



Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mahraz- Fès
Centre d'Etudes Doctorales
"Sciences et Technologies"

Formation Doctorale : STIC

Discipline : Physique

Spécialité : Génie électrique

Laboratoire : Electronique Signaux Systèmes et Informatique

THESE de DOCTORAT

Présentée par

El Aiss Hicham

Contribution à l'étude des systèmes à retard

Soutenue le 02/03/2018 devant le jury composé de :

Pr. EL Hajjaji Ahmed	Université de Picardie Jules Verne, Amiens-France	Président
Pr. BROURI Adil	Ecole National Supérieure des Arts et Métiers-Meknes	Rapporteur
Pr. ABOU Ahmed	Ecole Mohammadia d'ingénieurs -Rabat	Rapporteur
Pr. CHALH Zakaria	Ecole Nationale des Sciences appliquées-Fes	Rapporteur
Pr. TISSIR El Houssaine	Faculté des sciences Dhar El Mahrez-Fes	Membre
Pr. Benzaouia Abdellah	Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech	Membre
Pr. ALFIDI Mohammed	Ecole Nationale des Sciences appliquées-Fes	Membre
Pr. HMAMED Abdelaziz	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz de Fès	Professeur invité
Pr. BOUMHIDI Ismail	des Sciences Dhar El Mahraz de Fès	Directeur de thèse

Année universitaire : 2017-2018

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Abstract	iii
Notations	iv
Introduction Générale	1
1 État de l'Art	4
1.1 Introduction	4
1.2 Effets du retard sur la stabilité	4
1.3 Types des systèmes à retard	5
1.3.1 Système à retard discret	5
1.3.2 Système à retard distribué	5
1.3.3 Les Systèmes Neutres	6
1.4 Types des retards	6
1.4.1 Retards constants	6
1.4.2 Retards Variables	7
1.5 Notions générales de la stabilité des systèmes à retard	8
1.5.1 Théorème de Stabilité de Lyapunov-Krasovskii	9
1.5.2 Théorème de Stabilité de Lyapunov-Razumikhin	11
1.6 Stabilité indépendante/dépendante du retard	12
1.6.1 Notion de stabilité indépendante du retard	12
1.6.2 Notion de stabilité dépendante du retard	14
1.7 Les Transformations de Modèle	15

TABLE DES MATIÈRES

1.7.1	La Transformation de modèle de Newton-Leibniz	15
1.7.2	Transformation de modèle Descripteur	16
1.7.3	Transformation de Modèle de Newton-Leibniz Paramétré	17
1.7.4	D'autres Transformations de Modèle	17
1.8	Théorème de Petit Gain (Scaled Small-Gain Theorem).	17
1.9	Techniques d'analyse de Stabilité.	18
1.9.1	Inégalité de Park	19
1.9.2	Inégalité de Jensen	19
1.9.3	Inégalité de Wirtinger	21
1.9.4	Discrétisation du retard	22
1.10	Conclusion	23
2	Stabilité des Systèmes Neutres à retard : Approche de Discrétisation du retard	24
2.1	Introduction	24
2.2	Description du problème	25
2.3	Discrétisation du retard	26
2.4	Analyse de la Stabilité pour le <i>cas 1</i>	30
2.5	Analyse de la Stabilité pour le <i>cas 2</i>	35
2.6	Résultats de Simulation	37
2.7	Conclusion	41
3	Analyse de la stabilité des systèmes linéaires avec retard variable : une approche d'entrée-sortie	42
3.1	Introduction	42
3.2	Formulation de problème	43
3.3	Transformation de modèle	45
3.4	L'analyse de la Stabilité	47
3.5	Exemples Numériques	52
3.5.1	Conclusion	56
4	Analyse de la stabilité et la stabilisation des systèmes discrets avec retard variable : approximation à trois termes	58
4.1	Introduction	58
4.2	Formulation du Problème	59
4.3	Nouvelle approximation basée sur trois termes	61

4.4	Analyse de la stabilité	65
4.5	Conception du contrôleur	68
4.6	Exemples numériques	71
4.7	Conclusion	77
5	Amélioration de la performance H_∞ pour des systèmes linéaires à retard variable	78
5.1	Introduction	78
5.2	Formulation du problème	80
5.3	Nouveau modèle de transformation	81
5.4	Analyse de la stabilité	85
5.5	La Performance H_∞	90
5.6	Exemples numériques	92
5.7	Conclusion	96
	Conclusion Générale	97
5.8	D'autres travaux réalisés	98
5.9	Perspectives	99
	Bibliographie	100

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Electronique Signaux Systèmes et d'informatique au département de physique de la faculté des Sciences Dhar El Mahraz Fès, sous la direction de Monsieur le professeur **Abdelaziz HMAMED** et Monsieur le professeur **Ismail BOUMHIDI**. Je leur suis également reconnaissante pour sa disponibilité, ses qualités pédagogiques et scientifiques. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je leur adresse toute ma gratitude.

J'associe également à ces remerciements **Ahmed EL Hajjaji**, professeur de l'Université de Picardie Jules Verne, Région de Amiens, France, pour sa collaboration et son aide précieuse, pour tous les précieux conseils qu'il m'a donnés et pour la confiance qu'il m'a témoignée.

Je voudrais remercier les rapporteurs de cette thèse : Prs. Brouri Adil, Abbou Ahmed et Chalh Zakaria pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma thèse.

Je voudrais remercier les examinateurs de cette thèse : Prs. Tissir El Houssaine, Benzaouia Abdellah et Alfidi Mohammed pour toutes les précieuses remarques qu'il m'a donnés.

Je tiens à remercier tous mes camarades (les anciens et les jeunes) du laboratoire pour les conseils et la bonne humeur dans laquelle se sont déroulées ces cinq années.

Enfin je remercie les membres de ma famille (ma mère, mon père, mes frères et mes soeurs) pour leur soutien au cours de ces longues années d'études et sans lesquels je n'en serai pas là aujourd'hui.

Résumé

Ce mémoire est dédié à l'étude des systèmes à retard, à savoir : la stabilité des systèmes neutres avec des retards variables dans le temps, la stabilité avec la performance H_∞ des systèmes linéaires avec des retards variables dans le temps, la stabilité et la synthèse des lois de commandes stabilisantes pour des systèmes discrets et à états retardés. L'analyse est faite par une approche combinant les techniques LMIs (inégalités matricielles linéaires) et les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, et par l'approche du discrétisation des retards et l'approximation basée sur trois termes. On obtient des formulations convexes, sous la forme d'LMIs, suffisantes pour la solution des problèmes sélectionnés.

Dans la première partie, on obtient des conditions suffisantes de stabilité dépendantes du retard pour les systèmes neutres à base de l'approche de la discrétisation du retard.

Dans la deuxième partie, on obtient des conditions suffisantes de stabilité et nous synthétisons une loi de commande qui garantit la stabilisation des systèmes discrets à retard variable basée sur l'approximation à trois termes.

Dans la troisième partie, nous avons développé des conditions de stabilité garantissant la performance H_∞ pour les systèmes continus linéaires avec des retards variables dans le temps.

Les résultats obtenus sont moins conservatifs que ceux trouvés dans la littérature

Abstract

This thesis is dedicated to the study of delay systems, such as the stability of neutral systems with time-varying delays, the stability criteria and H_∞ performance of linear systems with time-varying delays, stability, and synthesis of stabilizing control laws for discrete-systems with delays. The analysis is made by an approach combining LMIs techniques (linear matrix inequalities) and functional Lyapunov-Krasovskii and by the delay-partitioning approach and the approximation based on three terms. Convex formulations, in the form of LMIs, are obtained which are sufficient for the solution of the selected problems.

In the first part, sufficient delay-dependent stability conditions are obtained for neutral systems based on the delay partitioning approach.

In the second part, we obtain sufficient stability conditions and we synthesize a control law that guarantees the stabilization of the discrete systems with variable delay based on the three-term approximation.

In the third part, stability conditions with H_∞ performance are derived for linear systems with time-varying delays.

The results obtained are less conservative than those in the literature.

Notations

- \mathbb{R} : L'ensemble des nombres réels.
- \mathbb{R}^n : L'espace Euclidien de dimension n .
- $\mathbb{R}^{n \times m}$: L'ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$.
- $I_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: La matrice identité.
- $0_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: La matrice de zéros.
- $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Des matrices constantes
- $M^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$: La transposée de $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$
- $P = P^T > 0$: Une matrice symétrique et définie positive.
- $X > Y (X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n})$: La matrice $X-Y$ est définie positive.
- $sym(M) = M + M^T$
- * : Les éléments ou blocs symétriques par rapport à la diagonale principale d'une matrice symétrique.
- $\rho(C)$: Rayon spectral de C .
- $|\mathbf{x}|$: Norme euclidienne (valeur absolue) d'un vecteur \mathbf{x} .
- $\|\mathbf{x}\|_2$: Norme 2 d'un vecteur \mathbf{x} .
- LMI(s) : Inégalité(s) Linéaire(s) Matricielle(s).
- $[a b]$: Intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
- h ; $h(t)$: Retard constant continue ; Retard variable continue.
- d ; $d(k)$: Retard constant discret ; Retard variable discret.
- h_1, d_1 : La borne inférieure du retard variable.
- h_2, d_2 : La borne supérieure du retard variable.
- $\mathbf{x}(t)$: Vecteur d'état du système continue.
- $\mathbf{x}(k)$: Vecteur d'état du système discret.
- $\|\phi\|_c$: Représente $\sup_{-\tau \leq t \leq 0} \|\phi\|$, ou $\|\phi\|$ est la norme 2 de ϕ .
- $\mathcal{C}_\tau = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$: L'espace de Banach des fonctions vectorielle qui définies sur $[-\tau, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , muni de la topologie de la convergence uniforme.

Introduction Générale

Le début du vingtième siècle a connu la naissance de grandes études concernant les systèmes à retard qui ont aboutit à de nombreux résultats importants. Un regard sommaire sur le grand nombre d'articles publiés dans des conférences internationales, les ateliers organisés et les revues d'archives laissent une forte impression de ce progrès. L'étude des systèmes à retard a motivé de nombreux chercheurs. Cette étude permet l'analyse et la commande des systèmes pour lesquels la représentation d'état usuelle n'est pas satisfaisante. Parmi ces recherches : la stabilité des systèmes linéaires à retard [19, 136, 63] et [60], la stabilisation des systèmes neutres à retard [67, 108, 98], le filtrage du système à retard [160, 159],...etc.

Ce qui définit un système à retard est la caractéristique de l'évolution future du système qui dépend non seulement de son état actuel, mais aussi de son état passé. Le retard apparaît souvent dans de nombreux systèmes réels d'ingénierie soit dans l'état, l'entrée du contrôle, soit dans les mesures. Les retards sont fortement impliqués dans les domaines difficiles de la communication et des technologies de l'information : dans la stabilisation des systèmes de réseaux contrôlés et dans les réseaux de communication à grande vitesse. Ces systèmes de retard ont été étudiés longtemps, eh bien ! l'étude des systèmes à retard a été une région active de la recherche scientifique dans les mathématiques, la biologie, l'écologie, l'économie et dans l'ingénierie.

La présence des retards dans les systèmes réels peut avoir une influence considérable sur le comportement d'un tel système, car sa présence peut dégrader la performance, induire des oscillations et des instabilités. Par contre, dans certains systèmes, la présence des retards peut avoir un effet stabilisateur. Les problèmes de l'instabilité et la dégradation de la performance font l'objet de plusieurs recherches, parmi-elles, la stabilité et la stabilisation de plusieurs types de systèmes à retard continus ou discrets (neutres, flous,...). Cela introduit une importance théorique et pratique de l'analyse de la stabilité et

la robustesse des systèmes à retard. Plusieurs méthodes et techniques ont été développées pour étudier ces systèmes, la plus célèbre est la méthode basée sur les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii à base de la technique d'inégalité matricielle linéaire (LMI).

Comme dans les systèmes sans retard, la méthode efficace pour l'analyse de la stabilité des systèmes à retard est la méthode de Lyapunov. Pour les systèmes à retard, il existe deux méthodes principales de Lyapunov : la méthode de Krasovskii (1956) et la méthode de Razumikhin (1956). La méthode de Krasovskii s'applique à une plus large gamme de problèmes et conduit à des résultats moins conservatifs que la méthode de Razumikhin. Le critère de stabilité de Lyapunov pour les systèmes linéaires sans retard peut être formulé en terme d'inégalité matricielle linéaire (LMI). Une inégalité matricielle linéaire (LMI) peut être considérée comme un problème d'optimisation convexe. Le développement des algorithmes d'optimisation convexes est efficace, notamment celui des algorithmes des points intérieurs peut conduire à la formulation de nombreux problèmes de contrôle et leurs solutions sous forme de LMI [135]. En particulier, il y a eu une forte recrudescence des activités de recherche et une grande diffusion de nouvelles techniques et résultats. Cependant, nous présentons quelques notions telles que la stabilité robuste, la stabilité quadratique, le théorème de petit gain et la valeur de singularité.

Notre but dans cette thèse est de donner un survol de l'étude des systèmes à retard, les techniques et les outils développés selon les tendances récentes. Nous avons traité les problèmes de stabilité des systèmes neutres avec retard variable et constant et les problèmes de stabilité des systèmes continus avec retard variable. Ensuite, nous avons examiné le problème de stabilité et stabilisation par une commande de retour d'état pour les systèmes discrets. Enfin, une étude sur la stabilité des systèmes continus garantissant la performance H_∞ a été réalisée. Par la suite, nous présentons un bref résumé de chaque chapitre. Cela permet de donner aux lecteurs un aperçu sur les travaux effectués.

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique sur les systèmes à retard, les notions, les définitions, les techniques et les méthodes développées pour résoudre les problèmes liés aux systèmes à retard. Nous nous intéresserons à la notion de stabilité et pour cela nous avons rappelé quelques concepts théoriques, tels que la méthode de Lyapunov soit Krasovskii ou Razumikhin. Par la suite, nous rappellerons quelques techniques largement utilisées dans l'analyse des systèmes à retard, telles que, les techniques de majoration et les transformations de modèle.

Dans le deuxième chapitre, nous développerons une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii combinée avec la méthode de discrétisation de retard dont le but est de traiter la stabilité des systèmes neutres avec retard variable et constant.

Le troisième chapitre s'appuie sur la méthode d'entrée-sortie à base de la transformation de modèle de deux termes pour proposer une solution aux problèmes de la stabilité des systèmes continus à retard variable. L'application de cette méthode implique la satisfaction des conditions introduites.

Dans le quatrième et cinquième chapitre, nous développerons une nouvelle transformation de modèle basé sur trois termes. Nous appliquerons cette nouvelle méthode dans le quatrième chapitre pour traiter le problème de la stabilité et la stabilisation des systèmes discrets à retard variable. Nous essaierons à résoudre le problème de la stabilité à l'aide d'une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov Krasovskii. Pour le problème de la stabilisation nous ferons appel à l'approche de cône pour concevoir une loi de commande de retour d'état. Nous traiterons dans le cinquième chapitre le problème de la stabilité en garantissant la performance H_∞ pour les systèmes continus à retard variable à l'aide d'une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii combinée avec la nouvelle transformation de modèle développée.

À la fin de cette thèse, nous présenterons un résumé de différents points traités et nous essaierons de dégager quelques trajectoires ouvertes pour des travaux futurs.

Chapitre 1

État de l'Art

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les principales notions concernant les systèmes à retard. Les retards peuvent être classés également dans différentes catégories en fonction de leur nature et de la manière dont ils agissent sur le système. En effet, l'étude des phénomènes de transport et de propagation (de matière, d'énergie ou d'information,...), ainsi que l'analyse du comportement de beaucoup de processus rencontrés en physique, mécanique, économie, chimie, biologie, ... etc, montre que, de nombreux systèmes dynamiques ne peuvent pas être correctement modélisés par un système ordinaire, l'évolution des variables d'état $x(t)$ ne dépend pas seulement de son état présent $x(t)$, mais aussi de leurs valeurs passées $x(\xi)$ avec $t_0 - h \leq \xi \leq t_0$ et h c'est le retard, un tel système est appelé un système à retard. Alors que, plusieurs exemples réels sont donnés pour démontrer l'utilité et l'importance des systèmes à retard en sciences et en ingénierie.

1.2 Effets du retard sur la stabilité

D'une part, les retards sont connus pour avoir divers effets sur la stabilité : ils peuvent être une source d'instabilité .

Le système suivant [38]

$$\dot{x}(t) = -x(t - h)$$

est asymptotiquement stable (c-à-d; $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$) pour $h \in [0, \pi/2]$ et devient instable pour $h > \pi/2$.

Des retards peuvent également avoir un effet stabilisateur. Par exemple le système suivant

$$\ddot{y}(t) + y(t) - y(t - h) = 0$$

est instable quand h prend la valeur 0. Mais devient asymptotiquement stable pour $h = 1$. Ceci montre l'effet stabilisateur du retard dans quelques systèmes.

Par conséquent, l'étude de la stabilité et la performance des systèmes avec retard a une importance théorique et pratique.

1.3 Types des systèmes à retard

Suivant la dénomination introduite dans [139], différents types des systèmes à retard peuvent être définis. Parmi ces types, nous trouvons, les systèmes avec retard discrets, les systèmes avec retard distribué et les systèmes à retard de type neutre.

1.3.1 Système à retard discret

Les systèmes avec retard discret, sont des systèmes où les signaux retardés sont décalés ponctuellement dans le temps voir par exemple [139, 53, 132, 92] et [143, 109, 107]. De nombreux processus et problèmes d'ingénierie sont décrits par les systèmes à retard discret, tels que contrôle des systèmes réseaux [43, 62], les réseaux de communication [84, 47, 30, 27], L'épidémiologie [77, 76], dans la Biologie [33, 103], Contrôle du débit d'eau [83], etc.

1.3.2 Système à retard distribué

Les systèmes avec des retards distribués sont des systèmes qui possèdent des retards continus [132, 53, 139, 92] et [143, 109, 107]. Les systèmes distribués sont représentés sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_{-h_x}^0 A_h(\theta)x(t + \theta)d\theta + Bu(t) + \int_{-h_u}^0 B_h(\theta)u(t + \theta)d\theta \quad (1.1)$$

Où x et u sont l'état et l'entrée du système, respectivement. D'après l'équation du système (1.1), nous voyons que la valeur passée de l'état influence l'évolution du système par

une somme pondérée et continue (Une partie intégrante). Des systèmes à retard distribué apparaissent dans les systèmes de combustion des roquettes [96, 163], épidémiologie [29], modèle et contrôle de la circulation [144], la biologie [134, 69].

1.3.3 Les Systèmes Neutres

Les systèmes neutres sont des systèmes où le retard agit sur la dérivée (voir [132, 53, 139]). Un exemple simple est donné par :

$$\dot{x}(t) - F\dot{x}(t - h) = Ax(t) \quad (1.2)$$

Ce type de systèmes présente généralement un comportement plus compliqué que les autres systèmes à retard. Même si les systèmes avec des retards distribués et discrets ne peuvent avoir qu'un nombre fini de racines instables. Les systèmes neutres peuvent les avoir en nombre infini.

Les systèmes à retard neutre se présentent par exemple dans la modélisation de lignes de transport sans perte [140], systèmes de combustion [123], circuits équivalents d'éléments partiels [10], régimes de mise en oeuvre de contrôleurs prédictifs [94], systèmes de contrôle avec retard et dérivée Rétroaction [137], équations différentielles partielles avec retards contrôlés par des limites [145], systèmes écologiques [45, 86, 44], la dynamique de la population [86, 158] et les modèles épidémiologiques [74, 28]

1.4 Types des retards

Selon leur comportement et leur dépendance, les retards peuvent être affectés à différentes familles, et des approches spécifiques sont habituellement nécessaires pour analyser le système dans lequel ils sont impliqués.

1.4.1 Retards constants

Les retards constants appartiennent à la première classe des retards qui ont été pris en considération. Les raisons de cela c'est que son analyse était plus facile et aucune motivation réelle pour considérer une classe plus générale de ce type de retard. Les systèmes linéaires avec des retards constants bénéficient d'une théorie très riche et complète basée sur de nombreux outils différents, tant dans les domaines de la fréquence que du

temps. Plus important encore, les systèmes linéaires avec des retards constants font partie de quelques systèmes auxquels il existe des conditions constructives nécessaires et suffisantes pour caractériser leur stabilité.

Quelques exemples des systèmes à retard constant sont donnés dans [126, 46, 128].

1.4.2 Retards Variables

Des retards variables dans le temps sont plus dommageables à la stabilité que les retards invariables dans le temps. En effet, il est possible de trouver des systèmes qui sont stables pour les retards constants mais devenir instable lorsque le retard commence à être variable dans le temps. Notamment, lorsqu'un système linéaire invariant dans le temps avec un retard constant est asymptotiquement stable jusqu'à un retard h , il est presque tout à fait asymptotiquement stable jusqu'à un retard inférieur à h . Lorsque le retard devient variable dans le temps. Le taux de variation du retard joue effectivement un rôle important en réduisant la valeur de retard admissible maximale : plus le retard est rapide, plus le retard est dommageable. Là encore, le cas des retards variables a fait l'objet de nombreuses recherches [4, 48, 138] et [148]. Différents types de retard variable ont été considérés par plusieurs chercheurs, par exemple :

Retards variables majorés Sont définis par l'existence d'un réel connu $h > 0$ tel que :

$$0 \leq h(t) \leq h$$

Retards variables bornés : Cette dernière catégorie suppose que le retard vérifie la contrainte

$$h_1 \leq h(t) \leq h_2$$

Le fait d'autoriser le retard à prendre la valeur 0 (le cas précédent) est dû à des phénomènes de transfert d'informations ou de matières. $h_1 = 0$ indique qu'à un moment ce transfert se fait de manière instantanée. Ce cas de retard a été largement considéré dans la littérature.

Dans le cas des retards variables, une contrainte supplémentaire relative à sa dérivée peut être ajoutée

$$\dot{h}(t) \leq \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}_+$$

Cette contrainte revient à donner des informations sur la vitesse de variation du retard $h(t)$. En pratique, la contrainte $\mu \leq 1$ est souvent utilisée afin d'assurer que le retard ne

varie pas plus rapidement que le temps et que les informations retardées arrivent dans l'ordre chronologique.

1.5 Notions générales de la stabilité des systèmes à retard

L'analyse des systèmes à retard est un domaine bien développé qui rassemble un grand nombre de techniques différentes. Ces méthodes peuvent être classées soit des techniques dans le domaine fréquentiel ou dans le domaine temporel.

Les approches dans le domaine fréquentiel sont principalement consacrées à des systèmes linéaires invariants dans le temps, mais dans certaines circonstances, il est possible de les adapter pour traiter les cas des retards variables en utilisant, par exemple, des transformations de modèles.

Les approches dans le domaine temporel peuvent cependant être appliquées à n'importe quel type de système : linéaire ou non linéaire, avec des retards constants ou variables dans le temps, etc.

Dans ce paragraphe, des énoncés généraux sur les systèmes à retard sont fournis. considérons le système à retard suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= g(t, x_t), \quad t \geq t_0 \\ x(t_0 + s) &= \psi(s), \quad s \in [-h, 0] \end{aligned} \tag{1.3}$$

Avec $h > 0$ est le retard, $\psi \in \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ est la fonction des conditions initiales. L'état du système est défini par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta)$$

Nous supposons que le système (1.3) a une solution unique. Dans ce qui suit, nous désignons $x_t(t_0, \psi)$ la valeur d'état à l'instant t avec la condition initiale $x_{t_0} = \psi$. Nous supposons enfin que le système (1.3) admet la solution $x(t) = 0$, c'est-à-dire $g(t, 0) = 0$.

Définition 1.5.1 (norme uniforme)[25] : considérons $\phi \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$, alors la norme uniforme de ϕ est définie comme suit :

$$\|\phi\|_c = \max_{s \in [a, b]} \|\phi(s)\| \tag{1.4}$$

Définition 1.5.2 [25] : Considérons le système à retard (1.3). On dit que la solution nulle est *Stable*

Si pour tout $t_0 \geq 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$, tel que

$$\|x(t_0)\|_c \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \varepsilon \quad (1.5)$$

pour tout $t \geq t_0$

Attractive : si pour tout $t_0 \geq 0$ Et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_a = \delta_a(t_0, \varepsilon)$, tel que

$$\|x(t_0)\|_c \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad (1.6)$$

Asymptotiquement stable : (Au sens de Lyapunov) si elle est stable et attractive.

Exponentiellement stable : s'il existe $\delta, \alpha > 0$ et $\beta \geq 1$, tel que

$$\|x(t_0)\|_c \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta \exp^{-\alpha t} \|x_0\| \quad (1.7)$$

pour tout $t \geq 0$

Instable : S'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.

1.5.1 Théorème de Stabilité de Lyapunov-Krasovskii

Supposons la fonction

$$g : \mathbb{R}_{\geq t_0} \times C([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dans (1.3) de $\mathbb{R}_{\geq t_0} \times$ (ensemble Borné $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$) vers \mathbb{R}^n , et $u, v, \omega : \mathbb{R}_{\geq t_0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sont des fonctions continues croissantes, $u(s)$ et $v(s)$ sont positives pour $s > 0$ et $u(s) = v(s) = 0$

Supposons qu'il existe une fonction dérivable continue

$$V : \mathbb{R} \times C([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$u(\|\psi(0)\|) \leq V(t, \psi) \leq v(\|\psi\|_c) \quad (1.8)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \psi) &:= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} [V(t + \epsilon, x_{t+\epsilon}(t, \psi)) - V(t, \psi)] \\ &\leq -\omega(\|\psi(0)\|) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Si $\omega(s) > 0$ pour tout $s > 0$, alors la solution nulle de (1.3) est uniformément asymptotiquement stable

Preuve 1.5.1 :

La preuve de ce résultat peut être trouvée, par exemple, dans [92, 11]. \square

Remarque 1.5.1 *Lorsque la fonction V est choisie de telle sorte qu'elle représente l'état x_t à tout moment t , c'est-à-dire qu'elle satisfait la condition (1.8), \dot{V} indique que x_t ne se développe pas avec t , ce qui signifie que le système considéré est stable. Pour bien éclaircir l'idée aux lecteurs, un exemple illustratif simple est donné ci-dessous.*

Exemple 1.5.1 *:[25] Considérons le système suivant :*

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bx(t-h) \quad (1.10)$$

Avec $a > 0$ et h est le retard. La fonction du Lyapunov-Krasovskii

$$V(x_t) = x(t)^2 + q \int_{t-h}^t x(s)^2 ds, \quad q > 0 \quad (1.11)$$

satisfait l'équation (1.8) avec $u(s) = s^2$ et $v(s) = (1 + qh)s^2$.

La dérivée de $V(x_t)$ le long des trajectoires du système (1.10) est donnée par

$$\dot{V}(x_t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2a + q & b \\ b & -q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Donc le système est asymptotiquement stable si

$$\begin{bmatrix} -2a + q & b \\ b & -q \end{bmatrix} < 0$$

Ou bien, si l'inégalité $-2a + q + q^{-1}b^2 < 0$ est vérifiée. Dans ce cas, la fonction ω peut être choisie comme $\omega(s) = \epsilon s^2$, Pour certains petits $\epsilon > 0$

On peut voir que chaque $q > 0$ définit une région de stabilité dans le plan (a, b) qui est donné par

$$\frac{q + q^{-1}b^2}{2} < a \quad (1.13)$$

Pour avoir une région maximale de la stabilité, il faut minimiser $\frac{q + q^{-1}b^2}{2}$. Un calcul simple montre que le minimum est atteint pour $q = b$, qui produit une région maxi-

male de la stabilité donnée par $a > 0$ et $a > b$.

Pour n'importe quelle valeur du retard h dans $[0, \infty)$, on peut effectivement vérifier cette région de stabilité.

1.5.2 Théorème de Stabilité de Lyapunov-Razumikhin

Le Théorème suivant montre qu'il est inutile de vérifier que $\dot{V}(x(t)) < 0$ le long de toutes les trajectoires du système. Effectivement, ce test peut se restreindre aux solutions qui ont tendance à quitter un voisinage de $V(t, x(t)) < c$ du point d'équilibre.

Supposons la fonction

$$g : \mathbb{R}_{\geq t_0} \times C([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dans (1.3) qui lie $\mathbb{R}_{\geq t_0} \times$ (ensembles Borné $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$) par un ensemble Borné dans \mathbb{R}^n , et $u, v, \omega : \mathbb{R}_{\geq t_0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sont des fonctions continues croissantes, $u(s)$ et $v(s)$ sont positive pour $s > 0$ et $u(s) = v(s) = 0$, ω une fonction strictement croissante.

Supposons qu'il existe une fonction dérivable continue

$$V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \tag{1.14}$$

Vérifier

$$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|), \text{ pour tout } t > t_0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \tag{1.15}$$

Pour tout $\theta \in [-h, 0]$. Alors

★ le système (1.3) est uniformément stable.

Si la dérivée de V le long de la solution du système (1.3) satisfait

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -\omega(\|x(t)\|) \text{ quelque soit } V(t + \theta, x_{t+\theta}) \leq V(t, x(t)) \tag{1.16}$$

★ le système (1.3) est uniformément asymptotiquement stable.

Si, $\omega(s) > 0$, pour tout $s > 0$ et qu'il existe une fonction continue croissante $p(s) > s$ pour tout $s > 0$ tel que la condition (1.16) est remplacée par

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -\omega(\|x(t)\|) \text{ quelque soit } V(t + \theta, x_{t+\theta}) \leq p(V(t, x(t)))$$

★ le système (1.3) est globalement uniformément asymptotiquement stable.

Si $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = +\infty$.

Preuve 1.5.2 :

La preuve peut être trouvée, par exemple, dans [92, 12].□

Exemple 1.5.2 : *Considérons le système (1.10).*

La fonction de Lyapunov-Razumikhin satisfait (1.15) est donnée par l'équation suivante $V(x) = x^2/2$ avec $u(s) = v(s) = s^2/2$. La dérivée de $V(x)$ le long de la solution du système (1.10) est donnée par

$$\dot{V}(x) = -ax(t)^2 + bx(t)x(t-h) \tag{1.17}$$

Selon le théorème de Lyapunov-Razumikhin, nous demandons simplement que la dérivée soit négative chaque fois que $V(x(t-h)) \leq p^2V(x(t))$ pour $p > 1$. Cela équivaut à la condition $|x(t-h)| < p|x(t)|$. Nous obtenons la condition

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq -ax(t)^2 + |b| |x(t)| |x(t-h)| \\ &\leq (-a + |b|p)x(t)^2 < 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Notant que si $-a + |b|p < 0$ pour $p = 1$, alors pour $p > 1$ petit, nous obtenons une région de stabilité définie par $a > 0$ et $|b| < a$, qui s'assure être identique à celui obtenu avec le Théorème de Lyapunov-Krasovskii dans l'exemple (1.5.1)

1.6 Stabilité indépendante/dépendante du retard

Les conditions de stabilité obtenues dans les exemples (1.5.1) et (1.5.2) ne dépendent pas de la valeur du retard, alors que d'autres exemples caractérisent essentiellement la stabilité des systèmes pour un retard donné $h > 0$. Cela indique que deux types de résultats de stabilité peuvent être distingués selon leur dépendance de la valeur de retard. Cela conduit aux concepts de stabilité indépendantes, dépendantes du retard.

1.6.1 Notion de stabilité indépendante du retard

La stabilité indépendante du retard, telle qu'elle est présentée dans [25], est définie comme suit :

Définition : [25] Un système à retard est stable indépendamment du retard si la stabilité ne dépend pas de la valeur du retard, c'est-à-dire si le système est stable pour toute valeur du retard dans $[0, \infty]$.

La définition ci-dessus s'étend immédiatement aux systèmes avec des retards multiples et des retards variables dans le temps. Ce concept de stabilité est assez fort car les retards ne doivent avoir aucun impact sur la stabilité. Cela impose des contraintes sur la structure du système. Cependant, il est très intéressant de souligner l'importance particulière des résultats de stabilité indépendante du retard. En effet, les résultats de la stabilisation ou d'observation indépendants du retard présentent un grand intérêt en ce qui concerne toute perturbation du retard.

Exemple 1.6.1 [25] : *Considérons le système linéaire avec retard constant*

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A_d} x(t-h) \quad (1.19)$$

Des conditions nécessaires et suffisantes [25] pour que le système (1.19) soit stable indépendamment du retard sont données par :

- (a) : *A est (Hurwitz)*
- (b) : $\rho(A^{-1}A_d) < 1$
- (c) : $\rho((j\omega - A)^{-1}A_d) < 1$ pour tout $\omega > 0$.

