Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mahraz- Fès
Centre d'Etudes Doctorales
"Sciences et Technologies"

Formation Doctorale : **Mathématiques et Applications**

Discipline : Mathématiques

Spécialité : **Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale**

Laboratoire : Analyse Mathématique et Applications

THESE DE DOCTORAT

Présentée par

OULD MOHAMED BABA Mohamed Ahmed

Semi-Groupes α Fois Intégrables et Distance du Spectre Décomposablement Fredholm Holomorphe

Soutenue le **31 /3 / 2018 à 10H** devant le jury composé de :

Pr. Rachid Ameziane Hassani	*Faculté des Sciences-Fès*	*Président*
Pr. Najib Mahdou	*Faculté des Sciences et Techniques-Fès*	*Rapporteur*
Pr. Samir Kabbaj	*Faculté des Sciences-Kenitra*	*Rapporteur*
Pr. Hassan Zguitti	*Faculté Poly-Disciplinaire-Nador*	*Rapporteur*
Pr. Mustapha Ech-Chérif Elkettani	*Faculté des Sciences-Fès*	*Examinateur*
Pr. Aziz Blali	*Ecole Normale Supérieure - Fès*	**Examinateur**
Pr. Hassan Zariouh	*CRMEF de l'oriental-Oujda*	**Examinateur**
Pr. *Abdelaziz Tajmouati*	*Faculté des Sciences-Fès*	**Directeur de thèse**

Année universitaire : 2017-2018

Je dédie cette thèse :

A mes parents : Chaque ligne de cette thèse chaque lettre vous exprime ma reconnaissance.

A la mémoire de ma grande mère,

A la mémoire de mon oncle,

A mes frères, ma soeur, ma nièce (Hafsa), mes tantes, mes oncles,

A mon frère Khalid,

A Moctar et Abubakar,

A mes Professeurs.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur **Abdelaziz Tajmouati**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sceinces Dhar El Mhraz de l'Université Sidi Mohamed Ben Abdellah de Fès, pour m'avoir fait confiance en me proposant un sujet de thèse, puis pour m'avoir guidé, encouragé, conseillé tout en me laissant une grande liberté. Qu'il trouve ici l'expression de ma haute considération. Sa qualité humaine restera pour moi, un bon exemple à suivre.

Je remercie très sincèrement Monsieur **Rachid Ameziane Hassani**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sceinces Dhar El Mhraz de l'Université Sidi Mohamed Ben Abdellah de Fès, qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie le Professeur **Najib Mahdou** de la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université Sidi Mohamed Ben Abdellah de Fès pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. Sa participaption au jury de ma thèse est un grand honneur pour moi.

Je remercie le Professeur **Samir Kabbaj** de la Faculté des Sciences de l'Université Ibn Toufail de Kenitra, d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et de bien vouloir venir de Kenitra pour participer au jury de la soutenance. Qu'il trouve ici l'expression de ma haute considération.

Mes sincères remerciements au Professeur **Mohamed Bendaoud** de l'Ecole Nationale Supèrieure des Arts et Métiers de Meknès, qui a accepté de rapporter cette thèse et pour l'honneur qu'il me fait en participant au jury.

Mes vifs remerciements s'adressent aux Professeurs, **Mustapha Ech-Chérif Elkettani** de la Faculté des Sceinces Dhar El Mhraz l'Université Sidi Mohamed Ben Abdellah de Fès, **Hassan Zariouh** du CRMEF de l'Oriental d'Oujda et **Aziz Blali** de l'Ecole Normale Supérieure de Fès, pour l'inétrêt qu'ils ont porté à ce travail et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en participant au jury de cette thèse.

Je pense ici en particulier à Monsieur**Abdselam El Bakkali**, Professeur de la Faculté de Sciences de l'Université Chouaib Doukkali d'El Jadida, qui m'a aidé beaucoup par ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise, sa tendresse et sa gentillesse.

J'aimerais aussi remercier infiniment tous les Professeurs du département de Mathématiques. En particulier, toute l'Equipe d'Analyse Fonctionnelle de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz Fès et mes Professeurs au master Mathématiques et Applications.

Je tiens aussi à exprimer le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du groupe de la Théorie spectrale des Opérateurs, présidé par le Professeur Abdelaziz Tajmouati, de l'équipe de l'Analyse Fonctionnelle du Laboratoire d'Analyse Mathématiques et Applications (LAMA), et j'en remercie ici tous les membres de notre Equipe de la Théorie spectrale des Opérateurs.
Aussi, je remercie le Ministère Mauritanien de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique et l'Agence Marocaine de Coopération Internationale, qui ont financé une bonne partie de mes études.
Je passe une dédicace spéciale à tous les jeunes gens que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant ces quelques années à Fès.

Pour leurs encouragements qui m'ont permis de faire cette thèse, je remercie chaleureusement mon père **Mohamed Baba**, ma mère **Fatimettou**, mes frères **Ahmed, Mosteva, Zoubeir, Ismail, Khalid et Abdellahi**, ma soeur **Meimouna**, mon oncle **Mahfoud**, mes tantes **Aichettou, Khadijetou et Toutou** et le reste de ma grande famille.

Table des matières

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions les semi-groupes α fois intégrables. Cette notion a été introduite par W. Arendt comme une généralisation des C_0-semi-groupes. Plusieurs études ont été faites sur les semi-groupes α fois intégrables comme l'existence de la solution du problème de Cauchy et la généralisation du Théorème de Hille-Yosida. Inspiré de l'étude spectrale faite sur les C_0-semi-groupes, nous nous intéressons aux différentes relations spectrales entre un semi-groupe α fois intégrable et son générateur. En particulier, les spectres de Fredholm, Drazin, ascente, descente, quasi-Fredholm et Browder. Ensuite, nous continuons d'étudier les opérateurs décomposablement Fredholm holomorphes $\mathcal{H}\Phi(X)$. On dit que $T \in \mathcal{H}\Phi(X)$ si $0 \in \rho_{hF}(T)$ où $\rho_{hF}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}$: tels qu'il existe un voisinage U de λ et une fonction analytique $F : U \to \mathcal{B}(X)$ vérifiant $(T - \mu I)F(\mu)(T - \mu I) = T - \mu I$ et $F(\mu) \in \Phi(X)$ pour tout $\mu \in U\}$. Plus précisément, nous calculons la distance entre 0 et le spectre $\sigma_{hF}(T)$. Puis, nous caractérisons les ϕ-multiplicateurs à l'aide de la fonction de Helgason. Aussi, nous discutons la fameuse équation $AB = \lambda BA$. Enfin, nous terminons cette thèse par la recherche des propriétés spectrales locales entre SA et AT tel que $BSA = ATB$.

Mots clés : C_0-semi-groupe, semi-groupe α fois intégrable, générateur, Fredholm, quasi-Fredholm, Drazin, ascente, descente, Browder, propriété de l'extension unique (SVEP), propriété de Bishop (β), opérateur décomposablement Fredholm holomorphe, Kato, Saphar, ϕ-multiplicateur, bi-normal et quasi-normal.

Abstract

In this thesis we study the $\alpha-$times integrated semigroups. This notion was introduced by W. Arendt as a generalization of C_0-semigroups. Several studies have been made on this class as the existence of the solution of the Cauchy problem and the generalization of Hille-Yosida's Theorem. Inspired by the spectral study done on C_0-semigroups, we are interested in the different spectra relations between an $\alpha-$times integrated semigroup and its generator. Particulary, the spectra Fredholm, Drazin, ascent, descent, quasi Fredholm and Browder. Later, we continue the development of holomorphically decomposable Fredholm $\mathcal{H}\Phi(X)$. We say that $T \in \mathcal{H}\Phi(X)$ if $0 \in \rho_{hF}(T)$ where $\rho_{hF}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}$: such that there exists a neighborhood U of λ and an analytic function $F : U \to \mathcal{B}(X)$ satisfying $(T - \mu I)F(\mu)(T - \mu I) = T - \mu I$ and $F(\mu) \in \Phi(X)$ for all $\mu \in U\}$. More precisely, we calculate the distance between 0 and the spectrum $\sigma_{hF}(T)$. Also, we characterize the ϕ-multipliers using Helgason's function. Finally, we discuss the famous equation $AB = \lambda BA$. Also, we look for the local spectral properties between SA and AT such that $BSA = ATB$.

Key words : C_0-semigroup, $\alpha-$times integrated semigroup, generator, Fredholm, quasi-Fredholm, Drazin, ascent, descent, Browder, SVEP property, Bishop property β, operators holomorphically decomposable Fredholm, Kato, Saphar, ϕ-multiplier, bi-normal and quasi-normal.

Notation :

$\mathbb{C}$	:	*corps des nombres complexes,*
X	:	*espace de Banach ;*
$\mathcal{A}$	:	*algèbre de Banach,*
$\mathcal{H}$	:	*espace d'Hilbert,*
$r(T)$	:	*le rayon spectral de* T,
T^*	:	*l'adjoint de* T,
$N(T)$	:	*le noyau de* T,
$R(T)$	:	*l'image de* T,
$\mathcal{B}(X)$	:	*l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur* X,
$G(X)$	:	*la classe des opérateurs inversibles* X,
$G\mathcal{R}(X)$	:	*la classe des opérateurs décomposablement régulières holomorphes sur* X,
$\Phi(X)$	:	*la classe des opérateurs Fredholm sur* X,
$\Phi\mathcal{R}(X)$	:	*la classe des opérateurs décomposablement Fredholm sur* X,
$\mathcal{H}\Phi(X)$	:	*la classe des opérateurs Fredholm holomorphe sur* X,
$\mathcal{S}(X)$	:	*la classe des opérateurs de Saphar sur* X,
$\rho(T)$	:	*le résolvant de* T,
$\rho_K(T)$	:	*le résolvent de Kato de* T,
$\rho_{rr}(T)$	:	*le résolvent de Saphar de* T,
$\rho_{gr}(T)$	:	*le résolvent décomposablement régulier holomorphe de* T,
$\rho_{hF}(T)$	:	*le résolvent décomposablement Fredholm holomorphe de* T,
$\sigma_K(T)$	:	*le spectre de Kato de* T,
$\sigma_{rr}(T)$	:	*le spectre de Saphar de* T,
$\sigma_{gr}(T)$	:	*le spectre décomposablement régulier holomorphe de* T,
$\sigma_{hF}(T)$	:	*le spectre décomposablement Fredholm holomorphe de* T,
$SVEP$	:	*la propriété de l'extension unique,*
$\mathcal{O}(U, X)$	:	*espace de Frechet des fonctions de classe* C^∞ *sur* U *à valeurs dans* X,
$\mathcal{H}(\sigma(T))$	:	*algèbre des fonctions analytiques au voisinage du spectre de* T,

$\mathcal{A}^*$	:	le dual de $\mathcal{A}$,
$Re(\lambda)$	:	le réel de $\lambda \in \mathbb{C}$,
$A \backslash B$	:	A pivé de B,
$D(0, r)$	:	disque de centre 0 et de rayon r,
$A \simeq B$	:	A isomorphe à B.

Introduction Générale

En 1820, dans son cours d'analyse [13, p. 100], A. Cauchy a posé la question suivante :
"Déterminer la fonction $\varphi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait pour toutes les valeurs réelles des variables x et y

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)."$$

Autrement dit, le problème de Cauchy peut se reformuler de la manière suivante :
Trouver les applications $T(.) : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(X)$ vérifiant

$$\begin{cases} T(t+s) &= \quad T(t)T(s) \text{ pour tout } t, s \geq 0 \\ \quad T(0) &= I. \end{cases}$$

Ce problème de Cauchy est l'origine de la notion de semi-groupes.
On dit qu'une famille $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe si on a

$$\begin{cases} T(t+s) &= \quad T(t)T(s) \text{ pour tout } t, s \geq 0 \\ \quad T(0) &= I. \end{cases}$$

Si de plus $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$ pour tout $x \in X$, alors $(T(t))_{t\geq 0}$ est appelé un C_0-semi-groupe. Le générateur de $(T(t))_{t\geq 0}$ est l'opérateur linéaire A défini sur le domaine

$$D(A) = \{x \in X \ : \ \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\}$$

par

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Plusieurs auteurs ont étudié la relation spectrale entre un C_0-semi-groupe et son générateur.
Dans [23] et [22], A. Elkoutri et M. A. Taoudi ont étudié les spectres semi-Fredholm supérieur, Kato et essentiellement Kato.
Dans [61], A. Tajmouati, M. Amouch et M.R.F. Alhomidi Zakariya ont étudié différents spectres.

Dans [63], A. Tajmouati et H. Boua ont étudié les spectres de l'ascente, descente et Drazin.

W. Arendt a remarqué que pour un générateur A d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, $\frac{R(\lambda,A)}{\lambda^\alpha}$ est la transformée de Laplace pour une famille $(S(t))_{t\geq 0}$ (c'est-à-dire $\frac{R(\lambda,A)}{\lambda^\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)dt$) où

$$S(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}T(s)ds \text{ et } \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Grâce à cette remarque pertinente, W. Arendt a introduit la classe des opérateurs générés par les semi-groupes α fois intégrables. Un opérateur linéaire A est dit un générateur d'un semi-groupe α fois intégrable, si pour un certain $\omega \in \mathbb{R}$ on a $]\omega, +\infty[\subseteq \rho(A)$ et il existe une application fortement continue $S : [0, +\infty[\to \mathcal{B}(X)$ vérifiant

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &\leq Me^{\omega t} \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ et certain } M > 0 \\ R(\lambda, A) &= \lambda^\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)ds \text{ pour tout } \lambda > \max\{\omega, 0\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, $(S(t))_{t\geq 0}$ est appelée un semi-groupe α fois intégrable.
Si $\alpha = 0$, alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe. L'étude spectrale faite sur les C_0-semi-groupes, nous pousse à chercher les relations spectrales entre $(S(t))_{t\geq 0}$ et A.
Dans cette thèse, nous obtenons différentes relations spectrales entre un semi-groupe α fois intégrable et son générateur. En particulier, nous étudions les spectres de Fredholm, Kato, Saphar, Quasi-Fredholm, Drazin, ascente et descente.

Ensuite, nous continuons à étudier la classe des opérateurs décomposablement Fredholm Holomorphes $\mathcal{H}\Phi(X)$ [20]. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est décomposablement Fredholm Holomorphe, en symbole $T \in \mathcal{H}\Phi(X)$, si $0 \in \rho_{hF}(T)$ où $\rho_{hF}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} :$ tels qu'il existe un voisinage U de λ et une fonction analytique $F : U \to \mathcal{B}(X)$ vérifiant $(T - \mu I)F(\mu)(T - \mu I) = T - \mu I$ et $F(\mu) \in \Phi(X)$ pour tout $\mu \in U\}$. Cette notion est une généralisation des opérateurs relativement réguliers [52].
On rappelle qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit relativement régulier si $0 \in \rho_{gr}(T)$ où
$\rho_{gr}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} :$ tels qu'il existe un voisinage U de λ et une fonction analytique $F : U \to \mathcal{B}(X)$ vérifiant $(T - \mu I)F(\mu)(T - \mu I) = T - \mu I$ pour tout $\mu \in U\}$.

Dans [51, Théorème 3], C. Schmöeger a calculé la distance entre 0 et le spectre relativement régulier à l'aide d'une distance bien posée.
D'une manière naturelle, nous nous intéressons à calculer la distance entre 0 et le spectre décomposablement Fredholm Holomorphe.
Nous terminons ce travail par l'étude de deux types d'équations :

-l'équation $AB = \lambda BA$, en cherchant les valeurs de λ pour certaines classes d'opérateurs.
-l'équation $BSA = ATB$, en cherchant les propriétés spectrales communes entre SA et AT.

Pour se faire, nous organisons cette thèse sous forme de trois chapitres :
- Dans le premier chapitre, nous rappellons les principaux résultats et définitions connus et qui sont utils pour aborder notre étude.
- Le deuxième chapitre sera consacré à la notion de semi-groupes α fois intégrables. Il est clair que pour $\alpha = 0$, alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe. La question qui se pose de manière naturelle, c'est d'étudier les relations spectrales entre un semi-groupe α fois intégrable et son générateur.
- Nous introduisons, dans le dernier chapitre, une nouvelle distance qui nous permet de calculer la distance du spectre décomposablement Fredholm holomorphe $\text{dist}\{0, \sigma_{hF}(T)\}$ pour $T \in \mathcal{H}\Phi(X)$. Notamment, pour $T \in \mathcal{B}(X)$, on définit les distances suivantes :

$$\delta_{\Phi,n}(T) = \sup\{r(S)^{-1} : T^n S T^n = T^n, S \in \Phi(X)\} \ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}^* ;$$

$$\delta_{\Phi}(T) = \sup_{n\geq 1}(\delta_{\Phi,n}(T))^{\frac{1}{n}}.$$

Par conséquent, on montre que $dist\{0, \sigma_{hF}(T)\} = \lim_{n\to\infty}(\delta_{\Phi,n}(T))^{\frac{1}{n}} = \delta_{\Phi}(T)$.
Puis, on étudie les ϕ-multiplicateurs [36]. Dans [1, Théorème 4.14], P. Aiena donne une caractérisation intéressante des multiplicateurs à l'aide de la fonction de Helgason. On essaye de généraliser ce résultat pour les $\phi-$multiplicateurs. Plus précisément, pour tout $T \in M_\phi(\mathcal{A})$, il existe une unique fonction continue φ_T sur $\Delta(\mathcal{A})$ vérifiant l'équation $\widehat{Tx}(m) = \varphi_T(m)\widehat{\phi(x)}(m)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$ et pour tout $m \in \Delta(\mathcal{A})$. De plus, on a $|\varphi_T(m)| \leq \frac{\|m\|\|T\|}{\|m\circ\phi\|}$ pour tout $m \in \Delta(\mathcal{A})$. Enfin, nous nous intéressons aux équations $AB = \lambda BA$ et $BSA = ATB$. Pour la première équation, on considère les opérateurs quasi-normaux et bi-normaux. Pour l'autre équation qui généralise l'équation $ASA = ATA$, on cherche les propriétés spectrales locales entre AT et SA comme spectre local, la propriété de l'extension unique (SVEP) et la propriété de Bishop (β).
Nous terminerons cette thèse en donnant nos perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires (Rappels et Définitions)

1.1 C_0-semi-groupes

Définition 1.1.1 *[46, Définition 1.1] Une famille $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ est dite un semi-groupe si elle vérifie le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} T(t+s) & = & T(t)T(s) \text{ pour tout } t,s \geq 0 \\ T(0) & = I. \end{cases}$$

Le générateur de $(T(t))_{t\geq 0}$ est l'opérateur linéaire A définit sur le domaine

$$D(A) = \{x \in X \ : \ \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\}$$

par

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Exemple 1.1.1 ([24],[46]) *1. Soit $A \in \mathcal{B}(X)$, alors $(e^{tA})_{t\geq 0}$ est un semi-groupe où l'exponentielle e^{tA} est définie via l'intégral de Cauchy :*

$$e^{tA} := \int_{+\partial U} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

avec U un voisinage de $\sigma(A)$ et $+\partial U$ sa frontière orientée positivement.

2. L'application définie par

$$\begin{cases} [0,+\infty[& \to & \mathcal{B}(X), \\ t & \to & e^{tA} \end{cases}$$

est continue et différentiable. De plus, elle vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) & = & Ax(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

3. *Inversement avec $A \in \mathcal{B}(X)$, tout semi-groupe différentiable vérifie l'équation*

$$\begin{cases} T'(t) &= AT(t) \\ T(0) &= I \end{cases}$$

alors $T(t) = e^{tA}$.

