

Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques de l'Ingénieur

N° d'ordre 09/2018

THESE DE DOCTORAT

Présentée par

Mr : ABDERRAHIM FRIH

Discipline : Physique

Spécialité : Génie électrique

Sujet de la thèse : Contribution par l'approche graphique : de la modélisation à l'analyse.

Formation Doctorale : Sciences de l'ingénieur Sciences Physiques, Mathématiques et Informatique.

Thèse présentée et soutenue le 24/03/2018 devant le jury composé de :

Nom Prénom	Titre	Etablissement	
Abdelmajid SAKA	PES	Ecole Nationale des Sciences Appliqués de Fès	Président
Mohammed SABBANE	PES	Faculté des Sciences de Meknès	Rapporteur
Hicham HIHI	PH	Ecole Nationale des Sciences Appliqués de Marrakech	Rapporteur
Hassan QIDAA	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mehraz de Fès	Rapporteur
Mohammed ALFIDI	PH	Ecole Nationale des Sciences Appliqués de Fès	Examineur
Zakaria CHALH	PH	Ecole Nationale des Sciences Appliqués de Fès	Directeurs de thèse
Mostafa MRABTI	PES		

Laboratoire d'accueil : Informatique et de physique interdisciplinaire.

Etablissement : Ecole Normale Supérieure de Fès

Centre d'Etudes Doctorales Sciences et Techniques de l'Ingénieur

Faculté des Sciences et Techniques - Fès ; Route d'Immouzer, B.P. 2202 Fès-, Maroc –

Tél. : (212) 5 35 60 80 14 ; Tél. : (212) 5 35 60 29 53 ; Fax : (212) 5 35 60 82 14 ; Site web : www.fst-usmba.ac.ma

*À mes parents,
à toute ma famille,
et à mes chère(s) ami(e)s.*

Résumé

Cette thèse a pour objectif l'étude des propriétés structurelles sur les modèles linéaires à paramètres variants dans le temps par l'approche bond graph. Mais aussi elle est consacrée à des applications réelles à base de "bond graph".

Pour atteindre ces objectifs, et grâce à cette approche, nous avons introduit une nouvelle règle graphique du calcul des éléments de la matrice de commandabilité et d'observabilité basée sur les gains et les longueurs des chemins causaux entrées-états/états-sorties. Ces matrices nous ont permis de donner les matrices de changement de base pour la transformation de la matrice d'état à la forme canonique. Cette forme est très utile pour la synthèse de commande des systèmes multivariables tel que le placement de pôles, découplage, zéros invariants, stabilité et rejet de perturbation...etc. Cette approche est très importante par rapport aux autres approches (temporelle, symbolique) car on peut calculer n'importe quel vecteur de ces matrices sans calculer les autres.

De plus, nous avons dédié une autre partie de cette thèse à des applications réelles basées sur la méthodologie bond graph. On propose d'abord la modélisation des modèles et la construction des observateurs d'ordre complet (proportionnel P et proportionnel intégral PI), pour les systèmes linéaires. Ensuite, nous avons étudié et modélisé les systèmes des éoliennes à une et à deux masses. La conception d'une commande par mode glissant pour le modèle à deux masses a été proposée, son utilisation permet de maximiser le rendement afin d'avoir une production d'énergie optimale.

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse a été effectué au sein du Laboratoire d'informatique et de physique interdisciplinaire (LIPI) au centre d'études doctorales en sciences et techniques de l'ingénieur de la Faculté des Sciences et Techniques de Fès, Université Sidi Mohammed Ben Abdellah (CEDSTI-FST-USMBA).

Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de Thèse, Monsieur Mostafa Mrabti, et mon co-directeur de Thèse, Monsieur Zakaria Chalh, Professeurs à l'École Nationale des Sciences Appliquées de Fès qui m'ont soutenu tout le long de cette thèse et qui n'ont jamais manqué de me conseiller et de m'orienter pendant ces quatre ans. Je les remercie aussi pour leur disponibilité malgré leurs nombreuses occupations professionnelles.

Je remercie Monsieur Abdelmajid Saka, Professeur à l'École Nationale des Sciences Appliquées de Fès pour la confiance qu'il m'a accordée en président du jury de ma thèse.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur Mohammed Sabbane, Professeur à Faculté des Sciences de Meknès, Monsieur Hicham Hihi, Professeur à l'École Nationale des Sciences Appliquées de Marrakech, et Monsieur Hassan Qjjidaa, Professeur à Faculté des Sciences Dhar El Mehraz de Fès, d'avoir acceptés de rapporter ce travail et m'ont fait l'honneur d'être membres du jury de soutenance.

Je remercie également Monsieur Mohammed Afidi, Professeur à l'École Nationale des Sciences Appliquées de Fès, pour avoir accepté d'examiner ce travail et m'est fait l'honneur d'être membre du jury de soutenance de ce mémoire.

Mes remerciements les plus profonds s'adressent également à ma mère, mon père, mes soeurs, mes frères, Mme Khadija qui ont toujours cru en moi, et tous les membres de ma famille. J'adresse enfin mes remerciements à tous mes amis, mes collègues et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des Matières

Résumé	iv
Remerciements	vi
Table des matières	x
Table des figures	xiii
Liste des publications	1
Introduction générale	1
1 Les bond graphs	5
1.1 Rappels sur la théorie bond graph	5
1.1.1 Bond graph	5
1.1.2 Définitions	6
1.2 Représentation d'état algébrique des systèmes linéaires	9
1.2.1 Système linéaire à paramètres invariants dans le temps (LTI)	9
1.2.2 Système linéaire à paramètres variant dans le temps (LTV)	10
1.2.2.1 La représentation d'état	10
1.2.2.2 La représentation de Rosenbrock	10
1.3 Les anneaux bond graphs non commutatifs	11
1.3.1 Anneaux et graphes	11
1.3.2 Graphes à coefficient dans un anneau - règle de Riegle	12
1.3.3 Anneaux bond graphs non commutatifs	15
1.4 Conclusion	15
2 Analyse structurelle des systèmes LTV	17
2.1 Commandabilité en état	17
2.1.1 Commandabilité par bond graph des systèmes LTI	18
2.1.1.1 Méthode mathématique	18

2.1.1.2	Méthode graphique	18
2.1.2	Commandabilité structurelle par l'approche ABG des systèmes LTV	20
2.2	Observabilité en état	22
2.2.1	Observabilité par bond graph des systèmes LTI	22
2.2.1.1	Méthode mathématique	22
2.2.1.2	Méthode graphique	23
2.2.2	Observabilité structurelle par l'approche ABG des systèmes LTV	25
2.3	Matrices de commandabilité et d'observabilité pour les systèmes LTV . .	27
2.3.1	Matrice de commandabilité	27
2.3.1.1	Approche mathématique	27
2.3.1.2	Approche graphique	29
2.3.1.3	Procédure de calcul de la matrice de commandabilité graphique	30
2.3.1.4	Exemple d'application	32
2.3.2	Matrice d'observabilité	37
2.3.2.1	Approche mathématique	37
2.3.2.2	Approche graphique	38
2.3.2.3	Exemple d'application	39
2.4	Conclusion	42
3	Approche bond graph pour la construction d'observateurs linéaires:	
	Application sur la dynamique de véhicule	45
3.1	Observateurs linéaires pour l'estimation d'état	45
3.1.1	Observateur d'ordre complet (OP)	46
3.1.2	Observateur proportionnel intégrale (OPI)	47
3.1.3	Détermination du gain d'observateur	47
3.1.3.1	Cas mono sortie ($m=1$)	48
a)	Calcul direct	48
b)	Formule de Bass et Gura	48
3.1.3.2	Méthode générale pour le cas multisorties ($m > 1$) . . .	51
3.2	Théorie des graphes: placement de pôles	53
3.3	Description du véhicule	53
3.3.1	Mouvements du véhicule	53
3.3.2	La caisse ou châssis	54
3.3.3	Les trains	55
3.3.4	L'essieu	56
3.3.5	Les suspensions	56

3.4	Modélisation de la dynamique d'une automobile	57
3.4.1	Modélisation vertical d'un quart du véhicule	57
3.4.2	Modèle vertical de demi-véhicule	59
3.4.3	Modèle complet du véhicule	61
3.5	Observateurs de Luenberger et proportionnel intégral	64
3.5.1	Procédure pour la construction de l'observateur de Luenberger	64
3.5.2	Procédure pour la construction de l'observateur PI	65
3.5.3	Applications	67
3.5.3.1	La ceinture de sécurité	67
	a) Modélisation par l'approche graphique	68
	b) Etude d'observateur proportionnel pour la ceinture de sécurité	69
	c) Simulation	72
3.5.3.2	Le modèle bicyclette	74
	a) Modélisation mathématique	74
	b) Modélisation graphique	77
	c) Etude des observateurs P et PI pour le modèle de la bicyclette	78
	d) Simulation	82
3.6	Conclusion	84
4	Modélisation des éoliennes par l'approche bond graph et la commande par mode glissant	87
4.1	Commande par modes glissants	87
4.1.1	Le choix de la surface de glissement	89
4.1.2	L'établissement des conditions d'existence	89
4.1.3	Synthèse de la loi de commande	90
4.1.4	Phénomène de réticence	91
4.2	Modélisation aérodynamique et mécanique de l'éolienne	91
4.2.1	Présentation des différents types d'éoliennes	91
	4.2.1.1 Turbines éoliennes à axe vertical (VAWT)	91
	4.2.1.2 Turbines éoliennes à axe horizontal (HAWT)	92
4.2.2	Principe de conversion de l'énergie cinétique du vent	93
	4.2.2.1 Puissance aérodynamique	93
	4.2.2.2 Coefficient de puissance aérodynamique	94
	4.2.2.3 Couple aérodynamique	95
4.3	Modèle bond graph de l'éolienne à une masse	95
4.3.1	Descriptif du modèle à une masse	95

4.3.2	Modèle bond graph de l'éolienne à une masse avec la génératrice synchrone à aimant permanent dans le repère (a,b,c)	96
4.3.3	Modèle bond graph de l'éolienne à une masse avec la génératrice synchrone à aimant permanent dans le repère (d,q)	99
4.4	Modèle bond graph de l'éolienne à deux masses	100
4.4.1	Descriptif du modèle à deux masses	100
4.4.2	Modèle bond graph de l'éolienne à deux masses	102
4.5	Objectifs de commande d'un système éolienne	104
4.6	Synthèse de la loi de commande	105
4.6.1	Problématique	106
4.6.2	Commande par modes glissants	106
4.7	Résultats de simulation	108
4.8	Conclusion	109
Conclusion et perspectives		112
Bibliographie		117
A Méthodologie Bond-Graph		127
A.1	Représentation des transferts de puissance	128
A.2	Variables mises en jeu	128
A.3	Éléments BGs	128
A.3.1	Les éléments passifs	129
A.3.2	Les éléments actifs : les sources	130
A.3.3	Les éléments de jonction	131
A.4	Procédure générale de construction de modèles BGs	132
A.5	Causalité	133
B Aérodynamique de l'éolienne		137
B.1	Puissance aérodynamique	137
B.2	Coefficients de puissance et de couple de l'éolienne	138

Liste des Figures

1.1	Réduction série et parallèle correspondant à l'addition et à la multiplication	11
1.2	Equivalence graphique de l'identité $A(1 - BA)B = (1 - AB)A$	11
1.3	Interprétation graphique de la distribution à gauche	11
1.4	Exemple de digraphe	14
2.1	Modèle bond graph en causalité intégrale.	19
2.2	Modèle BGD avec dualisation de la source d'entrée.	20
2.3	Modèle ABG en causalité intégrale.	21
2.4	Modèle ABGD.	22
2.5	Modèle bond graph en causalité intégrale.	24
2.6	MBG en causalité dérivée avec dualisation du détecteur de sortie.	25
2.7	Modèle ABG en causalité intégrale.	26
2.8	Modèle ABGD.	26
2.9	Modèle bond graph en causalité intégrale.	30
2.10	Modèle bond graph en causalité intégrale	32
2.11	Modèle bond graph en causalité intégrale	39
3.1	Diagramme de l'observateur de Luenberger	46
3.2	Diagramme de l'observateur PI	47
3.3	Mouvements de la caisse par rapport au sol et le châssis	55
3.4	Train avant	55
3.5	Barre anti-roulis	56
3.6	Suspension	56
3.7	Modèle vertical d'un quart de véhicule (Oudghiri, 2008)	57
3.8	Modèle bond graph vertical d'un quart du véhicule	58
3.9	Modèle vertical de demi-véhicule	59
3.10	Modèle bond graph vertical de demi-véhicule	60
3.11	Modèle vertical de véhicule	61

3.12	Modèle bond graph vertical de véhicule	63
3.13	Injection linéaire de la sortie dans l'observateur de Luenberger: Cas de l'élément I	65
3.14	Injection linéaire de la sortie dans l'observateur de Luenberger: Cas de l'élément C	65
3.15	Algorithme pour la construction et le calcul du gain d'observateur à partir de modèle bond graph	66
3.16	Injection linéaire de la sortie dans l'observateur PI: Cas de l'élément I	66
3.17	Injection linéaire de la sortie dans l'observateur PI: Cas de l'élément C	67
3.18	Véhicule crash test	68
3.19	Modèle bond graph du véhicule crash test	69
3.20	Modèle Bond Graph en causalité intégrale.	70
3.21	Modèle Bond Graph en causalité dérivée.	70
3.22	Modèle Bond Graph d'observateur "cash test".	71
3.23	Estimation de la vitesse de voiture	73
3.24	Estimation de la force dans le pare-chocs	73
3.25	Estimation de la force dans la ceinture de sécurité	74
3.26	Erreur de la viresse de voiture	74
3.27	Erreur de la force dans le pare-chocs	75
3.28	Erreur de la force dans la ceinture de sécurité	75
3.29	Modèle de bicyclette	76
3.30	Modèle bond graph de la bicyclette	78
3.31	Méthode Bond Graph de bicyclette en causalité intégrale.	79
3.32	Méthode Bond Graph de bicyclette en causalité dérivée.	79
3.33	Méthode Bond Graph d'observateur P "bicyclette".	80
3.34	Méthode Bond Graph d'observateur PI "bicyclette".	80
3.35	Chicane ISO: positionnement des couloirs	83
3.36	Angle de braquage	84
3.37	Erreurs de OP et OPI à 40 Km/h	85
3.38	Erreurs de OP et OPI à 90 Km/h	86
4.1	Turbines éoliennes HAWT: (a) en amont, (b) en aval	92
4.2	Vitesse spécifique du rotor	94
4.3	Coefficient de puissance en fonction de λ et β	95
4.4	Modèle de l'éolienne à une masse	96
4.5	Modèle bond graph de l'éolienne à une masse avec GSAP dans le repère (abc)	97

4.6	Modèle bond graph de l'éolienne à une masse avec GSAP dans le repère de Park (d,q)	99
4.7	Modèle de l'éolienne à deux masses	101
4.8	Modèle Bond Graph de l'éolienne à deux masses	103
4.9	Courbe de la puissance éolienne en fonction de la vitesse du vent	104
4.10	Vitesses du vent	109
4.11	Réponses de la sortie et vitesse optimale du rotor	110
4.12	Couple électromagnétique du générateur (T_{em})	110
4.13	Erreur de la commande	111
4.14	Surface de glissement	111
A.1	Représentation BG du transfert de puissance	128
A.2	Représentation de l'élément R	129
A.3	Représentation de l'élément C	130
A.4	Représentation de l'élément I	130
A.5	Représentation des éléments sources	131
A.6	Jonction 0	131
A.7	Jonction 1	131
A.8	Transformateur	132
A.9	Gyrateur	132
A.10	Deux situations de causalité	134
B.1	Colonne d'air incidente sur le rotor	137
B.2	Coefficient de puissance $C_p(\lambda, \beta)$	138
B.3	Coefficient de couple $C_q(\lambda, \beta)$	138

Liste des Tables

3.1	Equations des jonctions et des éléments	58
3.2	Equations des jonctions et des éléments	60
3.3	Les valeurs des paramètres du modèle	72
3.4	Liste des équations pour les éléments dynamiques, jonctions, transformateurs, et gyrateur	78
3.5	Les valeurs des paramètres du modèle bicyclette	83
4.1	Équations des jonctions, des éléments et des gyrateurs	98
4.2	Équations des jonctions, des éléments et de gyrateur	100
4.3	Liste des symboles	101
4.4	Équations des jonctions, des éléments et de transformateur	103
A.1	Classification des différentes variables BGs	129
A.2	Règles d'affectation de la causalité aux éléments BGs	134
A.3	Règles d'affectation de la causalité aux éléments BGs - suite	135

Liste des publications

Journaux internationaux indexés

Frih, A., Chalh, Z., and Mrabti, M. (2018). WIND TURBINE: BOND GRAPH MODELLING AND SLIDING MODE CONTROL. MECHATRONIC SYSTEMS AND CONTROL, 46(1), 8-14. DOI: 10.2316/Journal.201.2018.1.201-2803

Frih, A., Chalh, Z., and Mrabti, M. (2017). Controllability and observability of LTV systems-bond graph approach. Asian-European Journal of Mathematics, 1850038. <https://doi.org/10.1142/S1793557118500389>

Abderrahim, F., Zakaria, C., Mostafa, M., and Mohamed, O. (2016). Seat belt design by graphic approach. Journal of Theoretical and Applied Information Technology, 92(2), 208-214.

Chalh, Z., **Frih, A.**, Mrabti, M., and Alfid, M. (2015). Bond graph methodology for controllability of LTV systems. International Journal of Modelling, Identification and Control, 24(3), 257-265. <https://doi.org/10.1504/IJMIC.2015.072622>

Frih, A., Chalh, Z., and Mrabti, M. Design observers of a vehicle system : graphical approach » Vehicle System Dynamics, En révision, Journal of Circuits, Systems, and Computers (JCSC).

Conférences internationales avec comité de lecture et publication des actes

Frih, A., Chalh, Z., and Mrabti, M. (SSD'17). Modeling of a vehicle vertical dynamic model using Bond graph. 14th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices March 28 - 31, 2017 - Marrakech, Morocco, pp. 827-832, <https://doi.org/10.1109/SSD.2017.8166919>

Frih, A., Chalh, Z., Mrabti, M., Ouahi, M., and Alfidi, M. (2015). La conception d'observateur d'un système mécanique dans le domaine d'automobile par l'approche graphique. Xth International Conference on Integrated Design and Production, CPI 2015, December 2-4, 2015, Tangier-Morocco

Frih, A., Chalh, Z., Mrabti, M., and Alfidi, M. (2015). Modélisation par l'approche Bond Graph: Application et simulation sur le système photovoltaïque. Congrès International de Génie Industriel et Management des Systèmes (CIGIMS'15), 21-23 Mai, EST, Fès.

Frih, A., Chalh, Z., Mrabti, M., and Alfidi, M. (2015). Graphical Approach for the Analysis of LTV Systems. CESA 2015: 6th Conference on Computational Engineering in Systems Applications, March 24-26, Marrakech

Chalh, Z., Cha?k, A., Hih, H., and **Frih, A.** (2014). Approche graphique pour l'analyse des systèmes LTV. Colloque International sur le Monitoring des Systèmes Industriels, 25-26 Déc,ENSA, Marrakech

Conférence internationale avec comité de lecture et publication de l'acte

Frih, A., Chalh, Z., Mrabti, M., and Alfidi, M. (2016). La conception de ceintures de sécurité par l'approche graphique. Workshop du Printemps, LISA-WP'2016, 14 Avril 2016, Fès-Maroc.

Introduction générale

L'automatique est une discipline qui regroupe de nombreuses activités, comme la modélisation des systèmes dynamiques, l'analyse des modèles et la conception des lois de commande pour une variété de systèmes: électriques, mécaniques, hydrauliques, thermiques, etc. Les automaticiens utilisent des modèles mathématiques qui perdent rapidement la signification physique du système, malgré la flexibilité mathématique des systèmes. Ils cherchent généralement un moyen simple et rapide pour résoudre un problème de commande. Ce qui est important c'est la modélisation, parmi les langages pour répondre à ces critères, on trouve le langage bond graph qui permet de répondre aux besoins des personnes soit pour trouver ou pour exploiter ces modèles nécessaire quelque soit le domaine physique.

L'outil bond graph (ou graphe à liens ou graphe de liaisons), défini par (Paynter, 1961), formalisé par (Karnopp et Rosenberg, 1975) et (Breedveld, 1984), est une méthodologie graphique de la modélisation des systèmes physiques qui permet l'extraction d'un modèle mathématique, et qui se base sur les notions d'effort et de flux comme variables généralisées notées e et f respectivement entre les différentes composantes du système. La modélisation par l'approche bond graph des systèmes physiques ne nécessite pas l'écriture de lois générales de conservation de l'énergie. Elle repose essentiellement sur la caractérisation des phénomènes d'échanges de puissance au sein du système, et permet d'étudier les propriétés structurelles de système telles que la commandabilité, l'observabilité, etc.

Notre objectif dans la première partie est d'étudier les propriétés structurelles des systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps par une approche graphique, et d'étendre les techniques dites "Bond-graph" proposées pour les modèles LTV, puisque les techniques actuelles utilisées sur les bond graphs ne sont pas applicables sur les systèmes LTV. Sueur (Sueur et Dauphin-Tanguy, 1995) et Rahmani (Rahmani, 1993) ont proposé une méthode graphique basée sur cette méthodologie (Paynter, 1961) (Dauphin-Tanguy, 2000) pour calculer les différents éléments des matrices de commandabilité/obs-

ervabilité pour les systèmes linéaires à paramètres invariants dans le temps (LTI). Nous allons définir une méthode graphique basée sur les gains et les longueurs des chemins causaux entre les variables dynamiques et les différentes sources d'entrées/détecteurs. Pour étudier la commandabilité et l'observabilité de systèmes LTV. Les exemples étudiés dans la première partie de cette thèse sont des exemples théoriques.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse à des applications réelles à base de modélisation graphique, dite *bond graph*. Dans un premier temps, nous proposons l'approche *bond graph* pour la modélisation des modèles et la construction des observateurs d'ordre complet (proportionnel P et proportionnel intégral PI), pour les systèmes linéaires. Dans un second temps, nous proposons la modélisation graphique des éoliennes et nous présentons une commande par mode glissant pour le modèle à deux masses dont l'objectif est de maximiser et d'optimiser la production d'énergie.

Nous donnons également quelques détails sur chacun des quatre chapitres. L'ensemble des contributions et résultats obtenus au cours de cette formation doctorale sont présentés dans les trois derniers chapitres.

Dans le premier chapitre, on propose à la fois un rappel sur les définitions principales nécessaires pour lesquelles, on va lire et manipuler les systèmes par l'outil *bond graph*, aussi bien qu'un rappel sur l'analyse des propriétés structurelles d'un système. En outre, on introduit la représentation d'état algébrique pour les systèmes linéaires à paramètres invariants dans le temps (LTI) et variants dans le temps (LTV), comme on introduit quelques définitions sur les anneaux *bond graphs* non commutatifs.

Dans le deuxième chapitre, nous proposons une méthode graphique permettant d'étudier la commandabilité et l'observabilité des modèles *bond graph* très facile à utiliser et à calculer les différents éléments des matrices de la commandabilité et l'observabilité, basées sur le gain des longueurs des chemins causaux entre les variables d'entrée, d'état et de sortie.

Dans le troisième chapitre, Nous commençons par présenter les différents mouvements, les éléments principaux d'un véhicule et la notion d'estimation d'état en utilisant les observateurs de Luenberger et PI. Après, nous nous concentrons sur la modélisation d'un modèle du véhicule complet sous certaines hypothèses simplificatrices, ainsi que le modèle de la ceinture de sécurité et même pour le modèle bicyclette. Nous présentons la construction d'observateur P et PI, une fois les observateurs sont étudiés, les résultats

de simulation obtenus illustrent la robustesse de l'observateur PI contre les perturbations par rapport à l'observateur P.

Le quatrième chapitre porte, dans un premier temps sur la modélisation de deux éoliennes par approche graphique après un rappel sur la commande par mode glissant. Dans un second temps, nous proposons une loi de commande robuste qui a pour objectif de maximiser l'énergie et précisément dans la zone de fonctionnement II. Ensuite, La stabilité de notre commande en boucle fermée est démontrée théoriquement via le critère de Lyapunov. Les résultats obtenus montrent les bonnes performances en stabilité, malgré la présence de quelques incertitudes.

Finalement, nous résumons les différents points abordés tout au long de cette thèse et nous tentons de dégager quelques pistes ouvertes pour des travaux futurs.

Chapitre 1

Les bond graphs

La représentation intermédiaire entre le niveau mathématique et le niveau technologique, l'outil bond graph est un formalisme graphique de modélisation des systèmes physique. Né aux états-unis en 1960 (Paynter, 1961) il a motivé depuis de nombreux chercheurs. L'Europe réceptionne en particulier des spécialistes (Breedveld *et al.*, 1991). L'outil bond graph est aujourd'hui plus qu'un outil de modélisation. Il est devenu un outil puissant d'analyse, au service duquel émergent des méthodologies qui sont pleines de promesses (Sueur et Dauphin-Tanguy, 1991).

Dans ce chapitre, nous présentons l'outil bond graph de modélisation et d'analyse. La première partie de ce chapitre vise à rappeler les définitions principales nécessaires pour lire et manipuler un modèle bond graph. Nous rappelons également l'intérêt de ce formalisme pour l'analyse des propriétés structurelles d'un système dynamique, comme la représentation d'état algébrique pour les systèmes linéaires à paramètres invariants et variants dans le temps, aussi bien quelques définitions sur les anneaux bond graphs non commutatifs.

1.1 Rappels sur la théorie bond graph

1.1.1 Bond graph

La méthodologie Bond graph (ou "graphe à liens" ou "graphe de liaisons") est une représentation graphique d'un système dynamique physique (mécanique, électrique, hydraulique, pneumatique, etc.) qui représente les transferts des flux d'énergie ou des flux d'information dans le système. Les graphes de liaisons sont fondés sur le principe de la conservation de la puissance au sein d'un système étudié. Il se situe comme intermédiaire entre le système physique et les modèles mathématiques qui lui sont associés (matrice de transfert dans le cas linéaire, équation d'état ou système d'équation différentielle

d'ordre deux) (Dauphin-Tanguy, 2000).

Les axes principaux de cette méthodologie sont les suivants (Dauphin-Tanguy, 2000):

- C'est un langage de représentation des transferts de puissance au sein d'un système.
- Il est graphique.
- Il est fondé sur la notion d'analogie.
- Il fait apparaître explicitement les relations de cause à effet (causalité).

L'utilisation des bond graphs pour la modélisation des procédés est justifiée principalement par le fait que l'on peut affiner le modèle en ajoutant ou en supprimant des éléments bond graphs en fonction des hypothèses simplificatrices. Pour adapter le modèle, il suffit d'ajouter, par exemple, des éléments dissipatifs R pour les phénomènes de transfert thermique ou de résistance hydraulique, des éléments C pour la compressibilité des fluides, pour les capacités thermiques des parois et pour les stockages de masse et de volume et des éléments I pour toute apparition de phénomènes d'inertie (Dauphin-Tanguy, 2000).

1.1.2 Définitions

Dans cette partie, nous soulignons plusieurs définitions qui concerne la théorie bond graph, telle que la notion de chemin causal, Boucle causal, Cycle causal et le gain d'un chemin causal.