Les conditions (a), (b) et (c) sont vérifiées dans cet exemple

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \{-5, -5\} \\ \rho(A^{-1}A_d) &= \frac{\sqrt{2}}{5} \\ \rho((j\omega - A)^{-1}A_d) &< 0.31, \text{ pour tout } \omega > 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Donc, le système est stable indépendamment du retard.

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes pour tester la stabilité du systèmes à retard. Pour citer quelques-uns : tests de stabilité 2-D, méthodes de pseudo-delay, méthodes fréquentielles, méthodes de Lyapunov, méthodes géométriques algébriques, etc. Pour plus de détail, voir par exemple [143, 132, 124] et [92].

1.6.2 Notion de stabilité dépendante du retard

Contrairement à la stabilité indépendante du retard, la stabilité dépendante du retard est une notion de stabilité qui est réellement sensible aux variations des valeurs de retard. C'est certainement la notion de stabilité la plus réaliste, car les retards ont une influence sur la stabilité des systèmes réels.

Définition 1.6.1 : [25] *Un système à retard est stable dépendamment du retard s'il existe un intervalle $\mathbf{I} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour lequel le système est stable pour tout retard dans \mathbf{I} et instable par ailleurs.*

Exemple 1.6.2 : [25] *Considérons le système linéaire avec retard constant*

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A_d} x(t-h)$$

D'après les conditions données dans l'exemple (1.6.1), la condition $\varrho(A^{-1}A_d) < 1$ est nécessaire pour une stabilité indépendante du retard. Dans notre cas, nous avons $\varrho(A^{-1}A_d) = \frac{10}{9} > 1$, et donc le système n'est pas stable indépendamment du retard. Une analyse dans le domaine fréquentiel (voir [25]) nous permet de prouver que le système est dépendant du retard pour tout $h \in \mathbf{I} := [0, \bar{h})$ avec

$$\bar{h} = \frac{1}{\sqrt{0.19}} [\pi - \arctan(\frac{\sqrt{0.19}}{0.9})] \simeq 6.1726 \quad (1.21)$$

Dans le cas où $h = \bar{h}$, l'équation caractéristique du système a des zéros sur l'axe imaginaire et le système n'est pas asymptotiquement stable.

Lorsque le système admet un intervalle de stabilité au retard de la forme $\mathbf{I} = [h_1, h_2]$ avec $0 < h_1 < h_2$, la plage de stabilité de retard est souvent utilisée.

Exemple 1.6.3 : *Considérons le système linéaire avec retard constant*

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_d} x(t-h)$$

Nous analysons l'exemple (1.6.3) en utilisant des outils des systèmes à retard pour extraire l'effet de h sur la stabilité du système à retard.

Tout d'abord, notons que ce système n'est pas stable pour $h = 0$ puisque la matrice $A + A_d$ n'est pas Hurwitz.

Un critère dépendant de la fréquence semblable à celui utilisé dans les exemples précédents (Exemple 1.6.2) nous permet de conclure que le système est stable pour tout $h \in \mathbf{I} = [h_1, h_2]$.

1.7 Les Transformations de Modèle

La transformation de modèle est une procédure introduite assez tôt dans l'analyse des systèmes à retard. L'idée principale des transformations du modèle est de transformer un système à retard en un autre système, appelé système de comparaison ou modèle de comparaison, qui peut ou non être un système à retard. Ensuite, des outils d'analyse sont appliqués au système de comparaison afin de tirer des conclusions sur la stabilité du système à retard d'origine. Les modèles de comparaison peuvent prendre différentes formes : des systèmes linéaires incertain de dimension finie [92, 59, 58, 102, 20, 21], systèmes à retard [92, 39], ou même des systèmes linéaires incertains à paramètres variables (LPV) [31, 28].

L'objectif des transformations de modèle est de simplifier l'analyse des systèmes à retard. Les désavantages de cette transformation est que le système de comparaison peut présenter une dynamique supplémentaire conduisant à une perte possible d'équivalence, en termes de stabilité, entre l'original et le système de comparaison. La stabilité du système d'origine ne peut être déduite du modèle de comparaison. Étant donné que de nombreuses procédures de transformation de modèles ont été proposées dans la littérature, il est difficile de donner une image complète ici.

1.7.1 La Transformation de modèle de Newton-Leibniz

La transformation du modèle Newton-Leibniz est basée sur l'équation suivante

$$x(t - h) = x(t) - \int_{t-h}^t \dot{x}(s) ds \quad (1.22)$$

Cette équation est certainement la première transformation du modèle qui a été introduite pour l'analyse des systèmes à retard (1.23) [91, 52].

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0] \end{cases} \quad (1.23)$$

Cette transformation du modèle nous permet de remplacer le terme retardé $x(t-h)$ dans le système (1.23) par le côté droit de l'équation (1.22) pour produire le système suivant

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-h}^t \dot{x}(s) ds \quad (1.24)$$

Nous observons dans l'équation (1.24) que le système transformé est formé de l'état présent $x(t)$ et l'intégral de la variation d'état $\dot{x}(s)$. Si nous remplaçons $\dot{x}(s)$ par sa valeur (1.23), nous retrouvons le système de comparaison suivant

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-h}^t [Ax(s) + A_d x(s-h)] ds \quad (1.25)$$

Notez que, contrairement au système (1.23), le système (1.25) nécessite une condition initiale dans $\mathcal{C}([-2h, 0], \mathbb{R}^n)$ à cause du retard dans l'intégrale terme. Le système (1.25) peut maintenant être analysé à l'aide des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, des fonctions de Lyapunov-Razumikhin ou d'autres techniques d'analyse.

1.7.2 Transformation de modèle Descripteur

La transformation du modèle descripteur introduite dans [39, 37], donne le modèle de comparaison suivant :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A + A_d & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \int_{t-h}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} ds \quad (1.26)$$

Avec $y(t) = \dot{x}(t)$. Des calculs simples montrent que le système (1.23) est récupéré après élimination de la variable $y(t)$ dans le modèle (1.26).

1.7.3 Transformation de Modèle de Newton-Leibniz Paramétré

Cette transformation de modèle [131, 133] généralise la transformation du modèle Newton-Leibniz en introduisant un paramètre libre $C \in \mathbb{R}^n$ sous la forme suivante :

$$Cx(t-h) = Cx(t) - C \int_{t-h}^t \dot{x}(s) ds \quad (1.27)$$

Le modèle de comparaison correspondant est donné dans ce cas par le système à retard suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + C)x(t) + (A_d - C)x(t-h) - C \int_{t-h}^t \dot{x}(s) ds \\ &= (A + C)x(t) + (A_d - C)x(t-h) - C \int_{t-h}^t [Ax(s) + A_dx(s-h)] ds \end{aligned} \quad (1.28)$$

Quand $C = 0$ le système (1.23) est récupéré et quand $C = A_d$ on retrouve le système (1.24) obtenu à partir de la transformation du modèle Newton-Leibniz. Cette transformation de modèle définit une famille continue de systèmes de comparaison comprenant les systèmes (1.23) et (1.24).

1.7.4 D'autres Transformations de Modèle

D'autres types de transformations de modèles ont été présentés dans la littérature. Par exemple, approximations de Padé sont considérés dans [102, 20, 21], les transformations de modèle au moyen des opérateurs sont annoncées dans [49, 50, 22, 161, 162], alors que les transformations de modèle du deuxième ordre sont discutées dans [132, 92].

1.8 Théorème de Petit Gain (Scaled Small-Gain Theorem).

Les approches d'entrée/sortie s'appuient sur les procédures de transformation de modèle et comme nous verrons plus tard, ces transformations de modèle sont généralement formulées en termes d'interconnexions d'opérateurs. Ces transformations de modèle basées sur les interconnexions d'opérateurs peuvent être beaucoup plus avancées et exactes que ceux généralement utilisées dans les approches basées sur les fonctions de Lyapunov (même si elles peuvent être adaptées). À l'aide de ces transformations de modèle, le sys-

tème à retard original est réécrit comme un système incertain qui peut impliquer ou non des retards et les opérateurs sont considérés comme des incertitudes. L'interconnexion résultante est analysée en utilisant des techniques d'analyse d'entrée/sortie, telles que les résultats de petit gain.

Par conséquent, le Théorème de petit gain fournit une condition suffisante qui teste la stabilité des interconnexions de rétroaction. Il faut noter que, dans sa généralité complète, et en fonction des modifications appropriées, le théorème de petit gain est applicable dans un sens beaucoup plus large. En particulier, le domaine d'application du théorème de petit gain permet d'étudier des systèmes avec retard constant et peut être appliqué à des systèmes contenant des retards variables.

Le théorème de petit gain a joué un rôle important dans le contrôle robuste des systèmes linéaires incertains. Dans l'analyse de stabilité robuste, on caractérise l'incertitude d'un système par des perturbations déterministes, inconnues mais limitées à ses paramètres. Considérons le système de rétroaction linéaire donné par les équations suivantes :

$$y = \mathbf{G}u \quad (1.29)$$

$$u = \Delta y \quad (1.30)$$

Une conclusion importante dans la théorie de la stabilité des entrées-sorties est le théorème de petit gain, qui indique que la rétroaction combinée du système (\mathbf{G}, Δ) est stable si \mathbf{G} et Δ sont stables et satisfaisants

$$\|\mathbf{G}\|_{\infty} \|\Delta\|_{\infty} < 1 \quad (1.31)$$

La condition (1.31) est connue sous le nom de condition de petit gain.

1.9 Techniques d'analyse de Stabilité.

Des méthodes diverses sont fournies dans la littérature pour évaluer la stabilité des systèmes à retard utilisant des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. Parmi eux, l'un des termes les plus importants introduits dans plusieurs fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii

$$V(x(t)) = \int_{t-h}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds d\theta \quad (1.32)$$

Avec x représente l'état du système à retard, $R > 0$ et $h > 0$. La dérivée de ce terme par rapport au temps t , est donnée par

$$\dot{V}(x(t)) = h\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \quad (1.33)$$

Le problème principal lié à (1.33) est que l'intégrale n'est pas appropriée au processus d'inégalité matricielle linéaire (LMI). Il consiste à transformer l'expression précédente en une forme appropriée pour dériver une formulation des conditions d'inégalité matricielle linéaire de stabilité. Dans ce qui suit, nous essayons de présenter différentes bornes fournies par plusieurs auteurs au terme intégral de la forme $\int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds$.

1.9.1 Inégalité de Park

L'idée clé derrière l'inégalité de Park sur les termes croisés [117, 115] est de limiter l'augmentation du conservatisme en bornant des termes croisés tels que $\int_{\Omega} b^T(s)a(s)ds$ en proposant une liaison plus précise. Cette borne est indiquée dans le résultat suivant :

Lemme 1.9.1 [115] : *Nous supposons que $a, b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions vectorielles. Alors, pour toutes matrices $X \in \mathbb{R}_{>0}^n$ et $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, l'inégalité suivante est vérifiée*

$$-2 \int_{\Omega} b^T(s)a(s)ds \leq \int_{\Omega} \begin{bmatrix} a(s) \\ b(s) \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} a(s) \\ b(s) \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

avec

$$\Xi = \begin{bmatrix} X & XM \\ * & (M^T X + I)X^{-1}(XM + I) \end{bmatrix}$$

Bien que cette technique nous permet de réduire le conservatisme en bornant les termes croisés avec plus de précision, elle est encore limitée par l'utilisation de la transformation du modèle de Newton-Leibniz et Newton-Leibniz Paramétré. En plus, il est important de mentionner que la complexité du résultat qui fournit l'inégalité de Park n'est pas optimale.

1.9.2 Inégalité de Jensen

L'utilisation de l'inégalité de Jensen dans les systèmes à retard a été localisée dans [90] et a été prouvée très utile depuis lors. Le résultat de Jensen a trouvé de nombreuses applications en physique statistique : théorie de l'information, statistique et en théorie des

probabilités et dans d'autres domaines. Dans les systèmes et la théorie du contrôle, cette inégalité peut être utilisée pour fournir des bornes de certains intégrales termes présents dans les fonctionnelles de Lyapunov pour les systèmes à retard [122], systèmes de données échantillonnées [6, 7], et systèmes impulsifs [26]. L'idée clé derrière l'inégalité de Jensen c'est de borner le terme quadratique $\int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds$ au lieu du terme croisé. Pour faciliter la discussion, nous donnons l'inégalité de Jensen.

Lemme 1.9.2 [90] : *Pour toute matrice symétrique et positive R , h scalaire positif, et la fonction de vecteur $x(\cdot) : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$. L'inégalité intégrale suivante est vérifiée :*

$$-h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R & R \\ R & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Le bénéfice de l'inégalité de Jensen c'est qu'elle contient moins de variables de décision et n'introduit aucune matrice libre supplémentaire par rapport à l'inégalité de Jensen étendue.

Inégalité de Jensen Etendue

L'inégalité de Jensen est étendue à une forme généralisée comme suit.

Lemme 1.9.3 [149] : *Pour toute matrice symétrique et positive R , M_1, M_2 matrices libre, h scalaire positif, et la fonction de vecteur $x(\cdot) : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$. L'inégalité intégrale suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned} -h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds &\leq \zeta^T(t) \begin{bmatrix} M_1 + M_1^T & -M_1 + M_2^T \\ -M_1^T + M_2 & -M_2 + M_2^T \end{bmatrix} \zeta(t) \\ &+ \zeta^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix}^T \zeta(t) \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\text{Avec } \zeta(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}$$

L'inégalité de Jensen étendue contient plus de matrices libres et couvre l'inégalité de Jensen comme un cas particulier avec $M_1 = -R$ et $M_2 = R$, qui peut être moins conservative que l'inégalité de Jensen. On peut observer que l'inégalité de Jensen étendue a

besoin de $2n^2$ (n est la dimension du système), variables de décision plus que l'inégalité de Jensen, ce qui implique que l'application de cette inégalité peut être plus complexe et consomme plus de temps de calcul que l'inégalité de Jensen.

Remarque 1.9.1 : *Il semble que l'inégalité étendue de Jensen est moins conservatrice que l'inégalité de Jensen puisqu'il existe plus de matrices libres sont introduites. Cependant, il est prouvé dans [151] qu'elles sont équivalentes au sens du conservatisme.*

Remarque 1.9.2 : *Dans la littérature, l'inégalité de Jensen a été utilisée dans l'analyse de stabilité des systèmes à retard. Cependant, il est également connu que cette inégalité présente un conservatisme indésirable dans la condition de stabilité obtenue. Réduisant cet écart est un thème de recherche important, voir [24]. Récemment, une nouvelle inégalité intégrale basée sur la théorie de Fourier appelée (inégalité de Wirtinger) a été présentée dans [9], et a été appliquée pour donner un nouveau critère de stabilité pour les systèmes à retard.*

1.9.3 Inégalité de Wirtinger

L'inégalité de Wirtinger a été introduite très récemment dans l'analyse de la stabilité des systèmes de données échantillonnées en utilisant des fonctions spécifiques [95], et par la suite dans la stabilité des systèmes à retard [8] et des systèmes linéaires impulsifs. Il existe effectivement plusieurs inégalités de Wirtinger, mais seulement le suivant, tiré de [32], est donné ici :

Lemme 1.9.4 [32] : *soit $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable sur (a, b) ayant une dérivée de premier ordre intégrable et telle que $z(a) = z(b) = 0$. Pour toute matrice $R \in \mathbb{S}_{>0}^n$, l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\int_a^b \dot{z}^T(s) R \dot{z}(s) ds \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_a^b z^T(s) R z(s) ds \quad (1.37)$$

L'inégalité (1.37) ne peut pas être appliquée directement aux termes intégrés impliqués dans les dérivées de la fonctionnelle de Lyapunov Krasovskii (LKF) (1.33) en raison de la contrainte $z(a) = z(b) = 0$ qui n'est pas satisfaisante pour les systèmes à retard. Pour éviter cette difficulté, le résultat suivant basé sur l'inégalité de Wirtinger a été proposé

dans [8]

Lemme 1.9.5 [8] : soit $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable sur (a, b) ayant une dérivé du premier ordre intégrable. Pour toute matrice $R \in \mathbb{S}_{>0}^n$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_a^b \dot{\omega}^T(\theta) R \dot{\omega}(\theta) d\theta \geq \frac{1}{b-a} (\omega(b) - \omega(a))^T R (\omega(b) - \omega(a)) + \frac{\pi^2}{b-a} \Pi^T R \Pi \quad (1.38)$$

$$\text{Avec } \Pi = \frac{\omega(b) + \omega(a)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \omega(\theta) d\theta.$$

On peut voir dans le résultat (1.38) que le côté droit est constitué de deux termes : le premier est en fait la borne obtenue en utilisant l'inégalité de Jensen alors que le deuxième terme est spécifique à l'inégalité de Wirtinger. Notons que le terme intégral spécifique à l'inégalité de Wirtinger est négatif et rend ainsi la borne supérieure plus étroite que la borne obtenue en utilisant l'inégalité de Jensen. On peut conclure que l'inégalité de Wirtinger nous permet d'obtenir une borne plus précise du terme quadratique intégral.

1.9.4 Discrétisation du retard

Une technique populaire pour réduire le conservatisme des critères de stabilité est la discrétisation du retard. Cette méthode a été proposée par [89]. Il est bien reconnu que l'approche de la discrétisation du retard peut donner des meilleurs critères de la région de stabilité en raison du fait que cette méthode peut obtenir des bornes supérieures plus étroites, obtenues par le calcul de la dérivé temporelle de la fonction de Lyapunov-Krasovskii, ce qui conduit à des résultats moins conservatifs. [113] a proposé une méthode de discrétisation du retard qui divise l'intervalle de retard en deux sous-intervalles pour les systèmes dynamiques incertains et l'utilisation de la technique de matrices libre à chaque intervalle. Récemment, des nouvelles méthodes de discrétisation du retard pour les systèmes neutres avec des retards variables ont été présentées en utilisant des triples intégrales termes dans [114]. L'idée principale de la discrétisation du retard est de diviser l'intervalle de variation du retard en N parties égales. De sorte que l'information de chaque sous-intervalle de variation du retard est prise en compte. L'équation suivante peut faciliter la tâche

$$[h_m, h_M] = [h_1, h_2] \cup [h_2, h_3] \cup \dots \cup [h_i, h_{i+1}] \cup \dots \cup [h_N, h_{N+1}] \quad (1.39)$$

Avec $h_1 = h_m$, $h_{N+1} = h_M$, $h_{i+1} - h_i = \delta = (h_{N+1} - h_N)/N$, N est un entier donné. Lorsque le nombre de discrétisation du retard augmente, la formulation de l'inégalité matricielle linéaire devient plus complexe, la charge et le temps de calcul augmentent. Par conséquent, il est fortement nécessaire que certaines nouvelles méthodes soient étudiées dans l'application de l'approche de discrétisation du retard.

1.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un ensemble de notions qui caractérisent l'étude des systèmes à retards et aussi quelques méthodes qui sont utiles dans la résolution des problèmes des systèmes à retard. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la notion de stabilité et à son étude pour une telle classe de systèmes.

Nous essayerons, dans les chapitres suivants, de résoudre les problèmes de stabilité, de commande, d'améliorer les performances d'une telle classe des systèmes à retard et aussi d'améliorer les résultats existants selon l'approche temporelle suggérée. Nous exploiterons le potentiel fourni par la méthode de Lyapunov-Krasovskii pour développer de nouvelles fonctionnelles appropriées.

Chapitre 2

Stabilité des Systèmes Neutres à retard : Approche de Discrétisation du retard

2.1 Introduction

Les systèmes neutres peuvent être trouvés dans de nombreux domaines pratiques, tels que le réseau distribué contenant des lignes de transmission [139], écologie de la population, échangeurs de la chaleur, contrôle répétitif [100], [54] et [158], et des robots en contact avec des environnements rigides [139], [140], [158], et [132]. Les problèmes de stabilité des systèmes neutres à retard peuvent être classés en deux types : stabilité dépendante du retard [55], [132], [39], [121], et [164], et stabilité indépendante du retard [101].

L'existence du retard peut entraîner des oscillations, la divergence ou l'instabilité, et la dégradation de la performance des systèmes contrôlés, pour cette raison, de nombreuses études dans la littérature sont axées sur l'étude de la stabilité dépendante du retard [114], [171], [111], [153], [106], [1], [16], et [120]. Pour cette raison, des conditions indépendantes du retard ont été introduites par rapport aux conditions dépendantes du retard. Afin de réduire le conservatisme, [37] a proposé une transformation de modèle descripteur du système d'origine. Bien que des critères moins conservatifs soient obtenus, le conservatisme reste encore présent fortement dû au fait qu'il a utilisé la technique de majoration pour les termes croisés. [164, 165] proposent une approche de matrice de pondération libre pour étudier la stabilité dépendante du retard. Elle n'utilise pas des

téchniques de majoration pour des termes croisés, cette approche peut conduire à des résultats moins conservatifs. Cependant, cette approche a introduit certaines variables en dehors des variables matricielles apparaissantes dans les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. [156, 157] ont utilisé une approche de discrétisation du retard, et de nouveaux résultats de stabilité ont été dérivés, qui sont plus simples et moins conservatifs.

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle approche basée sur les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii en introduisant des triples termes d'intégrales, et nous étudierons la stabilité du système neutre linéaire avec un intervalle de retard basé sur l'approche de discrétisation du retard. Des conditions dépendantes du retard sont données pour s'assurer que le système neutre est asymptotiquement stable dans tout l'intervalle du retard. Les résultats sont donnés en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). Enfin, des exemples numériques sont présentés pour illustrer l'efficacité de la méthode proposée, et la comparer avec des travaux antérieurs.

2.2 Description du problème

Considérons le système neutre à retard suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau(t)) &= Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)) \\ x(t) &= \phi(t), t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (2.1)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\phi(t)$ est une fonction continue des conditions initiales, $\tau(t)$ est le retard. A, A_1 et $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices constantes, tel que le rayon spectral soit inférieur à un ($\rho(C) < 1$).

Nous étudierons le système précédent avec deux types de retard.

cas 1 : $\tau(t)$ est une fonction continue qui satisfait la contrainte suivante

$$0 < \tau(t) \leq \tau < \infty, \forall t \geq 0.$$

cas 2 : $\tau(t)$ est une fonction différentiable satisfaisant

$$\dot{\tau}(t) \leq \mu < 1, \forall t \geq 0.$$

Remarque 2.2.1 Pour vérifier la stabilité de l'opérateur $\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau(t))$, il est né-

2. STABILITÉ DES SYSTÈMES NEUTRES À RETARD : APPROCHE DE DISCRÉTISATION DU RETARD

cessaire de vérifier que C est Schur-Cohn stable.

Avant de poursuivre, nous introduisons le Lemme suivant, qui joue un rôle important dans le développement de nos principaux résultats.

Lemme 2.2.1 [56] : Pour toute matrice constante $R = R^T > 0$, et un scalaire $\tau > 0$, tel que les deux inégalités suivantes sont bien définies, alors

$$\begin{aligned} - \int_{t-\tau}^t \xi^T(s) R \xi(s) ds &\leq - \frac{1}{\tau} \left(\int_{t-\tau}^t \xi(s) ds \right)^T R \left(\int_{t-\tau}^t \xi(s) ds \right) \\ - \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \xi^T(s) R \xi(s) ds d\theta &\leq - \frac{2}{\tau^2} \left(\int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \xi(s) ds d\theta \right)^T R \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \xi(s) ds d\theta \end{aligned}$$

avec $\xi^T(s) = [x^T(s) \quad \dot{x}^T(s)]$.

L'objectif dans ce chapitre est de chercher les conditions qui satisfait la stabilité asymptotique du système (2.1), à base de la méthode de la discrétisation du retard.

2.3 Discrétisation du retard

L'idée basique de la méthode de discrétisation des fonctionnelles de Lyapunov Krasovskii est de diviser le domaine de définition des matrices en des régions plus petites, et choisissez ces matrices pour être continues linéaires par morceaux. La réduction du nombre des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii dépend du choix d'un nombre fini de divisions.

Divisons l'intervalle de retard $\mathfrak{J} = [-\tau, 0]$ en N segments $\mathfrak{J}_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ de même longueur

$$\delta = \frac{\tau}{N} \tag{2.2}$$

alors

$$\tau_i = -i\delta = -i \frac{\tau}{N}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, N \tag{2.3}$$

Cela divise également le domaine de définition des matrices $[-\tau, 0] \times [-\tau, 0]$ en $N \times N$ petits domaines $[\tau_i, \tau_{i+1}] \times [\tau_l, \tau_{l+1}]$ avec $l = 0, 1, 2, 3, \dots, N$.

Il est bien connu que les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii ont une grande diffusion dans l'analyse de stabilité des systèmes à retard. Dans la littérature, diverses fonctionnelles sont fournies pour évaluer la stabilité des systèmes à retard. Ces fonctionnelles ont

des termes communs. Parmi eux, l'un des termes les plus pertinents dans la dérivée est le terme intégrale quadratique.

Un exemple simple peut éclaircir l'effet du terme quadratique. Nous considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(x(t)) = \int_{t-h}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds d\theta \quad (2.4)$$

où $x(t)$ représente l'état d'un système à retard, $R > 0$ et $h > 0$. En différenciant ce terme par rapport à la variable de temps t , nous obtenons

$$\dot{V}(x(t)) = h\dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \quad (2.5)$$

Le principal problème lié à (2.5) est que l'intégral quadratique n'est pas appropriée pour formuler des conditions sous forme d'inégalité matricielle linéaire. Il consiste à transformer l'intégrale quadratique en une forme appropriée pour dériver une formulation LMI concernant les conditions de stabilité. L'utilisation de la majoration fournie par l'inégalité de Jensen peut surmonter le problème des conditions LMI, mais le problème de la réduction du conservatisme reste fortement présent. La discrétisation du retard donne une direction pour résoudre le problème du conservatisme. Diviser l'intervalle du retard en sous-intervalles et fournir une borne à l'intégrale quadratique à chaque sous intervalle réduira la zone du conservatisme d'une manière satisfaisante. L'illustration suivante éclaircit l'idée de la discrétisation :

Pour donner une image claire du mécanisme de fonctionnement de la méthode de discrétisation aux lecteurs, nous considérons la borne fournie par l'inégalité de Jensen pour l'intégrale quadratique sur un intervalle fini.

L'intégral quadratique $\int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds$ a une représentation graphique sous forme d'une parabole entre deux bornes $t - h$ et t , dépendant de la variable s . La borne fournie par l'inégalité de Jensen est considérée constante car elle ne dépend pas de la variable s . L'utilisation des méthodes de majoration dont le but est de trouver une vraie estimation de l'intégral quadratique. Ce qui a motivé de nombreux chercheurs à résoudre le problème. Les méthodes proposées n'ont pas trouvé la vraie estimation, mais elles ont proposé une bonne estimation.

Dans les figures ci-dessous : la zone du conservatisme est la surface entre la courbe de la borne fournie par l'inégalité de Jensen et la courbe de l'intégral quadratique.

2. STABILITÉ DES SYSTÈMES NEUTRES À RETARD : APPROCHE DE DISCRÉTISATION DU RETARD

La figure 2.1 décrit la zone du conservatisme dans l'intervalle $[-h, 0]$.

D'après la figure 2.1, nous remarquons que dans le cas de non-discrétisation du retard, la

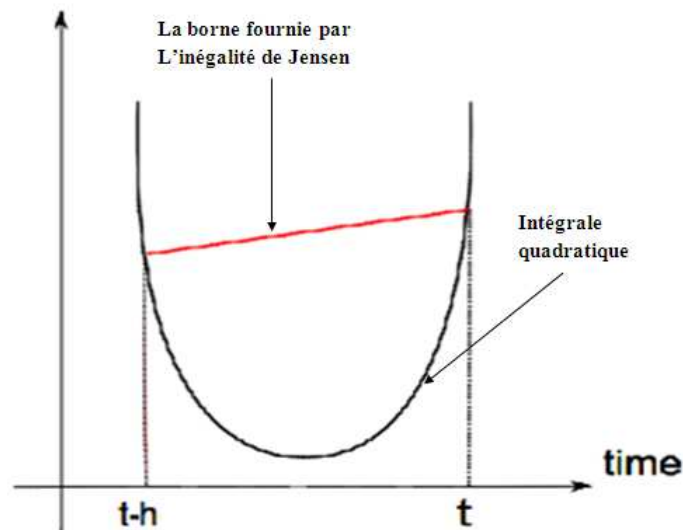


FIGURE 2.1 – La zone du conservatisme pour $[t - h, t]$

zone du conservatisme est vaste. Cela signifie que nous perdons plus d'informations. Ce qui signifie que la réduction de la zone est encore possible.

La figure 2.2 décrit la zone du conservatisme dans les deux sous-intervalles $[-h, 0] = [-h, -\frac{h}{2}] \cup [-\frac{h}{2}, 0]$.

Dans la figure 2.2, nous constatons que la zone du conservatisme est bien réduite que la zone de la Figure 2.1. Donc, nous concluons que si nous continuons à déviser l'intervalle nous aurons une réduction de la zone, ceci est clair dans la Figure 2.3.

La figure 2.3 décrit la zone du conservatisme dans les sous-intervalles $[-h, 0] = [-h, -\frac{h}{3}] \cup [-\frac{h}{3}, -\frac{2h}{3}] \cup [-\frac{2h}{3}, 0]$.

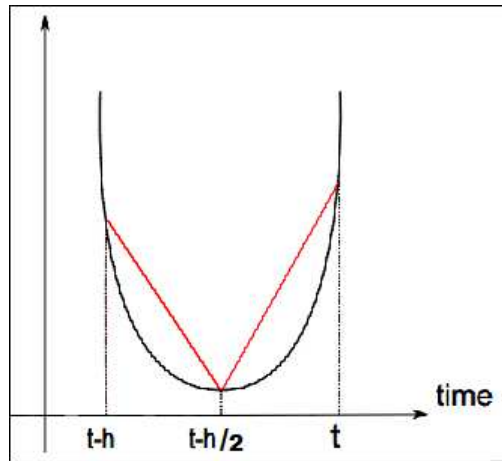


FIGURE 2.2 – La zone du conservatisme pour $[t-h \ t - \frac{h}{2}] \cup [t - \frac{h}{2} \ t]$

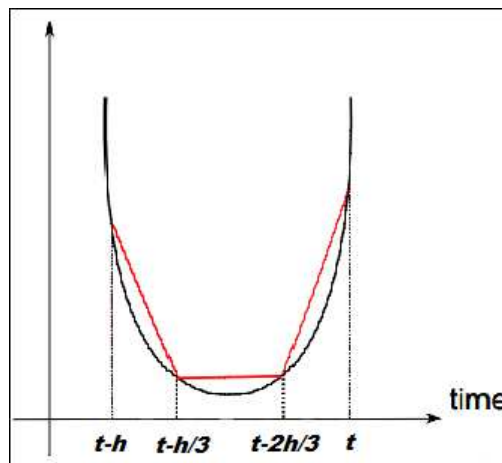


FIGURE 2.3 – La zone du conservatisme pour $[t-h \ t - \frac{h}{3}] \cup [t - \frac{h}{3} \ t - \frac{2h}{3}] \cup [t - \frac{2h}{3} \ t]$

La réduction du conservatisme est bien claire dans la figure 2.3.
 Les Figures précédentes montrent clairement le fonctionnement de la méthode de la discrétisation du retard et son impact sur la réduction du conservatisme, ceci nous encourage pour la traiter dans ce travail.

2.4 Analyse de la Stabilité pour le *cas 1*

L'objectif de cette section consiste à développer des conditions suffisantes qui peuvent être utilisées pour vérifier la stabilité asymptotique du système (2.1).