Définition 1.1.2 *[24, Définition 3.6] On dit qu'un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu si l'application $T(.) : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(X)$ est continue en norme ($\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0$).*

Théorème 1.1.1 *[46, Corollaire 1.4] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu. Alors on a :*

1. *A est un générateur de $(T(t))_{t\geq 0}$ si et seulement si $A \in \mathcal{B}(X)$. De plus*

$$T(t) = e^{tA}.$$

2. *Il existe $\omega \geq 0$ tel que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$*
3. *$t \to T(t)$ est différentiable et de plus*

$$T'(t) = AT(t) = T(t)A.$$

Définition 1.1.3 *[24, Définition 3.11] Un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit exponentiellement stable s'il existe $\omega > 0$ et $M \geq 1$ tel que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Proposition 1.1.1 *[24, Proposition 3.12] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu, alors $(T(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si*

$$\lim_{t\to+\infty} \|T(t)\| = 0.$$

Définition 1.1.4 *[46, Définition 2.1] On dit qu'un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est fortement continu (C_0-semi-groupe) si l'application $T(.) : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(X)$ est continue.*

Remarque 1.1.1 ([24],[46]) *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. Alors*

1. *$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$.*
2. *$(T(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable.*
3. *A est fermé.*
4. *Pout tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\overline{D(A)} = \overline{D(A^n)} = X.$$

Théorème 1.1.2 *[46, Théorème 2.4] Soit A le générateur d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$. Alors on a :*

1. *Pour tout $x \in X$,*
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(r)xdr = T(t)x.$$
2. *Pour tout $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ et*
$$T'(t) = AT(t)x = T(t)Ax.$$
3. *Pour tout $x \in X$, $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ et*
$$A(\int_0^t T(s)xds) = T(t)x - x.$$
4. *Pour tout $x \in D(A)$, $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ et*
$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(r)xdr = \int_s^t T(r)Axdr.$$

Théorème 1.1.3 (Hille-Yosida(1948)) *[24, Théorème 3.5] Soit A un opérateur linéaire sur un domaine $D(A) \subset X$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est un générateur d'un C_0-semi-groupe contractant $(T(t))_{t\geq 0}$,*
2. *A est un fermé, $\overline{D(A)} = X$ et pour tout $\lambda > 0$, $\lambda \in \rho(A)$ et*
$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda},$$
3. *A est un fermé, $\overline{D(A)} = X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\lambda) > 0$, $\lambda \in \rho(A)$ et*
$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{Re(\lambda)}.$$

Théorème 1.1.4 (Feller-Miyadera-Phillips(1952)) *[24, Théorème 3.8] Soit A un opérateur linéaire sur un domaine $D(A) \subset X$ et soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ des constantes. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est un générateur d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ vérifiant*
$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$
2. *A est un fermé, $\overline{D(A)} = X$ et pour tout $\lambda > \omega$, $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{1}{|\lambda - \omega|^n},$$
3. *A est un fermé, $\overline{D(A)} = X$ et pour tout $\lambda > Re(\omega)$, $\lambda \in \rho(A)$ et*
$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{1}{|Re(\lambda) - \omega|^n}.$$

1.2 Semi-groupes α fois intégrables

Définition 1.2.1 *Soient X un espace de Banach et $f : [0,+\infty[\to X$ une fonction mesurable vérifiant $\|f(t)\| \leq Me^{\omega t}$ pour un certain $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 0$. Alors pour tout $\lambda > 0$, la transformation de Laplace est donnée par*

$$r(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(\lambda) dt.$$

Cet intégrale est définie au sens de Bochner.

Soient $\beta \geq -1$ et f une fonction continue. La convolution $j_\beta * f$ est définie pour tout $t \geq 0$ par

$$j_\beta * f(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{(t-s)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} f(s)ds & \text{si } \beta > -1, \\ \int_0^t f(t-s)d\delta_0(s) & \text{si} \beta = -1, \end{cases}$$

avec Γ est l'intégrale d'Euler donnée par $\Gamma(\beta+1) = \int_0^{+\infty} x^\beta e^{-x}dx$, $j_{-1} = \delta_0$ la mesure de Dirac et pour tout $\beta > -1$,

$$\begin{array}{rccc} j_\beta & : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R}, \\ & & t & \mapsto & \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}. \end{array}$$

Définition 1.2.2 *[4]*

1. *Soit $\alpha > 0$. Une famille $S(t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ fortement continue est dite un semi-groupe α fois intégrable, si $S(0) = 0$ et pour tout $t, s \geq 0$*

$$S_n(t)S_n(s) = \int_t^{t+s} \frac{(s+t-r)^{n-1}}{\Gamma(n)} S_n(r)dr - \int_0^s \frac{(s+t-r)^{n-1}}{\Gamma(n)} S_n(r)dr, \qquad (*)$$

   où $n-1 < \alpha \leq n$ et $S_n(t)(x) = (j_{n-\alpha-1} * S)(x)$ pour tout $x \in X$.

2. *Inversement, pour un opérateur linéaire A, on dit que A est un générateur d'un semi-groupe α fois intégrable, si pour certain $\omega \in \mathbb{R}$ on a $]\omega,+\infty[\subseteq \rho(A)$, et il existe une application fortement continue $S : [0,+\infty[\to \mathcal{B}(X)$ vérifiant*

$$\begin{array}{rcl} \|S(t)\| & \leq & Me^{\omega t} \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ et un certain } M > 0 \\ R(\lambda, A) & = & \lambda^\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)ds \text{ pour tout } \lambda > \max\{\omega, 0\}, \end{array}$$

   dans ce cas, $(S(t))_{t\geq 0}$ est appelée semi-groupe α fois intégrable et le domaine de son générateur A est donné par

$$D(A) = \{x \in X \ : \ \int_0^t S(s)Axds = S(t)x - \frac{t^\alpha x}{\Gamma(\alpha+1)}\}.$$

Remarque 1.2.1 *1. D'après le Théorème de la transformation de Laplace $(S(t))_{t\geq 0}$ est unique.*

2. En particulier, tous les C_0-semi-groupes sont des semi-groupes α fois intégrables avec $\alpha = 0$.

3. D'après (*), on conclut que pour tout $t, s \geq 0$

$$S(t)S(s) = S(s)S(t).$$

4. Si A est un générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ pour un certain $\alpha \geq 0$, alors A est aussi un générateur d'un semi-groupe β fois intégrable $(S_\beta(t))_{t\geq 0}$ pour tout $\beta > \alpha$ avec $S_\beta(t)x := j_{\beta-\alpha-1} * S(t)x$ pour tout $x \in X$.

Dans 1934 [81], D.V. Widder a prouvé que si $r \in C^\infty(]0, +\infty[)$, alors il existe $f \in L^\infty([0, +\infty[)$ tel qu'on a

$$\sup_{\lambda>0, n\in\mathbb{N}} \{\frac{\lambda^{n+1} r^{(n)}(\lambda)}{n!}\} < +\infty \Leftrightarrow r(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(\lambda) dt.$$

Ensuite à 1987 [4], W. Arendt a démontré le Théorème de Widder dans un espace de Banach X : Si $r \in C^\infty(]0, +\infty[, X)$ tel que $\sup_{\lambda>0,n\in\mathbb{N}}\{\frac{\lambda^{n+1} r^{(n)}(\lambda)}{n!}\} < +\infty$, alors il existe $f \in L^\infty([0, +\infty[, X)$ vérifiant

$$r(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(\lambda) dt.$$

Théorème 1.2.1 (Feller-Miyadera-Phillips(1952)) *[30, Théorème 3.4] Soit A un opérateur linéaire sur un domaine $D(A) \subset X$ et soient $\alpha \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 0$ des constantes. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. Il existe $a \geq \max\{0, \omega\}$ et $M \geq 0$ tel que $]a, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \geq a$,

$$\|\Big(\frac{R(\lambda, A)}{\lambda^\alpha k!}^{(k)}\Big)^{(k)}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|^{k+1}},$$

2. A est un générateur d'un semi-groupe β fois intégrable $(T(t))_{t\geq 0}$ pour tout $\beta \in]\alpha, \alpha + 1]$ et il existe une constante K vérifiant pour tout $t \geq 0$

$$\limsup_{h\to 0^+} \|T_{\alpha+1}(t + h) - T_{\alpha+1}(t)\| \leq K e^{\omega t}.$$

Théorème 1.2.2 (Arendt-Neubrander(1989)) *[30, Théorème 3.5] Soit A un opérateur linéaire tels que $\overline{D(A)} = X$ et $]a, +\infty[\subset \rho(A)$ pour certain $a \geq 0$. On considère $\alpha \geq 0$ et $\omega \leq a$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. Il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \geq a$,

$$\|\Big(\frac{R(\lambda, A)}{\lambda^\alpha k!}\Big)^{(k)}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|^{k+1}},$$

2. A est un générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(T(t))_{t\geq 0}$.

Exemple 1.2.1 *1. Pour tout $f \in D(A) := \{f \in L^1(\mathbb{R}) \,/\, f$ est continue et $f' \in L^1(\mathbb{R})\}$, on définit l'opérateur linéaire A par*

$$Af = -f'.$$

Comme $(L^1(\mathbb{R}))^* = L^\infty(\mathbb{R})$ et l'adjoint A^* de A est défini pour tout $f \in D(A^*) = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f$ est continue et $f' \in L^\infty(\mathbb{R})\}$ par

$$A^* f = f'.$$

Alors pour tout $\alpha > 0$, A^* est un générateur d'un semi-groupe α fois intégrable.

2. *En général, on considère un générateur A d'un C_0-semi-groupe sur un espace de Banach X, alors pour tout $\alpha > 0$, l'adjoint A^* de A sur X^* est un générateur d'un semi-groupe α fois intégrable.*
3. *Soit X un espace de Banach ordonné de cône normal et générateur (par exemple : Banach treillis ou $\mathbb{C}^*$-algèbre). On considère un opérateur linéaire A tel que son résolvent est positif c'est à dire (il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, +\infty[\subset \rho(A)$ et $R(\lambda, A) \geq 0$). Si $\overline{D(A)} = X$ ou la norme de X est continue, alors A est un générateur d'un semi-groupe α intégrable.*
4. *Soit $X = C([0,1]) \times \mathbb{R}$. On considère A défini, pour tout $(f,0) \in D(A) = C^1([0,1]) \times \{0\}$, par*

$$A(f,0) = (f', -f(0)).$$

Alors le résolvent de A est positif et, par suite, pour tout $\alpha > 1$, A est un générateur d'un semi-groupe α fois intégrable.

1.3 Opérateurs de Kato et d'essentiellement Kato

Soient M et N deux sous espaces de X. On note par $M \subseteq_e N$ (inclusion essentielle) s'il existe un sous espace de dimension finie $F \subseteq X$, tel que $M \subseteq N + F$.

Définition 1.3.1 *[1],[45] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Nous définissons les quantités suivantes :*

1. *Le module minimum de T par* $\gamma(T) := \begin{cases} \inf\{\|Tx\| \,/\, x \in X, dist\{x, N(T)\} = 1\} & si\ T \neq 0, \\ \infty & si\ T = 0. \end{cases}$
2. *Le module injectif de T par $j(T) = \inf\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\}$.*
3. *Le module surjectif de T par $k(T) = \sup\{r \geq 0 : rB_X \subseteq TB_X\}$.*

Théorème 1.3.1 *[45] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$N(T) \subseteq T^n(X),\ \forall n \in \mathbb{N}$,*

2. $N(T^n) \subseteq T(X), \ \forall n \in \mathbb{N}$,
3. $N(T^n) \subseteq T^m(X), \ \forall n, m \in \mathbb{N}$,
4. $N(T^n) = T^m[N(T^{n+m})], \ \forall n, m \in \mathbb{N}$,
5. $N(T) \subseteq T^\infty(X)$ *où* $T^\infty(X) := \bigcap_{n\geq 0} T^n(X)$,
6. $N^\infty(T) \subseteq T(X)$ *où* $N^\infty(T) := \bigcup_{n\geq 0} N(T^n)$,
7. $N^\infty(T) \subseteq T^\infty(X)$.

Définition 1.3.2 *[45] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$.*

1. *T est un opérateur de Kato ($T \in \mathcal{D}(X)$), si $R(T)$ est fermé et T vérifie l'une des assertions du Théorème 1.3.1.*
2. *T est un opérateur essentiellement Kato, $T \in e\mathcal{D}(X)$, si $R(T)$ est fermé et $N(T) \subseteq_e R^\infty(T)$. Les spectres de Kato et d'essentiellement Kato de T sont définis respectivement par*

$$\sigma_K(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, T - \lambda I \text{ n'est pas de Kato}\},$$

$$\sigma_{eK}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, T - \lambda I \text{ n'est pas essentiellement Kato}\}.$$

Théorème 1.3.2 *[45] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_K(T) \subseteq \sigma(T)$.
2. *$\sigma_K(T)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$.*
3. $\sigma_K(T) = \sigma_K(T^*)$.
4. *$\sigma_K(T)\backslash\sigma_G(T)$ est au plus dénombrable où $\sigma_G(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, (T - \lambda I)(X)$ est fermé$\}$ est le spectre de Goldberg.*
5. *Si T est Kato, alors $T - \lambda I$ est aussi Kato pour tout $\lambda < \gamma(T)$.*
6. *Si T est Kato, alors dist$\{0, \sigma_k(T)\} = \Gamma(T) := \lim_{n\to\infty} \gamma(T^n)^{\frac{1}{n}} = \sup_{n\geq 1} \gamma(T^n)^{\frac{1}{n}}$.*
7. *Si X est un espace de Hilbert, alors $\sigma_K(T) = \{\lambda_0 \in \mathbb{C} \,/\, \lim_{\lambda\to\lambda_0} \gamma(T - \lambda I) = 0\}$.*

Remarque 1.3.1 *[45] Soient $T, S \in \mathcal{B}(X)$. Alors on a les propriétés suivantes :*

- $j(T) \leq \|T\|$ *et* $k(T) \leq \|T\|$.
- *T est surjectif si et seulement si $k(T) > 0$.*
- *T est borné inférieurement si $j(T) > 0$.*
- $j(S)j(T) \leq j(ST) \leq \|S\|j(T)$.
- $k(S)k(T) \leq k(ST) \leq k(S)\|T\|$.
- *$R(T)$ est fermé si et seulement si $\gamma(T) > 0$.*
- *Si T est injectif, alors $\gamma(T) = j(T)$.*
- *Si T est surjectif, alors $\gamma(T) = k(T)$.*
- *Si T est bijectif, alors $\gamma(T) = j(T) = k(T) = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.*

1.4 Opérateurs Drazin inversible et Quasi-Fredholm

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est Drazin inversible si $a(T)$ et $d(T)$ sont finies. Dans ce cas $a(T) = d(T) = p$ et d'après le Théorème 7.9 [72], on a

$$X = N(T^p) \oplus R(T^p).$$

Pour un opérateur linéaire fermé A de domaine $D(A) \subseteq X$, on dit que A est Drazin inversible s'il existe un opérateur $A^D \in \mathcal{B}(X)$ vérifiant $R(A^D) \subset D(A)$, $R(I - AB) \subset D(A)$, $A^D A A^D = A^D$, $A^D A = A A^D$ et $A(I - AA^D)$ est nilpotent. De plus, A est Drazin inversible si et seulement si

$$A = A_1 \oplus A_2,$$

où A_1 est fermé et inversible et A_2 est nilpotent et borné (voir [34]).
Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, on définit le degré d'itération stable $dis(T)$ de T par

$$dis(T) = \inf\{n \in \mathbb{N} \,/\, \forall m \geq n, R(T^n) \cap N(T) = R(T^m) \cap N(T)\}.$$

L'opérateur T est dit quasi-Fredholm, en symbole $T \in q\Phi(X)$, s'il existe $d \in \mathbb{N}$ tels que $dis(T) = d$ et $R(T^n)$ et $R(T) + N(T^n)$ sont fermés pour tout $n \geq d$. Les spectres de Drazin et de quasi-Fredholm sont définis respectivement par

$$\sigma_D(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, \lambda - T \text{ n'est pas de Drazin inversible}\},$$

$$\sigma_{qe}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, \lambda - T \notin q\Phi(X)\}.$$

1.5 Opérateurs Saphar

Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On dit que T est relativement régulier, $T \in \mathcal{R}(X)$, s'il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $TST = T$.

Théorème 1.5.1 *[45] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est relativement régulier,*
2. *$N(T)$ et $T(X)$ admettent au sens topologique de sous-espaces complémentaires dans X.*

Définition 1.5.1 *[50] Soient $T \in \mathcal{B}(X)$. On dit que :*

1. *T est dit Saphar ($T \in \mathcal{S}(X)$), si T est Kato et relativement régulier. En symbole, on note par $\sigma_{rr}(T)$ son spectre associé.*
2. *T est dit essentiellement Saphar ($T \in e\mathcal{S}(X)$), si T est essentiellement Kato et relativement régulier. En symbole, on note par $\sigma_{err}(T)$ son spectre associé.*

Remarque 1.5.1 *1. Un opérateur de Saphar est appelé aussi selon R. Harte [29] et V. Mûller [45, C.12.1] hyper-régulier et régulier respectivement.*

2. Dans le cas où X est un espace de Hilbert, la classe des opérateurs de Saphar coïncide avec celle de Kato. Autrement dit, $\mathcal{S}(X) = \mathcal{D}(X)$.

Lemme 1.5.1 *[45] Soit $T \in \mathcal{S}(X)$ et $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $TST = T$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $T^nS^nT^n = T^n$. De plus, $T^n \in \mathcal{S}(X)$ et S^n est un pseudo-inverse de T^n.*

Théorème 1.5.2 *[45] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors $T \in \mathcal{S}(X)$ si et seulement si il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}$ et une fonction analytique $F : U \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ tel que :*

$$(T - \lambda I)F(\lambda)(T - \lambda I) = T - \lambda I \text{ pour tout } \lambda \in U.$$

Plus précisément, si S est un inverse généralisé de T, alors on peut prendre et

$$F(\lambda) = S(I - \lambda S)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} S^{k+1}\lambda^k$$

pour tout $\lambda \in U = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, |\lambda| < \|S\|^{-1}\}$.

Remarque 1.5.2 *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. D'après le Théorème 1.5.2, on conclut que $\rho_{rr}(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et on a

$$\rho(T) \subseteq \rho_{rr}(T) \subseteq \rho_K(T) \text{ et } \sigma_K(T) \subseteq \sigma_{rr}(T) \subseteq \sigma(T).$$

2. Si $T \in \mathcal{S}(X)$ et $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $TST = T$, alors

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r(S)^{-1}\} \subseteq \rho_{rr}(T).$$

Le théorème suivant caractérise les opérateurs de Saphar.

Théorème 1.5.3 *[42, Théorème 4.1] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. T est de Saphar.

2. Il existe un voisinage U de 0 et une fonction analytique $F : U \to \mathcal{B}(X)$ vérifiant $(T - \lambda I)F(\lambda)(T - \lambda I) = (T - \lambda I)$ pour tout $\lambda \in U$.