Définition 1. *Soient deux ensembles J_1 et J_2 composés des éléments suivants : $J_1 = C, I, R, Se, Sf$ et $J_2 = C, I, R, De, Df$. Un chemin causal entre un élément de l'ensemble J_1 et un élément de l'ensemble J_2 est une alternance de liens causaux (ou liens d'information) et d'éléments bond graph. L'affectation de la causalité sur ce chemin est telle qu'en parcourant ce chemin dans un sens:*

- *pour une jonction 0, une jonction 1 ou un élément $(M)TF$ situé sur le chemin causal, la même variable est imposée en traversant cet élément (l'effort en entrée impose l'effort en sortie ou le flux en entrée impose le flux en sortie),*
- *pour un élément I, C, R ou $(M)GY$ situé sur le chemin causal, la variable duale est imposée en traversant cet élément (l'effort en entrée impose le flux en sortie ou le flux en entrée impose l'effort en sortie),*

Les sources (Sf et Se) et les détecteurs (De, Df) ne peuvent se situer qu'à une extrémité d'un chemin causal.

La notion de chemin causal pour un modèle bond graph est adjacente à un modèle digraphe. Cependant, sur un modèle de type digraphe, un chemin ne peut pas être défini entre des éléments résistifs (R). Parce que, ce chemin ne peut pas contenir des éléments dynamiques en causalité dérivée.

Enfin, nous soulignons les définitions des chemins causaux différents et chemins causaux disjoints.

Définition 2. *Deux chemins causaux sont différents s'ils n'ont aucun élément dynamique en causalité intégrale en commun.*

Définition 3. *Deux chemins causaux sont disjoints s'ils n'ont ni lien causal, ni élément dynamique en causalité intégrale en commun.*

La définition 4 permet d'introduire le concept de boucle causale.

Définition 4. *Une boucle causale est un chemin causal fermé entre deux éléments de l'ensemble C, I, R . Ce chemin part de la sortie d'un composant et rejoint l'entrée de ce composant sans parcourir le même lien en suivant la même variable plus d'une fois.*

Remarque 1. *Une boucle causale ne traverse que des éléments de jonction ($0, 1, TF, GY$) et aucun composant passif (élément dynamique ou résistif) est appelé boucle de jonction.*

Définition 5. *Soit un chemin causal reliant un élément de l'ensemble $J_1 = \{C, I, R, Se, Sf\}$ à un élément de l'ensemble $J_2 = \{C, I, R, De, Df\}$ dans un bond graph en causalité intégrale préférentielle, soit N_i (respectivement N_d) le nombre des éléments dynamiques en causalité intégrale (respectivement en causalité dérivée) traversés par ce chemin. Si $N_d = 0$, la longueur de ce chemin vaut N_i , plus un s'il relie une source ou un élément dynamique à un élément dynamique, si $N_d \neq 0$, la longueur est dite longueur généralisée du chemin causal, cette longueur généralisée vaut $(N_i - N_d)$, plus un si le chemin relie une source ou un élément dynamique à un élément dynamique. Cette longueur généralisée peut donc éventuellement être négative.*

La notion de boucle causale a été introduite pour définir un chemin causal fermé entre deux éléments $X - Y$ de type (I, C, R) . Elle contient au maximum deux éléments dynamiques.

Définition 6. *Un cycle causal est un chemin causal fermé pouvant contenir plusieurs éléments dynamiques distincts.*

Définition 7. *Un cycle causal propre ne contient que des liens de puissance. Un cycle causal impropre contient au moins un lien d'information.*

Définition 8. *Un cycle causal est d'ordre k s'il contient k éléments dynamiques distincts (I,C) en causalité intégrale.*

Définition 9. *Le gain d'un cycle causal propre est égal au produit des gains des éléments dynamiques (I,C) et des gains des chemins causaux qui le composent.*

Définition 10. *Deux cycles causaux sont différents s'ils n'ont aucun élément dynamique en commun.*

Définition 11. *Une famille de cycles causaux est un ensemble de cycles causaux différents.*

Définition 12. *Une famille de cycles causaux est d'ordre k si elle contient k éléments dynamiques distincts (I,C) en causalité intégrale.*

Définition 13. *Le gain d'une famille de cycles causaux est égal au produit des gains des différents cycles causaux qui composent cette famille.*

Le gain d'un chemin causal est calculé à partir des gains des éléments qu'il traverse, comme l'exprime la définition suivante.

Définition 14. *Le gain G d'un chemin causal est calculé conformément à l'équation 1.1.*

$$G = (-1)^{n_0+n_1} \prod_j (m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j}) \prod_k (r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k}) \prod_g \quad (1.1)$$

- n_0 représente le nombre total de changements d'orientation des liens (les demi-flèches de sens opposé) aux jonctions 0 lorsqu'on suit la variable flux.
- n_1 représente le nombre total de changements d'orientation des liens (les demi-flèches de sens opposé) aux jonctions 1 lorsqu'on suit la variable effort.
- $m_j, \frac{1}{m_j}, r_k, \frac{1}{r_k}$ sont les gains des transformateurs TF et gyrateurs GY intervenant dans le chemin causal en fonction de la causalité qui leur est affectée.
- \prod_g représente le produit des gains des composants traversés par le chemin causal ou la boucle causale.

D'une manière similaire, le gain G_b d'une boucle causale est calculé selon l'équation 1.2. Les notations n_0 et n_1 sont identiques; \prod_{gb} représente le produit des gains des composants traversés par la boucle.

$$G_b = (-1)^{n_0+n_1} \prod_j (m_j^2 \text{ ou } \frac{1}{m_j^2}) \prod_k (r_k^2 \text{ ou } \frac{1}{r_k^2}) \prod_{gb} \quad (1.2)$$

Parcours causal:

Un parcours causal est un chemin causal sur lequel on peut traverser un ou plusieurs éléments bond graph plusieurs fois et par conséquent un parcours causal peut contenir des boucles causales.

longueur:

La notion de longueur d'un chemin causal est caractérisée par le nombre des éléments dynamiques traversés I et C en causalité intégrale. Cette notion est rappelée dans la définition 15. Cette définition est prolongée pour un anneau bond-graph.

Définition 15. (Rahmani et al., 1996) *Un chemin causal de longueur n_i entre deux variables des éléments d'un modèle bond-graph est égal au nombre des éléments dynamiques traversés.*

Définition 16. *Un parcours causal de longueur n_i entre deux variables de puissance d'un modèle anneau bond-graph est égal au nombre des éléments dynamiques traversés.*

1.2 Représentation d'état algébrique des systèmes linéaires

Dans cette section nous évoquons les représentations algébriques des systèmes LTI et LTV. Cette forme sera générale pour tous les systèmes linéaires.

En automatique les systèmes linéaires commandés sont représentés sous forme d'équations différentielles. L'étude de ce système nécessite l'utilisation des outils mathématiques.

1.2.1 Système linéaire à paramètres invariants dans le temps (LTI)

Soit un système LTI décrit par la représentation d'état (1.3), avec : $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$. Les éléments des matrices A , B et C appartiennent à un corps commutatif.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

On peut définir le système de Kalman (1.3) sur les espaces vectoriels de dimension finie. Ce système peut s'écrire sous la forme (1.4)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A - \delta I_n & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} C & D & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Les éléments des matrices $A - \delta I_n$, B , C et D appartiennent à un anneau commutatif, $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}][\partial; \sigma, \delta]$ où $\sigma = 0_{k[t]}$ et $\delta = \partial = \frac{d}{dt}$, avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

1.2.2 Système linéaire à paramètres variant dans le temps (LTV)

Un système LTV est représenté par l'équation d'état ou bien par la représentation matricielle de Rosenbrock

1.2.2.1 La représentation d'état

La représentation d'état des systèmes linéaires à paramètre variant dans le temps est décrite sous la forme (1.5)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

Les éléments des matrices $A(t) - \delta I_n$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ appartiennent à un anneau non commutatif, $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}][\partial; \sigma, \delta]$ où $\sigma = Id_{\mathbf{R}(t)}$ et $\delta = \partial = \frac{d}{dt}$, avec $x(t) \in k[\delta]^n$, $y(t) \in k[\delta]^p$ et $u(t) \in k[\delta]^m$.

1.2.2.2 La représentation de Rosenbrock

Le comportement entrée sortie d'un système est obtenu à partir de sa forme d'état et consiste à éliminer l'état x des équations (1.5). Les systèmes polynômiaux de la forme (1.6) sont obtenus.

$$P(\delta, t)y(t) - Q(\delta, t)u(t) = 0 \quad (1.6)$$

$P(\delta, t)$ et $Q(\delta, t)$ sont deux matrices d'opérateurs différentiels à coefficients variants et les lignes de $P(\delta, t)$ sont supposées linéairement différentiellement indépendantes afin d'obtenir l'individualité de la sortie y lorsque la commande u est donnée.

1.3 Les anneaux bond graphs non commutatifs

Nous rappelons un certain nombre de résultats de la théorie des graphes à coefficients non constants. Achir (Achir, 2005) a défini la notion d'anneau bond graph non commutatif, il a proposé une nouvelle règle de gain connue sous le nom de Règle de Riegle utilisable avec succès aux digraphes (Achir *et al.*, 2004) et aussi aux bond graphs (Achir *et al.*, 2005b).

1.3.1 Anneaux et graphes

L'algèbre est un outil très important pour la résolution des problèmes pratiques. Les graphes jouent le même rôle visuel dans la théorie combinatoire des anneaux. En effet, les opérations élémentaires " + " ou "." correspondent, dans le sens de la théorie des systèmes, à des réductions séries ou parallèles respectivement, (figure 1.1).

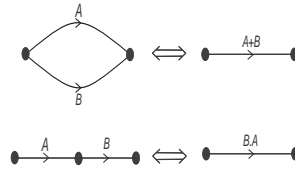


Figure 1.1 : Réduction série et parallèle correspondant à l'addition et à la multiplication

Une autre propriété connue est observée par une simple réduction par bouclage, figure 1.2. Ce dernier entraîne l'obtention d'une inverse de la forme $(1 - A)^{-1}$ qui correspond presque à l'inverse en algèbre.

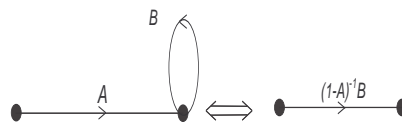


Figure 1.2 : Equivalence graphique de l'identité $A(1 - BA)B = (1 - AB)A$

Une autre identité est la distribution à gauche : $A(B + C) = AB + AC$ qui peut avoir l'interprétation graphique (figure 1.3).

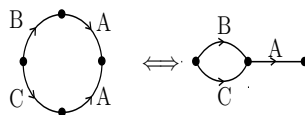


Figure 1.3 : Interprétation graphique de la distribution à gauche

Une autre identité $A(1 - BA)B = (1 - AB)A$ ayant pour interprétation graphique 1.2.

Ces opérations élémentaires sont très utiles dans la théorie des graphes. Ces notions font l'objet du paragraphe suivant.

1.3.2 Graphes à coefficient dans un anneau - règle de Riegle

Un anneau graphe G sur un anneau R est un R -module M représenté par un ensemble d'équations linéaires de la forme (1.7), où les a_{ij} , a_{i0} sont dans R et η_i , η_j et η_0 est dans M , (Pliam, 1989).

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j + a_{i0}\eta_0 \quad (1.7)$$

Étant donné un noeud source η_0 et un noeud puits η_n , il est possible sous certaines conditions d'obtenir une relation de la forme (1.8), connue sous le nom de la formule de gain.

$$\eta_n = T\eta_0 \quad (1.8)$$

A partir des travaux de Mason, (Mason, 1956) sur les graphes scalaires, i.e., $R \equiv \mathbb{R}$, une formule de gain a été développée pour les graphes sur anneaux ou corps commutatifs. Si l'anneau R est non commutatif, cette règle n'est plus valide. Une règle plus générale connue sous le nom de la règle de Riegle est alors utilisée. Ces deux règles sont rappelées ci-dessous.

1. Règle de Mason (Chen, 1976)

Pour un anneau graphe sur un corps ou un anneau commutatif, l'expression du gain est donnée par (1.9).

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k \in H} \Delta_k T_k \quad (1.9)$$

H est l'ensemble des chemins entre les noeuds η_0 et η_n , Δ est défini par :

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \dots,$$

où la somme est prise sur des cycles disjoints. Δ_k est défini comme Δ pour le sous-graphe ne touchant pas le $k^{\text{ème}}$ chemin. T_k est le produit des gains des arcs le long du $k^{\text{ème}}$ chemin, et les L_i sont les gains des cycles.

Cette règle a été déjà adaptée aux Bond Graphs dans (Borne *et al.*, 1992). Soient u et y les variables choisies respectivement comme entrée et comme sortie. La relation entrée-sortie s'exprime, en notant que s est l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$,

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{\sum_i T_i(s) D_i(s)}{D(s)} \quad (1.10)$$

avec :

$$D(s) = 1 - \sum_i B_i + \sum_i B_i B_j - \sum_i B_i B_j B_k - \dots$$

- $\sum_i B_i$: somme des gains des boucles causales entre deux éléments R, C ou I .
- $\sum_i B_i B_j, \sum_i B_i B_j B_k$: sommes des produits 2 à 2, 3 à 3, etc., des gains de boucles causales disjointes.
- $T_i(s)$: gain de la $i^{\text{ème}}$ chaîne d'action.
- $D_i(s)$: se calcule comme $D(s)$ quand on enlève du Bond Graph la $i^{\text{ème}}$ chaîne d'action.

2. Règle de Riegle

Cette règle est originellement introduite dans le cadre des graphes dont les coefficients sont des matrices à coefficients constants, (Riegle et Lin, 1972) puis étendue au cas des graphes à coefficients appartenant à un anneau ou un corps non commutatif, (Pliam, 1989).

Pour un anneau graphe sur un anneau ou un corps non commutatif, l'expression du gain est :

$$T = \sum_{k \in H} P_k \quad (1.11)$$

où :

- P_k est le gain (le produit) du $k^{\text{ème}}$ chemin entre les noeuds η_0 et η_n , et est donné par (1.12), où le produit est pris dans l'ordre des n arcs le long du $k^{\text{ème}}$ chemin.
- A_i^k est le $i^{\text{ème}}$ opérateur (gain) de l'arc i le long du $k^{\text{ème}}$ chemin.
- S_i^k est le gain propre du noeud suivant immédiatement l'arc $A_i^{(k)}$ avec les arcs restant le long du $k^{\text{ème}}$ chemin supprimé.

$$P_k = \prod_{i=n}^1 (1 - S_i^k)^{-1} A_i^k \quad (1.12)$$

Exemple 1. *Le graphe considéré de la figure 1.4 :*

En appliquant la règle de Mason, et en suposant que les différents opérateurs des arcs

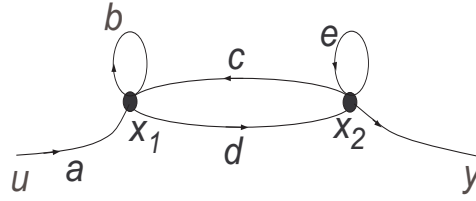


Figure 1.4 : Exemple de digraphe

appartient à un corps commutatif, nous obtenons

$$y = \frac{T_1 D_1}{D} u$$

Il existe 3 boucles de gains respectifs $B_1 = b$, $B_2 = e$ et $B_3 = cd$ avec B_1 et B_2 qui sont disjointes.

Avec $T_1 = ac$, $D_1 = 1$ et $D = 1 - e - b - cd - be$, on a alors:

$$y = \frac{ac}{1 - e - b - cd - be} u$$

Maintenant on applique la règle de Riegle, et en supposant que les différents opérateurs appartiennent à un anneau non commutatif, les deux gains des noeuds 1 et 2 sont:

$S_1 = (1 - e - cS_2^{-1}d)^{-1}$ et $S_2 = (1 - b)^{-1}$. Pour obtenir la relation de transfert entre u et y , nous partons du noeud puis y vers le noeud source u et nous appliquons la formule 1.12, il suit:

$$y = (1 - e - c(1 - b)^{-1}d)^{-1}c(1 - b)^{-1}au$$

Par conséquent, on suppose que toutes les inverses existent et que les opérateurs appartiennent à un anneau commutatif, après simplification on trouve:

$$y = \frac{ca}{1 - e - b - cd - be} u$$

Évidemment, on conclut que la règle de Riegle est une généralisation de la règle de Mason au cas non commutatif.

1.3.3 Anneaux bond graphs non commutatifs

Définition 17. *Un anneau BG sur un anneau ou un corps non commutatif k est un k -module Ω décrit par un ensemble d'équations linéaires de la forme (1.13).*

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j + \sum_{k=1}^m b_{i,k}u_k \quad 0 \leq i \leq n \quad (1.13)$$

Les $a_{i,j}$, $b_{i,k}$ sont dans k et x_i , x_j et u_k sont dans Ω . Ces dernières représentent les variables associées aux éléments dynamiques en causalité intégrale, les efforts et les flux associés aux sources.

Afin d'appliquer la règle de Riegle précédente sur des modèles Bond Graph, Achir (Achir, 2005) a défini les notions de gain d'un chemin causal et de gain propre d'un élément dynamique pour un anneau Bond Graph sur un anneau non commutatif.

Définition 18. *Dans un anneau bond graph défini sur un anneau ou un corps non commutatif, le gain d'un chemin causal reliant la variable d'arrivée x_j et la variable de départ x_i a pour expression:*

$$x_j = (-1)^{n_0+n_1} \prod_{i,j,e} [(m_i)^{k_i}, (r_j)^{l_j}, g_e] x_i \quad (1.14)$$

Les différents entiers n_0 , n_1 , k_i , l_j et gains m_i , r_j , g_e sont définis comme précédemment pour le cas classique. Ce qui change ici c'est l'ordre du produit qui tient compte de l'ordre dans lequel les éléments sont traversés.

Définition 19. *Le gain propre d'un élément dynamique en causalité intégrale d'un anneau bond graph défini sur un anneau ou un corps non commutatif est égale à la somme des gains des boucles causales qui le traversent.*

Dans le cas où le modèle anneau bond graph ne contient aucun élément variant dans le temps, l'anneau considéré est commutatif et le gain g_e de l'équation 1.14 devient de (Dauphin-Tanguy, 2000).

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons souligné les définitions principales nécessaires pour analyser un modèle bond graph. Nous avons également évoqué les résultats principaux permettant de caractériser graphiquement les propriétés structurelles d'un système à partir de son modèle bond graph. Nous avons aussi signalé algébriquement la représentation d'état des systèmes linéaires à paramètres invariants et variants dans le temps.

Enfin, nous avons mis l'accent sur un certain nombre de résultats de la théorie anneaux bond graphs non commutatifs.

Dans le chapitre suivant, nous présentons les résultats obtenus avec le formalisme bond graph afin de déterminer les matrices de la commandabilité et de l'observabilité du système LTV graphiquement à partir de son modèle bond graph.

Chapitre 2

Analyse structurelle des systèmes

LTV

Ce chapitre va nous conduire à étendre les techniques dites "Bond-graph" proposées pour les modèles linéaires à paramètres invariant dans le temps (LTI). Sueur (Sueur et Dauphin-Tanguy, 1995) et Rahmani (Rahmani, 1993) ont développé une méthode graphique basée sur la méthodologie bond graph (Paynter, 1961)-(Dauphin-Tanguy, 2000), pour le calcul des différents éléments des matrices de commandabilité et d'observabilité pour les systèmes LTI. Ce chapitre s'intéresse aux calculs des différents éléments de la matrice de commandabilité et d'observabilité qu'on peut utiliser pour déterminer plusieurs paramètres du système, tels que le placement de pôles, le découplage des entrées-sorties,..etc. Les propriétés de la commandabilité et d'observabilité sont liées à la matrice de commandabilité et d'observabilité proposée par Kalman pour les systèmes linéaires stationnaires, (Kalman, 1969) et Valasak et Olga (Valasek et Olga, 1995), (Ilchmann, 1985) pour les systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps (LTV).

Dans ce chapitre nous proposons une méthode graphique basée sur les gains et les longueurs des chemins causaux entre les éléments dynamiques du modèle Bond graph et les différentes sources d'entrées/détecteurs pour prendre en compte les termes qui s'annulent dans le cas des systèmes LTI, afin de déterminer les éléments des matrices de commandabilité et d'observabilité pour les systèmes (LTV).

2.1 Commandabilité en état

Afin d'effectuer le calcul d'une loi de commande d'un système, on s'intéresse, en général, aux propriétés de commandabilité, ces propriétés sont basées sur l'étude de matrice de commandabilité. Nous avons présenté les méthodes de calcul de cette matrice

avec (l'approche mathématique, l'approche graphique). L'objectif de cette section est de calculer la matrice de commandabilité des systèmes LTV. Avant de montrer les différentes démarches pour cet objectif, soulignons d'abord la méthode pour calculer la matrice dans les systèmes LTI.

2.1.1 Commandabilité par bond graph des systèmes LTI

2.1.1.1 Méthode mathématique

Critère de Commandabilité (Kalman) des systèmes LTI

C'est un critère qui permet de définir la commandabilité d'un système LTI avec l'information des matrices A et B .

Définition 20. Critère de Kalman

La paire (A, B) est commandable si, pendant la durée $T > 0$ et deux points arbitraires $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$, Il existe une fonction continue par morceaux $t \mapsto \bar{u}(t)$ de $[0, T]$ à \mathbb{R}^m , telle que la courbe intégrale.

$\bar{x}(t)$ généralisé par \bar{x} avec $\bar{x}(0) = x_0$, satisfait $\bar{x}(T) = x_T$

Autrement dit:

$$e^{AT}x_0 + \int_0^T \exp^{A(T-t)} B\bar{u}(t)dt = x_T \quad (2.1)$$

Un système LTI est représenté par l'équation dynamique d'état

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.2)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité C est de rang n .

$$\text{rang}(C) = \text{rang}([B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]) = n \quad (2.3)$$

Remarque 2. La commandabilité d'un système de matrices caractéristiques (A, B) sera appelée commandabilité de la paire (A, B) .

2.1.1.2 Méthode graphique

La propriété de commandabilité structurelle en état du modèle bond graph est de déterminer la valeur du rang structurel de la matrice $[A|B]$. Ce rang est calculé à partir de l'entier q , défini sur le modèle bond graph de la manière suivante.

Définition 21. (Sueur, 1990). q est le nombre d'éléments dynamiques restants en causalité intégrale lorsque:

causalement atteints par une source de commande.

- la deuxième condition de la commandabilité est vérifiée. Une dualisation de la source du modèle bond graph en causalité dérivée (figure 2.2), permet de déduire la valeur de q .

q égale le nombre des éléments restant en causalité intégrale. Alors, $q = 0$ avec $\text{rang} - \text{bg}[A|B] = n - q$.

Ce système est donc structurellement commandable en état par la source d'entrée S_f .

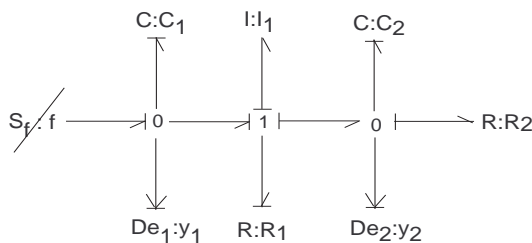


Figure 2.2 : Modèle BGD avec dualisation de la source d'entrée.

2.1.2 Commandabilité structurelle par l'approche ABG des systèmes LTV

Nous présentons dans cette section les notions de commandabilité pour un modèle anneau bond graph (Achir *et al.*, 2004), (Chalh *et al.*, 2006) basés sur la relation entre les éléments dynamiques qui restent en causalité intégrale.

Définition 22. (Chalh *et al.*, 2006) *Un système LTV $([A(t)], [B(t)])$ est structurellement commandable, s'il existe au moins une réalisation admissible $(A, B) \in ([A(t)], [B(t)])$ qui est commandable au sens numérique.*

Les matrices $[A(t)]$ et $[B(t)]$ sont les matrices structurelles de $A(t)$ et $B(t)$. Elles sont représentées, en remplaçant un nombre ou une fonction qui ne s'annule pas au cours du temps par un $$ ou par un \asymp et les termes nuls gardent la même valeur.*

La propriété de commandabilité structurelle en état du modèle anneau bond-graph est la détermination de la valeur du rang de la matrice $[A(t)|B(t)]$, celle-ci est trouvée en calculant le nombre d'éléments dynamiques conservant une causalité intégrale lorsqu'une causalité dérivée est choisie au modèle bond-graph et en dualisant les sources d'entrée si nécessaire pour éliminer les causalités intégrales restantes.

Propriété 2. (Chalh et al., 2006) Soit la matrice structurelle $[A(t)|B(t)]$, dont le rang anneau bond-graph est noté $abg - \text{rang}[A(t)|B(t)]$. Le $abg - \text{rang}[A(t)|B(t)]$ vérifie l'équation (2.5), où n est l'ordre du modèle anneau bond-graph et q est le nombre d'éléments qui restent en causalité intégrale lorsque la causalité dérivée est choisie, et toutes les dualisations des sources de commande ont été tentées pour éliminer les éléments en causalité intégrale restants.

$$abg - \text{rang}[A(t)|B(t)] = n - q \quad (2.5)$$

Propriété 3. (Chalh et al., 2006) Un modèle anneau bond graph est structurellement commandable en état si et seulement si :

étape 1: chaque élément dynamique I et C en causalité intégrale du modèle anneau bond graph est causalement lié à au moins une source de commande S_e ou S_f ;

étape 2: Tous les éléments dynamiques I et C admettent une causalité dérivée sur le modèle bond graph (BGD). Si les éléments dynamiques I et C restent en causalité intégrale, la dualisation des sources de commande S_e ou S_f doit permettre de les mettre en causalité dérivée. c-à-d le rang de la matrice $[A(t)|B(t)]$ égal à n .

$$abg - \text{rang}[A(t)|B(t)] = n$$

Exemple 3. Considérons le modèle anneau bond-graph de la figure 2.3 en causalité intégrale .

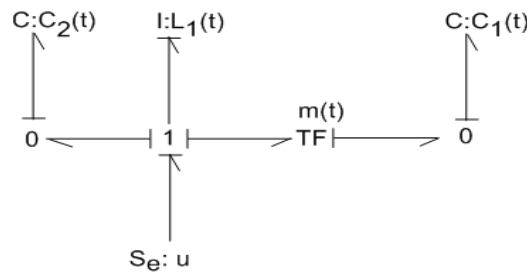


Figure 2.3 : Modèle ABG en causalité intégrale.

Etape 1 : vérification de la condition d'atteignabilité

Il existe un chemin causal entre chaque élément dynamique et la source de commande S_e .

Etape 2 : rang- BG $[A(t)|B(t)]$

Sur le modèle ABGD (figure 2.4), l'élément $C : C_1(t)$ reste en causalité intégrale et la source d'entrée ne peut pas être dualisée. D'après les outils classiques donnés (Sueur, 1990) le système n'est pas commandable. par contre la matrice est de rang plein.

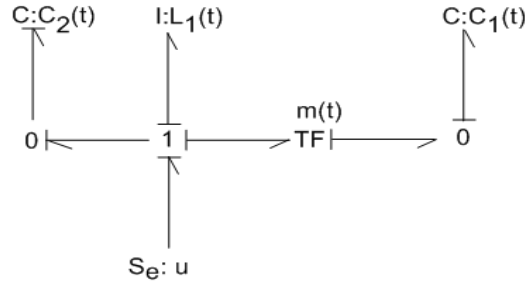


Figure 2.4 : Modèle ABGD.

$$C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{m^2 \cdot C_1 \cdot L_1} - \frac{1}{L_1 \cdot C_2} \\ 0 & \frac{1}{m \cdot L_1} & -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m \cdot L_1} \right) \\ 0 & \frac{1}{L_1} & -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_1} \right) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Remarque 3. tous les éléments dynamiques varient en fonction du temps.

