain peut être décrit par un polytope à quatre sommets. Maintenant, nous allons considérer le problème de filtrage H_∞ pour le système incertain ci-dessus.

En appliquant le théorème 4.1, nous obtenons une solution faisable pour la condition LMI (4.12) et nous trouvons la valeur minimale $\gamma_{min} = 1.1907$, et les paramètres de filtre correspondants sont :

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{F11} & A_{F12} & B_{F1} \\ A_{F21} & A_{F22} & B_{F2} \\ \hline C_{F1} & C_{F2} & D_F \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.3353 & -0.1003 & -0.1441 \\ 0.6087 & -0.1047 & -0.9095 \\ \hline 0.2112 & -0.1389 & 0.8237 \end{array} \right].$$

Les réponses fréquentielles correspondantes du système d'erreur de filtrage sont représentées sur les Figures 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5 pour chacun des sommets. On peut voir clairement que ces réponses fréquentielles sont inférieurs à la valeur minimale $\gamma_{min} = 1.1907$, ce qui démontre l'efficacité de la méthode proposée.

Une comparaison détaillée entre les indices de la performance H_∞ , le nombre de variables de décision et le nombre des LMIs obtenus en utilisant le théorème 4.1, le corollaire 4.1 et les résultats dans [Boukili et al., 2016, El-Kasri et al., 2012, Gao et al., 2008, Gao et al., 2014, Li et al., 2012] est répertorié dans le Tableau 4.1.

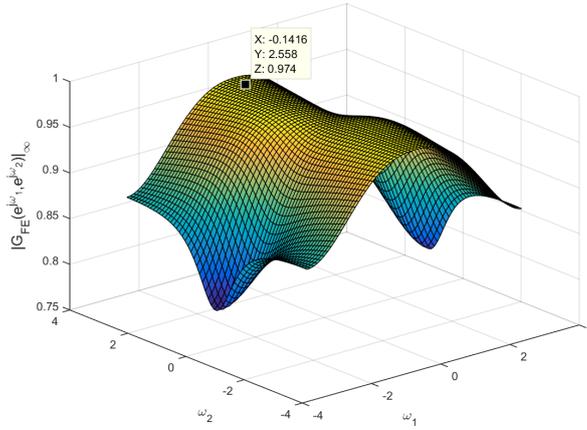


FIGURE 4.2 – Réponse fréquentielle du système d’erreur de filtrage : 1^{er} sommet ($a_1 = 0.15$, $a_2 = 0.35$).

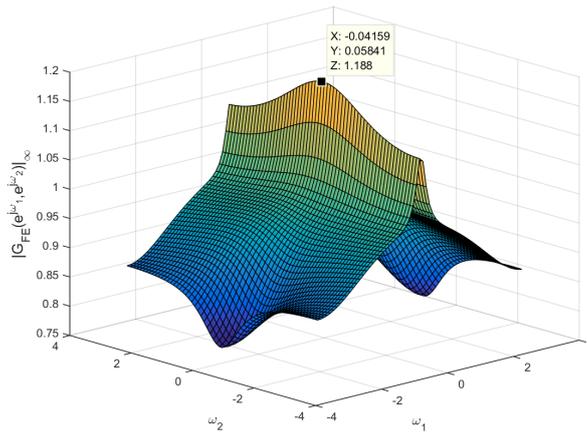


FIGURE 4.3 – Réponse fréquentielle du système d’erreur de filtrage : 2^{ème} sommet ($a_1 = 0.15$, $a_2 = 0.85$).

Tableau 4.1 – Comparaison des valeurs de γ_{min} (Exemple 4.1).

Méthodes	γ_{min}	Nvd	Nlmi
Théorème 3 [Gao et al., 2008] ($g = 2$)	1.8290	111	20
Théorème 6.2 [Gao et al., 2014] ($g = 2$)	1.8295	111	20
Théorème 4.3 [Boukili et al., 2016] ($g = 2$)	1.8042	211	20
Théorème 3.4 [El-Kasri et al., 2012] ($g = 2$)	1.5713	85	21
Corollaire 2 [Li et al., 2012]	1.1909	134	10
Corollaire 4.1 [Badie et al., 2020d]	1.2025	22	4
Théorème 4.1 [Badie et al., 2020d]	1.1907	40	4

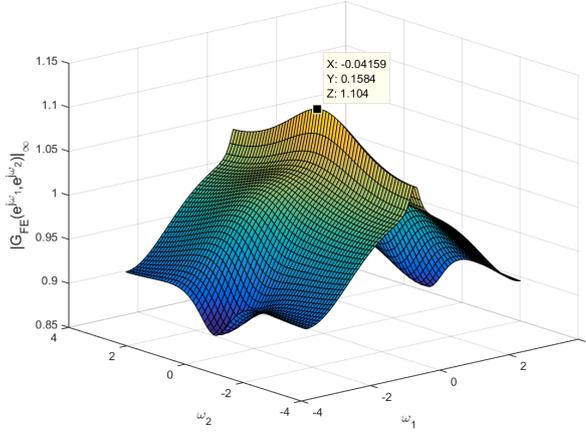


FIGURE 4.4 – Réponse fréquentielle du système d’erreur de filtrage : 3^{ème} sommet ($a_1 = 0.45$, $a_2 = 0.35$).

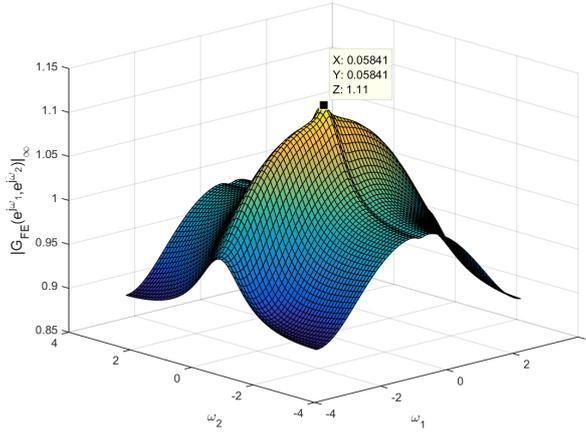


FIGURE 4.5 – (Réponse fréquentielle du système d’erreur de filtrage : 4^{ème} sommet ($a_1 = 0.45$, $a_2 = 0.85$)).

Il est clair du Tableau 4.1 que la méthode dépendante des paramètres donne des meilleures performances que celles de [Boukili et al., 2016, El-Kasri et al., 2012, Gao et al., 2008, Gao et al., 2014, Li et al., 2012] avec une complexité de calcul réduite. Alors, les critères proposés dans cette section sont beaucoup moins conservatifs.

Exemple 4.2. Dans cet exemple, nous considérons le même système 2-D incertain traité dans l’exemple 4.1, mais cette fois avec $a_1 = a_2 = 0.05 + a$ et $|a| \leq b$. Le système 2-D incertain peut être représenté par un polytope à deux sommets avec des matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{111} & A_{121} \\ A_{211} & A_{221} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.05 + b & 0 \\ 1 & 0.05 + b \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} A_{112} & A_{122} \\ A_{212} & A_{222} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.05 - b & 0 \\ 1 & 0.05 - b \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [C_{11} \ C_{12}] &= [0.05 + b \ 1], & [C_{21} \ C_{22}] &= [0.05 - b \ 1], \end{aligned}$$

$$D_1 = D_2 = [0 \ 1], \quad F_1 = F_2 = [0 \ 1], \quad [E_{11} \ E_{12}] = [E_{21} \ E_{22}] = [0 \ 1],$$

avec $\alpha_1 = \frac{(b+a)}{2b}$ et $\alpha_2 = \frac{(b-a)}{2b}$. De plus, nous supposons que le paramètre a peut être mesuré ou estimé en ligne.

Pour $b = 0.9$, par application du théorème 4.2, nous trouvons une valeur minimale $\gamma_{min} = 2.8285$ de la performance H_∞ , et les matrices du filtre dépendant du paramètre incertain sont :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} A_{F11}(\alpha) & A_{F12}(\alpha) & B_{F1}(\alpha) \\ A_{F21}(\alpha) & A_{F22}(\alpha) & B_{F2}(\alpha) \\ \hline C_{F1}(\alpha) & C_{F2}(\alpha) & D_F(\alpha) \end{array} \right] &= \alpha_1 \left[\begin{array}{cc|c} 0.4596 & -0.5880 & -0.5884 \\ 0.7029 & 0.6483 & -0.3020 \\ \hline 0.4454 & -0.5221 & 0.4776 \end{array} \right] \\ &+ \alpha_2 \left[\begin{array}{cc|c} -0.4526 & -0.4659 & -0.4662 \\ 0.8505 & -0.6570 & 0.1931 \\ \hline -0.4734 & -0.4289 & 0.5708 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Tableau 4.2 – Comparaison des valeurs de γ_{min} (Exemple 4.2).

Méthodes	$b = 0.1$	$b = 0.3$	$b = 0.5$	$b = 0.7$	$b = 0.9$
Théorème 3 [Gao et al., 2008]($g = 2$)	1.1771	1.7119	3.0461	7.9634	> 10
Théorème 4.3 [Boukili et al., 2016]($g = 2$)	1.1768	1.7082	2.9959	6.5939	> 10
Corollaire 4.1 [Badie et al., 2020d]	0.7809	0.9769	1.4301	2.8532	> 10
Théorème 4.1 [Badie et al., 2020d]	0.7808	0.9767	1.4169	2.8097	> 10
Théorème 4.2 [Badie et al., 2020d]	0.7808	0.9767	1.4027	1.9276	2.8285

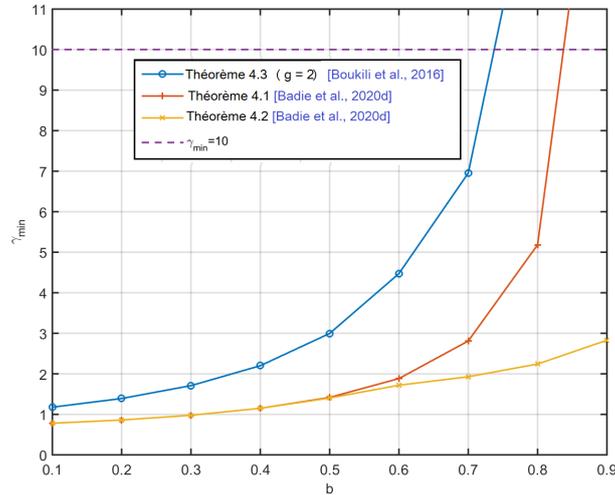


FIGURE 4.6 – Indices d'atténuation des perturbations γ_{min} au sens de la performance H_∞ pour différentes valeurs de b .

Le Tableau 4.2 présente les valeurs de l'indices γ_{min} de la performance H_∞ obtenus par le corollaire 4.1, le théorème 4.1, le théorème 4.2 et d'autres méthodes dans [Boukili et al., 2016, Gao et al., 2008] pour différentes valeurs du paramètre b . On constate à la lecture du tableau que les

résultats proposés assurent des valeurs de γ_{min} plus petites que celles obtenues par [Boukili et al., 2016, Gao et al., 2008], ce qui démontre l'efficacité de nos résultats. En outre, nous pouvons voir que lorsque b devient plus grand, γ_{min} devient progressivement plus grand. Donc, il est clairement démontré que le filtre 2-D dépendant du paramètre incertain (4.21) peut garantir des meilleures performances que le filtre 2-D traditionnel.

De plus, la Figure 4.6 montre la variation de l'indice γ_{min} de la performance H_∞ obtenue en utilisant le théorème 4.1, le théorème 4.2 et les résultats dans [Boukili et al., 2016] pour différents valeurs du paramètre b . On peut voir sur la Figure 4.6 que les valeurs de γ_{min} obtenues par le théorème 4.2 ne dépassent pas 10.

Remarque 4.8. *Il est à noter que nous avons également proposé dans [Badie et al., 2020a], des solutions au problème de la synthèse des filtres H_∞ dépendants des paramètres pour des systèmes 2-D discrets incertains décrits par le second modèle de F-M avec des incertitudes de type polytopiques.*

4.3 Filtrage H_∞ des systèmes 2-D discrets commutés

4.3.1 Formulation du problème

Considérons le système 2-D discret commuté suivant décrit par le second modèle de F-M :

$$\begin{aligned} x(i+1, j+1) &= A_1^{\sigma(i, j+1)} x(i, j+1) + A_2^{\sigma(i+1, j)} x(i+1, j) \\ &\quad + B_1^{\sigma(i, j+1)} w(i, j+1) + B_2^{\sigma(i+1, j)} w(i+1, j), \\ y(i, j) &= C^{\sigma(i, j)} x(i, j) + D^{\sigma(i, j)} w(i, j), \\ z(i, j) &= E^{\sigma(i, j)} x(i, j) + F^{\sigma(i, j)} w(i, j), \end{aligned} \quad (4.27)$$

où $x(i, j) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $w(i, j) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est l'entrée de perturbation qui appartient à $l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$, $y(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de sortie de mesure et $z(i, j) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est le signal à estimer. $\sigma(i, j) : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ est le signal de commutation qui sélectionne le sous-système activé, et $N \geq 1$ indique le nombre de sous-systèmes, $\sigma(i, j) = k$ signifie que le $k^{\text{ème}}$ sous-système est activé. Les matrices $A_1^k, A_2^k, B_1^k, B_2^k, C^k, D^k, E^k$ et F^k du $k^{\text{ème}}$ sous-système sont de dimensions appropriées.

Les conditions initiales du système 2-D commuté (4.27) sont donnés par :

$$\begin{cases} x(i, 0) = f(i), \quad \forall 0 \leq i \leq r_1, \\ x(0, j) = g(j), \quad \forall 0 \leq j \leq r_2, \\ f(0) = g(0), \\ x(i, 0) = 0, \quad \forall i > r_1, \\ x(0, j) = 0, \quad \forall j > r_2, \end{cases} \quad (4.28)$$

où $r_1 < \infty$ et $r_2 < \infty$ sont des entiers positifs et $f(i)$ et $g(j)$ sont des vecteurs.

Ici, nous souhaitons estimer le signal $z(i, j)$ en construisant un filtre 2-D commuté de la structure générale suivante :

$$\begin{aligned} \hat{x}(i+1, j+1) &= A_{F1}^{\sigma(i, j+1)} \hat{x}(i, j+1) + A_{F2}^{\sigma(i+1, j)} \hat{x}(i+1, j) \\ &\quad + B_{F1}^{\sigma(i, j+1)} y(i, j+1) + B_{F2}^{\sigma(i+1, j)} y(i+1, j), \\ \hat{z}(i, j) &= C_F^{\sigma(i, j)} \hat{x}(i, j) + D_F^{\sigma(i, j)} y(i, j), \\ \hat{x}(0, j) &= \hat{x}(i, 0) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.29)$$

où $\hat{x}(i, j) \in \mathbb{R}^{n_f}$ et $\hat{z}(i, j) \in \mathbb{R}^{n_z}$. Les matrices $A_{F1}^k, A_{F2}^k, B_{F1}^k, B_{F2}^k, C_F^k$ et D_F^k sont les paramètres du $k^{\text{ème}}$ sous-système du filtre 2-D (4.29) à déterminer. Il convient de mentionner que les problèmes de synthèse du filtre d'ordre complet (lorsque $n_f = n$) et d'ordre réduit (lorsque $n_f < n$) seront résolus dans un cadre unifié dans cette section.

Remarque 4.9. La commutation entre les différents sous-systèmes est supposée se produire à chacun des point i ou j . Il est à noter que la valeur de $\sigma(i, j)$ ne dépend que de $i + j$, pour plus de détails (voir [Benzaouia et al., 2011]).

Remarque 4.10. Il convient de noter que le filtre 2-D commuté (4.29) partage le même signal de commutation avec le système 2-D commuté (4.27). Ainsi, lorsque le signal de commutation $\sigma(i, j)$ change, les commutations entre les sous-systèmes du système (4.27) et du filtre (4.29) se produisent simultanément (Voir Figure 4.7).

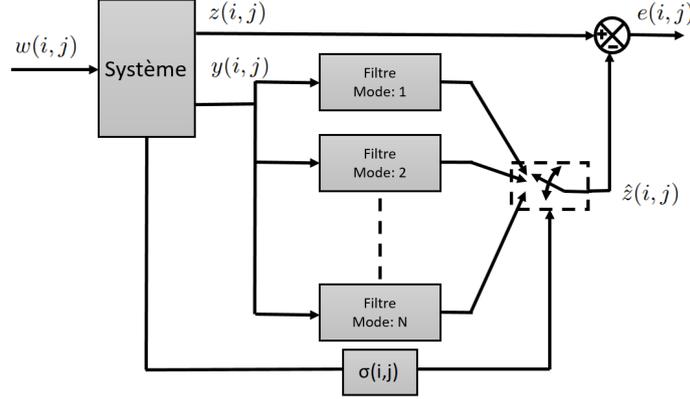


FIGURE 4.7 – Schéma de filtrage des systèmes commutés.

En augmentant le modèle du système (4.27) pour inclure les états du filtre (4.29), nous obtenons le système d'erreur de filtrage suivant :

$$\begin{aligned} \bar{x}(i+1, j+1) &= \bar{A}_1^{\sigma(i, j+1)} \bar{x}(i, j+1) + \bar{A}_2^{\sigma(i+1, j)} \bar{x}(i+1, j) \\ &\quad \bar{B}_1^{\sigma(i, j+1)} w(i, j+1) + \bar{B}_2^{\sigma(i+1, j)} w(i+1, j), \\ e(i, j) &= \bar{C}^{\sigma(i, j)} \bar{x}(i, j) + \bar{D}^{\sigma(i, j)} w(i, j). \end{aligned} \quad (4.30)$$

où $\bar{x}(i, j) = [x^T(i, j) \hat{x}^T(i, j)]^T$, $e(i, j) = z(i, j) - \hat{z}(i, j)$ et les matrices sont définies par :

$$\begin{aligned} \bar{A}_1^{\sigma(i, j+1)} &= \begin{bmatrix} A_1^{\sigma(i, j+1)} & 0 \\ B_{F1}^{\sigma(i, j+1)} C^{\sigma(i, j+1)} & A_{F1}^{\sigma(i, j+1)} \end{bmatrix}, & \bar{A}_2^{\sigma(i+1, j)} &= \begin{bmatrix} A_2^{\sigma(i+1, j)} & 0 \\ B_{F2}^{\sigma(i+1, j)} C^{\sigma(i+1, j)} & A_{F2}^{\sigma(i+1, j)} \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_1^{\sigma(i, j+1)} &= \begin{bmatrix} B_1^{\sigma(i, j+1)} \\ B_{F1}^{\sigma(i, j+1)} D^{\sigma(i, j+1)} \end{bmatrix}, & \bar{B}_2^{\sigma(i+1, j)} &= \begin{bmatrix} B_2^{\sigma(i+1, j)} \\ B_{F2}^{\sigma(i+1, j)} D^{\sigma(i+1, j)} \end{bmatrix}, \\ \bar{C}^{\sigma(i, j)} &= \begin{bmatrix} E^{\sigma(i, j)} - D_F^{\sigma(i, j)} C^{\sigma(i, j)} & -C_F^{\sigma(i, j)} \end{bmatrix}, & \bar{D}^{\sigma(i, j)} &= F^{\sigma(i, j)} - D_F^{\sigma(i, j)} D^{\sigma(i, j)}. \end{aligned}$$

Avant de présenter l'objectif principal de cette section, nous introduisons tout d'abord la définition suivante, qui sera essentielle par la suite.