1.6 Opérateurs Fredholm

Définition 1.6.1 *[1] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors on note :*

1. *l'ascente de T par $a(T) = \inf\{n \in \mathbb{N} : N(T^{n+1}) = N(T^n)\}$,*
2. *la descente de T par $d(T) = \inf\{n \in \mathbb{N} : R(T^{n+1}) = R(T^n)\}$,*
3. *l'ascente essentielle de T par $a_e(T) = \inf\{k \in \mathbb{N} : \dim[N(T^{k+1})/N(T^k)] < \infty\}$,*
4. *la descente essentielle de T par $d_e(T) = \inf\{k \in \mathbb{N} : \dim[R(T^k)/R(T^{k+1})] < \infty\}$.*
5. *De plus on note $= \dim(N(T)) =: \delta(T)$,*
6. *$co\dim_X(R(T)) = \dim(X/T(X)) =: \beta(T)$ où $X/T(X)$ est l'espace quotient.*

De même, on note les spectres d'ascente, de descente, d'ascente essentielle et de descente essentielle respectivement par

$$\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a(\lambda - T) = \infty\},$$

$$\sigma_d(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : d(\lambda - T) = \infty\},$$

$$\sigma_{a_e}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a_e(\lambda - T) = \infty\},$$

$$\sigma_{d_e}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : d_e(\lambda - T) = \infty\}.$$

Remarque 1.6.1 *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors on a :*

1. *$a(T) = 0$ si et seulement si T est injectif.*
2. *$d(T) = 0$ si et seulement si T est surjectif.*

Théorème 1.6.1 *[1] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Si $a(T) < \infty$ et $d(T) < \infty$, alors $a(T) = d(T) = p$ et $X = T^p(X) \oplus N(T^p)$.*
2. *S'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $X = T^m(X) \oplus N(T^m)$, alors $a(T) = d(T) = p \leq m$ et $T_{|T^p(X)}$ est surjectif.*
3. *Si $a(T) < \infty$, alors $\delta(T) \leq \beta(T)$.*
4. *Si $d(T) < \infty$, alors $\beta(T) \leq \delta(T)$.*
5. *Si $a(T) = d(T)$, alors $\delta(T) = \beta(T)$.*
6. *Si $\delta(T) = \beta(T) < \infty$ et si $a(T) < \infty$ ou $d(T) < \infty$, alors $a(T) = d(T)$.*

Définition 1.6.2 *[1] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors on dit que :*

1. *T est un opérateur semi-Fredholm supérieur, en symbole $T \in \Phi_+(X)$, si $\delta(T) < \infty$ et $T(X)$ est fermé. En symbole, on note par $\sigma_{e_+}(T)$ son spectre associé.*

2. *T est un opérateur semi-Fredholm inférieur, en symbole $T \in \Phi_-(X)$, si $\beta(T) < +\infty$. En symbole, on note par $\sigma_{e_-}(T)$ son spectre associé.*

3. *T est un opérateur de Fredholm, en symbole $T \in \Phi(X)$, si $\delta(T) < +\infty$ et $\beta(T) < +\infty$. En symbole, on note par $\sigma_e(T)$ son spectre associé.*

4. *T est un opérateur semi-Fredholm, en symbole $T \in \Phi_\pm(X)$, si $T \in \Phi_+(X) \bigcup \Phi_-(X)$. En symbole, on note par $\sigma_{e_\pm}(T)$ son spectre associé.*

5. *T est un opérateur semi-Browder inférieur, en symbole $Br_-(X)$, si $T \in \Phi_+(X)$ et $a(T) < +\infty\}$. En symbole, on note par $\sigma_{B_-}(T)$ son spectre associé.*

6. *T est un opérateur semi-Browder supérieur, en symbole $Br_+(X)$, si $T \in \Phi_-(X)$ et $d(T) < +\infty\}$. En symbole, on note par $\sigma_{B_+}(T)$ son spectre associé.*

7. *T est un opérateur de semi-Browder si $T \in Br_+(X) \cup Br_-(X)$. En symbole, on note par $\sigma_{B_\pm}(T)$ son spectre associé.*

8. *T est un opérateur de Browder si $T \in Br_+(X) \cap Br_-(X)$. En symbole, on note par $\sigma_B(T)$ son spectre associé.*

Remarque 1.6.2 *Soient $T \in \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des opérateurs compacts, $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ l'algèbre de Calkin et $\pi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{C}(X) = \mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ la surjection canonique. Alors on a les caractérisations d'Atkinson suivantes :*

1. *$T \in \Phi(X)$ si et seulement si $\pi(T)$ est inversible.*

2. *$T \in \Phi_l(X)$ si et seulement si $\pi(T)$ est inversible à gauche.*

3. *$T \in \Phi_r(X)$ si et seulement si $\pi(T)$ est inversible à droite.*

Définition 1.6.3 *[1] L'indice d'un opérateur semi-Fredholm est une application définie par*

$$\begin{array}{rcl} ind : \Phi_\pm(X) & \to & \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}, \\ T & \to & ind(T) = \delta(T) - \beta(T). \end{array}$$

Proposition 1.6.1 *[45] Soient $T, S \in \mathcal{B}(X)$. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $T \in \mathcal{K}(X)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a $T - \lambda I \in \Phi(X)$ (critère alternatif de Fredholm). De plus $\delta(T - \lambda I) = \beta(T - \lambda I) = \delta(T^* - \lambda I^*) = \beta(T^* - \lambda I^*) < \infty$ et $a(T - \lambda I) = b(T - \lambda I) = a(T^* - \lambda I^*) = d(T^* - \lambda I^*) < \infty$.*

2. *Pour tout $T \in \Phi_\pm(X)$ et tout $K \in \mathcal{K}(X)$ on a $ind(T + K) = ind(T)$.*

3. *Si $T \in \Phi(X)$, alors il existe $S \in \Phi(X)$ tel que $TST = T$. De plus $ind(T) = -ind(S)$.*

4. *Si $T \in \Phi(X)$, alors $a(T) = d(T^*)$ et $d(T) = a(T^*)$.*

5. *Si $T, S \in \Phi(X)$, alors $ST \in \Phi(X)$ et $ind(TS) = ind(T) + ind(S)$.*

6. *Si* $ST \in \Phi(X)$*, alors* $S \in \Phi_-(X)$ *et* $T \in \Phi_+(X)$*.*

Théorème 1.6.2 *[1] Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$*. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Si* $T \in \Phi_+(X)$*, alors il existe* $\epsilon > 0$ *tel que pour tout* $S \in \mathcal{B}(X)$ *vérifiant* $\|S\| < \epsilon$*, on a* $T + S \in \Phi_+(X)$*. De plus* $\delta(T + S) \leq \delta(T)$ *et* $ind(T + S) = ind(T)$*.*
2. *Si* $T \in \Phi_-(X)$*, alors il existe* $\epsilon > 0$ *tel que pour tout* $S \in \mathcal{B}(X)$ *vérifiant* $\|S\| < \epsilon$*, on a* $T + S \in \Phi_-(X)$*. De plus* $\beta(T + S) \leq \beta(T)$ *et* $ind(T + S) = ind(T)$*.*

Théorème 1.6.3 *[1] Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$*. Alors on a :*

1. *Si* $T \in \Phi_+(X)$*, alors il existe* $\epsilon > 0$ *tels que* $\delta(T - \lambda I) \leq \delta(T)$ *et* $\delta(T - \lambda I)$ *est constante pour tout* $|\lambda| \in]0, \epsilon[$*.*
2. *Si* $T \in \Phi_-(X)$*, alors il existe* $\epsilon > 0$ *tels que* $\beta(T - \lambda I) \leq \beta(T)$ *et* $\beta(T - \lambda I)$ *est constante pour tout* $|\lambda| \in]0, \epsilon[$*.*

Définition 1.6.4 *[1] Soit* $T \in \Phi_\pm(X)$*, alors il existe* $\epsilon > 0$ *tel que* $\delta(T - \lambda I)$ *ou* $\beta(T - \lambda I)$ *soit constante pour tout* $|\lambda| \in]0, \epsilon[$ *et dans ce cas on définit le saut de* T *par*

$$\begin{array}{rcl} j : \Phi_\pm(X) & \rightarrow & \mathbb{N}, \\ T & \rightarrow & j(T) = \begin{cases} \delta(T) - \delta(T - \lambda I) \text{ si } T \in \Phi_+(X), \\ \beta(T) - \beta(T - \lambda I) \text{ si } T \in \Phi_-(X). \end{cases} \end{array}$$

Théorème 1.6.4 *[1] Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$*. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Si* $T \in \Phi_\pm(X)$*, alors* T *est Kato si et seulement si* $j(T) = 0$*.*
2. *Si* $T \in \Phi_\pm(X)$*, alors* T *est essentiellement Kato.*
3. *Si* T *est de type Kato, alors il existe* $\epsilon > 0$ *tel que* $T - \lambda I$ *est Kato pour tout* $\lambda \in \mathbb{D}(0, \epsilon) \setminus \{0\}$*.*

1.7 Opérateur décomposablement Fredholm

Définition 1.7.1 ([78],[20]) *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$*. Alors on dit que :*

1. T *est décomposablement régulier, en symbole* $T \in G\mathcal{R}(X)$*, s'il existe* $S \in G(X)$ *tel que* $TST = T$*.*
2. T *est décomposablement Fredholm, en symbole* $T \in \Phi\mathcal{R}(X)$*, s'il existe* $S \in \Phi(X)$ *tel que* $TST = T$*.*

Théorème 1.7.1 ([20], [52], [78], [7]) 1. $G\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X) \bigcap \overline{G(X)}$ *et* $int(G\mathcal{R}(X)) = \mathcal{W}(X)$*.*

2. $\Phi\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X) \bigcap \overline{\Phi(X)}$ *et* $int(\Phi\mathcal{R}(X)) = \Phi(X)$.

Remarque 1.7.1 *[47] Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$. *Alors on a :*

1. $int(\mathcal{R}(X)) = \mathcal{A}(X) = \{T : T + K \in \mathcal{R}(X)$ *pour tout* K *compact*$\}$.
2. $T \in G\mathcal{R}(X)$ *si et seulement si* $T \in \mathcal{R}(X)$ *et* $N(T) \simeq X/T(X)$;
3. *Si* X *est un espace de Hilbert séparable, alors*
$$\Phi\mathcal{R}(X) = \Phi(X) \bigcup \{T \in \mathcal{B}(X) : T(X) \text{ est fermé et } \delta(T) = \beta(T)\}.$$
4. $\Phi(X) \subseteq \Phi\mathcal{R}(X)$.
5. $int\Phi_n\mathcal{R}(X) = \Phi_{-n}(X)$ *où* $\Phi_k(X) = \{T \in \Phi(X) : ind(T) = k\}$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.
6. $\Phi\mathcal{R}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Phi_n\mathcal{R}(X)$ *où*
$$\Phi_n\mathcal{R}(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : TST = T \text{ avec } S \in \Phi(X) \text{ et } ind(S) = n\}.$$
7. $\Phi(X) \subseteq \Phi_g(X) \subseteq \overline{\Phi(X)}$ *et* $\Phi_g(X) \subseteq \Phi\mathcal{R}(X)$ *où*
$$\Phi_g(X) = \{T \in \mathcal{R}(X) : I - ST - TS \in \Phi(X) \text{ avec } S \in \mathcal{B}(X)\}.$$

1.8 Propriété d'extension unique (SVEP) et propriété de Bishop (β)

Définition 1.8.1 *[1] Soient* $T \in \mathcal{B}(X)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. *L'ensemble résolvent local de* T *à* x *est définit par :*
$\rho_T(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} :$ *il existe un voisinage* U *de* λ *et une fonction analytique* $f : U \to X$ *tel que* $(T - \mu)f(\mu) = x$ *pour tout* $\mu \in U\}$.

2. *Le spectre local de* T *à* x *est* $\sigma_T(x) = \mathbb{C}\backslash\rho_T(x)$.
3. T *admet la propriété d'extension unique (SVEP) à* λ *si pour tout voisinage* U *de* λ, *la seule fonction* $f : U \to X$ *vérifiant* $(T - \mu)f(\mu) = 0$ *pour tout* $\mu \in U$ *est la fonction nulle.*
4. T *possède la propriété d'extension unique (SVEP) si* T *a SVEP à chaque* $\lambda \in \mathbb{C}$.
5. T *satisfait la propriété de Bishop* (β) *s'il existe* $r > 0$ *vérifiant pour tout ouvert* U *du disque* $\mathbb{D}(0, r)$ *et toute suite des fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(U, X)$ *tel que* $\lim_{n\to\infty}(T - \mu)f_n(\mu) = 0$ *dans* $\mathcal{O}(U, X)$, *alors* $\lim_{n\to\infty} f_n(\mu) = 0$ *dans* $\mathcal{O}(U, X)$, *où* $\mathcal{O}(U, X)$ *: est l'algèbre de Fréchet des fonctions analytiques définies sur l'ouvert* $U \subseteq \mathbb{C}$ *à valeurs dans* X *qu'on associe la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de* U.

1.9 ϕ-multiplicateurs

La notion des multiplicateurs a été introduite par Helgason [31] dans la cas d'une algèbre de Banach sans ordre, ensuite Wang [80] et Birtal [18] ont poursuit les développement de cette notion.

Définition 1.9.1 *[1] Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe et $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ une application. On dit que T est un multiplicateur, en symbole $T \in M(\mathcal{A})$, si*

$$x(Ty) = (Tx)y \, pour \; tout \, x, \; y \in \mathcal{A}.$$

Définition 1.9.2 ([1],[36],[38]) *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et B un ensemble non vide de $\mathcal{A}$. On dit que :*

1. *Deux éléments $x, \; y \in \mathcal{A}$ sont orthogonaux si $xy = yx = 0$.*
2. *L'orthogonal de B est l'ensemble définit par : $B^{\top} := \{x \in \mathcal{A} : xy = yx = 0 \, pour \; tout \, y \in B\}$. De plus, $B^{\top}$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{A}$;*
3. *L'annulateur à gauche de B est l'ensemble : $lan(B) = \{x \in \mathcal{A} \, : \, xB = \{0\}\}$.*
4. *L'annulateur à droite de B est l'ensemble : $ran(B) = \{x \in \mathcal{A} \, : \, Bx = \{0\}\}$.*
5. *On dit que $\mathcal{A}$ est sans ordre, si $lan(\mathcal{A}) = \{0\}$ ou $ran(\mathcal{A}) = \{0\}$.*
6. *On dit que $\mathcal{A}$ est semi premier, si le singleton $\{0\}$ est l'unique idéal bilatère J vérifiant $J^2 = \{0\}$.*
7. *On dit que $\mathcal{A}$ est semi simple, si $rad(\mathcal{A}) = \{0\}$ où $rad\mathcal{A}$ est le radical de Jacobson de $\mathcal{A}$.*

Remarque 1.9.1 *[1] Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Si $\mathcal{A}$ est semi simple, alors $\mathcal{A}$ est semi premier.*
2. *Si $\mathcal{A}$ est semi primaire, alors $\mathcal{A}$ est sans ordre.*
   De plus, si $x\mathcal{A}x = \{0\}$, alors $x = 0$.
3. *Si $\mathcal{A}$ est sans ordre, alors tout opérateur $T \in M(\mathcal{A})$ est automatiquement linéaire continue. De plus, $T(xy) = x(Ty) = (Tx)y$ pour tout $x, y \in \mathcal{A}$.*
4. *Si $\mathcal{A}$ est algèbre de Banach commutative, alors $rad(\mathcal{A}) = \bigcap_{m \in \Delta(\mathcal{A})} \ker m$, où*
   - *$\Delta(\mathcal{A})$ est l'ensemble des idéaux réguliers maximums,*
   - *$\mathcal{A}^*$ est le dual de $\mathcal{A}$,*
   - *Le fonctionnel linéaire multiplicatif sur $\mathcal{A}$ est un fonctionnel linéaire $m \in \mathcal{A}^*$ non nul vérifiant $m(xy) = m(x)m(y)$ pour tout $x, y \in \mathcal{A}$.*

Théorème 1.9.1 *[1, Théorème 1.4.14] Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative semi simple. Alors pour tout $T \in M(\mathcal{A})$, il existe une unique fonction continue bornée φ_T sur $\Delta(\mathcal{A})$ vérifiant*

$$\widehat{Tx}(m) = \varphi_T(m)\widehat{x}(m) \, pour \; tout \, x \in \mathcal{A} \, et \; tout \, m \in \Delta(\mathcal{A}),$$

où $\widehat{x}$ est la transformation de Gelfand associée à x qui est définie par

$$\begin{array}{lll} \widehat{x}: & \Delta(\mathcal{A}) & \to \mathbb{C}, \\ & x & \to \widehat{x}(m) = m(x). \end{array}$$

De plus, pour tout $T \in M(\mathcal{A})$, on a

$$\|\varphi_T\|_\infty \leq \|T\|.$$

Définition 1.9.3 *[6] Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

- *A est une isométrie si $A^*A = I$, qui est équivalent avec la condition $\|Ax\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.*
- *A est normal si $A^*A = AA^*$.*
- *A est quasi-normal si $A(A^*A) = (A^*A)A$.*
- *A est bi-normal si $(A^*A)(AA^*) = (AA^*)(A^*A)$.*

Chapitre 2

Semi-groupes α fois intégrables

Dans ce chapitre nous étudions les semi-groupes α fois intégrables [4]. Plusieurs auteurs ont étudié différentes relations spectrales entre un C_0-semi-groupe et son générateur. Notre objectif dans ce chapitre est d'obtenir des relations spectrales entre un semi-groupe α fois intégrable et son générateur. En particulier, nous obtenons des inclusions spectrales concernant les spectres Fredholm, Drazin, ascente, descente, quasi-Fredholm et Browder.

2.1 Propriétés d'un semi-groupe α fois intégrable

Lemme 2.1.1 *[30, Proposition 2.4] Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $x \in D(A)$ et pour tout $t \geq 0$, on a :*

1. *$S(t)x \in D(A)$ et $AS(t)x = S(t)Ax$.*
2. *$S(t)x = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x + \int_0^t S(s)Axds$.*

De plus, pour tout $x \in X$, $\int_0^t S(s)xds \in D(A)$ et

$$A\int_0^t S(s)xds = S(t)x - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x.$$

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer notre premier résultat principal.

Lemme 2.1.2 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $t \geq 0$, on a :*

1. *Pour tout $x \in D(A)$,*

$$D_\lambda(t)(\lambda - A)x = \big[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)\big]x,$$

où $D_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)xds$.