On peut conclure que les conditions de la propriété 3 sont des conditions suffisantes mais pas nécessaires pour que le système LTV soit structurellement commandable.

2.2 Observabilité en état

Dans cette section, nous montrons comment analyser la propriété d'observabilité en utilisant le principe de dualité. Un rappel est proposé pour les modèles LTI.

2.2.1 Observabilité par bond graph des systèmes LTI

2.2.1.1 Méthode mathématique

Critère d'observabilité (Kalman) des systèmes LTI (Kalman, 1969)

La notion d'observabilité fait intervenir la matrice dynamique A et la matrice de sortie C .

Un système LTI représenté par l'équation dynamique d'état, et de mesure

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

où $A \in R^{n \times n}$, $C \in R^{r \times n}$ est observable si et seulement si la matrice d'observabilité, O est de rang n :

$$\text{rang}(O) = \text{rang} \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ CA \\ \dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (2.8)$$

2.2.1.2 Méthode graphique

La propriété d'observabilité structurelle en état du modèle bond graph est de déterminer la valeur du rang structurel de la matrice $[A \mid C]^T$.

Propriété 4. (Sueur, 1990) *Un modèle bond graph est structurellement observable en état si et seulement si les conditions suivantes sont respectées:*

- *sur le modèle bond graph BGI, il existe un chemin causal entre tous les éléments dynamiques I et C en causalité intégrale et un détecteur D_e ou D_f .*
- *tous les éléments dynamiques I et C admettent une causalité dérivée sur le modèle bond graph BGD. Si les éléments dynamiques I ou C restent en causalité intégrale, la dualisation de détecteur D_e ou D_f doit permettre de les mettre en causalité dérivée.*

Remarque 4. *Si tous les élément I et C admettent une causalité dérivée, il suffit d'un détecteur pour que le modèle soit observable, et ce détecteur peut être placé n'importe où.*

Le rang structurel de la matrice $\begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix}$ est donc calculé conformément à la propriété suivante.

Propriété 5. (Sueur, 1990). *Considérons la matrice $\begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix}$ dont le rang bond-graph*

est noté $\text{bg-rang} \begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix}$. $\text{bg-rang} \begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix}$ vérifie l'équation (2.9).

$$\text{bg-rang} \begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix} = n - q_t \quad (2.9)$$

q_t est le nombre d'éléments dynamiques conservant une causalité intégrale lorsque:

- la causalité dérivée est imposée au modèle bond-graph.
- toutes les dualisations des détecteurs ont été tentées pour éliminer les causalités intégrales restantes.

A partir des travaux réalisés par (Lin, 1974), ce résultat a permis de mettre en évidence une condition nécessaire et suffisante d'observabilité structurelle des modèles bond-graph. Cette condition est rappelée par le théorème suivant:

Théorème 2. (Sueur, 1990) *Un modèle bond-graph est structurellement observable si et seulement si :*

- Chaque élément dynamique en causalité intégrale du modèle bond-graph est causalement lié, au moins à un détecteur.
- $bg - \text{rang} \begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix} = n.$

Exemple 4. *Considérons le modèle bond-graph de la figure 2.5 où la causalité intégrale a été imposée.*

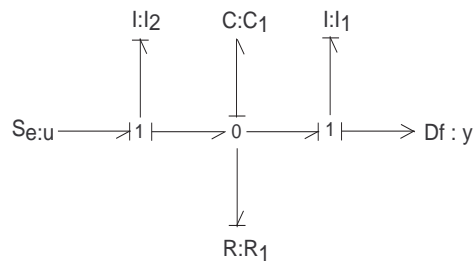


Figure 2.5 : Modèle bond graph en causalité intégrale.

Tous les éléments dynamiques sont causalement connectés au détecteur de sortie, alors la première condition de l'observabilité est vérifiée. Pour que le système soit observable, on doit vérifier la deuxième condition.

Une dualisation du détecteur du modèle bond graph en causalité dérivée de la figure 2.6 nous permet de déduire la valeur de q_t qui est égale au nombre d'éléments en causalité intégrale.

Ce système est structurellement observable en état avec le détecteur.

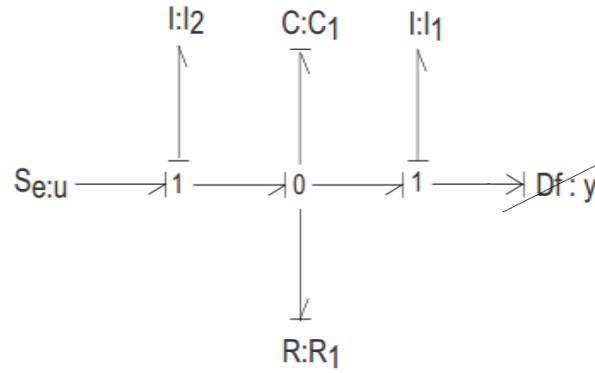


Figure 2.6 : MBG en causalité dérivée avec dualisation du détecteur de sortie.

2.2.2 Observabilité structurelle par l'approche ABG des systèmes LTV

Un système LTV $([A(t), C(t)])$ est structurellement observable, si le rang de $\begin{bmatrix} C(t) \\ A(t) \end{bmatrix}$ est plein.

Les matrices $[A(t)]$ et $[C(t)]$ sont les matrices structurelles de $A(t)$ et $C(t)$. Elles sont représentées, en remplaçant un nombre ou une fonction qui ne s'annule pas au cours du temps par un $*$ ou par un \asymp et les termes nuls gardent la même valeur.

La propriété d'observabilité structurelle en état du modèle anneau bond-graph est de déterminer la valeur du rang de la matrice $\begin{bmatrix} A(t) \\ C(t) \end{bmatrix}$ qui est trouvée en calculant le nombre d'éléments dynamiques conservant une causalité intégrale lorsqu'une causalité dérivée est choisie au modèle anneau bond-graph et en dualisant les détecteurs si nécessaire pour éliminer les causalités intégrales restantes.

Propriété 6. (Chalh et al., 2006) Soit la matrice structurelle $\begin{bmatrix} C(t) \\ A(t) \end{bmatrix}$, dont le rang anneau bond-graph est noté $abg\text{-rang} \begin{bmatrix} C(t) \\ A(t) \end{bmatrix}$. Le $abg\text{-rang} \begin{bmatrix} C(t) \\ A(t) \end{bmatrix}$ vérifie l'équation (2.10), où n est l'ordre du modèle anneau bond-graph et q est le nombre d'éléments qui restent en causalité intégrale lorsque la causalité dérivée est choisie, et toutes les dualisations des détecteurs ont été tentées pour éliminer les éléments en causalité intégrale restants.

$$abg\text{-rang} \begin{bmatrix} C(t) \\ A(t) \end{bmatrix} = n - q \quad (2.10)$$

Propriété 7. (Chalh et al., 2006) Un modèle anneau bond graph est structurellement observable en état si les deux conditions suivantes sont respectées:

- sur le modèle ABGI, il existe un chemin causal entre les éléments dynamiques I et C en causalité intégrale et un détecteur D_e ou D_f ;
- le rang de la matrice $\begin{bmatrix} C(t) \\ A(t) \end{bmatrix}$ égal à n .

Exemple 5. Considérons le modèle anneau bond graph de la figure 2.7 où la causalité intégrale est imposée.

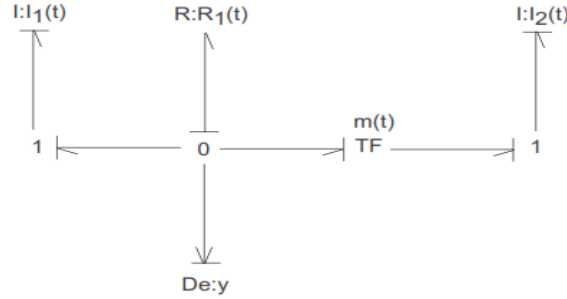


Figure 2.7 : Modèle ABG en causalité intégrale.

Toutes les variables sont causalement connectées à un détecteur de sortie, alors la première condition de l'observabilité est vérifiée. Pour que le système soit observable, on doit vérifier la deuxième condition de l'observabilité. La dualisation de la sortie ne permet pas de diminuer le nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale (figure 2.8) mais permet de déduire la valeur de q qui est égale au nombre d'éléments restant en causalité intégrale. Ici l'élément $I : I_1(t)$ conserve la causalité intégrale et le détecteur ne peut pas être dualisé. La condition suffisante n'est pas vérifiée.

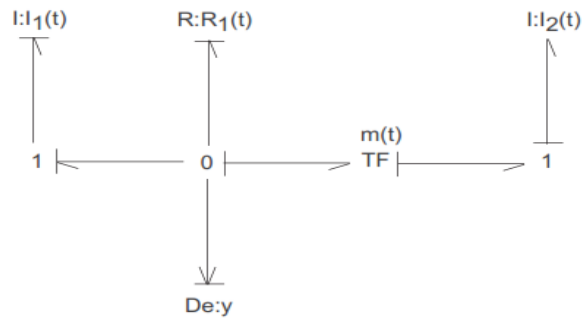


Figure 2.8 : Modèle ABGD.

Le calcul de la matrice d'observabilité (2.11) montre que le système est observable. On conclut que les conditions de la propriété 7 sont des conditions suffisantes mais pas nécessaires pour que le système LTV soit structurellement observable.

$$\mathcal{O}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-R_1}{I_1} & \frac{R_1^2}{I_1^2} + \frac{R_1}{I_1 \cdot I_2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{-R_1}{I_1} \right) \\ \frac{-R_1}{I_1} & \frac{R_1}{I_1 \cdot I_2} + \frac{R_1^2}{I_2^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{-R_1}{I_2} \right) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

2.3 Matrices de commandabilité et d'observabilité pour les systèmes LTV

Le calcul formel des matrices de commandabilité et d'observabilité se confirme long et fastidieux à cause de la présence de l'opérateur δ par l'approche symbolique (Williams, March 1991), (Achir *et al.*, 2005), (Andaloussi *et al.*, 2006). Cependant, l'approche temporelle exige le calcul de nombreuses dérivées. Or, les règles classiques de calcul à partir de la représentation graphique (digraphe ou bond graph) ne sont plus applicables. Pour cela il faut, d'une part, prendre en compte l'opérateur δ dans le calcul, qui s'interprète comme un coefficient supplémentaire dans l'expression des gains, d'autre part, il faut aussi tenir compte de la non commutativité entre les opérations. Pour résoudre ce problème, (Chalh *et al.*, 2006), (Chalh, 2008) a proposé une méthode en ajoutant un élément de calcul " $T = \frac{d}{dt}$ " en pointillé dans l'anneau bond graph pour introduire des nouveaux chemin causaux dans un modèle. Cette méthode a permis de trouver graphiquement les termes qui sont contenu de l'association de la dérivé dans les matrices de commandabilité et d'observabilité. L'ajout d'un élément de calcul virtuel pose un problème au niveau de la structure d'un modèle bond graph. Pour cela, nous avons introduit une nouvelle méthode de calcul en se basant sur le gain et la longueur d'un chemin causal dans un modèle bond graph.

2.3.1 Matrice de commandabilité

En premier temps nous présentons une approche mathématique pour déterminer la matrice de commandabilité, en deuxième temps nous avons introduit une nouvelle méthode graphique de calcul des gains de la matrice de commandabilité.

2.3.1.1 Approche mathématique

Définition 23. (Valasek et Olga, 1995) *La matrice de commandabilité d'un système LTV peut s'écrire sous la forme (2.12).*

$$\mathcal{C}(t) = [J_A^0(B(t)), J_A^1(B(t)), \dots, J_A^{n-1}(B(t))] \quad (2.12)$$

J est un opérateur matriciel défini comme suit:

$$J_A^0(B(t)) = B(t), \quad J_A^1(B(t)) = A(t) \cdot B(t) - \frac{d}{dt} B(t)$$

$$J_A^k(B(t)) = J_A^1(J_A^{k-1}(B(t)))$$

La matrice de l'équation (2.12) est la forme générale de la matrice de commandabilité des systèmes linéaires (LTI et LTV).

Exemple 6. On considère le système linéaire à paramètres variant dans le temps suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x \end{cases} \quad (2.13)$$

Avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1(t)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1(t)} \\ \frac{-1}{I_1(t)} & \frac{-1}{I_2(t)} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$J_A^0(B(t)) = B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_A^1(B(t)) = A(t).B(t) - \dot{B}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1(t)} \\ \frac{1}{C_1(t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_A^2(B(t)) = J_A^1(J_A^1(B(t))) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{C_1(t)}(\frac{1}{I_1(t)} + \frac{1}{I_2(t)}) \end{pmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{-1}{C_1(t)} \\ \frac{-1}{C_1(t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_A^2(B(t)) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(\frac{-1}{C_1(t)}) \\ \frac{d}{dt}(\frac{-1}{C_1(t)}) \\ \frac{-1}{C_1(t)}(\frac{1}{I_1(t)} + \frac{1}{I_2(t)}) \end{pmatrix}$$

La matrice de commandabilité de ce système est donnée

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C_1(t)} & \frac{d}{dt}(\frac{-1}{C_1(t)}) \\ 0 & \frac{1}{C_1(t)} & \frac{d}{dt}(\frac{-1}{C_1(t)}) \\ 1 & 0 & \frac{-1}{C_1(t)}(\frac{1}{I_1(t)} + \frac{1}{I_2(t)}) \end{pmatrix}$$

Remarque 5. Si les éléments de ce modèle ne dépendent pas du temps c'est à dire pour un système LTI on obtient la matrice de commandabilité suivante:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C_1} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{C_1 I_1} - \frac{1}{C_1 I_2} \end{pmatrix}$$

On remarque que dans les deux cas, la matrice de commandabilité n'est pas de rang plein.

2.3.1.2 Approche graphique

Notre objectif dans cette partie est de proposer une méthode graphique basée sur les gains et les longueurs des chemins causaux d'un modèle bond graph pour calculer les éléments de la matrice de commandabilité.

Hypothèse 1. (Frih et al., 2015a), (Chalh et al., 2015) *L'expression de gain d'un élément dynamique en causalité intégrale I ou C, situé sur un chemin causal entrée-variable d'état est la somme de gain temporel et des gains de toutes les boucles causales qui traversent l'élément considéré.*

Définition 24. (Frih et al., 2015a), (Chalh et al., 2015) *L'expression de chemin causal de longueur h entre la variable de commande et la variable d'état d'un modèle bond graph s'exprime par la relation suivante:*

$$T_{u_i x_j}^{(h)} = \sum_{(k \in K)} P_{(k)}^{(h)} = \sum E_{ij} + \sum A_{ij} \quad (2.14)$$

où les coefficients sont définis par:

- E_i : Le gain d'un chemin causal direct de longueur h entre l'entrée u_i et l'élément dynamique x_j .

$$E_{ij} = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i)^{k_i} \prod_j (r_j)^{l_j} \prod_e g_e \quad (2.15)$$

- A_i : Le gain du chemin causal de longueur h entre l'entrée u_i et l'élément dynamique x_j qui contient une boucle causale au minimum (le gain de la boucle est égale $\frac{d}{dt}$).

Méthode de calcul de A_{ij}

Si le chemin causal entre la source d'entrée et l'élément dynamique $EL1$ contient une boucle de type LRL ou CRC, nous avons les possibilités suivantes:

- La boucle à la fin du chemin causal. Le gain du chemin est égal à la dérivée du chemin causal entre la source d'entrée et la boucle.

Exemple 7. $Sf : f \rightarrow C_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow \overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)}$

$$A_{ij} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_2(t) \cdot C_1(t)} \right) \text{ avec } EL1 = I_1(t).$$

- S'il existe un élément réssistif après la boucle. Le gain de ce chemin est égal au produit du chemin causal entre la boucle et l'élément dynamique $EL1$, et la dérivée du gain du chemin causal entre la source de commande et la boucle.

Exemple 8. $Sf : f \rightarrow I_1(t) \rightarrow \overbrace{C_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_1(t)} \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)$

$$A_{ij} = \frac{R_1(t)}{C_1(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1(t)} \right) \text{ avec } EL1 = I_2(t).$$

Remarque 6. Si le 1^{ère} élément entre la boucle et EL1 est un élément dynamique, le gain de ce chemin causal (entre la source d'entrée et EL1) est composé par A_{ij}^1 A_{ij}^2 .

A_{ij}^1 : se calcule de manière similaire (cas possible 2).

A_{ij}^2 : est la dérivée du gain de chemin causal entre la source de commande et la boucle, on prend en compte l'élément dynamique de départ de la boucle.

Exemple 9. $Sf : f \rightarrow I_1(t) \rightarrow C_1(t) \rightarrow \overbrace{I_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)} \rightarrow C_2(t)$

$$A_{ij} = \frac{1}{I_2(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1(t) \cdot C_1(t)} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1(t) \cdot I_2(t) \cdot C_1(t)} \right) \text{ avec } EL1 = C_2(t).$$

- $k \in \mathbb{k}$: le nombre des chemins causaux existents de longueur h entre u_i et x_j .

2.3.1.3 Procédure de calcul de la matrice de commandabilité graphique

Nous présentons de manière générale le calcul des gains de la matrice de commandabilité. Soit le modèle bond graph de la figure 2.9.

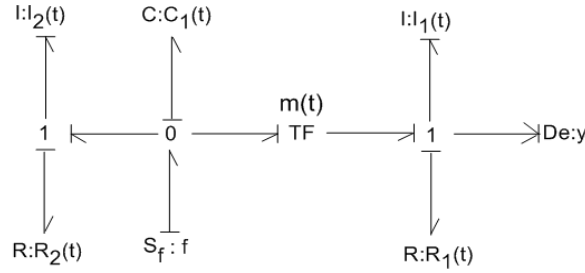


Figure 2.9 : Modèle bond graph en causalité intégrale.

les matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont déterminées graphiquement:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{R_1(t)}{I_1(t)} & 0 & \frac{1}{m(t) \cdot C_1(t)} \\ 0 & -\frac{R_2(t)}{I_2(t)} & \frac{1}{C_1(t)} \\ -\frac{1}{m(t) \cdot I_1(t)} & -\frac{1}{I_2(t)} & 0 \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de commandabilité par la méthode de valasek (Valasek et Olga, 1995) est:

$$C = [J_A^0(B(t)), J_A^1(B(t)), J_A^2(B(t))]$$

Nous avons un système d'ordre 3 donc les termes de la matrice de commandabilité sont $J_A^0(B(t))$, $J_A^1(B(t))$ et $J_A^2(B(t))$.

★ $J_A^0(B(t))$ est la matrice de commande.

★ $J_A^1(B(t))$ contient la somme des gains de tous les chemins causaux de longueur 1 de l'entrée $Sf : f$ vers les éléments dynamiques $I_1(t)$, $I_2(t)$ et $C_1(t)$.

- Pour l'élément dynamique $I_1(t)$ (1^{ère} composante de la matrice $J_A^1(B(t))$).
Nous avons un seul chemin causal de longueur 1 liant l'entrée $Sf : f$ à l'élément $I_1(t)$. Ce chemin est:

$$Sf : f \rightarrow C_1(t) \rightarrow m(t) \rightarrow I_1(t)$$

D'après la définition 24, nous avons $P_{(1)}^{(1)} = E_{1,1}$. Le gain direct est $E_{1,1} = +\frac{1}{m(t).C_1(t)}$. D'où $P_{(1)}^{(1)} = \frac{1}{m(t).C_1(t)}$

- Pour l'élément dynamique $I_2(t)$ (2^{ème} composante de la matrice $J_A^1(B(t))$).
Nous avons un seul chemin causal de longueur 1 liant l'entrée $Sf : f$ à l'élément $I_2(t)$. Ce chemin est:

$$Sf : f \rightarrow C_1(t) \rightarrow I_2(t)$$

Nous avons $P_{(1)}^{(1)} = E_{1,1}$. Le gain direct est $E_{1,1} = +\frac{1}{C_1(t)}$. D'où $P_{(1)}^{(1)} = \frac{1}{C_1(t)}$

- Pour l'élément dynamique $C_1(t)$ (3^{ème} composante de la matrice $J_A^1(B(t))$).
Nous avons aucun chemin causal de longueur 1 liant l'entrée $Sf : f$ à l'élément $C_1(t)$.

★ $J_A^2(B(t))$ contient la somme des gains de tous les chemins causaux de longueur 2 de l'entrée $Sf : f$ vers les éléments dynamiques $I_1(t)$, $I_2(t)$ et $C_1(t)$.

- Pour l'élément dynamique $I_1(t)$ (1^{ère} composante de la matrice $J_A^2(B(t))$).
Nous avons un seul chemin causal de longueur 2 liant l'entrée $Sf : f$ à l'élément $I_1(t)$. Ce chemin est:

$$Sf : f \rightarrow C_1(t) \rightarrow m(t) \rightarrow \overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)}$$

Nous avons $P_{(1)}^{(2)} = (E_{1,1} + A_{1,1})$. Le gain direct est $E_{1,1} = -\frac{R_1}{m(t).C_1(t).I_1(t)}$

Ce chemin passe par une boucle causal: $\overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)} \equiv \frac{d}{dt}$.

Donc nous retranchons l'opérateur $\frac{d}{dt}$, tel que $A_{1,1} = \frac{d}{dt}(\frac{-1}{m(t).C_1(t)})$. D'où $P_{(1)}^{(2)} = -\frac{R_1}{m(t).C_1(t).I_1(t)} + \frac{d}{dt}(\frac{-1}{m(t).C_1(t)})$

- Pour l'élément dynamique $I_2(t)$ (2^{ème} composante de la matrice $J_A^2(B(t))$).
Nous avons un seul chemin causal de longueur 2 liant l'entrée $Sf : f$ à l'élément $I_2(t)$. Ce chemin est:

$$Sf : f \rightarrow C_1(t) \rightarrow \overbrace{I_2(t) \rightarrow R_2(t) \rightarrow I_2(t)}$$

Nous avons $P_{(1)}^{(2)} = (E_{1,1} + A_{1,1})$. Le gain direct est $E_{1,1} = -\frac{R_2}{C_1(t).I_2(t)}$

Ce chemin passe par une boucle causal: $\overbrace{I_2(t) \rightarrow R_2(t) \rightarrow I_2(t)} \equiv \frac{d}{dt}$.

Donc nous retranchons l'opérateur $\frac{d}{dt}$, tel que $A_{1,1} = \frac{d}{dt}(\frac{-1}{C_1(t)})$. D'où $P_{(1)}^{(2)} = -\frac{R_2}{C_1(t).I_2(t)} + \frac{d}{dt}(\frac{-1}{C_1(t)})$.

- Pour l'élément dynamique $C_1(t)$ (3^{ème} composante de la matrice $J_A^2(B(t))$).

Nous avons deux chemins causaux de longueur 2 liant l'entrée $Sf : f$ à l'élément $C_1(t)$. ces chemins: sont

$$Sf : f \rightarrow C_1(t) \rightarrow m(t) \rightarrow I_1(t) \rightarrow m(t) \rightarrow C_1(t)$$

$$Sf : f \rightarrow C_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_1(t)$$

Nous avons

$$\sum_{k=2} P_{(k)}^{(2)} = \sum E_{1,j} \text{ avec } k = 2 \text{ et } j = 2$$

Les gains directs sont $E_{1,1} = \frac{-1}{m^2(t).C_1(t).I_1(t)}$, $E_{1,2} = \frac{-1}{C_1(t).I_2(t)}$. D'où

$$\sum_{k=2} P_{(k)}^{(2)} = \frac{-1}{m^2(t).C_1(t).I_1(t)} - \frac{1}{C_1(t).I_2(t)}$$

2.3.1.4 Exemple d'application

Un exemple complet de calcul de matrice de commandabilité est proposé. Soit le modèle bond graph représenté par la figure 2.10.

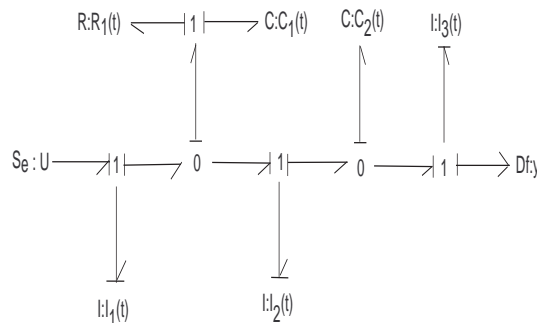


Figure 2.10 : Modèle bond graph en causalité intégrale

Soit $C = [J_A^0(B(t)), J_A^1(B(t)), J_A^2(B(t)), J_A^3(B(t)), J_A^4(B(t))]$ la matrice de commandabilité.

1. Calcul de la matrice $J_A^0(B(t))$, il faut trouver tous les parcours de longueur 0 entre la source d'entrée et les variables dynamiques.

Un seul parcours existe entre $Se : u$ et $I_1(t)$. D'où $J_A^0(B(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$

2. Calcul de la matrice $J_A^1(B(t))$: Il faut chercher tous les chemins de longueur 1 liant la source d'entrée $Se : u$ et les variables dynamiques. Ces parcours et gains associés sont:

- $(Se : u, I_1(t))$: Nous avons un seul chemin causal, ce chemin est $Se : u \rightarrow \overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)}$, donc $E_{1,1} = -\frac{R_1(t)}{I_1(t)}$ et $A_{1,1} = \frac{d}{dt}(B) = 0$.
- $(Se : u, I_2(t))$: Il existe un seul chemin causal, ce chemin est $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)$, donc $E_{1,1} = \frac{R_1(t)}{I_1(t)}$.
- $(Se : u, I_3(t))$: Nous avons aucun chemin causal.
- $(Se : u, C_1(t))$: Nous avons un seul chemin causal, ce chemin est $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow C_1(t)$, donc $E_{1,1} = \frac{1}{I_1(t)}$.
- $(Se : u, C_2(t))$: Nous avons aucun chemin causal.

D'après le calcul des gains des chemins causaux de longueur 1 entre la source d'entrée et les variables dynamiques. On trouve

$$J_A^1(B(t)) = \begin{bmatrix} -\frac{R_1(t)}{I_1(t)} & \frac{R_1(t)}{I_1(t)} & 0 & \frac{1}{I_1(t)} & 0 \end{bmatrix}^t$$

3. Calcul de la matrice $J_A^2(B(t))$: Il s'agit de chercher tous les chemins de longueur 2 liant la source d'entrée $Se : u$ et les variables dynamiques.