Définition 4.1. [Badie et al., 2020a] Le système 2-D commuté (4.27) est dit asymptotiquement stable si son état $\bar{x}(i, j)$ satisfait $\lim_{i+j \rightarrow \infty} \|\bar{x}(i, j)\|^2 = 0$ pour $w(i, j) = 0$, et toutes conditions initiales (4.28).

Alors, le problème de filtrage H_∞ à résoudre dans cette section peut se résumer à :

Étant donné un système 2-D (4.27) et un niveau d'atténuation des perturbations $\gamma > 0$, l'objectif c'est de déterminer les matrices A_{F1}^k , A_{F2}^k , B_{F1}^k , B_{F2}^k , C_F^k et D_F^k du filtre 2-D discret commuté (4.29) de sorte que les exigences suivantes soient vérifiées :

- (i) Le système d'erreur de filtrage (4.30) avec $w(i, j) = 0$ est asymptotiquement stable.
 (ii) Sous les conditions initiales nulles, la condition suivante est vérifiée

$$\|\tilde{e}_{(i,j)}\|_2 < \gamma \|\tilde{w}_{(i,j)}\|_2, \quad (4.31)$$

pour toute $w(i, j) \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$ et un réel $\gamma > 0$ donné.

4.3.2 Résultats principaux

4.3.2.1 Analyse de la stabilité et de la performance H_∞

Dans cette section, l'analyse de la stabilité et de la performance H_∞ du système d'erreur de filtrage (4.30) est effectuée en utilisant une fonction de Lyapunov commutée. Le théorème suivant jouera un rôle déterminant dans le problème de synthèse du filtre.

Théorème 4.3. [Badie et al., 2020a] *Étant donné un scalaire $\gamma > 0$, le système dans (4.30) est asymptotiquement stable avec une atténuation des perturbations γ de la performance H_∞ , pour tout signal de commutation arbitraire, s'il existe des matrices $R_1^k > 0$, $R_2^k > 0$, X^k et Y^k , avec des dimensions appropriées telles que la condition LMI suivante est faisable ($\forall k, l \in \mathcal{N}$) :*

$$\Xi^{kl} = \begin{bmatrix} \Xi_1^k & 0 & \Xi_2^{kT} & \Xi_3^{kT} \\ * & -\gamma^2 I_{2n_w} & \tilde{B}^{kT} Z^{kT} & \tilde{D}^{kT} \\ * & * & -R^l & 0 \\ * & * & * & -I_{2n_z} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.32)$$

où

$$\begin{aligned} \Xi_1^k &= \begin{bmatrix} -Z^k - Z^{kT} & R^k + 0.5Z^{kT} \\ * & -2R^k \end{bmatrix}, \quad \Xi_2^k = [Z^k \tilde{A}^k \ 0], \quad \Xi_3^k = [\tilde{C}^k \ 0], \\ R^k &= \begin{bmatrix} R_1^k & 0 \\ 0 & R_2^k \end{bmatrix}, \quad Z^k = \begin{bmatrix} X^k & 0 \\ 0 & Y^k \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^k & \tilde{A}_2^k \\ \tilde{A}_1^k & \tilde{A}_2^k \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}^k &= \begin{bmatrix} \tilde{B}_1^k & \tilde{B}_2^k \\ \tilde{B}_1^k & \tilde{B}_2^k \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}^k = \begin{bmatrix} \tilde{C}^k & 0 \\ 0 & \tilde{C}^k \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}^k = \begin{bmatrix} \tilde{D}_1^k & 0 \\ 0 & \tilde{D}^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Preuve. Choisissons la fonction de Lyapunov commutée sous la nouvelle forme suivante :

$$V^{\sigma(i,j)}(i, j) = V_1^{\sigma(i,j)}(i, j) + V_2^{\sigma(i,j)}(i, j), \quad (4.33)$$

où

$$\begin{aligned} V_1^{\sigma(i,j)}(i, j) &= \tilde{x}^T(i, j)(X^{\sigma(i,j)})^T P_1^{\sigma(i,j)} X^{\sigma(i,j)} \tilde{x}(i, j), \\ V_2^{\sigma(i,j)}(i, j) &= \tilde{x}^T(i, j)(Y^{\sigma(i,j)})^T P_2^{\sigma(i,j)} Y^{\sigma(i,j)} \tilde{x}(i, j), \end{aligned}$$

posons :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{\alpha,\beta} &= \tilde{x}(i + \alpha, j + \beta), \\ \sigma_{\alpha,\beta} &= \sigma(i + \alpha, j + \beta). \end{aligned}$$

La différence de la fonction de Lyapunov $V^{\sigma(i,j)}(i, j)$ est donnée par :

$$\Delta V^{\sigma(i,j)}(i, j) = \Delta V_1^{\sigma(i,j)}(i, j) + \Delta V_2^{\sigma(i,j)}(i, j).$$

où

$$\begin{aligned} \Delta V_1^{\sigma(i,j)}(i, j) &= V_1^{\sigma(i+1,j+1)}(i+1, j+1) - V_1^{\sigma(i,j+1)}(i, j+1) \\ &= \tilde{x}_{1,1}^T X^{\sigma_{1,1}} P_1^{\sigma_{1,1}} X^{\sigma_{1,1}} \tilde{x}_{1,1} - \tilde{x}_{0,1}^T X^{\sigma_{0,1}} P_1^{\sigma_{0,1}} X^{\sigma_{0,1}} \tilde{x}_{0,1}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}\Delta V_2^{\sigma(i,j)}(i,j) &= V_2^{\sigma(i+1,j+1)}(i+1,j+1) - V_2^{\sigma(i+1,j)}(i+1,j) \\ &= \bar{x}_{1,1}^T Y^{\sigma_{1,1}T} P_2^{\sigma_{1,1}} Y^{\sigma_{1,1}} \bar{x}_{1,1} - \bar{x}_{1,0}^T Y^{\sigma_{1,0}T} P_2^{\sigma_{1,0}} X^{\sigma_{1,0}} \bar{x}_{1,0}.\end{aligned}\quad (4.35)$$

De plus, les équations suivantes sont valables

$$0 = 2\bar{x}_{0,1}^T X^{\sigma_{0,1}T} P_1^{\sigma_{0,1}} [X^{\sigma_{0,1}} \bar{x}_{0,1} - (P_1^{\sigma_{0,1}})^{-1} P_1^{\sigma_{0,1}} X^{\sigma_{0,1}} \bar{x}_{0,1}], \quad (4.36a)$$

$$0 = 2\bar{x}_{0,1}^T X^{\sigma_{0,1}T} [P_1^{\sigma_{0,1}}]^{-1} P_1^{\sigma_{0,1}} \bar{x}_{0,1} - \bar{x}_{0,1}, \quad (4.36b)$$

$$0 = 2\bar{x}_{1,0}^T Y^{\sigma_{1,0}T} P_2^{\sigma_{1,0}} [Y^{\sigma_{1,0}} \bar{x}_{1,0} - (P_2^{\sigma_{1,0}})^{-1} P_2^{\sigma_{1,0}} Y^{\sigma_{1,0}} \bar{x}_{1,0}], \quad (4.36c)$$

$$0 = 2\bar{x}_{1,0}^T Y^{\sigma_{1,0}T} [(P_2^{\sigma_{1,0}})^{-1} P_2^{\sigma_{1,0}} \bar{x}_{1,0} - \bar{x}_{1,0}]. \quad (4.36d)$$

Définissons :

$$\xi(i,j) = \begin{bmatrix} \bar{x}_{0,1} \\ \bar{x}_{1,0} \\ P_1^{\sigma_{0,1}} X^{\sigma_{0,1}} \bar{x}_{0,1} \\ P_2^{\sigma_{1,0}} Y^{\sigma_{1,0}} \bar{x}_{1,0} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Supposons que le $k^{\text{ème}}$ sous-système est activé à $i+j+1$: ($\sigma_{0,1} = \sigma_{1,0} = k, k \in \mathcal{N}$), et le $l^{\text{ème}}$ sous-système est activé à $i+j+2$: ($\sigma_{1,1} = l, l \in \mathcal{N}$), où :

(a) ($k = l$) : il n'y a pas de changement à $i+j+2$,

(b) ($k \neq l$) : il y a un changement à $i+j+2$.

En ajoutant les quatre équations dans (4.36a), (4.36b), (4.36c) et (4.36d) à $\Delta V^k(i,j)$, en considérant le vecteur dans (4.37) et en supposant que $w(i,j) = 0$, nous obtenons :

$$\Delta V^{\sigma(i,j)}(i,j) = \xi(i,j)^T (\Pi^k + \Xi_2^{kT} P^l \Xi_2^k) \xi(i,j), \quad (4.38)$$

où

$$\begin{aligned}\Pi^k &= \begin{bmatrix} -Z^k - Z^{kT} (P^k)^{-1} + 0.5Z^{kT} \\ * & -2(P^k)^{-1} \end{bmatrix}, \\ P^l &= \text{diag}\{P_1^l, P_2^l\},\end{aligned}$$

et Ξ_2^k est défini dans le théorème 4.3.

En revanche, considérons les changements de variables : $R_1^k = (P_1^k)^{-1}$, $R_2^k = (P_2^k)^{-1}$ et $R^k = \text{diag}\{R_1^k, R_2^k\}$, ($k \in \mathcal{N}$). Selon le lemme 1.15, si la condition LMI (4.32) est satisfaite, on obtient :

$$T^T \Xi^{kl} T = \begin{bmatrix} \Xi_1^k & \Xi_2^{kT} & 0 & \Xi_3^{kT} \\ * & -R^l & Z^k \tilde{B}^k & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I_{2n_w} & \tilde{D}^{kT} \\ * & * & * & -I_{2n_z} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.39)$$

où

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Ensuite, par le complément de Schur (Lemme 1.4), il s'ensuit que (4.39) implique :

$$\Pi^k + \Xi_2^{kT} (R^l)^{-1} \Xi_2^k < 0, \quad (4.40)$$

ce qui garantit pour tout $\xi(i, j)$ non nul :

$$\Delta V^{\sigma(i,j)}(i, j) < 0. \quad (4.41)$$

Il résulte de (4.41) que :

$$V_1^{\sigma(i+1,j+1)}(i+1, j+1) + V_2^{\sigma(i+1,j+1)}(i+1, j+1) < V_1^{\sigma(i,j+1)}(i, j+1) + V_2^{\sigma(i+1,j)}(i+1, j).$$

Pour tout entier $r > \max(r_1, r_2)$, nous avons $V_1^{\sigma(0,r)}(0, r) = V_2^{\sigma(r,0)}(r, 0) = 0$, on peut obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=r+1} V^{\sigma(i,j)}(i, j) &= \sum_{i+j=r+1} [V_1^{\sigma(i,j)}(i, j) + V_2^{\sigma(i,j)}(i, j)] \\ &= V_1^{\sigma(r,1)}(r, 1) + V_1^{\sigma(r-1,2)}(r-1, 2) + V_1^{\sigma(r-2,3)}(r-2, 3) \\ &\quad + \dots + V_1^{\sigma(1,r-1)}(1, r-1) + V_1^{\sigma(1,r)}(1, r) \\ &\quad + V_2^{\sigma(r,1)}(r, 1) + V_2^{\sigma(r-1,2)}(r-1, 2) + V_2^{\sigma(r-2,3)}(r-2, 3) \\ &\quad + \dots + V_2^{\sigma(1,r-1)}(1, r-1) + V_2^{\sigma(1,r)}(1, r) \\ &< V_1^{\sigma(r-1,1)}(r-1, 1) + V_1^{\sigma(r-2,2)}(r-2, 2) + V_1^{\sigma(r-3,3)}(r-3, 3) \\ &\quad + \dots + V_1^{\sigma(0,r-1)}(0, r-1) + V_1^{\sigma(0,r)}(0, r) \\ &\quad + V_2^{\sigma(r,0)}(r, 0) + V_2^{\sigma(r-1,1)}(r-1, 1) + V_2^{\sigma(r-2,2)}(r-2, 2) \\ &\quad + \dots + V_2^{\sigma(1,r-2)}(1, r-2) + V_2^{\sigma(1,r-1)}(1, r-1) \\ &= \sum_{i+j=r} [V_1^{\sigma(i,j)}(i, j) + V_2^{\sigma(i,j)}(i, j)] \\ &= \sum_{i+j=r} V^{\sigma(i,j)}(i, j). \end{aligned}$$

Ce qui signifie que la somme de la fonction de Lyapunov aux points $\{(i, j) : i + j = r + 1\}$ est inférieure à celle aux points $\{(i, j) : i + j = r\}$. Donc, nous obtenons :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i+j=r} V^{\sigma(i,j)}(i, j) = 0.$$

Ceci implique que :

$$\lim_{i+j \rightarrow \infty} V^{\sigma(i,j)}(i, j) = 0, \quad \lim_{i+j \rightarrow \infty} \|\bar{x}(i, j)\|^2 = 0.$$

Par conséquent, selon la définition 4.1, le système d'erreur de filtrage (4.30) avec $w(i, j) = 0$ est asymptotiquement stable.

Ensuite, pour tout $w(i, j)$ différent de zéro, $w(i, j) \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$, et avec des conditions initiales nulles, nous établirons la condition de performance H_∞ pour le système d'erreur de filtrage (4.30), à cette fin, introduisons l'indice de performance suivant :

$$\mathcal{J} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{e}^T(i, j)\tilde{e}(i, j) - \gamma^2 \tilde{w}^T(i, j)\tilde{w}(i, j)).$$

A partir des conditions initiales nulles, nous avons $V_1^{\sigma(0,j)}(0, j) = V_2^{\sigma(i,0)}(i, 0) = 0$, alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{e}^T(i, j)\tilde{e}(i, j) - \gamma^2 \tilde{w}^T(i, j)\tilde{w}(i, j) + \Delta V^{\sigma(i,j)}(i, j)) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\infty} V_1^{\sigma(\infty, j+1)}(\infty, j+1) - \sum_{i=0}^{\infty} V_2^{\sigma(i+1, \infty)}(i+1, \infty) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{e}^T(i, j)\tilde{e}(i, j) - \gamma^2 \tilde{w}^T(i, j)\tilde{w}(i, j) + \Delta V^{\sigma(i,j)}(i, j)). \end{aligned}$$

En utilisant (4.34), (4.35), (4.36a), (4.36b), (4.36c) et (4.36d), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \xi(i, j) \\ \tilde{w}(i, j) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \Pi^k & 0 \\ * & -\gamma^2 I_{n_{2w}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Xi_2^{kT} \\ \tilde{B}^{kT} Z^{kT} \end{bmatrix} P^l \begin{bmatrix} \Xi_2^{kT} \\ \tilde{B}^{kT} Z^{kT} \end{bmatrix}^T \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \Xi_3^{kT} \\ \tilde{D}^{kT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_3^{kT} \\ \tilde{D}^{kT} \end{bmatrix}^T \right\} \begin{bmatrix} \xi(i, j) \\ \tilde{w}(i, j) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où Π^k et P^l sont définis dans (4.38).

En considérant le même changement de variables que le précédent, il résulte de (4.32) et du complément de Schur (Lemme 1.4), que $\mathcal{J} < 0$. Alors, pour tout $w(i, j)$ différent de zéro, $w(i, j) \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$

$$\|\tilde{e}(i, j)\|_2 < \gamma \|\tilde{w}(i, j)\|_2.$$

Ceci complète la preuve du théorème 4.3. □

4.3.2.2 Synthèse du filtre H_∞ commuté

Dans ce paragraphe, nous présenterons une méthode de synthèse du filtre, basée sur le résultat obtenu dans la section précédente.

Théorème 4.4. [Badie et al., 2020a] *Considérons le système commuté (4.27). Pour un scalaire $\gamma > 0$ donné, s'il existe des matrices $R_{11}^k > 0$, $\mathcal{R}_{13}^k > 0$, $R_{21} > 0$, $\mathcal{R}_{23}^k > 0$, \mathcal{R}_{12}^k , \mathcal{R}_{22}^k , X_1^k , \mathcal{X}_2^k , Y_1^k , \mathcal{Y}_2^k , \mathcal{W} , \mathcal{A}_{F1}^k , \mathcal{A}_{F2}^k , \mathcal{B}_{F1}^k , \mathcal{B}_{F2}^k , \mathcal{C}_F^k et \mathcal{D}_F^k satisfaisant les LMIs suivants $\forall (k, l \in \mathcal{N})$:*

$$\Psi \triangleq [\Psi_{m,n}]_{16 \times 16} < 0, \quad (4.43)$$

$$\begin{bmatrix} R_{11}^k & \mathcal{R}_{12}^k \\ * & \mathcal{R}_{13}^k \end{bmatrix} > 0, \quad (4.44)$$