Théorème 2.4.1 [65] : Pour $\tau > 0$ donné, le système (2.1) est asymptotiquement stable s'il existe

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ * & P_{22} & P_{23} \\ * & * & P_{33} \end{bmatrix} > 0, \mathbb{Q}_j = \begin{bmatrix} Q_j & X_j \\ * & S_j \end{bmatrix} > 0, \mathbb{Z}_j = \begin{bmatrix} W_j & Y_j \\ * & T_j \end{bmatrix} > 0$$

$N_1 > 0, N_2 > 0$ et $R_j > 0, j = 1, 2, \dots, N$, Avec des dimensions appropriées telles que la condition suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} \Lambda & \Psi_{12} & \Psi_{13} & F_1^T(S_1 + N_1) & F_1^T\Pi_1 & F_1^T\Pi_2 \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} & F_2^T(S_1 + N_1) & F_2^T\Pi_1 & F_2^T\Pi_2 \\ * & * & \Psi_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -(S_1 + N_1) & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Psi_{44} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -\Psi_{55} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.6)$$

avec

$$\Lambda = \Psi_{11} + \Psi_{11}^k$$

$$F_1^T = [A \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ A_1]^T, \quad F_2^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ C]^T.$$

$$\Pi_1 = [\sqrt{\delta_1}T_1 \ \sqrt{\delta_2}T_2 \ \dots \ \sqrt{\delta_N}T_N], \quad \Pi_2 = [\sqrt{\frac{\gamma_1}{2}}R_1 \ \sqrt{\frac{\gamma_2}{2}}R_2 \ \dots \ \sqrt{\frac{\gamma_N}{2}}R_N]$$

$$\Psi_{11} = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \frac{T_1}{\delta_1} & 0 & \dots & 0 & \Theta_1 & \Theta_2 \\ * & \Xi_2 & \frac{T_2}{\delta_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \Xi_N & \frac{T_N}{\delta_N} & 0 \\ * & * & * & * & * & \lambda_3 & P_{12}^T A_1 \\ * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P_{12} & \Theta_4 \\ \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_N + P_{22} & P_{12}^T C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{13} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \alpha_k & \alpha_k & \cdots & \alpha_N & 0 \\ \frac{Y_1^T}{\delta_1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{Y_k^T}{\delta_k} & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{Y_k^T}{\delta_k} & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\frac{Y_N^T}{\delta_N} & 0 \\ -P_{33}^T & \cdots & -P_{33}^T & -P_{33}^T & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ A_1^T P_{13} & \cdots & \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & A_1^T P_{13} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ P_{23} & P_{23} & \cdots & P_{23} & P_{23} & 0 \\ C^T P_{13} & C^T P_{13} & \cdots & C^T P_{13} & C^T P_{13} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\Psi_{11}^k)_{(N+2)(N+2)} = \begin{cases} -\frac{T_k}{\delta_k}, & i = k, \quad j = k + 1 \\ \frac{T_k}{\delta_k}, & i \in \{k, k + 1\}, \quad j = N + 2 \\ -\frac{2T_k}{\delta_k}, & i = N + 2, \quad j = N + 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. STABILITÉ DES SYSTÈMES NEUTRES À RETARD : APPROCHE DE DISCRÉTISATION DU RETARD

$$\Xi_j \begin{cases} \phi & j = 1 \\ -\frac{T_{j-1}}{\delta_{j-1}} - \frac{T_j}{\delta_j} - Q_{j-1} + Q_j, & j = 2, \dots, N. \\ -Q_N - \frac{T_N}{\delta_N}, & j = N + 1 \end{cases}$$

$$\sigma_j = \begin{cases} X_{j+1} - X_j, & j=1, \dots, N-1 \\ -X_N, & j=N \end{cases} \quad \beta_j = \begin{cases} S_{j+1} - S_j, & j=1, \dots, N-1 \\ -S_N, & j=N \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \phi &= P_{11}A + A^T P_{11} + P_{13} + P_{13}^T + X_1 A + A^T X_1^T + Q_1 + \sum_{j=1}^N (\delta_j Y_j A + \delta_j A^T Y_j^T) \\ &+ \sum_{j=1}^N \delta_j W_j - \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{2\delta_j^2}{\gamma_j} R_j - \frac{4\delta_k^2}{\gamma_k} R_k - \frac{T_1}{\delta_1} + \tau N_2 \end{aligned}$$

$$\delta_j = \tau_j - \tau_{j-1}, \quad \gamma_j = \tau_j^2 - \tau_{j-1}^2, \quad (j = 1, \dots, N)$$

$$\Psi_{22} = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N-1}, \beta_N, -N_1\}.$$

$$\Psi_{33} = \text{diag}\left\{-\left(\frac{2R_1}{\gamma_1} + \frac{W_1}{\delta_1}\right), \dots, -\left(\frac{2R_N}{\gamma_N} + \frac{W_N}{\delta_N}\right), -\frac{N_2}{\tau}\right\}.$$

$$\Psi_{44} = \text{diag}\{T_1, T_2, \dots, T_{N-1}, T_N\}, \quad \Psi_{55} = \text{diag}\{R_1, R_2, \dots, R_{N-1}, R_N\}.$$

$$\lambda_1 = \alpha_1 - \frac{Y_1^T}{\delta_1}, \quad \lambda_2 = -P_{33}^T + \frac{Y_N^T}{\delta_N}, \quad \lambda_3 = \Xi_{N+1} + \Theta_3.$$

$$\varphi_1 = A_1^T P_{13} + \frac{Y_k^T}{\delta_k}, \quad \varphi_2 = A_1^T P_{13} - \frac{Y_k^T}{\delta_k}$$

$$\Theta_1 = A^T P_{12} - P_{13} + P_{23}^T, \quad \Theta_2 = P_{11}A_1 + \sum_{j=1}^N \delta_j Y_j A_1 + X_1 A_1, \quad \Theta_3 = -P_{23} - P_{23}^T.$$

$$\Theta_4 = P_{11}C + X_1 C + \sum_{j=1}^N \delta_j Y_j C, \quad \Theta_5 = -P_{33}^T + A_1^T P_{13}.$$

$$\alpha_j = \bar{\Theta}_5 + \frac{2\delta_j}{\gamma_j} R_1, \quad j = 1, \dots, N, \quad j \neq k, \quad \alpha_k = \bar{\Theta}_5 + \frac{2\delta_k}{\gamma_k} R_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}$$

Preuve 2.4.1 : Pour prouver le Théorème (2.4.1), nous considérons une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii de la forme suivante :

$$\tilde{V}(t) = V_1(t) + V_2(t) \tag{2.7}$$

où

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \zeta_t^T P \zeta_t + \sum_{j=1}^N \int_{t-\tau_j}^{t-\tau_{j-1}} \xi^T(s) Q_j \xi(s) ds + \sum_{j=1}^N \int_{-\tau_j}^{-\tau_{j-1}} \int_{t+\theta}^t \xi^T(s) Z_j \xi(s) ds d\theta \\ &+ \sum_{j=1}^N \int_{-\tau_j}^{-\tau_{j-1}} \int_{\theta}^0 \int_{t+\lambda}^t \dot{\xi}^T(s) R_j \dot{\xi}(s) ds d\lambda d\theta \end{aligned}$$

$$V_2(t) = \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s)N_1\dot{x}(s)ds + \int_{-\tau(t)}^0 \int_{t+\theta}^t x^T(s)N_2x(s)dsd\theta$$

avec

$$\zeta_t^T = [x^T(t) \quad x^T(t-\tau) \quad (\int_{t-\tau}^t x(s)ds)^T], \quad \xi^T(s) = [x^T(s) \quad \dot{x}^T(s)].$$

$$\mathbb{Q}_j = \begin{bmatrix} Q_j & X_j \\ * & S_j \end{bmatrix}, \quad \mathbb{Z}_j = \begin{bmatrix} W_j & Y_j \\ * & T_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Ensuite, la dérivée par rapport au temps de $\tilde{V}(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= 2\zeta_t^T P \dot{\zeta}_t + \xi^T(t) \sum_{j=1}^N \delta_j \mathbb{Z}_j \xi(t) + \dot{x}^T(t) \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j}{2} R_j \dot{x}(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \{ \xi^T(t - \tau_{j-1}) \mathbb{Q}_j \xi(t - \tau_{j-1}) - \xi^T(t - \tau_j) \mathbb{Q}_j \xi(t - \tau_j) \} \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \int_{t-\tau_j}^{t-\tau_{j-1}} \xi^T(s) \mathbb{Z}_j \xi(s) ds - \sum_{j=1}^N \int_{-\tau_j}^{-\tau_{j-1}} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_j \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \dot{x}^T(t) N_1 \dot{x}(t) - \dot{x}^T(t - \tau(t)) N_1 \dot{x}(t - \tau(t)) + \tau^T(t) x^T(t) N_2 x(t) \\ &\quad - \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s) N_2 x(s) ds \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 2.2.1, aux deux derniers termes d'intégrale de $\dot{V}_1(t)$, nous obtenons

$$- \sum_{j=1}^N \int_{t-\tau_j}^{t-\tau_{j-1}} \xi^T(s) \mathbb{Z}_j \xi(s) ds \leq - \sum_{j=1}^N \eta_1^T \frac{1}{\delta_j} \mathbb{Z}_j \eta_1 \quad (2.9)$$

et

$$- \sum_{j=1}^N \int_{-\tau_j}^{-\tau_{j-1}} \int_{t+\theta}^t \xi^T(s) R_j \xi(s) ds d\theta \leq - \sum_{j=1}^N \eta_2^T \frac{2}{\gamma_j} R_j \eta_2 \quad (2.10)$$

où

$$\eta_1 = \int_{t-\tau_j}^{t-\tau_{j-1}} \xi(s) ds, \quad \eta_2 = \int_{-\tau_j}^{-\tau_{j-1}} \int_{t+\theta}^t \xi(s) ds d\theta.$$

Pour le terme intégral de $\dot{V}_2(t)$, il est similaire à [114], avec $\tau(t)$ est une fonction continue satisfaisante. $\forall t > 0$, Il existe un nombre entier positif $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ tel que $\tau(t) \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$.

$$- \int_{t-\tau_k}^{t-\tau_{k-1}} \xi^T(s) R \xi(s) ds \leq -\eta_{k1} - \eta_{k2} \quad (2.11)$$

2. STABILITÉ DES SYSTÈMES NEUTRES À RETARD : APPROCHE DE DISCRÉTISATION DU RETARD

où

$$\begin{aligned}\eta_{k1} &= \int_{t-\tau_k}^{t-\tau(t)} \xi^T(s) ds \frac{R}{\delta_k} \int_{t-\tau_k}^{t-\tau(t)} \xi(s) ds \\ \eta_{k2} &= \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_{k-1}} \xi^T(s) ds \frac{R}{\delta_k} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_{k-1}} \xi(s) ds \\ \delta_k &= \tau_k - \tau_{k-1}\end{aligned}$$

En remplaçant (2.9), (2.10) et (2.11) en (2.8) on a l'inégalité suivante

$$\dot{V}(t) \leq \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{bmatrix}^T \Psi \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

avec

$$\begin{aligned}\Psi &= \begin{bmatrix} \Psi_{11} + \Psi_{11}^k & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \left(S_1 + N_1 + \sum_{j=1}^N (\delta_j T_j + \frac{\gamma_j}{2} R_j) \right) \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T\end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\Sigma_1^T = [x^T(t) \ x^T(t - \tau_1) \ \dots \ x^T(t - \tau_N), x^T(t - \tau(t))]$$

$$\Sigma_2^T = [\dot{x}^T(t) \ \dot{x}^T(t - \tau_1) \ \dots \ \dot{x}^T(t - \tau_N), \dot{x}^T(t - \tau(t))]$$

$$\begin{aligned}\Sigma_3^T &= \left[\int_{t-\tau_1}^t x^T(s) ds \ \dots \ \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_{k-1}} x^T(s) ds \ \int_{t-\tau_k}^{t-\tau(t)} x^T(s) ds \ \dots \ \int_{t-\tau_N}^{t-\tau_{N-1}} x^T(s) ds \right. \\ &\quad \left. \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s) ds \right]\end{aligned}$$

En utilisant le complément de Schur à l'équation (2.13), on peut constater que $\Psi < 0$ est équivalent à (2.6), ce qui implique que $\dot{V}(t) < 0$. Ensuite, le système (2.1) est asymptotiquement stable dans le cas 1. La preuve est terminée. \square

Remarque 2.4.1 : On sait que le choix d'une fonctionnelle appropriée du Lyapunov-Krasovskii (LKF) est la clé pour dériver un critère de stabilité moins conservatif. Mettons $P_{1i} = 0, P_{2i} = 0 (i = 2, 3), P_{33} = 0, W_j = Y_j = 0, T_j = \delta_j \tilde{T}_j$, et $R_j = \frac{\gamma_j}{2} \tilde{R}_j$ avec $\delta_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ et $\gamma_j = \tau_j^2 - \tau_{j-1}^2, (j = 1, \dots, N)$, nous obtenons une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii similaire à [114]. Par conséquent, la fonctionnelle du Lyapunov-Krasovskii dans [114] est une forme réduite de $\tilde{V}(t)$, il est donc théoriquement établi

que nos résultats sont moins conservatifs que ceux dans [114].

Remarque 2.4.2 : Nous avons présenté un nouveau critère de stabilité dépendant du retard en se basant sur la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovkii, qui est un cas plus général que [164, 104, 165]. Par rapport à la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovkii dans [165], notre approche contient un triple terme d'intégral $\int_{-\tau}^0 \int_{\theta}^0 \int_{t+\lambda}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\lambda d\theta$, dans le but d'obtenir des résultats moins conservatifs. Donc la fonctionnelle choisie dans l'intervalle $[-\tau, 0]$ est décomposée en N sous-intervalles. De plus, les matrices de notre fonctionnelle sont choisies sur différents sous-intervalles qui jouent un rôle clé dans la réduction du conservatisme.

Remarque 2.4.3 : Dans l'approche proposée, les termes intégral $\sum_{j=1}^N \int_{t-\tau_j}^{t-\tau_{j-1}} \xi^T(s)\mathbb{Q}_j\xi(s)ds$ et $\sum_{j=1}^N \int_{-\tau_j}^{-\tau_{j-1}} \int_{\theta}^0 \int_{t+\lambda}^t \dot{x}^T(s)R_j\dot{x}(s)dsd\lambda d\theta$ sont utilisés, ce qui introduit les termes Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 . Ces termes jouent un rôle important dans la réduction du conservatisme car les matrices \mathbb{Q} et R_j donnent plus de liberté de choix. Ce qui peut offrir plus de liberté pour choisir les tailles de partitionnement. De plus, certains termes utiles ignorés dans [114] sont introduits dans la nouvelle fonctionnelle de Lyapunov définie dans (2.7).

Dans la section suivante, nous présentons des conditions suffisantes pour lesquelles le système (2.1) soit asymptotiquement stable pour le **cas 2**.

2.5 Analyse de la Stabilité pour le cas 2

Théorème 2.5.1 : [65] Pour $\tau > 0$ et μ donné, le système (2.1) est asymptotiquement stable s'il existe

$$N_1 > 0, N_2 > 0, R_j > 0, j = 1, 2, \dots, N, \begin{bmatrix} Q_0 & X_0 \\ * & S_0 \end{bmatrix} > 0$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ * & P_{22} & P_{23} \\ * & * & P_{33} \end{bmatrix} > 0, \mathbb{Q}_j = \begin{bmatrix} Q_j & X_j \\ * & S_j \end{bmatrix} > 0, Z_j = \begin{bmatrix} W_j & Y_j \\ * & T_j \end{bmatrix} > 0$$

2. STABILITÉ DES SYSTÈMES NEUTRES À RETARD : APPROCHE DE DISCRÉTISATION DU RETARD

Avec des dimensions appropriées telles que la condition suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Lambda} & \tilde{\Psi}_{12} & \Psi_{13} & F_1^T \mathfrak{S} & F_1^T \Pi_1 & F_1^T \Pi_2 \\ * & \tilde{\Psi}_{22} & \Psi_{23} & F_2^T \mathfrak{S} & F_2^T \Pi_1 & F_2^T \Pi_2 \\ * & * & \Psi_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\mathfrak{S} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Psi_{44} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -\Psi_{55} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.14)$$

Où

$$\mathfrak{S} = (S_1 + S_0 + N_1), \quad \tilde{\Lambda} = \tilde{\Psi}_{11} + \Psi_{11}^k$$

$$\tilde{\Psi}_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_1 & \frac{T_1}{\delta_1} & 0 & \cdots & 0 & \Theta_1 & \tilde{\Theta}_2 \\ * & \tilde{\Xi}_2 & \frac{T_2}{\delta_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \tilde{\Xi}_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \tilde{\Xi}_N & \frac{T_N}{\delta_N} & 0 \\ * & * & * & * & * & \tilde{\Xi}_{N+1} + \Theta_3 & P_{12}^T A_1 \\ * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Psi}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P_{12} & \tilde{\Theta}_4 \\ \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_N + P_{22} & P_{12}^T C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -(1 - \mu)X_0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Psi}_{22} = \text{diag}\{\Psi_{22}, -(1 - \mu)(N_1 + S_0)\}.$$

$$\bar{\Lambda} = -\frac{2T_k}{\delta_k} - (1 - \mu)Q_0, \quad \tilde{\Xi}_1 = \phi + Q_0 + X_0 A + A^T X_0^T.$$

$$\tilde{\Theta}_2 = \Theta_2 + X_0 A_1, \quad \tilde{\Theta}_4 = \Theta_4 + X_0 C.$$

Les termes restants sont définis dans le Théorème 2.4.1.

Preuve 2.5.1 :

Pour le cas 2, nous considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \quad (2.15)$$

Où

$$V_3(t) = \int_{t-\tau(t)}^t \xi^T(s) \begin{bmatrix} Q_0 & X_0 \\ * & S_0 \end{bmatrix} \xi(s) ds$$

Nous calculons la dérivée du $V(t)$ par rapport au temps, le reste de la preuve est similaire au Théorème 2.4.1. Ceci complète la démonstration. \square

Remarque 2.5.1 : Par rapport à [114], nous avons construit une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii en introduisant non seulement l'état $x(t)$ mais aussi l'état retardé $x(t-\tau)$ et le terme intégral $\int_{t-\tau}^t x(s)ds$ pour exploiter toutes les informations possibles et nous avons introduit dans le terme de la double-intégral l'état $x(s)$, afin d'atteindre des résultats moins conservatifs.

Remarque 2.5.2 : La réduction du conservatisme de nos résultats a bénéficié de la méthode de partitionnement du retard, qui peut offrir plus de degré de liberté. De plus, la partition de l'intervalle du retard $[0 \ \tau]$ au lieu de l'intervalle $[0 \ \tau(t)]$, nous permet d'introduire l'information entre $\tau(t)$ et τ , qui peuvent conduire à plus de conservatisme si elles ne sont pas prises en compte. D'autre part, la borne inférieure du retard n'est pas toujours limitée à 0, alors, le partitionnement de l'intervalle du retard $[\tau_1 \ \tau_2]$ peut éviter ces problèmes.

2.6 Résultats de Simulation

Dans cette section, nous utilisons deux exemples pour montrer l'efficacité et le mérite de notre approche.

Exemple 2.6.1 Considérons le système neutre à retard suivant :

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau(t)) = Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)). \quad (2.16)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

2. STABILITÉ DES SYSTÈMES NEUTRES À RETARD : APPROCHE DE DISCRÉTISATION DU RETARD

et $0 \leq c \leq 1$. Pour différentes valeurs de N , et par l'application du théorème 2.4.1 et théorème 2.5.1 avec les propositions suivantes

$$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_N = \frac{\tau}{N} \text{ et } \gamma_1 = \delta^2, \gamma_2 = 3\delta^2, \gamma_3 = 5\delta^2, \dots, \gamma_N = (2N - 1)\delta^2.$$

Nous obtenons des résultats moins conservatifs que d'autres méthodes dans la littérature.

Si $c = 0$ et $\mu = \{0.1; 0.5; 0.9; \text{inconnu}\}$, en utilisant les critères de stabilité dans [16] et [120]. Pour que le système soit asymptotiquement stable, les bornes maximales du retard obtenues par [16] et [120] sont, respectivement : $\tau = \{4.52; 2.40; 2.22; 2.22\}$ et $\tau = \{5.51; 2.91; -; -\}$. La borne maximale de la méthode proposée est $\tau = \{5.51; 3.26; 2.61; 2.61\}$.

Nous observons D'après les résultats, que notre méthode fournit des résultats moins conservatifs que la méthode citée dans [16] et [120]. Pour plus de comparaison, Le tableau 2.1 illustre les bornes maximales pour des différentes valeurs de c et μ . Tableau 2.2 présente le nombre de variables de décision (Ndv) et le temps de calcul (CPU).

D'après les résultats figurant dans le tableau 2.1 on peut conclure que La méthode

Tableau 2.1 – La borne maximale pour différentes valeurs de c et μ

c	0.86723	0.72916	0.58831	0.24815
μ	0.1	0.3	0.5	0.9
[114] (N=2)	1.7776	1.5554	1.3436	0.7840
[114] (N=3)	1.7976	1.5801	1.3755	0.8076
[114] (N=4)	1.8128	1.5928	1.3964	0.8224
[114] (N=5)	1.8310	1.6080	1.4080	0.8345
Théorème 2.5.1 [65](N=2)	1.8951	1.6362	1.3894	0.7840
Théorème 2.5.1 [65](N=3)	2.8426	2.4543	2.0841	1.1760
Théorème 2.5.1 [65](N=4)	3.7902	3.2724	2.7788	1.5680
Théorème 2.5.1 [65](N=5)	4.7377	4.0906	3.4734	1.9600

proposée produit des résultats moins conservatifs que les résultats existants dans la littérature.

Il est facile de voir que les résultats obtenus par l'application du théorème 2.4.1 sont moins conservatifs que les résultats existants dans [114], ce qui démontre l'efficacité de la méthode proposée.

Remarque 2.6.1 : Lorsque N augmente, les dimensions des inégalités matricielles linéaires (LMI) impliquées sont en croissance rapide et augmentent le nombre de variables de décision (Ndv) qui compliqueront la manipulation de l'LMI et augmenteront le temps de calcul (CPU). On peut également constater que l'augmentation de N a un effet important sur la borne maximale τ .

Tableau 2.2 – La borne maximale τ quand μ est inconnu et $c = 0.56764$

method	τ	Ndv	CPUtimes
Théorème 3.3 [114] (N=2)	1.0974	$\frac{15n^2+11n}{2}$	4.3212
Théorème 3.3 [114] (N=3)	1.1757	$\frac{21n^2+15n}{2}$	-
Théorème 3.3 [114] (N=4)	1.2168	$\frac{27n^2+19n}{2}$	-
Théorème 3.3 [114] (N=5)	1.2505	$\frac{33n^2+23n}{2}$	-
Théorème 2.4.1 [65](N=2)	1.0974	$\frac{29n^2+15n}{2}$	16.4113
Théorème 2.4.1 [65](N=3)	1.6461	$19n^2 + 10n$	32.1050
Théorème 2.4.1 [65](N=4)	2.1948	$\frac{47n^2+25n}{2}$	79.6541
Théorème 2.4.1 [65](N=5)	2.7435	$28n^2 + 15n$	152.2414

Exemple 2.6.2 : Cet exemple est un circuit dans lequel les éléments ont des retards (qui représentent les circuits équivalents des éléments partiels PEEC). Ces circuits se rencontrent dans l'interconnexion des circuits digitaux ou avec des circuits intégrant des micro-ondes. Pour plus d'informations voir [34, 112] et [5].

Nous testons les résultats théoriques par la résolution d'un problème du système neutre (2.17), qui est motivé par le petit modèle de circuit équivalent à élément partiel (PEEC) réel voir Figure 2.4 (b). Ce circuit représente un circuit équivalent d'onde complété pour une barre de métal qui est discrétisée en deux cellules comme on le voit dans la Figure 2.4 (a). L'intérêt immédiat pour les problèmes de retard est le problème de stabilité. Le modèle de la figure 2.4 (b) inclut les éléments de circuit que l'on connecte entre les inductances avec retard de la forme $L_{pij}(t - \tau)$ et des sources de courant de la forme $i_{cj}(t - \tau)$. La forme générale de ce type d'équation est

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau) = Ax(t) + A_1x(t - \tau). \quad (2.17)$$

Les matrices pour notre exemple sont

$$A = 100 \times \begin{bmatrix} \beta & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 0 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_1 = 100 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -0.5 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & -1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = (1/72) \times \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour différentes valeurs de β , différentes méthodes sont utilisées pour calculer la borne

2. STABILITÉ DES SYSTÈMES NEUTRES À RETARD : APPROCHE DE DISCRÉTISATION DU RETARD

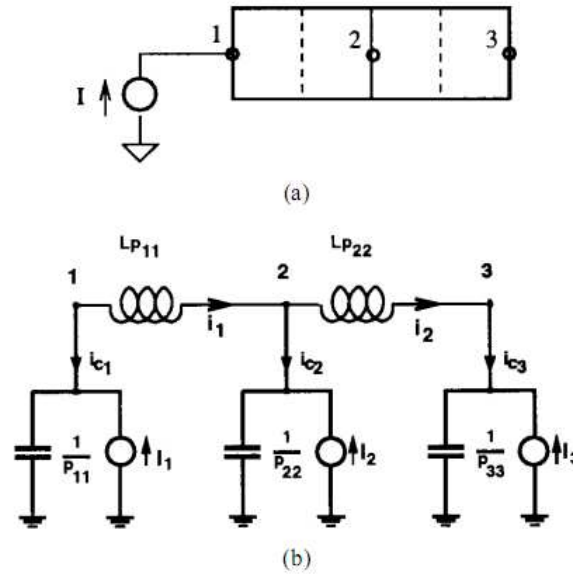


FIGURE 2.4 – Modèle de circuit équivalent à élément partiel (PEEC)

maximale du retard, le tableau 2.3 présente les résultats obtenus par le théorème 2.4.1 et d'autres résultats dans la littérature.

Clairement, à partir du tableau 2.3, nous avons trouvé que le théorème 2.4.1 dans ce

Tableau 2.3 – La borne supérieure τ pour différentes valeurs de β .

β	-2.105	-2.103	-2.1
[34]	1.1413	0.3892	0.2553
[112]	1.1410	0.3892	0.2553
[105]	1.4483	0.4917	0.3214
[114] (N=2)	1.6084	0.5450	0.3538
Théorème 2.4.1 (N=2)	1.6164	0.5560	0.3643

mémoire peut obtenir des résultats beaucoup moins conservatifs que ceux de [34, 112, 105] et [114]. ce qui montre que la méthode proposée est plus significative que celle citée dans le tableau 2.3.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de la stabilité asymptotique des systèmes neutres continus avec retard variable dans le temps, en utilisant la technique de discrétisation du retard. Nous avons donné des critères concernant la stabilité asymptotique en se basant sur une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii qui contient des termes à triple intégrale, qui est combinée avec l'approche du discrétisation du retard. Les résultats sont formulés sous forme des inégalités matricielles linéaires (LMI). Les résultats obtenus sont moins conservatifs que ceux existants dans la littérature. Les exemples numériques donnés ont montré l'efficacité de la méthode développée.

Chapitre 3

Analyse de la stabilité des systèmes linéaires avec retard variable : une approche d'entrée-sortie

3.1 Introduction

L'existence du retard dans les systèmes dynamiques peut entraîner une oscillation, divergences ou instabilité et dégradation des performances des systèmes. Le retard peut être trouvé dans différents systèmes pratiques tels que les réseaux de neurones, le contrôle dans les réseaux, les processus chimiques et les longues lignes de transmission dans les systèmes pneumatiques, voir les références [116, 70, 70]. D'une manière générale, les conditions de stabilité des systèmes à retard peuvent être classés en deux catégories : l'un est un critère de stabilité dépendante du retard et l'autre est un critère de stabilité indépendante du retard. Les critères de stabilité dépendante sont généralement moins conservatifs que les critères de stabilité indépendante du retard, en particulier lorsque le retard est faible.

Au cours des dernières décennies, une grande attention a été concentrée sur le problème de la stabilité des systèmes à retard [2, 1, 127, 128] et [106]. De nombreuses approches ont été développées dans la littérature pour réduire le conservatisme des conditions de stabilité. Par exemple, dans [40], la méthode de transformation de modèle descripteur a été considérée. Dans [15, 87], une technique de majoration des termes croisés a été utilisée. Les auteurs dans [166, 85] proposent une approche de matrice de pondération libre pour étudier la stabilité dépendante du retard pour la classe des systèmes continus

et discrets. Dans [99] l'approche d'entrée-sortie a été étudiée.

L'idée principale de l'approche d'entrée-sortie consiste à transformer le modèle résultant en deux sous-systèmes interconnectés. Cette approche a été appliquée largement aux systèmes à retard variable. Elle consiste à introduire les limites inférieures et supérieures du retard dans un modèle d'approximation en transformant le système de départ en deux sous-systèmes interconnectés basés sur le modèle d'approximation. Cette idée a été appliquée pour la classe des systèmes discrets et continus avec retard variable, voir par exemple les références suivantes [170, 59, 42] et [93].

Ce chapitre traite le problème de la stabilité asymptotique des systèmes continus à retard variable en utilisant l'approche d'entrée-sortie et le Théorème de petit gain. Pour obtenir des critères de stabilité moins conservatifs, des matrices de pondération libre sont introduites. Tous les résultats sont formulés en termes d'inégalités matricielles linéaires qui peuvent être facilement résolus en utilisant des techniques d'optimisation convexes. Enfin, des exemples numériques sont donnés pour démontrer l'efficacité de la méthode proposée.

3.2 Formulation de problème

Nous considérons le système avec retard variable décrit par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h(t)), & t \geq 0 \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-h_2, 0] \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\phi(\theta)$ est une fonction vectorielle continue avec $\theta \in [-h_2, 0]$, $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices constantes. $h(t)$ est le retard variable satisfaisant les contraintes suivantes :

$$0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2 \quad (3.2)$$

$$\dot{h}(t) \leq \mu \quad (3.3)$$

Avant de continuer, le lemme suivant est introduit à cause c'est plus négatif. Vu son rôle important dans le développement de nos principaux résultats.

Lemme 3.2.1 [90] : *Pour toute matrice constante $M > 0$, scalaire $\gamma > 0$, et une fonction*

3. ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES AVEC RETARD VARIABLE : UNE APPROCHE D'ENTRÉE-SORTIE

vectorielle, $\omega : [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^n$. L'inégalité intégrale suivante est vérifiée :

$$\left(\int_0^\gamma \omega(s) ds \right)^T M \left(\int_0^\gamma \omega(s) ds \right) \leq \gamma \int_0^\gamma \omega(s)^T M \omega(s) ds. \quad (3.4)$$

L'objectif principal de ce travail est de déterminer la condition de stabilité du système (3.1) en utilisant le Théorème de petit gain (SSG) [99]. Pour appliquer ce Théorème, nous devons transformer le système (3.1) en deux sous-systèmes suivants :

$$(S_1) : z(t) = \mathbf{G}\omega(t); \quad (S_2) : \omega(t) = \Delta z(t) \quad (3.5)$$

où le système (S_1) est un système linéaire avec retard constant. \mathbf{G} est la fonction de transfert entre $z(t)$ et $\omega(t)$. (S_2) est le système linéaire inconnu de rétroaction avec retard variable, avec l'opérateur $\Delta \in \mathcal{D} \triangleq \{\Delta : \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$. $z(t) \in \mathbb{R}^z, \omega(t) \in \mathbb{R}^\omega$.

En conséquence directe du Théorème de petit gain donné dans [99], il s'agit de trouver la condition suffisante qui vérifie la stabilité asymptotique du système interconnecté (3.5) au lieu du système (3.1).