- $(Se : u, I_1(t))$: Nous avons trois chemins causaux, d'après la définition 24 on a

$$\sum_{k=3} P_k^{(2)} = \sum E_{1,j} + \sum A_{1,j} \text{ avec } j = 3$$

ces chemins sont:

- $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow C_1(t) \rightarrow I_1(t)$, donc $E_{1,1} = -\frac{1}{I_1(t) \cdot C_1(t)}$.
- $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)$, On trouve $E_{1,2} = \frac{R_1^2(t)}{I_1(t) \cdot I_2(t)}$.
- $Se : u \rightarrow \overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)} \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)$

on trouve $E_{1,3} = \frac{R_1^2(t)}{I_1^2(t)}$, ainsi $\sum A_{1,j} = \frac{d^2}{dt}(B) - \frac{R_1(t)}{I_1(t)} \frac{d}{dt}(B) - \frac{d}{dt}\left(\frac{R_1(t)}{I_1(t)}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{R_1(t)}{I_1(t)}\right)$

- $(Se : u, I_2(t))$: Nous avons trois chemins causaux, on a

$$\sum_{k=3} P_k^{(2)} = \sum E_{1,j} + \sum A_{1,j} \text{ avec } j = 3$$

ces chemins sont:

- $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow C_1(t) \rightarrow I_2(t)$, donc $E_{1,1} = \frac{1}{I_1(t).C_1(t)}$.
- $Se : u \rightarrow \overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)} \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)$, On trouve $E_{1,2} = -\frac{R_1^2(t)}{I_1^2(t)}$, ainsi $A_{1,2} = \frac{R_1(t)}{I_1(t)} \frac{d}{dt}(B) = 0$
- $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow \overbrace{I_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)}$, On trouve $E_{1,3} = \frac{R_1^2(t)}{I_1(t).I_2(t)}$, ainsi $A_{1,3} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{R_1(t)}{I_1(t)}\right)$

- $(Se : u, I_3(t))$: Nous avons aucun chemin causal.
- $(Se : u, C_1(t))$: Nous avons deux chemins causaux,

$$\sum_{k=2} P^{(2)} = \sum E_{1,j} + \sum A_{1,j} \text{ avec } j = 2$$

ces chemins sont:

- $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_1(t)$, donc $E_{1,1} = -\frac{R_1(t)}{I_1(t).I_2(t)}$.
- $Se : u \rightarrow \overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)} \rightarrow C_1(t)$, donc $E_{1,2} = -\frac{R_1(t)}{I_1^2(t)}$ ainsi $A_{1,2} = \frac{1}{I_1(t)} \frac{d}{dt}(B) + \frac{d}{dt}\left(+\frac{1}{I_1(t)}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{I_1(t)}\right)$.
- $(Se : u, C_2(t))$: Nous avons un seul chemin causal, ce chemin est $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t)$, donc $E_{1,1} = \frac{R_1(t)}{I_1(t).I_2(t)}$.

4. Calcul de la matrice $J_A^3(B(t))$: Il s'agit de chercher tous les chemins de longueur 3 liant la source d'entrée $Se : u$ et les variables dynamiques. On va prendre par exemple $Se : u$ et l'élément dynamique $I_2(t)$.

- $(Se : u, I_1(t))$: il existe 9 chemins causaux.
 - $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow C_1(t) \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)$, donc $E_{1,1} = -\frac{R_1(t)}{C_1(t).I_1^2(t)}$
 - $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_1(t) \rightarrow I_2(t)$, donc $E_{1,2} = -\frac{R_1(t)}{C_1(t).I_1(t).I_2(t)}$
 - $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow C_1(t) \rightarrow \overbrace{I_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)}$, donc $E_{1,3} = -\frac{R_1(t)}{C_1(t).I_1(t).I_2(t)}$ ainsi $A_{1,3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{I_1(t).C_1(t)}\right)$
 - $Se : u \rightarrow \overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)} \rightarrow C_1(t) \rightarrow I_2(t)$, donc $E_{1,4} = -\frac{R_1(t)}{I_1^2(t).C_1(t)}$ ainsi $A_{1,4} = \frac{1}{I_1(t).C_1(t)} \frac{d}{dt}(B) + \frac{1}{C_1(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{I_1(t)}\right) = \frac{1}{C_1(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{I_1(t)}\right)$
 - $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow I_2(t)$, donc $E_{1,5} = -\frac{R_1(t)}{C_2(t).I_1(t).I_2(t)}$
 - $Se : u \rightarrow \overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)} \rightarrow \overbrace{R_1(t) \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)}$

donc $E_{1,6} = \frac{R_1^3(t)}{I_1^3(t)}$ ainsi $A_{1,6} = -\frac{R_1(t)}{I_1(t)} \frac{d^2}{dt^2}(B) + \frac{R_1^2(t)}{I_1^2(t)} \frac{d}{dt}(B) + \frac{R_1(t)}{I_1(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{R_1(t)}{I_1(t)}\right) = \frac{R_1(t)}{I_1(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{R_1(t)}{I_1(t)}\right)$

- $Se : u \rightarrow \overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)} \rightarrow R_1(t) \rightarrow \overbrace{I_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)}$, donc

$$E_{1,7} = \frac{R_1^3(t)}{I_1^2(t).I_2(t)} \text{ ainsi } A_{1,7} = \frac{d}{dt}(R_1(t))\frac{d}{dt}(B) + \frac{R_1^2(t)}{I_2(t)}\frac{d}{dt}(B) - \frac{d}{dt}\left(\frac{R_1^2(t)}{I_1^2(t)}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{R_1^2(t)}{I_1^2(t)}\right)$$

• $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)$, donc

$$E_{1,8} = \frac{R_1^3(t)}{I_1^2(t).I_2(t)}$$

• $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow \overbrace{I_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)} \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)$

donc $E_{1,9} = \frac{R_1^3(t)}{I_2^2(t).I_1(t)}$ ainsi $A_{1,9} = -\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{R_1(t)}{I_1(t)}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{R_1^2(t)}{I_1(t).I_2(t)}\right) - \frac{R_1(t)}{I_2(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{R_1(t)}{I_1(t)}\right)$

On va faire la même chose pour les autres éléments dynamiques.

5. Calcul de la matrice $J_A^4(B(t))$: Il s'agit de chercher tous les chemins de longueur 4 liant la source d'entrée $Se : u$ et les variables dynamiques. On va prendre par exemple $Se : u$ et l'élément dynamique $C_2(t)$.

- $(Se : u, I_1(t))$: il existe 10 chemins causaux.
 - $Se : u \rightarrow \overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)} \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t)$
 donc $E_{1,1} = \frac{R_1^3(t)}{I_2(t).I_1^3(t)}$ ainsi $A_{1,1} = +\frac{R_1(t)}{I_2(t).I_1(t)}\frac{d^2}{dt^2}(B) + \frac{R_1^2(t)}{I_1^2(t).I_2(t)}\frac{d}{dt}(B) - \frac{R_1(t)}{I_2(t).I_1(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{R_1(t)}{I_1(t)}\right) = -\frac{R_1(t)}{I_2(t).I_1(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{R_1(t)}{I_1(t)}\right)$
 - $Se : u \rightarrow \overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)} \rightarrow \overbrace{I_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)} \rightarrow C_2(t)$, donc $E_{1,2} = \frac{R_1^3(t)}{I_2^2(t).I_1^2(t)}$, ainsi $A_{1,2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{I_2(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{R_1(t)}{I_1(t)}\right)\right) + \frac{1}{I_2(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{R_1^2(t)}{I_1^2(t)}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{R_1^2(t)}{I_1^2(t).I_2(t)}\right)$
 - $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t)$, donc $E_{1,3} = \frac{R_1^3(t)}{I_2^2(t).I_1^2(t)}$
 - $Se : u \rightarrow \overbrace{I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_1(t)} \rightarrow C_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t)$, donc $E_{1,4} = -\frac{R_1^3(t)}{C_1(t).I_2(t).I_1^2(t)}$, ainsi $A_{1,4} = \frac{1}{I_1(t).I_2(t).C_1(t)}\frac{d}{dt}(B) + \frac{1}{I_2(t).C_1(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{I_1(t)}\right) = \frac{1}{I_2(t).C_1(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{I_1(t)}\right)$
 - $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow C_1(t) \rightarrow \overbrace{I_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)} \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)$
 donc $E_{1,5} = \frac{R_1^2(t)}{I_2^2(t).I_1(t).C_1(t)}$, ainsi $A_{1,5} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{I_1(t).I_2(t).C_1(t)}\right) + \frac{1}{I_2(t)}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{R_1(t)}{I_1(t)}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{R_1^2(t)}{I_2^2(t).I_1(t)}\right) + \frac{1}{I_2(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{R_1(t)}{I_1(t).I_2(t).C_1(t)}\right) + \frac{R_1(t)}{I_2^2(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{I_1(t).C_1(t)}\right)$
 - $Se : u \rightarrow I_1 \rightarrow R_1 \rightarrow I_2 \rightarrow C_1 \rightarrow I_2 \rightarrow C_2$, donc $E_{1,6} = -\frac{R_1}{I_2^2.I_1.C_1}$
 - $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t)$, donc $E_{1,7} = -\frac{R_1(t)}{I_2^2(t).I_1(t).C_2(t)}$
 - $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow I_3(t) \rightarrow C_2(t)$, donc $E_{1,8} = -\frac{R_1(t)}{I_2(t).I_1(t).I_3(t).C_2(t)}$
 - $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow C_1(t) \rightarrow I_1(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t)$, donc $E_{1,9} = -\frac{R_1(t)}{I_2(t).I_1^2(t).C_1(t)}$
 - $Se : u \rightarrow I_1(t) \rightarrow C_1(t) \rightarrow \overbrace{I_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow I_2(t)} \rightarrow C_2(t)$, donc $E_{1,10} =$

$$-\frac{R_1(t)}{C_1(t).I_2^2(t).I_1(t)}, \text{ ainsi } A_{1,10} = \frac{1}{I_2(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1(t).C_1(t)} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1(t).I_2(t).C_1(t)} \right)$$

On va faire la même chose pour les autres éléments dynamiques.

Pour simplifier l'écriture, on élimine la variable (t) dans le gain des éléments, d'où la matrice de commandabilité est la suivante:

La matrice de commandabilité

$$C(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

tel que

$$a_{11} = 1, a_{21} = 0, a_{31} = 0, a_{41} = 0, a_{51} = 0$$

$$a_{12} = -\frac{R_1}{I_1}, a_{22} = \frac{R_1}{I_1}, a_{32} = 0, a_{42} = \frac{1}{I_1}, a_{52} = 0$$

$$a_{13} = -\frac{1}{I_1.C_1} + \frac{R_1^2}{I_1.I_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{R_1^2}{I_1^2}$$

$$a_{23} = \frac{1}{I_1.C_1} - \frac{R_1^2}{I_1^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{R_1^2}{I_1.I_2}, a_{33} = 0$$

$$a_{43} = -\frac{R_1}{I_1.I_2} - \frac{R_1}{I_1^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \right), a_{53} = \frac{R_1}{I_1.I_2}$$

$$a_{14} = -\frac{R_1^3}{I_1^3} - \frac{R_1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{R_1^3}{I_1^2.I_2} + \frac{R_1}{C_1.I_1^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1.I_2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_1.I_1} \right) - \frac{R_1^3}{I_1^2.I_2} - \frac{R_1^3}{I_1.I_2^2} - \frac{R_1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{R_1}{C_1.I_1.I_2} + \frac{R_1}{I_1^2.C_1} + \frac{R_1}{I_1.I_2.C_1} + \frac{1}{C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \right).$$

$$a_{24} = \frac{R_1^3}{I_1^3} + \frac{R_1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{R_1^3}{I_1^2.I_2} - \frac{R_1}{C_1.I_1^2} + \frac{R_1^3}{I_1^2.I_2} + \frac{R_1^3}{I_1.I_2^2} + \frac{R_1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{R_1}{C_1.I_1.I_2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1.I_2} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1.C_1} \right) - \frac{R_1}{I_1^2.C_1} - \frac{R_1}{I_1.I_2.C_1} - \frac{1}{C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \right) - \frac{R_1}{I_1.I_2.C_2}.$$

$$a_{34} = \frac{R_1}{I_1.I_2.C_2}.$$

$$a_{44} = \frac{R_1^2}{I_1^3} + \frac{1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{R_1^2}{I_1^2.I_2} - \frac{1}{I_1^2.C_1} + \frac{R_1^2}{I_1^2.I_2} + \frac{R_1^2}{I_2^2.I_1} + \frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{1}{I_1.I_2.C_1} + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1^2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1.I_2} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{I_1} \right).$$

$$a_{54} = -\frac{R_1^2}{I_1^2.I_2} - \frac{R_1^2}{I_1.I_2^2} - \frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{1}{I_1.I_2.C_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1.I_2} \right)$$

$$a_{15} = \frac{R_1^4}{I_1^4} + \frac{R_1^2}{I_1^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{R_1^4}{I_1^3.I_2} + \frac{R_1^2}{I_1^3.C_1} + \frac{R_1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2} \right) + \frac{R_1}{I_1} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{R_1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1.I_2} \right) - \frac{R_1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1.C_1} \right) + \frac{R_1^4}{I_1^3.I_2} + \frac{R_1^4}{I_1^2.I_2^2} + \frac{R_1^2}{I_1.I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{R_1^2}{I_1^2.I_2.C_1} - \frac{R_1^2}{I_1^3.C_1} - \frac{R_1^2}{I_1^2.I_2.C_1} - \frac{R_1}{I_1.C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^3}{I_1^3} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1^2.C_1} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2} \right) + \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1^2}{I_1.I_2} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{I_1.C_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^3}{I_1^2.I_2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^3}{I_1.I_2^2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1.I_2.C_1} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{C_1.I_1^2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1.I_2.C_1} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \right) \right) + \frac{R_1^4}{I_1^3.I_2} + \frac{R_1^2}{I_1.I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{R_1^4}{I_1^2.I_2^2} - \frac{R_1^4}{I_1^2.I_2.C_1} + \frac{R_1^4}{I_2^2.I_1} + \frac{R_1^2}{I_2^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{R_1^2}{I_2^2.I_1.C_1} + \frac{R_1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2} \right) + \frac{R_1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1.I_2} \right) + \frac{R_1}{I_2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{R_1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1.C_1} \right) - \frac{R_1^2}{I_1^2.I_2.C_1} - \frac{R_1^2}{I_2^2.I_1.C_1} - \frac{R_1^2}{I_2^2.I_1.C_2} - \frac{R_1}{I_2.C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \right) - \frac{R_1^2}{I_1^3.C_1} - \frac{1}{I_1.C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{R_1^2}{I_1^2.I_2.C_1} + \frac{1}{I_1^2.C_1^2} - \frac{R_1^2}{I_1^2.I_2.C_1} -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{R_1^2}{I_2^2 \cdot I_1 \cdot C_1} - \frac{1}{I_2 \cdot C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{1}{C_1^2 \cdot I_1 \cdot I_2} - \frac{1}{C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1^2} \right) - \frac{1}{C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1 \cdot I_2} \right) - \frac{1}{C_1} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{I_1} \right) \\
a_{25} = & -\frac{R_1^4}{I_1^4} - \frac{R_1^2}{I_1^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{R_1^4}{I_1^3 \cdot I_2} + \frac{R_1^2}{I_1^3 \cdot C_1} - \frac{R_1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2} \right) - \frac{R_1}{I_1} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{R_1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1 \cdot I_2} \right) + \frac{R_1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1 \cdot C_1} \right) - \\
& \frac{R_1^4}{I_1^3 \cdot I_2} - \frac{R_1^4}{I_1^2 \cdot I_2^2} + \frac{R_1^2}{I_1 \cdot I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{R_1^2}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_1} + \frac{R_1^2}{I_1^3 \cdot C_1} + \frac{R_1^2}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_1} + \frac{R_1}{I_1 \cdot C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \right) - \frac{R_1^4}{I_1^3 \cdot I_2} - \frac{R_1^2}{I_1 \cdot I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \\
& \frac{R_1^4}{I_1^2 \cdot I_2^2} + \frac{R_1^2}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_1} - \frac{R_1^4}{I_1^2 \cdot I_2^2} - \frac{R_1^4}{I_2^3 \cdot I_1} - \frac{R_1^2}{I_2^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{R_1^2}{C_1 \cdot I_1 \cdot I_2^2} - \frac{R_1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2} \right) - \frac{R_1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1 \cdot I_2} \right) - \frac{R_1}{I_2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \\
& \frac{R_1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1 \cdot C_1} \right) + \frac{R_1^2}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_1} + \frac{R_1^2}{I_2^2 \cdot I_1 \cdot C_1} - \frac{R_1}{I_2 \cdot C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \right) + \frac{R_1^2}{I_2^2 \cdot I_1 \cdot C_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^3}{I_1^2 \cdot I_2} \right) + \\
& \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1^2 \cdot C_1} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^3}{I_1^2 \cdot I_2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^3}{I_2^2 \cdot I_1} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1 \cdot I_2 \cdot C_1} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1^2}{I_1 \cdot I_2} \right) - \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \\
& \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{I_1 \cdot C_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1^2 \cdot C_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1 \cdot I_2 \cdot C_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \right) \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1 \cdot I_2 \cdot C_2} \right) + \frac{R_1^2}{I_1^3 \cdot C_1} + \frac{1}{C_1 \cdot I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \\
& \frac{R_1^2}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_1} - \frac{1}{I_1^2 \cdot C_1^2} + \frac{R_1^2}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_1} + \frac{R_1^2}{I_2^2 \cdot I_1 \cdot C_1} + \frac{1}{I_2 \cdot C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{1}{I_1 \cdot I_2 \cdot C_1^2} + \frac{1}{C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1 \cdot I_2} \right) + \frac{1}{C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1^2} \right) + \\
& \frac{1}{C_1} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{I_1} \right) + \frac{R_1^2}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_2} + \frac{R_1^2}{I_1 \cdot I_2^2 \cdot C_2} + \frac{1}{I_2 \cdot C_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{1}{I_1 \cdot I_2 \cdot C_1 \cdot C_2} + \frac{1}{C_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1 \cdot I_2} \right)
\end{aligned}$$

$$a_{35} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1 \cdot I_2 \cdot C_2} \right) - \frac{R_1^2}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_2} - \frac{R_1^2}{I_2^2 \cdot I_1 \cdot C_2} - \frac{1}{C_2 \cdot I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{1}{I_1 \cdot I_2 \cdot C_1 \cdot C_2} - \frac{1}{C_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1 \cdot I_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
a_{45} = & -\frac{R_1^3}{I_1^4} - \frac{R_1}{I_1^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{R_1^3}{I_1^3 \cdot I_2} + \frac{R_1}{I_1^3 \cdot C_1} - \frac{1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2} \right) - \frac{1}{I_1} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1 \cdot I_2} \right) + \frac{1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1 \cdot C_1} \right) - \\
& \frac{R_1^3}{I_1^3 \cdot I_2} - \frac{R_1^3}{I_1^2 \cdot I_2^2} - \frac{R_1}{I_1 \cdot I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{R_1}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_1} + \frac{R_1}{I_1^3 \cdot C_1} + \frac{R_1}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_1} + \frac{1}{I_1 \cdot C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \right) - \frac{R_1^3}{I_1^3 \cdot I_2} - \frac{R_1}{I_1 \cdot I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \\
& \frac{R_1^3}{I_1^2 \cdot I_2^2} + \frac{R_1}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_1} - \frac{R_1^3}{I_1^2 \cdot I_2^2} - \frac{R_1^3}{I_1 \cdot I_2^3} - \frac{R_1}{I_2^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{R_1}{I_1 \cdot I_2^2 \cdot C_1} - \frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2} \right) - \frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1 \cdot I_2} \right) - \frac{1}{I_2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \\
& \frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1 \cdot C_1} \right) + \frac{R_1}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_1} + \frac{R_1}{I_1 \cdot I_2^2 \cdot C_1} + \frac{1}{C_1 \cdot I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \right) + \frac{R_1}{I_1 \cdot I_2^2 \cdot C_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^3} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2 \cdot I_2} \right) + \\
& \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1^2 \cdot C_1} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2 \cdot I_2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1 \cdot I_2^2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1 \cdot I_2 \cdot C_1} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1}{I_1^2} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1}{I_1 \cdot I_2} \right) - \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{1}{I_1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{55} = & \frac{R_1^3}{I_1^3 \cdot I_2} + \frac{R_1}{I_1 \cdot I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) + \frac{R_1^3}{I_1^2 \cdot I_2^2} - \frac{R_1}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_1} + \frac{R_1^3}{I_1^2 \cdot I_2^2} + \frac{R_1^3}{I_2^3 \cdot I_1} + \frac{R_1}{I_2^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{R_1}{I_1 \cdot I_2^2 \cdot C_1} + \frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2} \right) + \\
& \frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1 \cdot I_2} \right) + \frac{1}{I_2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) - \frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1 \cdot C_1} \right) - \frac{R_1}{I_1^2 \cdot I_2 \cdot C_1} - \frac{R_1}{I_1 \cdot I_2^2 \cdot C_1} - \frac{1}{C_1 \cdot I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1} \right) - \frac{R_1}{I_1 \cdot I_2^2 \cdot C_2} - \frac{R_1}{I_1 \cdot I_2 \cdot I_3 \cdot C_2} + \\
& \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_1^2 \cdot I_2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2}{I_2^2 \cdot I_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{I_1} \right) \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_1 \cdot I_2 \cdot C_1} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{R_1}{I_1 \cdot I_2} \right)
\end{aligned}$$

2.3.2 Matrice d'observabilité

En premier temps nous présentons une approche mathématique pour déterminer la matrice d'observabilité, en deuxième temps nous introduisons une nouvelle méthode graphique de calcul des gains de la matrice d'observabilité.

2.3.2.1 Approche mathématique

Définition 25. (Valasek et Olga, 1995) La matrice d'observabilité d'un système LTV peut s'écrire sous la forme (2.17).

$$\mathcal{O}(t) = [[J_A^0(C(t))]^t, [J_A^1(C(t))]^t, \dots, [J_A^{n-1}(C(t))]^t]^t \quad (2.17)$$

J est un opérateur matriciel défini comme suit:

$$J_A^0(C(t)) = C(t), \quad J_A^1(C(t)) = C(t) \cdot A(t) + \frac{d}{dt}C(t)$$

$$J_A^k(C(t)) = J_A^1[J_A^{k-1}(C(t))]$$

La matrice de l'équation (2.17) est la forme générale de la matrice d'observabilité des systèmes linéaires (LTI et LTV).

2.3.2.2 Approche graphique

Nous avons proposé une nouvelle méthode d'analyse de la propriété d'observabilité par une approche graphique.

Définition 26. (Farih et al., 2017) L'expression de chemin causal de longueur h entre la variable d'état et la sortie d'un modèle bond graph s'exprime sous la forme suivante :

$$T_{x_i y_j}^{(h)} = \sum_{(k \in K)} P_{(k)}^{(h)} = \sum E_{ij} + \sum B_{ij} \quad (2.18)$$

où les coefficients sont définis par :

- E_i : Le gain d'un chemin causal direct de longueur h entre l'élément dynamique x_i et la sortie y_j .

$$E_{ij} = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i)^{k_i} \prod_j (r_j)^{l_j} \prod_e g_e \quad (2.19)$$

- $k \in \mathbb{k}$: le nombre des chemins causaux existents de longueur h entre x_j et y_j .
- B_{ij} : Le gain du chemin causal de longueur h entre l'élément dynamique x_i et la sortie y_j qui contient une boucle causal au minimum.

Méthode de calcul de B_{ij}

Si le chemin causal entre l'élément dynamique $EL1$ et la sortie contient une boucle de type LRL ou CRC , nous avons les possibilités suivantes:

- La boucle au début du chemin causal. Le gain du chemin est égal à la dérivée du chemin causal entre la boucle et la sortie.

Exemple 10. $\overbrace{I_2(t) \rightarrow R_2(t) \rightarrow I_2(t)} \rightarrow C_2(t) \rightarrow De$
 $B_{ij} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_2(t) \cdot C_2(t)} \right)$ avec $EL1 = I_2(t)$.

- S'il existe un élément dynamique avant la boucle. Le gain de ce chemin est égal au produit du chemin causal entre l'élément dynamique $EL1$ et la boucle, plus la dérivée du gain du chemin causal entre la boucle et la sortie.

1. Calcul de la matrice $J_A^0(C(t))$, il faut trouver tous les parcours de longueur 0 entre les variables dynamiques et la sortie.

Un seul parcours existe entre $C_2(t)$ et $De : y$.

$$\text{D'où } J_A^0(C(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2(t)} \end{bmatrix}$$

2. Calcul de la matrice $J_A^1(C(t))$: Il faut chercher tous les chemins de longueur 1 liant les variables dynamiques et la sortie. Ces parcours et gains associés sont:

- $(I_1(t), De : y)$: Nous avons aucun chemin causal.
- $(I_2(t), De : y)$: Il existe un seul chemin causal, ce chemin est:
 - $I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y$, donc $E_{1,1} = \frac{1}{I_2(t) \cdot C_2(t)}$.
- $(C_2(t), De : y)$: Nous avons aucun chemin causal.
- $(C_1(t), De : y)$: Nous avons un seul chemin causal, ce chemin est:
 - $\overbrace{C_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_2(t)} \rightarrow De : y$, donc $E_{1,1} = -\frac{1}{R_1(t) \cdot C_1^2(t)}$ et $B_{1,1} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{C_2(t)})$.

3. Calcul de la matrice $J_A^2(C(t))$: Il s'agit de rechercher tous les chemins de longueur 2 liant les variables dynamiques et la sortie.

- $(I_1(t), De : y)$: Nous avons aucun chemin causal.
- $(I_2(t), De : y)$: Nous avons deux chemins causaux, d'après la définition 26 on a

$$\sum_{k=2} P_k^{(2)} = \sum E_{1,j} + \sum B_{1,j} \text{ avec } j = 2$$

ces chemins sont:

- $I_2(t) \rightarrow \overbrace{C_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_2(t)} \rightarrow De : y$, donc $E_{1,1} = -\frac{1}{R_1(t) \cdot I_2(t) \cdot C_1^2(t)}$ et $B_{1,1} = \frac{1}{I_2(t)} \frac{d}{dt}(\frac{1}{C_2(t)})$.
- $\overbrace{I_2(t) \rightarrow R_2(t) \rightarrow I_2(t)} \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y$, On trouve $E_{1,2} = -\frac{R_2(t)}{C_2(t) \cdot I_2^2(t)}$ et $B_{1,2} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{I_2(t) \cdot C_2(t)})$.

- $(C_1(t), De : y)$: Nous avons un seul chemin causal, ce chemin est:
 - $C_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y$, donc $E_{1,1} = -\frac{1}{I_2(t) \cdot C_1(t) \cdot C_2(t)}$
- $(C_2(t), De : y)$: Nous avons deux chemins causaux, on a

$$\sum_{k=2} P_k^{(2)} = \sum E_{1,j} + \sum B_{1,j} \text{ avec } j = 2$$

ces chemins sont:

$$\bullet C_2(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y, \text{ donc } E_{1,1} = -\frac{1}{I_2(t).C_1^2(t)}.$$

$$\bullet \overbrace{C_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_2(t)} \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y$$

$$\text{On trouve } E_{1,2} = -\frac{1}{C_2^3(t).R_1^2(t)}, \text{ ainsi } B_{1,2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{C_2(t)}\right) - \frac{1}{R_1(t).C_2(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C_2(t)}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R_1(t).C_2^2(t)}\right)$$

4. Calcul de la matrice $J_A^3(C(t))$: Il s'agit de rechercher tous les chemins de longueur 3 liant les variables dynamiques et la sortie.