$$\begin{bmatrix} R_{21}^k & \mathcal{R}_{22}^k \\ * & \mathcal{R}_{22}^k \end{bmatrix} > 0, \quad (4.45)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{1,1} &= -X_1^k - X_1^{kT}, & \Psi_{1,2} &= -K\mathcal{W} - \mathcal{X}_2^{kT}, \\ \Psi_{1,5} &= R_{11}^k + 0.5X_1^{kT}, & \Psi_{1,6} &= \mathcal{R}_{12}^k + 0.5\mathcal{X}_2^{kT}, \\ \Psi_{1,11} &= A_1^{kT} X_1^{kT} + C^{kT} \mathcal{B}_{F1}^{kT} K^T, \\ \Psi_{1,12} &= A_1^{kT} \mathcal{X}_2^{kT} + C^{kT} \mathcal{B}_{F1}^{kT}, \\ \Psi_{1,13} &= A_1^{kT} Y_1^{kT} + C^{kT} \mathcal{B}_{F1}^{kT} K^T, \\ \Psi_{1,14} &= A_1^{kT} \mathcal{Y}_2^{kT} + C^{kT} \mathcal{B}_{F1}^{kT}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_{1,15} &= E^{kT} - C^{kT} \mathcal{D}_F^{kT}, \\
 \Psi_{2,2} &= -\mathcal{W} - \mathcal{W}^T, \quad \Psi_{2,5} = \mathcal{R}_{12}^{kT} + 0.5\mathcal{W}^T K^T, \\
 \Psi_{2,6} &= \mathcal{R}_{13}^{kT} + 0.5\mathcal{W}^T, \\
 \Psi_{2,11} &= \Psi_{2,13} = \mathcal{A}_{F1}^{kT} K^T, \\
 \Psi_{2,12} &= \Psi_{2,14} = \mathcal{A}_{F1}^{kT}, \quad \Psi_{2,15} = -\mathcal{C}_F^{kT}, \\
 \Psi_{3,3} &= -Y_1^k - Y_1^{kT}, \quad \Psi_{3,4} = -K\mathcal{W} - \mathcal{Y}_2^{kT}, \\
 \Psi_{3,7} &= R_{21}^k + 0.5Y_1^{kT}, \quad \Psi_{3,8} = \mathcal{R}_{22}^k + 0.5\mathcal{Y}_2^{kT}, \\
 \Psi_{3,11} &= A_2^{kT} X_1^{kT} + C^{kT} \mathcal{B}_{F2}^{kT} K^T, \\
 \Psi_{3,12} &= A_2^{kT} \mathcal{X}_2^{kT} + C^{kT} \mathcal{B}_{F2}^{kT}, \\
 \Psi_{3,13} &= A_2^{kT} Y_1^{kT} + C^{kT} \mathcal{B}_{F2}^{kT} K^T, \\
 \Psi_{3,14} &= A_2^{kT} \mathcal{Y}_2^{kT} + C^{kT} \mathcal{B}_{F2}^{kT}, \\
 \Psi_{3,16} &= E^{kT} - C^{kT} \mathcal{D}_F^{kT}, \\
 \Psi_{4,4} &= -\mathcal{W} - \mathcal{W}^T, \quad \Psi_{4,7} = \mathcal{R}_{22}^{kT} + 0.5\mathcal{W}^T K^T, \\
 \Psi_{4,8} &= \mathcal{R}_{23}^{kT} + 0.5\mathcal{W}^T E^T, \\
 \Psi_{4,11} &= \Psi_{4,13} = \mathcal{A}_{F2}^{kT} K^T, \\
 \Psi_{4,12} &= \Psi_{4,14} = \mathcal{A}_{F2}^{kT}, \quad \Psi_{4,16} = -\mathcal{C}_F^{kT}, \\
 \Psi_{5,5} &= -2R_{11}^{kT}, \quad \Psi_{5,6} = -2\mathcal{R}_{12}^{kT}, \quad \Psi_{6,6} = -2\mathcal{R}_{13}^{kT}, \\
 \Psi_{7,7} &= -2R_{21}^{kT}, \quad \Psi_{7,8} = -2\mathcal{R}_{22}^{kT}, \quad \Psi_{8,8} = -2\mathcal{R}_{23}^{kT}, \\
 \Psi_{9,9} &= \Psi_{10,10} = -\gamma I_{n_w}, \\
 \Psi_{9,11} &= B_1^{kT} X_1^{kT} + D^{kT} \mathcal{B}_{F1}^{kT} K^T, \\
 \Psi_{9,12} &= B_1^{kT} \mathcal{X}_2^{kT} + D^{kT} \mathcal{B}_{F1}^{kT}, \\
 \Psi_{9,13} &= B_1^{kT} Y_1^{kT} + D^{kT} \mathcal{B}_{F1}^{kT} K^T, \\
 \Psi_{9,14} &= B_1^{kT} \mathcal{Y}_2^{kT} + D^{kT} \mathcal{B}_{F1}^{kT}, \\
 \Psi_{9,15} &= F^{kT} - D^{kT} \mathcal{D}_F^{kT}, \\
 \Psi_{10,11} &= B_2^{kT} X_1^{kT} + D^{kT} \mathcal{B}_{F2}^{kT} K^T, \\
 \Psi_{10,12} &= B_2^{kT} \mathcal{X}_2^{kT} + D^{kT} \mathcal{B}_{F2}^{kT}, \\
 \Psi_{10,13} &= B_2^{kT} Y_1^{kT} + D^{kT} \mathcal{B}_{F2}^{kT} K^T, \\
 \Psi_{10,14} &= B_2^{kT} \mathcal{Y}_2^{kT} + D^{kT} \mathcal{B}_{F2}^{kT}, \\
 \Psi_{10,16} &= F^{kT} - D^{kT} \mathcal{D}_F^{kT}, \quad \Psi_{11,11} = -R_{11}^{lT}, \\
 \Psi_{11,12} &= -\mathcal{R}_{12}^{lT}, \quad \Psi_{12,12} = -\mathcal{R}_{13}^{lT}, \\
 \Psi_{13,13} &= -R_{21}^{lT}, \quad \Psi_{13,14} = -\mathcal{R}_{22}^{lT}, \\
 \Psi_{14,14} &= -\mathcal{R}_{23}^{lT}, \quad \Psi_{15,15} = \Psi_{16,16} = -I_{n_z}, \\
 K &= [I_{n_f} \quad 0_{n_f, n-n_f}^T]^T.
 \end{aligned}$$

Alors, il existe un filtre 2-D commuté sous la forme de (4.29), de sorte que le système d'erreur de filtrage (4.30) est asymptotiquement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ , si les conditions précitées sont remplies, les paramètres du filtre peuvent être déterminés par :

$$\begin{bmatrix} A_{F1}^k & B_{F1}^k \\ A_{F2}^k & B_{F2}^k \\ C_F^k & D_F^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{W}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{F1}^k & \mathcal{B}_{F1}^k \\ \mathcal{A}_{F2}^k & \mathcal{B}_{F2}^k \\ \mathcal{C}_F^k & \mathcal{D}_F^k \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Preuve. Supposons que les matrices du théorème 4.3 ont les structures suivantes :

$$R_1^k = \begin{bmatrix} R_{11}^k & R_{12}^k \\ * & R_{13}^k \end{bmatrix}, \quad R_2^k = \begin{bmatrix} R_{21}^k & R_{22}^k \\ * & R_{23}^k \end{bmatrix}, \quad X^k = \begin{bmatrix} X_1^k & KW_1 \\ X_2^k & W_2 \end{bmatrix}, \quad Y^k = \begin{bmatrix} Y_1^k & KW_1 \\ Y_2^k & W_2 \end{bmatrix}.$$

avec W_1 et W_2 sont des matrices non singulières et définissons :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \text{diag}\{I_n, W_2^{-T}W_1^T\}, \\ \mathcal{T} &= \text{diag}\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1, I_{n_w}, I_{n_w}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1, I_{n_z}, I_{n_z}\}. \end{aligned}$$

En effectuant une transformation de congruence (Lemme 1.15) à (4.32) par \mathcal{T} , nous obtenons (4.43) avec les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12}^k &= R_{12}^k W_2^{-T} W_1^T, \\ \mathcal{R}_{21}^k &= R_{21}^k W_2^{-T} W_1^T, \\ \mathcal{R}_{13}^k &= W_1 W_2^{-1} R_{13}^k W_2^{-T} W_1^T, \\ \mathcal{R}_{23}^k &= W_1 W_2^{-1} R_{23}^k W_2^{-T} W_1^T, \\ \mathcal{X}_2^k &= W_1 W_2^{-1} X_2^k, \\ \mathcal{Y}_2^k &= W_1 W_2^{-1} Y_2^k, \\ \mathcal{W} &= W_1 W_2^{-T} W_1^T, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{F1}^k &= W_1 A_{F1}^k W_2^{-T} W_1^T, \\ \mathcal{A}_{F2}^k &= W_1 A_{F2}^k W_2^{-T} W_1^T, \\ \mathcal{B}_{F1}^k &= W_1 B_{F1}^k, \quad \mathcal{B}_{F2}^k = W_1 B_{F2}^k, \\ \mathcal{C}_F^k &= C_F^k W_2^{-T} W_1^T, \quad \mathcal{D}_F^k = D_F^k. \end{aligned} \tag{4.47}$$

D'autre part, la fonction de transfert du filtre (4.29) de $y(i, j)$ vers $z(i, j)$ est représentée par :

$$T_F(z_1, z_2) = C_F^p [z_1 z_2 I - z_2 A_{F1}^k - z_1 A_{F2}^k]^{-1} [z_2 B_{F1}^k + z_1 B_{F2}^k] + D_F^p. \tag{4.48}$$

et, les égalités dans (4.47) peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{aligned} A_{F1}^k &= W_1^{-1} \mathcal{A}_{F1}^k W_1^{-T} W_2^T, \\ A_{F2}^k &= W_1^{-1} \mathcal{A}_{F2}^k W_1^{-T} W_2^T, \\ B_{F1}^k &= W_1^{-1} \mathcal{B}_{F1}^k, \quad B_{F2}^k = W_1^{-1} \mathcal{B}_{F2}^k, \\ C_F^p &= \mathcal{C}_F^p W_1^{-T} W_2^T, \quad D_F^p = \mathcal{D}_F^p. \end{aligned} \tag{4.49}$$

En remplaçant les matrices du filtre par (4.49) dans (4.48) et en considérant le changement de variable $\mathcal{W} = W_1 W_2^{-T} W_1^T$, on obtient :

$$\begin{aligned} T_F(z_1, z_2) &= \mathcal{C}_F^p W_1^{-T} W_2^T [z_1 z_2 I - z_2 W_1^{-1} \mathcal{A}_{F1}^k W_1^{-T} W_2^T - z_1 W_1^{-1} \mathcal{A}_{F2}^k W_1^{-T} W_2^T]^{-1} \\ &\quad \times [z_2 K_1^{-1} \mathcal{B}_{F1}^k + z_1 K_1^{-1} \mathcal{B}_{F2}^k] + \mathcal{D}_F^p \\ &= \mathcal{C}_F^p [z_1 z_2 I - z_2 \mathcal{W}^{-1} \mathcal{A}_{F1}^k - z_1 \mathcal{K}^{-1} \mathcal{A}_{F2}^k]^{-1} [z_2 \mathcal{W}^{-1} \mathcal{B}_{F1}^k + z_1 \mathcal{W}^{-1} \mathcal{B}_{F2}^k] + \mathcal{D}_F^p. \end{aligned}$$

Par conséquent, les paramètres du filtre (4.29) peuvent être obtenus par (4.46). La preuve est terminée. \square

Remarque 4.11. *Il est bien connu que la construction raisonnable de la fonction de Lyapunov est très importante pour développer des conditions moins conservatives dans la théorie des systèmes.*

Dans la preuve du théorème 4.3, nous introduisons une nouvelle fonction de Lyapunov commutée (4.33). De plus, nous utilisons les équations (4.36a), (4.36b), (4.36c) et (4.36d), qui aident à éliminer les termes du produit entre les matrices $(P_1^{\sigma(i,j)}, P_2^{\sigma(i,j)})$ et les matrices du système dans la condition LMI, qui fournissent également des degrés de liberté supplémentaires à les conditions LMIs et facilitent la tâche de synthèse du filtre. Par conséquent, la combinaison entre la méthode de fonction de Lyapunov commutée et les équations (4.36a), (4.36b), (4.36c) et (4.36d), est très efficace pour réduire le conservatisme.

Remarque 4.12. Compte tenu du théorème 4.4, le problème de filtrage H_∞ pour les systèmes 2-D discrets commutés peut être résolu en termes de faisabilité des conditions LMIs (4.43), (4.44) et (4.45). Il convient de noter que la condition (4.43) est linéaire non seulement en fonction des matrices $R_{11}^k, \mathcal{R}_{13}^k, R_{21}, \mathcal{R}_{23}^k, R_{12}^k, R_{22}^k, X_1^k, \mathcal{X}_2^k, Y_1^k, \mathcal{Y}_2^k, \mathcal{W}, \mathcal{A}_{F1}^k, \mathcal{A}_{F2}^k, \mathcal{B}_{F1}^k, \mathcal{B}_{F2}^k, \mathcal{C}_F^k$ et \mathcal{D}_F^k , mais aussi en fonction du scalaire γ^2 . Cela implique que le scalaire γ^2 peut être inclus comme variable d'optimisation pour atténuer le plus possible l'effet des perturbations sur le signal d'erreur de filtrage. Le minimum de γ en termes de faisabilité des conditions LMIs (4.43), (4.44) et (4.45), peut ainsi être optimisé en résolvant le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\min \delta \text{ subject to (4.43)-(4.45) avec } \delta = \gamma^2. \quad (4.51)$$

Remarque 4.13. Il convient de noter que le problème d'optimisation convexe (4.51) peut être résolu facilement et directement par la fonction `mincx` de Matlab LMI Toolbox [Boyd et al., 1994].

4.3.3 Exemples numériques

Dans cette section, nous fournissons deux exemples numériques pour montrer l'avantage et l'efficacité de la méthode de synthèse du filtre proposée dans les sous-sections précédentes.

Exemple 4.3. Considérons le système 2-D discret commuté utilisé dans [Yang et al., 2018], qui se compose de deux sous-systèmes ($N = 2$). Pour le sous-système 1, les paramètres sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \begin{bmatrix} 0.2 & -0.5 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, & A_2^1 &= \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0.05 & 0.4 \end{bmatrix}, \\ B_1^1 &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}, & B_2^1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \\ C^1 &= [2 \ 1], & D^1 &= 1, \\ E^1 &= [1 \ 2], & F^1 &= 0. \end{aligned}$$

Pour le sous-système 2, les paramètres sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, & A_2^2 &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \\ B_1^2 &= \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, & B_2^2 &= \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \\ C^2 &= [1 \ 0.5], & D^2 &= -0.1, \\ E^2 &= [0.1 \ 0], & F^2 &= 0, \end{aligned}$$

Nous visons à résoudre le problème de filtrage H_∞ pour ce système par la synthèse d'un filtre d'ordre complet sous la forme (4.29). En utilisant le théorème 4.4, l'indice de la performance H_∞

est $\gamma_{min} = 1.29$ et les paramètres du filtre correspondants sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{F1}^1 & B_{F1}^1 \\ \hline A_{F2}^1 & B_{F2}^1 \\ \hline C_F^1 & D_F^1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.0734 & -0.7747 & -0.2111 \\ -0.0032 & -0.0486 & -0.2669 \\ \hline 0.0606 & -0.1951 & -0.1837 \\ -0.0661 & 0.3059 & -0.0920 \\ \hline 0.0144 & -1.4883 & 0.4848 \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{F1}^2 & B_{F1}^2 \\ \hline A_{F2}^2 & B_{F2}^2 \\ \hline C_F^2 & D_F^2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.0108 & -0.1276 & -0.2122 \\ 0.0010 & 0.0008 & -0.1572 \\ \hline 0.0040 & -0.0518 & -0.0617 \\ -0.0030 & 0.0567 & -0.2127 \\ \hline -0.0034 & 0.0449 & 0.0754 \end{array} \right].$$

Pour montrer l'amélioration, les valeurs minimales de γ obtenues par théorème 2 dans [Yang et al., 2018] et théorème 4.4 sont répertoriées dans le Tableau 4.3. Notez que la méthode de synthèse du filtre proposée dans cette section est beaucoup plus efficace que celle proposée dans [Yang et al., 2018].

Tableau 4.3 – Comparaison des valeurs de γ_{min} (Exemple 4.3).

Méthodes	γ_{min}
Théorème 2 [Yang et al., 2018]	2.45
Théorème 4.4 [Badie et al., 2020a]	1.29

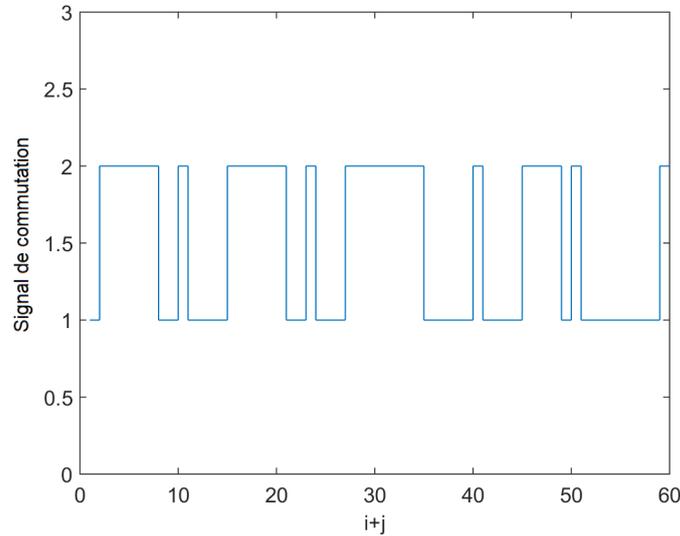


FIGURE 4.8 – Signal de commutation.

Afin de vérifier les résultats, on suppose que les conditions initiales sont :

$$x(i, 0) = x(0, i) = \begin{cases} [0.4 \ -0.2]^T & 0 \leq i < 10, \\ [0 \ 0]^T, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

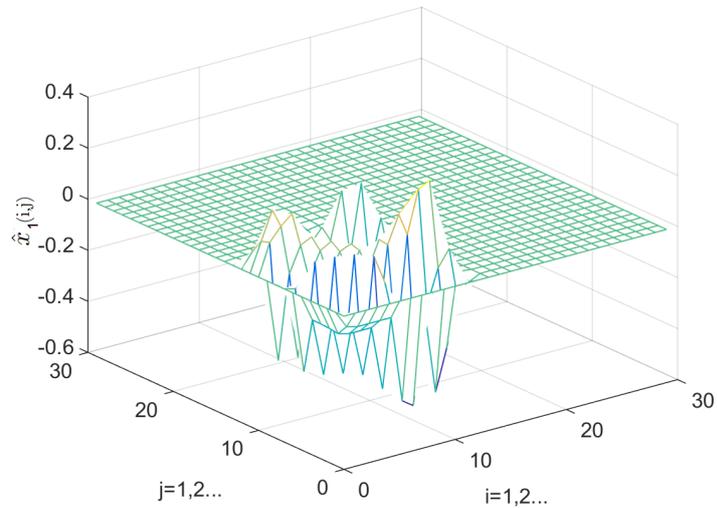


FIGURE 4.9 – Etat $\hat{x}_1(i, j)$ du filtre H_∞ conçu.

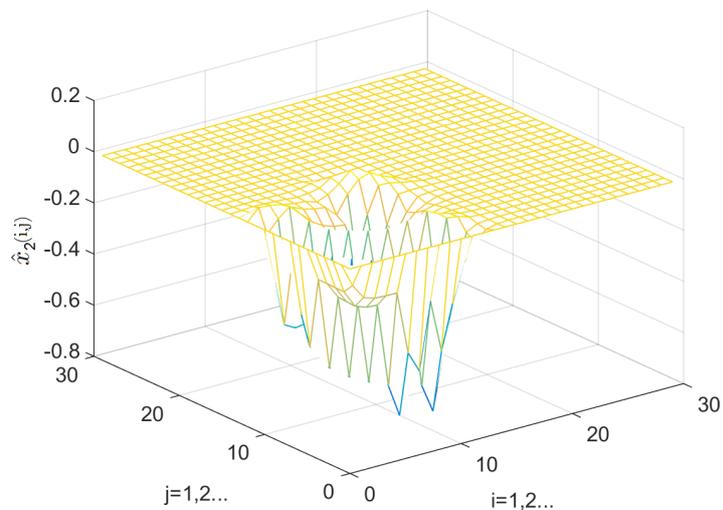
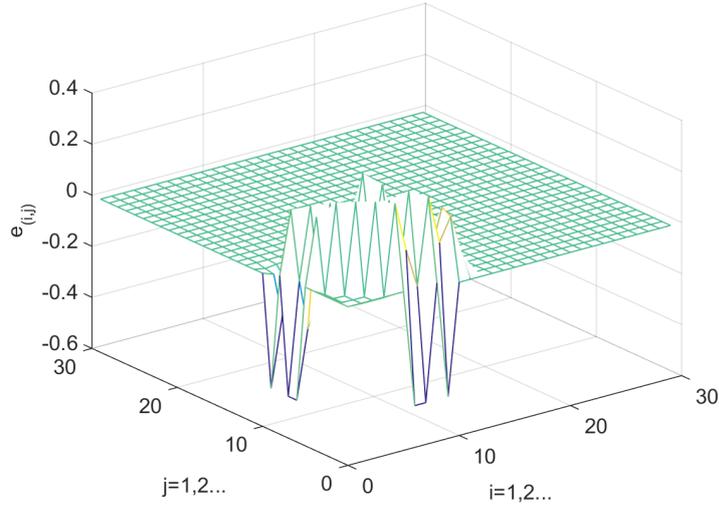


FIGURE 4.10 – Etat $\hat{x}_2(i, j)$ du filtre H_∞ conçu.