2. *Pour tout $x \in X$, $D_\lambda(t)x \in D(A)$ et*

$$(\lambda - A)D_\lambda(t)x = \Big[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)\Big]x.$$

Preuve :

1. D'après le Lemme 2.1.1, on a pour tout $x \in D(A)$,

$$S(s)x = \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x + \int_0^s S(r)Axdr.$$

En passant à la dérivée et comme $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, on obtient

$$S'(s)x = \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x + S(s)Ax.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
D_\lambda(t)Ax &= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)Axds \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}[S'(s)x - \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x]ds \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S'(s)xds - \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}xds \\
&= S(t)x + \lambda D_\lambda(t)x - \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}xds.
\end{aligned}$$

Finalement, nous venons de montrer que pour tout $x \in D(A)$,

$$D_\lambda(t)(\lambda - A)x = \Big[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)\Big]x.$$

2. Soit $\mu \in \rho(A)$. D'après la démonstration du Lemme 2.1.1 on a pour tout $x \in X$,

$$R(\mu, A)S(s)x = S(s)R(\mu, A)x,$$

et, par suite, on en déduit que pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}
R(\mu, A)D_\lambda(t)x &= R(\mu, A)\int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)xds \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}R(\mu, A)S(s)xds \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)R(\mu, A)xds \\
&= D_\lambda(t)R(\mu, A)x.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}
D_\lambda(t)x &= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)xds \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)(\mu - A)R(\mu, A)xds \\
&= \mu \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)R(\mu, A)xds - \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)AR(\mu, A)xds \\
&= \mu \int_0^t e^{\lambda(t-s)}R(\mu, A)S(s)xds - \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)AR(\mu, A)xds \\
&= \mu R(\mu, A) \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)xds - \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)AR(\mu, A)xds \\
&= \mu R(\mu, A)D_\lambda(t)x - D_\lambda(t)AR(\mu, A)x \\
&= \mu R(\mu, A)D_\lambda(t)x - [S(t)R(\mu, A)x + \lambda D_\lambda(t)R(\mu, A)x - \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}R(\mu, A)xds] \\
&= \mu R(\mu, A)D_\lambda(t)x - [R(\mu, A)S(t)x + \lambda R(\mu, A)D_\lambda(t)x - R(\mu, A)\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}xds] \\
&= R(\mu, A)\big[(\mu - \lambda)D_\lambda(t)x - S(t)x + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}xds\big]
\end{aligned}$$

En résumé, pour tout $x \in X$, $D_\lambda(t)x \in D(A)$ et

$$(\mu - A)D_\lambda(t)x = (\mu - \lambda)D_\lambda(t)x + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}xds - S(t)x.$$

Finalement, pour tout $x \in X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(\lambda - A)D_\lambda(t)x = \big[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)\big]x.$$

Grâce au Lemme 2.1.2, nous pouvons déduire les corollaires suivants.

Corollaire 2.1.1 *[62, Lemma 2.1] Soit A le générateur d'un semi-groupe intégrable. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $x \in D(A)$, on a*

$$D_\lambda(t)(\lambda - A)x = \big[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}ds - S(t)\big]x.$$

De plus, pour tout $x \in X$,

$$(\lambda - A)D_\lambda(t)x = \big[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}ds - S(t)\big]x.$$

Corollaire 2.1.2 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

1. *Pour tout $x \in X$,*

$$(\lambda - A)^n[D_\lambda(t)]^n x = [\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}x}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n x.$$

2. *Pour tout* $x \in D(A^n)$,

$$[D_\lambda(t)]^n(\lambda - A)^n x = [\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}x}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n x.$$

3. $N[\lambda - A] \subseteq N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]$.
4. $R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] \subseteq R[\lambda - A]$.
5. $N[\lambda - A]^n \subseteq N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n$.
6. $R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n \subseteq R[\lambda - A]^n$.
7. $R^\infty[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] \subseteq R^\infty[\lambda - A]$.

2.2 Spectres ponctuel et Fredholm d'un semi-groupe α fois intégrable

Dans le résultat suivant, nous caractérisons les spectres ordinaire, ponctuel et Fredholm d'un semi-groupe α fois intégrable.

Théorème 2.2.1 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $t \geq 0$, on a :*

1. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma(A)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \subseteq \sigma(S(t))$.
2. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_p(A)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \subseteq \sigma_p(S(t))$.
3. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_e(A)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \subseteq \sigma_e(S(t))$.

Preuve :

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \notin \sigma(S(t)),$$

autrement dit $\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)$ est inversible et on considère $F_\lambda(t)$ son inverse. A l'aide du Lemme 2.1.2, on obtient pour tout $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned} x &= F_\lambda(t)[\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]x \\ &= F_\lambda(t)[D_\lambda(t)(\lambda - A)]x \\ &= [F_\lambda(t) D_\lambda(t)](\lambda - A)x. \end{aligned}$$

En suite, d'après le Lemme 2.1.2, on obtient pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} x &= [\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] F_\lambda(t) x \\ &= [(\lambda - A) D_\lambda(t)] F_\lambda(t) x \\ &= (\lambda - A)[D_\lambda(t) F_\lambda(t)] x. \end{aligned}$$

En outre, comme $S(t)F_\lambda(t) = F_\lambda(t)S(t)$, alors

$$F_\lambda(t) D_\lambda(t) = D_\lambda(t) F_\lambda(t).$$

Enfin, nous avons vu que $\lambda - A$ est inversible et $\lambda \notin \sigma(A)$.

2. Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$. Alors il existe $x \neq 0$ tel que

$$x \in N(\lambda - A).$$

Donc, d'après le Corollaire 2.1.2, on en déduit que

$$x \in N[\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)].$$

Par conséquent

$$\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \in \sigma_p(S(t)).$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \notin \sigma_e(S(t)),$$

alors on a

$$\delta[\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] < +\infty \text{ et } \beta[\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] < +\infty.$$

En conclusion, d'après le Corollaire 2.1.2, on a

$$\delta[\lambda - A] < +\infty \text{ et } \beta[\lambda - A] < +\infty.$$

Enfin,

$$\lambda \notin \sigma_e(A).$$

Ce qui suit est un lemme capital qui caractérise plusieurs spectres d'un semi-groupe α fois intégrable.

Lemme 2.2.1 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in X$ on a :*

1. $(\lambda - A)L_\lambda(t) + \varphi_\lambda(t)D_\lambda(t) = \phi_\lambda(t)I$, *où*

$$L_\lambda(t) = \int_0^t e^{-\lambda s} D_\lambda(s)ds,\ \varphi_\lambda(t) = e^{\lambda t}\ et\, \phi_\lambda(t) = \int_0^t \Big(\int_0^\tau e^{-\lambda r}\frac{r^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dr\Big)d\tau.$$

De plus, l'opérateur $L_\lambda(t)$ *commute avec chacun des opérateurs* $D_\lambda(t)$ *et* $(\lambda - A)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *il existe un opérateur* $L_{\lambda,n}(t) \in \mathcal{B}(X)$ *tel que*

$$(\lambda - A)L_{\lambda,n}(t) + [\varphi_\lambda(t)]^n[D_\lambda(t)]^n = [\phi_\lambda(t)]^n I.$$

En outre, l'opérateur $L_{\lambda,n}(t)$ *commute avec chacun des opérateurs* $D_\lambda(t)$ *et* $\lambda - A$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *il existe un opérateur* $D_{\lambda,n}(t) \in \mathcal{B}(X)$ *tel que*

$$(\lambda - A)^n[L_\lambda(t)]^n + D_{\lambda,n}(t)D_\lambda(t) = [\phi_\lambda(t)]^n I.$$

De plus, l'opérateur $D_{\lambda,n}(t)$ *commute avec chacun des opérateurs* $D_\lambda(t)$, $L_\lambda(t)$ *et* $\lambda - A$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *il existe un opérateur* $K_{\lambda,n}(t) \in \mathcal{B}(X)$ *tel que*

$$(\lambda - A)^n K_{\lambda,n}(t) + [D_{\lambda,n}(t)]^n[D_\lambda(t)]^n = [\phi_\lambda(t)]^{n^2} I.$$

En outre, l'opérateur $K_{\lambda,n}(t)$ *commute avec chacun des opérateurs* $D_\lambda(t)$, $D_{\lambda,n}(t)$ *et* $\lambda - A$.

Preuve :

1. Soit $\mu \in \rho(A)$. D'après le Lemme 2.1.2, pour tout $x \in X$, on a $D_\lambda(s)x \in D(A)$ et, par suite,

$$\begin{aligned} L_\lambda(t)x &= \int_0^t e^{-\lambda s} D_\lambda(s)xds \\ &= \int_0^t e^{-\lambda s} R(\mu, A)(\mu - A)D_\lambda(s)xds \\ &= R(\mu, A)[\mu \int_0^t e^{-\lambda s} D_\lambda(s)xds - \int_0^t e^{-\lambda s} AD_\lambda(s)xds] \\ &= R(\mu, A)[\mu L_\lambda(t)x - \int_0^t e^{-\lambda s} AD_\lambda(s)xds]. \end{aligned}$$

D'où, pour tout $x \in X$, on a $L_\lambda(t)x \in D(A)$. De plus,

$$(\mu - A)L_\lambda(t)x = \mu L_\lambda(t)x - \int_0^t e^{-\lambda s} AD_\lambda(s)xds.$$

Ensuite, on voit également

$$AL_\lambda(t)x = \int_0^t e^{-\lambda s} AD_\lambda(s)xds.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)L_\lambda(t)x &= \lambda L_\lambda(t)x - \int_0^t e^{-\lambda s} AD_\lambda(s)xds \\
&= \lambda L_\lambda(t)x - \int_0^t e^{-\lambda s}\big[\lambda D_\lambda(s)x - \int_0^s e^{\lambda(s-r)}\frac{r^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}xdr + S(s)x\big]ds \\
&= \lambda L_\lambda(t)x - \lambda\int_0^t e^{-\lambda s}D_\lambda(s)xds + \int_0^t e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda(s-r)}\frac{r^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}xdrds - \int_0^t e^{-\lambda s}S(s)xds \\
&= \lambda L_\lambda(t)x - \lambda L_\lambda(t)x + \int_0^t\int_0^s e^{-\lambda r}\frac{r^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}xdrds - e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)xds \\
&= \int_0^t\int_0^s e^{-\lambda r}\frac{r^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}xdrds - e^{-\lambda t}D_\lambda(t)x \\
&= \big[\phi_\lambda(t)I - \varphi_\lambda(t)D_\lambda(t)\big]x,
\end{aligned}$$

où $\phi_\lambda(t) = \int_0^t\int_0^s e^{-\lambda r}\frac{r^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}drds$ et $\varphi_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$.
Par conséquent

$$(\lambda - A)L_\lambda(t) + \varphi_\lambda(t)D_\lambda(t) = \phi_\lambda(t)I.$$

Comme $S(s)S(t) = S(t)S(s)$ pour tout $s, t \geq 0$, on en déduira $D_\lambda(s)S(t) = S(t)D_\lambda(s)$.
Puis on conclut que

$$\begin{aligned}
D_\lambda(t)D_\lambda(s) &= \int_0^t e^{\lambda(t-r)}S(r)D_\lambda(s)dr \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-r)}D_\lambda(s)S(r)dr \\
&= D_\lambda(s)\int_0^t e^{\lambda(t-r)}S(r)dr \\
&= D_\lambda(s)D_\lambda(t).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
D_\lambda(t)L_\lambda(t) &= D_\lambda(t)\int_0^t e^{-\lambda s}D_\lambda(s)ds \\
&= \int_0^t e^{-\lambda s}D_\lambda(t)D_\lambda(s)ds \\
&= \int_0^t e^{-\lambda s}D_\lambda(s)D_\lambda(t)ds \\
&= \int_0^t e^{-\lambda s}D_\lambda(s)dsD_\lambda(t) \\
&= L_\lambda(t)D_\lambda(t).
\end{aligned}$$

Enfin, d'une part pour tout $x \in X$,

$$AL_\lambda(t)x = \int_0^t e^{-\lambda s}AD_\lambda(s)xds.$$

D'autre part pour tout $x \in D(A)$,

$$AD_\lambda(s)x = D_\lambda(s)Ax.$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)L_\lambda(t)x &= \lambda L_\lambda(t)x - AL_\lambda(t)x \\
&= \lambda L_\lambda(t)x - \int_0^t e^{-\lambda s} AD_\lambda(s)xds \\
&= \lambda L_\lambda(t)x - \int_0^t e^{-\lambda s} AD_\lambda(s)xds \\
&= \lambda L_\lambda(t)x - \int_0^t e^{-\lambda s} D_\lambda(s)Axds \\
&= \lambda L_\lambda(t)x - L_\lambda(t)Ax \\
&= L_\lambda(t)(\lambda - A)x.
\end{aligned}$$

2. Comme $(\lambda - A)L_\lambda(t) + \varphi_\lambda(t)D_\lambda(t) = \phi_\lambda(t)I$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$\begin{aligned}
[\varphi_\lambda(t)D_\lambda(t)]^n &= [\phi_\lambda(t)I - (\lambda - A)L_\lambda(t)]^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i [\phi_\lambda(t)]^{n-i}[-(\lambda - A)L_\lambda(t)]^i \\
&= [\phi_\lambda(t)]^n I - (\lambda - A)\sum_{i=1}^{n} C_n^i [\phi_\lambda(t)]^{n-i}[-(\lambda - A)]^{i-1}[L_\lambda(t)]^i \\
&= [\phi_\lambda(t)]^n I - (\lambda - A)L_{\lambda,n}(t),
\end{aligned}$$

où

$$L_{\lambda,n}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_n^i [\phi_\lambda(t)]^{n-i}[-(\lambda - A)]^{i-1}[L_\lambda(t)]^i.$$

Par conséquent

$$(\lambda - A)L_{\lambda,n}(t) + [\varphi_\lambda(t)]^n[D_\lambda(t)]^n = [\phi_\lambda(t)]^n I.$$

Finalement, pour la commutativité, il est claire que l'opérateur $L_{\lambda,n}(t)$ commute avec chacun des opérateurs $D_\lambda(t)$ et $\lambda - A$.

3. De même, comme $(\lambda - A)L_\lambda(t) + \varphi_\lambda(t)D_\lambda(t) = \phi_\lambda(t)I$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il en résulte

$$\begin{aligned}
[(\lambda - A)L_\lambda(t)]^n &= [\phi_\lambda(t)I - \varphi_\lambda(t)D_\lambda(t)]^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i [\phi_\lambda(t)]^{n-i}[-\varphi_\lambda(t)D_\lambda(t)]^i \\
&= [\phi_\lambda(t)]^n I - D_\lambda(t)\sum_{i=1}^{n} C_n^i [\phi_\lambda(t)]^{n-i}[\varphi_\lambda(t)]^i[-D_\lambda(t)]^{i-1} \\
&= [\phi_\lambda(t)]^n I - D_\lambda(t)D_{\lambda,n}(t),
\end{aligned}$$

où

$$D_{\lambda,n}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_n^i [\phi_\lambda(t)]^{n-i} [\varphi_\lambda(t)]^i [-D_\lambda(t)]^{i-1}.$$

Par conséquent

$$(\lambda - A)^n [L_\lambda(t)]^n + D_\lambda(t) D_{\lambda,n}(t) = [\phi_\lambda(t)]^n I.$$

En fin de compte, pour la commutativité, il est évident que $D_{\lambda,n}(t)$ commute avec chacun des opérateurs $D_\lambda(t)$, $L_\lambda(t)$ et $\lambda - A$.

4. Comme $D_\lambda(t) D_{\lambda,n}(t) = [\phi_\lambda(t)]^n I - (\lambda - A)^n [L_\lambda(t)]^n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$\begin{aligned}
[D_\lambda(t) D_{\lambda,n}(t)]^n &= \big[[\phi_\lambda(t)]^n I - (\lambda - A)^n [L_\lambda(t)]^n\big]^n \\
&= [\phi_\lambda(t)]^{n^2} I - \sum_{i=1}^{n} C_n^i \big[[\phi_\lambda(t)]^n\big]^{n-i} \big[(\lambda - A)^n [L_\lambda(t)]^n\big]^i \\
&= [\phi_\lambda(t)]^{n^2} I - (\lambda - A)^n \sum_{i=1}^{n} C_n^i \big[[\phi_\lambda(t)]^{n(n-i)} (\lambda - A)^{n(i-1)} [L_\lambda(t)]^{ni} \\
&= [\phi_\lambda(t)]^{n^2} I - (\lambda - A)^n K_{\lambda,n}(t),
\end{aligned}$$

où $K_{\lambda,n}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_n^i [\phi_\lambda(t)]^{n(n-i)} (\lambda - A)^{n(i-1)} [L_\lambda(t)]^{ni}$.
Par suite, on obtient

$$[D_\lambda(t)]^n [D_{\lambda,n}(t)]^n + (\lambda - A)^n K_{\lambda,n}(t) = [\phi_\lambda(t)]^{n^2} I.$$

A la fin, la commutativité est claire.

2.3 Spectre de Drazin d'un semi-groupe α fois intégrable

2.3.1 L'ascente et la descente

Maintenant, nous nous intéressons à l'ascente et à la descente d'un semi-groupe α fois intégrable.

Proposition 2.3.1 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $t \geq 0$, si :*

1. *$d[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+)} ds - S(t)] = n$, alors $d[\lambda - A] \leq n$.*
2. *$a[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = n$, alors $a[\lambda - A] \leq n$.*

Preuve :

1. Soit $y \in R[\lambda - A]^n$, alors il existe $x \in D(A^n)$ vérifiant

$$(\lambda - A)^n x = y.$$

Comme $d[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] = n$, alors

$$R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n = R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^{n+1}.$$

Ceci entraîne qu'il existe $z \in X$ tel que

$$[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^{n+1} z.$$

En appliquant le Lemme 2.2.1, on obtient

$$(\lambda - A)L_{\lambda,n}(t) + [\varphi_\lambda(t)]^n [D_\lambda(t)]^n = [\phi_\lambda(t)]^n I,$$

avec $L_{\lambda,n}(t)$, $D_\lambda(t)$ et $(\lambda - A)$ commutent entre eux.
Par conséquent

$$\begin{aligned}
[\phi_\lambda(t)]^n y &= (\lambda - A)^n [\phi_\lambda(t)]^n x \\
&= (\lambda - A)^n [(\lambda - A)L_{\lambda,n}(t) + [\varphi_\lambda(t)]^n [D_\lambda(t)]^n] x \\
&= (\lambda - A)^n (\lambda - A)L_{\lambda,n}(t)x + [\varphi_\lambda(t)]^n (\lambda - A)^n [D_\lambda(t)^n] x \\
&= (\lambda - A)^{n+1} L_{\lambda,n}(t)x + [\varphi_\lambda(t)]^n [\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n x \\
&= (\lambda - A)^{n+1} L_{\lambda,n}(t)x + [\varphi_\lambda(t)]^n [\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^{n+1} z \\
&= (\lambda - A)^{n+1} L_{\lambda,n}(t)x + [\varphi_\lambda(t)]^n [(\lambda - A)^{n+1} [D_\lambda(t)]^{n+1} z] \\
&= (\lambda - A)^{n+1} [L_{\lambda,n}(t)x + [\varphi_\lambda(t)]^n [D_\lambda(t)]^{n+1} z].
\end{aligned}$$

D'où $y \in R[\lambda - A]^{n+1}$ et, par suite,

$$R[\lambda - A]^n = R[\lambda - A]^{n+1}$$

Finalement, on aura

$$d(\lambda - A) \leq n.$$

2. Soit $x \in N(\lambda - A)^{n+1}$ et on suppose que $a[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] = n$, alors

$$N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n = N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^{n+1}.$$

En appliquant le Lemme 2.1.2, on en conclut que

$$N(\lambda - A)^{n+1} \subseteq N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^{n+1},$$

et donc

$$x \in N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
[\phi_\lambda(t)]^n(\lambda - A)^n x &= (\lambda - A)^n[(\lambda - A)L_{\lambda,n}(t) + [\varphi_\lambda(t)]^n[D_\lambda(t)]^n]x; \\
&= (\lambda - A)^n(\lambda - A)L_{\lambda,n}(t)x + [\varphi_\lambda(t)]^n(\lambda - A)^n[D_\lambda(t)]^n x \\
&= (\lambda - A)^{n+1}L_{\lambda,n}(t)x + [\varphi_\lambda(t)]^n[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n x \\
&= (\lambda - A)^{n+1}L_{\lambda,n}(t)x \\
&= L_{\lambda,n}(t)(\lambda - A)^{n+1}x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $x \in N(\lambda - A)^n$ et, par suite,

$$a(\lambda - A) \leq n.$$

2.3.2 Spectres de Drazin et Browder

Le résultat ci-dessous concerne les spectres d'ascente, de descente, de Browder et de Drazin d'un semi-groupe α fois intégrable.