• $(I_1(t), De : y)$: Nous avons un seul chemin causal, ce chemin est:

$$\bullet I_1(t) \rightarrow C_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y, \text{ donc } E_{1,1} = -\frac{1}{I_1(t).I_2(t).C_1(t).C_2(t)}$$

• $(I_2(t), De : y)$: Nous avons cinq chemins causaux, ces chemins sont:

$$\bullet I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y, \text{ donc } E_{1,1} = -\frac{1}{I_2^2(t).C_2^2(t)}$$

$$\bullet I_2(t) \rightarrow C_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y, \text{ donc } E_{1,2} = -\frac{1}{I_2^2(t).C_1(t).C_2(t)}$$

$$\bullet \overbrace{I_2(t) \rightarrow R_2(t) \rightarrow I_2(t)} \rightarrow \overbrace{C_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_2(t)} \rightarrow De : y, \text{ donc } E_{1,3} = \frac{R_2(t)}{R_1(t).I_2^2(t).C_2^2(t)}, \text{ ainsi } B_{1,3} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C_2^2(t).R_1(t).I_2(t)}\right) - \frac{R_2(t)}{I_2^2(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C_2(t)}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{I_2(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C_2(t)}\right)\right)$$

$$\bullet \overbrace{I_2(t) \rightarrow R_2(t) \rightarrow I_2(t)} \rightarrow R_2(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y$$

$$\text{On trouve } E_{1,4} = -\frac{R_2^2(t)}{I_2^3(t).C_2(t)}, \text{ ainsi } B_{1,4} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{C_2(t).I_2(t)}\right) - \frac{R_2(t)}{I_2(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{I_2(t).C_2(t)}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{R_2(t)}{C_2(t).I_2^2(t)}\right)$$

$$\bullet \overbrace{I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_2(t)} \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y$$

$$\text{On trouve } E_{1,4} = \frac{1}{I_2(t).C_2^3(t).R_1^2(t)}, \text{ ainsi } B_{1,4} = -\frac{1}{R_1(t).I_2(t).C_2(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C_2(t)}\right) + \frac{1}{I_2(t)} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{C_2(t)}\right) - \frac{1}{I_2(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R_1(t).C_2^2(t)}\right)$$

• $(C_1(t), De : y)$: Nous avons deux chemins causaux, ces chemins sont:

$$\bullet \overbrace{C_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow R_2(t) \rightarrow I_2(t)} \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y, \text{ donc}$$

$$E_{1,1} = -\frac{R_2(t)}{C_1(t).I_2^2(t).C_2(t)}, \text{ ainsi } B_{1,1} = -\frac{1}{C_1(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C_2(t).I_2(t)}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C_1(t).C_2(t).I_2(t)}\right)$$

$$\bullet C_1(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow \overbrace{C_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_2(t)} \rightarrow De : y, \text{ donc}$$

$$E_{1,2} = -\frac{1}{R_1(t).I_2(t).C_1(t).C_2^2(t)} \text{ et } B_{1,2} = \frac{1}{I_2(t).C_1(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C_2(t)}\right).$$

• $(C_2(t), De : y)$: Nous avons quatre chemins causaux, ces chemins sont:

$$\bullet \overbrace{C_2(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow R_2(t) \rightarrow I_2(t)} \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y, \text{ donc } E_{1,1} = +\frac{R_2(t)}{I_2^2(t).C_2^2(t)},$$

$$\text{ainsi } B_{1,1} = -\frac{1}{C_2(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C_2(t).I_2(t)}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C_2^2(t).I_2(t)}\right)$$

$$\bullet C_2(t) \rightarrow I_2(t) \rightarrow \overbrace{C_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_2(t)} \rightarrow De : y, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned}
E_{1,2} &= -\frac{1}{R_1(t).I_2(t).C_2^3(t)} \text{ et } B_{1,2} = -\frac{1}{I_2(t).C_2(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2(t)} \right). \\
&\bullet \overbrace{C_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_2(t)} \rightarrow I_2(t) \rightarrow C_2(t) \rightarrow De : y, \text{ donc} \\
E_{1,3} &= \frac{1}{R_1(t).I_2(t).C_2^3(t)}, \text{ ainsi } B_{1,3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2^2(t).I_2(t)} \right) \\
&\bullet \overbrace{C_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_2(t)} \rightarrow \overbrace{R_1(t) \rightarrow C_2(t)} \rightarrow \overbrace{C_2(t) \rightarrow R_1(t) \rightarrow C_2(t)} \\
&\rightarrow De : y, \text{ donc } E_{1,4} = -\frac{1}{R_1^3(t).C_2^4(t)}, \text{ ainsi } B_{1,3} = \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{1}{C_2(t)} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{C_2^2(t).R_1(t)} \right) - \\
&\frac{1}{C_2(t).R_1(t)} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{C_2(t)} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2^3(t).R_1^2(t)} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2(t).R_1(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2(t)} \right) \right) \\
&+ \frac{1}{C_2^2(t).R_1^2(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2(t)} \right) + \frac{1}{C_2(t).R_1(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2^2(t).R_1(t)} \right).
\end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, on élimine la variable (t) dans le gain des éléments, d'où la matrice d'observabilité est la suivante.

La matrice d'observabilité

$$O(t) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

tel que

$$\begin{aligned}
b_{11} &= 0, \quad b_{21} = 0, \quad b_{31} = 0, \quad b_{41} = \frac{1}{C_2} \\
b_{12} &= 0, \quad b_{22} = \frac{1}{I_2.C_2}, \quad b_{32} = 0, \quad b_{42} = -\frac{1}{R_1.C_1^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2} \right) \\
b_{13} &= 0, \quad b_{23} = -\frac{1}{R_1.I_2.C_1^2} - \frac{R_2}{C_2.I_2^2} + \frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_2.C_2} \right), \quad b_{33} = -\frac{1}{C_1.C_2.I_2}, \\
b_{43} &= -\frac{1}{I_2.C_1^2} - \frac{1}{C_2^3.R_1^2} + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{C_2} \right) - \frac{1}{R_1.C_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R_1.C_2^2} \right) \\
b_{14} &= -\frac{1}{C_1.C_2.I_2.I_1} \\
b_{24} &= -\frac{1}{I_2^2.C_2^2} - \frac{1}{I_2^2.C_1.C_2} + \frac{R_2}{R_1.I_2^2.C_2^2} - \frac{R_2^2}{I_2^3.C_2} + \frac{1}{I_2.C_2^3.R_1^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2^2(t).R_1.I_2} \right) - \frac{R_2}{I_2^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2} \right) + \\
&\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2} \right) \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{C_2.I_2} \right) - \frac{R_2}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I_2.C_2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_2}{C_2.I_2^2} \right) - \frac{1}{R_1.I_2.C_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2} \right) + \frac{1}{I_2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{C_2} \right) - \frac{1}{I_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R_1.C_2^2} \right) \\
b_{34} &= -\frac{R_2}{C_1.I_2^2.C_2} - \frac{1}{R_1.I_2.C_1.C_2^2} - \frac{1}{C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2.I_2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_1.C_2.I_2} \right) + \frac{1}{I_2.C_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2} \right) \\
b_{44} &= +\frac{R_2}{I_2^2.C_2^2} - \frac{1}{R_1.I_2.C_2^3} + \frac{1}{R_1.I_2.C_2^3} - \frac{1}{R_1^3.C_2^4} - \frac{1}{C_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2.I_2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2^2.I_2} \right) - \frac{1}{I_2(t).C_2(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2(t)} \right) + \\
&\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2^2.I_2} \right) + \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{1}{C_2} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{C_2^2.R_1} \right) - \frac{1}{C_2.R_1} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{C_2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2^3.R_1^2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2.R_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2} \right) \right) + \frac{1}{C_2^2.R_1^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2} \right) + \\
&\frac{1}{C_2.R_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_2^2.R_1} \right)
\end{aligned}$$

2.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode de calcul des éléments des matrices de commandabilité et d'observabilité pour les systèmes LTV. Ces matrices nous ont permis de donner les matrices de changement de base pour la transformation de

la matrice d'état à la forme canonique. Cette forme est très utile pour la synthèse de commande des systèmes multivariables, tel que le placement de pôles, découplage, zéros invariants, stabilité, rejet de perturbation...etc. Cette approche est très importante par rapport aux autres approches (temporelle, symbolique) car on peut calculer n'importe quel vecteur de la matrice de commandabilité et d'observabilité sans calculer les autres.

La dualité est une notion générale qui a été discutée précédemment (Birkett et Roe, 1989), (Van-Der-Schaft, 1991), (Rudolph, 1996) dans plusieurs domaines. Tel que, le domaine de la modélisation du système, analyse et contrôle à utiliser pendant un certain temps. La dualité par l'approche graphique (bond graph) entre la contrôlabilité et l'observabilité est bien connu (Lichiardopol, 2007), (Chalh, 2008), en particulier dans le cas des systèmes linéaires à temps invariants mais le problème majeur est de trouver une définition générale pour les systèmes linéaires à temps variants.

Le chapitre suivant présente un rappel sur quelques observateurs linéaires et ses gains. Nous définissons aussi de façon générale la description du véhicule et nous modélisons aussi le véhicule d'automobile et nous faisons la conception des observateurs P et PI.

Chapitre 3

Approche bond graph pour la construction d'observateurs linéaires: Application sur la dynamique de véhicule

Dans ce chapitre, nous présentons quelques éléments nécessaires à la modélisation d'un véhicule automobile. Nous commençons tout d'abord par montrer les différents mouvements de véhicule ainsi que les principaux éléments qui les constituent. Sachant que dans la littérature, la dynamique des véhicules automobiles a été le sujet de plusieurs travaux de recherche (Stéphane, 2004), (Stéphane *et al.*, 2007), (Nouh, 2008), (Oudghiri, 2008), (Ouahi *et al.*, 2010), (Jaballah, 2011), (Rizzo, 2012), (Fokam, 2014), (Sabra, 2015). Ensuite, un véhicule complet est modélisé par l'approche bond graph sous certaines hypothèses simplificatrices, dont les modèles d'un quart et demi véhicule automobile pour l'étude du comportement latéral sont présentés. Enfin, nous présentons la modélisation graphique de la ceinture de sécurité et même pour la bicyclette, et nous étudions la construction d'observateurs proportionnel et proportionnel intégrale linéaires dont un rappel sur quelques observateurs linéaires et leur gain est donné au début de ce chapitre, sous l'hypothèse que les perturbations n'affectent pas les systèmes modélisés.

3.1 Observateurs linéaires pour l'estimation d'état

Une partie de notre travail est concentrée sur une approche bond graph pour la construction d'observateurs linéaires pour l'estimation d'état de la dynamique du véhicule

en utilisant l'information des mesures disponibles. Les résultats techniques sont présentés en détail dans ce chapitre. Les observateurs de Luenberger et de Kalman ont donné de bons résultats. Parmi les diversités entre ces deux approches, on apporte le choix des observateurs de Luenberger (Luenberger, 1971) pour la modélisation, qui est déterministe et stochastique pour le filtre de Kalman (Kalman et Bucy, 1961). Par la suite les systèmes étudiés dans ce chapitre sont de nature déterministe.

3.1.1 Observateur d'ordre complet (OP)

L'un des observateurs les plus utilisés pour les systèmes linéaires déterministes est de Luenberger (Luenberger, 1964). Ce type d'observateur linéaire est conçu tel que la différence entre les états du système actuel et ceux de l'observateur convergent vers zéro quelles que soient les conditions initiales $x(0)$, $\hat{x}(0)$ estimé et l'entrée $u(t)$.

Pour concevoir l'observateur d'ordre complet (observateur de Luenberger), on considère un modèle linéaire invariant dans le temps modélisé par l'équation suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.1)$$

avec $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $C \in \mathfrak{R}^{m \times n}$; y rassemble les sorties mesurées du système.

L'observateur de Luenberger (figure 3.1) pour le modèle 3.1 est de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (3.2)$$

où le terme $K(y - \hat{y})$ représente une injection linéaire de la sortie.

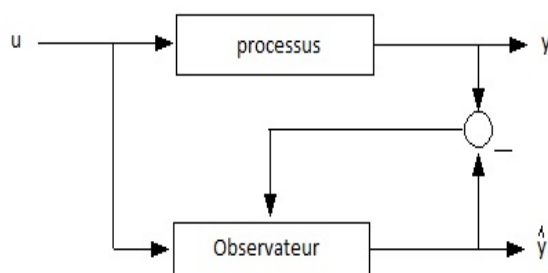


Figure 3.1 : Diagramme de l'observateur de Luenberger

L'erreur d'estimation du modèle dynamique $e = x - \hat{x}$, obtenu pour cet observateur est:

$$\dot{e} = (A - KC)e \quad (3.3)$$

Donc, le souci majeur de la conception de cet observateur se résume au calcul des valeurs de gain de la dynamique de l'erreur K .

3.1.2 Observateur proportionnel intégrale (OPI)

L'observateur de Luenberger porte une correction des estimations sur un terme lié à l'écart entre les sorties mesurées et les sorties non mesurées par l'observateur. Le rôle de l'observateur proportionnel intégral (Beale et Shafai, 1989) est d'ajouter en plus l'intégrale du terme d'erreur, tel que le vecteur \hat{w} définit par:

$$\hat{w} = \int_0^t (y(\tau) - C\hat{x}(\tau))d\tau \quad (3.4)$$

L'observateur PI pour l'équation 3.1 s'écrit comme suit:

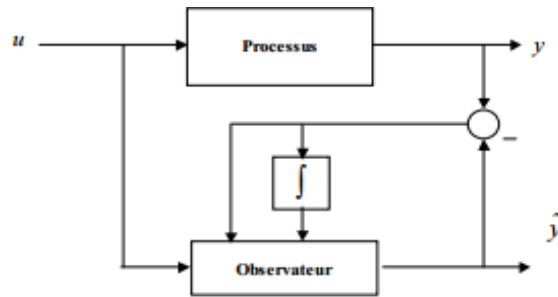


Figure 3.2 : Diagramme de l'observateur PI

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_P(y - C\hat{x}) + K_I\hat{w} \\ \dot{\hat{w}} = y - C\hat{x} \end{cases} \quad (3.5)$$

L'équation de la dynamique d'erreur est: ($e_x = x - \hat{x}$ et $e_w = \hat{w}$) tel que

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - K_PC & -K_I \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_w \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Dans ce cas, il faut trouver les valeurs des gains K_P et K_I .

3.1.3 Détermination du gain d'observateur

(Borne *et al.*, 1992) Le gain de l'observateur est fixé d'après le choix des valeurs propres de la matrice $(A - KC)$, comme suit:

$$\det(\lambda I - A + KC) = \det(\lambda I - A^T + C^T K^T) \quad (3.7)$$

On peut utiliser facilement les méthodes pour trouver le gain du retour d'état qui place les pôles du système bouclé. Dans ce qui suit nous viserons $P(s) = \det(\lambda I - A) = S^n +$

$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i} S^i$ et $P_d(S)$ le polynôme représentant les dynamiques désirées ou souhaitées pour l'observateur:

$$P_d(s) = \prod_{i=1}^n (S - \lambda_i) = S^n + \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\alpha}_{n-i} S^i \quad (3.8)$$

où les λ_i sont les valeurs propres désirées pour $(A - KC)$, supposées réelles et formels.

3.1.3.1 Cas mono sortie (m=1)

Il s'agit de déterminer les n composantes du vecteur K :

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

On peut calculer ce vecteur directement ou par la formule de Bass et Gura qui permet la construction d'un algorithme.

a) Calcul direct

En améliorant $\det(SI - A + KC)$, et nous obtenons:

$$\det(SI - A + KC) = S^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_{n-1}(K_1, \dots, K_n) S^i \quad (3.10)$$

Pour $i = 1, \dots, n$, $q_i(K_1, \dots, K_n) = Q_i K$. Les n égalités:

$$i = 1, \dots, n, \quad q_i(K_1, \dots, K_n) = \hat{\alpha}_i$$

acheminement à:

$$QK = \hat{\alpha} \quad (3.11)$$

où:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

b) Formule de Bass et Gura

On suppose que le modèle du système est sous la forme canonique observable, c'est-à-dire,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\alpha_{n-1} & & & & 1 \\ -\alpha_n & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

où le polynôme caractéristique du modèle est:

$$P(S) = S^n + \alpha_1 S^{n-1} + \alpha_2 S^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} S + \alpha_n \quad (3.15)$$

Alors, on obtient la matrice de l'observateur suivante.

$$\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\tilde{K}_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & -\tilde{K}_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & 0 \\ & & & & & 1 \\ -\alpha_n & -\tilde{K}_n & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

avec $\tilde{K} = [\tilde{K}_1 \quad -\tilde{K}_2 \quad \cdots \quad \tilde{K}_{n-1} \quad \tilde{K}_n]^T$.

Le polynôme caractéristique de l'observateur obtenu à partir de la matrice $(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C})$ est:

$$\begin{aligned} P_d(S) &= \det(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}) \\ &= S^n + (\alpha_1 + \tilde{K}_1)S^{n-1} + (\alpha_2 + \tilde{K}_2)S^{n-2} + \dots + (\alpha_{n-1} + \tilde{K}_{n-1})S + (\alpha_n + \tilde{K}_n) \end{aligned} \quad (3.17)$$

On fixe les valeurs propres de $(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C})$, les valeurs des coefficients du polynôme $P_d(S)$ sont connues et égales à $\hat{\alpha}_i$ ($i = 1, \dots, n$).

$$P_d(S) = \det(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}) = S^n + \hat{\alpha}_1 S^{n-1} + \hat{\alpha}_2 S^{n-2} + \dots + \hat{\alpha}_{n-1} S + \hat{\alpha}_n \quad (3.18)$$

Donc les valeurs de \tilde{K}_i sont obtenues comme suit:

$$\tilde{K}_i = \hat{\alpha}_i - \alpha_i \quad (3.19)$$

ce qui nous permet d'écrire,

$$\tilde{K} = \tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 - \alpha_1 \\ \hat{\alpha}_2 - \alpha_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n - \alpha_n \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

En ce moment, si le modèle du système n'a pas la forme canonique observable, on peut toujours (si la paire (A, C) est observable) transformer l'équation d'état sous la forme canonique observable en utilisant une transformation linéaire W , tel que:

$$r(t) = Wx(t) \quad (3.21)$$

Donc, on obtient les matrices \tilde{A} , \tilde{B} et \tilde{C} comme suit:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= WAW^{-1} \\ \tilde{B} &= WB \\ \tilde{C} &= CW^{-1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Où $W = T_A O_{(A,B)}$, avec:

$$T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad O_{(A,C)} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

L'observateur obtenu pour la paire (A, C) est:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + KC(x(t) - \hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.24)$$

Si la transformation appliquée à l'observateur est linéaire, la dynamique des états reste égale, ce qui signifie, les coefficients du polynôme caractéristique de l'observateur avant et après de transformation doivent être les mêmes.

On applique maintenant la transformation W aux états estimés.

$$\hat{r}(t) = W\hat{x}(t) \quad (3.25)$$

Donc, l'équation d'état de l'observateur devient:

$$W\dot{\hat{x}}(t) = WA\hat{x}(t) + WBu + WKC(x(t) - \hat{x}(t)) \quad (3.26)$$

En exprimant l'équation 3.36 en fonction des matrices \tilde{A} , \tilde{B} et \tilde{C} , $r(t)$ et $\hat{r}(t)$,

$$\dot{\hat{r}}(t) = A\hat{r}(t) + \tilde{B}u + WK\tilde{C}(r(t) - \hat{r}(t)) \quad (3.27)$$

Donc, la fixation des valeurs propres de la matrice $(A - KC)$ est équivalent à la fixation des valeurs propres de la matrice $(\tilde{A} - WK\tilde{C})$. \tilde{A} et \tilde{C} ayant la forme canonique observable, fortement la matrice WK doit être égale à \tilde{K} , donc,

$$\tilde{K} = \tilde{\alpha} = T_A O_{(A,C)} K \quad (3.28)$$

Ce qui est équivalent aux relations suivantes:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_1 - \alpha_1 = CK \\ \hat{\alpha}_2 - \alpha_2 = CAK + \alpha_1 CK \\ \hat{\alpha}_3 - \alpha_3 = CA^2K + \alpha_1 CAK + \alpha_2 CK \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n - \alpha_n = CA^{n-1}K + \alpha_1 CA^{n-2}K + \dots + \alpha_{n-2} CAK + \alpha_{n-1} CK \end{cases} \quad (3.29)$$

Lorsque la paire (A, C) est observable, $O_{(A,C)}$ est régulière et on obtient:

$$K = O_{(A,C)}^{-1} T_A^{-1} \tilde{\alpha} \quad (3.30)$$

Dans ce qui suit, nous présenterons une méthode plus générale qui permet d'obtenir une matrice K bien conditionnée dans le cas multisorties.

3.1.3.2 Méthode générale pour le cas multisorties ($m > 1$)

Cette méthode est considérée comme un cas général de la formule de Bass et Gura. On prend en considération les formes canoniques de Luenberger (Luenberger, 1967), si le système est observable, on peut faire les changements des variables: $x_o = T_o x$ et $y = H_o y_o$, et on trouve l'équation d'état sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}_o = A_o x_o + B_o u \\ y_o = C_o x_o \end{cases} \quad (3.31)$$

où $A_o = T_o A T_o^{-1}$, $B_o = T_o B$ et $C_o = H_o^{-1} C T_o^{-1}$. Les matrices A_o , C_o et H_o possèdent les structures suivantes:

- A_o est formée de m^2 sous matrices A_o^{ij} , $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots m$:

$$A_o = \begin{bmatrix} A_o^{11} & \dots & A_o^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_o^{m1} & \dots & A_o^{mm} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

qui sont de taille $(v_i \times v_j)$ où les v_k sont les m indices d'observabilité qui vérifient $\sum_{k=1}^m v_k = n$. En plus, ces sous matrices ont la forme:

$$A_o^{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & \ddots & \vdots & x \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}, \quad \text{et pour } i \neq j, \quad A_o^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & x \\ \vdots & & \vdots & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

- C_o est formée de m sous-matrices C_o^i , $i = 1 \dots m$

$$C_o = \begin{bmatrix} C_o^i & \dots & C_o^m \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

qui sont de dimension $(m \times v_i)$ et qui ont des composantes nulles sauf la composante $(C_o^i)_{i,v_i}$ qui est égale à 1;

- H_o est une matrice $(m \times m)$ qui a une structure:

$$H_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ x & \dots & x & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Les composantes des matrices qui ont signifié x , et les indices d'observabilité sont donnés par un algorithme de Luenberger pour concevoir la forme canonique.

L'étape suivante consiste à écrire:

$$P_d(S) = \det(SI - A + KC) \quad (3.36)$$

$$= \det(SI - T_o^{-1}A_oT_o + KH_oC_oT_o) \quad (3.37)$$

$$= \det(SI - A_o + K_oC_o) \quad (3.38)$$

Avec $K_o = T_oKH_o$ et à organiser ce nouveau gain de la forme:

$$K_o = \begin{bmatrix} K_o^{11} & \dots & K_o^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ K_o^{m1} & \dots & K_o^{mm} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

où les K_o^{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1$ sont des vecteurs de dimension $(v_i \times x)$. Malgré la réalisation d'opération $A_o - K_oC_o$, on peut fixer les vecteurs K_o^{ij} par les règles qui suit:

- les vecteurs K_o^{ij} avec $i \neq j$ sont égaux à la dernière colonne de la matrice A_o^{ij} ce qui devient A_o diagonale par blocs ;
- On décompose le polynôme caractéristique désiré ou souhaité, soit $P_d(S)$ en m polynômes $P_{d_i}(S)$, chacun de degré v_i :

$$P_d(S) = \prod_{i=1}^m P_{d_i}(S) \quad (3.40)$$

- Les m relations:

$$\det(SI - A_o^{ii} + K_o^{ii}[0 \ \dots \ 0 \ 1]) = P_{d_i}(S) \quad (3.41)$$

fournissent directement les K_o^{ii} .

Ayant obtenu K_o , on obtient K comme suit:

$$K = T_o^{-1}K_oH_o^{-1} \quad (3.42)$$

3.2 Théorie des graphes: placement de pôles

Le souci majeur d'observation en utilisant la théorie des graphes est le placement de pôles, comme nous l'avons rappelé dans la section 3.1, la conception d'un observateur d'ordre complet (de Luenberger) consiste à trouver les valeurs du gain K qui placent les pôles de l'observateur dans un endroit déterminé. Cette conception est équivalente à la résolution du problème de placement de pôles pour la paire (A^T, C^T) .

D'une façon structurelle, (Sefik et Sezer, 1991) ont approfondi le problème de placement de pôles en utilisant la théorie des graphes formulée auparavant par (Reinschke, 1984). Ils ont trouvé un résultat, il s'agit une condition graphique suffisante et générale du placement de pôles par un retour de sortie. En outre, (Katayama et Ichikawa, 1992) ont trouvé une méthode graphique pour le placement de pôles à l'aide de la représentation d'une matrice par graphe de transition.

La méthode de Reinschke (Reinschke, 1988) fondée sur le calcul des coefficients du polynôme caractéristique d'un système et la notion de la famille de cycles causaux, (Rahmani *et al.*, 1994) ont proposé une approche bond graph pour le placement de pôles par retour d'état d'une façon formelle. Ils ont proposé deux méthodes:

- la première basée sur le calcul des coefficients du polynôme caractéristique en boucle fermée
- la seconde à partir du calcul formel de la matrice de commandabilité, on peut trouver la forme canonique de commandabilité de la matrice d'état.

3.3 Description du véhicule

Le véhicule est une structure mécanique composée de nombreux éléments. Chaque dispositif a une fonction bien déterminée. Le châssis, puis la liaison au sol qui regroupe l'ensemble des composantes qui relie le châssis à la route. Ce sont les organes de base: roues, pneumatiques, trains et suspensions.

3.3.1 Mouvements du véhicule

Le véhicule automobile illustré dans la figure 3.3 est un système possédant 6 degrés de liberté. Les mouvements de ce système sont définis par les mouvements de translation et de rotation de la caisse. G c'est le repère d'origine du véhicule est pris au centre de gravité.

- L'axe z orthogonal au plan de la route, son sens est positif vers le haut.
- L'axe x est l'axe longitudinal du véhicule. Son sens positif est choisi vers l'avant.
- L'axe y est choisi de manière orthonormée directe avec les axes x et z .

Les mouvements du châssis par rapport au sol, dans les trois directions, se caractérisent par trois translations:

- **Avance:** la translation sur l'axe x représente le déplacement longitudinal du véhicule.
- **Ballant:** le déplacement latéral ou transversal se fait selon l'axe y .
- **Pompage:** la translation sur l'axe z représente le déplacement vertical.

Les mouvements de rotations de la caisse par rapport aux trois axes sont:

- **Roulis θ :** rotation du véhicule autour de l'axe x , phénomène particulièrement, lorsque le véhicule se déplace dans un virage.
- **Tangage ϕ :** rotation du véhicule autour de l'axe y , phénomène qui intervient lors d'accélération et de freinage.
- **Lacet ψ :** rotation du véhicule autour de l'axe z .

3.3.2 La caisse ou châssis

Le châssis est une structure métallique externe. C'est un corps principal du véhicule. Il contient également, le groupe moteur, le système de commande pilote: volant, levier de vitesse, pédales... les mouvements du châssis par rapport au sol, sont caractérisés par trois translations (longitudinale, latérale et verticale) et trois rotations (roulis, tangage et lacet). Le châssis est également appelé masse suspendue et modélisé par un corps rigide, ce qui permet de limiter l'étude des flexibilités aux suspensions et aux pneus (Deutsch, 1970).