La Figure 3.1 montre les sous-systèmes sous forme de blocs interconnectés :

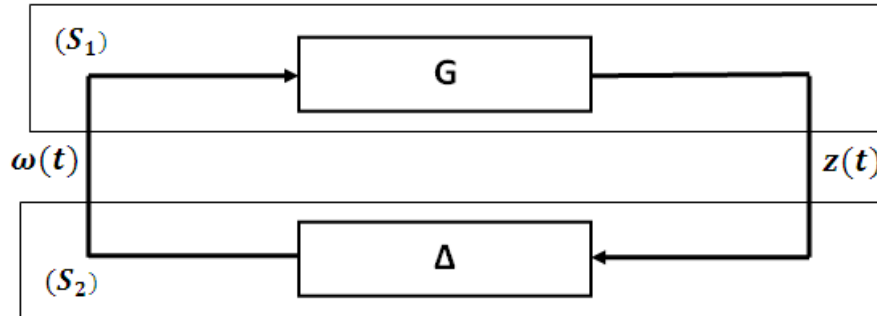


FIGURE 3.1 – Les sous-systèmes (S_1) et (S_2) sous forme des blocks

Lemme 3.2.2 [99] : *Considérons le système (3.5), et supposons que (S_1) est stable. Le système en boucle fermée formé par (S_1) et (S_2) est robustement asymptotiquement stable pour tous $\Delta \in \mathcal{D}$.*

S'il existe des matrices $\{T_\omega, T_z\} \in \mathbb{T}$ où

$$\mathbb{T} \triangleq \{ \{T_\omega, T_z\} \in \mathbb{R}^{\omega \times \omega} \times \mathbb{R}^{z \times z} : T_\omega, T_z \text{ matrices inversibles,} \\ \|T_\omega \circ \Delta \circ T_z^{-1}\|_\infty \leq 1 \}$$

telles que la condition suivante soit satisfait :

$$\|T_z \circ \mathbf{G} \circ T_\omega^{-1}\|_\infty < 1. \quad (3.6)$$

3.3 Transformation de modèle

Dans cette section, nous commençons par la transformation du système nominal (3.1) en deux sous-systèmes interconnectés (3.5). Nous Considérons le système (3.1), et nous cherchons à définir une approximation du retard $h(t)$ en utilisant ses bornes inférieures et supérieures h_1, h_2 . C'est à dire définir une approximation de l'état retardé $x(t - h(t))$. Les résultats de l'erreur d'approximation peuvent être écrits comme suit :

$$\omega(t) = \frac{2}{h_{12}} [x(t - h(t)) - \frac{1}{2}(x(t - h_1) + x(t - h_2))]. \quad (3.7)$$

avec $h_{12} = h_2 - h_1$. En remplaçant $x(t - h(t))$ dans (3.1) par (3.7), le système (3.1) peut être écrit en tant que système d'interconnexion formé par (S_1) et (S_2) .

$$(S_1) : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \frac{1}{2}A_d x(t - h_1) + \frac{1}{2}A_d x(t - h_2) + \frac{h_{12}}{2}A_d \omega(t) \\ z(t) = \dot{x}(t) \end{cases}$$

$$(S_2) : \omega(t) = \Delta z(t)$$

L'opérateur Δ est défini de $z(t)$ vers $\omega(t)$ ($z \rightarrow \omega$).

Le lemme suivant est introduit pour montrer que la norme de Δ est inférieure à 1.

Lemme 3.3.1 : L'opérateur $\Delta : z(t) \rightarrow \omega(t)$ satisfait la condition $\|X \circ \Delta \circ X^{-1}\|_\infty \leq 1$, où X est une matrice inversible.

Preuve 3.3.1 :

3. ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES AVEC RETARD
VARIABLE : UNE APPROCHE D'ENTRÉE-SORTIE

Considérons la norme vectorielle pondérée par la matrice S

$$\begin{aligned} \|\omega(t)\|_S^2 &= \int_0^t \omega^T(t)S\omega(t)dt = \int_0^t \frac{2}{h_{12}}[x^T(t-h(t)) - \frac{1}{2}(x^T(t-h_1) \\ &+ x^T(t-h_2))]S\frac{2}{h_{12}}[x(t-h(t)) - \frac{1}{2}(x(t-h_1) + x(t-h_2))]dt \quad (3.8) \\ &= \frac{1}{h_{12}^2} \int_0^t \left(\int_{t-h_2}^{t-h_1} \beta(s)\dot{x}^T(s)ds \right) S \left(\int_{t-h_2}^{t-h_1} \beta(s)\dot{x}(s)ds \right) dt \end{aligned}$$

Où $S = X^T X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et

$$\beta(s) \begin{cases} 1 & s \leq t - h(t) \\ -1 & s > t - h(t) \end{cases}$$

En utilisant le Lemme 3.4 et nous changeons l'ordre des deux intégrales. Après une certaine manipulation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\omega(t)\|_S^2 &\leq \frac{1}{h_{12}} \int_{-h_2}^{-h_1} \int_0^t \dot{x}^T(t+\alpha)S\dot{x}(t+\alpha)dt d\alpha \\ &= \frac{1}{h_{12}} \int_{-h_2}^{-h_1} \int_\alpha^{t+\alpha} \dot{x}^T(t)S\dot{x}(t)dt d\alpha \\ &= \frac{1}{h_{12}} \int_{-h_2}^{-h_1} \int_0^t \dot{x}^T(t)S\dot{x}(t)dt d\alpha \\ &= \int_0^t z^T(t)S z(t)dt = \|z(t)\|_S^2 \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\|X \circ \Delta \circ X^{-1}\|_\infty \leq 1$, avec $z(t) = \dot{x}(t)$.

La preuve est terminée. \square

Il faut noter que α est toujours négatif. L'intervalle de l'intégral est déplacé de $[\alpha, t + \alpha]$ à $[0, t]$ et l'inégalité reste vraie car la fonction à intégrer est dans la forme quadratique positive.

Remarque 3.3.1 $\{X, X\} \in \mathbb{T}$ sont des matrices qui apparaissent dans le théorème de petit gain, puis selon le Lemme 3.2.2, pour s'assurer que le système (3.1) est stable sous l'approche d'entrée-sortie, il est nécessaire de vérifier que (S_1) est interne stable et qu'il existe une matrice X tel que la condition $\|X \circ \mathbf{G} \circ X^{-1}\|_\infty < 1$ est satisfaite.

Remarque 3.3.2 : Il faut bien noter qu'aucun terme ajouté ou ignoré lors de la transformation de modèle apportée au système (3.1), car si nous remplaçons $\omega(t)$ dans (S_1) par son expression (3.7), nous retrouvons le système (3.1).

Remarque 3.3.3 : Pour le système (3.1), avec $\omega(t)$ est une entrée et $z(t)$ est une sortie, la condition (3.6) dans le Lemme 3.2.2 est équivalent à la norme H_∞ . Alors, le système (S_1) peut être écrit sous la forme suivante

$$z = \mathbf{G}\omega \quad (3.9)$$

avec la fonction de transfert suivante

$$\mathbf{G}(s) = s \left(sI - \left(A + \frac{1}{2}A_d(e^{-h_1s} + e^{-h_2s}) \right) \right)^{-1} \frac{h_{12}}{2} A_d. \quad (3.10)$$

La contrainte (3.6) dans le Lemme 3.2.2 peut être décrite par la condition suivante

$$\|T_z \circ \mathbf{G} \circ T_\omega^{-1}\|_\infty = \sup_{-\infty < \omega < +\infty} \|X\mathbf{G}(s)X^{-1}\|. \quad (3.11)$$

avec X une matrice inversible qui satisfait $S = X^T X$.

3.4 L'analyse de la Stabilité

Dans cette section, on utilise l'approche d'entrée-sortie, à l'aide du Lemme 3.2.2 pour démontrer le Théorème qui garantit la stabilité-dépendante du retard du système (S_1) . L'analyse du théorème du petit gain peut être effectuée à plusieurs chemins puisque l'interconnexion des deux sous-systèmes peut être décrite sous la forme suivante

$$(S_{x1}) : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \frac{1}{2}A_dx(t - h_1) + \frac{1}{2}A_dx(t - h_2) + \frac{h_{12}}{2}A_dX^{-1}\tilde{\omega}(t) \\ \tilde{z}(t) = X\dot{x}(t) \end{cases}$$

$$(S_{x2}) : \tilde{\omega}(t) = X\Delta X^{-1}\tilde{z}(t)$$

avec $\tilde{z}(t) = Xz(t)$, $\tilde{\omega}(t) = X\omega(t)$.

Plusieurs chemins peuvent être suivis pour étudier la stabilité asymptotique du système (S_{x1}) , l'un de ces chemins est mentionné dans la remarque suivante :

Remarque 3.4.1 : Soit $V(t)$ une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii qui garantit la

3. ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES AVEC RETARD
VARIABLE : UNE APPROCHE D'ENTRÉE-SORTIE

stabilité du sous-système (S_{x_1}) et soit

$$J \triangleq \tilde{z}^T(t)\tilde{z}(t) - \tilde{\omega}^T(t)\tilde{\omega}(t).$$

Il est bien connu que la condition donnée par (3.12) le long de la trajectoire de (S_{x_1}) .

$$\mathcal{W} \triangleq \dot{V}(t) + J < 0 \quad (3.12)$$

garantit que la norme H_∞ de (S_{x_1}) est inférieure à 1. Par conséquent (3.12) est une condition suffisante pour le problème du lemme réel borné (BRL). Si la condition (3.12) est satisfaite. Donc, selon le Lemme 3.2.2, on peut conclure que le système (3.1) est stable. Ensuite, si $J \leq 0$, cela signifie que $\|X \circ \Delta \circ X^{-1}\|_\infty \leq 1$ et enfin, si $\mathcal{W} < 0$ pour $S = X^T X$ cela signifie que $\|X \circ \mathbf{G} \circ X^{-1}\|_\infty < 1$.

L'objectif de cette section consiste à développer des conditions suffisantes qui peuvent être utilisées pour vérifier la stabilité asymptotique du système considéré.

Théorème 3.4.1 [3] : Pour des scalaires, $h_2 > h_1 > 0$ et μ . Le système (S_1) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices

$P > 0, S > 0, Q_i > 0 (i=1,2,3), Z_j (j=1,2), Y_k (k=1,2)$ et $W_l (l=1,2)$.

tel que

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \Psi & \Phi_y \\ * & -\frac{Z_2}{h_{12}} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.13)$$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} \Psi & \Phi_w \\ * & -\frac{Z_2}{h_{12}} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.14)$$

où

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \Sigma_1 & \Sigma_2 & \frac{h_{12}}{2} \Upsilon_{12} \\ * & \Sigma_3 & \Sigma_4 & \frac{h_{12}}{2} (\frac{\Upsilon_{22}}{2} + Y_2^T) \\ * & * & \Sigma_5 & \frac{h_{12}}{2} (\frac{\Upsilon_{22}}{2} - W_2^T) \\ * & * & * & \frac{h_{12}}{2} \Upsilon_{22} - S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T \\ \frac{A_d^T}{2} \\ \frac{A_d^T}{2} \\ h_{12} \frac{A_d^T}{2} \end{bmatrix} \mathfrak{S} \begin{bmatrix} A^T \\ \frac{A_d^T}{2} \\ \frac{A_d^T}{2} \\ h_{12} \frac{A_d^T}{2} \end{bmatrix}^T$$

$$\Phi_y = \begin{bmatrix} Y_1^T & \frac{Y_2^T}{2} & \frac{Y_2^T}{2} & h_{12} \frac{Y_2^T}{2} \end{bmatrix}^T$$

$$\Phi_w = \begin{bmatrix} W_1^T & \frac{W_2^T}{2} & \frac{W_2^T}{2} & h_{12} \frac{W_2^T}{2} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S} &= h_1^2 Z_1 + h_{12} Z_2 + S. \\
 \Sigma_1 &= \frac{\Upsilon_{12}}{2} + Y_1 + Z_1. \\
 \Sigma_2 &= \frac{\Upsilon_{12}}{2} - W_1. \\
 \Sigma_3 &= \frac{\Upsilon_{22}}{4} + \frac{Y_2^T + Y_2}{2} - Q_1 - Z_1. \\
 \Sigma_4 &= \frac{\Upsilon_{22}}{4} + \frac{Y_2^T - W_2}{2}. \\
 \Sigma_5 &= \frac{\Upsilon_{22}}{4} - \frac{W_2^T + W_2}{2} - Q_2. \\
 \Upsilon_{11} &= PA + A^T P + \sum_{m=1}^3 Q_m - Z_1. \\
 \Upsilon_{12} &= PA_d + W_1 - Y_1. \\
 \Upsilon_{22} &= -(1 - \mu)Q_3 + W_2 + W_2^T - Y_2 - Y_2^T
 \end{aligned}$$

Preuve 3.4.1 :

Pour démontrer le Théorème 3.4.1, on suppose que le Théorème 2 dans [73] est satisfait.

Puis, nous définissons la matrice suivante

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & h_{12}^{-1} I \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

En multipliant la condition (4) et (5) du Théorème 2 dans [73] à gauche par Γ^T et à droite par Γ , on obtient

$$\Gamma^T(4)\Gamma = \Phi_1, \quad \Gamma^T(5)\Gamma = \Phi_2. \quad (3.16)$$

Où

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \Phi & Y \\ * & -h_{12}^{-1} Z_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} \Phi & W \\ * & -h_{12}^{-1} Z_2 \end{bmatrix}$$

Ensuite, nous considérons la matrice suivante

$$\Theta = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I}{2} & \frac{I}{2} & h_{12} \frac{I}{2} & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Puis, nous multiplions Φ_1 à gauche par Θ^T et à droite par Θ , nous obtenons

$$\Theta^T \Phi_1 \Theta = \begin{bmatrix} \Xi & \Phi_y \\ * & -\frac{Z_2}{h_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

3. ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES AVEC RETARD VARIABLE : UNE APPROCHE D'ENTRÉE-SORTIE

avec

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \Sigma_1 & \Sigma_2 & \frac{h_{12}}{2} \Upsilon_{12} \\ * & \Sigma_3 & \Sigma_4 & \frac{h_{12}}{2} (\frac{\Upsilon_{22}}{2} + Y_2^T) \\ * & * & \Sigma_5 & \frac{h_{12}}{2} (\frac{\Upsilon_{22}}{2} - W_2^T) \\ * & * & * & \frac{h_{12}^2}{4} \Upsilon_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T \\ \frac{A_d^T}{2} \\ \frac{A_d^T}{2} \\ h_{12} \frac{A_d^T}{2} \end{bmatrix} \tilde{\mathfrak{S}} \begin{bmatrix} A^T \\ \frac{A_d^T}{2} \\ \frac{A_d^T}{2} \\ h_{12} \frac{A_d^T}{2} \end{bmatrix}^T$$

Où $\tilde{\mathfrak{S}} = h_1^2 Z_1 + h_{12} Z_2$.

Pour satisfaire la contrainte (3.6) du Théorème du petit gain, qui est équivalent à la norme H_∞ , il est évident d'appliquer l'inégalité suivante :

$$z^T(t) S z(t) - \omega^T(t) S \omega(t) \leq 0 \quad (3.19)$$

remplaçons $z(t)$ par sa valeur, nous obtenons l'inégalité (3.20) dépendante de la matrice S

$$\begin{bmatrix} A^T \\ \frac{A_d^T}{2} \\ \frac{A_d^T}{2} \\ h_{12} \frac{A_d^T}{2} \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} A^T \\ \frac{A_d^T}{2} \\ \frac{A_d^T}{2} \\ h_{12} \frac{A_d^T}{2} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3n \times 3n} & \mathbf{0}_{3n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 3n} & -S \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.20)$$

Nous additionons (3.18) et (3.20), nous obtenons l'inégalité (3.13).

La preuve pour obtenir l'inégalité (3.14) est similaire à (3.13).

La preuve est terminée. \square

Remarque 3.4.2 : Si le théorème 2 du travail cité dans [73] vérifie que le système à retard (3.1) est asymptotiquement stable pour tout $h(t)$ satisfaisant $0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2$ et l'inégalité (3.18) est garantie, alors le théorème 3.4.1 garantit que le système (S_1) dérivé du système (3.1) est asymptotiquement stable. Dans ce sens, le théorème 3.4.1 est moins conservatif que le théorème 2 [73].

Remarque 3.4.3 : Il est bien connu d'après la littérature que l'approche d'entrée-sortie

peut réduire le conservatisme du système concerné. À titre de comparaison, notre méthode nous permet d'introduire la matrice S . Par conséquent, les conditions dérivées sont moins conservatives que celles dans [73]. Nous pouvons visualiser les bénéfices dans la section des exemples numériques.

Remarque 3.4.4 : Les informations sur la dérivée du retard $h(t)$ peuvent ne pas être disponibles. Pour cette raison, le résultat lorsque μ est inconnu peut être obtenu à partir du Théorème 3.4.1 où $Q_3 = 0$.

Si $h_1 = 0$, on peut dériver des conditions qui garantissent la stabilité asymptotique du système (S_1) à partir du Théorème 3.4.1.

Théorème 3.4.2 : Pour des scalaires, $h_2 > 0$, $h_1 = 0$ et μ . Le système (S_1) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices, $P > 0$, $S > 0$, $Q_i > 0$ ($i=2,3$), Z_2 , Y_k ($k=1,2$) et W_l ($l=1,2$) tel que

$$\tilde{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi} & \tilde{\Phi}_y \\ * & -\frac{Z_2}{h_2} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.21)$$

$$\tilde{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi} & \tilde{\Phi}_w \\ * & -\frac{Z_2}{h_2} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.22)$$

Où

$$\tilde{\Phi}_y = \left[Y_1^T + \frac{Y_2^T}{2} \quad \frac{Y_2^T}{2} \quad h_2 \frac{Y_2^T}{2} \right]^T, \quad \tilde{\Phi}_w = \left[W_1^T + \frac{W_2^T}{2} \quad \frac{W_2^T}{2} \quad h_2 \frac{W_2^T}{2} \right]^T$$

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_1 & \tilde{\Sigma}_2 & \frac{h_2}{2} (\hat{\Upsilon}_{12} + \frac{\Upsilon_{22}}{2}) \\ * & \Sigma_5 & \frac{h_2}{2} (\frac{\Upsilon_{22}}{2} - W_2^T) \\ * & * & \frac{h_2^2}{4} \Upsilon_{22} - S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T + \frac{A_d^T}{2} \\ \frac{A_d^T}{2} \\ h_2 \frac{A_d^T}{2} \end{bmatrix} (h_2 Z_2 + S) \begin{bmatrix} A^T + \frac{A_d^T}{2} \\ \frac{A_d^T}{2} \\ h_2 \frac{A_d^T}{2} \end{bmatrix}^T$$

avec

$$\hat{\Upsilon}_{11} = PA + A^T P + \sum_{m=2}^3 Q_m + Y_1 + Y_1^T.$$

$$\hat{\Upsilon}_{12} = PA_d + W_1 - Y_1 + Y_2^T.$$

$$\tilde{\Sigma}_1 = \hat{\Upsilon}_{11} + \frac{\hat{\Upsilon}_{12} + \hat{\Upsilon}_{12}^T}{2} + \frac{\Upsilon_{22}}{4}.$$

$$\tilde{\Sigma}_2 = \frac{\Upsilon_{22}}{4} + \frac{\hat{\Upsilon}_{12}}{2} - W_1 - \frac{W_2}{2}.$$

Preuve 3.4.2 :

Nous suivons la même preuve que le Théorème 3.4.1. La preuve est terminée. \square

Remarque 3.4.5 : Noter que nous avons bénéficié de la technique utilisée dans le papier [73], qui est basée sur le choix d'une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii combinée avec une nouvelle technique d'estimation de la limite supérieure de $V(x(t))$. Par conséquent, nous obtenons deux inégalités matricielles. Donc nous obtenons des résultats de stabilité moins conservatifs avec moins de variables matricielles.

3.5 Exemples Numériques

Dans cette section, nous utilisons deux exemples afin d'illustrer les avantages, et pour montrer l'efficacité de nos critères de stabilité développés dans ce chapitre.

Exemple 3.5.1 : Nous considérons le système (3.1) avec les paramètres suivants

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour tester la satisfaction de la condition 3.6 du théorème de petit gain, nous choisissons différentes valeurs de h_2 et nous fixons h_1 à une valeur appropriée $h_1 = 0.5$, la figure 3.2 montre la condition 3.11 développée dans la Remarque 3.3.3.

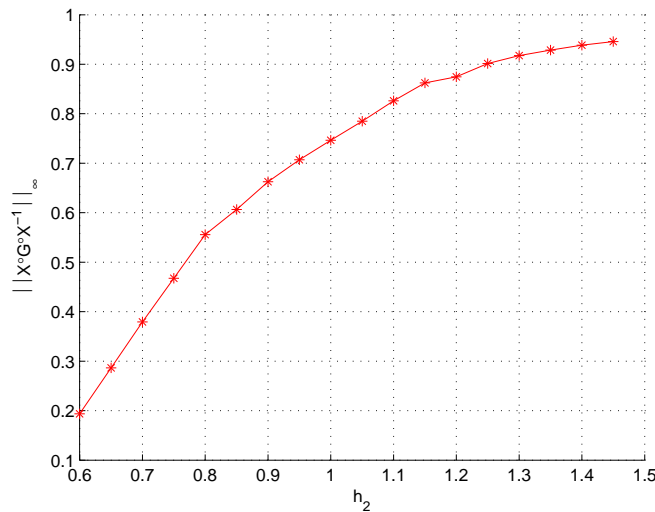


FIGURE 3.2 – L'évolution de la condition $\|XG(s)X^{-1}\|_{\infty}$ en fonction de la variation de h_2

Le lemme 3.2.2 et l'application du théorème de petit gain exigent la satisfaction de la condition 3.11. D'après la Figure 3.2, nous voyons clairement que la condition 3.11 est inférieure à 1 pour différentes valeurs de h_2 . Ceci montre bien que la méthode proposée satisfait les contraintes imposées par le théorème de petit gain. Ce qui signifie l'efficacité de notre méthode.

Dans le cadre de montrer l'efficacité de la méthode proposée, on prend différentes valeurs de $h_1 > 0$ et on applique le Théorème 3.4.1. La borne supérieure du retard obtenue par le théorème 3.4.1 ainsi que les résultats de la littérature sont présentés dans le tableau 3.1 et tableau 3.2. La figure 3.3 montre la région de stabilité en termes de h_1 et h_2 , selon les résultats obtenus dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 – La borne supérieure h_2 obtenue par le Théorème 3.4.1 de l'Exemple 3.5.1

Méthode	h_1	1	2	3	4	5
[73]	h_2	2.35	2.58	3.47	4.39	5.33
Théorème 3.4.1[3]	h_2	2.75	2.82	3.62	4.55	5.50

Tableau 3.2 – La borne h_2 obtenue par le Théorème 3.4.1 de l'Exemple 3.5.1 (μ est inconnu)

Méthode	h_1	0.3	0.5	0.8	1	2
[73]	h_2	1.24	1.38	1.60	1.75	2.58
Théorème 3.4.1[3] ($Q_3 = 0$)	h_2	1.31	1.45	1.68	1.84	2.70

À partir de ces tableaux, on peut voir que pour cet exemple, le résultat de la stabilité du théorème 3.4.1 est moins conservatif que ceux obtenus en [73].

Lorsque $h_1 = 0$ et $\mu = 0.3$, nous utilisons le théorème 3.4.2, nous obtenons une borne supérieure de $h_2 = 3.26$ qui est supérieure à 2.34 obtenue par le critère de stabilité dans [73] et 2.19 par le critère de la stabilité dans [71]. Ces résultats montrent l'efficacité et l'avantage de notre approche.

Dans La figure 3.3, nous présentons les régions de stabilité dans lesquelles le système (3.1) est asymptotiquement stable. Pour clarifier cette figure, l'espace entre la ligne qui contient des cercles et la bordure est la région où le système est asymptotiquement stable en utilisant théorème 3.4.1(TH1) et l'espace entre la ligne qui ne contient aucunes cercles et la bordure est la région où le système est asymptotiquement stable selon la méthode proposée dans [73](Th 2012). On peut observer que la région de stabilité du théorème 3.4.1 comprend celui obtenu en utilisant le théorème 2 dans [73]. Cela signifie

3. ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES AVEC RETARD VARIABLE : UNE APPROCHE D'ENTRÉE-SORTIE

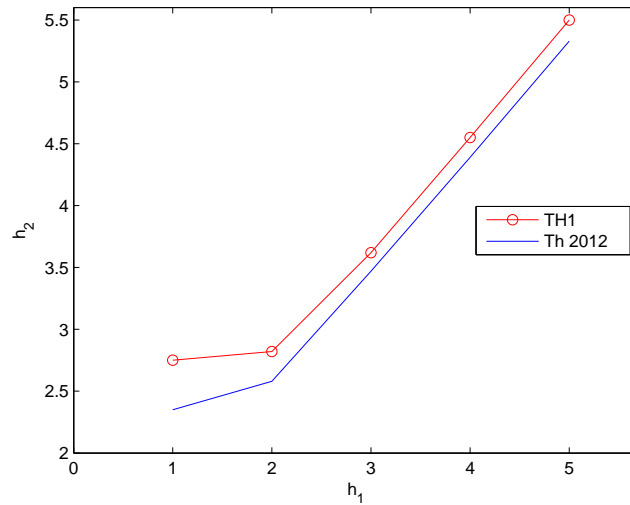


FIGURE 3.3 – La région de stabilité en termes de h_1 et h_2

que notre méthode donne des résultats moins conservatifs que celui de [73].

Exemple 3.5.2 : Considérons le système (3.1) avec les matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nous choisissons différentes valeurs de $h_1 > 0$, nous calculons la borne supérieure du retard h_2 , qui assure la stabilité asymptotique du système (S_1) pour tout retard satisfaisant $h_1 \leq h(t) \leq h_2$, les résultats sont figurés dans le tableau 3.3. D'après le tableau 3.3,

Tableau 3.3 – La borne h_2 obtenue par le théorème 3.4.1 de l'Exemple 3.5.2 (μ est inconnu)

Méthode	h_1	1	2	3	4
[154]	h_2	1.64	2.39	3.20	4.06
[167]	h_2	1.74	2.43	3.22	4.06
[71]	h_2	1.83	2.50	3.25	4.07
Théorème 3.4.1[3] ($Q_3 = 0$)	h_2	2.06	2.61	3.31	4.09

nous constatons que les résultats obtenus mettent l'accent sur l'avantage et le mérite de la méthode développée. Nous voyons qu'une amélioration a été réalisée par rapport aux résultats existants dans la littérature.

La figure 3.4 montre l'évolution de la condition 3.11 développée dans la Remarque 3.3.3 en fonction de la variation de la borne inférieure h_1 et pour $h_2 = 1.85$.

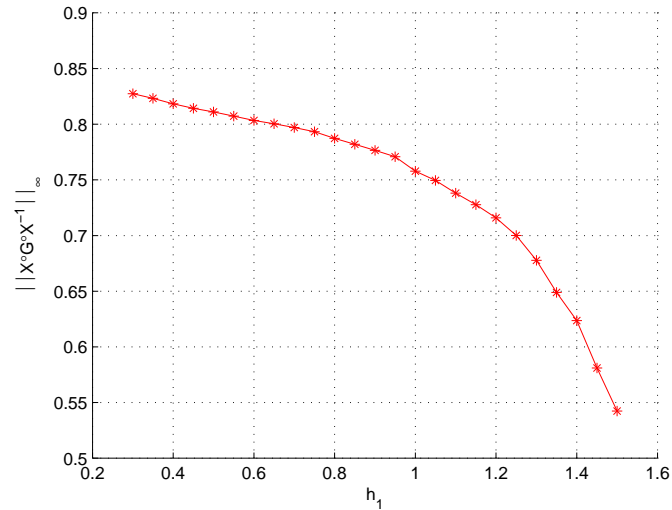


FIGURE 3.4 – L'évolution de la condition $\|XG(s)X^{-1}\|_{\infty}$ en fonction de la variation de h_1

Nous voyons que la condition 3.11 est inférieure à 1 lors du changement de la borne h_1 . Ce qui signifie que la condition imposée par le lemme 3.2.2 a été satisfaite, cela montre que la méthode proposée est réalisable et respecte les conditions imposées.

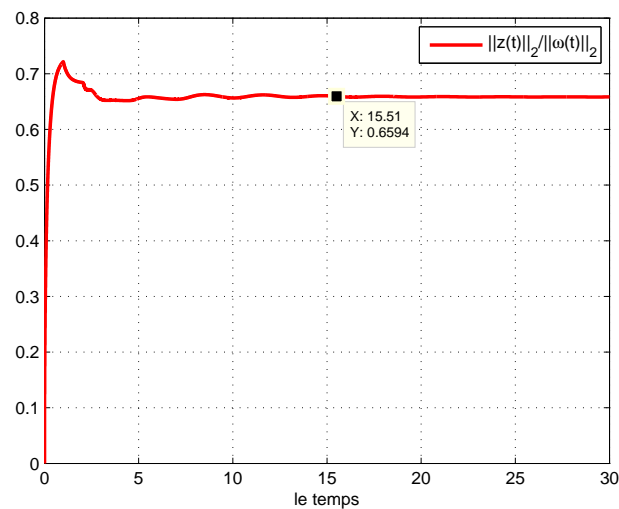


FIGURE 3.5 – Démonstration de l'inégalité $\frac{\|z(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2} < 1$ sous la condition initiale zéro

3. ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES AVEC RETARD VARIABLE : UNE APPROCHE D'ENTRÉE-SORTIE

La satisfaction de la condition 3.11 dans le domaine fréquentiel, fait voir que la méthode proposée est plus significative. La figure 3.5 , montre le rapport $\frac{\|z(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2}$, et la Figure 3.6 montre le rapport $\frac{\|\omega(t)\|_2}{\|z(t)\|_2}$ dans le domaine temporel avec $1 \leq h(t) \leq 2.06$.

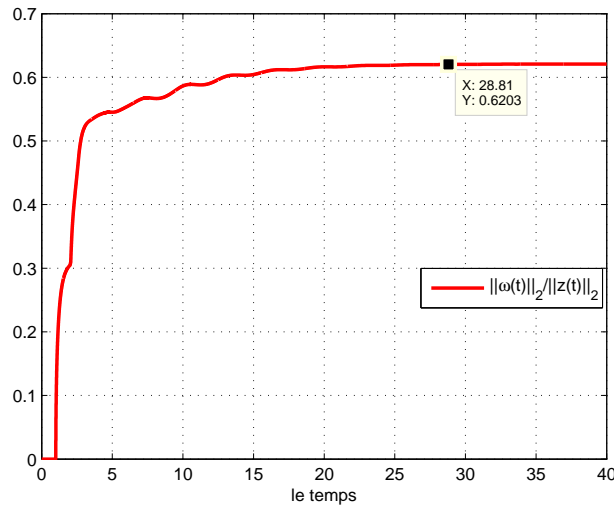


FIGURE 3.6 – Démonstration de l'inégalité $\frac{\|\omega(t)\|_2}{\|z(t)\|_2} \leq 1$

À partir de la figure 3.5 et la figure 3.6, il est facile de voir que le modèle de transformation donné satisfait les contraintes imposées par le Théorème du petit gain. Nous pouvons voir qu'après 15 s, le rapport $\frac{\|z(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2}$ a atteint une valeur constante d'environ 0.6586, et le rapport $\frac{\|\omega(t)\|_2}{\|z(t)\|_2}$ après 29 s, a atteint une valeur constante d'environ 0.6594, ce qui est inférieur à 1. L'exécution des deux conditions montre clairement le pouvoir et la réalisabilité de la méthode proposée.

Pour illustrer l'efficacité de la méthode proposée, La figure 3.7 a été faite sous les conditions initiales $x(0) = [0.5; -0.2]$ et le retard variable $h(t)$ est une fonction aléatoire uniforme dans l'intervalle $[1 \ 2.06]$.

La figure 3.7 illustre la solution obtenue avec la méthode proposée. Le comportement global des états du système 3.1 est asymptotiquement stable. Ce qui montre bien que la méthode proposée a résolu le problème de la stabilité du système 3.1.

3.5.1 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de la stabilité des systèmes linéaires avec retard variable dans le temps. En se basant sur l'approximation des deux-termes

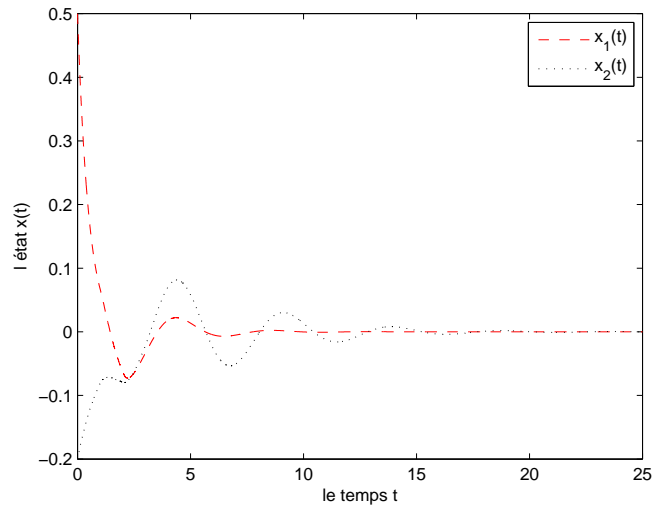


FIGURE 3.7 – Les états du système pour l'Exemple 3.5.2

et le théorème du petit gain, nous avons donné des conditions dépendantes du retard. Les résultats sont formulés sous forme des inégalités matricielles linéaires LMIs. Enfin, deux exemples numériques sont donnés à titre d'illustration et de comparaison avec des résultats antérieurs.