L'entrée de perturbation $w(i, j)$ est :

$$w(i, j) = \begin{cases} 0.3 & 0 \leq i < 10, \quad 0 \leq j < 10, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Le signal de commutation peut être généré de manière aléatoire, comme le montre la Figure 4.8. Les Figures 4.9 et 4.10 montrent les états du filtre H_∞ conçu, et la Figure 4.11 montre la réponse d'erreur du système d'erreur de filtrage correspondant en appliquant le filtre obtenu. On observe à partir de la simulation présentée sur la Figure 4.11 que le filtre commuté conçu est efficace sous le signal de commutation arbitraire donné.


 FIGURE 4.11 – Erreur d'estimation $e(i, j)$.

Exemple 4.4. Considérant le système (4.27) avec $n = 3$ et deux sous-systèmes, où le sous-système 1 est donné par :

$$\begin{aligned}
 A_1^1 &= \begin{bmatrix} -0.2 & -0.1 & 0.8 \\ -0 & -0.02 & 0 \\ 0.1 & 0 & -0.05 \end{bmatrix}, \\
 A_2^1 &= \begin{bmatrix} -0.3 & 0.05 & -0 \\ 0.1 & -0.02 & 0 \\ 0.4 & 0 & -0.05 \end{bmatrix}, \\
 B_1^1 &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.7 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\
 C^1 &= [0.5 \ 1 \ 0.5], \quad D_1 = 0.4, \\
 E^1 &= [1 \ 0.2 \ 1], \quad F_1 = 0,
 \end{aligned}$$

et le sous-système 2 est donné par :

$$\begin{aligned}
 A_1^2 &= \begin{bmatrix} -0.7 & -0.1 & -0.4 \\ -0 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.05 \end{bmatrix}, \\
 A_2^2 &= \begin{bmatrix} -0.02 & -0.2 & -0.01 \\ 0 & -0.02 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & -0.05 \end{bmatrix}, \\
 B_1^2 &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_2^2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \\
 C^2 &= [2 \ 0.1 \ 1], \quad D_2 = 0.5, \\
 E^2 &= [1 \ 0.2 \ 1], \quad F_2 = 0,
 \end{aligned}$$

Dans cet exemple, nous visons à concevoir des filtres d'ordre complet et réduit de la forme dans (4.29), de sorte que le système d'erreur de filtrage correspondant soit asymptotiquement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ .

Dans le Tableau 4.4, le résultat du théorème 2 dans [Yang et al., 2018] a été comparé à ceux obtenus dans le théorème 4.4. Les résultats dérivés montrent des valeurs significativement plus petites de γ_{min} , ce qui indique un meilleur effet d'atténuation des perturbations. De plus, le Tableau 4.4 montre le nombre de variables de décision (Nvd) impliquées dans chaque méthode, donc, on peut voir clairement que le théorème 4.4 a été utilisé pour concevoir des filtres d'ordre réduit qui garantissent un indice de performance H_∞ plus petit que celui obtenu en appliquant le théorème 2 dans [Yang et al., 2018], et alors une meilleur atténuation des perturbations malgré l'utilisation d'un Nvd plus petit.

Les filtres correspondants pour $n_f = \{1, 2, 3\}$ en fonction des résultats sont donnés comme suit :
Filtre d'ordre plein ($n_f = 3$) :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} A_{F1}^1 & B_{F1}^1 \\ \hline A_{F2}^1 & B_{F2}^1 \\ \hline C_F^1 & D_F^1 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 0.2043 & -2.7799 & 1.9740 & 1.3349 \\ 0.0111 & -0.2090 & 0.0718 & 0.2398 \\ -0.0072 & 0.2056 & -0.2559 & -0.0382 \\ \hline -0.0404 & -0.8517 & 0.5139 & 0.0654 \\ 0.0208 & 0.5180 & -0.3541 & -0.0781 \\ 0.0272 & 1.5477 & -1.0239 & -0.1897 \\ \hline -0.1944 & 0.5023 & 0.0312 & 1.4714 \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{F1}^2 & B_{F1}^2 \\ \hline A_{F2}^2 & B_{F2}^2 \\ \hline C_F^2 & D_F^2 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{ccc|c} -0.0099 & 0.0634 & -0.0436 & 0.3808 \\ -0.0082 & 0.0359 & -0.0219 & -0.0156 \\ -0.0192 & 0.1202 & -0.0729 & -0.0226 \\ \hline 0.0079 & -0.0353 & 0.0039 & 0.0158 \\ -0.0026 & 0.0259 & -0.0246 & -0.0191 \\ -0.0205 & 0.1684 & -0.1226 & -0.0992 \\ \hline -0.0347 & 0.3570 & -0.2935 & 0.4906 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Filtre d'ordre réduit ($n_f = 2$) :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} A_{F1}^1 & B_{F1}^1 \\ \hline A_{F2}^1 & B_{F2}^1 \\ \hline C_F^1 & D_F^1 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc|c} -0.3534 & 0.6345 & 1.5286 \\ -0.0318 & 0.0065 & 0.0918 \\ \hline -0.2797 & 0.0539 & 0.0593 \\ 0.1272 & -0.1686 & -0.0798 \\ \hline -0.1540 & 0.7994 & 1.6536 \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{F1}^2 & B_{F1}^2 \\ \hline A_{F2}^2 & B_{F2}^2 \\ \hline C_F^2 & D_F^2 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc|c} -0.0014 & -0.0098 & 0.3572 \\ -0.0036 & 0.0001 & 0.0011 \\ \hline 0.0033 & -0.0507 & 0.0181 \\ 0.0012 & -0.0222 & -0.0061 \\ \hline 0.0255 & -0.2103 & 0.5106 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Filtre d'ordre réduit ($n_f = 1$) :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} A_{F1}^1 & B_{F1}^1 \\ \hline A_{F2}^1 & B_{F2}^1 \\ \hline C_F^1 & D_F^1 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c|c} -0.2845 & 1.4824 \\ \hline -0.4022 & 0.3786 \\ \hline -0.2241 & 1.6061 \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{F1}^2 & B_{F1}^2 \\ \hline A_{F2}^2 & B_{F2}^2 \\ \hline C_F^2 & D_F^2 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c|c} -0.0001 & 0.3772 \\ \hline 0.0029 & 0.0008 \\ \hline 0.0159 & 0.5047 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Tableau 4.4 – Comparaison des valeurs de γ_{min} (Exemple 4.4).

Méthodes	γ_{min}	Nvd
Théorème 2 [Yang et al., 2018]	3.6622	166
Théorème 4.4 avec $n_f = 3$ [Badie et al., 2020a]	3.4188	222
Théorème 4.4 avec $n_f = 2$ [Badie et al., 2020a]	3.4585	155
Théorème 4.4 avec $n_f = 1$ [Badie et al., 2020a]	3.4955	102

Remarque 4.14. Le Tableau 4.4 montre clairement que le nombre des variables de décision Nvd est lié à l'ordre du filtre n_f et qu'il augmentera si n_f augmente, ce qui conduit à augmenté le coût de calcul. En revanche, l'augmentation de n_f permet de réduire encore l'effet des perturbations. Par conséquent, n_f doit être choisi de manière appropriée en considérant un compromis entre le conservatisme des résultats et le coût de calcul.

4.4 Filtrage H_∞ des systèmes 2-D non linéaires flous de type Takagi-Sugeno

4.4.1 Formulation du problème

Considérons le système 2-D non linéaire flou de type T-S décrit par le modèle de Roesser discret suivant :

Règle k : SI $\theta_1(i, j)$ est $M_{k,1}$, et $\theta_2(i, j)$ est $M_{k,2}, \dots$, $\theta_s(i, j)$ est $M_{k,s}$ **ALORS :**

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= A_k \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + B_k w(i, j), \\
 y(i, j) &= C_k \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + D_k w(i, j), \\
 z(i, j) &= E_k \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + F_k w(i, j), \quad k = 1, \dots, r,
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

où $\theta(i, j) = [\theta_1(i, j) \ \theta_2(i, j) \ \dots \ \theta_s(i, j)]$ est appelé vecteur des prémisses ; $M_{k,l}$ for $l = 1, \dots, s$ est les ensembles flous, $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$ et $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ sont les états horizontal et vertical, respectivement ; $w(i, j) \in \mathbb{R}^{n_w}$ représente la perturbation externe appartenant à $l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$; $y(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie mesurée ; $z(i, j) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est le signal à estimer ; r est le nombre de règles floues ; les matrices :

$$\begin{aligned}
 A_k &= \begin{bmatrix} A_k^{11} & A_k^{12} \\ A_k^{21} & A_k^{22} \end{bmatrix}, & B_k &= \begin{bmatrix} B_k^1 \\ B_k^2 \end{bmatrix}, \\
 C_k &= [C_k^1 \ C_k^2], & E_k &= [E_k^1 \ E_k^2],
 \end{aligned}$$

D_k et F_k sont des matrices constantes avec des dimensions appropriées.

Les fonctions de pondération floues normalisées sont définis comme suit :

$$h_k(\theta(i, j)) = \frac{\prod_{l=1}^s \mu_{k,l}(\theta_l(i, j))}{\sum_{k=1}^r \prod_{l=1}^s \mu_{k,l}(\theta_l(i, j))},$$

où $\mu_{k,l}(\theta_l(i, j))$ est la valeur de la fonction d'appartenance à $\theta_l(i, j)$ dans la règle floue k . Par définition, nous avons :

$$h_k(\theta(i, j)) \geq 0; \quad \sum_{k=1}^r h_k(\theta(i, j)) = 1.$$

Le modèle flou T-S (4.52) est déduit comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= A_{(i,j)} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + B_{(i,j)} w(i, j), \\ y(i, j) &= C_{(i,j)} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + D_{(i,j)} w(i, j), \\ z(i, j) &= E_{(i,j)} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + F_{(i,j)} w(i, j), \end{aligned} \quad (4.53)$$

où

$$\begin{aligned} A_{(i,j)} &= \begin{bmatrix} A_{(i,j)}^{11} & A_{(i,j)}^{12} \\ A_{(i,j)}^{21} & A_{(i,j)}^{22} \end{bmatrix}, B_{(i,j)} = \begin{bmatrix} B_{(i,j)}^1 \\ B_{(i,j)}^2 \end{bmatrix}, \\ C_{(i,j)} &= \begin{bmatrix} C_{(i,j)}^1 & C_{(i,j)}^2 \end{bmatrix}, E_{(i,j)} = \begin{bmatrix} E_{(i,j)}^1 & E_{(i,j)}^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} A_{(i,j)} = \sum_{k=1}^r h_k(i, j) A_k, & B_{(i,j)} = \sum_{k=1}^r h_k(i, j) B_k, \\ C_{(i,j)} = \sum_{k=1}^r h_k(i, j) C_k, & D_{(i,j)} = \sum_{k=1}^r h_k(i, j) D_k, \\ E_{(i,j)} = \sum_{k=1}^r h_k(i, j) E_k, & F_{(i,j)} = \sum_{k=1}^r h_k(i, j) F_k. \end{cases} \quad (4.54)$$

Les conditions initiales sont supposées satisfaire :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^s (|x_{(0,p)}^h|^2 + |x_{(p,0)}^v|^2) < \infty. \quad (4.55)$$

Motivés par la technique du schéma de compensation distribué parallèle (PDC, Parallel Distributed Compensation) [Wang et al., 1996], dans cette section, nous considérons le problème de synthèse du filtre flou H_∞ suivant :

Règle k : SI $\theta_1(i, j)$ est $M_{k,1}$, et $\theta_2(i, j)$ est $M_{k,2}, \dots, \theta_s(i, j)$ est $M_{k,s}$ ALORS :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i+1, j) \\ \hat{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= A_k^F \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i, j) \\ \hat{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + B_k^F y(i, j); \\ \hat{z}(i, j) &= C_k^F \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i, j) \\ \hat{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + D_k^F y(i, j); \quad k = 1, \dots, r, \\ \hat{x}^h(0, q) &= \hat{x}^v(q, 0) = 0, \quad \forall q. \end{aligned} \quad (4.56)$$

où $\hat{x}^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$ et $\hat{x}^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ sont les vecteurs d'état horizontal et vertical du filtre, $\hat{z}(i, j)$ dénote l'estimation de $z(i, j)$. Les matrices :

$$A_k^F = \begin{bmatrix} A_k^{F11} & A_k^{F12} \\ A_k^{F21} & A_k^{F22} \end{bmatrix}, B_k^F = \begin{bmatrix} B_k^{F1} \\ B_k^{F2} \end{bmatrix}, C_k^F = [C_k^{F1} \quad C_k^{F2}]$$

et D_k^F pour $k = 1, \dots, r$, sont des matrices de filtres à déterminer.

Après défuzzification, la représentation d'état de (4.56), vu dans sa globalité, peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i+1, j) \\ \hat{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= A_{(i,j)}^F \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i, j) \\ \hat{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + B_{(i,j)}^F y(i, j); \\ \hat{z}(i, j) &= C_{(i,j)}^F \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i, j) \\ \hat{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + D_{(i,j)}^F y(i, j); \end{aligned} \quad (4.57)$$

où

$$A_{(i,j)}^F = \begin{bmatrix} A_{(i,j)}^{F11} & A_{(i,j)}^{F12} \\ A_{(i,j)}^{F21} & A_{(i,j)}^{F22} \end{bmatrix}, B_{(i,j)}^F = \begin{bmatrix} B_{F(i,j)}^1 \\ B_{F(i,j)}^2 \end{bmatrix}, C_{(i,j)}^F = \begin{bmatrix} C_{(i,j)}^{F1} & C_{(i,j)}^{F2} \end{bmatrix},$$

et

$$\begin{cases} A_{(i,j)}^F = \sum_{k=1}^r h_k(i, j) A_k^F, & B_{F(i,j)}^F = \sum_{k=1}^r h_k(i, j) B_k^F, \\ C_{(i,j)}^F = \sum_{k=1}^r h_k(i, j) C_k^F, & D_{F(i,j)}^F = \sum_{k=1}^r h_k(i, j) D_k^F. \end{cases} \quad (4.58)$$

En définissant les vecteurs d'état augmentés suivants :

$$\bar{x}^h(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ \hat{x}^h(i, j) \end{bmatrix}, \quad \bar{x}^v(i, j) = \begin{bmatrix} x^v(i, j) \\ \hat{x}^v(i, j) \end{bmatrix},$$

et le signal d'erreur d'estimation $e(i, j) = z(i, j) - \hat{z}(i, j)$, nous obtenons le système d'erreur de filtrage suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i+1, j) \\ \bar{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \bar{A}_{(i,j)} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \bar{B}_{(i,j)} w(i, j); \\ e(i, j) &= \bar{C}_{(i,j)} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \bar{D}_{(i,j)} w(i, j); \end{aligned} \quad (4.59)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{A}_{(i,j)} &= \left[\begin{array}{cc|cc} A_{(i,j)}^{11} & 0 & A_{(i,j)}^{12} & 0 \\ B_{(i,j)}^{F1} C_{(i,j)}^1 & A_{(i,j)}^{F11} & B_{(i,j)}^{F1} C_{(i,j)}^2 & A_{(i,j)}^{F12} \\ \hline A_{(i,j)}^{21} & 0 & A_{(i,j)}^{22} & 0 \\ B_{(i,j)}^{F2} C_{(i,j)}^1 & A_{(i,j)}^{F21} & B_{(i,j)}^{F2} C_{(i,j)}^2 & A_{(i,j)}^{F22} \end{array} \right]; \\ \bar{B}_{(i,j)} &= \begin{bmatrix} B_{(i,j)}^1 \\ B_{(i,j)}^{F1} D_{(i,j)} \\ \hline B_{(i,j)}^2 \\ B_{(i,j)}^{F2} D_{(i,j)} \end{bmatrix}; \\ \bar{C}_{(i,j)} &= \left[\begin{array}{c} (E_{(i,j)}^1 - D_{(i,j)}^F C_{(i,j)}^1)^T \\ \hline -C_{(i,j)}^{F1T} \\ \hline (E_{(i,j)}^2 - D_{(i,j)}^F C_{(i,j)}^2)^T \\ \hline -C_{(i,j)}^{F2T} \end{array} \right]^T; \\ \bar{D}_{(i,j)} &= F_{(i,j)} - D_{(i,j)}^F D_{(i,j)}. \end{aligned}$$

Ensuite, le problème de filtrage flou H_∞ à étudier dans cette section peut être exprimé comme suit :

Pour un système 2-D flou (4.53) donné, l'objectif c'est de déterminer les matrices $A_{F(i,j)}$, $B_{F(i,j)}$, $C_{F(i,j)}$ et $D_{F(i,j)}$ du filtre (4.57), de sorte que le système d'erreur de filtrage (4.59) avec $w(i,j) = 0$ est asymptotiquement stable. Et dans des conditions initiales nulles, le système d'erreur de filtrage satisfait la contrainte de la performance H_∞ suivante :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} e^T(i,j)e(i,j) < \gamma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} w^T(i,j)w(i,j), \quad (4.60)$$

pour tout $w(i,j)$ différent de zéro, $w(i,j) \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$, et un $\gamma > 0$ donné.

4.4.2 Résultats principaux

4.4.2.1 Analyse de la performance H_∞

Le lemme suivant jouera un rôle clé dans la résolution du problème de filtrage flou H_∞ formulé dans la sous-section précédente.