Les paramètres inertiels de la caisse sont généralement représentés par:

- sa masse M .
- la position de son centre de gravité G (premiers moments par rapport à chaque axe) x, y, z .
- les seconds moments d'inertie par rapport à chaque axe x, y, z : I_x, I_y, I_z .
- les produits d'inertie: I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} .

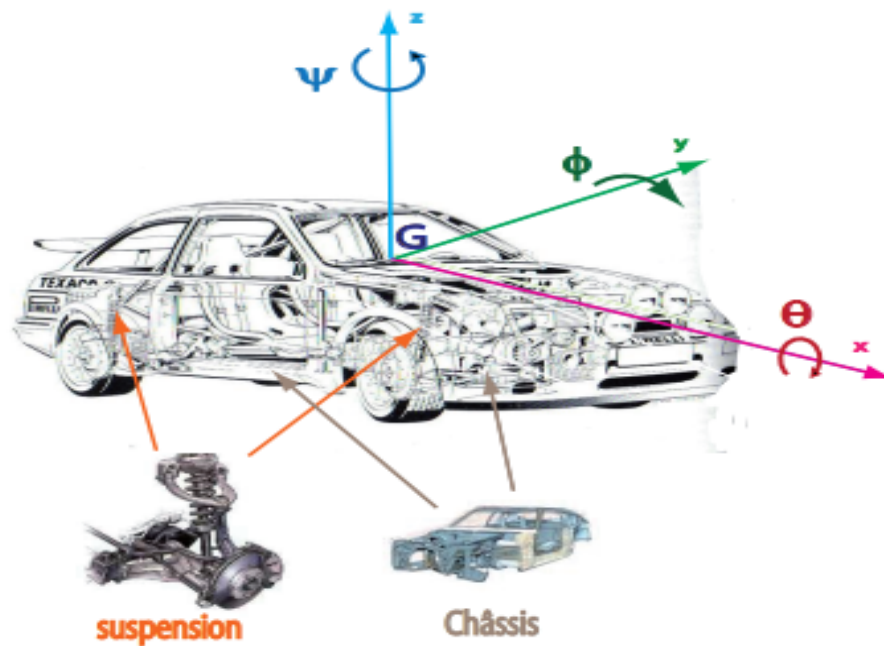


Figure 3.3 : Mouvements de la caisse par rapport au sol et le châssis

3.3.3 Les trains

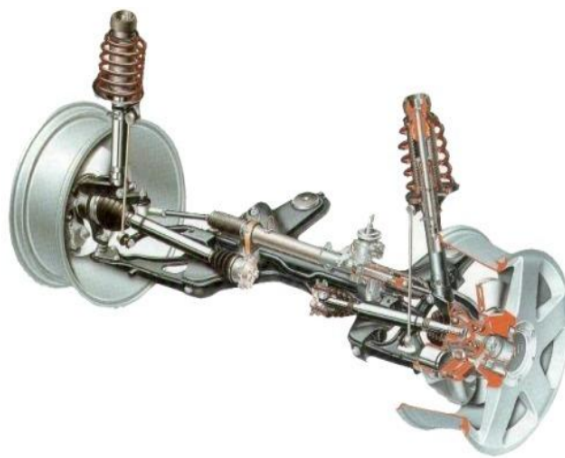


Figure 3.4 : Train avant

Le train avant est l'ensemble des organes mécaniques qui assurent la suspension et la direction des roues avant Figure 3.4. Le train arrière est l'ensemble des organes qui assurent la suspension et le guidage des roues arrière. Les trains sont caractérisés par leur cinématique et par leur élastocinématique. La cinématique détermine la position et l'orientation de la roue par rapport au sol, ce qui conditionne l'effort d'interaction par roue/sol. L'élastocinématique détermine la position et l'orientation du châssis par rap-

port au train, et elle est assurée par des cales élastiques de liaisons (Brossard, 2006).

3.3.4 L'essieu

L'essieu est l'ensemble des organes qui relient la roue au train à l'exception des éléments de directions (les systèmes de freinage, les organes de transmission) et de suspensions, qui permettent d'orienter le plan de la roue selon la géométrie par rapport au châssis.

3.3.5 Les suspensions

La suspension est l'ensemble qui assure la liaison entre la roue et la caisse Figure 3.6. Elle assure le contact entre les pneus et le sol et isole la caisse par des perturbations générées à l'interface roue-sol. La suspension joue un rôle comme un filtre pour garantir la bonne tenue de route et le confort des passagers en éliminant les fréquences de vibrations indésirables.

On appelle débattement, les déplacements des centres de roue par rapport à la caisse suivant l'axe vertical z .



Figure 3.5 : Barre anti-roulis

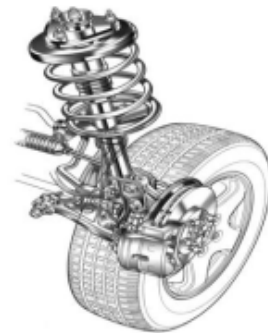


Figure 3.6 :
Suspension

La barre anti-roulis (ou barre stabilisatrice) est un mécanisme de couplage élastique des débattements des roues d'un train qui augmente la rigidité de la suspension du véhicule lors des mouvements de roulis (ex: déplacement dans un virage) Figure 3.5.

D'après la présentation de quelques éléments nécessaires à la modélisation d'un véhicule automobile et les différents mouvements ainsi que les principaux éléments. Afin d'appréhender le comportement de la dynamique du véhicule, il est nécessaire de comprendre les constituants de chaque système. Nous commençons tout d'abord par une modélisation du véhicule complet sous certaines hypothèses simplificatrices.

3.4 Modélisation de la dynamique d'une automobile

3.4.1 Modélisation vertical d'un quart du véhicule

Ce modèle (figure 3.7) est bien utilisé dans la littérature au contrôle et à l'analyse de la tenue de route, du confort des passagers et de l'isolation vibratoire. Les efforts verticaux sont en fonction de l'allongement vertical de la suspension et de déplacement vertical de la roue.

Ces déplacements des centres de roue par rapport au châssis suivant l'axe z , sont appelés les débattements. C'est une grandeur algébrique orientée suivant z à partir de la position d'équilibre. Après la linéarisation autour d'un point d'équilibre statique et nous considérons des petits déplacements. Dans ces conditions le modèle d'étude (figure 3.7) est constitué d'une roue (de raideur K_2 et de coefficient d'amortissement C_2 ou frottement visqueux), et d'une suspension (de raideur K_1 et de coefficient d'amortissement C_1), tel que la roue pousse la suspension qui se déforme pour éviter que le châssis ne bouge.

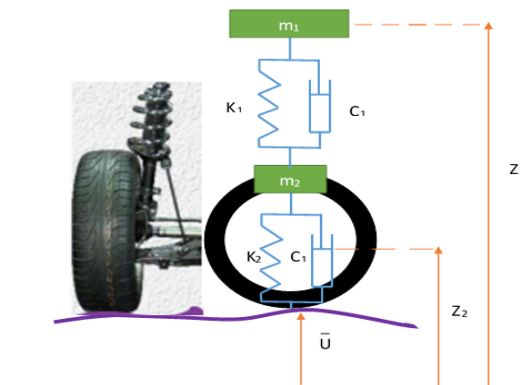


Figure 3.7 : Modèle vertical d'un quart de véhicule (Oudghiri, 2008)

La raideur K_1 est équivalente d'un ensemble d'éléments élastiques compris entre la caisse et la roue. Pareillement, le frottement visqueux est équivalent d'un ensemble d'éléments dissipatifs compris entre la caisse et la roue, notée C_1 . Il est illustré par la figure 3.7 où la variable z_1 représente la hauteur de la caisse ou le châssis, la variable z_2 est la hauteur de la roue, m_1 est la masse suspendue appliquée au quart de véhicule, qui est composée de la caisse du véhicule et des passagers, portée par la suspension, m_2 représente la masse non suspendue de la roue, se compose de la roue et d'une partie des éléments du train, et \bar{u} est le profil de la chaussée.

La suspension est attachée à chaque coin du châssis du véhicule. Son modèle bond

graph est donné dans la figure 3.8. A partir de modèle bond graph vertical de quart de

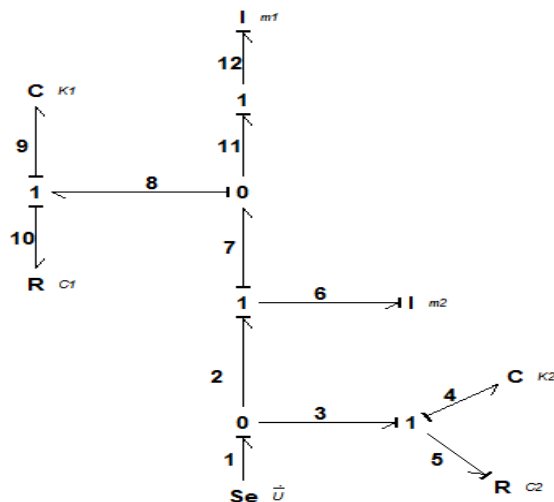


Figure 3.8 : Modèle bond graph vertical d'un quart du véhicule

véhicule, on déduit les équations relatives aux jonctions et aux éléments. Chaque lien est numéroté. Les équations déduites des jonctions et des éléments sont présentées dans (tableau 3.1).

Jonctions 1	$\begin{cases} e_3 = e_4 + e_5 \\ f_3 = f_4 = f_5 = \dot{U} - \dot{Z}_2 \end{cases}$	$\begin{cases} e_2 = e_6 + e_7 + e_{14} \\ f_2 = f_6 = f_7 = \dot{Z}_2 \end{cases}$	$\begin{cases} e_8 = e_9 - e_{10} \\ f_8 = f_9 = f_{10} = \dot{Z}_2 - \dot{Z}_1 \end{cases}$
Jonctions 0	$\begin{cases} f_1 = f_2 + f_3 = \dot{U} \\ e_1 = e_2 = e_3 \end{cases}$	$\begin{cases} f_7 = f_8 + f_{11}, (f_{11} = \dot{Z}_1) \\ e_7 = e_8 = e_{11} \end{cases}$	
élément dynamique I	$I_1 : m_2 \begin{cases} \dot{p}_6 = e_6 \\ f_6 = \frac{1}{m_2} p_6 = \dot{Z}_2 \end{cases}, I_2 : m_1 \begin{cases} \dot{p}_{12} = e_{12} \\ f_{12} = \frac{1}{m_1} p_{12} = \dot{Z}_1 \end{cases}$		
élément dynamique C	$K_2 \begin{cases} \dot{q}_4 = f_4 \\ e_4 = K_2 q_4 \end{cases}, K_1 \begin{cases} \dot{q}_9 = f_9 \\ e_9 = K_1 q_9 \end{cases}$		

Tableau 3.1 : Equations des jonctions et des éléments

A partir de ces équations (tableau 3.1) on peut déduire les équations fondamentales de la dynamique (équations 3.43).

$$\begin{cases} m_1 \ddot{Z}_1 = -K_1(Z_1 - Z_2) - C_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) \\ m_2 \ddot{Z}_2 = -K_2(Z_2 - \bar{U}) - C_2(\dot{Z}_2 - \dot{U}) - [-K_1(Z_1 - Z_2) - C_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2)] \end{cases} \quad (3.43)$$

3.4.2 Modèle vertical de demi-véhicule

Les systèmes de suspension d'automobiles modernes sont couplés par train. La barre anti-roulis permet de réduire l'effet du roulis pour éviter le renversement des véhicules en virage. Elle optimise également les charges appliquées aux roues pour la tenue de route. De plus appelée barre anti-dévers est un couplage élastique des débattements des roues qui augmente la rigidité de la suspension du véhicule lors des mouvements de roulis. Chaque suspension et chaque roue peut être modélisée par un ressort et un amortisseur. Le système est représenté par la figure 3.9. Les hauteurs des châssis gauche

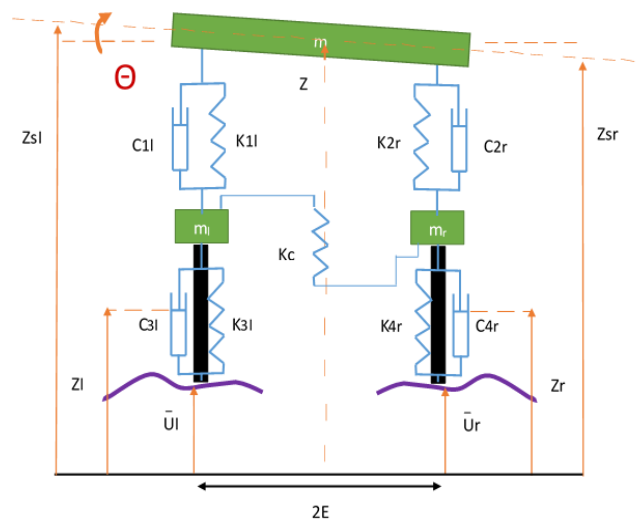


Figure 3.9 : Modèle vertical de demi-véhicule

z_{sl} et droite z_{sr} du véhicule peuvent être exprimées en fonction de la hauteur du centre de gravité z et demi-voie E et l'angle de roulis θ . Toujours on considère des petits déplacements autour de l'équilibre. Le modèle bond graph vertical de demi-véhicule est illustré par la figure 3.10.

A partir de modèle bond graph vertical de demi-véhicule, on déduit les équations relatives aux jonctions et aux éléments. Chaque lien est numéroté. Les équations déduites des jonctions et des éléments sont présentées dans le (tableau 3.2).

A partir de ces équations (tableau 3.2) on peut déduire les équations fondamentales de

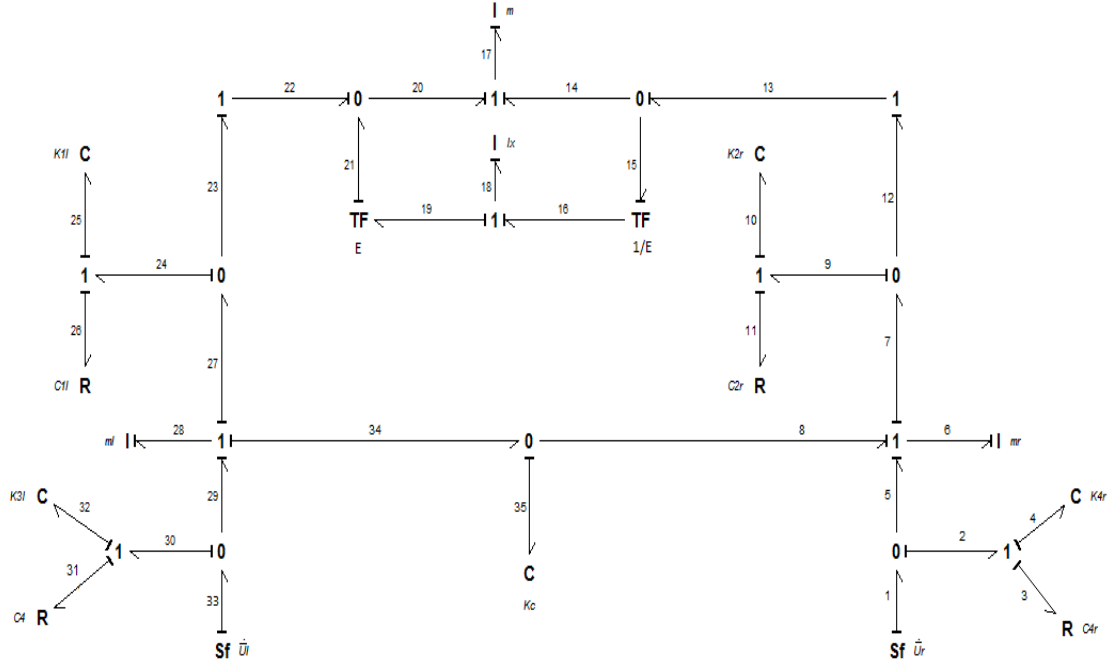


Figure 3.10 : Modèle bond graph vertical de demi-véhicule

Jonctions 1	$\begin{cases} e_2 = e_3 + e_4 \\ f_2 = f_3 = f_4 = \dot{U}_r - \dot{Z}_r \end{cases}$, $\begin{cases} e_5 + e_8 = e_6 + e_7 \\ f_5 = f_6 = f_7 = f_8 = \dot{Z}_r \end{cases}$, $\begin{cases} e_9 = e_{10} + e_{11} \\ f_9 = f_{10} = f_{11} = \dot{Z}_r - \dot{Z}_{sr} \end{cases}$, $\begin{cases} e_{12} = e_{13} \\ f_{12} = f_{13} \end{cases}$
Jonctions 1	$\begin{cases} e_{17} = e_{14} + e_{20} \\ f_{14} = f_{17} = f_{20} = \dot{Z} \end{cases}$, $\begin{cases} e_{16} = e_{19} + e_{18} \\ f_{16} = f_{18} = f_{19} = \dot{\theta} \end{cases}$, $\begin{cases} e_{22} = e_{23} \\ f_{22} = f_{23} \end{cases}$, $\begin{cases} e_{24} = e_{25} + e_{26} \\ f_{24} = f_{25} = f_{26} = \dot{Z}_l - \dot{Z}_{sl} \end{cases}$
Jonctions 1	$\begin{cases} e_{34} + e_{29} = e_{27} + e_{28} \\ f_{27} = f_{28} = f_{29} = f_{34} = \dot{Z}_l \end{cases}$, $\begin{cases} e_{30} = e_{31} + e_{32} \\ f_{30} = f_{31} = f_{32} = \dot{U}_l - \dot{Z}_l \end{cases}$
Jonctions 0	$\begin{cases} f_1 = f_2 + f_5 = \dot{U}_r \\ e_1 = e_2 = e_5 \end{cases}$, $\begin{cases} f_7 = f_{12} + f_{11}, (f_{11} = \dot{Z}_{sr} - \dot{Z}_r) \\ e_7 = e_8 = e_{11} \end{cases}$
élément dynamique I	$I_1 : m_r \begin{cases} \dot{p}_6 = e_6 \\ f_6 = \frac{1}{m_r} p_6 = \dot{Z}_r \end{cases}$, $I_2 : m_l \begin{cases} \dot{p}_{28} = e_{28} \\ f_{28} = \frac{1}{m_l} p_{28} = \dot{Z}_l \end{cases}$
élément dynamique C	$K_{4r} \begin{cases} \dot{q}_4 = f_4 \\ e_4 = K_{4r} q_4 \end{cases}$, $K_{3l} \begin{cases} \dot{q}_{32} = f_{32} \\ e_{32} = K_{3l} q_{32} \end{cases}$

Tableau 3.2 : Equations des jonctions et des éléments

la dynamique (équations 3.44).

$$\left\{ \begin{array}{l} m_l \ddot{Z}_l = -(K_c + K_{3l} + K_{1l})Z_l + K_c Z_r + K_{1l}Z - K_{1l}E\theta - (C_{1l} + C_{3l})\dot{Z}_l + C_{1l}\dot{Z} - C_{1l} \\ \quad E\dot{\theta} + K_{3l}\bar{U}_l + C_{3l}\dot{\bar{U}}_l \\ m_r \ddot{Z}_r = K_c Z_l - (K_{2r} + K_{4r} + K_c)Z_r + K_{2r}Z + K_{2r}E\theta - (C_{2r} + C_{4r})\dot{Z}_r + C_{2r}\dot{Z} + C_{2r} \\ \quad E\dot{\theta} + K_{4r}\bar{U}_r + C_{4r}\dot{\bar{U}}_r \\ m \ddot{Z} = K_{1l}Z_l + K_{2r}Z_r - (K_{1l} + K_{2r})Z + (K_{1l} - K_{2r})E\theta + C_{1l}\dot{Z}_l + C_{2r}\dot{Z}_r - (C_{1l} + C_{2r})\dot{Z} \\ \quad + (C_{1l} - C_{2r})E\dot{\theta} \\ I_x \ddot{\theta} = -K_{1l}EZ_l + K_{2r}EZ_r + (K_{1l} - K_{2r})EZ - (K_{1l} + K_{2r})E^2\theta - C_{1l}E\dot{Z}_l + C_{2r}E\dot{Z}_r \\ \quad + (C_{1l} - C_{2r})E\dot{Z} - (C_{1l} + C_{2r})E^2\dot{\theta} \end{array} \right. \quad (3.44)$$

3.4.3 Modèle complet du véhicule

Le modèle complet à 7 degrés de liberté est présenté dans cette partie permet de modéliser les mouvements de roulis et de tangage ainsi que le pompage de la masse suspendue. Il associe 2 trains et d'un châssis supposé rigide. les différentes variables sont présentées dans la figure 3.11, et nous considérons de petits déplacements autour d'un point d'équilibre. Chaque suspension est modélisée par un ressort associé à un amortisseur et la roue se modélise par une simple raideur. Deux barres anti-roulis sont placées à l'avant et à l'arrière et modélisées par une raideur.

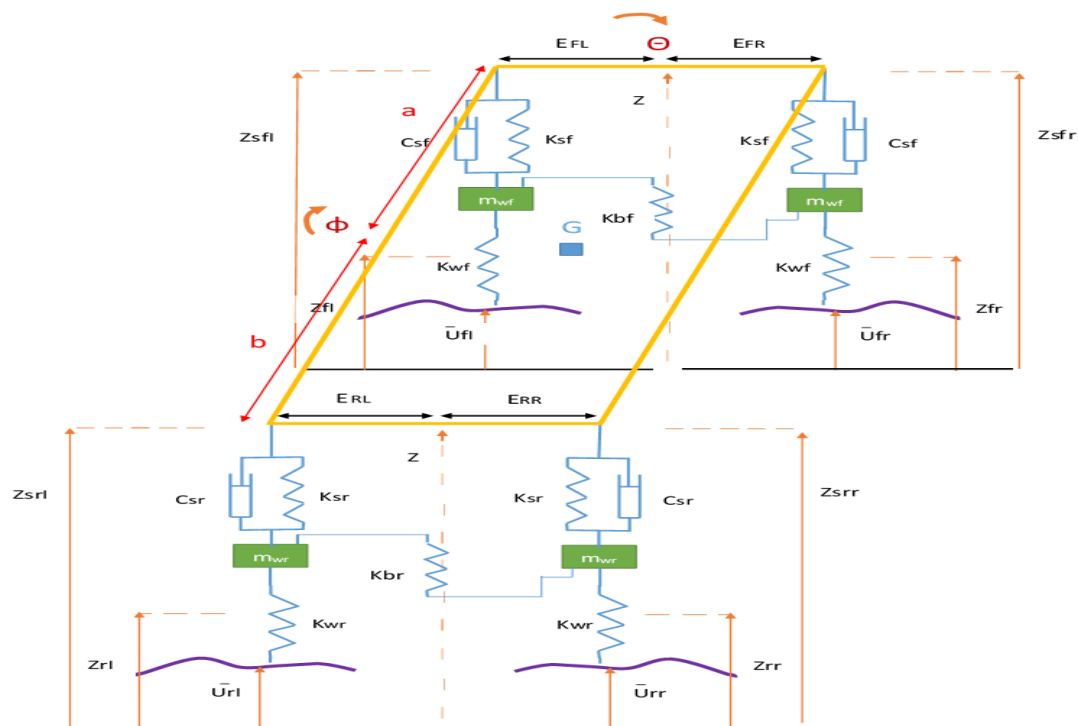


Figure 3.11 : Modèle vertical de véhicule

Par la suite, nous proposons une modélisation bond graph du système véhicule complet. Le système du véhicule considéré se compose à 4 roues, les mouvements de roulis, et de tangage, des suspensions mécaniques passives, des pneus et des barres anti-roulis. C'est un modèle à 7 degrés de liberté, ce modèle bond graph très complexe est illustré par la figure 3.12.

De la même manière on peut déduire l'équation fondamentale de la dynamique 3.45 du modèle de véhicule complet, et nous prenons $u = (u_{fl}, u_{fr}, u_{rl}, u_{rr})^T$ le vecteur représentant le profil de sol sous chacune des roues, c'est la commande et $x =$

$(z_G, \theta, \phi, z_{fl}, z_{fr}, z_{rl}, z_{rr})^T$ un vecteur d'état de coordonnées généralisées, \dot{x} est le vecteur des vitesses et \ddot{x} le vecteur des accélérations.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} m_s & 0_{3 \times 4} \\ 0_{4 \times 3} & m_w \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} TC_s T^T & -TC_s \\ -C_s T^T & C_s \end{pmatrix} \dot{x} \\ & + \begin{pmatrix} TK_{ssr} T^T & -TK_{ssr} \\ -K_s T^T & K_s + K_w \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 4} \\ K_w \end{pmatrix} \bar{u} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Sachant que

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ E_{FL} & -E_{FR} & E_{RL} & -E_{RR} \\ -a & -a & b & b \end{pmatrix}, & m_s &= \begin{pmatrix} M_G & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} \end{pmatrix} \\ C_s &= \begin{pmatrix} C_{sf} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{sf} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & C_{sr} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_{sr} \end{pmatrix}, & K_w &= \begin{pmatrix} K_{wf} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{wf} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & K_{wr} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K_{wr} \end{pmatrix} \\ K_s &= \begin{pmatrix} K_{sf} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{sf} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & K_{sr} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K_{sr} \end{pmatrix}, & m_w &= \begin{pmatrix} m_{wf} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{wf} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & m_{wr} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{wr} \end{pmatrix} \\ K_{ssr} &= \begin{pmatrix} K_{sf} + R_f & -R_f & 0 & 0 \\ -R_f & K_{sf} + R_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{sr} + R_r & -R_r \\ 0 & 0 & -R_r & K_{sr} + R_r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans la section 3.4 nous avons modélisé un système mécanique multicorps particulièrement dans le domaine de la dynamique des véhicules pour obtenir une représentation graphique du modèle étudié afin de trouver les équations fondamentales de la dynamique. nous avons proposé cette approche de modélisation basée sur les techniques graphique appelée "bond graph". Ces techniques ont une flexibilité suffisante qui peut introduire les différents composants dans un modèle de dynamique verticale de véhicule. Dans la section suivante nous présenterons la construction des observateurs linéaires en supposant que des perturbations n'affectent pas les systèmes (la ceinture de sécurité et le modèle bicyclette) et nous garderons la même approche.