Théorème 2.3.1 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $t \geq 0$, on a :*

1. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_a(A)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \subseteq \sigma_a(S(t))$.
2. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_d(A)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \subseteq \sigma_d(S(t))$.
3. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_B(A)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \subseteq \sigma_B(S(t))$.
4. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_D(A)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \subseteq \sigma_D(S(t))$.

Preuve :

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que l'on ait
$$\int_0^t e^{(t-s)\lambda}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \notin \sigma_a(S(t)).$$
Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant
$$a[\int_0^t e^{(t-s)\lambda}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] = n.$$
Ceci entraîne, d'après la Proposition 2.3.1, que $a[\lambda - A] \leq n$ et, par suite,
$$\lambda \notin \sigma_a(A).$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que
$$\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} ds \notin \sigma_{dsc}(S(t)).$$
Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant
$$d[\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = n.$$
On obtient donc, d'après la Proposition 2.3.1, $d[\lambda - A] \leq n$ et, par suite,
$$\lambda \notin \sigma_{dsc}(A).$$

3. C'est immédiat, d'après les assertions précédentes.

4. On suppose que l'opérateur $\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)$ est de Drazin inversible, alors
$$a[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = d[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = n$$
et
$$X = N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n \oplus R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n.$$
Soit $x \in N[\lambda - A]^n \cap R[\lambda - A]^n$, alors $x \in N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n$ et il existe $y \in X$, tel que l'on ait $x = (\lambda - A)^n(y)$. D'où, d'après le Lemme 2.2.1,
$$\begin{aligned}
[\phi_\lambda(t)]^{n^2} x &= (\lambda - A)^n [\phi_\lambda(t)]^{n^2} y \\
&= (\lambda - A)^n \big[[D_\lambda(t)]^n [D_{\lambda,n}(t)]^n y + (\lambda - A)^n K_{\lambda,n}(t) y\big] \\
&= [D_{\lambda,n}(t)]^n (\lambda - A)^n [D_\lambda(t)]^n y + K_{\lambda,n}(t)(\lambda - A)^n (\lambda - A)^n y\big] \\
&= [D_{\lambda,n}(t)]^n (\lambda - A)^n [D_\lambda(t)]^n y + K_{\lambda,n}(t)(\lambda - A)^n x\big] \\
&= (\lambda - A)^n [D_\lambda(t)]^n [D_{\lambda,n}(t)]^n y \\
&= [\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n [D_{\lambda,n}(t)]^n y.
\end{aligned}$$
Ceci prouve que
$$x \in R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n.$$
Par conséquent
$$x \in N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n \cap R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n = \{0\},$$
et, par suite,
$$N(\lambda - A)^n \cap R(\lambda - A)^n = \{0\}.$$

Maintenant, considérons $x \in X$. Alors d'après la supposition, il existe $x, y \in X$ tels que $x = y+z$, $y \in N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n$ et $z \in R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n$.
D'où $z \in R(\lambda - A)^n$, et d'après le Lemme 2.2.1, on aura

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)^n \left[[\phi_\lambda(t)]^{n^2} y \right] &= (\lambda - A)^n \left[[D_\lambda(t)]^n [D_{\lambda,n}(t)]^n y + (\lambda - A)^n K_{\lambda,n}(t) y \right] \\
&= [D_{\lambda,n}(t)]^n (\lambda - A)^n [D_\lambda(t)]^n y + (\lambda - A)^n (\lambda - A)^n K_{\lambda,n}(t) y \\
&= [D_{\lambda,n}(t)]^n [\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n y + (\lambda - A)^n (\lambda - A)^n K_{\lambda,n}(t) y \\
&= (\lambda - A)^n (\lambda - A)^n K_{\lambda,n}(t) y.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(\lambda - A)^n \left[[\phi_\lambda(t)]^{n^2} y - (\lambda - A)^n K_{\lambda,n}(t) y \right] = 0.$$

Alors également on a

$$u = [\phi_\lambda(t)]^{n^2} y - (\lambda - A)^n K_{\lambda,n}(t) y \in N(\lambda - A)^n.$$

Ceci implique que

$$[\phi_\lambda(t)]^{n^2} y = v + u,$$

où $v = (\lambda - A)^n K_{\lambda,n}(t) y \in R(\lambda - A)^n$ et $u \in N(\lambda - A)^n$.
Ce qui montre que

$$x = y + z = \frac{u + v}{[\phi_\lambda(t)]^{n^2}} + z = u' + v',$$

où $u' = \frac{u}{[\phi_\lambda(t)]^{n^2}} \in N(\lambda - A)^n$ et $v' = \frac{v}{[\phi_\lambda(t)]^{n^2}} + z \in R(\lambda - A)^n$.
Par conséquent

$$X = N(\lambda - A)^n \oplus R(\lambda - A)^n.$$

Enfin, il est claire que $(\lambda - A)_{|N(\lambda - A)^n}$ est nilpotent, et comme $R(\lambda - A)^n \cap N(\lambda - A)^n = \{0\}$, alors $(\lambda - A)_{|R(\lambda - A)^n}$ est inversible et, par suite, $\lambda - A$ est de Drazin inversible.

2.3.3 Spectre semi-Fredholm

Proposition 2.3.2 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrables $(S(t))_{t \geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $t \geq 0$. Si $R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^m$ est fermé, alors $R(\lambda - A)^m$ est aussi fermé.*

Preuve : Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, tels qu'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(A)$ vérifiant $(\lambda - A)^m x_n = y_n$ et $y_n \to y \in X$. Donc, d'après le Lemme 2.2.1, on a

$$(\lambda - A)^m [L_\lambda(t)]^m y_n + G_{\lambda,m}(t) D_\lambda(t) y_n = [\phi_\lambda(t)]^m y_n.$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned}
[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m G_{\lambda,m}(t)x_n &= [D_\lambda(t)]^m(\lambda - A)^m G_{\lambda,m}(t)x_n \\
&= G_{\lambda,m}(t)[D_\lambda(t)]^m(\lambda - A)^m x_n \\
&= G_{\lambda,m}(t)[D_\lambda(t)]^m y_n \\
&= [\phi_\lambda(t)]^m y_n - (\lambda - A)^m [L_\lambda(t)]^m y_n.
\end{aligned}$$

D'où

$$[\phi_\lambda(t)]^m y_n - (\lambda - A)L_\lambda(t)y_n \in R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m.$$

Ainsi, comme $R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m$ est fermé, alors $G_{\lambda,m}(t)$ est linéaire borné. Et, par suite, on a

$$[\phi_\lambda(t)]^m y_n - (\lambda - A)^m [L_\lambda(t)]^m y_n$$

converge vers

$$[\phi_\lambda(t)]^m y - (\lambda - A)^m [L_\lambda(t)]^m y.$$

Par conséquent

$$[\phi_\lambda(t)]^m y - (\lambda - A)^m [L_\lambda(t)]^m y \in R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m.$$

Alors il existe $z \in X$, tel que

$$[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m z = [\phi_\lambda(t)]^m y - (\lambda - A)^m [L_\lambda(t)]^m y.$$

D'où

$$\begin{aligned}
[\phi_\lambda(t)]^m y &= [\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m z + (\lambda - A)^m [L_\lambda(t)]^m y \\
&= [(\lambda - A)^m [D_\lambda(t)]^m z + (\lambda - A)^m [L_\lambda(t)]^m y \\
&= (\lambda - A)^m [[D_\lambda(t)]^m z + [L_\lambda(t)]^m y.
\end{aligned}$$

On en déduit que $y \in R(\lambda - A)^m$ et, par suite, $R(\lambda - A)^m$ est fermée.

Discutons maintenant le spectre de semi-Fredholm.

Théorème 2.3.2 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α-fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $t \geq 0$, on a :*

1. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_{e_+}(A)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \subseteq \sigma_{e_+}(S(t))$.
2. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_{e_-}(A)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \subseteq \sigma_{e_-}(S(t))$.
3. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_{e_\pm}(A)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \subseteq \sigma_{e_\pm}(S(t))$.

Preuve :

1. On suppose que $\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \notin \sigma_{e_+}(S(t))$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\delta[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = n$ et $R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]$ est fermé.
   D'après le corollaire 2.1.2, on a
   $$N(\lambda - A) \subset N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)],$$
   ce qui entraîne
   $$\delta(\lambda - A) \leq n.$$
   Ainsi, d'après la Proposition 2.3.1, on en déduit que $R(\lambda - A)$ est fermé. Par conséquent
   $$\lambda \notin \sigma_{e_+}(A).$$

2. On suppose que $\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \notin \sigma_{e_-}(S(t))$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\beta[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = n$.
   En appliquant le Corollaire 2.1.2, on a
   $$R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] \subseteq R(\lambda - A).$$
   Par conséquent $\beta(\lambda - A) \leq n$ et, par suite,
   $$\lambda \notin \sigma_{e_-}(A).$$

3. On l'obtient immédiatement grâce aux assertions précédentes.

2.3.4 Spectre semi-Browder

Examinons les spectres de semi-Browder supérieur et inférieur.

Théorème 2.3.3 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $t \geq 0$, on a :*

1. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_{Br_+}(A)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \subseteq \sigma_{Br_+}(S(t))$.
2. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_{Br_-}(A)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \subseteq \sigma_{Br_-}(S(t))$.
3. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_{Br_\pm}(A)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \subseteq \sigma_{Br_\pm}(S(t))$.

Preuve :

1. On suppose que $\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \notin \sigma_{Br_+}(S(t))$, alors il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $\delta[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = m$, $R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]$ est fermée et

$$a[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = n.$$

Donc, d'après le Corollaire 2.1.2 et les Propositions 2.3.1 et 2.3.2, on en déduit que $\delta(\lambda - A) \leq m$, $R(\lambda - A)$ est fermée et $a(\lambda - A) \leq n$. Par conséquent $\lambda - A \in \Phi_+(D(A))$ et $a(\lambda - A) < +\infty$ et, par suite,

$$\lambda \notin \sigma_{Br_+}(A).$$

2. On suppose que $\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \notin \sigma_{Br_-}(S(t))$, alors il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $\beta[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = m$ et $d[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = n$.
Ceci implique d'après le Corollaire 2.1.2 et la Proposition 2.3.2, que

$$\beta(\lambda - A) \leq m \quad \text{et} \quad d(\lambda - A) \leq n.$$

Par conséquent $\lambda - A \in \Phi_-(D(A))$ et $d(\lambda - A) < +\infty$ et, par suite,

$$\lambda \notin \sigma_{Br_-}(A).$$

3. C'est immédiat d'après les assertions précédentes.

2.4 Spectres de Kato, de Saphar et de quasi-Fredholm d'un semi-groupe α fois intégrable

2.4.1 L'ascente essentielle et la descente essentielle

Proposition 2.4.1 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t \geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $t \geq 0$, on a :*

1. $d_e[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = n$ *implique* $d_e[A - \lambda] \leq n$.
2. $a_e[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = n$ *implique* $a_e[A - \lambda] \leq n$.

Preuve :

1. On suppose que

$$d_e[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = n.$$

Comme

$$R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n \subseteq R(\lambda - A)^n,$$

alors on peut définir la surjection linéaire ϕ par

$$\begin{aligned}\phi : R(\lambda - A)^n &\rightarrow R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n / R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^{n+1},\\ y = (\lambda - A)^n x &\rightarrow [\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n x + R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^{n+1}.\end{aligned}$$

On en déduit, d'après le Théorème d'isomorphisme, que

$$R(\lambda - A)^n / N(\phi) \simeq R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n / R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^{n+1}.$$

Par conséquent

$$\dim(R(\lambda - A)^n / N(\phi)) = d_e[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] = n.$$

De plus, il est clair que

$$N(\phi) \subseteq R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^{n+1} \subseteq R(\lambda - A)^{n+1}.$$

Ceci entraîne donc

$$R(\lambda - A)^n / R(\lambda - A)^{n+1} \subseteq R(\lambda - A)^n / N(\phi).$$

Enfin, on en déduit que

$$d_e(\lambda - A) = \dim(R(\lambda - A)^n / R(\lambda - A)^{n+1}) \leq \dim(R(\lambda - A)^n / N(\phi)) = n.$$

2. On suppose que

$$a_e[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] = n.$$

Comme

$$N(\lambda - A)^{n+1} \subseteq N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^{n+1},$$

alors on peut définir l'application linéaire ψ par

$$\begin{aligned}\psi : N(\lambda - A)^{n+1} &\rightarrow N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^{n+1} / N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}ds - S(t)]^n,\\ x &\rightarrow x + N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n.\end{aligned}$$

D'après le Théorème d'isomorphisme, on en déduit

$$N(\lambda - A)^{n+1} / N(\psi) \simeq R(\psi) \subseteq N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^{n+1} / N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n.$$

Par conséquent

$$\dim(N(\lambda - A)^{n+1} / N(\psi)) \leq a_e[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] = n.$$

Ainsi, comme

$$N(\psi) \subseteq N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n \subseteq R(\lambda - A)^n,$$

on a donc

$$N(\lambda - A)^{n+1}/N(\lambda - A)^n \subseteq N(\lambda - A)^{n+1}/N(\psi).$$

Enfin, on obtient

$$a_e(\lambda - A) = \dim(N(\lambda - A)^{n+1}/N(\lambda - A)^n) \leq \dim(N(\lambda - A)^{n+1}/N(\psi)) \leq n.$$

On étudie maintenant les spectres d'ascente essentielle et de descente essentielle.

Théorème 2.4.1 *Soit A le générateur d'un α fois semi-groupe intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $t \geq 0$, nous avons :*

1. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_{a_e}(A)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \subseteq \sigma_{a_e}(S(t))$.
2. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_{d_e}(A)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \subseteq \sigma_{d_e}(S(t))$.

Preuve :

1. On suppose que
$$\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \notin \sigma_{a_e}(S(t)).$$
Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant
$$a_e[\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = n.$$
Par conséquent, d'après la Proposition 2.4.1, $a_e[\lambda - A] \leq n$ et, par suite,
$$\lambda \notin \sigma_{a_e}(A).$$

2. On suppose que
$$\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \notin \sigma_{d_e}(S(t)).$$
Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant
$$d_e[\int_0^t e^{(t-s)\lambda} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = n.$$
Donc, d'après la Proposition 2.4.1, on en déduit $d_e[\lambda - A] \leq n$ et, par suite,
$$\lambda \notin \sigma_{d_e}(A).$$

2.4.2 Spectres de Kato et de Saphar

Proposition 2.4.2 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $t \geq 0$, si :*

1. $\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)$ *est relativement régulier, alors $\lambda - A$ est aussi relativement régulier.*
2. $N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] \subseteq R^\infty[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]$, *alors*
$$N(\lambda - A) \subseteq R^\infty(\lambda - A).$$
3. $N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] \subseteq_e R^\infty[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]$, *alors*
$$N(\lambda - A) \subseteq_e R^\infty(\lambda - A).$$

Preuve :

1. On suppose que
$$[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]T(t)[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] =$$
$$[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)].$$
D'où, d'après le Lemme 2.2.1, on obtient
$$\begin{aligned}
\phi_\lambda(t)(\lambda - A) &= [(\lambda - A)L_\lambda(t) + G_\lambda(t)D_\lambda(t)](\lambda - A) \\
&= (\lambda - A)L_\lambda(t)(\lambda - A) + \psi_\lambda(t)D_\lambda(t)(\lambda - A) \\
&= (\lambda - A)L_\lambda(t)(\lambda - A) + \psi_\lambda(t)[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] \\
&= (\lambda - A)L_\lambda(t)(\lambda - A) \\
&+ \psi_\lambda(t)[[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]T(t)[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]] \\
&= (\lambda - A)L_\lambda(t)(\lambda - A) + \psi_\lambda(t)\big[[\lambda - A)D_\lambda(t)]T(t)[D_\lambda(t)(\lambda - A)]\big] \\
&= (\lambda - A)[L_\lambda(t) + \psi_\lambda(t)D_\lambda(t)T(t)D_\lambda(t)](\lambda - A).
\end{aligned}$$
Ceci entraîne que $\lambda - A$ est relativement régulier.
2. C'est immédiat, puisque
$$\begin{aligned}
N(\lambda - A) &\subseteq N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] \\
&\subseteq R^\infty[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] \\
&\subseteq R^\infty(\lambda - A).
\end{aligned}$$

3. C'est évident, puisque

$$\begin{aligned} N(\lambda - A) &\subseteq N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] \\ &\subseteq_e R^\infty[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] \\ &\subseteq R^\infty(\lambda - A). \end{aligned}$$

Le résultat suivant conserne les spectres de Kato et Saphar.

Théorème 2.4.2 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Alors pour tout $t \geq 0$, on a :*

1. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_K(A)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \subseteq \sigma_K(S(t))$.
2. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_{rr}(A)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \subseteq \sigma_{rr}(S(t))$.
3. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_{eK}(A)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \subseteq \sigma_{eK}(S(t))$.
4. $\int_0^t e^{(t-s)\sigma_{err}(A)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \subseteq \sigma_{err}(S(t))$.

Preuve :

1. On suppose que $\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \notin \sigma_K(S(t))$, alors on a : $R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]$ est fermé et

$$N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] \subseteq R^\infty[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)].$$

Donc, d'après les Propositions 2.3.2 et 2.4.2, $R(\lambda - A)$ est fermé et

$$N(\lambda - A) \subseteq R^\infty(\lambda - A).$$

Ceci entraîne que $\lambda - A$ est un opérateur de Kato et, par suite,

$$\lambda \notin \sigma_K(A).$$

2. On suppose que $\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \notin \sigma_S(S(t))$, alors on a : $\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)$ est relativement régulier et

$$N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] \subseteq R^\infty[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)].$$

Par conséquent, d'après les Propositions 2.3.2 et 2.4.2, $\lambda - A$ est relativement régulier et

$$N(\lambda - A) \subseteq R^\infty(\lambda - A).$$

D'où l'on déduit $\lambda - A$ est un opérateur Saphar et, par suite,

$$\lambda \notin \sigma_{rr}(A).$$

3. On suppose que $\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \notin \sigma_{eK}(S(t))$, alors on a $R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]$ est fermé et
$$N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] \subseteq_e R^\infty[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)].$$
Donc, d'après les Propositions 2.3.2 et 2.4.2, $R(\lambda - A)$ est fermé et
$$N(\lambda - A) \subseteq_e R^\infty(\lambda - A).$$
Par conséquent $\lambda - A$ est essentiellement Kato et, par suite,
$$\lambda \notin \sigma_{eK}(A).$$

4. On suppose que $\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \notin \sigma_{err}(S(t))$, alors on a $\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)$ est relativement régulier et
$$N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] \subseteq_e R^\infty[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)].$$
Ceci entraîne, d'après les Propositions 2.3.2 et 2.4.2, $\lambda - A$ est relativement régulier et
$$N(\lambda - A) \subseteq_e R^\infty(\lambda - A).$$
Par conséquent $\lambda - A$ est essentiellement Saphar et, par suite,
$$\lambda \notin \sigma_{err}(A).$$

2.4.3 Le degré d'itération stable $dis(T)$

Proposition 2.4.3 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $t \geq 0$, on a*
$dis[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] = n$ implique $dis(A - \lambda) \leq n$.