Lemme 4.2. [Badie et al., 2019e] *Considérons le système 2-D (4.53), pour un scalaire donné $\gamma > 0$. Le système d'erreur de filtrage (4.59) avec $w(i,j) = 0$ est asymptotiquement stable et satisfait la contrainte (4.60) dans des conditions initiales nulles pour tout $w(i,j)$ non nul et $w(i,j) \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$, s'il existe des matrices $P_{(i,j)}^h > 0$, $P_{(i,j)}^v > 0$, X et Y tels que :*

$$\begin{bmatrix} -\text{sym}(U) & 0.5U^T + P_{(i,j)} & 0 & \bar{A}_{(i,j)}^T U^T & \bar{C}_{(i,j)}^T \\ * & -2P_{(i,j)} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{B}_{(i,j)}^T U^T & \bar{D}_{(i,j)}^T \\ * & * & * & -P_{(i,j)}^+ & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.61)$$

où

$$P_{(i,j)} = \begin{bmatrix} P_{(i,j)}^h & 0 \\ * & P_{(i,j)}^v \end{bmatrix}, P_{(i,j)}^+ = \begin{bmatrix} P_{(i+1,j)}^h & 0 \\ * & P_{(i,j+1)}^v \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}.$$

Preuve. Construisons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V^h(i,j) = \hat{x}^{hT}(i,j)X^T(P_{(i,j)}^h)^{-1}X\hat{x}^h(i,j); \quad (4.62)$$

$$V^v(i,j) = \hat{x}^{vT}(i,j)Y^T(P_{(i,j)}^v)^{-1}Y\hat{x}^v(i,j); \quad (4.63)$$

où

$$P_{(i,j)}^h = \sum_{k=1}^r h_k(i,j)P_k^h, \quad P_{(i,j)}^v = \sum_{k=1}^r h_k(i,j)P_k^v, \quad (4.64)$$

avec $P_k^h > 0$, $P_k^v > 0$, $k \in \{1, \dots, r\}$ sont des matrices symétriques définies positives, X et Y sont des matrices de dimension appropriée. La différence de la fonction de Lyapunov $V(i,j)$ est donnée par :

$$\Delta V(i,j) = \Delta V^h(i,j) + \Delta V^v(i,j), \quad (4.65)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta V^h(i,j) &= V^h(i+1,j) - V^h(i,j) \\ &= \bar{x}^{hT}(i+1,j)X^T(P_{(i+1,j)}^h)^{-1}X\bar{x}^h(i+1,j) - \bar{x}^{hT}(i,j)X^T(P_{(i,j)}^h)^{-1}X\bar{x}^h(i,j); \\ \Delta V^v(i,j) &= V^v(i,j+1) - V^v(i,j) \\ &= \bar{x}^{vT}(i,j+1)Y^T(P_{(i,j+1)}^v)^{-1}Y\bar{x}^v(i,j+1) - \bar{x}^{vT}(i,j)Y^T(P_{(i,j)}^v)^{-1}Y\bar{x}^v(i,j). \end{aligned}$$

Par une simple manipulation mathématique, nous avons les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Lambda^h &= 2\{\bar{x}^{hT}(i, j)(X^T + P_{(i, j)}^h)(P_{(i, j)}^h)^{-1}X\bar{x}^h(i, j) \\ &\quad - \bar{x}^{hT}(i, j)X^T(P_{(i, j)}^h)^{-1}P^h(i, j)(P_{(i, j)}^h)^{-1}X\bar{x}^h(i, j) - \bar{x}^{hT}(i, j)X\bar{x}^h(i, j)\} = 0; \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^v &= 2\{\bar{x}^{vT}(i, j)(Y^T + P_{(i, j)}^v)(P_{(i, j)}^v)^{-1}Y\bar{x}^v(i, j) \\ &\quad - \bar{x}^{vT}(i, j)Y^T(P_{(i, j)}^v)^{-1}P^v(i, j)(P_{(i, j)}^v)^{-1}Y\bar{x}^v(i, j) - \bar{x}^{vT}(i, j)Y\bar{x}^v(i, j)\} = 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

En combinant (4.65), (4.66) et (4.67), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\Delta V(i, j) - \gamma^2 w^T(i, j)w(i, j) \\ &= \Delta V(i, j) + \Lambda^h + \Lambda^v - \gamma^2 w^T(i, j)w(i, j) \\ &= \xi^T(i, j) \left\{ \begin{bmatrix} -\text{sym}(U) & 0.5U^T + P_{(i, j)} & 0 \\ * & -2P_{(i, j)} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \bar{A}_{(i, j)}^T U^T \\ 0 \\ \bar{B}_{(i, j)}^T U^T \end{bmatrix} (P_{(i, j)}^+)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_{(i, j)}^T U^T \\ 0 \\ \bar{B}_{(i, j)}^T U^T \end{bmatrix}^T \right\} \xi(i, j), \end{aligned} \quad (4.68)$$

avec

$$\xi(i, j) = \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \\ (P_{(i, j)}^h)^{-1}X\bar{x}^h(i, j) \\ (P_{(i, j)}^v)^{-1}Y\bar{x}^v(i, j) \\ w(i, j) \end{bmatrix}.$$

Nous montrons d'abord que le système d'erreurs de filtrage (4.59) avec $w(i, j) = 0$ est asymptotiquement stable. En effet, (4.61) implique :

$$\begin{bmatrix} -\text{sym}(U) & 0.5U^T + P_{(i, j)} & \bar{A}_{(i, j)}^T U^T \\ * & -2P_{(i, j)} & 0 \\ * & * & -P_{(i, j)}^+ \end{bmatrix} < 0.$$

D'après le complément de Schur (Lemme 1.4) et en considérant (4.68) avec $w(i, j) = 0$, on obtient $\Delta V(i, j) < 0$, ce qui garantit la stabilité asymptotique de (4.59) avec $w(i, j) = 0$. Ensuite, nous prouverons que la condition (4.60) est maintenue sous les conditions initiales nulles pour tout $w(i, j)$ non nul, $w(i, j) \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$.

$$\begin{aligned} &\Delta V(i, j) + e^T(i, j)e(i, j) - \gamma^2 w^T(i, j)w(i, j) \\ &= \Delta V_{(i, j)} + \Lambda^h + \Lambda^v + e^T(i, j)e(i, j) - \gamma^2 w^T(i, j)w(i, j) \\ &= \xi^T(i, j) \left\{ \begin{bmatrix} -\text{sym}(U) & 0.5U^T + P_{(i, j)} & 0 \\ * & -2P_{(i, j)} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \right. \\ &\quad + \begin{bmatrix} \bar{A}_{(i, j)}^T U^T \\ 0 \\ \bar{B}_{(i, j)}^T U^T \end{bmatrix} (P_{(i, j)}^+)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_{(i, j)}^T U^T \\ 0 \\ \bar{B}_{(i, j)}^T U^T \end{bmatrix}^T \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \bar{C}_{(i, j)}^T \\ 0 \\ \bar{D}_{(i, j)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{(i, j)}^T \\ 0 \\ \bar{D}_{(i, j)}^T \end{bmatrix}^T \right\} \xi(i, j). \end{aligned}$$

Ainsi, si la condition (4.61) est vérifiée, l'utilisation du complément de Schur (Lemme 1.4) donne.

$$e^T(i, j)e(i, j) - \gamma^2 w^T(i, j)w(i, j) < -\Delta V(i, j). \quad (4.69)$$

En sommant les deux côtés de (4.69), nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (e^T(i, j)e(i, j) - \gamma^2 w^T(i, j)w(i, j)) < - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \Delta V(i, j).$$

alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (e^T(i, j)e(i, j) - \gamma^2 w^T(i, j)w(i, j)) < \\ & - \sum_{j=0}^{\infty} \{V^h(\infty, j) - V^h(0, j)\} - \sum_{i=0}^{\infty} \{V^v(i, \infty) - V^v(i, 0)\}. \end{aligned}$$

Dans des conditions initiales nulles, $V^h(0, j) = 0$ et $V^v(i, 0) = 0$, nous avons :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e^T(i, j)e(i, j) < \gamma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} w^T(i, j)w(i, j).$$

Ceci complète la preuve. □

Remarque 4.15. *Il convient de noter ici que l'utilisation de la méthode de la fonction de Lyapunov floue est efficace dans l'analyse des systèmes flous T-S, mais elle n'est pas pratique dans la synthèse du filtre de ces systèmes en raison de la demande de découplage des matrices de système et de Lyapunov. Jusqu'à présent, cette difficulté a été résolue dans [Boukili et al., 2014] par l'utilisation du lemme de projection. Cependant, cela peut conduire à une complexité de calcul très élevée. Dans cette section, une méthode de fonction de Lyapunov floue est appliquée, qui a été combinée avec l'utilisation des équations (4.66) et (4.67). Avec cette combinaison, nous obtenons des nouvelles conditions suffisantes dans lesquelles le couplage entre les matrices de Lyapunov ($P_{(i,j)}^h, P_{(i,j)}^v$) et les matrices du système sont supprimées. La linéarité des conditions suffisantes par rapport à $P_{(i,j)}^h$ et $P_{(i,j)}^v$ rend la tâche de synthèse du filtre plus facile.*

4.4.2.2 Synthèse du filtre H_∞ flou

Dans cette section, à l'aide du lemme 4.1, nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème de synthèse du filtre.

Théorème 4.5. *[Badie et al., 2019e] Considérons le système 2-D (4.53), pour une constante positive donnée γ , s'il existe des matrices avec des dimensions appropriées $\mathcal{P}_{(i,j)}^{h11} > 0$, $\mathcal{P}_{(i,j)}^{h22} > 0$, $\mathcal{P}_{(i,j)}^{v11} > 0$, $\mathcal{P}_{(i,j)}^{v22} > 0$, $\mathcal{P}_{(i,j)}^{h12}$, $\mathcal{P}_{(i,j)}^{v12}$, \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 , \mathcal{Y}_1 , \mathcal{Y}_2 , \mathcal{K} , \mathcal{G} , $\mathcal{A}_{(i,j)}^{F11}$, $\mathcal{A}_{(i,j)}^{F12}$, $\mathcal{A}_{(i,j)}^{F21}$, $\mathcal{A}_{(i,j)}^{F22}$, $\mathcal{B}_{(i,j)}^{F1}$, $\mathcal{B}_{(i,j)}^{F2}$, $\mathcal{C}_{(i,j)}^{F1}$, $\mathcal{C}_{(i,j)}^{F2}$ et $\mathcal{D}_{(i,j)}^F$ satisfaisant :*

$$\Xi_{(i,j)} < 0, \quad (4.70)$$

où

$$\Xi_{(i,j)} = \begin{bmatrix} -\text{sym}(\mathcal{X}) & 0 & \mathcal{P}_{(i,j)}^h + 0.5\mathcal{X}^T & 0 & 0 & \Xi_{(i,j)}^1 & \Xi_{(i,j)}^2 & \Xi_{(i,j)}^3 \\ * & -\text{sym}(\mathcal{Y}) & 0 & \mathcal{P}_{(i,j)}^v + 0.5\mathcal{Y}^T & 0 & \Xi_{(i,j)}^4 & \Xi_{(i,j)}^5 & \Xi_{(i,j)}^6 \\ * & * & -2\mathcal{P}_{(i,j)}^h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2\mathcal{P}_{(i,j)}^v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & \Xi_{(i,j)}^7 & \Xi_{(i,j)}^8 & \Xi_{(i,j)}^9 \\ * & * & * & * & * & -\mathcal{P}_{(i+1,j)}^h & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\mathcal{P}_{(i,j+1)}^v & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^h(i,j) &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{(i,j)}^{h11} & \mathcal{P}_{(i,j)}^{h12} \\ * & \mathcal{P}_{(i,j)}^{h22} \end{bmatrix}, \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{K} \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{K} \end{bmatrix}, \mathcal{P}^v(i,j) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{(i,j)}^{v11} & \mathcal{P}_{(i,j)}^{v12} \\ * & \mathcal{P}_{(i,j)}^{v22} \end{bmatrix}, \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1 & \mathcal{G} \\ \mathcal{Y}_2 & \mathcal{G} \end{bmatrix}, \\ \Xi_{(i,j)}^1 &= \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{X}_1 A_{(i,j)}^{11} + \mathcal{B}_{(i,j)}^{F1} C_{(i,j)}^1 & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F11} \\ \mathcal{X}_2 A_{(i,j)}^{11} + \mathcal{B}_{(i,j)}^{F1} C_{(i,j)}^1 & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F11} \end{array} \right]^T, \Xi_{(i,j)}^2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{Y}_1 A_{(i,j)}^{21} + \mathcal{B}_{(i,j)}^{F2} C_{(i,j)}^1 & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F21} \\ \mathcal{Y}_2 A_{(i,j)}^{21} + \mathcal{B}_{(i,j)}^{F2} C_{(i,j)}^1 & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F21} \end{array} \right]^T, \\ \Xi_{(i,j)}^3 &= \left[\begin{array}{c} (E_{(i,j)}^1 - \mathcal{D}_{(i,j)}^F C_{(i,j)}^1)^T \\ -\mathcal{C}_{(i,j)}^{F1T} \end{array} \right]^T, \Xi_{(i,j)}^4 = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{X}_1 A_{(i,j)}^{12} + \mathcal{B}_{(i,j)}^{F1} C_{(i,j)}^2 & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F12} \\ \mathcal{X}_2 A_{(i,j)}^{12} + \mathcal{B}_{(i,j)}^{F1} C_{(i,j)}^2 & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F12} \end{array} \right]^T, \\ \Xi_{(i,j)}^5 &= \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{Y}_1 A_{(i,j)}^{22} + \mathcal{B}_{(i,j)}^{F2} C_{(i,j)}^2 & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F22} \\ \mathcal{Y}_2 A_{(i,j)}^{22} + \mathcal{B}_{(i,j)}^{F2} C_{(i,j)}^2 & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F22} \end{array} \right]^T, \Xi_{(i,j)}^6 = \left[\begin{array}{c} (E_{(i,j)}^2 - \mathcal{D}_{(i,j)}^F C_{(i,j)}^2)^T \\ -\mathcal{C}_{(i,j)}^{F2T} \end{array} \right]^T, \\ \Xi_{(i,j)}^7 &= \left[\begin{array}{c} (\mathcal{X}_1 B_{(i,j)}^1 + \mathcal{B}_{(i,j)}^{F1} D_{(i,j)})^T \\ (\mathcal{X}_2 B_{(i,j)}^1 + \mathcal{B}_{(i,j)}^{F1} D_{(i,j)})^T \end{array} \right]^T, \Xi_{(i,j)}^8 = \left[\begin{array}{c} (\mathcal{Y}_1 B_{(i,j)}^2 + \mathcal{B}_{(i,j)}^{F2} D_{(i,j)})^T \\ (\mathcal{Y}_2 B_{(i,j)}^2 + \mathcal{B}_{(i,j)}^{F2} D_{(i,j)})^T \end{array} \right]^T, \\ \Xi_{(i,j)}^9 &= (F_{(i,j)} - \mathcal{D}_{(i,j)}^F D_{(i,j)})^T. \end{aligned}$$

Alors, il existe un filtre flou sous la forme de (4.57) tel que le système d'erreur de filtrage (4.59) est asymptotiquement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ . Dans ce cas, les paramètres du filtre H_∞ appropriée sont donnés par :

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{A}_{(i,j)}^{F11} & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F12} & \mathcal{B}_{(i,j)}^{F1} \\ \mathcal{A}_{(i,j)}^{F21} & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F22} & \mathcal{B}_{(i,j)}^{F2} \\ \mathcal{C}_{(i,j)}^{F1} & \mathcal{C}_{(i,j)}^{F2} & \mathcal{D}_{(i,j)}^F \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathcal{K}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{A}_{(i,j)}^{F11} & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F12} & \mathcal{B}_{(i,j)}^{F1} \\ \mathcal{A}_{(i,j)}^{F21} & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F22} & \mathcal{B}_{(i,j)}^{F2} \\ \mathcal{C}_{(i,j)}^{F1} & \mathcal{C}_{(i,j)}^{F2} & \mathcal{D}_{(i,j)}^F \end{array} \right]. \quad (4.71)$$

Preuve. Supposons que les matrices $\mathcal{P}_{(i,j)}^h$, $\mathcal{P}_{(i,j)}^v$, X et Y ont les structures suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^h(i,j) &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{(i,j)}^{h11} & \mathcal{P}_{(i,j)}^{h12} \\ * & \mathcal{P}_{(i,j)}^{h22} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 & K_1 \\ X_2 & K_2 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P}^v(i,j) &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{(i,j)}^{v11} & \mathcal{P}_{(i,j)}^{v12} \\ * & \mathcal{P}_{(i,j)}^{v22} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 & G_1 \\ Y_2 & G_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Et supposons que K_1 , K_2 , G_1 et G_2 sont des matrices non singuliers et définissons les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} J^h &= \begin{bmatrix} I_{n_h} & 0 \\ 0 & K_2^{-T} K_1^T \end{bmatrix}, \quad J^v = \begin{bmatrix} I_{n_v} & 0 \\ 0 & G_2^{-T} G_1^T \end{bmatrix}, \\ J &= \text{diag}\{J^h, J^v\}, \quad \mathcal{J} = \{J, J, I_{n_w}, J, I_{n_z}\}. \end{aligned}$$

Ensuite, en effectuant une transformation de congruence (Lemme 1.15) à (4.61), par \mathcal{J} et en considérant les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} J^{hT} P^h J^h &= \mathcal{P}^h = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{(i,j)}^{h11} & \mathcal{P}_{(i,j)}^{h12} \\ * & \mathcal{P}_{(i,j)}^{h22} \end{bmatrix}, \\ J^{vT} P^v J^v &= \mathcal{P}^v = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{(i,j)}^{v11} & \mathcal{P}_{(i,j)}^{v12} \\ * & \mathcal{P}_{(i,j)}^{v22} \end{bmatrix}, \\ J^{hT} X J^h &= \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{K} \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{K} \end{bmatrix}, \\ J^{vT} Y J^v &= \mathcal{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1 & \mathcal{G} \\ \mathcal{Y}_2 & \mathcal{G} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{(i,j)}^{F11} & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F12} & \mathcal{B}_{(i,j)}^{F1} \\ \mathcal{A}_{(i,j)}^{F21} & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F22} & \mathcal{B}_{(i,j)}^{F2} \\ \mathcal{C}_{(i,j)}^{F1} & \mathcal{C}_{(i,j)}^{F2} & \mathcal{D}_{(i,j)}^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{(i,j)}^{F11} & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F12} & \mathcal{B}_{(i,j)}^{F1} \\ \mathcal{A}_{(i,j)}^{F21} & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F22} & \mathcal{B}_{(i,j)}^{F2} \\ \mathcal{C}_{(i,j)}^{F1} & \mathcal{C}_{(i,j)}^{F2} & \mathcal{D}_{(i,j)}^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_2^{-T} K_1^T & 0 & 0 \\ 0 & G_2^{-T} G_1^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

On obtient (4.70).

Notez que la fonction de transfert du filtre de $y(i, j)$ à $\hat{z}(i, j)$ est donnée par :

$$T(z_1, z_2) = C_{(i,j)}^F \left(\mathcal{I}(z_1, z_2) - A_{(i,j)}^F \right)^{-1} B_{(i,j)}^F + D_{(i,j)}^F, \quad (4.73)$$

où $\mathcal{I}(z_1, z_2) = \text{diag}\{z_1 I_{n_h}, z_2 I_{n_v}\}$. En considérant :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \begin{bmatrix} \mathcal{K} & 0 \\ 0 & \mathcal{G} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{(i,j)}^F = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{(i,j)}^{F11} & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F12} \\ \mathcal{A}_{(i,j)}^{F21} & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F22} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}_{(i,j)}^F &= \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{(i,j)}^{F1} \\ \mathcal{B}_{(i,j)}^{F2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_{(i,j)}^F = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{(i,j)}^{F1} & \mathcal{C}_{(i,j)}^{F2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et en remplaçant les matrices de filtre données dans (4.72), on obtient :

$$\begin{aligned} T(z_1, z_2) &= C_{(i,j)}^F (\mathcal{I}(z_1, z_2) - A_{(i,j)}^F)^{-1} B_{(i,j)}^F + D_{(i,j)}^F \\ &= C_{(i,j)}^F (\mathcal{I}(z_1, z_2) \mathcal{W} - \mathcal{A}_{(i,j)}^F)^{-1} \mathcal{B}_{(i,j)}^F + \mathcal{D}_{(i,j)}^F \\ &= C_{(i,j)}^F (\mathcal{I}(z_1, z_2) - \mathcal{W}^{-1} \mathcal{A}_{(i,j)}^F)^{-1} \mathcal{W}^{-1} \mathcal{B}_{(i,j)}^F + \mathcal{D}_{(i,j)}^F. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Ensuite, les matrices du filtre peuvent être calculées à partir de (4.71). La preuve est ainsi complétée. \square

Remarque 4.16. Une nouvelle condition suffisante pour l'existence et la synthèse de filtres flous H_∞ pour le système 2-D (4.52) a été présentée dans le théorème 4.5. Il convient de mentionner que la condition (4.70) ne peut pas être utilisée directement pour la synthèse du filtre. Pour résoudre ce problème, nous convertissons la condition (4.70) en un ensemble fini des contraintes LMIs.