Chapitre 4

Analyse de la stabilité et la stabilisation des systèmes discrets avec retard variable : approximation à trois termes

4.1 Introduction

De nombreux travaux appropriés au cours des dernières décennies sont axés sur l'analyse de la stabilité des systèmes à retard. Les retards sont souvent une partie intégrante dans divers systèmes physiques tels que les systèmes de communication, la dynamique de la population, la stabilisation des navires, les systèmes d'alimentation électrique, les réacteurs nucléaires...etc. La nature de ces retards sont variables, il est bien connu que l'existence du retard dans divers systèmes peut fournir de mauvaises performances et une instabilité des systèmes dynamiques. Pour plus de détails, voir les références suivantes [61, 125, 57, 130].

Récemment, la modélisation discrète a un rôle essentiel dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie. Ainsi, la plupart des systèmes sont implémentés avec des ordinateurs numériques via le matériel d'entrée/sortie nécessaire. L'ordinateur numérique utilise l'information d'une manière discrète. D'une part, pour les considérations susmentionnées, beaucoup d'intérêts ont été fixés pour l'analyse des systèmes à retard discret dans la littérature, voir par exemple, [142, 167, 18, 115] et [129]. Basée sur la fonctionnelle du Lyapunov-Krasovskii et sur les techniques de majoration, la stabilité dépendante du retard pour les systèmes discrets a été étudiée dans [41, 82, 68] et [155].

D'une part, une autre méthode a été utilisée dans l'analyse de la stabilité des systèmes à retard discret, c'est l'approche d'entrée-sortie, cette méthode repose sur une transformation spécifique qui vise à transformer un système pur en deux sous-systèmes interconnectés. L'approche d'entrées-sorties a été mise en oeuvre dans divers travaux, tels que [170, 115] pour le cas du retard constant. Dans [42, 22], l'approche a été étendue au cas du retard variable. L'idée est de trouver une approximation de $x(k - d(k))$ pour le cas discret ou $x(t - h(t))$ pour le cas continu, de sorte que l'erreur d'approximation soit aussi faible que possible. Dans la littérature beaucoup de travaux ont montré que l'approche d'entrée-sortie peut réduire le conservatisme du système approprié. Ces travaux ont bénéficié de l'avantage de cette approche. Par la suite, nous citons quelques travaux qui ont utilisé cette approche pour le cas du système à retard. Dans [42], $x(k - d_a)$ est adopté comme approximation de $x(k - d(k))$ avec $d_a = (d_1 + d_2)/2$. Les auteurs dans [93, 3] ont introduit l'approximation à deux termes $(x(t - h_1) + x(t - h_2))/2$ comme approximation de $x(t - h(t))$ pour le cas du système continu. Puis, elle est adoptée pour les systèmes T-S Flous avec un retard variable dans [99]. Dans [150], les auteurs ont également utilisé l'approximation discrète à deux termes $(x(k - d_1) + x(k - d_2))/2$ comme approximation de $x(k - d(k))$. Puis, dans [152], cette approximation a été mise en place pour le filtrage des systèmes discrets T-S flous avec retard variable.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approximation basée sur trois termes $(x(k - d_1) + x(k - d_2) + x(k - d_a))/3$ comme approximation de $x(k - d(k))$ avec d_1 et d_2 sont les bornes inférieures et supérieures du retard. L'erreur d'approximation de l'approche proposée est inférieure à celle de deux termes. Cette méthode a été ensuite utilisée pour donner de nouvelles conditions de la stabilité.

4.2 Formulation du Problème

Nous considérons le système linéaire discret avec retard variable décrit par le modèle suivant.

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d(k)) \\ x(k) = \phi(k), \quad k = -d_2, -d_2+1, \dots, 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où $x(k) \in R^n$ est le vecteur d'état, $A, A_d \in R^{n \times n}$ sont des matrices constantes. $\phi(k), k = -d_2, -d_2+1, \dots, 0$ est une séquence de condition initiale. d_1 et d_2 sont des constantes connues.

$d(k)$ est le retard variable, satisfaisant la condition suivante

$$1 \leq d_1 \leq d(k) \leq d_2 \quad (4.2)$$

Le Lemme suivant est utilisé, grace à son rôle important dans le développement de nos principaux résultats.

Lemme 4.2.1 [75] *Pour toute matrice symétrique $M > 0$, deux entiers $l_1 < l_2$ et la fonction vectorielle $\omega : [l_1, l_1 + 1, \dots, l_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que les sommes concernées soient bien définies, alors*

$$(l_2 - l_1 + 1) \sum_{i=l_1}^{l_2} \omega^T(i) M \omega(i) \geq \left(\sum_{i=l_1}^{l_2} \omega(i) \right)^T M \left(\sum_{i=l_1}^{l_2} \omega(i) \right)$$

D'après la littérature, le Lemme précédent a une grande importance dans la réduction du conservatisme du système étudié. L'objectif principal de ce travail est de déterminer la condition de stabilité pour le système (4.1) à retard variable en utilisant le Théorème de petit gain.

Pour appliquer ce Théorème, nous devons transformer le système (4.1) en deux sous-systèmes suivants :

$$(S_1) : z(k) = \mathbf{G}\omega(k); \quad (S_2) : \omega(k) = \Delta z(k) \quad (4.3)$$

où (S_1) est un système linéaire avec retard constant, où l'opérateur \mathbf{G} est la fonction de transfert entre $z(k)$ et $\omega(k)$. (S_2) est le système de rétroaction linéaire inconnue avec retard variable, où l'opérateur Δ satisfaisant la contrainte suivante $\Delta \in \mathcal{D} \triangleq \{\Delta : \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$. $z(k) \in \mathbb{R}^z$, $\omega(k) \in \mathbb{R}^\omega$.

À partir du Théorème de petit gain donné dans [150], nous obtenons une condition suffisante pour la stabilité asymptotique robuste des sous-systèmes interconnectés dans (4.3). Pour cette raison, nous présentons le Lemme suivant.

Lemme 4.2.2 [150] : *Considérons système (4.3), et supposons que (S_1) est stable. Le système en boucle fermée formé par (S_1) et (S_2) est robustement asymptotiquement stable pour tout $\Delta \in \mathcal{D}$, s'il existe des matrices $\{T_\omega, T_z\} \in \mathbb{T}$ où*

$$\mathbb{T} \triangleq \{ \{T_\omega, T_z\} \in \mathbb{R}^{\omega \times \omega} \times \mathbb{R}^{z \times z} : T_\omega, T_z \text{ sont des matrices inversibles,} \\ \|T_\omega \circ \Delta \circ T_z^{-1}\|_\infty \leq 1 \}$$

telles que la condition suivante soit satisfaite :

$$\|T_z \circ \mathbf{G} \circ T_\omega^{-1}\|_\infty < 1. \quad (4.4)$$

4.3 Nouvelle approximation basée sur trois termes

Dans cette section, et avant de donner nos résultats, nous commençons par la présentation de l'approximation de trois termes, et leur avantage par rapport à l'approximation de deux termes.

Inspiré par le travail de [150], nous proposons une nouvelle approximation de l'état retardé $x(k - d(k))$ en utilisant les états suivants $x(k - d_1)$, $x(k - d_2)$, et $x(k - d_a)$. L'estimation de $x(k - d(k))$ peut être écrite comme suit :

$$x(k - d(k)) = \frac{1}{3}(x(k - d_1) + x(k - d_a) + x(k - d_2)) + \frac{d_{12}}{3}\tilde{\omega}(k) \quad (4.5)$$

Où $d_{12} = d_2 - d_1$, $d_a = \frac{d_2 + d_1}{2}$. $\frac{1}{3}(x(k - d_1) + x(k - d_a) + x(k - d_2))$ est l'approximation de $x(k - d(k))$ et $\frac{d_{12}}{3}\tilde{\omega}(k)$ est l'erreur d'approximation.

D'après l'équation (4.5) le système (4.1) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + \frac{1}{3}A_d x(k - d_1) + \frac{1}{3}A_d x(k - d_a) + \frac{1}{3}A_d x(k - d_2) + \frac{d_{12}}{3}A_d \tilde{\omega}(k) \\ \omega(k) &= \Delta z(k) \text{ avec } \tilde{\omega}(k) = \frac{3}{\sqrt{6}}\omega(k) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Remarque 4.3.1 L'équation $\tilde{\omega}(k) = \frac{3}{\sqrt{6}}\omega(k)$ est introduite pour montrer qu'il existe une relation entre la rétroaction (S_2) et le système (S_1), et pour donner une représentation du sous-système (S_1) sous une forme compacte, similaire à celle dans [150].

Les deux équations présentées précédemment dans (4.6) composent la formulation d'interconnexion du système (4.1).

$$\begin{cases} (S_1) : \begin{bmatrix} x(k+1) \\ z(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_1 & \frac{d_{12}}{3}A_d \\ \Phi_2 & \frac{d_{12}}{3}A_d \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} \xi(k) \\ \tilde{\omega}(k) \end{bmatrix} \\ (S_2) : \quad \omega(k) = \Delta z(k) \end{cases} \quad (4.7)$$

où

4. ANALYSE DE LA STABILITÉ ET LA STABILISATION DES SYSTÈMES DISCRETS
AVEC RETARD VARIABLE : APPROXIMATION À TROIS TERMES

$$z(k) = x(k+1) - x(k), \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} A & \frac{A_d}{3} & \frac{A_d}{3} & \frac{A_d}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} A - I & \frac{A_d}{3} & \frac{A_d}{3} & \frac{A_d}{3} \end{bmatrix}, \quad \xi^T(k) = [x^T(k) \quad x^T(k-d_1) \quad x^T(k-d_a) \quad x^T(k-d_2)].$$

La position de $d(k)$ dans l'intervalle $[d_1 d_2]$ nous donne deux sous-intervalles $[d_1 d_a]$ et $[d_a d_2]$. Donc, l'équation (4.5), peut s'écrire sous les deux cas suivants :

Cas 1 : $d_1 \leq d(k) \leq d_a$

$$\begin{aligned} \frac{d_{12}}{3} \tilde{\omega}(k) &= [x(k-d(k)) - \frac{1}{3}(x(k-d_1) + x(k-d_a) + x(k-d_2))] \\ &= \frac{1}{3} \left[- \underbrace{\sum_{i=k-d(k)}^{k-d_1-1} z(i)}_{\omega_1(k)} + 2 \underbrace{\sum_{i=k-d_a}^{k-d(k)-1} z(i)}_{\omega_2(k)} + \underbrace{\sum_{i=k-d_2}^{k-d_a-1} z(i)}_{\omega_3(k)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \{ \omega_1(k) + \omega_2(k) + \omega_3(k) \} \end{aligned}$$

Cas 2 : $d_a \leq d(k) \leq d_2$

$$\begin{aligned} \frac{d_{12}}{3} \tilde{\omega}(k) &= [x(k-d(k)) - \frac{1}{3}(x(k-d_1) + x(k-d_a) + x(k-d_2))] \\ &= \frac{1}{3} \left[- \underbrace{\sum_{i=k-d_a}^{k-d_1-1} z(i)}_{\omega_1(k)} - 2 \underbrace{\sum_{i=k-d(k)}^{k-d_a-1} z(i)}_{\omega_2(k)} + \underbrace{\sum_{i=k-d_2}^{k-d(k)-1} z(i)}_{\omega_3(k)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \{ \omega_1(k) + \omega_2(k) + \omega_3(k) \} \end{aligned}$$

Le retard variable $d(k)$ a été isolé dans Δ .

Avant de continuer, le Lemme suivant assure que la norme l_2 de Δ est borné par un.

Lemme 4.3.1 : *L'opérateur $\Delta : z(k) \rightarrow \omega(k)$ satisfait la condition $\|\Delta\|_\infty \leq 1$.*

Preuve 4.3.1 :

Cas 1 :

Nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwartz [42].

$$\begin{aligned} \frac{d_{12}^2}{9} \|\tilde{\omega}(k)\|^2 &= \frac{1}{9} \|\omega_1(k) + \omega_2(k) + \omega_3(k)\|^2 \\ &\leq \frac{1}{9} \{ \|\omega_1(k)\|^2 + \|\omega_2(k)\|^2 + \|\omega_3(k)\|^2 \} \end{aligned}$$

Nous continuons la preuve pour chaque terme séparément. La fonction $j = p(k) = k - d(k)$ est croissante. Par conséquent, l'inverse $k = p^{-1}(j) = q(j)$ est bien défini et

4.3. Nouvelle approximation basée sur trois termes

satisfait $|q(j) - (j + d_1)| \leq d_{12}/2$. Alors, nous sommions $\omega_1(k)$ dans k , nous changeons l'ordre de la sommation et nous prenons en compte que $z(k) = 0, k \leq 0$, nous trouvons que

$$\begin{aligned}
 \|\omega_1(k)\|_{l_2}^2 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (d(k) - d_1) \sum_{j=k-d(k)}^{k-d_1-1} \|z(j)\|^2 \\
 &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} (d(k) - d_1) \sum_{k=q(j)}^{j+d_1-1} \|z(j)\|^2 \right| \\
 &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} (d(k) - d_1)(q(j) - (j + d_1)) \|z(j)\|^2 \right| \\
 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (d_a - d_1) \frac{d_{12}}{2} \|z(j)\|^2 \\
 &= \frac{d_{12}^2}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \|z(j)\|^2 \\
 &= \frac{d_{12}^2}{4} \|z(k)\|_{l_2}^2
 \end{aligned}$$

Pour $\omega_2(k)$ et $\omega_3(k)$, nous suivons le même processus, et nous aurons

$$\|\omega_2(k)\|_{l_2}^2 \leq 4 \frac{d_{12}^2}{4} \|z(k)\|_{l_2}^2, \quad \|\omega_3(k)\|_{l_2}^2 \leq \frac{d_{12}^2}{4} \|z(k)\|_{l_2}^2$$

Ensuite, ajouter les trois termes ensemble

$$\begin{aligned}
 \frac{d_{12}^2}{9} \|\tilde{\omega}(k)\|_{l_2}^2 &\leq \frac{1}{9} \left(\frac{d_{12}^2}{4} + 4 \frac{d_{12}^2}{4} + \frac{d_{12}^2}{4} \right) \|z(k)\|_{l_2}^2 \\
 &= \frac{d_{12}^2}{6} \|z(k)\|_{l_2}^2
 \end{aligned}$$

En substituant $\tilde{\omega}(k)$ par la relation donnée dans l'équation (4.6), on obtient

$$\|\omega(k)\|_{l_2}^2 \leq \|z(k)\|_{l_2}^2.$$

Cas 2 :

Pour le **Cas 2**, en utilisant un processus de preuve similaire à celui du **Cas 1**, nous obtenons les mêmes résultats.

Ceci complète la preuve.

Remarque 4.3.2 *Le calcul du gain l_2 , nous permet d'extraire une étude comparative. Les auteurs dans [42] ont défini $x(k-d_a)$ comme approximation du $x(k-d(k))$ (l'approximation d'un terme). [150] a défini une approximation du $x(k-d(k))$ basée sur deux termes $\frac{1}{2}(x(k-d_1) + x(k-d_2))$. D'un point de vue purement numérique, l'évaluation du gain l_2 montre que le gain l_2 est plus petit en utilisant l'approximation de trois termes que ceux obtenus en utilisant l'approximation de un ou de deux termes, comme le montrera le Tableau 4.1.*

Tableau 4.1 – Le gain l_2 concernant différentes approximations.

Méthodes	[42]	[150]	Approximation de trois termes
Le gain l_2	$\frac{d_{12}}{\sqrt{2}}$	$\frac{d_{12}}{2}$	$\frac{d_{12}}{\sqrt{6}}$

Remarque 4.3.3 *Depuis les considérations susmentionnées, nous notons que l'approximation de trois termes est plus générale que celle basée sur un ou deux termes. Ainsi*

★ Si $x(k-d_a) = \frac{1}{2}\{x(k-d_1) + x(k-d_2)\} + \frac{d_{12}}{6}\tilde{\omega}(k)$. (4.5) est réduit à

$$x(k-d(k)) = \frac{1}{2}(x(k-d_1) + x(k-d_2)) + \frac{d_{12}}{2}\tilde{\omega}(k)$$

qui se réfère à l'approximation de deux termes [150]

★ Si $x(k-d_1) + x(k-d_2) = 2(x(k-d_a) + \tilde{\omega}(k))$. (4.5) est réduit à

$$x(k-d(k)) = x(k-d_a) + \frac{d_{12}}{\sqrt{2}}\tilde{\omega}(k)$$

qui se réfère à l'approximation d'un terme [42], où $\tilde{\omega}(k) = \frac{3}{\sqrt{3}}\omega(k)$.

Remarque 4.3.4 *Soit $V(k)$ une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii qui garantit la stabilité du sous-système (S_1) , et soit*

$$J \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} [z^T(k)Sz(k) - \omega^T(k)S\omega(k)].$$

Il est bien connu que la condition suivante

$$\mathcal{W} \triangleq V(\infty) - V(0) + J = \sum_{k=0}^{\infty} [J(k) + \Delta V(k)] < 0 \quad (4.8)$$

garantit que la norme H_∞ de (S_1) est inférieure à 1. Par conséquent (4.8) est une condition suffisante pour le problème du lemme réel borné. Si la condition (4.8) est satisfaite, selon le Lemme 4.2.2, on peut conclure que le système (S_1) est stable. Cela signifie que $\|T \circ \mathbf{G} \circ T^{-1}\|_\infty < 1$ où $S = T^T T$.

4.4 Analyse de la stabilité

Le sous-système (S_1) a trois états retardés avec des retards constants. Donc, la condition du petit gain dans le Lemme 4.2.2 ne peut pas être implémentée directement pour résoudre (S_1) par le Lemme réel borné. Une autre façon possible est d'appliquer la méthode d'augmentation d'état (Anglais : lifting method) utilisée dans [168] pour convertir (S_1) en un système sans retard. Le Théorème suivant présente les conditions LMIs satisfaisant la stabilité asymptotique du système (S_1) et la condition du petit gain $\|T \circ \mathbf{G} \circ T^{-1}\|_\infty < \gamma$ pour un γ donné $0 < \gamma < 1$.

Théorème 4.4.1 [36] *Soient les scalaires $d_2 \geq d_1 \geq 1$ et $\gamma > 0$, le sous-système (S_1) est asymptotiquement stable et satisfait la condition $\|T \circ \mathbf{G} \circ T^{-1}\|_\infty < \gamma$.*

Lemme réel borné :

i) *S'il existe des matrices positives P et S telle que la condition suivante est vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} -P & P\tilde{A} & P\tilde{B} & 0 \\ * & -P & 0 & \tilde{C}^T S \\ * & * & -\frac{2}{3}\gamma^2 S & \tilde{D}^T S \\ * & * & * & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (4.9)$$

où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & [\mathbf{0}]_1 & \frac{1}{3}A_d & [\mathbf{0}]_2 & \frac{1}{3}A_d & [\mathbf{0}]_2 & \frac{1}{3}A_d \\ & & & I_{d_2n} & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} A - I_n & [\mathbf{0}]_1 & \frac{1}{3}A_d[\mathbf{0}]_2 & \frac{1}{3}A_d & [\mathbf{0}]_2 & \frac{1}{3}A_d \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \frac{d_{12}}{3}A_d \\ 0_{d_2n \times n} \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \frac{d_{12}}{3}A_d, \quad [\mathbf{0}]_1 = 0_{n \times (d_1-1)n}, \quad [\mathbf{0}]_2 = 0_{n \times (\frac{d_{12}}{2}-1)n}$$

Fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii :

ii) s'il existe des matrices $P > 0, S > 0, Q_i > 0 (i=1,2,3), R_j > 0 (j=1,2)$, tel que

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \begin{bmatrix} \Sigma_2^T P & d_1 \Sigma_3^T R_1 & d_2 \Sigma_3^T R_2 & \Sigma_3^T S \end{bmatrix} \\ * & \text{diag}\{-P, -R_1, -R_2, -S\} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.10)$$

où

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \begin{bmatrix} R_1 & 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \\ * & \text{diag}\{\Sigma_{12}, -Q_2, \Sigma_{13}, -\frac{2}{3}\gamma^2 S, \} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{11} = Q_1 + Q_2 + Q_3 - P - R_1 - R_2$$

$$\Sigma_{12} = -Q_1 - R_1, \quad \Sigma_{13} = -Q_3 - R_2$$

$$\Sigma_2 = [\Phi_1 \quad \frac{d_{12}}{3} A_d]$$

$$\Sigma_3 = [\Phi_2 \quad \frac{d_{12}}{3} A_d]$$

Preuve 4.4.1 :

Lemme réel borné : Définissons le vecteur d'état augmenté suivant

$$\hat{x}(k) = \text{col}\{x(k), x(k-1), \dots, x(k-d_2)\} \quad (4.11)$$

et en utilisant la méthode d'augmentation d'état [168] pour convertir (S_1) en un système sans retard, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ z(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \tilde{\omega}(k) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

La fonction de transfert G entre $z(k)$ et $\omega(k)$ garantit que la norme H_∞ ($\|T \circ \mathbf{G} \circ T^{-1}\|_\infty < \gamma$) du (S_1) est inférieure à γ . Selon le Lemme 3.2 dans [119] et définissant $P = X$ et $S = L$. Alors la condition (4.9) garantit que $\|T \circ \mathbf{G} \circ T^{-1}\|_\infty < \gamma$. Donc, il est clair que (S_1) est asymptotiquement stable.

Fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii : Considérons la fonctionnelle du Lyapunov-Krasovskii discrète du système (S_1) comme suit

$$V(x(k)) = V_1(x(k)) + V_2(x(k)) + V_3(x(k)) \quad (4.13)$$

où

$$V_1(x(k)) = x^T(k) P x(k)$$

$$V_2(x(k)) = \sum_{i=k-d_1}^{k-1} x^T(i)Q_1x(i) + \sum_{i=k-d_a}^{k-1} x^T(i)Q_2x(i) + \sum_{i=k-d_2}^{k-1} x^T(i)Q_3x(i).$$

$$V_3(x(k)) = \sum_{l=1}^2 d_l \sum_{j=-d_l}^{-1} \sum_{i=k+j}^{k-1} z^T(i)R_lz(i).$$

et $z(i) = x(i+1) - x(i)$, $d_a = (d_2 + d_1)/2$.

La différence de $V(k)$ peut être calculée comme suit

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) = & x^T(k)(Q_1 + Q_2 + Q_3 - P)x(k) + x^T(k+1)Px(k+1) \\ & - x^T(k-d_1)Q_1x(k-d_1) - x^T(k-d_a)Q_2x(k-d_a) \\ & - x^T(k-d_2)Q_3x(k-d_2) + z^T(k)(d_1^2R_1 + d_2^2R_2)z(k) \\ & - d_1 \sum_{i=k-d_1}^{k-1} z^T(i)R_1z(i) - d_2 \sum_{i=k-d_2}^{k-1} z^T(i)R_2z(i) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nous appliquons le Lemme 4.2.1 pour traiter les termes dans (4.14), nous obtenons

$$-d_1 \sum_{i=k-d_1}^{k-1} z^T(i)R_1z(i) \leq -\xi_1^T(k)R_1\xi_1(k) \quad (4.15)$$

$$-d_2 \sum_{i=k-d_2}^{k-1} z^T(i)R_2z(i) \leq -\xi_2^T(k)R_2\xi_2(k) \quad (4.16)$$

avec $\xi_1(k) = x(k) - x(k-d_1)$, $\xi_2(k) = x(k) - x(k-d_2)$.

En remplaçant les termes dans (4.14) par (4.15) et (4.16), nous obtenons

$$\Delta V(x(k)) = \xi^T(k)[\bar{\Sigma}_1 + \Phi_1^T P \Phi_1 + \Phi_2^T (d_1^2 R_1 + d_2^2 R_2) \Phi_2] \xi(k) \quad (4.17)$$

où

$$\bar{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \begin{bmatrix} R_1 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \\ * & \text{diag}\{\Sigma_{12}, -Q_2, \Sigma_{13}\} \end{bmatrix}$$

Nous utilisons le complément de Schur, (4.10) implique que $\Delta V(x(k)) < 0$, ce qui signifie que (S_1) est asymptotiquement stable.

Soit $S > 0$

$$\begin{aligned} J &\triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{[z^T(k)S z(k) - \omega^T(k)\gamma^2 S \omega(k)]}_{j(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [z^T(k)S z(k) - \tilde{\omega}^T(k) \frac{2}{3} \gamma^2 S \tilde{\omega}(k)] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nous prenons $\Delta V(x(k))$ de (S_1) , nous avons sous les conditions initiales zéro

$$\begin{aligned} J &\leq V(\infty) - V(0) + J = \sum_{k=0}^{\infty} [j(k) + \Delta V(k)] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^T(k) [\Sigma_1 + \Sigma_2^T P \Sigma_2 + \Sigma_3^T (d_1^2 R_1 + d_2^2 R_2 + S) \Sigma_2] \zeta(k) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Où $\zeta^T(k) = [\xi^T(k) \quad \tilde{\omega}^T(k)]$.

Utilisons le complément de schur, (4.19) implique (4.10). Pour $S = T^T T$, $J \leq 0$ signifie que $\|T \circ \mathbf{G} \circ T^{-1}\|_{\infty} < \gamma$. Il est facile de voir que (4.10) satisfaisant $\|T \circ \mathbf{G} \circ T^{-1}\|_{\infty} < \gamma$, la preuve est terminée.

Remarque 4.4.1 Il a été observé que l'utilisation de $d_a = (d_2 + d_1)/2$ dans la fonctionnelle de Lyapunov construite, peut améliorer les performances de stabilité de nombreux systèmes. D'autre part, l'erreur d'approximation de l'approche de trois termes montre également que l'introduction de $x(k - d_a)$ joue un rôle important pour obtenir une erreur d'approximation plus petite que les erreurs d'autres approches basées sur un seul ou deux termes.

Remarque 4.4.2 Le nombre de variable de décision dans le Théorème 4.4.1 a été réduit à $\frac{7}{2}n^2 + \frac{7}{2}n$, qui est plus petit que $9n^2 + 3n$ variables de décision utilisées dans [14, 88], $\frac{11}{2}n^2 + \frac{9}{2}n$ variables utilisées dans [110], $4n^2 + 3n$ variables utilisées dans [51] $8n^2 + 3n$ variables utilisées dans [72]

4.5 Conception du contrôleur

Cette section est consacrée à l'étude du problème de conception du contrôleur de retour d'état, dont l'objectif est de garantir la stabilité asymptotique du système à retard

discret. Le système discret contrôlé est représenté par l'équation suivante

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.20)$$

Il faut noter que dans la littérature plusieurs auteurs ont étudié la stabilisation du système (4.20), et ont choisi comme loi de commande $u(k) = Kx(k - d(k))$. Différentes formes de loi de commande sont utilisées dans [14, 110, 82]. Dans cette section, nous essayons de stabiliser notre système avec une loi de commande différente de la loi utilisée dans [14, 110, 82]. La commande de retour d'état est décrite par l'équation suivante :

$$u(k) = K_1x(k) + K_2x(k - d(k)) \quad (4.21)$$

Où K_1, K_2 sont les gains à déterminer et $d(k)$ est un retard variable satisfaisant (4.2). En appliquant la loi de commande (4.21) au système (4.20) et en utilisant (4.5), le système en boucle fermée est obtenu à partir de (4.20) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} x(k+1) = & (A + BK_1)x(k) + \frac{1}{3}A_dx(k - d_1) + \frac{1}{3}A_dx(k - d_a) \\ & + \frac{1}{3}A_dx(k - d_2) + \frac{d_{12}}{3}A_d\tilde{\omega}(k) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Où $A_d = BK_2$.

Maintenant, nous présentons le Théorème suivant qui garantit la stabilité asymptotique du système (4.22) en boucle fermée.

Théorème 4.5.1 [36] *Etant donné les scalaires $d_2 \geq d_1 \geq 1$, le système linéaire (4.22) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices, $P > 0, S > 0, X > 0, Z > 0, Q_i > 0 (i=1,2,3), R_j > 0, Y_j > 0 (j=1,2), K_1$ et K_2 tel que*

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_2^T & d_1\tilde{\Sigma}_3^T & d_2\tilde{\Sigma}_3^T & \tilde{\Sigma}_3^T \end{bmatrix} \\ * & \text{diag}\{-X, -Y_1, -Y_2, -Z\} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.23)$$

avec des contraintes suivantes $PX = I, R_1Y_1 = I, R_2Y_2 = I, SZ = I$.

où $\tilde{\Sigma}_2 = [\tilde{\Phi}_1 \quad \frac{d_{12}}{3}A_d]$

$\tilde{\Sigma}_3 = [\tilde{\Phi}_2 \quad \frac{d_{12}}{3}A_d]$.

$\tilde{\Phi}_1 = [A + BK_1 \quad \frac{A_d}{3} \quad \frac{A_d}{3} \quad \frac{A_d}{3}]$.

$\tilde{\Phi}_2 = [A + BK_1 - I \quad \frac{A_d}{3} \quad \frac{A_d}{3} \quad \frac{A_d}{3}]$

Preuve 4.5.1 *Remplaçant X, Z, Y_1, Y_2 par $P^{-1}, S^{-1}, R_1^{-1}, R_2^{-1}$ respectivement, en*

prenant en considération que $A = A + BK_1$ et $A_d = BK_2$. Ensuite, nous appliquons le Lemme de complément de Schur, nous obtenons les conditions proposées dans Théorème 4.4.1. Par conséquent, D'après le théorème 4.4.1, le résultat désiré est satisfait.

□

Remarque 4.5.1 La résolution du LMI à l'aide de Lmitoolbox dans MATLAB est difficile, alors, pour mettre en évidence le problème, il faut le transformer en un problème d'optimisation. En vérifiant ensuite la satisfaction des LMIs en suivant la même procédure que celle présentée dans [13]. La résolution de ce problème peut se faire facilement en utilisant l'algorithme de cône (CCL) présenté dans [97], qui est adopté comme l'Algorithme 1.

Algorithme 1 Pour maximiser d_2 :

Etape 1 :

Choisissez une valeur suffisamment petite de $d_2 > d_1 \geq 1$ et une tolérance ϵ (par exemple $\epsilon = 10^{-6}$). Soit $\{P_0, X_0, R_{10}, Y_{10}, R_{20}, Y_{20}, S_0, Z_0\} = \{I\}$ telle qu'il existe une solution pour les conditions (4.23) et (4.24)

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & X \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} R_1 & I \\ I & Y_1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} R_2 & I \\ I & Y_2 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} S & I \\ I & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.24)$$

Prenez $d_{2max} = d_2, k = 0$.

Etape 2 :

Trouver une solution au problème d'optimisation suivant pour les variables $\{P, X, R_1, Y_1, R_2, Y_2, S, Z\}$

$$\begin{cases} \text{Minimiser la Trace} & P_k X + X_k P + R_{1k} Y_1 + Y_{1k} R_1 \\ & + R_{2k} Y_2 + Y_{2k} R_2 + S_k Z + Z_k S \\ \text{tel que} & (4.23) \text{ et } (4.24) \end{cases}$$

Prenez $P_{k+1} = P, X_{k+1} = X, R_{1(k+1)} = R_1, Y_{1(k+1)} = Y_1, R_{2(k+1)} = R_2, Y_{2(k+1)} = Y_2, S_{k+1} = S, Z_{k+1} = Z$

Etape 3 :

Si $\| P_{k+1} - X_{k+1}^{-1} \| \leq \epsilon, \| R_{1(k+1)} - Y_{1(k+1)}^{-1} \| \leq \epsilon, \| R_{2(k+1)} - Y_{2(k+1)}^{-1} \| \leq \epsilon, \text{ et } \| S_{k+1} - Z_{k+1}^{-1} \| \leq \epsilon$

sont satisfait, alors $d_{2max} = d_2$, incrémenter d_2 , et revenir à l'Etape 2. Si elle n'est pas satisfaite dans un certain nombre maximal d'itérations, Alors quitter l'algorithme. Autre-

ment, mettre $k = k + 1$ et retournez à l'Etape 2.

4.6 Exemples numériques

Pour illustrer l'efficacité de la méthode proposée, cette section fournira trois exemples. On montrera que les résultats proposés peuvent fournir des résultats moins conservatifs que les résultats récents proposés dans la littérature.