Preuve : Comme $dis[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] = n$, alors pour tout $m \geq n$,
$$R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m \cap N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] =$$
$$R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n \cap N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)].$$
Soient $m \geq n$ et $y \in R(\lambda - A)^m \cap N(\lambda - A)$, alors il existe $x \in X$, tel que
$$y = (\lambda - A)^m x.$$

D'après le Lemme 2.2.1, on a

$$\begin{aligned}
[\phi_\lambda(t)]^m y &= [\phi_\lambda(t)]^m y \\
&= (\lambda - A)L_{\lambda,m}(t)y + [\varphi_\lambda(t)]^m[D_\lambda(t)]^m y \\
&= L_{\lambda,m}(t)(\lambda - A)y + [\varphi_\lambda(t)]^m[D_\lambda(t)]^m(\lambda - A)^m x \\
&= [\varphi_\lambda(t)]^m[D_\lambda(t)(\lambda - A)]^m x \\
&= [\varphi_\lambda(t)]^m[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m x \\
&= [\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m[\varphi_\lambda(t)]^m x.
\end{aligned}$$

Donc

$$y \in R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m.$$

Ainsi, comme $y \in N(\lambda - A) \subseteq N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]$, alors

$$y \in R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m \cap N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)].$$

Ceci implique que

$$y \in R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n \cap N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)].$$

D'où, on déduit qu'il existe $z \in X$ vérifiant

$$y = [\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n z = (\lambda - A)^n[D_\lambda(t)]^n z.$$

Enfin, on conclut que $y \in R(\lambda - A)^n$ et, par suite,

$$dis(\lambda - A) \leq n.$$

2.4.4 Spectre quasi-Fredholm

Proposition 2.4.4 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $t \geq 0$. Si $R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] + N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^n$ est fermé, alors $R(\lambda - A) + N(\lambda - A)^n$ est aussi fermé.*

Preuve : Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, tels qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N(\lambda - A)^m$ vérifiant $y_n = (\lambda - A)x_n + z_n$ et $y_n \to y \in X$ Donc, d'après le Lemme 2.2.1, on obtient

$$\begin{aligned}
[D_\lambda(t)]^m y_n &= [D_\lambda(t)]^m(\lambda - A)x_n + [D_\lambda(t)]^m z_n \\
&= [\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)][D_\lambda(t)]^{m-1}x_n + [D_\lambda(t)]^m z_n.
\end{aligned}$$

Ensuite, puisque

$$[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m[D_\lambda(t)]^m z_n = [D_\lambda(t)]^m[D_\lambda(t)]^m(\lambda - A)^m z_n = 0,$$

on en déduit

$$[D_\lambda(t)]^m y_n \in R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] + N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m.$$

Puis, comme on a

$$R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)] + N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m$$

est fermé et $[D_\lambda(t)]^m y_n$ converge vers $[D_\lambda(t)]^m y$, alors il existe $x \in X$ et $z \in N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m$ tel que

$$[D_\lambda(t)]^m y = [\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]x + z.$$

Ceci entraîne

$$\begin{aligned}
[D_\lambda(t)]^{2m} y &= [D_\lambda(t)]^m[D_\lambda(t)]^m y \\
&= [D_\lambda(t)]^m[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]x + [D_\lambda(t)]^m z.
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'aprés le Lemme 2.2.1,

$$\begin{aligned}
[\phi_\lambda(t)]^{2m} y &= (\lambda - A)L_{\lambda,2m}(t)y + [\phi_\lambda(t)]^{2m}[\varphi_\lambda(t)]^{2m}[D_\lambda(t)]^{2m} y \\
&= (\lambda - A)L_{\lambda,2m}(t)y + [\varphi_\lambda(t)]^{2m}[[D_\lambda(t)]^m[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]x + [D_\lambda(t)]^m z] \\
&= (\lambda - A)L_{\lambda,2m}(t)y + [\varphi_\lambda(t)]^{2m}[[D_\lambda(t)]^m D_\lambda(t)(\lambda - A)x + [D_\lambda(t)]^m z] \\
&= (\lambda - A)[L_{\lambda,2m}(t)y + [\varphi_\lambda(t)]^{2m}[D_\lambda(t)]^{m+1}x] + \varphi_\lambda(t)]^{2m}[D_\lambda(t)]^m z.
\end{aligned}$$

Enfin, comme on a

$$(\lambda - A)^m[\varphi_\lambda(t)^{2m}[D_\lambda(t)]^m z] = \varphi_\lambda(t)^{2m}[\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - S(t)]^m z = 0,$$

alors

$$y \in R(\lambda - A) + N(\lambda - A)^m.$$

Le théorème suivant concerne le spectre de quasi-Fredholm.

Théorème 2.4.3 *Soit A le générateur d'un semi-groupe α fois intégrable $(S(t))_{t\geq 0}$ avec $\alpha > 0$. Alors pour tout $t \geq 0$, on a*

$$\int_0^t e^{(t-s)\sigma_{qe}(A)}\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \subseteq \sigma_{qe}(S(t)).$$

Preuve : On suppose que

$$\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \notin \sigma_{qe}(S(t)).$$

Alors il existe $d \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq d$, $R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n$ et $R[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] + N[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)]^n$ sont fermés et

$$dis[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - S(t)] = d.$$

Par conséquent, d'après les Propositions 2.4.2, 2.4.3 et 2.4.4, on en déduit pour tout $n \geq d$, $R[\lambda - A]^n$ et $R[\lambda - A] + N[\lambda - A]^n$ sont fermés et $dis(\lambda - A) \leq d$. Enfin, $\lambda - A$ est quasi-Fredholm et, par suite,

$$\lambda \notin \sigma_{qe}(A).$$

Chapitre 3

Distance du spectre décomposablement Fredholm holomorphes et ϕ-multiplicateurs

Le premier objectif de ce chapitre est de calculer la distance entre 0 et le spectre décomposablement Fredholm holomorphe $\sigma_{hF}(T)$. Ensuite nous poursuivons le développement des opérateurs décomposablement Fredholm holomorphes. Puis, nous définissons une nouvelle distance qui répond à l'objectif du chapitre. De plus, nous étudions la notion de ϕ-Multiplicateurs [36] en donnant une caractérisation des ϕ-multiplicateurs. Enfin, nous étudions l'équation $AB = \lambda BA$. En particulier on s'intéresse aux opérateurs quasi-normaux et bi-normaux. On achéve ce chapitre par l'étude de l'équation $BSA = ATB$ en cherchant les propriétés spectrales locales communes entre AT et SA.

3.1 Distance du spectre $\sigma_{rr}(T)$

Lemme 3.1.1 *[26, Lemme 4] Soit $T \in \mathcal{S}(X)$ et $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $TST = T$, alors*

$$\|S\|^{-1} \leq \gamma(T).$$

Définition 3.1.1 *[51] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On définit les distances suivantes :*

$$\begin{aligned} \delta_n(T) &= \sup\{r(S)^{-1} : T^n S T^n = T^n, S \in \mathcal{B}(X)\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* ; \\ \delta(T) &= \sup_{n \geq 1} (\delta_n(T))^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Grâce à ces distances, C. Schmöeger a calculé la distance du spectre de Saphar [51].

Théorème 3.1.1 *[51, Théorème 3] Soit $T \in \mathcal{S}(X)$, alors on a :*

$$dist\{0, \sigma_{rr}(T)\} = \lim_{n \to +\infty} \delta_n(T)^{\frac{1}{n}} = \sup_{n \geq 1} \delta_n(T)^{\frac{1}{n}}.$$

3.2 Opérateurs décomposablement Fredholm holomorphes $\mathcal{H}\Phi(X)$

Définition 3.2.1 *[21] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$.*
L'ensemble résolvent décomposablement Fredholm holomorphe de T est défini par
$\rho_{hF}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists U$ *un voisinage de* λ *et* $\exists\ F : U \to \mathcal{B}(X)$ *une fonction analytique tels que* $(T-\lambda I)F(\lambda)(T-\lambda I) = T-\lambda I$ *et* $F(\lambda) \in \Phi(X)$ *pour tout* $\lambda \in U\}$.
Le spectre décomoposablement Fredholm holomorphe de T est défini par

$$\sigma_{hF}(T) = \mathbb{C}\backslash\rho_{hF}(T).$$

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit décomposablement Fredholm holomorphe si $0 \in \rho_{hF}(T)$.
La classe des opérateurs décomposablement Fredholm holomorphes est notée par $\mathcal{H}\Phi(X)$.

Remarque 3.2.1

1. *D'après la Définition 3.2.1, il est clair que $\rho_{hF}(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*
2. *Comme $G(X) \subseteq \Phi(X) \subseteq \mathcal{S}(X) \subseteq \mathcal{D}(X)$, alors on conclut que*

$$\rho(T) \subseteq \rho_{hF}(T) \subseteq \rho_{rr}(T) \subseteq \rho_K(T).$$

3. *Comme $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_K(T)$, alors on déduit que*

$$\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_K(T) \subseteq \sigma_{rr}(T) \subseteq \sigma_{hF}(T).$$

4. *$\sigma_{hF}(T)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$.*

Théorème 3.2.1 *[21] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ et $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*
On suppose que f est injective, alors on a

$$f(\sigma_{hF}(T)) = \sigma_{hF}(f(T)).$$

A. Tajmouati et A. El Bakkali ont prouvé la proposition suivante (voir [21, Proposition 2.1] et [20, Proposition 2.1]).

Proposition 3.2.1 *Soient $T \in \mathcal{H}\Phi(X)$ et $S \in \Phi(X)$ tel que $TST = T$. Alors on a les assertions suivantes :*

1. *$T^n \in \mathcal{H}\Phi(X)$ et $T^nS^nT^n = T^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*
2. *$(T-\lambda I)(I-\lambda S)^{-1}S(T-\lambda I) = (T-\lambda I)$ pour tout $|\lambda| < r(S)^{-1}$*

3. $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r(S)^{-1}\} \subseteq \rho_{hF}(T)$.

S. Ivanov a prouvé le théorème suivant.

Théorème 3.2.2 *[32, Théorème 3.9] Soit $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ une fonction holomorphe et Ω un ensemble ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *F a un pseudo-inverse holomorphe localement sur Ω*
2. *F a un pseudo-inverse holomorphe globalement sur Ω.*

Théorème 3.2.3 *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ et Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Alors on a $\Omega \subseteq \rho_{hF}(T)$ si et seulement s'il existe une fonction analytique $F : \Omega \to \Phi(X)$ tel que*

$$(T - \lambda I)F(\lambda)(T - \lambda I) = (T - \lambda I) \text{ pour tout } \lambda \in \Omega.$$

Preuve : D'après le Théorème 3.2.2 et la Proposition 3.2.1 sachant que la fonction d'indice est constante sur chaque composante connexe de $\Phi(X)$.

3.3 Distance du spectre $\sigma_{hF}(.)$

Définition 3.3.1 *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On définit les distances suivantes :*

$$\begin{aligned} \delta_{\Phi,n}(T) &= \sup\{r(S)^{-1} : T^n S T^n = T^n, S \in \Phi(X)\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \\ \delta_{\Phi}(T) &= \sup_{n\geq 1}(\delta_{\Phi,n}(T))^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Le résultat suivant est analogue au résultat de C. Schmöeger [29].

Proposition 3.3.1 *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On suppose que $0 \in \rho_{hF}(T)$, alors on a*

$$(\delta_{\Phi,k}(T))^{\frac{1}{k}} \leq \delta_{\Phi}(T) \leq r(T).$$

Preuve : Comme $0 \in \rho_{hF}(T)$ et d'après la Proposition 3.2.1, alors on conclut que

$$T^k \in \mathcal{H}\Phi(X) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Soit $k \geq 1$ et $S \in \Phi(X)$ tel que $T^k S T^k = T^k$.
D'après la Proposition 3.2.1 et le Lemme 3.1.1, on obtient

$$\|S^n\|^{-1} \leq \gamma((T^k)^n) \text{ et } (\|S^n\|^{\frac{1}{n}})^{-1} \leq \gamma((T^{kn})^{\frac{1}{nk}})^k.$$

Par suite, on déduit que

$$r(S)^{-1} \leq \Gamma(T)^k = \lim_{n\to\infty} \gamma((T^{kn})^{\frac{1}{nk}})^k.$$

D'où, on conclut que

$$\delta_{\Phi,k}(T) \leq \Gamma(T)^k \ et \ \delta_{\Phi,k}(T)^{\frac{1}{k}} \leq \Gamma(T).$$

Par conséquent, on obtient

$$\delta_{\Phi}(T) \leq \Gamma(T).$$

Proposition 3.3.2 *Soit $T \in \mathcal{H}\Phi(X)$ et $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < d(T) := dist(0, \sigma_{hF}(T))\}$, alors il existe une fonction analytique $F : \Omega \to \Phi(X)$ tel que*

$$TF(0)T = T \ et \ (T - \lambda I)F(\lambda)(T - \lambda I) = T - \lambda I \ pour \ tout \ \lambda \in \Omega.$$

De plus, on a $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F(0)^{n+1}$ et $d(T) = limsup \|F(0)^{n+1}\|^{\frac{1}{n}}$.

Preuve : D'après la définition de $d(T)$ et le Théorème 3.2.3, on conclut que $\Omega \subseteq \rho_{hF}(T)$ et qu'il existe une fonction $F : \Omega \to \Phi(X)$ tel que

$$(T - \lambda I)F(\lambda)(T - \lambda I) = T - \lambda I \ pour \ tout \ \lambda \in \Omega.$$

En particulier, si on prend $\lambda = 0$, on obtient

$$TF(0)T = T.$$

Comme F est analytique sur le disque Ω, alors $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n$ où $A_n \in \mathcal{B}(X)$.
D'où, d'après la formule de Cauchy et avec une simple récurrence, on obtient

$$A_n = F(0)^{n+1} \ pour \ tout \ n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, on sait que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F(0)^{n+1}$ est

$$R = (limsup \|F(0)^{n+1}\|^{\frac{1}{n}})^{-1}.$$

Il est clair que

$$R \geq d(T).$$

Supposons que $R > d(T)$ et on considère la fonction

$$G(\lambda) = (T - \lambda I)F(\lambda)(T - \lambda I) - (T - \lambda I) \ \ pour \ tout \ \ |\lambda| < R.$$

Il est clair que G est analytique et comme $H(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \Omega$, alors on obtient

$$G(\lambda) = 0 \ pour \ tout \ |\lambda| < R.$$

D'où, d'après le Théorème 3.2.3, on obtient

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < R\} \subseteq \rho_{hF}(T).$$

Par conséquent, on conclut que $\sigma_{hF}(T) \cap \rho_{hF}(T) \neq \emptyset$, ce qui est absurde.
Finalement, on déduit que

$$d(T) = R = limsup\|F(0)^{n+1}\|^{\frac{1}{n}}.$$

Proposition 3.3.3 *Soit $T \in \mathcal{H}\Phi(X)$, alors*

$$\delta_\Phi(T) \leq d(T) \leq \Gamma(T).$$

Preuve : Soit $|\lambda| < \delta_\Phi$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\lambda| < (\delta_{\Phi,n}(T))^{\frac{1}{n}}.$$

Par suite, on déduit que

$$|\lambda^n| < \delta_{\Phi,n}(T).$$

D'où, d'après la définition de $\delta_{\Phi,n}$, il existe $S \in \Phi(X)$ tels que

$$T^n S T^n = T^n \ et\ |\lambda^n| < r(S)^{-1}.$$

Par conséquent, d'après l'assertion 3) de la Proposition 3.2.1, on conclut que

$$\lambda^n \in \rho_{hF}(T^n).$$

Alors, d'après le Théorème 3.2 [21] sachant que la fonction $f(z) = z^n$ est analytique sur l'ouvert connexe $\rho_{hF}(T)$, on obtient

$$\lambda \in \rho_{hF}(T).$$

D'où, on conclut que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \delta_\Phi(T)\} \subseteq \rho_{hF}(T).$$

Par conséquent, on obtient

$$\delta_\Phi(T) \leq d(T).$$

Maintenant, soit $|\lambda| < d(T)$, alors il existe une fonction analytique F vérifiant

$$(T - \lambda I)F(\lambda)(T - \lambda I) = T - \lambda I.$$

D'après la Proposition 3.3.3, on a $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F(0)^{n+1}$ et $T^{n+1}F(0)^{n+1}T^{n+1} = T^{n+1}$.
Par suite, d'après le Lemme 3.1.1, on obtient

$$\|F(0)^{n+1}\|^{-1} \leq \gamma(T^{n+1}).$$

Par conséquent, on conclut que

$$(\|F(0)^{n+1}\|^{\frac{1}{n}})^{-1} \leq (\gamma(T^{n+1})^{\frac{1}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}.$$

Finalement, d'après la Proposition 3.3.3, on déduit que

$$d(T) \leq \Gamma(T).$$

Théorème 3.3.1 *Soit $T \in \mathcal{H}\Phi(X)$, alors*

$$d(T) = \lim_{n\to\infty} (\delta_{\Phi,n}(T))^{\frac{1}{n}} = \delta_\Phi(T),$$

où $d(T) = dist\{0, \sigma_{hF}(T)\}$.

Preuve : Soit $\epsilon \in]0, d(T)[$ et $\eta = d(T) - \epsilon$ où $d(T) = dist\{0, \sigma_{hF}(T)\}$. Donc, d'après la Proposition 3.3.2, pour tout $|\lambda| < d(T)$ on a

$$(T - \lambda I)F(\lambda)(T - \lambda I) = (T - \lambda I) \text{ où } F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F(0)^{n+1}.$$

D'où, sachant que $\limsup \|F(0)^{n+1}\|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{d(T)}$, alors il existe k_0 tel que

$$\|F(0)^{n+1}\|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{d(T)} + \frac{\epsilon}{d(T)\eta} = \frac{1}{\eta} \text{ pour tout } n \geq k_0.$$

Par suite, comme $TF(0)T = T$ et d'après la Proposition 3.3.2, on déduit que

$$\delta_\Phi(T) \leq d(T).$$

Par conséquent, on obtient

$$T^{n+1}F(0)^{n+1}T^{n+1} = T^{n+1}.$$

Pour tout $n \geq k_0$ on a :

$$\begin{aligned} \eta^n &< \|F(0)^{n+1}\|^{-1} \\ &\leq r(F(0)^{n+1})^{-1} \\ &\leq \delta_{\Phi,n+1}(T) \\ &\leq \delta_\Phi^{n+1}(T) \\ &\leq d(T)^{n+1}. \end{aligned}$$

D'où, pour tout $n \geq k_0$ on obtient :

$$\begin{aligned} d(T) - \epsilon = \eta &< (\delta_\Phi^{n+1}(T))^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \delta_\Phi^{1+\frac{1}{n}}(T) \\ &\leq d(T)^{1+\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme $\epsilon > 0$ et $\lim_{n\to\infty} d(T)^{1+\frac{1}{n}} = d(T)$, alors il existe m_0 tel que

$$d(T)^{1+\frac{1}{n}} < d(T) + \epsilon \ \textit{pour tout}\, n \geq m_0.$$

D'où, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \geq \max\{m_0, k_0\}$ on obtient

$$d(T) - \epsilon < \delta_\Phi^{1+\frac{1}{n}}(T) < d(T) + \epsilon.$$

Finalement, on conclut que

$$d(T) = \delta_\Phi(T) = \lim_{n\to\infty} \delta_\Phi^{1+\frac{1}{n}}(T).$$

3.4 ϕ-multiplicateurs

3.4.1 Propriétés de ϕ-multiplicateurs

Définition 3.4.1 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ et ϕ un homomorphisme sur $\mathcal{A}$. T est dit un ϕ-multiplicateur si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, on a*

$$T(xy) = T(x)\phi(y) = \phi(x)T(y).$$

Le résultat suivant donne une caractérisation d'un ϕ-multiplicateur si on considère $\mathcal{A} = L_1(G)$ où G est un groupe abélien localement compact.