Théorème 4.6. [Badie et al., 2019e] Considérons le système 2-D (4.27), pour une constante positive donnée γ , s'il existe des matrices de dimensions appropriées $\mathcal{P}_k^{11h} > 0$, $\mathcal{P}_k^{22h} > 0$, $\mathcal{P}_k^{11v} > 0$,

$\mathcal{P}_k^{22v} > 0$, \mathcal{P}_k^{12h} , \mathcal{P}_k^{12v} , \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 , \mathcal{Y}_1 , \mathcal{Y}_2 , \mathcal{K} , \mathcal{G} , \mathcal{A}_k^{F11} , \mathcal{A}_k^{F12} , \mathcal{A}_k^{F21} , \mathcal{A}_k^{F22} , \mathcal{B}_k^{F1} , \mathcal{B}_k^{F2} , \mathcal{C}_k^{F1} , \mathcal{C}_k^{F2} et \mathcal{D}_k^F tel que :

$$\Xi_{kkmn} < 0, \quad k, m, n = 1, \dots, r. \quad (4.75)$$

$$\Xi_{klmn} + \Xi_{lkmn} < 0, \quad k, l, m, n = 1, \dots, r, (k \neq l). \quad (4.76)$$

$$\Xi_{klmn} = \begin{bmatrix} -\text{sym}(\mathcal{U}^h) & 0 & \mathcal{P}_k^h + 0.5\mathcal{X}^T & 0 & 0 & \Xi_{kl}^1 & \Xi_{kl}^2 & \Xi_{kl}^3 \\ * & -\text{sym}(\mathcal{U}^v) & 0 & \mathcal{P}_k^v + 0.5\mathcal{Y}^T & 0 & \Xi_{kl}^4 & \Xi_{kl}^5 & \Xi_{kl}^6 \\ * & * & -2\mathcal{P}_k^h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2\mathcal{P}_k^v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & \Xi_{kl}^7 & \Xi_{kl}^8 & \Xi_{kl}^9 \\ * & * & * & * & * & -\mathcal{P}_m^h & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\mathcal{P}_n^v & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0,$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k^h &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^{h11} & \mathcal{P}_k^{h12} \\ * & \mathcal{P}_k^{h22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{K} \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{K} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P}_k^v &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^{v11} & \mathcal{P}_k^{v12} \\ * & \mathcal{P}_k^{v22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1 & \mathcal{G} \\ \mathcal{Y}_2 & \mathcal{G} \end{bmatrix}, \\ \Xi_{kl}^1 &= \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{X}_1 A_k^{11} + \mathcal{B}_l^{F1} C_k^1 & \mathcal{A}_l^{F11} \\ \mathcal{X}_2 A_k^{11} + \mathcal{B}_l^{F1} C_k^1 & \mathcal{A}_l^{F11} \end{array} \right]^T, \quad \Xi_{kl}^2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{Y}_1 A_k^{21} + \mathcal{B}_l^{F2} C_k^1 & \mathcal{A}_l^{F21} \\ \mathcal{Y}_2 A_k^{21} + \mathcal{B}_l^{F2} C_k^1 & \mathcal{A}_l^{F21} \end{array} \right]^T, \\ \Xi_{kl}^3 &= \left[\begin{array}{c} (E_k^1 - \mathcal{D}_l^F C_k^1)^T \\ -\mathcal{C}_l^{F1T} \end{array} \right], \quad \Xi_{kl}^4 = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{X}_1 A_k^{12} + \mathcal{B}_l^{F1} C_k^2 & \mathcal{A}_l^{F12} \\ \mathcal{X}_2 A_k^{12} + \mathcal{B}_l^{F1} C_k^2 & \mathcal{A}_l^{F12} \end{array} \right]^T, \\ \Xi_{kl}^5 &= \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{Y}_1 A_k^{22} + \mathcal{B}_l^{F2} C_k^2 & \mathcal{A}_l^{F22} \\ \mathcal{Y}_2 A_k^{22} + \mathcal{B}_l^{F2} C_k^2 & \mathcal{A}_l^{F22} \end{array} \right]^T, \quad \Xi_{kl}^6 = \left[\begin{array}{c} (E_k^2 - \mathcal{D}_l^F C_k^2)^T \\ -\mathcal{C}_k^{F2T} \end{array} \right], \\ \Xi_{kl}^7 &= \left[\begin{array}{c} (\mathcal{X}_1 B_k^1 + \mathcal{B}_l^{F1} D_k)^T \\ (\mathcal{X}_2 B_k^1 + \mathcal{B}_l^{F1} D_k)^T \end{array} \right]^T, \quad \Xi_{kl}^8 = \left[\begin{array}{c} (\mathcal{Y}_1 B_k^2 + \mathcal{B}_l^{F2} D_k)^T \\ (\mathcal{Y}_2 B_k^2 + \mathcal{B}_l^{F2} D_k)^T \end{array} \right]^T, \\ \Xi_{kl}^9 &= (F_k - \mathcal{D}_l^F D_k)^T. \end{aligned}$$

Alors, il existe un filtre flou sous la forme de (4.57) tel que le système d'erreur de filtrage dans (4.59) est asymptotiquement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ . Dans ce cas, les paramètres du filtre H_∞ appropriée sont donnés par :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}_k^{F11} & \mathcal{A}_k^{F12} \\ \mathcal{A}_k^{F21} & \mathcal{A}_k^{F22} \\ \hline \mathcal{C}_k^{F1} & \mathcal{C}_k^{F2} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathcal{B}_k^{F1} \\ \mathcal{B}_k^{F2} \\ \mathcal{D}_k^F \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathcal{K}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}_k^{F11} & \mathcal{A}_k^{F12} \\ \mathcal{A}_k^{F21} & \mathcal{A}_k^{F22} \\ \hline \mathcal{C}_k^{F1} & \mathcal{C}_k^{F2} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathcal{B}_k^{F1} \\ \mathcal{B}_k^{F2} \\ \mathcal{D}_k^F \end{array} \right], \quad k = 1, \dots, r. \quad (4.77)$$

Preuve. Supposons qu'il existe des matrices $\mathcal{P}_k^{11h} > 0$, $\mathcal{P}_k^{22h} > 0$, $\mathcal{P}_k^{11v} > 0$, $\mathcal{P}_k^{22v} > 0$, \mathcal{P}_k^{12h} , \mathcal{P}_k^{12v} , \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 , \mathcal{Y}_1 , \mathcal{Y}_2 , \mathcal{K} , \mathcal{G} , \mathcal{A}_k^{F11} , \mathcal{A}_k^{F12} , \mathcal{A}_k^{F21} , \mathcal{A}_k^{F22} , \mathcal{B}_k^{F1} , \mathcal{B}_k^{F2} , \mathcal{C}_k^{F1} , \mathcal{C}_k^{F2} et \mathcal{D}_k^F ($k = 1, \dots, r$) satisfaisant (4.70). Ensuite, nous utilisons ces matrices et la fonction de base floue $h_k(i, j)$ dans les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(i,j)}^h &= \sum_{k=1}^r h_k(i, j) \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11k}^h & \mathcal{P}_{12k}^h \\ * & \mathcal{P}_{22k}^h \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P}_{(i,j)}^v &= \sum_{k=1}^r h_k(i, j) \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11k}^v & \mathcal{P}_{12k}^v \\ * & \mathcal{P}_{22k}^v \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathcal{A}_{(i,j)}^{F11} & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F12} & \mathcal{B}_{(i,j)}^{F1} \\ \mathcal{A}_{(i,j)}^{F21} & \mathcal{A}_{(i,j)}^{F22} & \mathcal{B}_{(i,j)}^{F2} \\ \hline \mathcal{C}_{(i,j)}^{F1} & \mathcal{C}_{(i,j)}^{F2} & \mathcal{D}_{(i,j)}^{F} \end{array} \right] = \sum_{k=1}^r h_k(i, j) \left[\begin{array}{cc|c} \mathcal{A}_k^{F11} & \mathcal{A}_k^{F12} & \mathcal{B}_k^{F1} \\ \mathcal{A}_k^{F21} & \mathcal{A}_k^{F22} & \mathcal{B}_k^{F2} \\ \hline \mathcal{C}_k^{F1} & \mathcal{C}_k^{F2} & \mathcal{D}_k^{F} \end{array} \right].$$

Avec considération de (4.54), $\Xi_{(i,j)}$ dans (4.70) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \Xi_{(i,j)} &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^r h_m(i+1, j) h_n(i, j+1) \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_k(i, j) h_l(i, j) \Xi_{klmn} \\ &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^r h_m(i+1, j) h_n(i, j+1) \\ &\quad \times \left[\sum_{k=1}^r h_k^2(i, j) \Xi_{kkmn} + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{l=k+1}^r h_k(i, j) h_l(i, j) (\Xi_{klmn} + \Xi_{lkmn}) \right]. \end{aligned}$$

Alors, les LMIs (4.75),(4.76) garantissent (4.70). Ceci complète la preuve du théorème 4.6. \square

Remarque 4.17. Différent de la méthode présentée dans [Boukili et al., 2014], qui nécessite la recherche des valeurs optimales de quelques scalaires supplémentaires. Dans cette section, le théorème 4.6 présente une nouvelle condition suffisante pour concevoir des filtres flous H_∞ pour des systèmes 2-D discrets flous de type T-S, où les conditions obtenues sont présentées en termes des LMIs. Le filtre optimal peut être déterminé en résolvant le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\min \delta \text{ sujet de (4.75) et (4.76) avec } \delta \triangleq \gamma^2.$$

4.4.3 Exemple numérique

Dans cette sous-section, nous présenterons un exemple pour illustrer l'efficacité de la méthode proposée. En pratique, certains processus dynamiques d'absorption de gaz, de chauffage de flux d'eau et de séchage à l'air peuvent être exprimés par l'équation de Darboux [Xiang-Peng et al., 2010] suivante :

$$\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x \partial t} = a_1 \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + a_2 \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} + a_0 \sin^2(q(x, t)) q(x, t) + b w(x, t), \quad (4.78)$$

où $q(x, t)$ est une fonction inconnue à $x(\text{direction}) \in [0, x_f]$ et $t(\text{temps}) \in [0, \infty)$, a_0, a_1, a_2, a_3 et b sont des coefficients réels, $w(x, t)$ est l'entrée de perturbation. Définissons :

$$x^h(x, t) = \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} - a_2 q(x, t), \quad x^v(x, t) = q(x, t).$$

Alors, l'équation différentielle (3.61) peut être transformé au modèle d'espace d'état 2-D suivant :

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\partial x^h(x, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial x^v(x, t)}{\partial t} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} a_1 & a_1 a_2 + a_0 \sin^2(q(x, t)) \\ 1 & a_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x^h(x, t) \\ x^v(x, t) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} b \\ 0 \end{array} \right] w(x, t).$$

Afin d'obtenir un modèle flou T-S 2-D pour le système non linéaire (4.78), nous considérons les deux règles suivantes pour $\sin^2(x^v(x, t))$.

Règle 1 : SI $\sin^2(x^v(x, t))$ est autour de 0, **ALORS :**

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\partial x^h(x, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial x^v(x, t)}{\partial t} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} a_1 & a_1 a_2 \\ 1 & a_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x^h(x, t) \\ x^v(x, t) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} b \\ 0 \end{array} \right] w(x, t).$$

Règle 2 : SI $\sin^2(x^v(x, t))$ est autour de 1, **ALORS** :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(x, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial x^v(x, t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 a_2 + a_0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(x, t) \\ x^v(x, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} w(x, t).$$

Les fonctions d'appartenance sont :

$$\begin{cases} h_1(x, t) = \cos^2(x^v(x, t)), \\ h_2(x, t) = \sin^2(x^v(x, t)). \end{cases}$$

Ensuite, le système flou T-S ci-dessus est discrétisé avec des pas de discrétisation T_1 et T_2 correspondant respectivement aux variables x et t . Le système 2-D flou discret est donné par :

Règle 1 : SI $\sin^2(x^v(x, t))$ est autour de 0, **ALORS** :

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a_1 T_1 & a_1 a_2 T_1 \\ T_2 & 1 + a_2 T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b T_1 \\ 0 \end{bmatrix} w(i, j).$$

Règle 2 : SI $\sin^2(x^v(x, t))$ est autour de 1, **ALORS** :

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a_1 T_1 & (a_1 a_2 + a_0) T_1 \\ T_2 & 1 + a_2 T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b T_1 \\ 0 \end{bmatrix} w(i, j).$$

Posons $a_0 = -2$, $a_1 = -3$, $a_2 = -1$, $b = -1$, $T_1 = 0.1$ et $T_2 = 0.1$. Pour considérer le problème de filtrage flou H_∞ , l'équation de Darboux est modélisée sous la forme (4.53) avec :

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix}, & D_1 &= D_2 = 0.1, \\ L_1 &= L_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 \end{bmatrix}, & F_1 &= F_2 = 0. \end{aligned}$$

L'objectif est de concevoir un filtre 2-D flou sous la forme de (4.57) de telle sorte que le système d'erreur de filtrage (4.59) soit asymptotiquement stable avec une atténuation des perturbations γ au sens de la performance H_∞ . En appliquant le théorème 4.6, nous constatons que le système étudié est asymptotiquement stable avec une atténuation des perturbations $\gamma_{min} = 0.0894$ au sens de la performance H_∞ , et les paramètres du filtre correspondant peuvent être obtenus sur la base de (4.77) avec :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{F111} & A_{F121} & B_{F11} \\ A_{F211} & A_{F221} & B_{F21} \\ C_{F11} & C_{F21} & D_{F1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.0591 & -1.2515 & -1.1881 \\ 0 & 0.4994 & -0.2001 \\ -0.0008 & 0.6952 & 0.7982 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} A_{F112} & A_{F122} & B_{F12} \\ A_{F212} & A_{F222} & B_{F22} \\ C_{F12} & C_{F22} & D_{F2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.0557 & -1.0703 & -1.1523 \\ 0 & 0.4992 & -0.2002 \\ -0.0008 & 0.6947 & 0.7982 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour illustrer les performances du filtre conçu, nous considérons des conditions initiales nulles et les perturbations externes sont supposées comme suit :

$$w(i, j) = -\frac{2\sin(i+j)}{(i+j)} e^{-0.04(i+j)}.$$

La Figure 4.12 montre les états de filtre horizontal et vertical du filtre H_∞ . Ces deux variables d'état convergent vers zéro. La Figure 4.13 présente l'erreur $e(i, j)$.

Par calcul, nous avons $\|e\|_2 = 0.1053$ et $\|w\|_2 = 1.2851$, ce qui donne $\frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} = 0.0819$ (en dessous du minimum H_∞ performance $\gamma_{min} = 0.0894$). Le filtre conçu est alors efficace et garantit un niveau d'atténuation des perturbations au sens de la performance H_∞ .

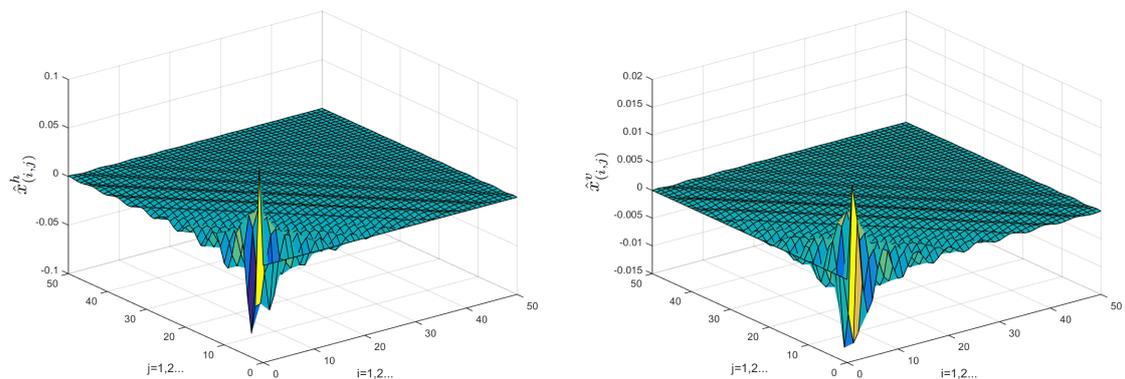


FIGURE 4.12 – Trajectoires d'état du filtre H_∞ .

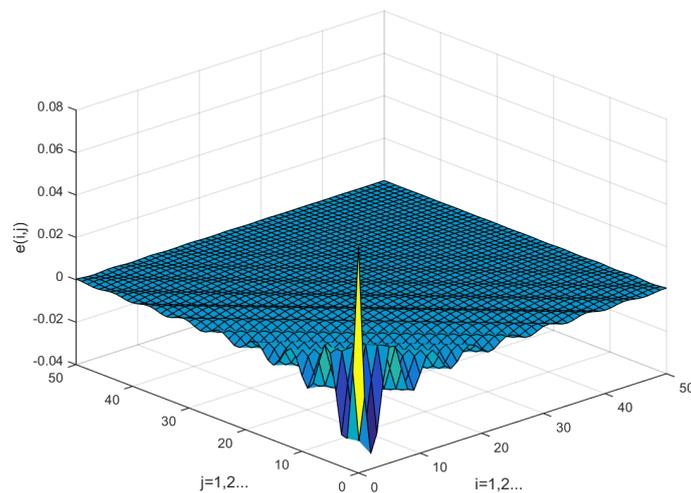


FIGURE 4.13 – Erreur de filtrage $e(i, j)$ avec le filtre H_∞ proposé.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons focalisé notre étude sur les problèmes de filtrage H_∞ pour des systèmes 2-D. Les résultats obtenus sont basés sur des nouvelles structures de la fonction de Lyapunov et une nouvelle technique d'analyse.

Dans la première section, le problème de filtrage H_∞ robuste pour des systèmes 2-D discrets décrits par le modèle de Roesser avec des incertitudes polytopiques a été considéré. En introduisant une nouvelle fonction de Lyapunov dépendante des paramètres, une nouvelle analyse de la performance H_∞ a été proposée, qui garantit la stabilité asymptotique robuste du système d'erreur de filtrage ainsi qu'une exigence de la performance H_∞ . Le filtre indépendant du paramètre incertain et le filtre dépendant du paramètre incertain sont respectivement conçus et les gains des filtres peuvent être conçus en résolvant des problèmes d'optimisation convexes soumis à des contraintes LMIs. Des exemples numériques ont été présentés pour démontrer l'efficacité des résultats obtenus.

Dans la deuxième section, le problème de filtrage H_∞ pour des systèmes 2-D discrets commutés décrits par le second modèle de F-M a été étudié. Au début de cette section, une nouvelle condition suffisante a été proposée pour garantir la stabilité asymptotique et un niveau de performance H_∞ pour le système d'erreur de filtrage. Ensuite, une procédure de synthèse du filtre H_∞ a été formulée en terme des LMIs. Et à la fin de la section, deux exemples numériques ont été utilisés pour confirmer l'efficacité de la méthode proposée.

Dans la dernière section, sur la base du modèle flou T-S, le problème de la synthèse du filtre H_∞ pour les systèmes 2-D non linéaires discrets décrits par le modèle de Roesser a été étudié. En se basant sur une nouvelle fonction de Lyapunov floue, une nouvelle condition suffisante a été proposée pour garantir la stabilité asymptotique avec une performance H_∞ pour le système d'erreur de filtrage. La structure spéciale de la fonction de Lyapunov a été exploitée pour éliminer le couplage entre les matrices du système et les matrices de la fonction de Lyapunov. Ensuite, une méthodologie de synthèse des filtres a été développée et formulée en terme des LMIs. Et à la fin de la section, un exemple numérique a été exploité pour démontrer l'efficacité de l'approche proposée.