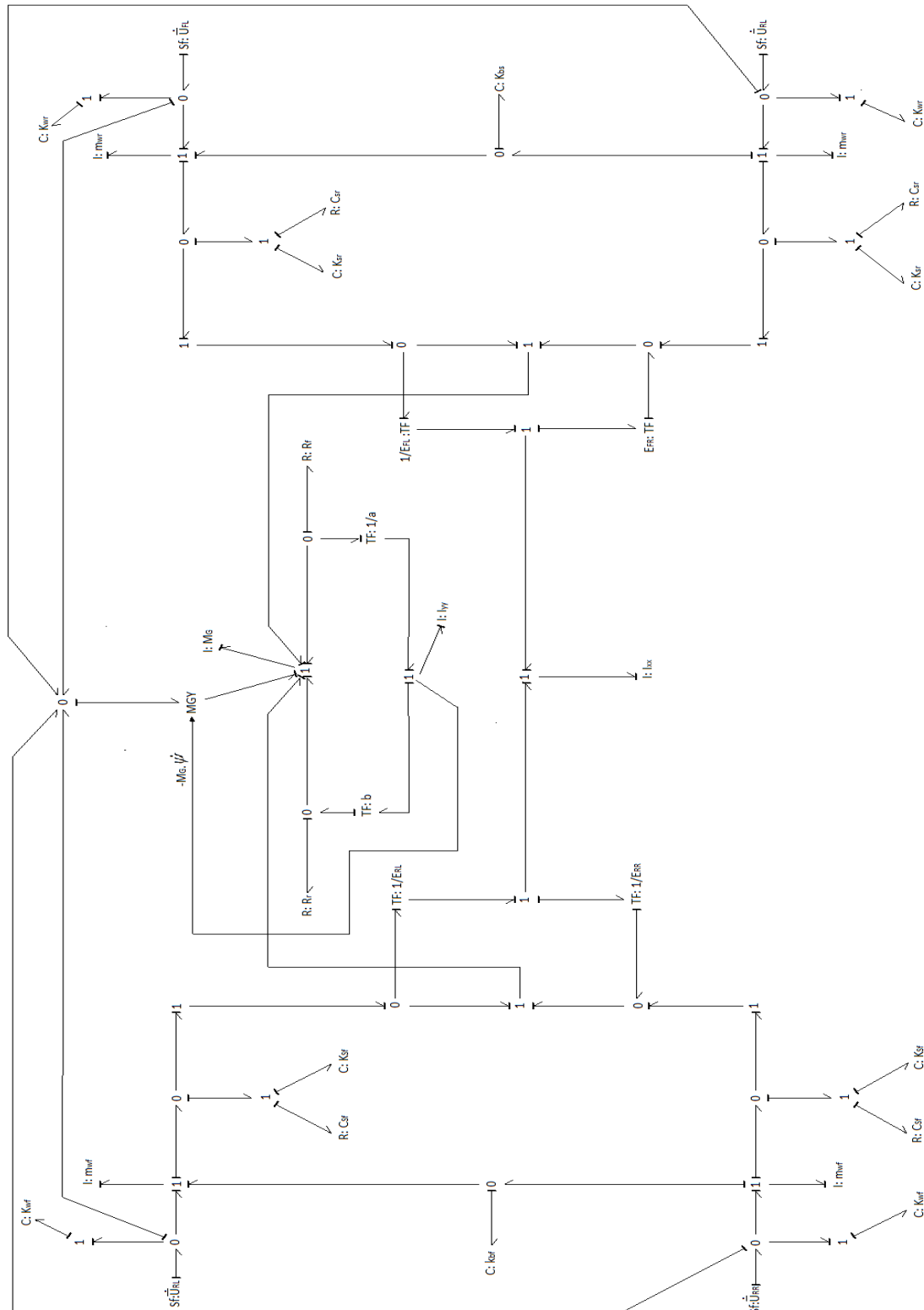


Figure 3.12 : Modèle bond graph vertical de véhicule

3.5 Observateurs de Luenberger et proportionnel intégral

3.5.1 Procédure pour la construction de l'observateur de Luenberger

Cette section décrit la procédure pour synthétiser l'observateur de Luenberger en utilisant une approche Bond Graph. L'algorithme est défini comme suit:

- **Étape 1:** vérifier l'existence de sorties redondantes

l'existence de sorties redondantes est la première condition à vérifier pour la construction d'observateur. L'intérêt de cette étape est d'éviter ou d'éliminer les sorties redondantes afin de diminuer les calculs. En effet, la sélection des sorties non redondantes permet le calcul du gain K avec la taille minimale. Cette condition peut être vérifiée par le calcul des lignes de la matrice d'observation C (la différence entre le nombre de détecteurs D_e et D_f , et les détecteurs qui ne peuvent pas être réalisés dans le Bond Graph en causalité intégrante).

- **Étape 2:** vérification de l'observabilité du modèle structurel

La vérification de l'observabilité est proposé par Sueur et Dauphin-Tanguy (Sueur et Dauphin-Tanguy, 1991), Un modèle bond graph est structurellement observable en état si et seulement si les conditions suivantes sont respectées:

- 1) Sur le modèle bond graph en causalité intégrale (MBGI), il existe un parcours causal entre tous les éléments dynamiques I et C et un détecteurs D_e ou D_f .
- 2) Tous les éléments dynamiques I et C admettent une causalité dérivée sur le modèle bond graph en causalité dérivée (MBGD). Si des éléments dynamiques I ou C restent en causalité intégrale, la dualisation de détecteurs D_e ou D_f doit permettre de les mettre en causalité dérivée.

On ajoute un capteur pour que le modèle soit observable, et on peut le placer n'importe où, à condition que tous les éléments dynamiques I et C admettent une causalité dérivée.

- **Étape 3:** Injection linéaire de la sortie: ajout du terme $K_i(y - \hat{y})$ dans les éléments dynamiques du modèle de l'obsevateur.

Le modèle bond graph de l'observateur est composé du modèle initial du système dans lequel le terme $K_i(y - \hat{y})$ est ajouté. Ce dernier est définit en utilisant des

sources de d'effort à modulation pour un élément I et des sources modulées de flux pour un élément C (fig 3.15 et fig 3.14).

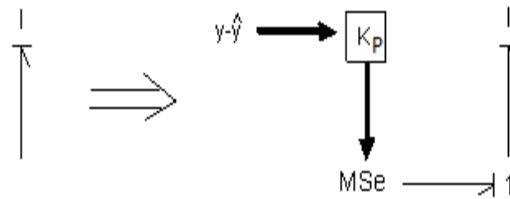


Figure 3.13 : Injection linéaire de la sortie dans l'observateur de Luenberger: Cas de l'élément I

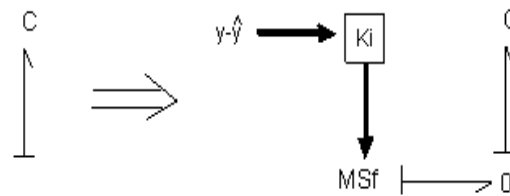


Figure 3.14 : Injection linéaire de la sortie dans l'observateur de Luenberger: Cas de l'élément C

- **Étape 4:** Calcul du gain de l'observateur

Le calcul du gain d'observateur peut être fait en utilisant deux techniques. La première consiste sur le calcul d'équation d'état du modèle bond graph et de la détermination du gain K par les méthodes classiques (Karnopp, 1979). La deuxième est basée sur le calcul formel du polynôme caractéristique $P(A - KC)$ directement à partir du modèle bond graph de l'observateur en utilisant les chemins causaux et les boucles (Pichardo-Almarza *et al.*, 2003).

Le gain d'observateur de Luenberger est obtenu en identifiant le polynôme caractéristique de l'observateur $P(A - KC)$ et le polynôme désiré $P_d(s)$ pour fixer les pôles de l'observateur.

3.5.2 Procédure pour la construction de l'observateur PI

Cette section décrit la procédure à synthétiser l'observateur proportionnel intégrale en utilisant une approche Bond Graph. L'algorithme est défini comme suit:

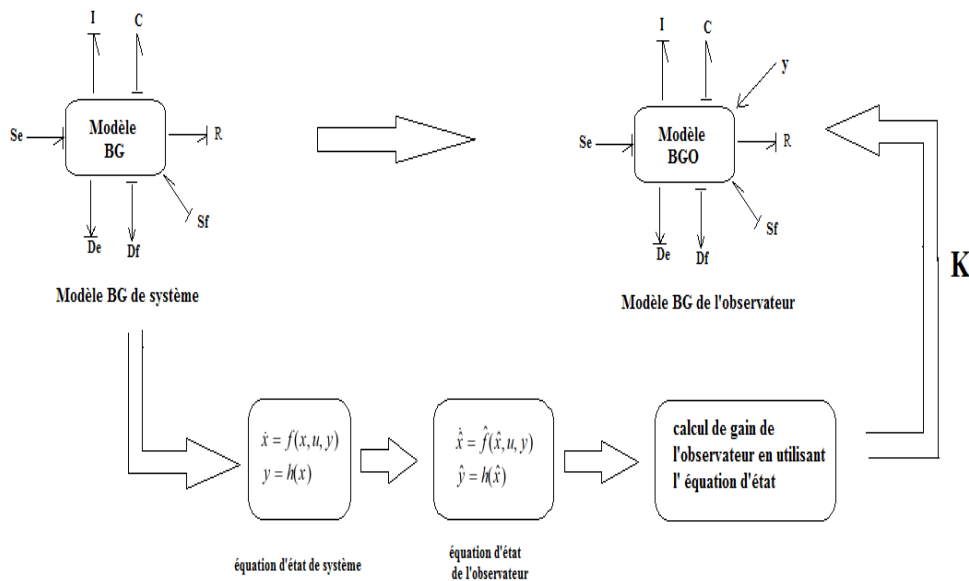


Figure 3.15 : Algorithme pour la construction et le calcul du gain d'observateur à partir de modèle bond graph

Les **Étapes 1 et 2** sont les mêmes que celles de l'observateur proportionnel.

- **Étape 3:** Injection linéaire de la sortie: ajout du terme $K_P(y - \hat{y}) + K_I \int (y - \hat{y})$ dans les éléments dynamiques du modèle de l'observateur proportionnel intégrale.

Le modèle bond graph de l'observateur proportionnel intégrale est composé du modèle initial du système dans laquelle le terme $K_P(y - \hat{y}) + K_I \int (y - \hat{y})$ est ajouté. Ce dernier est défini en utilisant des sources de flux à modulation pour un élément sources modulées I et d'effort pour un élément C (fig 3.16 et fig 3.17).

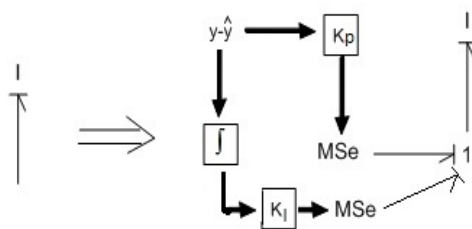


Figure 3.16 : Injection linéaire de la sortie dans l'observateur PI: Cas de l'élément I

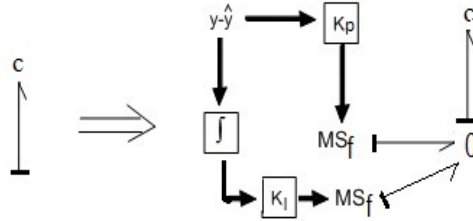


Figure 3.17 : Injection linéaire de la sortie dans l'observateur PI: Cas de l'élément C

- **Étape 4:** Calcul du gain de l'observateur PI

Le calcul du gain d'observateur peut être fait en utilisant deux techniques. La première consiste sur le calcul d'équation d'état du modèle bond graph et de la détermination des gains (K_P et K_I) par les méthodes classiques (Karnopp, 1979). La deuxième est basée sur le calcul formel du polynôme caractéristique $P(A - K_P C - K_I)$ directement à partir du modèle bond graph de l'observateur en utilisant les chemins causaux et les boucles (Pichardo-Almarza *et al.*, 2003).

L'observateur PI consiste à trouver les valeurs des gains K_P et K_I qui assurent la stabilité des valeurs propres de la matrice A_{PI} . tel que

$$A_{PI} = \begin{pmatrix} A - K_P C & -K_I \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

3.5.3 Applications

3.5.3.1 La ceinture de sécurité

Le manque des instruments (les variables d'état ne sont pas accessibles aux mesures) nécessite la synthèse des observateurs dont le rôle est d'estimer la totalité ou une partie de l'état. Pour les systèmes linéaires déterministes, l'observateur de Luenberger (observateur proportionnel) est le plus utilisé (Luenberger, 1966). Ce type d'observateur est conçu de telle sorte que la différence entre les états du système et ceux estimés convergent vers zéro. L'observateur est utilisé pour déterminer les états non mesurables. En outre, certaines variables sont inaccessibles à la mesure. L'outil bond graph est utilisé pour la synthèse de ce type d'observateur dans le cas des systèmes linéaires.

Karnopp (Karnopp, 1979) a utilisé l'approche bond graph pour construire l'architecture de l'observateur et de calculer les équations d'état. Le calcul du gain de cet observateur est effectué en utilisant les équations d'état et les techniques traditionnelles

de placement de pôles (Rahmani *et al.*, 1994). En 2004, Pichardo Almarza (Pichardo-Almarza *et al.*, 2003) a proposé une approche graphique bond graph pour la synthèse des observateurs qui sont destinés à la commande des systèmes linéaires (proportionnelle intégrale, un grand gain). D'autres recherches développées par Hadji et Rahmani (Hadji et Rahmani, 2010), suggèrent un observateur de commande complet de Luenberger pour un robot omnidirectionnel mobiles (Robotino). Cette méthode nécessite une analyse structurelle (observabilité, la redondance, les lois structurelles) et un calcul formel. Par la suite nous présentons la modélisation de crash test et nous appliquons cet observateur dans ce système, après nous montrons leur fiabilité par des tests de simulation sur logiciel 20 – *sim*.

a) Modélisation par l'approche graphique

Nous considérons un modèle simple pour la conception de ceinture de sécurité de crash test (Granda, 2003c). Ce modèle se compose par la masse de la voiture (M), la masse du mannequin du crash test (m), la ceinture de sécurité (K_2, b_2) et le pare-choc de la voiture (K_1, b_1). En considérant dans ce modèle la voiture au moment du choc contre le mur (la figure 3.18).

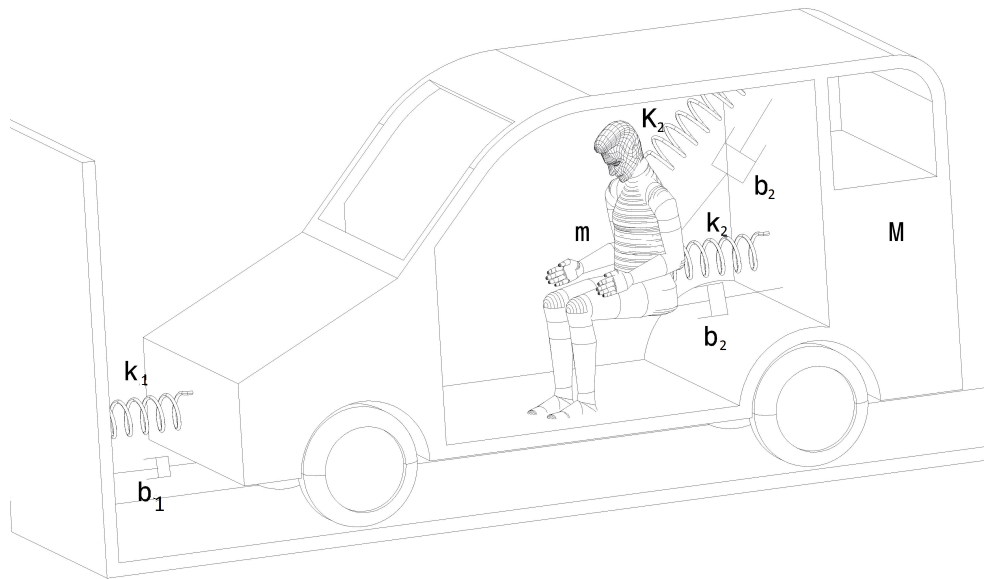


Figure 3.18 : Véhicule crash test

Le modèle bond graph du système "ceinture de sécurité" est obtenu en suivant la procédure de construction du modèle donné dans (Paynter, 1961), (Karnopp et Rosenberg, 1975), (Breedveld, 1984) et (Dauphin-Tanguy, 2000). La jonction 1 est associée à

chaque variable de vitesse (la vitesse de voiture...). Et la jonction 0 pour les relations entre une vitesse donnée. Les sources sont ajoutées pour compléter le modèle bond graph présenté par la figure 3.19. Les variables d'état sont les variables associées aux éléments dynamiques et les mesures sont la force dans la ceinture de sécurité, la force dans le pare-choc et la vitesse de la voiture.

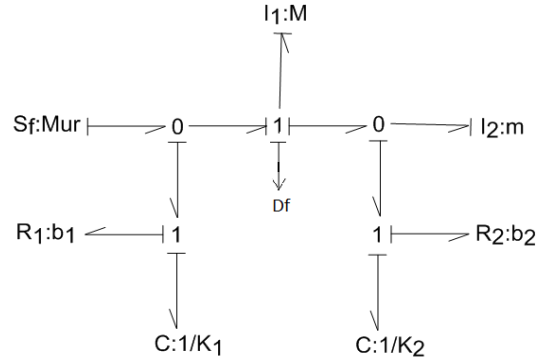


Figure 3.19 : Modèle bond graph du véhicule crash test

Le système se met sous la forme d'un système linéaire, s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.47)$$

tel que la matrice d'état s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-b_1-b_2}{M} & \frac{b_2}{m} & k_1 & -k_2 \\ \frac{b_2}{M} & -\frac{b_2}{m} & 0 & k_2 \\ -\frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{4 \times 4}, \text{ la matrice de commande est } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{4 \times 1}.$$

la matrice de sortie est $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{1 \times 4}$.

b) Etude d'observateur proportionnel pour la ceinture de sécurité

Pour la conception d'un observateur Bond Graph (OBG), les étapes ci-dessous doivent être vérifiées:

Étape 1: Vérification de l'existence de sorties redondantes: L'intérêt d'éliminer les sorties redondantes est d'éviter les calculs inutiles, mais cette étape est annulée dans ce cas d'étude, puisque le modèle ne dispose que d'un seul détecteur.

Étape 2: Vérification d'observabilité structurelle: Le modèle bon graph en causalité intégrale (BGI) et le modèle bond graph en causalité dérivé (BGD) sont présentés,

respectivement, dans les figures 3.20 et 3.21. Comme il est mentionné précédemment,

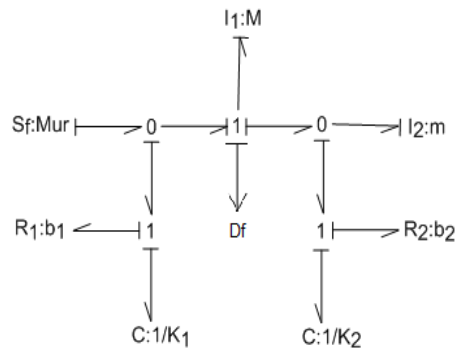


Figure 3.20 : Modèle Bond Graph en causalité intégrale.

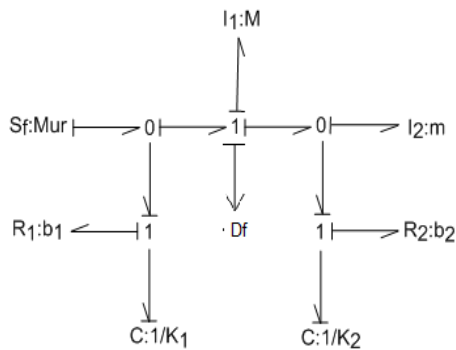


Figure 3.21 : Modèle Bond Graph en causalité dérivée.

l'observabilité structurelle peut être obtenue facilement par l'analyse structurelle du modèle bond graph. on note que, sur le modèle BGD, tous les éléments dynamiques admettent une causalité dérivée, donc le modèle est structurellement observable.

Étape 3: Construction de l'observateur basé sur le bond graph (BGO): Le modèle Bond Graph de l'observateur est obtenu à partir du modèle bond graph initial avec une injection de sortie linéaire, en ajoutant $K_p(y - \hat{y})$ dans les éléments dynamiques du modèle d'observateur (voir figure 3.22) Les deux MS_e sont des sources modulées d'effort pour l'élément I , et les deux MS_f sont des sources modulées de flux pour l'élément C .

Étape 4: Calcul du gain: Les variables d'état pour ce système (la figure 3.20) sont associées à deux éléments inductifs I et deux éléments capacitifs C dans la causalité intégrale. L'ordre du modèle est donc égal à 4. Le polynôme caractéristique de la matrice d'état (A) est extrait à partir de l'équation d'état (3.47). Ainsi, le polynôme

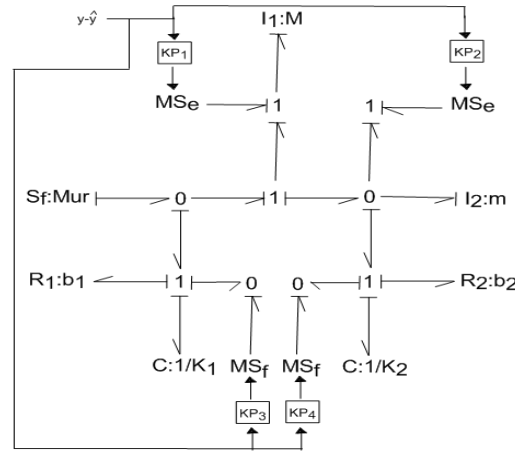


Figure 3.22 : Modèle Bond Graph d'observateur "cash test".

caractéristique associé à la matrice A de ce modèle est défini par:

$$P_A(S) = \det(SI - A) = S^4 + \left[\frac{b_2}{m} + \frac{b_1 + b_2}{M} \right] S^3 + \left[\frac{k_1}{M} + \frac{k_2}{m} + \frac{b_2}{m} \left(\frac{b_1 + b_2}{M} \right) - \frac{b_2^2}{M.m} + \frac{k_2}{M} \right] S^2 + \left[\frac{k_1 b_2}{M.m} + \frac{k_2}{m} \left(\frac{b_1 + b_2}{M} \right) + 3 \frac{b_2 k_2}{M.m} \right] S + \frac{k_1 k_2}{M.m} \quad (3.48)$$

Les pôles du modèle sont respectivement:

$$\begin{aligned} s_1 &= -4.4463 + 13.36i, & s_2 &= -4.4463 - 13.36i \\ s_3 &= -7.2837 + 6.9127i, & s_4 &= -7.2837 - 6.9127i \end{aligned} \quad (3.49)$$

Pour calculer le gain K_p (la figure 3.22), on choisit les pôles de l'observateur pour être un peu plus rapide que ceux du modèle.

Les valeurs des pôles souhaités ou désirés sont respectivement:

$$\begin{aligned} s_{1_d} &= -6, & s_{2_d} &= -7 \\ s_{3_d} &= -9, & s_{4_d} &= -10 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ce qui donne le polynôme caractéristique désiré suivant:

$$P_d(S) = S^4 + 32S^3 + 379S^2 + 19685S + 3780 \quad (3.51)$$

La détermination du gain K_p de l'observateur de Luenberger basée sur les coefficients du polynôme caractéristique $P_{(A-K_p C)}$ s'obtient en appliquant le théorème 3 (Rahmani, 1993) sur le modèle bond graph de l'observateur.

Théorème 3. (Rahmani, 1993)

La valeur de chaque coefficient α_i du polynôme caractéristique $P_A(S)$,

$$P_A(S) = S^n + \alpha_i S^{n-i} + \dots + \alpha_{n-i} S + \alpha_n \quad (3.52)$$

est égale au terme constant (sans l'opérateur de Laplace S) du gain total des familles de cycles causaux d'ordre i dans le modèle bond graph. Le gain de chaque famille de cycles causaux intervenant doit être multiplié par $(-1)^d$ si la famille est constituée de d cycles causaux disjoints.

$$P_{(A-KC)}(S) = P_d(S) = S^4 + 32S^3 + 379S^2 + 19685S + 3780 \quad (3.53)$$

L'identification terme à terme de $P_d(S)$ et $P_{(A-KC)}(S)$ conduit à des valeurs de gain $K_{p_1} = 12810$, $K_{p_2} = 75271.7$, $K_{p_3} = 800$ et $K_{p_4} = 1763$.

c) Simulation

Les conditions initiales des états du modèle BG dans la causalité intégrale sont considérées comme nulles. Des essais de simulation ont été mis en oeuvre sur le logiciel 20 – *sim* et les valeurs des paramètres du modèle sont définies dans le tableau 3.3.

$M(\text{voiture}) = 1500$ (Kg)
$m(\text{mannequin}) = 100$ (Kg)
$k_1 = .10^5$ (N/m)
$k_2 = 1.10^4$ (N/m)
$b_1 = 16000$ (Ns/m)
$b_2 = 1200$ (Ns/m)
$V_{Mur} = 0$ (m/s)

Tableau 3.3 : Les valeurs des paramètres du modèle

Les paramètres d'observateur de Luenberger ont une variation de -10% par rapport aux paramètres du modèle BG.

Les figures 3.23, 3.24 et 3.25 montrent une précision claire de l'estimation des variables d'état du système. Nous observons, également, que l'harmonie des variables d'états estimées (la vitesse de voiture, la force dans le pare-choc et la force dans la ceinture de sécurité) sont indiscernables.

Les erreurs d'estimations sont presque nulles comme il est montré sur les figures 3.26, 3.27 et 3.28. Par conséquent, il permet d'améliorer le rendement et l'efficacité de l'observateur bond graph.

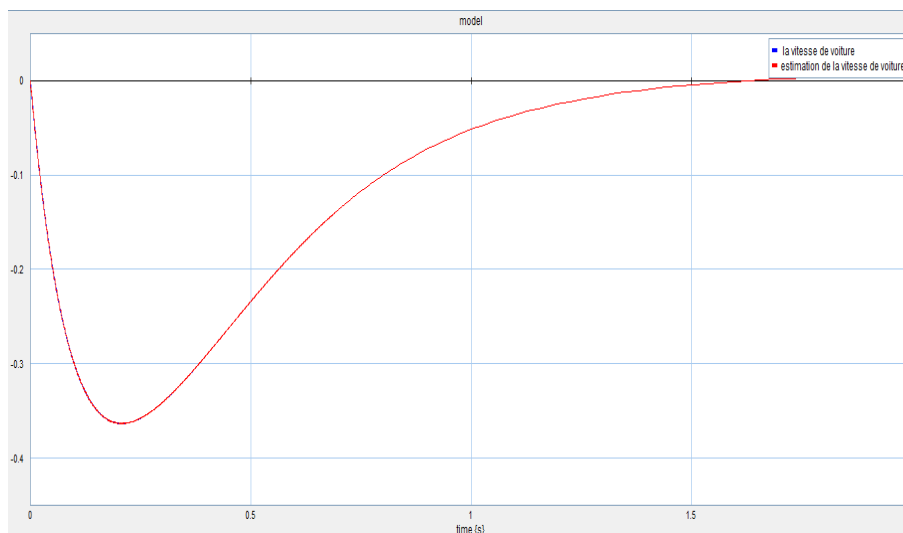


Figure 3.23 : Estimation de la vitesse de voiture

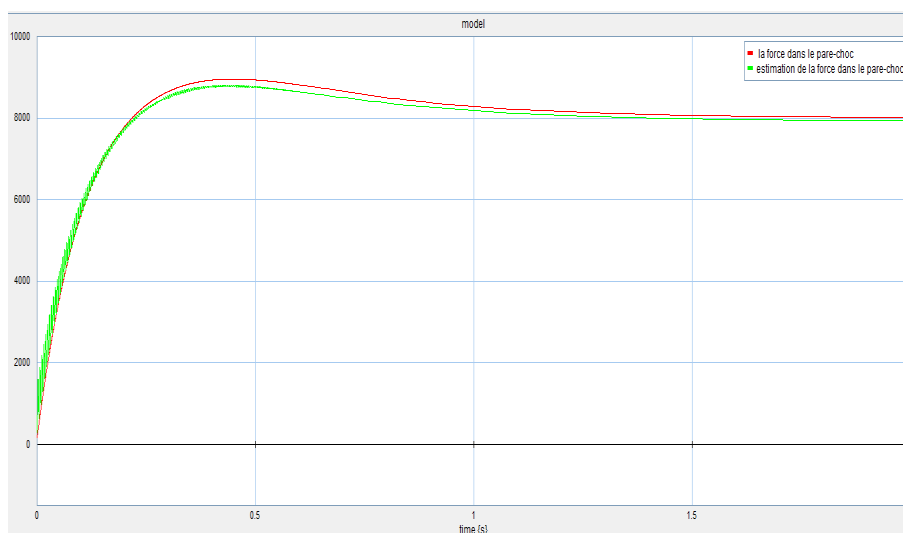


Figure 3.24 : Estimation de la force dans le pare-chocs

Dans la première application, nous avons présenté la construction d'un observateur linéaire de Luenberger pour la ceinture de sécurité basé sur la méthodologie Bond Graph. L'intérêt majeur de cette approche est un vrai sens physique et elle donne accès à de nombreuses variables de flux et d'effort. L'observateur proposé a besoin d'une connaissance précise des paramètres du système pour garantir une bonne estimation, il est limité, les travaux de la partie suivante vont être concentrés sur la deuxième application d'un observateur proportionnel intégral afin d'assurer plus de robustesse.