Exemple 4.6.1 *Considérons le système linéaire à retard discret*

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.05 & 0.9 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix} x(k-d(k)) \quad (4.25)$$

Dans cet exemple, nous montrons les avantages de la nouvelle approximation du modèle. Les auteurs dans [150] ont adopté la transformation du modèle présentée dans d'autres travaux tels que [42] et [23] et formuler ses lemmes spécifiques. Nous comparons notre approche en utilisant le théorème 4.4.1 avec les résultats dans [150] et les résultats obtenus par les lemmes présentés dans [150].

Tableau 4.2 présente le nombre de variable de décision de différentes méthodes quand $8 \leq d(k) \leq 14$ et le minimum de γ .

Tableau 4.2 – Le minimum γ pour différentes méthodes quand $8 \leq d(k) \leq 14$.

Méthodes	nombre de variable de décision	γ
Lemme 3 pour \tilde{S}_{h_1} [150]	174	1.00
Lemme 3 pour \tilde{S}_{h_m} [150]	303	0.79
Corollaire 1-(ii) pour \tilde{S}_1 [150]	18	0.53
Corollaire 1-(i) pour \tilde{S}_1 [150]	468	0.49
Théorème 4.4.1-(ii)[36]	21	0.44
Théorème 4.4.1-(i)[36]	468	0.42

On peut constater que le minimum de γ obtenu par notre méthode est plus petit que celui donné par d'autres méthodes. D'après tableau 4.2 on peut voir que le théorème 4.4.1-(ii) a besoin plus de variables de décision et en même temps donne un minimum de γ plus petit que le corollaire 1-(ii) dans [150], tandis que celui du théorème 4.4.1-(i) et avec le même nombre de variables de décision, nous obtenons un γ plus petit que le corollaire 1-(i) dans [150] ce qui signifie que l'approximation à trois

4. ANALYSE DE LA STABILITÉ ET LA STABILISATION DES SYSTÈMES DISCRETS
AVEC RETARD VARIABLE : APPROXIMATION À TROIS TERMES

termes donne des résultats moins conservatifs que l'approximation à deux termes. Le tableau 4.3 présente les bornes maximales du retard obtenues par le théorème 4.4.1-i) et ii).

Tableau 4.3 – La borne maximale d_2 pour différentes valeurs de d_1 .

d_1	2	4	6	7	10	15	20	25
[72]	-	-	18	18	20	23	27	31
[51]	-	-	18	18	20	23	27	31
[110]	19	19	20	20	21	24	27	-
[150]-(ii)	17	17	18	18	20	23	27	31
[60]	20	21	21	-	22	24	27	-
Théorème 4.4.1-(ii)[36]	20	20	21	21	22	25	28	32
[150]-(i)	17	19	21	22	25	30	35	40
Théorème 4.4.1-(i)[36]	20	22	24	25	28	33	38	43

D'après le tableau 4.3, nous pouvons conclure que la méthode proposée donne des résultats moins conservatifs que les résultats existants dans la littérature. De plus, la relation entre $\|X \circ G \circ X^{-1}\|_\infty$ et d_2 lorsque $d_1 = 7$ est représentée dans la figure. 4.1

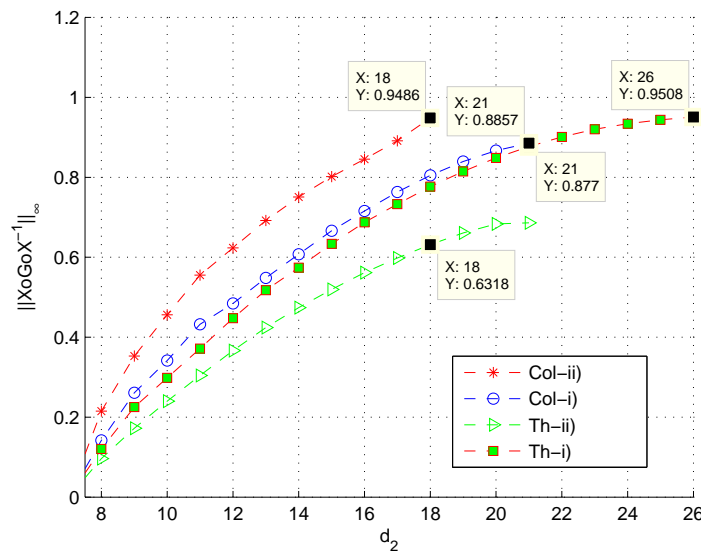


FIGURE 4.1 – La condition $\|X \circ G \circ X^{-1}\|_\infty$ en fonction du borne d_2 ($d_1 = 7$).

D'après la figure. 4.1, nous observons que l'approximation avec trois termes a une norme $\|X \circ G \circ X^{-1}\|_\infty$ plus petite. Par exemple lorsque $d_1 = 7$, la norme $\|X \circ G \circ X^{-1}\|_\infty$

obtenue par le théorème 4.4.1-i) et ii)((Th-i) et (Th-ii)) est 0.6318 quand $d_2 = 18$ et 0.877 quand $d_2 = 21$ respectivement, tandis que celle de l'approximation avec deux termes dans [150] obtenue par le corollaire 1-i) et ii)((Col-i) et (Col-ii)) est 0.9486 et 0.8857 respectivement.

D'un autre côté, on peut observer D'après la figure. 4.1 que le théorème 4.4.1-i) donne une borne de retard $d_2 = 26$ plus grande que celle obtenue par le corollaire 1-i) dans [150] ($d_2 = 21$). Cette comparaison montre que la méthode proposée est moins conservative.

Exemple 4.6.2 Considérons le système linéaire à retard discret suivant :

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.05 & 0.7 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix} x(k-d(k)) \quad (4.26)$$

Pour d_1 donné $d_1 = \{2, 5, 6, 7, 10, 20\}$, les bornes supérieures maximales d_2 obtenues par [88] sont $\{9, 11, 12, 13, 16, 26\}$, tandis que les bornes de retard en utilisant le théorème 4.4.1-(ii) sont plus grandes $d_2 = \{12, 15, 16, 17, 20, 30\}$, ce qui signifie que la méthode proposée est moins conservative. Le Tableau 4.4 montre les résultats du borne maximale d_2 pour différentes valeurs de d_1 .

Tableau 4.4 – La borne maximale d_2 pour différentes valeurs de d_1 .

d_1	2	5	6	7	10	20	Nombre de variables de décision
[14]	7	9	10	11	14	24	42
[75]	8	10	11	12	15	25	18
[51]	9	11	12	13	16	26	22
[150]-(ii)	9	11	12	13	16	26	18
[150]-(i)	9	13	14	15	17	27	-
Théorème 4.4.1-(ii)[36]	10	13	14	15	18	28	21
Théorème 4.4.1-(i)[36]	12	15	16	17	20	30	-

Il est clair D'après le tableau 4.4 que les résultats obtenus par la méthode proposée sont meilleurs que ceux existants dans la littérature. D'après la dernière colonne du tableau 4.4 concernant le nombre de variables de décision, nous observons que la méthode proposée nécessite plus de variables de décision que [75] et [150], et plus petite que d'autres méthodes, ce qui signifie que la méthode proposée reste efficace et donne des

4. ANALYSE DE LA STABILITÉ ET LA STABILISATION DES SYSTÈMES DISCRETS AVEC RETARD VARIABLE : APPROXIMATION À TROIS TERMES

résultats moins conservatifs.

D'un autre côté, la figure 4.2 décrit la relation entre $\|X \circ G \circ X^{-1}\|_\infty$ et d_1 quand $d_2 = 8$.

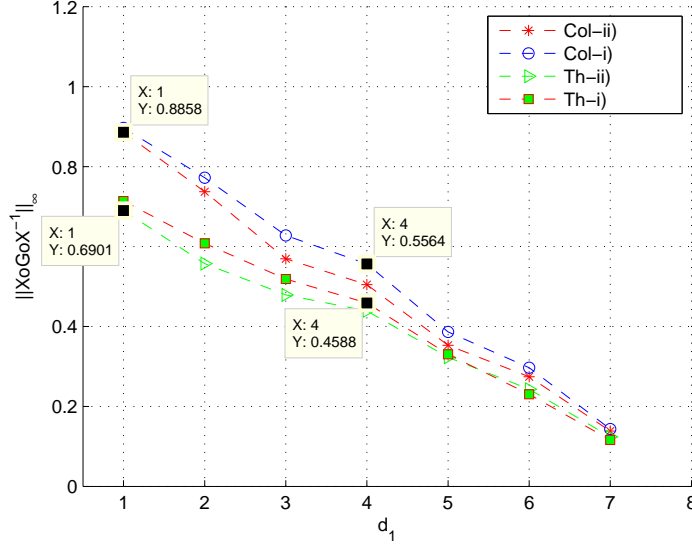


FIGURE 4.2 – La condition $\|X \circ G \circ X^{-1}\|_\infty$ en fonction de la borne inférieure d_1 ($d_2 = 8$).

La figure 4.2 montre que lorsque d_1 augmente, la norme $\|X \circ G \circ X^{-1}\|_\infty$ diminue et les résultats obtenus sont meilleurs que ceux dans la littérature, ce qui signifie que les résultats obtenus sont moins conservatifs.

Exemple 4.6.3 Considérons le modèle du système de pendule inversé [110], présenté sur la Figure 4.3 avec la description continue suivante

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3(M+m)g}{l(4M+m)} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{l(4M+m)} \end{bmatrix} u(t) \quad (4.27)$$

Lorsque $M = 8\text{kg}$, $m = 2.0\text{kg}$, $l = 0.5\text{m}$, $g = 9.8\text{m/s}^2$ et en choisissant le temps d'échantillonnage $T_s = 30\text{ms}$, alors le système (4.27) peut être transformé en système à temps discret avec les paramètres suivants

$$A = \begin{bmatrix} 1.00078 & 0.0301 \\ 0.5202 & 1.0078 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.005 \end{bmatrix}$$

Nous considérons cet exemple pour illustrer les avantages de la méthode proposée. Appliquant le théorème 4.5.1, quand $d_1 = 1$, La valeur maximale de d_2 qui garantit la

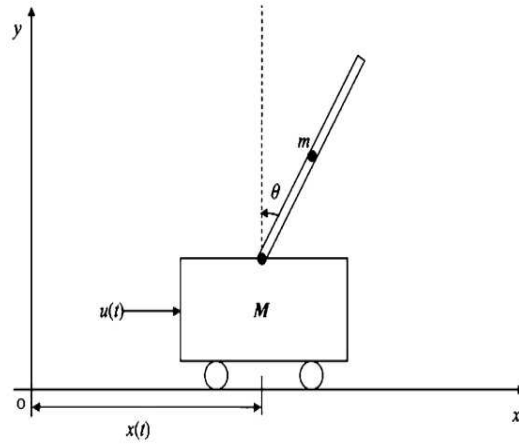


FIGURE 4.3 – Système de pendule inversé.

stabilité asymptotique du système (4.20) est $d_2 = 8$ pour $K = K_1 = K_2$, et $d_2 > 15$ pour $K_1 \neq K_2$, tandis que celle de [82, 14, 75, 110] est respectivement $\{3, 4, 5, 6\}$. ce qui signifie que notre approche donne une plus grande borne du retard. Le tableau 4.5 résume les études consacrées à la stabilisation du système (4.20) et présente la liste des bornes maximales du retard et du gain de contrôle obtenus pour chaque travail. La dernière colonne du tableau 4.5 donne la liste du nombre d'itérations satisfaisant au théorème 4.5.1.

Tableau 4.5 – La borne maximale du retard d_2 et le gain K .

Méthodes	d_2	K	nombre d'itérations
[82]	3	[102.9100 80.7916]	-
[14]	4	[110.6827 34.6980]	-
[75]	5	[110.6827 34.6980]	-
[110]	6	[110.6827 34.6980]	-
Théorème 4.5.1 $K_1 = K_2$ [36]	8	[85.9857 26.5128]	473
Théorème 4.5.1 $\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$ [36]	> 15	$\begin{bmatrix} 98.3007 & 7.0841 \\ -0.0005 & 0.0020 \end{bmatrix}$	59

Premièrement, il faut noter que le théorème 4.5.1 est satisfait avec un gain de contrôleur petit que ceux de [82, 14, 75] et [110]. De plus, le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une solution au théorème 4.5.1 quand $K = K_1 = K_2$ est 473, tandis que

4. ANALYSE DE LA STABILITÉ ET LA STABILISATION DES SYSTÈMES DISCRETS AVEC RETARD VARIABLE : APPROXIMATION À TROIS TERMES

celui de $K_1 \neq K_2$ est 59, ce qui signifie que la méthode proposée avec $K_1 \neq K_2$ est meilleure que $K = K_1 = K_2$. Le gain du contrôleur dans la dernière ligne du tableau 4.5 est obtenu pour $d_1 = 1$ et $d_2 = 15$.

La figure 4.4 et figure 4.5 représentent le système en boucle fermée en utilisant le gain du contrôleur $K = K_1 = K_2$ et $K_1 \neq K_2$ respectivement.

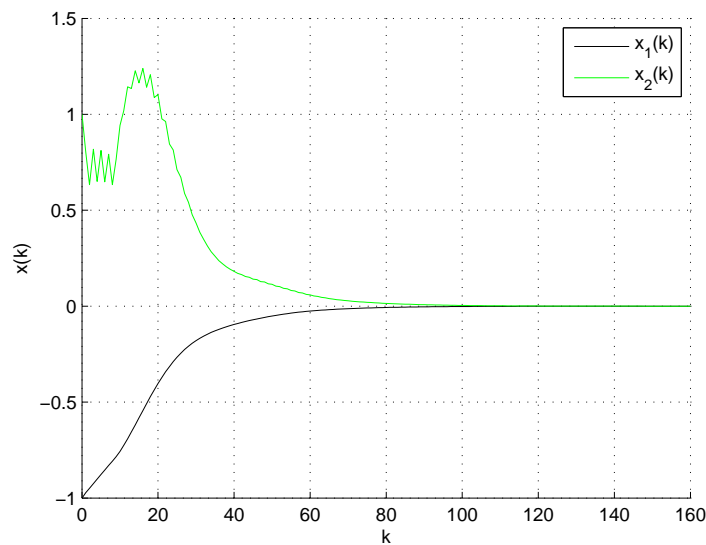


FIGURE 4.4 – Les états du système en boucle fermée $x_1(k)$ et $x_2(k)$ quand $K = K_1 = K_2$

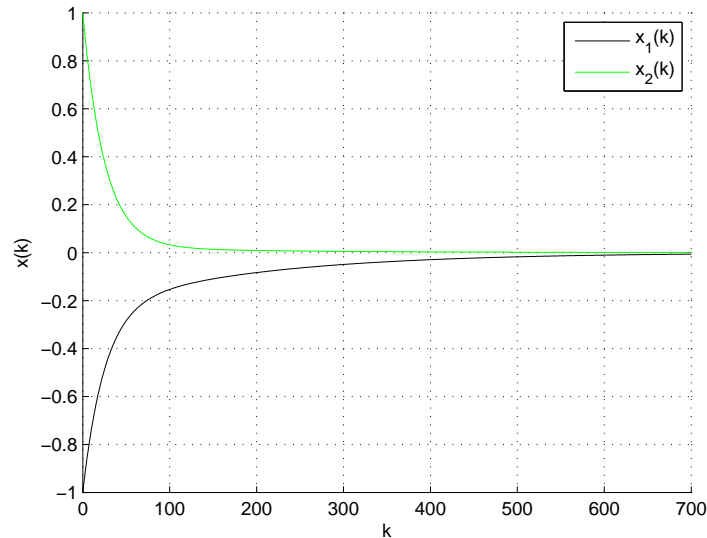


FIGURE 4.5 – La trajectoire des états $x_1(k)$ et $x_2(k)$ quand $K_1 \neq K_2$

La figure 4.4 montre que les états convergent vers zéro pour un k faible, alors que ceux représentés dans la figure 4.5 nécessite plus de temps k pour converger vers zéro. D'après cet exemple, nous déduirons que notre méthode peut contrôler un système pratique. la simulation est réalisée à l'aide des valeurs suivantes : les valeurs initiales des états sont $x(0) = [-1 \ 1]^T$ et le retard $d(k)$ est supposé $d(k) = 1 + 7 | \sin(k\pi/2) | \in [1 \ 8]$.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la stabilité dépendante du retard pour les systèmes linéaires discrets, à l'aide d'une nouvelle transformation du modèle effectuant une approximation à trois termes, une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii et le théorème du petit gain direct. Par la suite, le problème de la conception de la loi de commande par retour d'état pour les systèmes à temps discret a été étudié et une condition suffisante pour la solvabilité de ce problème a été donnée en utilisant l'algorithme de linéarisation de cône (CCL). Les critères de stabilité et stabilisation ont été présentés en termes d'inégalité matricielle linéaire. Enfin, les résultats sont testés en appelant trois exemples de la littérature. Il est préférable de mentionner que ces résultats sont extensibles pour le problème de performance H_∞ de nombreux types de systèmes.

Chapitre 5

Amélioration de la performance H_∞ pour des systèmes linéaires à retard variable

5.1 Introduction

Il est bien connu que l'existence du retard dans les systèmes dynamiques peut conduire à des oscillations ; divergences ou instabilité et mauvaise performance. Le retard peut être trouvé dans divers systèmes pratiques tels que les réseaux de transmission, le réseau contrôlé, les procédés chimiques et les longues lignes de transmission dans les systèmes pneumatiques [92, 70]. Au cours des dernières décennies, le problème de l'analyse de la stabilité des systèmes à retard a suscité un grand intérêt, voir [1, 127] pour les systèmes 1–D et [106, 128] pour les systèmes 2–D. De manière générale, les conditions de la stabilité des systèmes à retard peuvent être classées en deux catégories : l'une dite critère de stabilité dépendante du retard et l'autre est un critère de stabilité indépendante du retard. Il est bien connu que les critères de stabilité dépendants du retard sont généralement moins conservatifs que les critères de stabilité indépendante du retard, en particulier lorsque le retard est faible.

Nombreuses approches ont été développées dans la littérature pour réduire le conservatisme des conditions de stabilité. Par exemple, dans [40], la méthode de transformation du modèle descripteur est considérée. L'amélioration de la technique de la majoration est proposée dans [15, 87]. Dans [166, 85], Une technique basée sur des matrices de pondération libre est développée. En considérant les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii

appropriées et en ajoutant les matrices de pondération libre, des conditions dépendantes du retard qui garantissent la stabilité exponentielle globale sont données dans [78, 79, 80] et dans [81]. L'approche d'entrées-sorties a été l'objet d'une recherche profonde par plusieurs chercheurs. L'approche a été étudiée dans [99]. Dans [172, 173], une fonctionnelle complète de Lyapunov-Krasovskii augmentée a été utilisée avec la technique de discrétisation du retard pour établir des critères de stabilité et de stabilisation pour les systèmes à retard. Dans [172], des conditions moins conservatives pour les systèmes de Takagi-Sugeno (T-S) flous à retard sont obtenues en utilisant l'inégalité de Wirtinger récemment développée, des matrices de pondération libre et une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii.

Pour l'approche d'entrées-sorties, l'idée principale consiste à convertir le système original en deux sous-systèmes interconnectés. Nombreux travaux ont proposé des résultats tels que [170] et [59] pour un retard constant et [42] et [22] pour un retard variable. Pour les systèmes à retard variable, l'idée est de trouver une approximation de l'état retardé ($x(k - d(k))$) pour un système discret ou l'état retardé ($x(t - h(t))$) pour un système continu, de sorte que son erreur d'approximation soit aussi faible que possible. Les auteurs dans [42], ont adopté $x(k - d_a)$ en tant qu'approximation de $x(k - d(k))$ avec $d_a = (d_1 + d_2)/2$. Dans [3, 93], les auteurs ont introduit l'approximation à deux termes $(x(t - h_1) + x(t - h_2))/2$ pour un système continu à retard variable. Cette dernière approximation a été utilisée pour étudier les systèmes T-S flous avec un retard variable, voir [99]. Une version discrete de l'approximation à deux termes a été considérée dans [150, 152]. D'après les travaux existants dans la littérature, nous remarquons que le modèle d'approximation de l'état retardé ($x(t - h(t))$) à deux termes est meilleur que celui basé sur un seul terme.

Dans ce chapitre, un nouveau modèle de transformation sera proposé, analysé puis appliqué à l'analyse de la stabilité des systèmes continus à retard variable. Pour cela, une approximation basée sur trois termes sera considérée. Ce modèle, qui inclut non seulement les bornes supérieures et inférieures mais aussi la moyenne des deux bornes d_1 et d_2 , permet d'améliorer le modèle d'approximation par comparaison avec les modèles d'approximation existants basés sur un seul terme et sur deux termes.

Les principales contributions de ce chapitre sont soulignées comme suit :

1. Un nouveau modèle d'approximation de l'état retardé, plus réaliste, est proposé.
2. Des conditions de stabilité moins conservatives sont dérivées en utilisant une

fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii appropriée, puis formulées en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMIs).

3. Des simulations numériques et des comparaisons avec quelques résultats récents sont donnés pour démontrer l'efficacité de la méthode proposée.

5.2 Formulation du problème

Dans cette section nous présentons le système qui est l'axe de l'étude et aussi les notions et les lemmes utilisés pour développer nos résultats. Nous considérons le système avec un retard variable décrit par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h(t)), & t \geq 0 \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-h_2, 0] \end{cases} \quad (5.1)$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\phi(\theta)$ est une fonction continue des vecteurs initiales, avec $\theta \in [-h_2, 0]$, $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices constantes.

$h(t)$ est le retard variable qui satisfait les contraintes suivantes.

$$0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2, \quad \dot{h}(t) < \mu \quad (5.2)$$

Avant de continuer, le lemme suivant est introduit, à cause de son rôle important dans le développement de nos résultats.

Lemme 5.2.1 [118] : *Pour une matrice $R > 0$, et une fonction différentiable $\{x(u) \mid u \in [a, b]\}$ l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \geq \frac{1}{b-a} \Psi_0^T R \Psi_0 + \frac{3}{b-a} \Psi_1^T R \Psi_1. \quad (5.3)$$

où

$$\Psi_0 = x(b) - x(a)$$

$$\Psi_1 = x(b) + x(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b x(s) ds.$$

Le lemme précédent permet de réduire le conservatisme du système étudié, à cause des termes qui sont apparus dans le côté droit de l'inégalité (5.3). Si nous comparons cette inégalité avec l'inégalité de Jensen développée dans [90], nous voyons que cette dernière est un cas special de l'inégalité (5.3). Les avantages fournis par le lemme 5.2.1, nous encourage de l'utiliser.

L'objectif principal de ce travail est de développer une condition de stabilité moins conservative pour le système (5.1) en utilisant le théorème du petit gain proposé par [99]. Pour appliquer ce théorème, il faut transformer le système original (5.1) en deux sous-systèmes :

$$(S_1) : z_\Delta(t) = \mathbf{G}\omega_\Delta(t); \quad (S_2) : \omega_\Delta(t) = \Delta z_\Delta(t) \quad (5.4)$$

où le système (S_1) est un système linéaire avec retard constant, où \mathbf{G} est la fonction de transfert entre $z_\Delta(t)$ et $\omega_\Delta(t)$. (S_2) est un système linéaire inconnu de rétroaction avec retard variable, où l'opérateur $\Delta \in \mathcal{D} \triangleq \{\Delta : \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$. $z_\Delta(t) \in \mathbb{R}^z, \omega_\Delta(t) \in \mathbb{R}^\omega$. D'après le théorème du petit gain donné dans [99], il s'agit de trouver la condition suffisante qui vérifie la stabilité asymptotique du système interconnecté (5.4) au lieu du système (5.1).

Lemme 5.2.2 [99] : *Considérons (5.4), et supposons que (S_1) est stable. Le système en boucle fermée formé par (S_1) et (S_2) est robustement asymptotiquement stable pour tous $\Delta \in \mathcal{D}$.*

S'il existe des matrices $\{T_\omega, T_z\} \in \mathbb{T}$ où

$$\mathbb{T} \triangleq \left\{ \{T_\omega, T_z\} \in \mathbb{R}^{\omega \times \omega} \times \mathbb{R}^{z \times z} : T_\omega, T_z \text{ sont des matrices inversibles,} \right. \\ \left. \|T_\omega \circ \Delta \circ T_z^{-1}\|_\infty \leq 1 \right\}$$

tel que la condition suivante est satisfaite :

$$\|T_z \circ \mathbf{G} \circ T_\omega^{-1}\|_\infty < 1. \quad (5.5)$$

5.3 Nouveau modèle de transformation

Dans cette section, nous présentons le nouveau modèle de transformation, ses applications au système nominal (5.1), les différences et les avantages par rapport aux modèles de transformation déjà existants dans la littérature.

Nous considérons le système (5.1), nous proposons une nouvelle approximation de l'état retardé $x(t - h(t))$ en utilisant ces bornes inférieures et supérieures h_1, h_2 et la borne moyenne $h_a = (h_1 + h_2)/2$ par l'équation suivante :

$$x(t - h(t)) = \frac{1}{3} \{x(t - h_1) + x(t - h_2)\} + \frac{h_{12}}{3} \tilde{\omega}(t) \quad (5.6)$$

Nous avons par l'inégalité de Jensen (Cauchy-Schwartz) [42] pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{h_{12}^2}{9} \|\tilde{\omega}(t)\|^2 &= \frac{1}{9} \left\| - \int_{t-h(t)}^{t-h_1} z_{\Delta}(s) ds + 2 \int_{t-h_a}^{t-h(t)} z_{\Delta}(s) ds + \int_{t-h_2}^{t-h_a} z_{\Delta}(s) ds \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{9} \left\{ \left\| \int_{t-h(t)}^{t-h_1} z_{\Delta}(s) ds \right\|^2 + \left\| 2 \int_{t-h_a}^{t-h(t)} z_{\Delta}(s) ds \right\|^2 + \left\| \int_{t-h_2}^{t-h_a} z_{\Delta}(s) ds \right\|^2 \right\} \end{aligned}$$

Nous continuons la preuve pour chaque terme séparément. La fonction $s = p(t) = t - h(t)$ est croissante. Par conséquent, l'inverse $t = p^{-1}(s) = q(s)$ est bien défini et satisfait $|q(s) - (s + h_1)| \leq h_{12}/2$. Alors, nous intégrons $\left\| \int_{t-h(t)}^{t-h_1} z_{\Delta}(s) ds \right\|^2$ entre 0 et ∞ , nous changeons l'ordre de l'intégration et nous prenons en compte que $z_{\Delta}(s) = 0, s \leq 0$, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left\| \int_{t-h(t)}^{t-h_1} z_{\Delta}(s) ds \right\|^2 dt &\leq \int_0^{\infty} (h(t) - h_1) \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \|z_{\Delta}(s)\|^2 ds dt \\ &= \left| \int_0^{\infty} (h(q(s)) - h_1) \int_{q(s)}^{s+h_1} \|z_{\Delta}(s)\|^2 dt ds \right| \\ &= \left| \int_0^{\infty} (h(q(s)) - h_1)(s + h_1 - q(s)) \|z_{\Delta}(s)\|^2 ds \right| \\ &\leq \frac{h_{12}}{2} \frac{h_{12}}{2} \int_0^{\infty} \|z_{\Delta}(s)\|^2 ds \\ &= \frac{h_{12}^2}{4} \|z_{\Delta}(t)\|_{l_2}^2 \end{aligned}$$

Nous suivons le même processus pour les autres termes, et nous obtenons

$$\int_0^{\infty} \left\| 2 \int_{t-h_a}^{t-h(t)} z_{\Delta}(s) ds \right\|^2 dt \leq 4 \frac{h_{12}^2}{4} \|z_{\Delta}(t)\|_{l_2}^2 \quad (5.7)$$

$$\int_0^{\infty} \left\| \int_{t-h_2}^{t-h_a} z_{\Delta}(s) ds \right\|^2 dt \leq \frac{h_{12}^2}{4} \|z_{\Delta}(t)\|_{l_2}^2 \quad (5.8)$$

Alors l'ajout des trois termes ensemble donne

$$\begin{aligned} \frac{h_{12}^2}{9} \|\tilde{\omega}(t)\|_{l_2}^2 &\leq \frac{1}{9} \left(\frac{h_{12}^2}{4} + 4 \frac{h_{12}^2}{4} + \frac{h_{12}^2}{4} \right) \|z_{\Delta}(t)\|_{l_2}^2 \\ &= \frac{h_{12}^2}{6} \|z_{\Delta}(t)\|_{l_2}^2 \end{aligned}$$

5. AMÉLIORATION DE LA PERFORMANCE H_∞ POUR DES SYSTÈMES LINÉAIRES À RETARD VARIABLE

En substituant $\tilde{\omega}(t)$ selon l'équation suivante $\tilde{\omega}(t) = \frac{3}{\sqrt{6}}\omega_\Delta(t)$, on obtient

$$\|\omega_\Delta(t)\|_{l_2}^2 \leq \|z_\Delta(t)\|_{l_2}^2$$

Cas 2 :

Pour le **Cas 2**, en utilisant un processus de preuve similaire à celui du **Cas 1**, nous obtenons les mêmes résultats.

Ceci complète la preuve. \square

Remarque 5.3.1 Le calcul du gain l_2 nous permet de décrire une étude comparative. les auteurs dans [93] ont approximé $x(t - h(t))$ par un seul terme ($x(t - h_a)$) et dans [93] et [3] les auteurs ont approximé l'état retardé $x(t - h(t))$ par deux termes $\frac{1}{2}\{x(t - h_1) + x(t - h_2)\}$. D'un point de vue numérique, l'évolution du gain l_2 fournit des valeurs plus petites en utilisant un modèle d'approximation à trois termes que ceux obtenus en utilisant un modèle d'approximation à base d'un seul ou deux termes. Le Tableau 5.1 montre la valeur du gain l_2 des différentes approximations

Tableau 5.1 – La valeur du gain l_2 des différentes approximations.

méthodes	[93](seul terme)	[93](deux termes)	approximation à trois termes
gain- l_2	$\frac{h_{12}}{\sqrt{2}}$	$\frac{h_{12}}{2}$	$\frac{h_{12}}{\sqrt{6}}$

Remarque 5.3.2 Nous notons que le modèle d'approximation à trois termes d'un état retardé est plus général que celui basé sur un ou deux termes. Mettre l'accent sur quelques modifications typiques ,nous pouvons obtenir les approximations déjà existant dans la littérature.

★ Si $x(t - h_a) = \frac{1}{2}\{x(t - h_1) + x(t - h_2)\} + \frac{h_{12}}{2}\tilde{\omega}(t)$. (5.6) est réduit à

$$x(t - h(t)) = \frac{1}{2}(x(t - h_1) + x(t - h_2)) + \frac{d_{12}}{2}\tilde{\omega}(t)$$

Qui fait référence à l'approximation à deux termes [93]

★ Si $x(t - h_1) + x(t - h_2) = 2\{x(t - h_a) + \tilde{\omega}(t)\}$. (5.6) est réduit à

$$x(t - h(t)) = x(t - h_a) + \frac{d_{12}}{\sqrt{2}}\tilde{\omega}(t)$$

Qui fait référence à l'approximation à un terme [93], où $\tilde{\omega}(k) = \frac{3}{\sqrt{3}}\omega(k)$.

Remarque 5.3.3 $\{X, X\} \in \mathbb{T}$ sont les matrices du théorème du petit gain donné dans le lemme 5.2.2. Alors, pour s'assurer que le système d'Entrée/Sortie (5.1) est stable, il est nécessaire de vérifier que (S_1) est stable et qu'il existe une matrice X telle que la condition $\|X \circ \mathbf{G} \circ X^{-1}\|_\infty < 1$ soit satisfaite.