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nos investigations se sont focalisées sur l'analyse de la stabilité et la synthèse des lois de commande et des filtres pour des classes de systèmes 2-D. Dans cette conclusion, nous revenons sur les différents points abordés dans cette thèse pour finalement dégager les futures pistes de recherches envisagées.

Afin de situer au mieux nos contributions par rapport aux travaux existants, une introduction aux systèmes 2-D a été proposée dans le premier chapitre. Nous avons commencé par introduire les principaux modèles de représentation d'état exploités dans l'étude des systèmes 2-D. Ainsi, un bref aperçu sur quelques notions de base de la stabilité des systèmes 2-D a été présenté. Puis, des outils LMIs et des lemmes utiles dans le développement des résultats ont été discutés. Ces différents concepts constituent la base des développements proposés dans ce manuscrit et permettent de positionner les contributions apportées.

Nos contributions apparaissent à partir du deuxième chapitre de cette thèse. En effet, dans ce chapitre nous avons proposé plusieurs approches dans le contexte d'analyse de la stabilité des systèmes 2-D à retards. Dans la première section nous avons proposé une nouvelle condition suffisante pour la stabilité asymptotique des systèmes 2-D discrets décrits par le second modèle de F-M à retards. Ensuite, nous avons étudié dans la deuxième section le problème de la stabilité exponentielle des systèmes 2-D discrets commutés décrits par le modèle Roesser à retards variables. La troisième et dernière section de ce chapitre a été consacrée à l'analyse de la stabilité et de la performance H_∞ des systèmes 2-D continus à retards.

Le troisième chapitre a été consacré à la présentation de nos contributions sur la commande H_∞ des systèmes 2-D à retards. Les deux types : commande fiable H_∞ et commande robuste H_∞ , ont été traités séparément dans deux sections. Dans la première section, et sur la base de l'approche du temps de séjour moyen, la fonction de Lyapunov-Krasovskii et l'inégalité de Wirtinger, le problème de commande fiable H_∞ pour des systèmes 2-D discrets commutés décrits par le second modèle de F-M avec des retards d'état et des défauts d'actionneur a été résolu. Grâce à une structure augmentée de la fonction de Lyapunov-Krasovskii et à l'utilisation de l'inégalité de Wirtinger, la deuxième partie de ce chapitre a été réservée à la détermination des lois de commande H_∞ robustes vis-à-vis des incertitudes bornées en normes, pour des systèmes 2-D continus incertains à retards variables.

Les dernières contributions de ce travail ont été présentées dans le quatrième chapitre, ces contributions portent sur le filtrage H_∞ des systèmes 2-D. Sur la base des nouvelles structures des fonctions de Lyapunov et une nouvelle technique d'analyse et dans le but de développer des outils de filtrage H_∞ plus efficaces, nous avons traité séparément en trois sections les problèmes de filtrage robuste H_∞ pour des systèmes 2-D discrets incertains, filtrage H_∞ pour les systèmes 2-D commutés discrets et filtrage H_∞ pour des systèmes 2-D discrets flous de type Takagi-Sugeno.

Suite aux travaux effectués au cours de cette thèse, plusieurs points sont à approfondir et ouvrent la voie vers de nombreux axes de recherche :

- ★ Tout au long de cette thèse, les systèmes 2-D commutés étudiés sont des systèmes discrets, en plus, peu de résultats dans la littérature concernent l'étude des systèmes 2-D continus commutés. Donc, Il serait très intéressant d'aborder les problématiques d'analyse et de synthèse pour le cas continu des systèmes 2-D commutés.
- ★ Dans les troisième et quatrième chapitres, nous avons résolu les problèmes de commande et de filtrage H_∞ des systèmes 2-D commutés, sous une hypothèse couramment utilisée dans la littérature, c'est que les lois de commande et les filtres sont commutés de manière synchrone avec la commutation des modes des systèmes. Mais en réalité, il faut du temps pour identifier les modes du système et activer le mode correspondant au filtre ou à la loi de commande. Alors, Il serait intéressant d'essayer d'étendre nos résultats pour considérer la commutation asynchrone en commande et filtrage.
- ★ Le filtrage H_∞ des systèmes 2-D à retards est un problème très ouvert. Dans nos travaux, nous avons étudié des systèmes 2-D sans retards. Donc, il serait intéressant d'étendre les différentes approches développées pour aborder le problème de filtrage H_∞ des systèmes 2-D à retards et surtout des retards variables.
- ★ Une perspective très intéressante serait d'étendre les résultats de filtrage H_∞ des systèmes 2-D développés dans le quatrième chapitre, pour résoudre le problème de filtrage H_∞ fiable en présence des pannes des capteurs.
- ★ Toutes les techniques proposées dans cette thèse pour l'analyse de la stabilité et la conception des lois de commande H_∞ et des filtres H_∞ pour différentes classes de systèmes 2-D, sont validées par des simulations numériques et des comparaisons avec des résultats de la littérature. Ainsi, l'application pratique de ces techniques sur des procédés réels est une perspective très importante.

Bibliographie

- [Attasi, 1973] Attasi, S., Systemes lineaires homogenes a deux indices (IRIA, Rapport, Laboria, 1973).
- [Badie et al., 2018a] Badie, K., Alfidi, M., & Chalh, Z. (2018, April). Improved delay-dependent stability criteria for 2-D discrete state delayed systems. In 2018 International Conference on Intelligent Systems and Computer Vision (ISCV) (pp. 1-6). IEEE.
- [Badie et al., 2018b] Badie, K., Alfidi, M., Tadeo, F., & Chalh, Z. (2018). Delay-Dependent Stability and H_∞ Performance of 2-D Continuous Systems with Delays. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 37(12), 5333-5350.
- [Badie et al., 2018c] Badie, K., Alfidi, M., & Chalh, Z. (2018). New relaxed stability conditions for uncertain two-dimensional discrete systems. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 29(6), 661-669.
- [Badie et al., 2018d] Badie, K., Alfidi, M., Tadeo, F., & Chalh, Z. (2018, October). Static Output Feedback Control with H_∞ performance for 2-D Discrete Systems in Roesser Model. In 2018 7th International Conference on Systems and Control (ICSC) (pp. 28-33). IEEE.
- [Badie et al., 2019a] Badie, K., Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019). Robust H_∞ control for 2-D discrete state delayed systems with polytopic uncertainties. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 30(3), 1327-1343.
- [Badie et al., 2019b] Badie, K., Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019). An LMI approach to design robust H_∞ controller for 2-D systems with delays. *International Journal of System of Systems Engineering*, 9(2), 99-116.
- [Badie et al., 2019c] Badie, K., Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019). Robust H_∞ control for uncertain 2D state-delayed systems in the second FM model. *International Journal of Systems, Control and Communications*, 10(3), 218-234.
- [Badie et al., 2019d] Badie, K., Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019). Exponential stability analysis for 2D discrete switched systems with state delays. *Optimal Control Applications and Methods*, 40(6), 1088-1103.
- [Badie et al., 2019e] Badie, K., Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019). Fuzzy H_∞ filtering for nonlinear 2D systems in the Roesser model. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 33(2), 169-178.
- [Badie et al., 2019f] Badie, K., Alfidi, M., & Chalh, Z. (2019, October). Delay-Dependent Exponential Stability of Discrete 2-D Switched Systems with Delays. In 2019 8th International Conference on Systems and Control (ICSC) (pp. 513-518). IEEE.
- [Badie et al., 2020a] Badie, K., Alfidi, M., & Chalh, Z. (2020). H_∞ Filtering for two-dimensional discrete switched systems in the second Fornasini and Marchesini model. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 42(8), 1559-1568.
- [Badie et al., 2020b] Badie, K., Alfidi, M., Tadeo, F., & Chalh, Z. (2020). Robust H_∞ controller design for uncertain 2D continuous systems with interval time-varying delays. *International Journal of Systems Science*, 51(3), 440-460.

- [Badie et al., 2020c] Badie, K., Alfydi, M., Oubaidi, M., & Chalh, Z. (2020). Parameter-dependent robust H_∞ filtering for uncertain two-dimensional discrete systems in the FM second model. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, dnz039, <https://doi.org/10.1093/imamci/dnz039>.
- [Badie et al., 2020d] Badie, K., Alfydi, M. & Chalh, Z. Further results on H_∞ filtering for uncertain 2-D discrete systems. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, (2020). <https://doi.org/10.1007/s11045-020-00715-2>.
- [Badie et al., 2020e] Badie, K., Alfydi, M. & Chalh, Z. Reliable H_∞ control for 2-D discrete switched systems with state delays and actuator failures. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2020 ; 1–22. <https://doi.org/10.1002/acs.3156>.
- [Badie et al., 2020f] Badie, K., Alfydi, M., Tadeo, F., & Chalh, Z. (2020). Robust state feedback for uncertain 2-D discrete switched systems in the Roesser model. *Journal of Control and Decision*, 1-19. <https://doi.org/10.1080/23307706.2020.1803774>.
- [Balluchi et al., 1997] Balluchi, A., Di Benedetto, M., Pinello, C., Rossi, C., & Sangiovanni-Vincentelli, A. (1997, December). Cut-off in engine control : a hybrid system approach. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control* (Vol. 5, pp. 4720-4725). IEEE.
- [Barbosa et al., 2005] Barbosa, K. A., De Souza, C. E., & Trofino, A. (2005). Robust H_2 filtering for uncertain linear systems : LMI based methods with parametric Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 54(3), 251-262.
- [Benhayoun et al., 2013] Benhayoun, M., Mesquine, F., & Benzaouia, A. (2013). Delay-dependent stabilizability of 2D delayed continuous systems with saturating control. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 32(6), 2723-2743.
- [Benzaouia et al., 2011] Benzaouia, A., Benhayoun, M., & Tadeo, F. (2011). State-feedback stabilization of 2D continuous systems with delays. *Int. J. Innov. Comput. Inf. Control*, 7(2), 977-988.
- [Benzaouia et al., 2011] Benzaouia, A., Hmamed, A., Tadeo, F., & Hajjaji, A. E. (2011). Stabilization of discrete 2D time switching systems by state feedback control. *International Journal of Systems Science*, 42(3), 479-487.
- [Benzaouia et al., 2016] Benzaouia, A., Hmamed, A., & Tadeo, F. (2016). Two-dimensional systems : From introduction to state of the art. In *Studies in systems, decision and control* (Vol. 28). Switzerland : Springer International Publishing. doi :10.1007/978-3-319-20116-0.
- [Bernussou et al., 1989] Bernussou, J., Peres, P. L. D., & Geromel, J. C. (1989). A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13(1), 65-72.
- [Boudelloua et al., 2019] Boudelloua, M. S., Galkowski, K., & Rogers, E. (2019). Characterization of a class of spatially interconnected systems (ladder circuits) using two-dimensional systems theory. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 30(4), 2185-2197.
- [Boukili et al., 2014] Boukili, B., Hmamed, A., Benzaouia, A., & El Hajjaji, A. (2014). H_∞ filtering of two-dimensional TS fuzzy systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 33(6), 1737-1761.
- [Boukili et al., 2016] Boukili, B., Hmamed, A., & Tadeo, F. (2016). Robust H_∞ Filtering for 2-D Discrete Roesser Systems. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 27(5), 497-505.
- [Boyd et al., 1994] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., & Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory* (Vol. 15). Siam. Studies in Applied Mathematics , Philadelphia, PA, 15.

- [Bishop et al., 1998] Bishop, B. E., & Spong, M. W. (1998, December). Control of redundant manipulators using logic-based switching. In Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 98CH36171) (Vol. 2, pp. 1488-1493). IEEE.
- [Bu et al., 2017] Bu, X., Liang, J., Hou, Z., & Yang, J. (2017). Quantized H_∞ control for a class of 2-D systems with missing measurements. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 15(2), 706-715.
- [Chang et al., 2015] Chang, X. H., Park, J. H., & Tang, Z. (2015). New approach to H_∞ filtering for discrete-time systems with polytopic uncertainties. *Signal Processing*, 113, 147-158.
- [Cao et al., 2000] Cao, Y. Y., & Lam, J. (2000). Computation of robust stability bounds for time-delay systems with nonlinear time-varying perturbations. *International Journal of Systems Science*, 31(3), 359-365.
- [Cao et al., 2001] Cao, Y. Y., & Frank, P. M. (2001). Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi–Sugeno fuzzy models. *Fuzzy sets and systems*, 124(2), 213-229.
- [David, 2018] David, R. (2018). Étude de la stabilité de deux systèmes multidimensionnels (Doctoral dissertation).
- [De Souza et al., 2010] de Souza, C. E., Xie, L., & Coutinho, D. F. (2010). Robust filtering for 2-D discrete-time linear systems with convex-bounded parameter uncertainty. *Automatica*, 46(4), 673-681.
- [Donkers et al., 2011] Donkers, M. C. F., Heemels, W. P. M. H., Van de Wouw, N., & Hetel, L. (2011). Stability analysis of networked control systems using a switched linear systems approach. *IEEE Transactions on Automatic control*, 56(9), 2101-2115.
- [Di Loreto et al., 2006] Di Loreto, M. (2006). Méthodologie pour l'analyse et la commande des systèmes à retards (Doctoral dissertation).
- [Du et al., 2002] Du C, Xie L. (2002) Control and Filtering of Two-Dimensional Systems Lecture Notes in Control and Information Sciences. Vol. 278. Berlin, Germany : Springer.
- [Duan et al., 2013] Duan, Z., Xiang, Z., & Karimi, H. R. (2013). Delay-dependent H_∞ control for 2-D switched delay systems in the second FM model. *Journal of the Franklin Institute*, 350(7), 1697-1718.
- [Duan et al., 2019] Duan, Z., Shen, J., Ghous, I., & Fu, J. (2019). H_∞ filtering for discrete-time 2D T–S fuzzy systems with finite frequency disturbances. *IET Control Theory & Applications*, 13(13), 1983-1994.
- [Dymkov et al., 2002] Dymkov, M., Gaishun, I., Galkowski, K., Rogers, E., & Owens, D. H. (2002). Exponential stability of discrete linear repetitive processes. *International Journal of Control*, 75(12), 861-869.
- [Dymkov et al., 2008] Dymkov, M., Rogers, E., Dymkou, S., & Galkowski, K. (2008). Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(1), 396-420.
- [Ellouze, 2010] Ellouze, I. (2010). Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs (Doctoral dissertation).
- [Elsayed et al., 1989] Elsayed, A., & Grimble, M. J. (1989). A new approach to the H_∞ design of optimal digital linear filters. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 6(2), 233-251.
- [El-Kasri et al., 2012] El-Kasri, C., Hmamed, A., Alvarez, T., & Tadeo, F. (2012). Robust H_∞ Filtering of 2D Roesser Discrete Systems : A Polynomial Approach. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.

- [El-Kasri et al., 2013] El-Kasri, C., Hmamed, A., Tissir, E. H., & Tadeo, F. (2013). Robust H_∞ filtering for uncertain two-dimensional continuous systems with time-varying delays. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 24(4), 685-706.
- [El Hachemi, 2012] El Hachemi, F. (2012). Analyse de stabilité des systèmes à commutations singulièrement perturbés (Doctoral dissertation, Université de Lorraine).
- [El Hellani, 2018] El Hellani, D. (2018). Approche LMI pour l'analyse et la synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini (Doctoral dissertation, Amiens).
- [Fei et al., 2017] Fei, W., Hu, L., Mao, X., & Shen, M. (2017). Delay dependent stability of highly nonlinear hybrid stochastic systems. *Automatica*, 82, 165-170.
- [Feng et al., 2010] Feng, Z. Y., Xu, L., Wu, M., & He, Y. (2010). Delay-dependent robust stability and stabilisation of uncertain two-dimensional discrete systems with time-varying delays. *IET control theory & applications*, 4(10), 1959-1971.
- [Feng et al., 2013] Feng, Y., & Yagoubi, M. (2013). On state feedback H_∞ control for discrete-time singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(10), 2674-2679.
- [Feng et al., 2016] Feng, Z., & Zheng, W. X. (2016). Improved stability condition for Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying delay. *IEEE transactions on cybernetics*, 47(3), 661-670.
- [Fornasini et al., 1989] Fornasini, E., & Marchesini, G. (1978). Doubly-indexed dynamical systems : State-space models and structural properties. *Mathematical systems theory*, 12(1), 59-72.
- [Fornasini et al., 2003] Fridman, E., & Shaked, U. (2003). Delay-dependent stability and H_∞ control : constant and time-varying delays. *International journal of control*, 76(1), 48-60.
- [Fujinami et al., 2001] Fujinami, T., Saito, Y., Morishita, M., Koike, Y., & Tanida, K. (2001). A hybrid mass damper system controlled by H_∞ control theory for reducing bending-torsion vibration of an actual building. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 30(11), 1639-1653.
- [Galkowski et al., 2002] Galkowski, K. (2002, September). LMI based stability analysis for 2D continuous systems. In *9th International conference on electronics, circuits and systems* (Vol. 3, pp. 923-926). IEEE.
- [Galkowski et al., 2003] Galkowski, K., Paszke, W., Rogers, E., Xu, S., Lam, J., & Owens, D. H. (2003). Stability and control of differential linear repetitive processes using an LMI setting. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing*, 50(9), 662-666.
- [Galkowski et al., 2018] Galkowski, K., & Rogers, E. (2018). Control systems analysis for the Fornasini-Marchesini 2D systems model-progress after four decades. *International Journal of Control*, 91(12), 2801-2822.
- [Gao et al., 2008] Gao, C. Y., Duan, G. R., & Meng, X. Y. (2008). Robust H_∞ filter design for 2D discrete systems in Roesser model. *International journal of automation and computing*, 5(4), 413-418.
- [Gao et al., 2014] Gao, H., & Li, X. (2014). Robust filtering for uncertain systems : A parameter-dependent approach. Switzerland : Springer International Publishing. doi :10.1007/978-3-319-05903-7.
- [Gahinet et al., 1995] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., & Chilali, M. (1995). LMI Control Toolbox, The Math Works Inc. Natick, MA.
- [Ghamgui et al., 2015] Ghamgui, M., Yeganefar, N., Bachelier, O., & Mehdi, D. (2015). H_∞ Performance Analysis of 2D Continuous Time-Varying Delay Systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 34(11), 3489-3504.