Théorème 3.4.1 *[36, Théorème 4.1] Soient $T \in \mathcal{B}(L_1(G))$ et $\phi : L_1(G) \to L_1(G)$ un homomorphisme à image dense où G est un groupe abélien localement compact. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est un $\phi-$multiplicateur sur $L_1(G)$ c'est à dire pour tout $f, g \in L_1(G)$*

$$T(f * g) = T(f) * \phi(g) = \phi(f) * T(g)$$

2. *il existe une unique mesure $\mu_T \in M(G)$ vérifiant pour tout $f \in L_1(G)$*

$$T(f) = \phi(f) * \mu_T$$

3. *il existe une unique fonction H_T sur $\widehat{G}$ vérifiant pour tout $f \in L_1(G)$*

$$\widehat{T(f)} = H_T(\widehat{f})$$

où $\widehat{G}$ est le groupe dual de G.

Lemme 3.4.1 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach semi premier, ϕ un homomorphisme surjectif sur $\mathcal{A}$ et $T \in M_\phi(\mathcal{A})$ tel que $\phi \circ T = T \circ \phi$. Alors on a :*

$$\ker(T^2) \subseteq \ker(\phi \circ T).$$

Preuve : Soient $x \in \ker(T^2)$ et $a \in \mathcal{A}$, alors on a :

$$\begin{aligned}
(\phi\circ T)(x)a(\phi\circ T)(x) &= (\phi\circ T)(x)\phi(a')(\phi\circ T)(x) \quad (\phi \textit{ est surjectif, alors} \exists\, a' \in \mathcal{A} \textit{ tel que} \, \phi(a') = a)\\
&= (T\circ\phi)(x)\phi(a')(\phi\circ T)(x) \quad (\phi\circ T = T\circ\phi)\\
&= [T(\phi(x)\phi(a'))]\phi(T(x))\\
&= [\phi^2(x)T(a')]\phi(T(x)) \qquad (T \in M_\phi(\mathcal{A}) : T(\phi(x))\phi(a') = \phi^2(x)T(a'))\\
&= \phi^2(x)[T(a')\phi(T(x))]\\
&= \phi^2(x)\phi(a')T^2(x) \qquad (T \in M_\phi(\mathcal{A}) : T(a')\phi(T(x)) = \phi(a')T^2(x))\\
&= 0 \qquad (x \in \ker(T^2) : T^2(x) = 0).
\end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$(\phi\circ T)(x)\mathcal{A}(\phi\circ T)(x) = \{0\}.$$

Par conséquent, comme $\mathcal{A}$ est semi premier, on conclut que $(\phi\circ T)(x) = 0$ et $x \in \ker(\phi\circ T)$.
Finalement, on déduit que

$$\ker(T^2) \subseteq \ker(\phi \circ T).$$

Théorème 3.4.2 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach semi premier, ϕ un homomorphisme surjectif sur $\mathcal{A}$et $T \in M_\phi(\mathcal{A})$ tel que $\phi \circ T = T \circ \phi$. Alors on a*

$$T(\mathcal{A}) \cap \ker(T) \subseteq \ker(\phi) \subseteq \ker(T).$$

Preuve : Soit $x \in T(\mathcal{A})\cap\ker(T)$, alors $Tx = 0$ et il existe $z \in \mathcal{A}$ tel que $x = Tz$. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(x)a\phi(x) &= \phi(Tz)\phi(a')\phi(Tz) \qquad (x = Tz \textit{ et}\, \phi \textit{ est surjectif} \,:\, \exists\, a' \in \mathcal{A} \,/\, \phi(a') = a)\\
&= T(\phi(z))\phi(a')\phi(Tz) \quad (\phi\circ T = T\circ\phi)\\
&= \phi^2(z)T(a')\phi(Tz) \qquad (T \in M_\phi(\mathcal{A}) : T(\phi(z))\phi(a') = \phi^2(z)T(a'))\\
&= \phi^2(z)\phi(a')T^2(z) \qquad (T \in M_\phi(\mathcal{A}) : T(a')\phi(Tz) = \phi(a')T^2(z))\\
&= 0 \quad (T^2(z) = T(Tz) = T(x) = 0).
\end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\phi(x)\mathcal{A}\phi(x) = \{0\}.$$

Par suite, comme $\mathcal{A}$ est semi premier, alors $\phi(x) = 0$ et donc $x \in \ker \phi$.
Par conséquent, on déduit que
$$T(\mathcal{A}) \cap \ker(T) \subseteq \ker \phi.$$
Soit $x \in \ker \phi$. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a :
$$\begin{array}{rcll} T(x)aT(x) & = & T(x)\phi(a')T(x) & (\phi \textit{ est surjectif } : \exists\, a' \in \mathcal{A} \,/\, \phi(a') = a)) \\ & = & \phi(x)T(a')T(x) & (T \in M_\phi(\mathcal{A}) : T(x)\phi(a') = \phi(x)T(a')) \\ & = & 0 & (x \in \ker \phi \;:\; \phi(x) = 0). \end{array}$$
D'où, on obtient
$$T(x)\mathcal{A}T(x) = \{0\}.$$
Par suite, comme $\mathcal{A}$ est semi premier, alors $T(x) = 0$ et donc $x \in \ker T$.
Par conséquent, on conclut que
$$\ker \phi \subseteq \ker T.$$

Théorème 3.4.3 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach sans ordre, ϕ un homomorphisme sur $\mathcal{A}$ et $T \in M_\phi(\mathcal{A})$. Alors on a les inclusions suivantes :*

1. $\overline{T(\mathcal{A})} \subseteq [\phi(\ker(T))]^\top$
2. $\phi(\ker(T)) \subseteq [T(\mathcal{A})]^\top$.

Preuve :

1. Soient $x \in \ker T$ et $y \in \overline{T(\mathcal{A})}$. Autrement dit qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tel que $y = \lim_{n\to+\infty} Tz_n$. Alors on a :
$$\begin{array}{rcll} \phi(x)y & = & \lim\limits_{n\to\infty} \phi(x)Tz_n & \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} Tx\phi(z_n) & (T \in M_\phi(\mathcal{A})) \\ & = & 0 & (x \in \ker(T)). \end{array}$$
D'où, on obtient
$$\phi(x)y = 0.$$
De la même façon, on montre que
$$y\phi(x) = 0.$$
Par conséquent, on déduit que
$$\overline{T(\mathcal{A})} \subseteq [\phi(\ker(T))]^\top.$$

2. Soient $x \in \ker T$ et $y \in T(\mathcal{A})$. Autrement dit $Tx = 0$ et qu'il existe $z \in \mathcal{A}$ tel que $y = Tz$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \phi(x)y &= \phi(x)Tz \quad (y = Tz) \\ &= T(x)\phi(z) \quad (T \in M_\phi(\mathcal{A})) \\ &= 0 \qquad (Tx = 0). \end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\phi(x)y = 0.$$

De la même façon, on montre que

$$y\phi(x) = 0.$$

Par conséquent, on conclut que

$$\phi(\ker(T)) \subseteq [T(\mathcal{A})]^\top.$$

3.4.2 Caractérisation de ϕ-multiplicateurs

Le théorème suivant justifie l'existence de la fonction Helgason-Wang pour un ϕ-multiplicateur.

Théorème 3.4.4 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach semi simple et ϕ un homomorphisme sur $\mathcal{A}$. Alors, pour tout $T \in M_\phi(\mathcal{A})$, il existe une unique fonction continue φ_T sur $\Delta(\mathcal{A})$ vérifiant l'équation :*

$$\widehat{Tx}(m) = \varphi_T(m)\widehat{\phi(x)}(m) \text{ pour tout} x \in \mathcal{A} \text{ et tout} m \in \Delta(\mathcal{A}).$$

De plus, on a $|\varphi_T(m)| \leq \frac{\|m\|\|T\|}{\|m\circ\phi\|}$ *pour tout* $m \in \Delta(\mathcal{A})$.

Preuve : Soient $m \in \Delta(\mathcal{A})$ et $x \in \mathcal{A}$ tel que $\widehat{\phi(x)}(m) \neq 0$.
On définit la fonction φ_T par

$$\begin{aligned} \varphi_T : \Delta(\mathcal{A}) &\to \mathbb{C}, \\ m &\to \varphi_T(m) = \frac{\widehat{Tx}(m)}{\widehat{\phi(x)}(m)}. \end{aligned}$$

La fonction φ_T est indépendant du choix de x, car si on prend $y \in \mathcal{A}$ vérifiant $\widehat{\phi(y)}(m) \neq 0$. Comme $(Tx)\phi(y) = \phi(x)(Ty)$, alors on obtient

$$\frac{\widehat{Tx}(m)}{\widehat{\phi(x)}(m)} = \frac{\widehat{Ty}(m)}{\widehat{\phi(y)}(m)}.$$

Par conséquent la fonction φ_T est bien défini.
On suppose que $\widehat{\phi(x)}(m) = 0$ et soit $y \in \mathcal{A}$ tel que $\widehat{\phi(y)}(m) \neq 0$.
Par suite, on a

$$\widehat{Tx}(m)\widehat{\phi(y)}(m) = \widehat{\phi(x)}(m)\widehat{Ty}(m) = 0.$$

Donc, on déduit que

$$\widehat{Tx}(m) = 0.$$

D'où, on obtient

$$\widehat{Tx}(m) = \varphi_T(m)\widehat{\phi(x)}(m) \, pour \; tout \, x \in \mathcal{A} \, et \; tout \, m \in \Delta(\mathcal{A}).$$

D'autre part, comme ϕ est un homomorphisme, $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach semi simple et d'après le Théorème de Gelfand, alors ϕ est continue (voir [74]). Par conséquent, on déduit que φ_T est continue sur $\Delta(\mathcal{A})$ pour la topologie de Gelfand.

Maintenant, on montre l'unicité de la fonction φ_T. On suppose qu'il existe une autre fonction $\psi : \Delta(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ vérifiant $\widehat{Tx} = \widehat{\psi(x)}$. Par suite, on a

$$(\varphi_T(m) - \psi(m))\widehat{\phi(x)}(m) = 0 \, \text{pour tout} \, x \in \mathcal{A}.$$

D'où, on conclut que

$$\varphi_T(m) = \psi(m).$$

Par conséquent, comme $0 < \|m\| \leq 1$ et $0 < \|m \circ \phi\| \leq \|\phi\| < +\infty$ pour tout $x \in \mathcal{A}$, alors on obtient

$$|\varphi_T(m)||\widehat{\phi(x)}(m)| = |\varphi_T(m)\widehat{\phi(x)}(m)| = |\widehat{Tx}(m)| \leq \|m\|\|T\|\|x\|,$$

où $\|m\| = sup\{|\widehat{x}(m)| : \|x\| = 1\}$ et $\|m \circ \phi\| = sup\{|\widehat{\phi(x)}(m)| : \|x\| = 1\}$. Pour tout $x \in \mathcal{A}$ tel que $\|x\| = 1$, on a :

$$\begin{aligned} |\varphi_T(m)| &\leq \inf_{\|x\|=1} \frac{\|m\|\|T\|}{|\widehat{\phi(x)}(m)|} \\ &\leq \frac{\|m\|\|T\|}{\sup_{\|x\|=1|} |\widehat{\phi(x)}(m)|} \\ &\leq \frac{\|m\|\|T\|}{\|m \circ \phi\|}. \end{aligned}$$

Finalement, on déduit que $|\varphi_T(m)| \leq \frac{\|m\|\|T\|}{\|m\circ\phi\|}$ pour tout $m \in \Delta(\mathcal{A})$.

Remarque 3.4.1 1. *La fonction φ_T donnée par le Théorème 3.4.4, est appelée la fonction de Helgason-Wang de T.*

2. *Si on suppose de plus dans le Théorème 3.4.4 que ϕ est un homomorphisme tel qu'il existe $\delta > 0$ vérifiant $\delta\|m\| \leq \|m \circ \phi\|$ pour tout $m \in \Delta(\mathcal{A})$, alors la fonction φ_T sera bornée.*
   De plus on aura $\|\varphi_T\|_\infty \leq \frac{1}{\delta}\|T\|$.

Corollaire 3.4.1 *[1, Théorème 1.4.14] Soit $\mathcal{A}$ algèbre de Banach commutative semi simple. Alors pour tout $T \in M(\mathcal{A})$, il existe une unique fonction continue bornée $\varphi_T : \Delta(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ vérifiant*
$\widehat{Tx}(m) = \varphi_T(m)\widehat{x}(m) \, pour \; tout \, x \in \mathcal{A} \, et tout \, m \in \Delta(\mathcal{A})$.
De plus, on a $\|\varphi_T\|_\infty \leq \|T\|$ pour tout $T \in M(\mathcal{A})$.

Théorème 3.4.5 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative semi simple et ϕ un homomorphisme sur $\mathcal{A}$. Si $T \in M_\phi(\mathcal{A})$, alors on a*

$$T(\ker(m \circ \phi)) \subseteq \ker m \text{ pour tout } m \in \Delta(\mathcal{A}).$$

Preuve : Soient $T \in M_\phi(\mathcal{A})$, $m \in \Delta(\mathcal{A})$ et $x \in \mathcal{A}$ tel que $x \notin \ker(m \circ \phi)$.
Alors pour tout $y \in \ker(m \circ \phi)$, on a

$$\widehat{Ty}(m)\widehat{\phi(x)}(m) = \widehat{\phi(y)}(m)\widehat{Tx}(m) = 0.$$

D'où, comme $\widehat{\phi(x)}(m) \neq 0$, alors on conclut que

$$\widehat{Ty}(m) = m(Ty) = 0.$$

Par suite, on obtient

$$Ty \in \ker m.$$

Par conséquent, on déduit que

$$T(\ker(m \circ \phi)) \subseteq \ker m.$$

3.5 Étude de l'équation $AB = \lambda BA$

Récemment, des nombreux auteurs ont étudié l'équation $AB = \lambda BA$:

- Dans [37], les auteurs ont prouvé que tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ qui est λ-commute avec un opérateur compact, alors il admet un sous-espace non trivial hyper-invariant.
- Dans [17], J.B. Conway et G. Prajitura ont caractérisé la fermeture et l'intérieure de l'ensemble des opérateurs λ-commute avec un opérateur compact.
- Dans [77], L. Zhang, T. Ohwada et M. Cho ont étudié les propriétés des opérateurs λ-commutes avec un opérateur paranormal.
- Dans [12] J.A. Brooke, P. Busch et D.B. Pearson ont montré que si :
  - AB est quasi-nilpotent, alors $|\lambda| = 1$.
  - A ou B est auto-adjoint, alors $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Dans [73], J. Yang et H.-K. Du ont prouvé l'équivalence suivante : Si AB est borné inférieurement si et seulement si A et B sont aussi bornés inférieurement.
- Dans [53], C. Schmöeger a généralisé le résultat précédente de J. Yang et H.-K. Du dans le cas d'une algèbre de Banach complexe pour les opérateurs normaux ou hermitien.

3.5.1 Opérateurs quasi-normaux

Théorème 3.5.1 *Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $AB = \lambda BA \neq 0$, A est quasi-normal et B est normal. Si $|\lambda| = 1$, alors AB est quasi-normal.*

Preuve : On suppose que $AB = \lambda BA \neq 0$, alors

$$B^*A^* = \bar{\lambda}A^*B^*.$$

D'après le Théorème de Fuglede-Putnam sachant que B et λB sont normaux, on obtient :

$$BA^* = \lambda A^*B \text{ et } AB^* = \bar{\lambda}B^*A.$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
AB[(AB)^*AB] &= [AB][B^*A^*AB] \\
&= [\lambda BA]B^*A^*AB \\
&= \lambda B[AB^*]A^*AB \\
&= \lambda B[\bar{\lambda}B^*A]A^*AB \\
&= |\lambda|^2[BB^*][AA^*A]B \\
&= [B^*B][A^*AA]B \\
&= B^*[BA^*]AAB\,; \\
&= B^*[\lambda A^*B]AAB \\
&= B^*A^*[\lambda BA]AB \\
&= B^*A^*[AB]AB \\
&= [(AB)^*AB]AB.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit que AB est quasi-normal.

3.5.2 Opérateurs bi-normaux

Théorème 3.5.2 *Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $AB = \lambda BA \neq 0$. On suppose que A est bi-normal et B est normal. Si de plus $|\lambda| = 1$, alors AB est bi-normal.*

Preuve : D'après le Théorème de Fuglede-Putnam-Rosenblum sachant que B et λB sont normaux, alors on a :

$$BA^* = \lambda A^*B \text{ et } AB^* = \bar{\lambda}B^*A.$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}
AB(AB)^*(AB)^*AB &= A[BB^*]A^*B^*A^*AB \\
&= A[B^*B]A^*B^*A^*AB \\
&= [AB^*]BA^*[B^*A^*]AB \\
&= [\bar{\lambda}B^*A]BA^*[\bar{\lambda}A^*B^*]AB \\
&= (\bar{\lambda})^2B^*[AB]A^*A^*[B^*A]B \\
&= (\bar{\lambda})^2B^*[\lambda BA]A^*A^*[\frac{1}{\bar{\lambda}}AB^*]B \\
&= |\lambda|^2B^*B[AA^*A^*A]B^*B \\
&= B^*B[A^*AAA^*]B^*B \\
&= B^*[BA^*]AA[A^*B^*]B \\
&= B^*[\lambda A^*B]AA[\frac{1}{\bar{\lambda}}B^*A^*]B \\
&= \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}B^*A^*[BA]AB^*[A^*B] \\
&= \lambda^2B^*A^*[\frac{1}{\lambda}AB]AB^*[\frac{1}{\lambda}BA^*] \\
&= B^*A^*ABA[B^*B]A^* \\
&= B^*A^*ABA[BB^*]A^* \\
&= (AB)^*ABAB(AB)^*.
\end{aligned}$$

Finalement, on déduit que $AB(AB)^*(AB)^*AB = (AB)^*ABAB(AB)^*$ et donc AB est bi-normal.

3.6 Étude spectrale de l'équation $BSA = ATB$

3.6.1 Spectre local

Théorème 3.6.1 *Soient $S, T \in \mathcal{B}(Y, X)$ et $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$ tel que $BSA = ATB$.*
Alors on a les inclusions suivantes :

1. $\sigma_{AT}(Bx) \subseteq \sigma_{SA}(x)$
2. $\sigma_{TA}(TBSy) \subseteq \sigma_{AS}(y)$.