Remarque 5.3.4 nous notons que la condition du petit gain $\|X \circ \mathbf{G} \circ X^{-1}\|_\infty$ coïncide avec la norme H_∞ d'un tel système avec une entrée $\omega_\Delta(t)$ et une sortie $z_\Delta(t)$. Soit $V(t)$ une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii qui garantit la stabilité du sous-système (S_1) et soit

$$J \triangleq z_\Delta^T(t)S z_\Delta(t) - \omega_\Delta^T(t)S \omega_\Delta(t). \quad (5.9)$$

dans le cas où $S = I$, l'équation (5.9) est réduite à la norme H_∞ avec $\gamma = 1$. Il est bien connu que la condition suivante le long de la trajectoire de (S_1)

$$\mathcal{W} \triangleq \dot{V}(t) + J < 0 \quad (5.10)$$

garantit que la condition $\|X \circ \mathbf{G} \circ X^{-1}\|_\infty$ est inférieure à 1. Par conséquent, (5.10) est une condition suffisante pour le problème du lemme réel borné. En plus, si (5.10) est vrai, donc d'après le lemme 5.2.2, on peut conclure que le système (5.1) est stable. Alors, si $J \leq 0$, cela signifie que $\|X \circ \Delta \circ X^{-1}\|_\infty \leq 1$, et en fin de compte si $S = X^T X$, $\mathcal{W} < 0$ cela signifie que $\|X \circ \mathbf{G} \circ X^{-1}\|_\infty < 1$

5.4 Analyse de la stabilité

Dans cette section, nous appliquons l'approximation à trois termes pour dériver une nouvelle condition de stabilité du système (S_1) . À l'aide d'une nouvelle construction de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii et l'utilisation du Théorème du petit gain, nous pouvons donner des conditions qui garantissent la stabilité asymptotique de notre système et qui vérifient les conditions du Théorème de petit gain. Le Théorème suivant présente une nouvelle condition dépendante du retard pour le système (S_1)

Théorème 5.4.1 [66] Pour des scalaires donnés h_1 , h_2 et μ , le système (S_1) est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices définies positives

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ * & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ * & * & P_{33} & P_{34} \\ * & * & * & P_{44} \end{bmatrix}, Q_j (j = 1 \dots 4), R_l (l = 1 \dots 3) \text{ et } S = X^T X. \text{ telles que la}$$

5. AMÉLIORATION DE LA PERFORMANCE H_∞ POUR DES SYSTÈMES LINÉAIRES À RETARD VARIABLE

condition suivante est vérifiée.

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 & \Omega_5^T \\ * & -12R_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -12R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -12R_3 & 0 \\ * & * & * & * & -\Omega_6 \end{bmatrix} < 0 \quad (5.11)$$

où

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & P_{11}\Omega_{12} - \Omega_{13} \\ * & -\Omega_{22} - (1 - \mu)\Omega_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{33} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}Q_4 & \frac{1}{9}Q_4 & \frac{1}{9}Q_4 & \frac{h_{12}}{9}Q_4 \\ * & \frac{1}{9}Q_4 & \frac{1}{9}Q_4 & \frac{h_{12}}{9}Q_4 \\ * & * & \frac{1}{9}Q_4 & \frac{h_{12}}{9}Q_4 \\ * & * & * & \frac{h_{12}^2}{9}Q_4 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_5^T = \begin{bmatrix} h_1\Pi^T R_1 & h_a\Pi^T R_2 & h_2\Pi^T R_3 & \Pi^T S \end{bmatrix}$$

avec

$$\Omega_{11} = P_{11}A + A^T P_{11} + Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + P_{12} + P_{12}^T + P_{13} + P_{13}^T + P_{14} + P_{14}^T - 4R_1 - 4R_2 - 4R_3$$

$$\Omega_{12} = [\frac{1}{3}A_d \quad \frac{1}{3}A_d \quad \frac{1}{3}A_d \quad \frac{h_{12}}{3}A_d], \Pi = [A \quad \Omega_{12}]$$

$$\Omega_{13} = [2R_1 + P_{12} \quad 2R_2 + P_{13} \quad 2R_3 + P_{14} \quad 0]$$

$$\Omega_{22} = \text{diag}\{Q_1 + 4R_1, Q_2 + 4R_2, Q_3 + 4R_3, \frac{2}{3}S\}$$

$$\Omega_2 = h_1\Pi^T P_{12} + \Xi_1^T, \quad \Omega_3 = h_a\Pi^T P_{13} + \Xi_2^T$$

$$\Omega_4 = h_2\Pi^T P_{14} + \Xi_3^T, \quad \Omega_6 = \text{diag}\{R_1, R_2, R_3, S\}$$

$$\Xi_1 = [h_1(P_{22} + P_{23} + P_{24}) + 6R_1 \quad -h_1P_{22} + 6R_1 \quad -h_1P_{23} \quad -h_1P_{24} \quad 0]$$

$$\Xi_2 = [h_a(P_{33} + P_{23}^T + P_{34}) + 6R_2 \quad -h_aP_{23}^T \quad -h_aP_{33} + 6R_2 \quad -h_aP_{34} \quad 0]$$

$$\Xi_3 = [h_2(P_{44} + P_{24}^T + P_{34}^T) + 6R_3 \quad -h_2P_{24}^T \quad -h_2P_{34}^T \quad -h_2P_{44} + 6R_3 \quad 0]$$

Preuve 5.4.1 :

Nous considérons les fonctionnelles de Lyapunov Krasovskii suivantes pour le système (S_1) :

$$V(x(t)) = V_1(x(t)) + V_2(x(t)) + V_3(x(t)) \quad (5.12)$$

avec

$$\begin{aligned}
 V_1(x(t)) &= \eta^T(t)P\eta(t) \\
 V_2(x(t)) &= \int_{t-h_1}^t x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-h_a}^t x^T(s)Q_2x(s)ds + \int_{t-h_2}^t x^T(s)Q_3x(s)ds \\
 &\quad + \int_{t-h(t)}^t x^T(s)Q_4x(s)ds \\
 V_3(x(t)) &= h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)dsd\theta + h_a \int_{-h_a}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)dsd\theta \\
 &\quad + h_2 \int_{-h_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)dsd\theta
 \end{aligned}$$

où

$$\eta^T(t) = [x^T(t) \int_{t-h_1}^t x^T(s)ds \int_{t-h_a}^t x^T(s)ds \int_{t-h_2}^t x^T(s)ds]$$

Ensuite, la dérivée de $V_1(x(t))$ et $V_2(x(t))$ par rapport à t le long de la trajectoire de (S_1) est

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(x(t)) &= 2x^T(t)\{P_{11}\dot{x}(t) - P_{12}x(t-h_1) - P_{13}x(t-h_a) - P_{14}x(t-h_2)\} \\
 &\quad + 2\left(\int_{t-h_1}^t x^T(s)ds\right)\{P_{12}^T\dot{x}(t) + (P_{22} + P_{23} + P_{24})x(t) - P_{22}x(t-h_1) \\
 &\quad - P_{23}x(t-h_a) - P_{24}x(t-h_2)\} \\
 &\quad + 2\left(\int_{t-h_a}^t x^T(s)ds\right)\{P_{13}^T\dot{x}(t) + (P_{23}^T + P_{33} + P_{34})x(t) - P_{23}^T x(t-h_1) \\
 &\quad - P_{33}x(t-h_a) - P_{34}x(t-h_2)\} \\
 &\quad + 2\left(\int_{t-h_2}^t x^T(s)ds\right)\{P_{14}^T\dot{x}(t) + (P_{24}^T + P_{34}^T + P_{44})x(t) - P_{24}^T x(t-h_1) \\
 &\quad - P_{34}^T x(t-h_a) - P_{44}x(t-h_2)\} \\
 &\quad + \text{sym}\{x^T(t)(P_{12} + P_{13} + P_{14})x(t)\}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(x(t)) &\leq x^T(t)\{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4\}x(t) - x^T(t-h_1)Q_1x(t-h_1) \\
 &\quad - x^T(t-h_a)Q_2x(t-h_a) - x^T(t-h_2)Q_3x(t-h_2) \\
 &\quad - (1-\mu)x^T(t-h(t))Q_3x(t-h(t))
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

5. AMÉLIORATION DE LA PERFORMANCE H_∞ POUR DES SYSTÈMES LINÉAIRES À RETARD VARIABLE

nous dérivons $V_3(x(t))$ et nous utilisons le Lemme 5.2.1, nous aurons

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(x(t)) \leq & \dot{x}^T(t) \left\{ h_1^2 R_1 + h_a^2 R_2 + h_2^2 R_3 \right\} \dot{x}(t) - \xi_1^T R_1 \xi_1 \\ & - 3\xi_2^T R_1 \xi_2 - \xi_3^T R_2 \xi_3 - 3\xi_4^T R_2 \xi_4 - \xi_5^T R_3 \xi_5 \\ & - 3\xi_6^T R_3 \xi_6 \end{aligned} \quad (5.15)$$

où

$$\xi_1 = x(t) - x(t - h_1), \quad \xi_2 = x(t) + x(t - h_1) - \frac{2}{h_1} \int_{t-h_1}^t x(s) ds \quad (5.16)$$

$$\xi_3 = x(t) - x(t - h_a), \quad \xi_4 = x(t) + x(t - h_a) - \frac{2}{h_a} \int_{t-h_a}^t x(s) ds \quad (5.17)$$

$$\xi_5 = x(t) - x(t - h_2), \quad \xi_6 = x(t) + x(t - h_2) - \frac{2}{h_2} \int_{t-h_2}^t x(s) ds \quad (5.18)$$

En définissant

$$J_\Delta = \int_0^\infty [z_\Delta^T(s) S z_\Delta(s) - \omega_\Delta^T(s) S \omega_\Delta(s)] ds \quad (5.19)$$

Nous avons sous la condition initiale zéro

$$J_\Delta \leq \int_0^\infty [\dot{V}(x(s)) + z_\Delta^T(s) S z_\Delta(s) - \tilde{\omega}^T(s) \frac{2}{3} S \tilde{\omega}(s)] ds \quad (5.20)$$

Nous remplaçons $x(t - h(t))$ dans (5.14) par l'équation (5.6) et nous combinons (5.13)-(5.15) nous avons

$$J_\Delta \leq \int_0^\infty \xi^T(s) \left\{ \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 \\ * & -12R_1 & 0 & 0 \\ * & * & -12R_2 & 0 \\ * & * & * & -12R_3 \end{bmatrix} + \Omega_5^T \Omega_6^{-1} \Omega_5 \right\} \xi(s) ds < 0$$

où

$$\begin{aligned} \xi^T(t) = & [x^T(t) \quad x^T(t - h_1) \quad x^T(t - h_a) \quad x^T(t - h_2) \quad \tilde{\omega}^T(t) \quad \frac{1}{h_1} \int_{t-h_1}^t x^T(s) ds \\ & \frac{1}{h_a} \int_{t-h_a}^t x^T(s) ds \quad \frac{1}{h_2} \int_{t-h_2}^t x^T(s) ds] \end{aligned}$$

Nous appliquons le complément de Schur, nous obtenons la condition (5.11).

La preuve est terminée. \square

Remarque 5.4.1 Nous remarquons que l'utilisation de la moyenne $h_a = (h_2 + h_1)/2$ dans la construction de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii améliore les performances de la stabilité, comme indiqué ci-dessous par des simulations. De plus, nous voyons que l'introduction du terme $x(t - h_a)$ donne une nouveauté à l'approximation utilisée et a un effet important dans la réduction de l'erreur d'approximation vis à vis d'autres approximations.

Remarque 5.4.2 : Nous pouvons remarquer que l'utilisation du lemme 5.2.1 nous permet de donner un sens important et différent à la méthode de majoration des termes d'intégral qui sont apparus dans la dérivée de $V_3(x(t))$. Si nous analysons les termes dans les équations (5.16), (5.17) et (5.18), nous constatons qu'ils contiennent plus de termes, ce qui signifie que plus d'informations ont été introduites. En plus, les termes ξ_1 , ξ_2 , et ξ_3 sont les termes du Lemme de Jensen, ce qui rend le Lemme 5.2.1 plus générale que celui de Jensen.

Dans plusieurs travaux antérieurs, les auteurs dérivent quelques résultats lorsque la dérivée de retard est inconnue ou n'existe pas. le résultat suivant peut être déduit du théorème 5.4.1 en définissant $Q_4 = 0$, ce qui implique que $\Omega_{33} = 0$

Corollaire 5.4.1 [66] Pour des scalaires donnés h_1 , h_2 , le système (S_1) est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices définies positives

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ * & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ * & * & P_{33} & P_{34} \\ * & * & * & P_{44} \end{bmatrix}, Q_j (j = 1 \dots 3), R_l (l = 1 \dots 3) \text{ et } S = X^T X.$$

telles que la condition suivante soit vérifiée.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 & \Omega_5^T \\ * & -12R_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -12R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -12R_3 & 0 \\ * & * & * & * & -\Omega_6 \end{bmatrix} < 0 \quad (5.21)$$

avec

$$\tilde{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_{11} & P_{11}\Omega_{12} - \Omega_{13} \\ * & -\Omega_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Omega}_{11} = P_{11}A + A^T P_{11} + Q_1 + Q_2 + Q_3 + P_{12} + P_{12}^T + P_{13} + P_{13}^T + P_{14} + P_{14}^T - 4R_1 - 4R_2 - 4R_3.$$

Remarque 5.4.3 *L'idée présentée dans ce chapitre est appliquée au système original et consiste à le transformer en deux sous-systèmes. Cette idée est différente de la méthode de partition du retard basée sur la division de l'intervalle du retard en plusieurs sous-intervalles. En plus, l'idée de partition du retard a été mise en oeuvre dans la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii pour dériver quelques conditions. La méthode de partition de retard peut être facilement appliquée à notre Théorème afin de réduire le conservatisme du résultat présenté dans ce chapitre.*

Remarque 5.4.4 *Il est bien connu qu'un système discret à retard peut être porté à un système sans retard en utilisant la méthode d'augmentation d'état (lifting method) utilisée dans le chapitre précédent. Donc, le système continu ne peut pas être porté à un système sans retard. Cela signifie que la méthode d'augmentation d'état ne peut pas être appliquée à l'idée de ce chapitre.*

5.5 La Performance H_∞

Dans cette section, nous avons développé un critère de stabilité dépendant du retard qui garantit la performance H_∞ , nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h(t)) + B\omega(t) \\ z(t) = Cx(t) + C_d x(t - h(t)) + D\omega(t) \\ x(\theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-h_2, 0]. \end{cases} \quad (5.22)$$

où $\omega(t) \in R^p$ est l'entrée de perturbation appartenant à $L_2[0, \infty)$, $z(t) \in R^l$ est la sortie. B, C, C_d , et D sont des matrices constantes connues de dimensions appropriées et $\phi(\theta)$ est une fonction continue des vecteurs initiaux défini sur $[-h_2, 0]$.

En utilisant (5.6), le système (5.22) peut être écrit respectivement en tant que systèmes d'interconnexion (\tilde{S}_1) et (\tilde{S}_2) .

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_1) : & \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \frac{1}{3}A_d x(t - h_1) + \frac{1}{3}A_d x(t - h_2) \\ \quad + \frac{1}{3}A_d x(t - h_a) + \frac{h_{12}}{3}A_d \tilde{\omega}(t) + B\omega(t) \\ z(t) = Cx(t) + \frac{1}{3}C_d x(t - h_1) + \frac{1}{3}C_d x(t - h_2) \\ \quad + \frac{1}{3}C_d x(t - h_a) + \frac{h_{12}}{3}C_d \tilde{\omega}(t) + D\omega(t) \\ z_\Delta(t) = \dot{x}(t) \end{cases} \\ (\tilde{S}_2) : & \omega_\Delta(t) = \Delta z_\Delta(t) \end{aligned}$$

L'objectif de cette section est de développer une condition dépendante du retard avec la performance H_∞ , telle que pour tout $h(t)$ satisfaisant (5.2)

1. Le système (\tilde{S}_1) est asymptotiquement stable pour $\omega(t) = 0$
2. Le système (\tilde{S}_1) garantit dans les conditions initiales nulles la condition suivante $\|z(t)\|_2 < \gamma\|\omega(t)\|_2$ pour toute $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ non null et $\gamma > 0$ est un critère de performance H_∞ .

Le théorème suivant présente les conditions qui garantissent la stabilité asymptotique du système (\tilde{S}_1) avec une performance γ

Théorème 5.5.1 [66] *Pour des scalaires donnés γ, h_1, h_2 et μ , le système (\tilde{S}_1) est asymptotiquement stable avec la performance H_∞ , s'il existe des matrices définies positives*

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ * & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ * & * & P_{33} & P_{34} \\ * & * & * & P_{44} \end{bmatrix}, Q_j (j = 1 \dots 4), R_i (i = 1 \dots 3) \text{ et } S = X^T X.$$

telles que la condition suivante soit vérifiée.

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Gamma B & \Lambda_1 & \Omega_5^T & \Sigma^T \\ * & -\gamma^2 I & \Lambda_2 & \Lambda_4 & D^T \\ * & * & -\Lambda_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Omega_6 & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.23)$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \begin{bmatrix} \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 \end{bmatrix}, \Gamma^T = [P_{11} \ 0_{n,4p}] \\ \Lambda_2 &= \begin{bmatrix} h_1 B^T P_{12} & h_a B^T P_{13} & h_2 B^T P_{14} \end{bmatrix} \\ \Lambda_4 &= \begin{bmatrix} h_1 B^T R_1 & h_a B^T R_2 & h_2 B^T R_3 \end{bmatrix} \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} C & \frac{1}{3} C_d & \frac{1}{3} C_d & \frac{1}{3} C_d & \frac{h_{12}}{3} C_d \end{bmatrix} \\ \Lambda_3 &= \text{diag}\{12R_1, 12R_2, 12R_3\} \end{aligned}$$

Preuve 5.5.1 : nous définissons

$$J = \int_0^\infty [z^T(s)z(s) - \omega^T(s)\gamma^2\omega(s)]ds$$

Nous avons sous la condition initiale zéro

$$J \leq \int_0^\infty [\dot{V}(x(s)) + z_\Delta^T(s)S z_\Delta(s) - \tilde{\omega}^T(s)\frac{2}{3}S\tilde{\omega}(s) + z^T(s)z(s) - \omega^T(s)\gamma^2\omega(s)]ds$$

Nous prenons en compte (5.6), nous avons

$$J \leq \int_0^\infty \zeta^T(s) \left\{ \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Gamma B & \Lambda_1 \\ * & -\gamma^2 I & \Lambda_2 \\ * & * & -\Lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_5^T \\ \Lambda_4 \end{bmatrix} \Omega_6^{-1} \begin{bmatrix} \Omega_5 & \Lambda_4^T \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \Sigma^T \\ D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & D \end{bmatrix} \right\} \zeta(s) ds < 0$$

où

$$\zeta^T(t) = [x^T(t) \ x^T(t-h_1) \ x^T(t-h_a) \ x^T(t-h_2) \ \tilde{\omega}^T(t) \ \omega^T(t) \ \frac{1}{h_1} \int_{t-h_1}^t x^T(s)ds \\ \frac{1}{h_a} \int_{t-h_a}^t x^T(s)ds \ \frac{1}{h_2} \int_{t-h_2}^t x^T(s)ds]$$

Nous appliquons le complément de Schur, nous obtenons la condition (5.23).

La preuve est terminée. \square

5.6 Exemples numériques

Dans cette section, nous présentons trois exemples pour montrer l'efficacité de l'approche proposée développée dans ce chapitre.

Exemple 5.6.1 : Nous considérons le système (5.1) à retard variable avec les paramètres suivants

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pour prouver les avantages et le mérite de notre approche, des comparaisons avec des résultats récents seront présentés via cet exemple. Nous utilisons le théorème 5.4.1, la borne supérieure h_2 qui garantit la stabilité asymptotique du système (5.1) pour différentes valeurs de h_1 et $\mu = 0.3$ est indiquée dans le tableau 5.2. Le tableau 5.3 montre les résultats obtenus par le corollaire 5.4.1 et comparé avec d'autres résultats sur l'analyse du système à retard variable utilisant d'autres approches.

Tableau 5.2 – La borne supérieure h_2 pour diverses valeurs de h_1 et $\mu = 0.3$.

Méthodes	h_1	2	3	4	5	5.5
[3]	h_2	2.81	3.31	4.09	inf	inf
[57]	h_2	2.91	3.34	4.16	5.02	-
[141]	h_2	3.02	3.41	4.20	5.03	-
Théorème 5.4.1[66]	h_2	3.09	3.58	4.34	5.15	5.58

À partir du tableau 5.2, nous pouvons voir que la méthode proposée dans ce chapitre est moins conservatrice que les méthodes existantes dans la littérature. Pour éclaircir ce point, nous pouvons voir dans le tableau 5.2 que lorsque $h_1 = 5.5$, la condition de stabilité donnée par le théorème 5.4.1 est faisable alors que le résultat donné dans [3] est infaisable (inf), ce qui signifie que notre approche est plus significative que les autres. D'un autre côté, le nombre de variables de décision utilisées par le théorème 5.4.1 est $10n^2 + 6n$ alors que le nombre de variables utilisées dans [3, 57] et [141] sont $(11n^2 + 7n)/2$, $(13n^2 + 8n)$ et $(22n^2 + 8n)$, respectivement. Cela signifie que les conditions proposées sont plus simples que celles présentées dans [57] et [141].

Tableau 5.3 – La borne supérieure h_2 pour diverses valeurs de h_1 .

Méthodes	h_1	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
[169]	h_2	1.78	1.89	2.04	2.20	2.37
[3]	h_2	1.87	1.92	2.02	2.15	2.31
[146]	h_2	1.88	1.99	-	-	-
[17]	h_2	2.02	2.08	2.15	2.25	2.38
[147]	h_2	2.08	2.15	2.23	2.34	2.47
Corollaire 5.4.1[66]	h_2	2.12	2.19	2.29	2.43	2.59

Le tableau 5.3 donne une comparaison de nos résultats donnés par le corollaire 5.4.1 avec plusieurs travaux et méthodes de la littérature.

Nous pouvons voir que le corollaire 5.4.1 présente des résultats moins conservatifs au niveau de la borne supérieure. De plus, quand $h_2 = 1.85$, la figure 5.1 présente la variation de la norme $\|X \circ G \circ X^{-1}\|_\infty$ en fonction de la borne h_1 .

5. AMÉLIORATION DE LA PERFORMANCE H_∞ POUR DES SYSTÈMES LINÉAIRES À RETARD VARIABLE

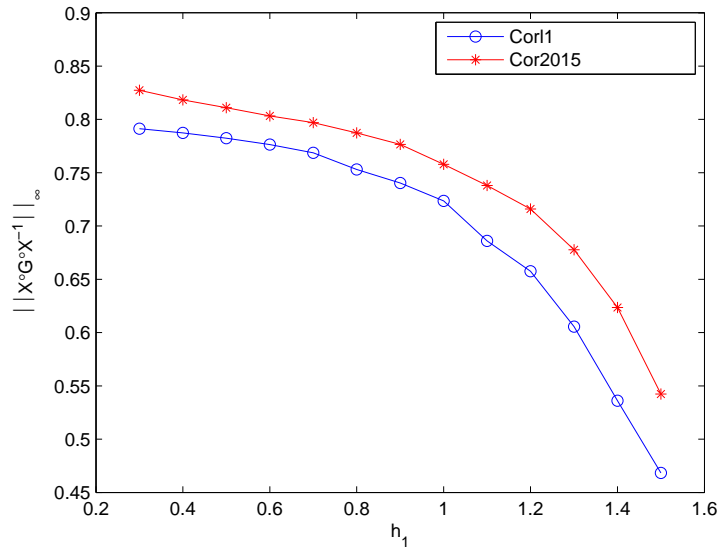


FIGURE 5.1 – La variation de la norme $\|X \circ G \circ X^{-1}\|_\infty$ en fonction de la borne h_1 .

À partir de la figure 5.1 nous pouvons observer que la norme $\|X \circ G \circ X^{-1}\|_\infty$ proposée par notre méthode (Corollaire 5.4.1)(Cor1) est plus petite que celle de [3](Cor2015). Cela signifie que la méthode proposée est meilleur que d'autre approches dans la littérature.

Exemple 5.6.2 : Nous considérons le système (5.1) à retard variable avec les matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple, nous présentons un autre point fort qui montre l'efficacité de la méthode proposée. Pour comparer nos résultats avec ceux de [73] et [3], nous supposons que $\mu = 0.3$ et nous considérons différentes valeurs de h_1 . Le tableau 5.4 donne la borne maximale h_2 qui garantit la stabilité asymptotique du système (5.1).

Tableau 5.4 – La borne maximale h_2 pour diverses valeurs de h_1 et $\mu = 0.3$.

Méthodes	h_1	0.5	0.8	1.1	1.5	2
[73]	h_2	1.07	1.19	1.33	1.61	2.11
[3]	h_2	1.38	1.38	1.41	1.69	2.19
Théorème 5.4.1[66]	h_2	2.06	2.15	2.21	2.25	2.32
impro(%)	h_2	49.27	55.79	56.73	33.13	5.93

Nous pouvons voir qu'une amélioration importante est obtenue à l'aide de l'approximation à trois termes par rapport aux deux termes. Ceci est clair dans la dernière ligne du tableau 5.4. en plus, l'intervalle du retard obtenu par l'approximation à trois termes est plus large que celui obtenu par deux termes, ce qui signifie que l'approximation à trois termes est moins conservatrice que deux termes.

Exemple 5.6.3 [64] Nous considérons le système (5.22) à retard variable avec les matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} -0.6238 & -1.0132 \\ 2.0116 & -0.2106 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -0.5011 & -0.7871 \\ -0.3002 & 0.5231 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0.2134 & -0.0191 \\ 0.1119 & -0.1665 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.4326 & 0.1253 \\ -1.6656 & 0.2877 \end{bmatrix}, C_d = \begin{bmatrix} 0.0816 & 0.1290 \\ 0.0712 & 0.0669 \end{bmatrix}$$

Deux valeurs différentes de μ sont considérées afin de comparer nos résultats obtenus par l'application du théorème 5.5.1 avec [64]. Le tableau 5.5 montre le minimum de γ pour un intervalle donné $[h_1 \ h_2]$. La borne maximale h_2 pour un γ donné et $h_1 = 0.1$ est présentée au Tableau 5.6.

Tableau 5.5 – Le minimum de γ pour $[h_1 \ h_2]$ donné

$\mu = 0.3$			$\mu = 0.9$	
$[h_1 \ h_2]$	[64]	Théorème 5.5.1[66]	[64]	Théorème 5.5.1[66]
[0.1 0.2]	0.9833	0.9565	0.9831	0.9566
[0.3 0.5]	1.1833	1.0699	1.1846	1.0701
[0.5 0.9]	infeas	9.8810	infeas	infeas

Au début, nous pouvons voir que notre méthode est moins conservatrice que la méthode proposée par [64]. Pour $[h_1 \ h_2] = [0.5 \ 0.9]$ et $\mu = 0.3$, la condition proposée par [64] est infaisable, mais celles du théorème 5.5.1 sont toujours faisable et pour $\mu = 0.9$ les deux conditions du théorème 5.5.1 et [64] sont infaisables, ce qui signifie que le théorème 5.5.1 est plus significatif que celui de [64].

Tableau 5.6 – La borne maximale h_2 pour γ donné

γ	$\mu = 0.3$		$\mu = 0.9$	
	[64]	Théorème 5.5.1[66]	[64]	Théorème 5.5.1[66]
2	0.552	0.639	0.490	0.568
2.5	0.601	0.694	0.534	0.611
3.5	0.649	0.749	0.575	0.655
4	0.663	0.765	0.586	0.668
5	0.682	0.786	0.603	0.686

La première observation montre que le théorème 5.5.1 présente des bornes maximales plus larges que les bornes obtenues par [64]. Grâce aux comparaisons présentées dans le tableau 5.6, nous pouvons constater que pour un γ donné, le théorème 5.5.1 est moins conservatif que les conditions obtenues par [64].

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème de stabilité dépendante du retard avec une performance H_∞ pour une classe des systèmes linéaires continus avec retard variable. Nous avons donné une nouvelle approximation basée sur trois termes et nous avons présenté une nouvelle transformation du système à retard variable en deux sous-systèmes. Nous avons employé le théorème du petit gain et une nouvelle fonctionnelle du Lyapunov-Krasovskii pour améliorer des conditions de stabilité du système à retard variable, et des conditions qui garantissent la performance H_∞ sous forme d'inégalité matricielle linéaire. Les résultats de la borne maximale montrent que nos conditions sont moins conservatives que celles dans la littérature. Les exemples numériques donnés ont démontré les avantages de la méthode proposée en terme de résultats moins conservatifs. Il faut noter que la méthode proposée peut être facilement étendue pour résoudre d'autres problèmes des systèmes T-S flous à retard variable tels que le problème du contrôle et le problème de filtrage avec la performance H_∞ .

Conclusion Générale

Dans ce travail, nous avons étudié le problème de stabilité dépendant du retard des divers systèmes à retard variant dans le temps. Pour traiter des problèmes de la stabilité, la stabilisation et la performance H_∞ , nous avons considéré des nouvelles fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, des méthodes de majoration et de nouvelles transformations de modèle. Avec l'utilisation de ces fonctionnelles, il a été possible d'obtenir des conditions, formulées comme des tests de faisabilité de LMI, qui présentent des résultats bien moins conservatifs que d'autres conditions trouvées dans la littérature pour des systèmes neutres, discrets et continus à retard variant dans le temps. Nous avons obtenu des formulations LMIs pour la solution des problèmes suivants :

- ✦ Stabilité asymptotique pour une classe de systèmes neutres à retard variant dans le temps et en particulier, des systèmes à retard dans les états.
- ✦ Stabilité asymptotique pour des systèmes continus à retard variant dans le temps.

On peut conclure que l'utilisation des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, alliée à l'application de la discrétisation du retard ou l'approximation à deux termes dans les problèmes étudiés, mène à une réduction significative du conservatisme des conditions d'analyse de stabilité. Comme conséquence de cette réduction de conservatisme, il y a une augmentation de complexité de calcul et le nombre de variables de décision.

En faisant un bref aperçu dans la littérature, nous trouvons que la transformation de modèle basée sur l'approximation de l'état retardé est restreint à un terme et deux termes. Ces dernières transformations présentent des résultats moins conservatifs que d'autres méthodes dans la littérature. Ceci nous encourage à développer une nouvelle transformation de modèle basée sur l'approximation de trois termes et qui présentent des résultats moins conservatifs et une erreur d'approximation faible que celle de un ou deux termes. Après cela, nous nous sommes concentrés sur le développement de la nouvelle transformation de modèle. Avec cet objectif, nous proposons deux classes de systèmes pour réaliser cette approximation qui sont des systèmes discrets à retard variable et une classe

5. CONCLUSION

de systèmes continus à retard variant dans le temps. Cette méthode a été traitée pour synthétiser des gains de retour d'état pour des systèmes discrets et la performance H_∞ qui permet de garantir conjointement la stabilité et un certain niveau de performance pour des systèmes continus.

Le premier Chapitre nous a permis de présenter tout d'abord un rapide état de l'art. Nous avons présenté quelques notions théoriques relatives aux systèmes à retard, certains types de retards et des outils d'analyse de la stabilité des systèmes à retard.

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire, nous avons résolu le problème de stabilité dépendant du retard pour les systèmes neutres, basés sur l'approche de la discrétisation du retard et la construction d'une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii.

L'approximation à deux termes et le Théorème du petit gain ont été considérés dans le troisième chapitre pour dériver des conditions qui garantissent la stabilité des systèmes continus à retard variant dans le temps.

La nouvelle approximation basée sur trois termes a été considérée dans le quatrième et le cinquième chapitre. Nous avons ajouté un terme d'intégrale dans la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii déjà existant pour résoudre le problème de stabilité du système discret à retard variable. La synthèse de gains de retour d'état a été résolue à l'aide de l'algorithme du Cone. Dans le cinquième chapitre, une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii a été développée et une récente méthode de majoration a été utilisée pour résoudre le problème de stabilité, en assurant une performance H_∞ pour les systèmes continus à retard variable.

5.8 D'autres travaux réalisés

Quelques travaux réalisés pendant la période de doctorat ont abouti à des résultats qui ont des connexions avec la technique développée et les problèmes abordés dans cette thèse. Ces travaux sont listés comme suit.

1. La stabilisation robuste des systèmes delta-opérateur à retard variable.
2. La stabilisation robuste des systèmes flous, discrets et continus à retard variable.
3. Le filtrage des systèmes continus à retard variable avec paramètres polytopiques.

4. Le filtrage réduit et plein des systèmes continus à retard.

5.9 Perspectives

La recherche réalisée dans ce travail indique que certains thèmes d'intérêt peuvent être explorés dans de nouvelles directions. Parmi ces thèmes, on peut souligner ceux qui nous paraissent être les plus prometteurs :

- * Le filtrage flou des systèmes flous, discrets et continus à retard variable.
- * Réaliser une étude sur la stabilité et la stabilisation robuste pour les systèmes stochastiques à retard.
- * Étendre l'approche à trois termes aux systèmes non linéaires avec retard.