- [Ghous et al., 2015] Ghous, I., Xiang, Z., & Karimi, H. R. (2015). State Feedback H_∞ Control For 2-D Switched Delay Systems with Actuator Saturation in the Second FM Model. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 34(7), 2167-2192.
- [Ghous et al., 2016a] Ghous, I., & Xiang, Z. (2016a). Robust state feedback H_∞ control for uncertain 2-D continuous state delayed systems in the Roesser model. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 27(2), 297-319.
- [Ghous et al., 2016b] Ghous, I., & Xiang, Z. (2016b). H_∞ control of a class of 2-D continuous switched delayed systems via state-dependent switching. *International Journal of Systems Science*, 47(2), 300-313.
- [Givone et al., 1972] Givone, D. D., & Roesser, R. P. (1972). Multidimensional linear iterative circuits—General properties. *IEEE Transactions on Computers*, 100(10), 1067-1073.
- [Galkowski et al., 2003] Galkowski, K., Paszke, W., Rogers, E., Xu, S., Lam, J., & Owens, D. H. (2003). Stability and control of differential linear repetitive processes using an LMI setting. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing*, 50(9), 662-666.
- [Goldhirsch et al., 1978] Goldhirsch, I., Sulem, P. L., & Orszag, S. A. (1987). Stability and Lyapunov stability of dynamical systems : A differential approach and a numerical method. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 27(3), 311-337.
- [Halabi et al., 2005] Halabi, S. (2005). Filtrage robuste pour les systèmes stochastiques incertains (Doctoral dissertation).
- [He et al., 2005] He, Y., Wu, M., & She, J. H. (2005). Improved bounded-real-lemma representation and H_∞ control of systems with polytopic uncertainties. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 52(7), 380-383.
- [He et al., 2009] He, Y., Liu, G. P., Rees, D., & Wu, M. (2009). H_∞ filtering for discrete-time systems with time-varying delay. *Signal Processing*, 89(3), 275-282.
- [Hien et al., 2016] Hien, L. V., & Trinh, H. (2016) Stability of two-dimensional Roesser systems with time-varying delays via novel 2D finitesum inequalities. *IET Control Theory and Applications*, 10(14), 1665-1674.
- [Hinamoto, 1993] Hinamoto, T. (1993). 2-D Lyapunov equation and filter design based on the Fornasini-Marchesini second model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 40(2), 102-110.
- [Hmamed, 1986] Hmamed, A. (1986). On the stability of time-delay systems : new results. *International Journal of Control*, 43(1), 321-324.
- [Hmamed et al., 2013] Hmamed, A., Kasri, C. E., Tissir, E. H., Alvarez, T., & Tadeo, F. (2013). Robust H_∞ filtering for uncertain 2-D continuous systems with delays. *Int. J. Innov. Comput. Inf. Control*, 9(5), 2167-2183.
- [Hmamed et al., 2016] Hmamed, A., Kririm, S., Benzaouia, A., & Tadeo, F. (2016). Delay-dependent stability and stabilisation of continuous 2D delayed systems with saturating control. *International Journal of Systems Science*, 47(12), 3004-3015.
- [Huang et al., 2013] Huang, S., & Xiang, Z. (2013). Delay-dependent stability for discrete 2D switched systems with state delays in the Roesser model. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 32(6), 2821-2837.
- [Huang et al., 2014] Huang, S., & Xiang, Z. (2014). Robust reliable control of uncertain 2D discrete switched systems with state delays. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 36(1), 119-130.
- [Kaczorek, 1985] Kaczorek, T. (1985). Two-dimensional linear systems. *Lecture notes in control and information sciences*, 68. (Springer, Berlin, 1985).

- [Kaczorek, 2012] Kaczorek, T. (2012). Positive 1D and 2D systems. Springer Science & Business Media, London.
- [Jin, 2017] Jin, C. (2017). Analyse de stabilité de systèmes à coefficients dépendant du retard (Doctoral dissertation).
- [Kim et al., 2008] Kim, S., Campbell, S. A., & Liu, X. (2008). Delay independent stability of linear switching systems with time delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 339(2), 785-801.
- [Kumar et al., 2019] Kumar, P. V., & Rajeswari, R. (2019). A recursive discrete Kalman filter for the generation of reference signal to UPQC with unbalanced and distorted supply conditions. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 31(1), 39-52.
- [Li et al., 2005] Li, X. D., Ho, J. K., & Chow, T. W. (2005). Iterative learning control for linear time-variant discrete systems based on 2-D system theory. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 152(1), 13-18.
- [Li et al., 2012] Li, X., & Gao, H. (2012). Robust finite frequency H_∞ filtering for uncertain 2-D Roesser systems. *Automatica*, 48(6), 1163-1170.
- [Li et al., 2013] Li, L., Wang, W., & Li, X. (2013). New approach to H_∞ filtering of two-dimensional T-S fuzzy systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 23(17), 1990-2012.
- [Liu et al., 2015] Liu, H., & Lin, X. (2015). Finite-time H_∞ control for a class of nonlinear system with time-varying delay. *Neurocomputing*, 149, 1481-1489.
- [Long et al., 2016] Long, S., & Zhong, S. (2016). H_∞ control for a class of discrete-time singular systems via dynamic feedback controller. *Applied Mathematics Letters*, 58, 110-118.
- [Lu et al., 1992] Lu W-S, Antoniou A. (1992) Two-Dimensional Digital Filters *Electrical Engineering and Electronics*. Vol. 80. New York, NY : Marcel Dekker.
- [Lu et al., 1994] Lu, W. S. (1994). On a Lyapunov approach to stability analysis of 2-D digital filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 41(10), 665-669.
- [Luan et al., 2010] Luan, X., Liu, F., & Shi, P. (2010). H_∞ filtering for nonlinear systems via neural networks. *Journal of the Franklin Institute*, 347(6), 1035-1046.
- [Mahmoud et al., 2012] Mahmoud, M. S., & Shi, P. (2012). Asynchronous H_∞ filtering of discrete-time switched systems. *Signal Processing*, 92(10), 2356-2364.
- [Mathiyalagan et al., 2012] Mathiyalagan, K., & Sakthivel, R. (2012). Robust stabilization and H_∞ control for discrete-time stochastic genetic regulatory networks with time delays. *Canadian Journal of Physics*, 90(10), 939-953.
- [Meng et al., 2010] Meng, X., Lam, J., Du, B., & Gao, H. (2010). A delay-partitioning approach to the stability analysis of discrete-time systems. *Automatica*, 46(3), 610-614.
- [Mohajerpoor et al., 2017] Mohajerpoor, R., Shanmugam, L., Abdi, H., Rakkiyappan, R., Nahavandi, S., & Park, J. H. (2017). Improved delay-dependent stability criteria for neutral systems with mixed interval time-varying delays and nonlinear disturbances. *Journal of the Franklin Institute*, 354(2), 1169-1194.
- [Nam et al., 2015] Nam, P. T., Pathirana, P. N., & Trinh, H. (2015). Discrete Wirtinger-based inequality and its application. *Journal of the Franklin Institute*, 352(5), 1893-1905.
- [Park et al., 2011] Park, P., Ko, J. W., & Jeong, C. (2011). Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays. *Automatica*, 47(1), 235-238.
- [Park et al., 2015] Park, M., Kwon, O., Park, J. H., Lee, S., & Cha, E. (2015). Stability of time-delay systems via Wirtinger-based double integral inequality. *Automatica*, 55, 204-208.

- [Park et al., 2016] Park, P., Lee, W. I., & Lee, S. Y. (2016). Auxiliary function-based integral/summation inequalities : application to continuous/discrete time-delay systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 14(1), 3-11.
- [Paszke et al., 2004] Paszke, W., Lam, J., Galkowski, K., Xu, S., & Lin, Z. (2004). Robust stability and stabilisation of 2D discrete state-delayed systems. *Systems & Control Letters*, 51(3-4), 277-291.
- [Petersen et al., 1999] Petersen, I. R., & Savkin, A. V. (1999). *Robust Kalman filtering for signals and systems with large uncertainties*. Springer Science & Business Media.
- [Peng et al., 2009a] Peng, D., & Guan, X. (2009). Output feedback H_∞ control for 2-D state-delayed systems. *Circuits, Systems & Signal Processing*, 28(1), 147-167.
- [Peng et al., 2009b] Peng, D., & Guan, X. (2009). H_∞ filtering of 2-D discrete state-delayed systems. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 20(3), 265-284.
- [Peng et al., 2018] Peng, D., Zhang, J., Hua, C., & Gao, C. (2018). A delay-partitioning approach to the stability analysis of 2-D linear discrete-time systems with interval time-varying delays. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 16(2), 682-688.
- [Petersen et al., 1987] Petersen, I. R. (1987). A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems & Control Letters*, 8(4), 351-357.
- [Qiu et al., 2010] Qiu, F., Cui, B., & Ji, Y. (2010). Further results on robust stability of neutral system with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 11(2), 895-906.
- [Regaieg et al., 2019] Regaieg, M. A., Kchaou, M., El Hajjaji, A., & Chaabane, M. (2019). Robust H_∞ guaranteed cost control for discrete-time switched singular systems with time-varying delay. *Optimal Control Applications and Methods*, 40(1), 119-140.
- [Roesser, 1975] Roesser, R. (1975). A discrete state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(1), 1-10.
- [Rogers et al., 1992] Rogers, E., & Owens, D. H. (1992). *Stability analysis for linear repetitive processes* (Vol. 175). Berlin : Springer-Verlag.
- [Sakthivel et al., 2015] Sakthivel, R., Sundareswari, K., Mathiyalagan, K., Arunkumar, A., & Anthoni, S. M. (2015). Robust Reliable H_∞ Control for Discrete-Time Systems with Actuator Delays. *Asian Journal of Control*, 17(6), 2133-2142.
- [Shen et al., 2011] Shen, H., Xu, S., Zhou, J., & Lu, J. (2011). Fuzzy H_∞ filtering for nonlinear Markovian jump neutral systems. *International Journal of Systems Science*, 42(5), 767-780.
- [Shu et al., 2016] Shu, Y., Liu, X., & Liu, Y. (2016). Stability and passivity analysis for uncertain discrete-time neural networks with time-varying delay. *Neurocomputing*, 173, 1706-1714.
- [Seuret et al., 2013] Seuret, A., & Gouaisbaut, F. (2013). Wirtinger-based integral inequality : Application to time-delay systems. *Automatica*, 49(9), 2860-2866.
- [Seuret et al., 2015] Seuret, A., Gouaisbaut, F., & Fridman, E. (2015). Stability of discrete-time systems with time-varying delays via a novel summation inequality. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(10), 2740-2745.
- [Song et al., 2019] Song, G., & Tao, G. (2019). Adaptive state-feedback control with sensor failure compensation for asymptotic output tracking. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 33(1), 130-156.
- [Sun et al., 2009] Sun, J., Liu, G. P., & Chen, J. (2009). Delay-dependent stability and stabilization of neutral time-delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control : IFAC-Affiliated Journal*, 19(12), 1364-1375.
- [Sun et al., 2010] Sun, W., Gao, H., & Kaynak, O. (2010). Finite Frequency H_∞ Control for Vehicle Active Suspension Systems. *IEEE Transactions on control systems technology*, 19(2), 416-422.

- [Takagi et al., 1985] Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, (1), 116-132.
- [Tandon et al., 2014] Tandon, A., & Dhawan, A. (2014). An LMI approach to non-fragile robust optimal guaranteed cost control of 2D discrete uncertain systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 36(5), 644-653.
- [Tissir et al., 1994] Tissir, E., & Hmamed, A. (1994). Stability tests of interval time delay systems. *Systems & Control Letters*, 23(4), 263-270.
- [Tissir, 2007] Tissir, E. H. (2007). Delay-dependent robust stability of linear systems with non-commensurate time varying delays. *International journal of systems science*, 38(9), 749-757.
- [Vembarasan et al., 2014] Vembarasan, V., Balasubramaniam, P., & Joo, E. M. (2014). H_∞ state-feedback control of time-delay systems using reciprocally convex approach. *Journal of Process Control*, 24(6), 892-904.
- [Wang et al., 1996] Wang, H. O., Tanaka, K., & Griffin, M. F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems : Stability and design issues. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 4(1), 14-23.
- [Wang et al., 2012] Wang, D., Shi, P., Wang, J., & Wang, W. (2012). Delay-dependent exponential H_∞ filtering for discrete-time switched delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 22(13), 1522-1536.
- [Wang et al., 2015] Wang, T., Dong, C., & Wang, Q. (2015). Finite-time boundedness control of morphing aircraft based on switched systems approach. *Optik*, 126(23), 4436-4445.
- [Wei et al., 2014] Wei, A., & Wang, Y. (2010). Stabilization and H_∞ control of nonlinear port-controlled Hamiltonian systems subject to actuator saturation. *Automatica*, 46(12), 2008-2013.
- [Wei et al., 2018] Wei, C., Cai, Y., Zhang, K., Wang, Z., & Yu, W. (2018). Novel optimal design approach for output-feedback H_∞ control of vehicle active seat-suspension system. *Asian Journal of Control*.
- [Williams et al., 1991] Williams, S. M., & Hoft, R. G. (1991). Adaptive frequency domain control of PWM switched power line conditioner. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 6(4), 665-670.
- [Wu et al., 2010] Wu, M., He, Y., & She, J. H. (2010). *Stability analysis and robust control of time-delay systems (Vol. 22)*. Berlin : Springer.
- [Wu et al., 2014] Wu, Z. G., Shi, P., Su, H., & Chu, J. (2014). Asynchronous $l_2 \sim l_\infty$ filtering for discrete-time stochastic Markov jump systems with randomly occurred sensor nonlinearities. *Automatica*, 50(1), 180-186.
- [Xiang-Peng et al., 2010] Xiang-Peng, X., & Zhang, H. G. (2010). Stabilization of discrete-time 2-D TS fuzzy systems based on new relaxed conditions. *Acta Automatica Sinica*, 36(2), 267-273.
- [Xie et al., 1994] Xie, L., & Soh, Y. C. (1994). Robust Kalman filtering for uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 22(2), 123-129.
- [Xie et al., 1996] Xie, L. (1996). Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. *International Journal of control*, 63(4), 741-750.
- [Xie et al., 2002] Xie, L., Du, C., Soh, Y. C., & Zhang, C. (2002). H_∞ and robust control of 2-D systems in FM second model. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 13(3), 265-287.
- [Xinag et al., 2013] Xiang, Z., & Huang, S. (2013). Stability analysis and stabilization of discrete-time 2D switched systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 32(1), 401-414.
- [Xu et al., 2005] Xu, S., & Lam, J. (2005). Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3), 384-387.

- [Xu et al., 2009] Xu, J., & Yu, L. (2009). Delay-dependent H_∞ control for 2-D discrete state delay systems in the second FM model. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 20(4), 333-349.
- [Xu et al., 2013] Xu, J., Nan, Y., Zhang, G., Ou, L., & Ni, H. (2013). Delay-dependent H_∞ control for uncertain 2-D discrete systems with state delay in the Roesser model. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 32(3), 1097-1112.
- [Yamada et al., 1999] Yamada, M., Xu, L., & Saito, O. (1999). 2D model-following servo system. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 10(1), 71-91.
- [Yang et al., 2014] Yang, H., Shi, P., Li, X., & Li, Z. (2014). Fault-tolerant control for a class of T-S fuzzy systems via delta operator approach. *Signal Processing*, 98, 166-173.
- [Yang et al., 2018] Yang, R., & Zheng, W. X. (2018). H_∞ filtering for discrete-time 2-D switched systems : an extended average dwell time approach. *Automatica*, 98, 302-313.
- [Yang et al., 2019] Yang, B., Hao, M., Han, M., Zhao, X., & Zong, G. (2019). Exponential Stability of Discrete-Time Neural Networks With Large Delay. *IEEE transactions on cybernetics*.
- [Yao et al., 2013] Yao, J., Wang, W., & Zou, Y. (2013). The delay-range-dependent robust stability analysis for 2-D state-delayed systems with uncertainty. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 24(1), 87-103.
- [Ye et al., 2017] Ye, D., Su, L., Wang, J. L., & Pan, Y. N. (2017). Adaptive Reliable H_∞ Optimization Control for Linear Systems With Time-Varying Actuator Fault and Delays. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, 47(7), 1635-1643.
- [Yin et al., 2016] Yin, X., Zhang, L., Zhu, Y., Wang, C., and Li, Z. Robust control of networked systems with variable communication capabilities and application to a semi-active suspension system. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016 ; 21(4), 2097-2107.
- [Yin et al., 1989] Yin, X., Li, Z., Zhang, L., & Han, M. (2018). Distributed state estimation of sensor-network systems subject to Markovian channel switching with application to a chemical process. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, 48(6), 864-874.
- [Zamani et al., 2015] Zamani, I., & Shafiee, M. (2015). Stability analysis of uncertain switched singular time-delay systems with discrete and distributed delays. *Optimal Control Applications and Methods*, 36(1), 1-28.
- [Zames, 1981] Zames, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on automatic control*, 26(2), 301-320.
- [Zhou et al., 1988] Zhou, K., & Khargonekar, P. P. (1988). Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems & Control Letters*, 10(1), 17-20.
- [Zhang et al., 2001] Zhang, W., Branicky, M. S., & Phillips, S. M. (2001). Stability of networked control systems. *IEEE control systems magazine*, 21(1), 84-99.
- [Zhang et al., 2006] Zhang, L., Shi, P., Wang, C., & Gao, H. (2006). Robust H_∞ filtering for switched linear discrete-time systems with polytopic uncertainties. *International journal of adaptive control and signal processing*, 20(6), 291-304.
- [Zhang et al., 2015] Zhang, L., Ning, Z., & Wang, Z. (2015). Distributed filtering for fuzzy time-delay systems with packet dropouts and redundant channels. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, 46(4), 559-572.
- [Zhao et al., 2012] Zhao, L., Gao, H., & Karimi, H. R. (2012). Robust stability and stabilization of uncertain T-S fuzzy systems with time-varying delay : an input-output approach. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 21(5), 883-897.
- [Zoulagh et al., 2017] Zoulagh, T., El Aiss, H., Hmamed, A., & El Hajjaji, A. (2017). H_∞ filter design for discrete time-varying delay systems : three-term approximation approach. *IET Control Theory & Applications*, 12(2), 254-262.

Résumé

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse s'intéressent aux problèmes d'analyse de la stabilité et la synthèse des lois de commande H_∞ et des filtres H_∞ pour différentes classes des systèmes bidimensionnels (2-D), tels que les systèmes 2-D à retards, les systèmes 2-D avec incertitudes paramétriques, les systèmes 2-D commutés et les systèmes 2-D flous de type Takagi-Sugeno (T-S). Les contributions proposées portent sur le développement de nouveaux outils d'analyse et de synthèse, qui sont moins restrictifs par rapport aux résultats existants dans la littérature et permettent de réduire le conservatisme de celles-ci tout en garantissant que les méthodes proposées soient numériquement efficaces. Les critères de stabilité et de synthèse pour les différentes classes de systèmes 2-D sont formulés en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). Des exemples numériques et des comparaisons avec des résultats récents de la littérature sont également présentés afin de montrer les avantages et l'intérêt des méthodes proposées.

Mots-clés : Système 2-D, Retards ; Incertitudes, Systèmes commutés, Lyapunov, Stabilité, Commande H_∞ , Filtrage H_∞ , LMIs.

Abstract

The research works presented in this thesis focus on the problems of stability analysis control and filtering design for different classes of two-dimensional (2-D) systems, such as 2-D systems with delays, 2-D systems with parametric uncertainties, 2-D switched systems and 2-D Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems. The proposed contributions relate to the development of new analysis and design tools, which are less restrictive compared to the existing results in the literature and make it possible to reduce their conservatism while ensuring that the methods proposed are numerically effective. The stability and design criteria for the different classes of 2-D systems are formulated in terms of linear matrix inequalities (LMIs). Numerical examples and comparisons with recent results from the literature are also presented in order to show the advantages and the interest of the proposed methods.

Keywords : 2-D Systems, Delays, Uncertainties, Switched systems, Lyapunov, Stability, H_∞ control, H_∞ Filtering, LMIs.