Preuve :

1. On suppose que $\lambda \notin \sigma_{SA}(x)$, alors il existe un voisinage U de λ et une fonction analytique $f : U \to X$ vérifiant $(SA - \mu)f(\mu) = x$ *pour tout* $\mu \in U$.
   On pose la fonction :
$$\begin{aligned} g \ : \ U &\to X, \\ \mu &\to g(\mu) = B(f(\mu)). \end{aligned}$$

Il est clair que la fonction g est analytique sur U satisfaisant pour tout $\mu \in U$:

$$\begin{aligned}(AT-\mu)g(\mu) &= (AT-\mu)Bf(\mu)\\ &= (ATB-\mu B)f(\mu)\\ &= (BSA-\mu B)f(\mu)\\ &= B(SA-\mu)f(\mu)\\ &= Bx.\end{aligned}$$

Par conséquent, on conclut que $\lambda \notin \sigma_{AT}(Bx)$ et par suite $\sigma_{AT}(Bx) \subseteq \sigma_{SA}(x)$.

2. On sait que $\sigma_{TA}(Tx) \subseteq \sigma_{AT}(x)$ et d'après l'inclusion précédente, on déduit que :

$$\begin{aligned}\sigma_{TA}(T(BSx)) &\subseteq \sigma_{AT}(BSx)\\ &\subseteq \sigma_{SA}(Sx)\\ &\subseteq \sigma_{AS}(x).\end{aligned}$$

Finalement, on obtient que $\sigma_{TA}(TBSx) \subseteq \sigma_{AS}(x)$.

3.6.2 Propriété de SVEP

Théorème 3.6.2 *Soient $S, T \in \mathcal{B}(Y, X)$ et $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$ tel que $BSA = ATB$. On suppose que B est injectif. Si AT possède SVEP, alors SA possède aussi SVEP.*

Preuve : On suppose que AT possède SVEP et $f : U \to X$ est une fonction analytique sur un voisinage U de $\mathbb{C}$ tel que pour tout $\mu \in U$ on a :

$$(SA-\mu)f(\mu) = 0.$$

Comme la fonction $\mu \to Bf(\mu)$ est analytique sur U et de plus on a :

$$\begin{aligned}(AT-\mu)Bf(\mu) &= (ATB-\mu B)f(\mu)\\ &= (BSA-\mu B)f(\mu)\\ &= B(SA-\mu)f(\mu)\\ &= 0,\end{aligned}$$

alors, comme AT a SVEP, on obtient

$$Bf = 0 \quad \textit{sur } U.$$

Par suite, comme B est injectif, on déduit que

$$f = 0 \quad \textit{sur } U.$$

Finalement, on déduit que SA possède SVEP.

3.6.3 Spectre de Bishop

Théorème 3.6.3 *Soient $S, T \in \mathcal{B}(Y, X)$ et $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$ tel que $BSA = ATB$.*
On suppose que B est injectif, alors on a :

$$\sigma_\beta(SA) \subset \sigma_\beta(AT).$$

De plus, si AT possède (β), alors SA possède aussi (β).

Preuve : On suppose que $\lambda \notin \sigma_\beta(AT)$. Soient U un ensemble ouvert du disque $\mathbb{D}(\lambda, r)$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{O}(U, X)$ tel que $\lim_{n\to+\infty}(SA-\mu)g_n(\mu) = 0$ pour tout $\mu \in U$.
Il est clair que

$$\begin{aligned}(AT-\mu)B &= ATB - \mu B \\ &= BSA - \mu B.\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(AT-\mu)(Bg_n(\mu)) &= \lim_{n\to+\infty}(BSA-\mu B)g_n(\mu) \\ &= B(\lim_{n\to+\infty}(SA-\mu)g_n(\mu)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'où pour tout $\mu \in U$, on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty}(AT-\mu)(Bg_n(\mu)) = 0.$$

Ainsi, comme $\lambda \notin \sigma_\beta(AT)$, alors pour tout $\mu \in U$, on obtient :

$$\lim_{n\to 0} Bg_n(\mu) = 0.$$

De plus, comme B est injectif, alors pour tout $\mu \in U$, on déduit que

$$\lim g_n(\mu) = 0.$$

Finalement, on conclut que $\lambda \notin \sigma_\beta(SA)$ et par suite $\sigma_\beta(AT) \subseteq \sigma_\beta(SA)$.
Si de plus AT possède (β), alors on obtient :

$$\sigma_\beta(SA) \subseteq \sigma_\beta(AT) = \varnothing.$$

Par conséquent, on déduit que $\sigma_\beta(SA) = \varnothing$ et par suite SA possède (β).

Perspectives

3.7 C-semi-groupes

Définition 3.7.1 *[19] Soit $C \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur injectif. La famille $(S(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ est dite un C-semi-groupe [19] si on a les propriétés suivantes :*

1. *L'application $t \to S(t)x$ de $[0, +\infty[$ vers X est continue pour tout $x \in X$,*
2. *S(t)S(s)=CS(t+s),*
3. *S(0)=C.*

Dans ce cas, son générateur A est défini par

$$D(A) = \{x \in X \;/\; \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - Cx}{t} \text{ existe et appartient à } R(C)\},$$

avec

$$Ax = C^{-1}\big[\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - Cx}{t}\big].$$

En particulier, les C_0-semi-groupes sont I-semi-groupes.
La question qui se pose :

Quelle relation spectrale existe-t-elle entre un $C-$semi-groupe et son générateurs ?

3.8 Ergodicité d'un $C-$semi-groupe et d'un semi-groupe α fois intégrable

Dans [39], M. Lin a montré que si un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ satisfait $\lim_{n\to+\infty} \|\frac{T^n}{n}\| = 0$, alors on a $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} T^n$ converge uniformément si et seulement si $R(I-T)$ est fermé.
Ensuite dans [40], il a prouvé la même résultat dans le cas d'un C_0-semi-groupe : Soit $(T(t))_{t\geq 0} \subset$

$\mathcal{B}(X)$ un C_0-semi-groupe tel que $\lim_{\to+\infty} \|\frac{T(t)}{t}\| = 0$ et A son générateur. Alors $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)ds$ converge uniformément si et seulement si $R(A)$ est fermé.
Les contributions du M. Lin nous inspirent d'investiguer les questions suivantes :

1. Un semi-groupes α fois intégrable est il uniformément ergodique ?
2. Un $C-$semi-groupe est-il uniformément ergodique ?

3.9 Perturbation, analycité et contraction d'un semi-groupe

Soient $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur.

- Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est analytique [46, Définition II.5.1] ou une contraction, A. Pazy a obtenu différentes propriétés.
- A. Pazy a trouvé une relation quand A est dissipatif ou m-dissipative [46, Définition I.4.1] et $(S(t))_{t\geq 0}$ est contractante.
- Si $B \in \mathcal{B}(X)$ et $\|S(t)\| \leq Me^{-\omega t}$, alors $A + B$ est un générateur d'un C_0-semi-groupe [46, Théorème III.1.1].

Les questions qui se posent :

1. Est-ce qu'on peut généraliser ces résultats pour un semi-groupe α fois intégrable ?
2. La même question pour un $C-$semi-groupe ?

Bibliographie

[1] P. Aiena, *Fredholm and Local Spectral Theory with Applications to Multipliers,* Kluwer.Acad.Press. 2004

[2] P. Aiena and M. González, *On the Dunford property* (C) *for bounded linear operators* RS *and* SR*,* Integral Equations Operator Theory. 78 (92) (2011), 561-568.

[3] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$*,* Integr.Equat.Oper.Theory. 13 (3) (1990), 307-315.

[4] W. Arendt, *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems,* Israel J. Math, 59 (3) (1987), 327-352.

[5] S.C. Arora and P. Arora, *On p-quasihyponormal operators for* $0 < p < 1$*,* Yokohama.Math.J. 41 (1993), 25-29.

[6] A. Bala, *Binormal operators,* Indian.J.Pure and applied.Math. 8 (1) (1977), 68-71.

[7] H. Baloudia and A. Jeribib, *Holomorphically Weyl-decomposably regular,* Functional Anal. Approximation and Computation. 8 (2) (2016), 13-22.

[8] B.A. Barens, *Common operator properties of the linear operators* RS *and* SR*,* Proc.Amer.Math.Soc. 126 (1998), 1055-1061.

[9] C. Benhida and E.H. Zerouali, *Local spectral theory of linear operators* RS *and* SR*,* Integral Equations Operator Theory. 54 (2006), 1-8.

[10] F.T. Birtal, *Isomorphism and isometric multipliers,* Proc.Amer.Math.Soc. 13 (1962), 204-210.

[11] N.L. Braha, M. Lohaj, F.H. Marevci and Sh. Lohaj, *Some properties of paranormal and hyponormal operators,* Bull.Math.Anal.Appl. 2 (2009), 23-35.

[12] J.A. Brooke, P. Busch and D.B. Pearson, *Commutativity up to a factor of bounded operators in complex Hilbert space,* R.Soc.Lond.Proc.Ser.A Math.Phys.Eng.Sci. 58 (2002), 109-118.

[13] A.L. Cauchy, *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique,* Première Partie, Analyse Algébrique, 1821.

[14] M. Cho, B. Duggal, R.E. Harte and S. Ôta, *Operator equation $AB = \lambda BA$,* International.Math.Forum. 5 (2010), 2629-2637.

[15] M. Cho, J.I. Lee and T. Yamazaki, *On the operator equation $AB = \lambda BA$,* Scientiae.Math.Jap.Online e. (2009), 49-55.

[16] I. Colojoara and C. Foias, *Theory of generalized spectral operators,* Gordon and Breach, New York. 1968.

[17] J.B. Conway and G. Prajitura, *On λ-commuting operator,* Studia.Mathematica. 166 (1) (2005), 1-9.

[18] C. Darty and G. Maraz, *Multipliers problems,* Proceeding of the third Asian mathematical conference Diliman-Philippines. 2000.

[19] R. DeLaubenfelds, *C-semigroups and the cauchy problem,* Journal of Functional Analysis. III, (1993), 44-61.

[20] A. El Bakkali and A. Tajmouati, *On holomorphically decomposable Fredholm spectrum and Reisz perturbations,* Int. J. Math. Anal. 5 (18) (2011), 887-900.

[21] A. El Bakkali and A. Tajmouati, *On holomorphically decomposable Fredholm operators,* Italian.J. of pure and applied math. 31 (2013), 7-14.

[22] A. Elkoutri and M. A. Taoudi, *Singular spectrum for generators of semigroups,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 333 (2001), no. 7, 641Ű644 (French).

[23] A. Elkoutri and M. A. Taoudi, *Spectral Inclusions and stability results for strongly continuous semigroups,* Int. J. of Math. and Mathematical Sciences, 37 (2003), 2379-2387.

[24] K.J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations,* Springer-Verlag New York, 2000.

[25] J.K. Finch. *The single valued extension property on a Banach space,* Pacific.J.Math. 58 (1975), 61-69.

[26] K.H. Forster and M.A. Kaashoek, *The asymptotic behaviour of the reduced minimum modulus of a Fredholm operator,* Proc. Amer. Math. Soc. 49 (1) (1975), 123-131.

[27] T. Furuta, *Invitation to linear operators,* Taylor Francis London and New York. 2001.

[28] Y.M. Han and A.H. Kim, *A note on $*$-paranormal operators,* Integr.Equat.Oper.Theory. 49 (4) (2004), 435-444.

[29] R. Harte, *Taylor exacteness and Kato's jump,* Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1989), 793-801.

[30] M. Heiber, *Laplace transforms and $\alpha-$times integrated semigroups,* Forum Math. 3 (1991), 595-612.

[31] S. Helgason, *Multipliers of Banach algebras,* Annal of Math. 64 (1956), 240-254.

[32] S. Ivanov, *On holomophic relative inverses of operator-valued functions,* Pacific.J of Math. 78 (2) (1978), 345-358.

[33] C. Kaiser, *Integrated semigroups and linear partial differential equations with delay,* J. Math Anal and Appl. 292 (2) (2004), 328-339.

[34] J.J. Koliha and T.D. Tran, *The Drazin inverse for closed linear operators and asymptotic convergence of C_0-semigroups,* J.Oper.Theory. 46 (2001), 323Ű336.

[35] V. Kordula and V. Müller, *The distance from the Apostol spectrum,* Proc.Amer.Math.Soc. 124 (1996), 3055-3061.

[36] R. Larsen, *An introduction to the theory of multipliers,* New York Springer-Verlag. 1971.

[37] V. Lauric, *Operators α-commuting with a compact operator,* Proc.Amer.Math.Soc. 125 (1997), 2379-2384.

[38] K.B.Laursen and M.M. Neumann, *An Introduction to Local Spectral Theory,* Oxford University Press.New York, 2000.

[39] M. Lin, *On the uniform ergodic theorem I,* Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974), 337-340.

[40] M. Lin, *On the uniform ergodic theorem II,* Proc. Amer. Math. Soc. 46 (2), 1974.

[41] C. Lin, Z. Yan and Y. Ruan, *Common properties of operators RS and SR and p-hyponormal operators,* Integral Equations Operator Theory. 14 (2002), 313-325.

[42] M. Mbekhta, *Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranaurmaux et spectraux,* Glasgow.Math.J. 29 (1989), 159-175.

[43] S. Mecheri, *On quasi $*$-paranormal operators,* Ann.Funct.Anal. 3 (1) (2012), 86-91.

[44] C. Miao Li and W. Quan Zheng, *α-times integrated semigroups : local and global,* Studia Mathematica 154 (3) (2003), 243-252.

[45] V. Müller, *Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebras 2nd edition,* Oper.Theo.Adva.Appl. 139 (2007).

[46] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,* Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York 1983.

[47] V. Rakocevic, *A note on regular elements in Calkin algebras,* Collect.Math. 43 (1) (1992) 37-42.

[48] K. Rasimi, A. Ibraimi and L. Gjoka, *Notes on λ-commuting operators,* Inter.J.Pure and Applied.Math. 91 (2) (2014), 191-196.

[49] A. Riazi and M. Adib, *φ-multipliers on Banach algebras without order,* Int.Journal of Math.Analysis. 3 (3) (2009), 121-132.

[50] P. Saphar, *Contribution à l'étude des applications linéaires dans un espace de Banach,* Bull.Soc.Math.France. 92 (1964), 363-384.

[51] C. Schmöeger, *The stability radius of an operator of Saphar type,* Studia.Math. 113 (1995), 102-104.

[52] C. Schmöeger, *On decomposably regular operators,* Portugal.Math. 54 (1997), 41-50.

[53] C. Schmöeger, *Commutativity up to a factor in Banach algebras,* Demonst.Math. 38 (2005), 895-900.

[54] C. Schmöeger, *On the operator equations* $ABA = A^2$ *and* $BAB = B^2$*,* Publ.Inst.Math. (Beograd) 78 (92) (2005), 127-133.

[55] C. Schmöeger, *Commun spectral properties of linear operators* A *and* B *such that* $ABA = A^2$ *and* $BAB = B^2$*,* Publ.Inst.Math. Nouvelle série. 79 (93) (2006), 109-114.

[56] M.Ó Searcóid and T.T. West, *Continuity of the generalized kernel and range for semi-Fredholm operators,* Math.Proc.Cambridge Philos.Soc. 105 (1989) 513-522.

[57] M.A. Shubin, *On holomorphic families of subspaces of a Banach space,* Integral.Eq.Oper.Th. 2 (3) (1979), 407-420.

[58] J.G. Stampfli, *Hyponormal operator and spectral density,* Trans.Amer.Math.Soc. 117 (1965), 469-476.

[59] K. Tanahashi, *On* log-*hyponormal operators,* Integr.Equat.Oper.Theory. 34 (1999), 364-372.

[60] K. Tanahashi and A. Uchiyama, *A note on *-paranormal operators and related classes of operators*, Bull. Korean Math. Soc. 51 (2014), 357-371.

[61] A. Tajmouati, M. Amouch and M.R.F. Alhomidi Zakariya, *Spectral equality for* C_0-*semigroups,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 65 (3) (2016), 425-434.

[62] A. Tajmouati and H. Boua, *Spectral theory for integrated semigroups,* Inter Journal of Pure and Appl Math, 104 (4) (2016), 847-860.

[63] A. Tajmouati and H. Boua, *Spectral inclusion for* C_0*-semigroups,* Inter Journal of Math Anal, 40 (9) (2015), 1971-1980.

[64] A. Tajmouati, A. El Bakkali and M.B Mohamed Ahmed, *The distance from the holomorphically decomposable Fredholm spectrum*, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, Volume 38 (4), pp.137-144.

[65] A. Tajmouati, A. El Bakkali and M.B Mohamed Ahmed, *On some properties of* ϕ*-multipliers,* Italian Journal of Pure and Applied Mathematics. 37 (2016), 507-516.

[66] A. Tajmouati, A. El Bakkali and M.B Mohamed Ahmed, *Common local spectral properties of bounded linear operators* AT *and* SA *such that* $BSA = ATB$*,* International Journal of Mathematical Analysis. 9 (4) (2015),183-193.

[67] A. Tajmouati, A. El Bakkali and M.B Mohamed Ahmed, *On local spectral properties of* λ*-commuting operators,* International Journal of Pure and Applied Mathematics. 106 (2) (2016), 429-442.

[68] A. Tajmouati, A. El Bakkali and M.B Mohamed Ahmed, *Some new properties on λ-commuting operators,* Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, V.41, (2018).

[69] A. Tajmouati, A. El Bakkali and M.B. Mohamed Ahmed, *Spectral inclusions between α-times integrated semigroups and their generators,* To appear. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática.

[70] A. Tajmouati, A. El Bakkali, M.B. Mohamed Ahmed and H. Boua *Semi-Fredholm and semi-Browder spectrums for the α-times integrated semigroups,* Submitted. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society. Arxiv.org/submit/2146544 .

[71] A. Tajmouati, A. El Bakkali, M.B. Mohamed Ahmed and H. Boua *Quasi-Fredholm and Saphar spectrums for the α-times integrated semigroups,* Submitted, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. ArXiv :1802.04052

[72] A.E. Taylar and D.C. Lay, *Introduction to Functional Analysis,* 2nd ed. New York : John Wiley and Sons, 1980.

[73] J. Yang and H.-K. Du, *A note on commutativity up to a factor of bounded operators,* Proc.Amer.Math.Soc. 132 (6) (2004), 1713-1720.

[74] W. Zelazko, *Banach algebras,* Elsevier, Amsterdam. 1973.

[75] Q.P. Zeng and H.J. Zhong, *New results on common properties of the bounded linear operators RS and SR,* Acta Math.Sin. (Engl. Ser.) 29 (2013), 1871-1884.

[76] Q.P. Zeng and H.J. Zhong, *Common proppperties of bounded linear operators AC and BA,* J.Math.Anal.Appl. 414 (2014), 553-560.

[77] L. Zhang, T. Ohwada and M. Cho, *On λ-commuting operators,* Internatinal.Math.Forum. 6 (34) (2011), 1685-1690.

[78] S. Zhang, H. Zhong and Q.Zeng, *On left and right decomposably regular operators,* Banach.J.Math.Anal. 7 (1) (2013), 41-58.

[79] B.L. Wadhwa,*M-hyponormal operators,* Duke.Math.J. 41 (1974), 655-660.

[80] J.K. Wang, *Multipliers of commutative Banach algebras,* Pacific.J.Math. 11 (1961), 1131-1149.

[81] D.V. Widder, *The Inversion of the Laplace integral and the related moment problem,* Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 107-200.