Bibliographie

- [1] Abdelaziz, Hmamed. Projection Approach to the delay-dependant stability for neutral delay-differential systems, ISCCSP-Second International Symposium on communications, control and Signal Processing, 13–15, 2006
- [2] A, Hmamed, Benzaouia, A & Tadeo, T. Improved delay-dependent stability criteria for time delay systems, CSC, Conference on systems and control, Marrakech, Morocco, 16–18, 2007,
- [3] Abdelaziz, Hmamed, El Aiss, Hicham & EL Hajjaji, A. Stability analysis of linear systems with time varying delay : An input output approach, Decision and Control (CDC), 2015 IEEE 54th Annual Conference on, 1756–1761, 2015
- [4] Abdellah, Benzaouia, El Hajjaji, Ahmed, Hmamed, Abdelaziz & Oubah, Rkia. Fault tolerant saturated control for T-S fuzzy discrete-time systems with delays, Nonlinear Analysis : Hybrid Systems, 18, 60–71, 2015
- [5] Albert, Ruehli and Miekkala, Ulla and Bellen, Alfredo and Heeb, Hansruedi. Stable time domain solutions for EMC problems using PEEC circuit models, Electromagnetic Compatibility, 1994. Symposium Record. Compatibility in the Loop., IEEE International Symposium on, 371–376, 1994
- [6] Alexandre, Seuret. Stability analysis for sampled-data systems with a time-varying period, Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on, 8130–8135, 2009
- [7] Alexandre, Seuret. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings, Automatica, 48(1), 177–182, 2012
- [8] Alexandre, Seuret and Gouaisbaut, Frédéric. On the use of the Wirtinger inequalities for time-delay systems, IFAC Proceedings Volumes, 45(14), 260–265, 2012

-
- [9] Alexandre, Seuret and Gouaisbaut, Frédéric. Wirtinger-based integral inequality : application to time-delay systems, *Automatica*, 49(9), 2860–2866, 2013
- [10] Alfredo, Bellen and Guglielmi, Nicola and Ruehli, Albert E. Methods for linear systems of circuit delay differential equations of neutral type, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 46(1), 212–215, 1999
- [11] Arthur, Wouk. *Stability of Motion (NN Krasovskii)*, 1964, Society for Industrial and Applied Mathematics
- [12] BS, Razumikhin. On the application of the Liapunov method to stability problems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 22(3), 466–480, 1958
- [13] Baoyong, Zhang and Zhou, Shaosheng and Xu, Shengyuan. Delay-dependent H_∞ controller design for linear neutral systems with discrete and distributed delays, *International Journal of Systems Science*, 38(8), 611–621, 2007
- [14] Baoyong, Zhang and Xu, Shengyuan and Zou, Yun. Improved stability criterion and its applications in delayed controller design for discrete-time systems, *Automatica*, 44(11), 2963–2967, 2008
- [15] CH, Lien. Delay-dependent stability criteria for uncertain neutral systems with multiple time-varying delays via LMI approach, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 152(6), 707–714, 2005,
- [16] Chao, Ge and Hua, Chang-Chun and Guan, Xin-Ping. New delay-dependent stability criteria for neutral systems with time-varying delay using delay-decomposition approach, *International Journal of Control, Automation and Systems*, 12(4), 786–793, 2014,
- [17] Changki, Jeong and Park, PooGyeon and Kim, Sung Hyun. Improved approach to robust stability and H_∞ performance analysis for systems with an interval time-varying delay, *Applied Mathematics and Computation*, 218(21), 10533–10541, 2012
- [18] Chong, Lin and Wang, Qing-Guo and Lee, Tong Heng. A less conservative robust stability test for linear uncertain time-delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1), 87–91, 2006
- [19] Chuan-Ke, Zhang and He, Yong and Jiang, Lin and Wu, Min. Notes on stability of time-delay systems : bounding inequalities and augmented Lyapunov-Krasovskii functionals, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(10), 5331–5336, 2017

BIBLIOGRAPHIE

- [20] Carl R, Knospe and Roozbehani, Mardavij. Analysis of multiple interval delay systems via sufficient and asymptotically necessary comparison system, *Decision and Control*, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on, 5, 5041–5047, 2003
- [21] Carl R, Knospe and Roozbehani, Mardavij. Stability of linear systems with interval time delays excluding zero, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8), 1271–1288, 2006
- [22] Chung-Yao, Kao and Rantzer, Anders. Stability analysis of systems with uncertain time-varying delays, *Automatica*, 43(6), 959–970, 2007
- [23] Chung-Yao, Kao and Lincoln, Bo. Simple stability criteria for systems with time-varying delays, *Automatica*, 40(8), 1429–1434, 2004
- [24] Coentn, Briat. Convergence and equivalence results for the Jensen's inequality-Application to time-delay and sampled-data systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(7), 1660–1665, 2011
- [25] Coentn, Briat. Linear parameter-varying and time-delay systems, *Analysis, Observation, Filtering & Control*, 3, 2014
- [26] Coentn, Briat and Seuret, Alexandre. A looped-functional approach for robust stability analysis of linear impulsive systems, *Systems & Control Letters*, 61(10), 980–988, 2012,
- [27] Coentn, Briat and Yavuz, Emre A and Karlsson, Gunnar. A conservation-law-based modular fluid-flow model for network congestion modeling, *INFOCOM, 2012 Proceedings IEEE*, 2050–2058, 2012
- [28] author=Coentn, Briat and Verriest, Erik I. A new delay-SIR model for pulse vaccination, *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), 10295–10300, 2008,
- [29] Coentn, Briat and Verriest, Erik I. A new delay-SIR model for pulse vaccination, *Biomedical signal processing and control*, 4(4), 272–277, 2009
- [30] Coentn, Briat and Hjalmarsson, Håkan and Johansson, Karl Henrik and Jönsson, Ulf T and Karlsson, Gunnar and Sandberg, Henrik. Nonlinear state-dependent delay modeling and stability analysis of internet congestion control, *Decision and Control (CDC)*, 2010 49th IEEE Conference on, 1484–1491, 2010
- [31] Coentn, Briat and Sename, Olivier and Lafay, Jean-François. A LFT/ H_∞ state feedback design for linear parameter varying time delay systems, *Control Conference (ECC)*, 2007 European, 4882–4888, 2007

- [32] David W, Kammler. A first course in Fourier analysis, 2007, Cambridge University Press
- [33] Dmitri, Bratsun and Volfson, Dmitri and Tsimring, Lev S and Hasty, Jeff. Delay-induced stochastic oscillations in gene regulation, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 102(41), 14593–14598, 2005
- [34] Dong, Yue and Han, Qing-Long. A delay-dependent stability criterion of neutral systems and its application to a partial element equivalent circuit model, IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs, 51(12), 685–689, 2004
- [35] E, Kamen and Khargonekar, P and Tannenbaum, A. Stabilization of time-delay systems using finite-dimensional compensators, IEEE Transactions on Automatic Control, 30(1), 75–78, 1985
- [36] El, Hicham and Hmamed, A and El adel, M. Delay Dependent Stability Criteria and Stabilization for Discrete-Time System Via Three Terms approximation, Journal of Control Engineering and Applied Informatics, 19(4), 3–12, 2017
- [37] Emilia, Fridman. New Lyapunov–Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems, Systems & Control Letters, 43(4), 309–319, 2001
- [38] Emilia, Fridman. Introduction to time-delay systems : Analysis and control, 2014
- [39] Emilia, Fridman and Shaked, Uri. New bounded real lemma representations for time-delay systems and their applications, IEEE Transactions on Automatic control, 46(12), 1973–1979, 2001
- [40] Emilia, Fridman and Shaked, Uri. Delay-dependent stability and H_∞ control : constant and time-varying delays, International journal of control, 76(1), 48–60, 2003
- [41] Emilia, Fridman and Shaked, U. Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay systems, International Journal of Control, 78(4), 235–246, 2005
- [42] Emilia, Fridman and Shaked, U. Input–output approach to stability and L_2 -gain analysis of systems with time-varying delays, Systems & Control Letters, 55(12), 1041–1053, 2006
- [43] Emmanuel, Witrant and Canudas-de-Wit, Carlos and Georges, Didier and Alamir, Mazen. Remote stabilization via communication networks with a distributed control law, IEEE Transactions on Automatic control, 52(8), 1480–1485, 2007
- [44] Erik, Verriest and Pepe, Pierdomenico. Time optimal and optimal impulsive control for coupled differential difference point delay systems with an application in forestry, Topics in time delay systems, 255–265, 2009

BIBLIOGRAPHIE

- [45] Evelyn C , Pielou and others. An introduction to mathematical ecology., 1969, New York, USA, Wiley-Inter-science
- [46] Fatima, El Haoussi and Tissir, El Houssaine. An LMI-based approach for robust stabilization of time delay systems containing saturating actuators, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 24(3), 347–356, 2006
- [47] Fernando, Paganini and Doyle, John and Low, Steven H. A control theoretical look at Internet congestion control, *Lecture notes in control and information sciences*, 17–30, 2003
- [48] Fernando, Tadeo and Hmamed, Abdelaziz and Benzaouia, Abdellah and Alvarez, Teresa. Properties of power control algorithms in wireless networks with delays : a positive systems approach, *IET Control Theory & Applications*, 1070–1075, 2010
- [49] Frédéric, Gouaisbaut and Peaucelle, Dimitri. Stability of time-delay systems with non-small delay, *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, 840–845, 2006
- [50] Frédéric, Gouaisbaut and Peaucelle, Dimitri. Delay-dependent robust stability of time delay systems, *IFAC Proceedings Volumes*, 39(9), 453–458, 2006
- [51] J, Liu and Zhang, J, Note on stability of discrete-time time-varying delay systems, *IET Control Theory & Applications*, 6(2), 335–339, 2012
- [52] J.-M. Dion and Niculescu, S.I and C.E. de Souza and L. Dugard. Robust stability and stabilization for uncertain linear systems with state delay : Single delay case, *IFAC Workshop on Robust Control Design, Brazil, 1994. Rio de Janeiro*, 469–474, 1994
- [53] Jack K, Hale and S.M. Verduyn Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1991
- [54] Jack K, Hale and Lunel, Sjoerd M Verduyn. *Introduction to functional differential equations*, 99, 2013, Springer Science & Business Media
- [55] JD, Chen and Lien, CH and Fan, KK and Chou, JH. Criteria for asymptotic stability of a class of neutral systems via a LMI approach, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 148(6), 442–447, 2001
- [56] Jian, Sun and Liu, GP and Chen, Jie. Delay-dependent stability and stabilization of neutral time-delay systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(12), 1364–1375, 2009

- [57] Jian, Sun and Liu, GP and Chen, Jie and Rees, David. Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays, *Automatica*, 46(2), 466–470, 2010
- [58] Jianrong, Zhang and Knospe, Carl R and Tsiotras, Panagiotis. Stability of linear time-delay systems : A delay-dependent criterion with a tight conservatism bound, *American Control Conference*, 2000. Proceedings of the 2000, 2, 1458–1462, 2000
- [59] Jianrong, Zhang and Knopse, Carl R and Tsiotras, Panagiotis. Stability of time-delay systems : Equivalence between Lyapunov and scaled small-gain conditions, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3), 482–486, 2001
- [60] Jin, Zhang and Peng, Chen and Zheng, Min, Improved results for linear discrete-time systems with an interval time-varying input delay, *International Journal of Systems Science*, 47(2), 492–499, 2016
- [61] Jin-Hoon, Kim. Note on stability of linear systems with time-varying delay, *Automatica*, 47(9), 2118–2121, 2011
- [62] Joo P, Hespanha and Naghshtabrizi, Payam and Xu, Yonggang, A survey of recent results in networked control systems, *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 138–162, 2007
- [63] Jun, Chen and Xu, Shengyuan and Zhang, Baoyong. Single/multiple integral inequalities with applications to stability analysis of time-delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(7), 3488–3493, 2017
- [64] Jun-Jun, Hui and Zhang, He-Xin and Kong, Xiang-Yu. Delay-dependent non-fragile H_8 control for linear systems with interval time-varying delay, *International Journal of Automation and Computing*, 12(1), 109–116, 2015
- [65] H, El Aiss and Hmamed, A and El Hajjaji, A. Stability of neutral time varying delay systems : A delay partitioning approach, *Systems and Control (ICSC)*, 2016 5th International Conference on, 256–261, 2016
- [66] H, El Aiss and Hmamed, A and El Hajjaji, A. Improved stability and H_∞ performance criteria for linear systems with interval time-varying delays via three terms approximation, *International Journal of Systems Science*, 1–8, 2017
- [67] H Ersin, Erol and İftar, Altuğ. Stabilization of decentralized descriptor-type neutral time-delay systems by time-delay controllers, *Automatica*, 64, 262–269, 2016
- [68] H, Gao and Lam, J and Wang, C and Wang, Y. Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay, *IEE Proceedings- Control Theory and Applications*, 151(6), 691–698, 2004

BIBLIOGRAPHIE

- [69] H, Özbay and Bonnet, Catherine and Benjelloun, Houda and Clairambault, Jean. Stability analysis of cell dynamics in leukemia, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 7(1), 203–234, 2012
- [70] Hanyong, Shao. Delay-dependent approaches to globally exponential stability for recurrent neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 55(6), 591–595, 2008
- [71] Hanyong, Shao. New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay, *Automatica*, 45(3), 744–749, 2009
- [72] Hanyong, Shao and Han, Qing-Long. New stability criteria for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3), 619–625, 2011
- [73] Hanyong, Shao and Han, Qing-Long. Less conservative delay-dependent stability criteria for linear systems with interval time-varying delays, *International Journal of Systems Science*, 43(5), 894–902, 2012
- [74] Helen J, Wearing and Rohani, Pejman and Keeling, Matt J. Appropriate models for the management of infectious diseases, *PLoS medicine*, 2(7), e174, 2005
- [75] Heng, Huang and Feng, Gang. Improved approach to delay-dependent stability analysis of discrete-time systems with time-varying delay, *IET control theory & applications*, 4(10), 2152–2159, 2010
- [76] Herbert W, Hethcote and Lewis, Mark A and Van Den Driessche, P. An epidemiological model with a delay and a nonlinear incidence rate, *Journal of mathematical biology*, 27(1), 49–64, 1989
- [77] Herbert W, Hethcote and Van den Driessche, P. An SIS epidemic model with variable population size and a delay, *Journal of mathematical biology*, 34(2), 177–194, 1995
- [78] Huabin, Chen New delay-dependent stability criteria for uncertain stochastic neural networks with discrete interval and distributed delays, *Neurocomputing*, 101, 1–9, 2013
- [79] Huabin, Chen and Meng, Xuejing. An improved exponential stability criterion for a class of neutral delayed differential equations, *Applied Mathematics Letters*, 24(11), 1763–1767, 2011

-
- [80] Huabin, Chen and Zhang, Yong and Hu, Peng. Novel delay-dependent robust stability criteria for neutral stochastic delayed neural networks, *Neurocomputing*, 73(13), 2554–2561, 2010
- [81] Huabin, Chen and Zhang, Yong and Zhao, Yang. Stability analysis for uncertain neutral systems with discrete and distributed delays, *Applied Mathematics and Computation*, 218(23), 11351–11361, 2012
- [82] Huijun, Gao and Chen, Tongwen. New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delay, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(2), 328–334, 2007
- [83] Gildas, Besancon and Georges, Didier and Benayache, Zohra. Towards nonlinear delay-based control for convection-like distributed systems : The example of water flow control in open channel systems, *Networks and Heterogeneous Media*, 4(2), 211–221, 2009
- [84] Glenn, Vinnicombe. On the stability of networks operating TCP-like congestion control, *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1), 217–222, 2002
- [85] Guangdeng, Zong and Hou, Linlin. New delay-dependent stability result and its application to robust performance analysis for discrete-time systems with delay, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 27(3), 373–386, 2010
- [86] K, Gopalsamy and Zhang, BG. On a neutral delay logistic equation, *Dynamics and stability of systems*, 2(3-4), 183–195, 1988
- [87] K, Ramakrishnan and Ray, G. Improved delay-range-dependent robust stability criteria for a class of Lur'e systems with sector-bounded nonlinearity, *Journal of the Franklin Institute*, 348(8), 1769–1786, 2011
- [88] K, Ramakrishnan and Ray, G. Robust stability criteria for a class of uncertain discrete-time systems with time-varying delay, *Applied Mathematical Modelling*, 37(3), 1468–1479, 2013
- [89] Keqin, Gu. Discretized Lyapunov functional for uncertain systems with multiple time-delay, *International Journal of Control*, 72(16), 1436–1445, 1999
- [90] Keqin, Gu. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems, *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, 3, 2805–2810, 2000
- [91] Keqin, Gu and Niculescu, S-I. Additional dynamics in transformed time-delay systems, *IEEE Transactions on automatic control*, 45(3), 572–575, 2000

BIBLIOGRAPHIE

- [92] Keqin, Gu and Chen, Jie and Kharitonov, Vladimir L. Stability of time-delay systems, 2003, Springer Science & Business Media
- [93] Keqin, Gu and Zhang, Yashun and Xu, Shengyuan. Small gain problem in coupled differential-difference equations, time-varying delays, and direct Lyapunov method, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(4), 429–451, 2011
- [94] Koen, Engelborghs and Dambrine, Michel and Roose, Dirk, Limitations of a class of stabilization methods for delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(2), 336–339, 2001
- [95] Kun, Liu and Fridman, Emilia. Wirtinger's inequality and Lyapunov-based sampled-data stabilization, *Automatica*, 48(1), 102–108, 2012
- [96] L, Crocco. Aspects of combustion stability in liquid propellant rocket motors, *Journal of the American Rocket Society*, 21, 163–178, 1951
- [97] Laurent, El Ghaoui and Oustry, Francois and AitRami, Mustapha. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems, *IEEE transactions on automatic control*, 42(8), 1171–1176, 1997
- [98] Lianglin, Xiong and Zhang, Haiyang and Li, Yongkun and Liu, Zixin. Improved Stabilization Criteria for Neutral Time-Delay Systems, *Mathematical Problems in Engineering*, 2016, 2016
- [99] Lin, Zhao and Gao, Huijun and Karimi, Hamid Reza. Robust stability and stabilization of uncertain T-S fuzzy systems with time-varying delay : an input-output approach, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(5), 883–897, 2013
- [100] M, Nakano and Hara, S. Microprocessor-based repetitive control, *Microprocessor-based control systems*, 279–296, 1986
- [101] Magdi S, Mahmoud. Robust H_∞ control of linear neutral systems, *Automatica*, 36(5), 757–764, 2000
- [102] Mardavij, Roozbehani and Knospe, Carl R. Robust stability and H_∞ performance analysis of interval-dependent time delay systems, *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, 4265–4270, 2005
- [103] Mehmet Eren, Ahsen and Özbay, H and Niculescu, S-I. On the analysis of a dynamical model representing gene regulatory networks under negative feedback, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(11), 1609–1627, 2014

- [104] Min, Wu and He, Yong and She, Jin-Hua. New delay-dependent stability criteria and stabilizing method for neutral systems, *IEEE transactions on automatic control*, 49(12), 2266–2271, 2004
- [105] Myeongjin, Park and Kwon, OM and Park, JH and Lee, Sangmoon. Delay-dependent stability criteria for linear time-delay system of neutral type, *World Academy Science and Engineering Technology*, 70, 1014–1018, 2010
- [106] N, Chaibi and Tissir, EH and Hmamed, A. Delay dependent robust stability of singular systems with additive time-varying delays, *International Journal of automation and computing*, 10(1), 85–90, 2013
- [107] N.N. Krasovskii. *Stability of Motion. Applications of Lyapunov 's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay (Translated from Russian)*, Stanford University Press, Stanford, 1963,
- [108] Nabil, El Fezazi and El Haoussi, Fatima and Tissir, El Houssaine and Alvarez, Teresa and Tadeo, Fernando, Robust stabilization using LMI techniques of neutral time-delay systems subject to input saturation, *Journal of Physics : Conference Series*, 783(1), 012–031, 2017
- [109] Odo, Diekmann and Van Gils, Stephan A and Lunel, Sjoerd MV and Walther, Hans-Otto. *Delay equations : functional-, complex-, and nonlinear analysis*, 110, 2012
- [110] Oh-Min, Kwon and Park, Myeong-Jin and Park, Ju H and Lee, Sang-Moon and Cha, Eun-Jong. Improved delay-dependent stability criteria for discrete-time systems with time-varying delays, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 32(4), 1949–1962, 2013
- [111] OM, Kwon and Park, Ju H and Lee, Sang-Moon. On stability criteria for uncertain delay-differential systems of neutral type with time-varying delays, *Applied Mathematics and Computation*, 197(2), 864–873, 2008
- [112] OM, Kwon and Park, Ju H and Lee, Sang-Moon, Augmented Lyapunov functional approach to stability of uncertain neutral systems with time-varying delays, *Applied Mathematics and Computation*, 207(1), 202–212, 2009
- [113] OM, Kwon and Park, Ju H and Lee, SM. An improved delay-dependent criterion for asymptotic stability of uncertain dynamic systems with time-varying delays, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 145(2), 343–353, 2010

BIBLIOGRAPHIE

- [114] P, Balasubramaniam and Krishnasamy, R and Rakkiyappan, R. Delay-dependent stability of neutral systems with time-varying delays using delay-decomposition approach, *Applied Mathematical Modelling*, 36(5), 2253–2261, 2012
- [115] PooGyeon, Park. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays, *IEEE Transactions on Automatic control*, 44(4), 876–877, 1999
- [116] PooGyeon, Park and Ko, Jeong Wan. Stability and robust stability for systems with a time-varying delay, *Automatica*, 43(10), 1855–1858, 2007
- [117] PooGyeon, Park and Moon, Young Soo and Kwon, Wook Hyun. A delay-dependent robust stability criterion for uncertain time-delay systems, *American Control Conference*, 1998. *Proceedings of the 1998*, 3, 1963–1964, 1998
- [118] PooGyeon, Park and Lee, Won Il and Lee, Seok Young. Auxiliary function-based integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems, *Journal of the Franklin Institute*, 352(4), 1378–1396, 2015
- [119] Pierre, Apkarian and Gahinet, Pascal. A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers, 1995
- [120] Pin-Lin, Liu. A delay decomposition approach to stability analysis of neutral systems with time-varying delay, *Applied Mathematical Modelling*, 37(7), 5013–5026, 2013
- [121] Qing-Long, Han. Stability criteria for a class of linear neutral systems with time-varying discrete and distributed delays, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 20(4), 371–386, 2003
- [122] Qing-Long, Han. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity, *Automatica*, 41(12), 2171–2176, 2005
- [123] Richard M, Murray and Jacobson, Clas A and Casas, R and Khibnik, Alexander I and Johnson, CR and Bitmead, R and Peracchio, AA and Proscia, WM. System identification for limit cycling systems : a case study for combustion instabilities, *American Control Conference*, 1998. *Proceedings of the 1998*, 4, 2004–2008, 1998
- [124] Rifat, Sipahi and Niculescu, Silviu-Iulian and Abdallah, Chaouki T and Michiels, Wim and Gu, Keqin. Stability and stabilization of systems with time delay, *IEEE Control Systems*, 31(1), 38–65, 2011

-
- [125] S, Lakshmanan and Senthilkumar, T and Balasubramaniam, P. Improved results on robust stability of neutral systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations, *Applied Mathematical Modelling*, 35(11), 5355–5368, 2011
- [126] Said, Idrissi and Tissir, El Houssaine and Boumhidi, Ismail and Chaibi, Noredine. New delay dependent robust stability criteria for TS fuzzy systems with constant delay, *International Journal of Control, Automation and Systems*, 11(5), 885–892, 2013
- [127] Said, Kririm and Hmamed, Abdelaziz. Delay-Dependent Stability of Differential Linear Repetitive Processes with Delays Along Two Directions, *Proceedings of the 2nd International Conference on Systems and Control, Marrakech, Morocco*, 20–22, 2012
- [128] Said, Kririm and Hmamed, Abdelaziz. Delay-Dependent Stability Condition for Linear 2-D State-Delayed Systems, *Applied mathematical sciences*, 8(93), 4621–4629, 2014
- [129] Shengyuan, Xu and Lam, James. Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3), 384–387, 2005
- [130] Shengyuan, Xu and Lam, James. A survey of linear matrix inequality techniques in stability analysis of delay systems, *International Journal of Systems Science*, 39(12), 1095–1113, 2008
- [131] Silviu-Iulian, Niculescu. On some frequency sweeping tests for delay-dependent stability : a model transformation case study, *Control Conference (ECC), 1999 European*, 3643–3648, 1999
- [132] Silviu-Iulian, Niculescu. Delay effects on stability : a robust control approach, 269, 2001
- [133] Silviu-Iulian, Niculescu and Chen, Jie. Frequency sweeping tests for asymptotic stability : A model transformation for multiple delays, *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, 5, 4678–4683, 1999
- [134] Silviu-Iulian, Niculescu and Morărescu, Constantin-Irinel and Michiels, Wim and Gu, Keqin. Geometric ideas in the stability analysis of delay models in biosciences, *Biology and control theory : Current challenges*, 217–259, 2007
- [135] Stephen, Boyd and El Ghaoui, Laurent and Feron, Eric and Balakrishnan, Venkataramanan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, 1994

BIBLIOGRAPHIE

- [136] Tae H, Lee and Park, Ju H and Xu, Shengyuan. Relaxed conditions for stability of time-varying delay systems, *Automatica*, 75, 11–15, 2017
- [137] Tomáš, Vyhlídal and Michiels, Wim and Zítek, Pavel and McGahan, Paul. Stability impact of small delays in proportional–derivative state feedback, *Control Engineering Practice*, 17(3), 382–393, 2009
- [138] Vishal, Goyal and Deolia, Vinay Kumar and Sharma, T. Neural network based sliding mode control for uncertain discrete-time nonlinear systems with time-varying delay, *Int. J. Comput. Intell. Res.*, 12(2), 125–138, 2016
- [139] Vladimir, Kolmanovskii and Myshkis, Anatolii. *Applied theory of functional differential equations*, 85, 2012
- [140] Vladimir, Kolmanovskii and Borisovich and Nosov, Valerij Romanovič. *Stability of functional differential equations*, 180, 1986
- [141] Wei, Qian and Liu, Juan. New stability analysis for systems with interval time-varying delay, *Journal of the Franklin Institute*, 350(4), 890–897, 2013
- [142] W-H, Chen and Guan, Z-H and Lu, Xiaomei. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 150(4), 412–416, 2003
- [143] Wim, Michiels and Niculescu, Silviu-Iulian. *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems (Advances in Design & Control)*(Advances in Design and Control), 2007, Society for Industrial and Applied Mathematics
- [144] Wim, Michiels and Morărescu, Constantin-Irinel and Niculescu, Silviu-Iulian. Consensus problems with distributed delays, with application to traffic flow models, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(1), 77–101, 2009
- [145] Wim, Michiels and Engelborghs, Koen and Roose, Dirk and Dochain, Denis. Sensitivity to infinitesimal delays in neutral equations, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(4), 1134–1158, 2002
- [146] Won Il, Lee and Park, Poogyeon. Second-order reciprocally convex approach to stability of systems with interval time-varying delays, *Applied Mathematics and Computation*, 229, 245–253, 2014
- [147] Won Il, Lee and Lee, Seok Young and Park, PooGyeon, Improved criteria on robust stability and H_∞ performance for linear systems with interval time-varying delays via new triple integral functionals, *Applied Mathematics and Computation*, 243, 570–577, 2014

-
- [148] Xian-Ming, Zhang and Han, Qing-Long and Seuret, Alexandre and Gouaisbaut, Frédéric. An improved reciprocally convex inequality and an augmented Lyapunov–Krasovskii functional for stability of linear systems with time-varying delay, *Automatica*, 2017
- [149] Xian-Ming, Zhang and Wu, Min and She, Jin-Hua and He, Yong. Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays, *Automatica*, 41(8), 1405–1412, 2005
- [150] Xianwei, Li and Gao, Huijun. A new model transformation of discrete-time systems with time-varying delay and its application to stability analysis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(9), 2172–2178, 2011
- [151] Xiaofu, Ji and Su, Hongye. A note on equivalence between two integral inequalities for time-delay systems, *Automatica*, 53, 244–246, 2015
- [152] Xiaojie, Su and Shi, Peng and Wu, Ligang and Song, Yong-Duan. A novel approach to filter design for T–S fuzzy discrete-time systems with time-varying delay, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(6), 1114–1129, 2012
- [153] Xiaohong, Nian and Pan, Huan and Gui, Weihua and Wang, Haibo. New stability analysis for linear neutral system via state matrix decomposition, *Applied Mathematics and Computation*, 215(5), 1830–1837, 2009
- [154] Xiefu, Jiang and Han, Qing-Long, On H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay, *Automatica*, 41(12), 2099–2106, 2005
- [155] Xiefu, Jiang and Han, Qing-Long and Yu, Xinghuo. Stability criteria for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delay, *American Control Conference*, 2005. Proceedings of the 2005, 2817–2822, 2005
- [156] Xun-Lin, Zhu and Yang, Guang-Hong. Jensen integral inequality approach to stability analysis of continuous-time systems with time-varying delay, *IET Control Theory & Applications*, 2(6), 524–534, 2008
- [157] Xun-Lin, Zhu and Yang, Guang-Hong. New results of stability analysis for systems with time-varying delay, *International Journal of robust and nonlinear control*, 20(5), 596–606, 2010
- [158] Kuang, Yang. *Delay differential equations : with applications in population dynamics*, 191, 1993

BIBLIOGRAPHIE

- [159] Yanling, Wei and Qiu, Jianbin and Karimi, Hamid Reza and Ji, Wenqiang. A Novel Memory Filtering Design for Semi-Markovian Jump Time-Delay Systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, 2017
- [160] Yanling, Wei and Qiu, Jianbin and Shi, Peng and Lam, Hak-Keung. A new design of H-infinity piecewise filtering for discrete-time nonlinear time-varying delay systems via TS fuzzy affine models, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, 2017
- [161] Yassine, Ariba and Gouaisbaut, Frédéric. Input-output framework for robust stability of time-varying delay systems, *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, 274–279, 2009
- [162] Yassine, Ariba and Gouaisbaut, Frédéric and Johansson, Karl Henrik. Stability interval for time-varying delay systems, *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, 1017–1022, 2010
- [163] Yawvi A, Fiagbedzi and Pearson, Allan E. A multistage reduction technique for feedback stabilizing distributed time-lag systems, *Automatica*, 23(3), 311–326, 1987
- [164] Yong, He and Wu, Min and She, Jin-Hua and Liu, Guo-Ping. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays, *Systems & Control Letters*, 51(1), 57–65, 2004
- [165] Yong, He and Wang, Qing-Guo and Lin, Chong and Wu, Min. Augmented Lyapunov functional and delay-dependent stability criteria for neutral systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 15(18), 923–933, 2005
- [166] Yong, He and Wang, Qing-Guo and Xie, Lihua and Lin, Chong. Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay, *IEEE Transactions on automatic control*, 52(2), 293–299, 2007
- [167] Yong, He and Wang, Qing-Guo and Lin, Chong and Wu, Min. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay, *Automatica*, 43(2), 371–376, 2007
- [168] Yuanqing, Xia and Liu, Guo-Ping and Shi, Peng and Rees, David and Thomas, EJC. New stability and stabilization conditions for systems with time-delay, *International Journal of Systems Science*, 38(1), 17–24, 2007

- [169] Yun, Liu and Hu, Li-Sheng and Shi, Peng. A novel approach on stabilization for linear systems with time-varying input delay, *Applied Mathematics and Computation*, 218(10), 5937–5947, 2012
- [170] Yun-Ping, Huang and Zhou, Kemin. Robust stability of uncertain time-delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(11), 2169–2173, 2000
- [171] Zhengrong, Zhao and Wang, Wei and Yang, Bin. Delay and its time-derivative dependent robust stability of neutral control system, *Applied Mathematics and Computation*, 187(2), 1326–1332, 2007
- [172] Ziye, Zhang and Lin, Chong and Chen, Bing. New stability criteria for linear time-delay systems using complete LKF method, *International Journal of Systems Science*, 46(2), 377–384, 2015
- [173] Ziye, Zhang and Lin, Chong and Chen, Bing. Complete LKF approach to stabilization for linear systems with time-varying input delay, *Journal of the Franklin Institute*, 352(6), 2425–2440, 2015