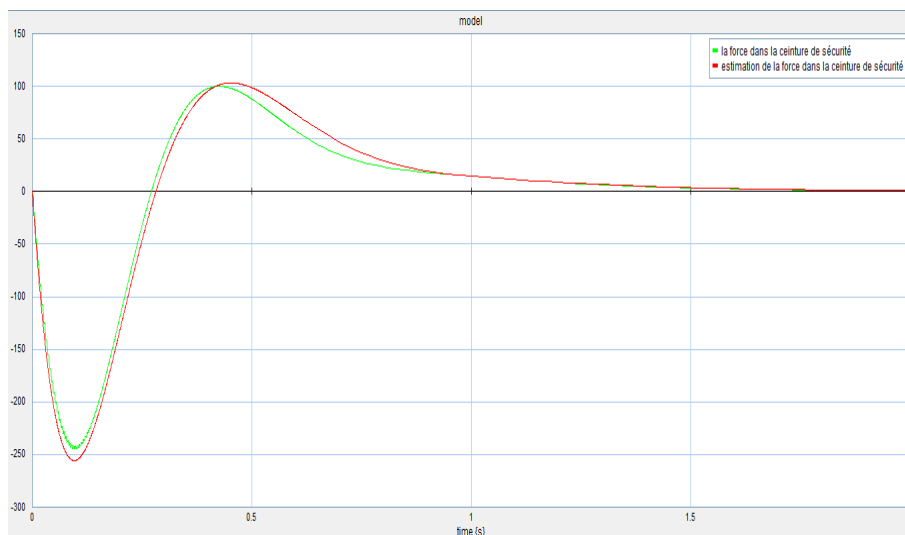


Figure 3.25 : Estimation de la force dans la ceinture de sécurité

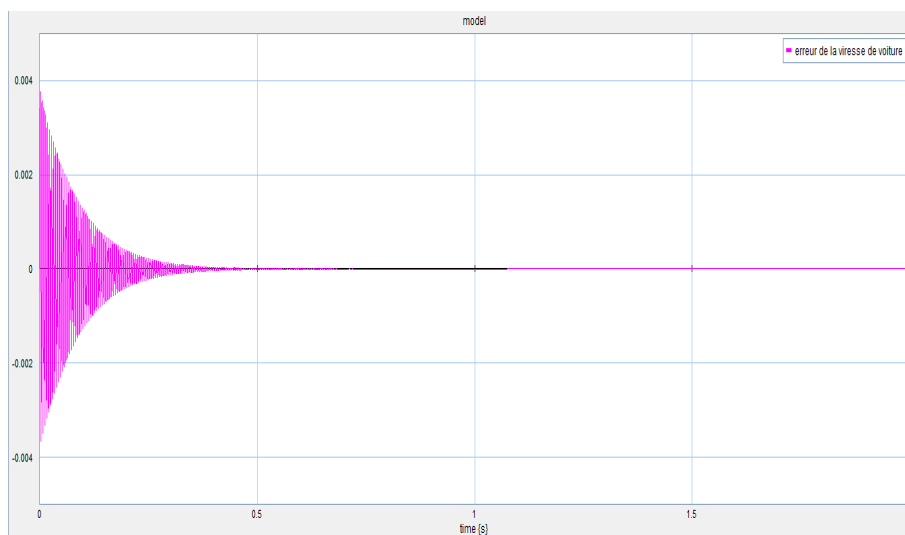


Figure 3.26 : Erreur de la viresse de voiture

3.5.3.2 Le modèle bicyclette

a) Modélisation mathématique

Nous considérons le modèle bicyclette (Segel, 1956), ce modèle est, notamment utilisé dans les travaux relatifs au contrôle des trajectoires d'une automobile (Solmaz *et al.*, 2008), (Marino et Scalzi, 2010). Ce modèle est également utilisé pour les estimations des efforts latéraux d'interaction entre le pneumatique et la chaussée (Baffet, 2007), (Baffet *et al.*, 2009) et (Ouahi *et al.*, 2013) ou dans l'estimation des variables caractéristiques du comportement latéral du véhicule (Stéphane, 2004), (Stéphane *et al.*, 2007). Le modèle

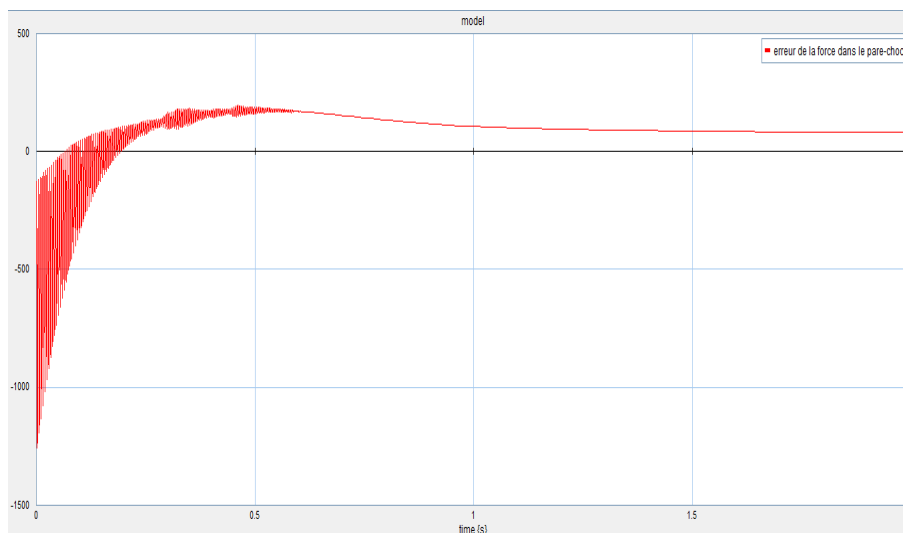


Figure 3.27 : Erreur de la force dans le pare-chocs

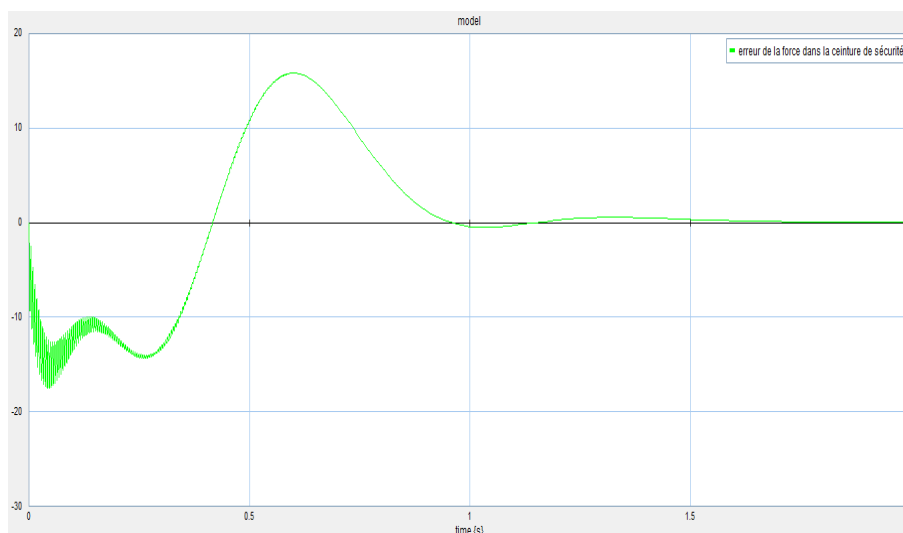


Figure 3.28 : Erreur de la force dans la ceinture de sécurité

bicyclette suppose un véhicule plan et symétrique simplifié par deux roues virtuelles placées au milieu de chaque essieu (figure 3.29).

Le modèle bicyclette est commandé par l'angle de braquage de la roue virtuelle avant (δ). Il permet de décrire les mouvements de lacet ($\dot{\psi}$) ainsi que la direction de la vitesse du centre de gravité du véhicule représentée par la dérive (β). Il s'écrit à partir du principe fondamental de la dynamique en considérant des efforts latéraux avant (F_{yf}) et arrière (F_{yr}). En supposant que la norme de la vitesse du centre de gravité du véhicule

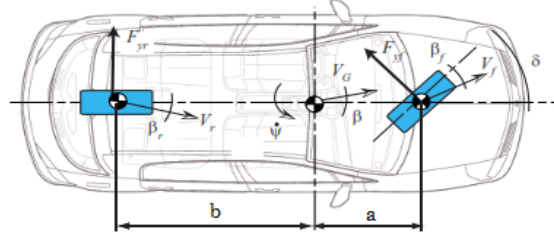


Figure 3.29 : Modèle de bicyclette

V_G est constante, il vient:

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = \frac{1}{I_{zz}}(aF_{yf} - bF_{yr}) \\ \dot{\beta} = \frac{1}{V_G M_G}(F_{yf} + F_{yr}) \end{cases} \quad (3.54)$$

Les paramètres du modèle sont la masse du véhicule M_G , l'inertie de lacet I_{zz} et la position du centre de gravité par rapport aux essieux avant a et arrière b .

Modélisation des efforts

En supposant de faibles dynamiques, une vitesse constante et en posant l'hypothèse de petits angles de dérive, il est possible de considérer les efforts latéraux linéaires avant et arrière comme proportionnels aux dérives avant et arrière.

$$\begin{cases} F_{yf} = D_f \beta_f \\ F_{yr} = D_r \beta_r \end{cases} \quad (3.55)$$

A partir de relations cinématiques il est possible d'exprimer les angles de dérive avant et arrière à partir des caractéristiques de la vitesse du centre de gravité et de la vitesse de lacet du véhicule.

$$\begin{cases} \beta_f = \delta - \beta + \frac{a\dot{\psi}}{V_G} \\ \beta_r = \beta + \frac{b\dot{\psi}}{V_G} \end{cases} \quad (3.56)$$

En remplaçant les expressions des dérives avant et arrière dans l'équation 3.55, on obtient le modèle d'effort suivant:

$$\begin{cases} F_{yf} = D_f(\delta - \beta + \frac{a\dot{\psi}}{V_G}) \\ F_{yr} = D_r(\beta + \frac{b\dot{\psi}}{V_G}) \end{cases} \quad (3.57)$$

En introduisant le modèle de pneumatique linéaire (l'équation 3.57) dans les équations de la dynamique du châssis (équation 3.54), nous obtenons l'équation d'évolution "classique" du modèle bicyclette linéaire.

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = \frac{1}{I_{zz}}(aD_f(\delta - \beta - \frac{a\dot{\psi}}{V_G}) - bD_r(-\beta + \frac{b\dot{\psi}}{V_G})) \\ \dot{\beta} = \frac{1}{V_G M_G}(D_f(\delta - \beta - \frac{a\dot{\psi}}{V_G}) + D_r(-\beta + \frac{b\dot{\psi}}{V_G})) \end{cases} \quad (3.58)$$

En considérant que le braquage est connu et que nous disposons de la mesure de la vitesse de lacet, le système se met sous la forme d'un système linéaire à entrée connue, s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\delta \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.59)$$

Le vecteur d'état x est constitué de la vitesse de lacet au centre de gravité et de la dérive $x = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^2$. L'entrée connue est le braquage $\delta \in \mathfrak{R}$ et le vecteur de sortie

est composé de la vitesse de lacet $y = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}$. La matrice d'état s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-a^2 D_f - b^2 D_r}{I_{zz} V_G} & \frac{-a D_f + b D_r}{I_{zz}} \\ \frac{-D_f a - D_r b}{V_G^2 M_G} & \frac{-D_f - D_r}{V_G M_G} \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}, \text{ la matrice de commande associée à entrée}$$

connu est $B = \begin{pmatrix} \frac{a D_f}{I_{zz}} \\ \frac{D_f}{M_G V_G} \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{2 \times 1}$, la matrice de sortie est $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{1 \times 2}$.

b) Modélisation graphique

Le modèle bond graph du modèle «bicyclette» est obtenu en suivant la procédure de construction de modèle donné dans (Dauphin-Tanguy, 2000). Une jonction 1 est associée à chaque variable de vitesse (longitudinale, transversale et de lacet) du véhicule. La vitesse longitudinale est considérée constante, donc nous ne lui associons pas d'inertie. Les transformateurs sont utilisés pour représenter le passage de vitesse de translation en vitesse de rotation et les jonctions 0 pour les relations entre vitesses données équation 3.54. Les sources ajoutées pour compléter le modèle bond graph représenté par la figure 3.30.

Les efforts latéraux linéaires sont générés par les résistances R_f et R_r , dont les expressions sont données par les equations 3.60, 3.61.

$$R_f = \frac{D_f}{V_G} \quad (3.60)$$

$$R_r = \frac{D_r}{V_G} \quad (3.61)$$

Pour obtenir graphiquement l'équation 3.58 "classique" du modèle de bicyclette linéaire, nous faisons quelques changements sur les variables utilisées dans les équations jonction 0, 1, transformateurs, gyrateur et les éléments dynamiques.

A partir des relations présentées dans le tableau 3.4, on obtient les équations qui peuvent être présentées sous la forme de l'équation 3.58.

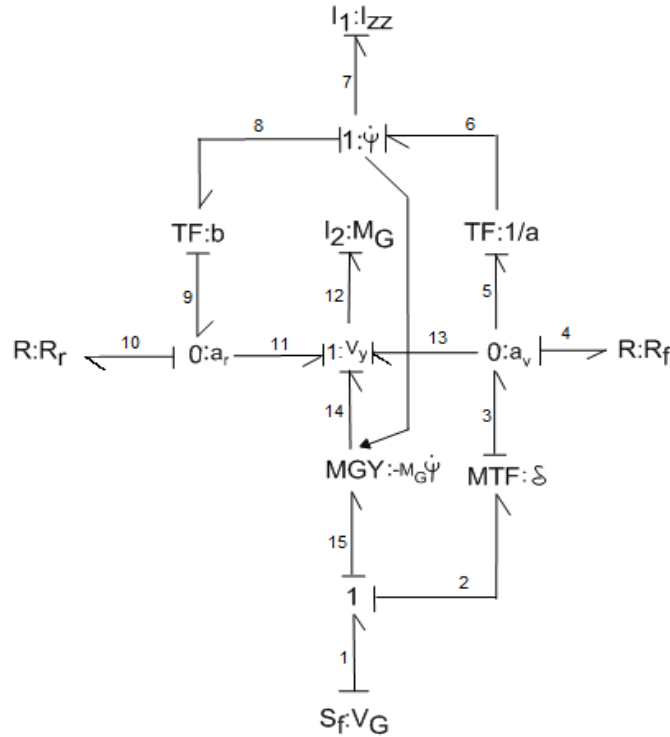


Figure 3.30 : Modèle bond graph de la bicyclette

Jonctions 1	$\begin{cases} e_1 = e_2 + e_{15} \\ f_1 = f_2 = f_{15} = V_G \end{cases}$	$\begin{cases} e_{12} = e_{11} + e_{13} + e_{14} \\ f_{11} = f_{12} = f_{13} = f_{14} = V_G \beta = V_y \end{cases}$	$\begin{cases} e_7 = e_6 - e_8 \\ f_7 = f_6 = f_8 = f_{12} = \dot{\psi} \end{cases}$
Jonctions 0	$\begin{cases} f_3 = f_4 + f_5 + f_{13} \\ e_3 = e_4 = e_5 = e_{13} = a_v \end{cases}$	$\begin{cases} f_9 = f_{10} + f_{11} \\ e_9 = e_{10} = e_{11} = a_r \end{cases}$	
Transformateurs	$b : \begin{cases} e_8 = b e_9 \\ f_9 = b f_8 \end{cases}$	$\frac{1}{a} : \begin{cases} e_6 = a e_5 \\ f_5 = a f_6 \end{cases}$	(MTF) δ : $\begin{cases} e_2 = \delta e_3 \\ f_3 = \delta f_2 \end{cases}$
éléments dynamique	$I_1 : \begin{cases} \dot{p}_7 = e_7 \\ f_7 = \frac{1}{I_{zz}} p_7 = \dot{\psi} \end{cases}$	$I_2 : M_G \begin{cases} \dot{p}_{12} = e_{12} \\ f_{12} = \frac{1}{M_G} p_{12} = V_y = V_G \cdot \beta \end{cases}$	
Gyrateur		$r : -M_G \cdot \dot{\psi} \begin{cases} e_{15} = r f_{14} \\ e_{14} = r f_{15} \end{cases}$	

Tableau 3.4 : Liste des équations pour les éléments dynamiques, jonctions, transformateurs, et gyrateur

c) Etude des observateurs P et PI pour le modèle de la bicyclette

Pour la conception d'un observateur Bond Graph (OBG) P et PI, les étapes ci-dessous doivent être vérifiées:

Étape 1: Vérification de l'existence de sorties redondantes: L'intérêt d'éliminer les sorties redondantes est d'éviter les calculs inutiles, mais cette étape est annulée dans ce

cas d'étude, puisque le modèle ne dispose que d'un seul détecteur.

Étape 2: Vérification d'observabilité structurelle: Le modèle bon graph en causalité intégrale (BGI) et le modèle bond graph en causalité dérivée (BGD) sont présentés, respectivement, dans les figures 3.31 et 3.32. On note que, sur le modèle BGD, tous les

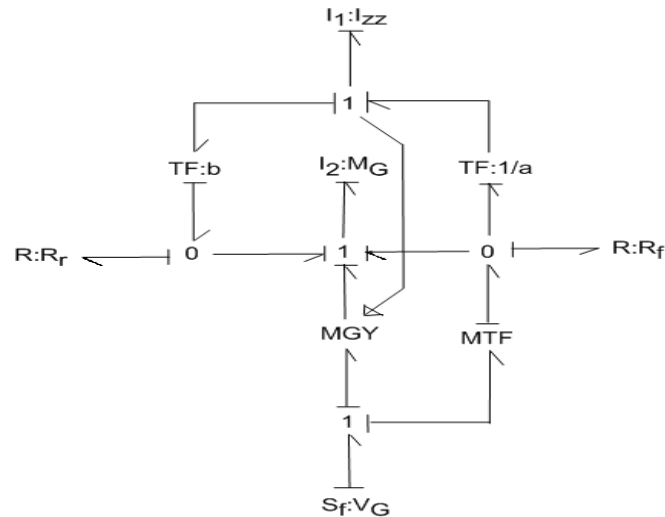


Figure 3.31 : Méthode Bond Graph de bicyclette en causalité intégrale.

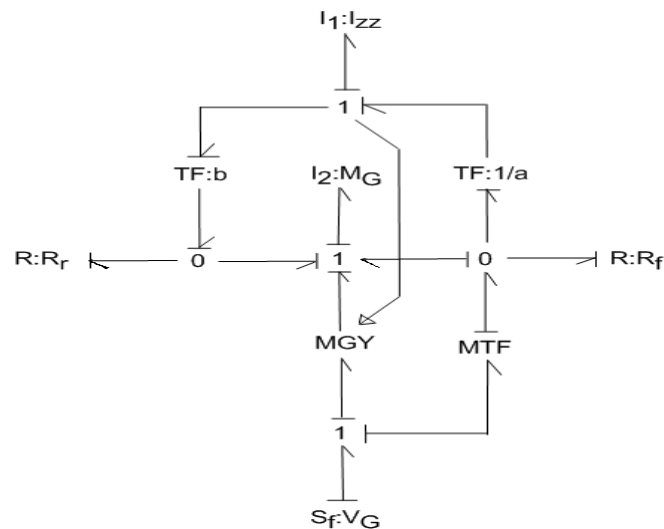


Figure 3.32 : Méthode Bond Graph de bicyclette en causalité dérivée.

éléments dynamiques admettent une causalité dérivée, donc le modèle est structurellement observable.

Étape 3: Construction de l'observateur bond graph: Le modèle Bond Graph de

l'observateur est obtenu à partir du modèle bond graph initial avec une injection de sortie linéaire appliquée en ajoutant $K_i(y - \hat{y})$ et $K_P(y - \hat{y}) + K_I \int (y - \hat{y})$ dans les éléments dynamiques du modèle d'observateur (voir les figures 3.33,3.34) Les deux M_{Se} sont des sources modulées d'effort pour l'élément I .

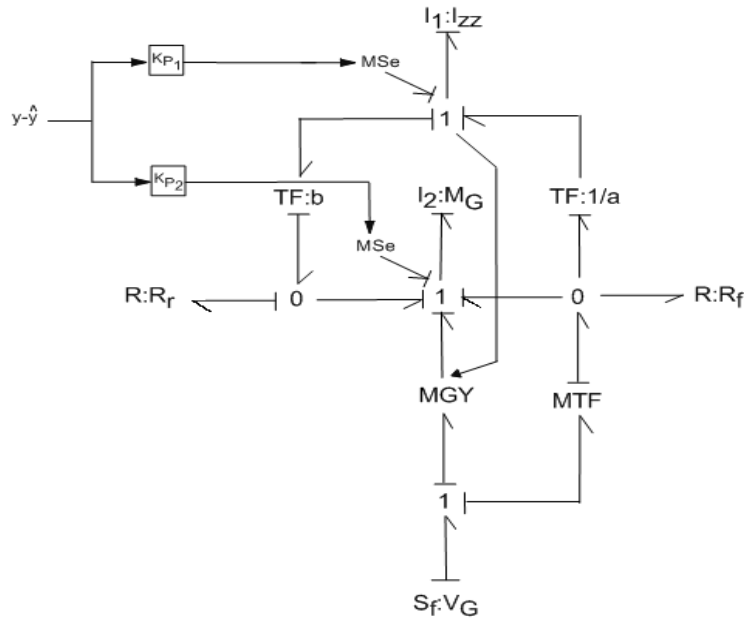


Figure 3.33 : Méthode Bond Graph d'observateur P "bicyclette".

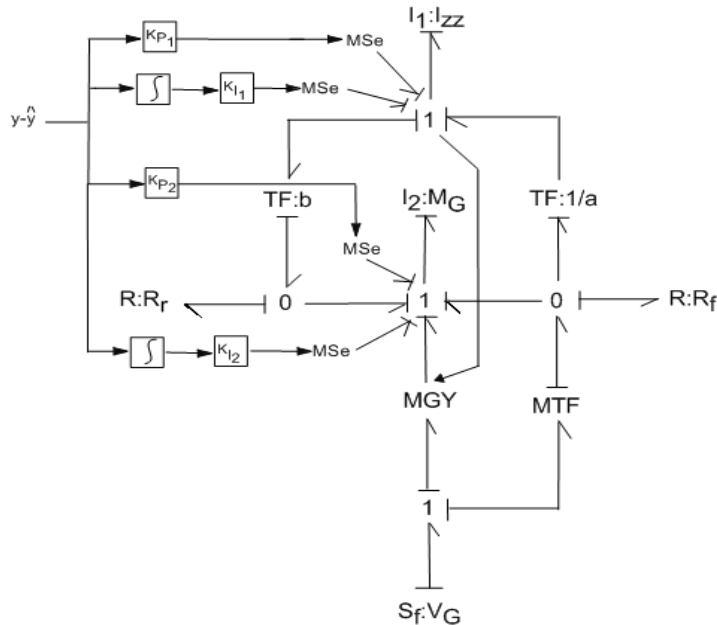


Figure 3.34 : Méthode Bond Graph d'observateur PI "bicyclette".

Étape 4: Calcul des gains K_P et K_I : Les variables d'état pour ce système (la figure 3.33), sont associées à deux éléments inductifs I dans la causalité intégrale. L'ordre de modèle est donc égal à 2. Le polynôme caractéristique de la matrice d'état A est extraite du calcul de gain des différentes familles de cycles causaux à partir de ce théorème (Rahmani, 1993) Ainsi, le polynôme caractéristique associé à la matrice A de ce modèle est défini par:

$$P_A(S) = \det(SI - A) = s^2 + \left[\left(\frac{a^2 D_f + b^2 D_r}{I_{zz} V_G} \right) + \left(\frac{a D_f + b D_r}{V_G M_G} \right) \right] S + \left(\frac{a^2 D_f + b^2 D_r}{I_{zz} V_G} \right) \left(\frac{a D_f + b D_r}{V_G M_G} \right) - \left(\frac{a D_f - b D_r}{I_{zz}} \right) \left(\frac{a^2 D_f - b^2 D_r}{V_G^2 M_G} \right) \quad (3.62)$$

Les pôles du modèle sont respectivement:

$$\begin{aligned} s_1 &= -15.4550 + 5.0421i \\ s_2 &= -15.4550 + 5.0421i \end{aligned} \quad (3.63)$$

Pour calculer le gain K_P (la figure 3.33), on choisit les poles de l'observateur pour être un peu plus rapide que ceux du modèle.

Les valeurs des pôles souhaités ou désirés sont respectivement:

$$\begin{aligned} s_{1_d} &= -26 \\ s_{2_d} &= -27 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Ce qui donne le polynôme caractéristique désiré suivant:

$$P_d(S) = S^2 + 53S + 702 \quad (3.65)$$

La détermination du gain K_P de l'observateur de Luenberger basée sur les coefficients du polynôme caractéristique $P_{(A-K_P C)}$ obtenu en appliquant le théorème (Rahmani, 1993) sur le modèle bond graph de l'observateur.

$$P_{(A-K_P C)}(S) = P_d(S) = S^2 + 53S + 702 \quad (3.66)$$

L'identification terme à terme de $P_d(S)$ et $P_{(A-K_P C)}(S)$ conduit aux valeurs des gains de l'observateur $K_{P_1} = 1.7146$ et $K_{P_2} = 14.4136$.

Pour l'observateur PI, les gains K_P et K_I doivent être sélectionnés afin de stabiliser la dynamique d'erreur (équation 3.6) (Beale et Shafai, 1989) et de garantir un bon taux de convergence. Les techniques de placement des pôles peuvent être appliquées (Rahmani, 1993) pour calculer ces gains.

Le calcul se fait à partir des coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A_{PI} associée à l'observateur PI, définie dans l'équation 3.67.

$$P_{A_{PI}}(S) = S^{n+m} + \beta_1 S^{n+m-1} + \dots + \beta_{n+m-1} S + \beta_{n+m} \quad (3.67)$$

L'ordre de ce polynôme est égal à $(n + m)$ à cause de l'action intégrale de l'erreur entre les sorties, qui fournit m nouvelles variables d'état. L'observateur PI aura de meilleures propriétés de filtrage qu'un observateur proportionnel. Cependant, dans les applications les plus réalistes, il est possible d'avoir la présence de perturbations non mesurables qui pourraient affecter le système considéré.

En appliquant la méthode de calcul de K_I et en utilisant les valeurs de K_P obtenues précédemment, nous considérons les pôles suivants:

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 \\ -27 \\ -10 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Le polynôme souhaité pour l'observateur PI:

$$P_{A_{PI}}(S) = S^3 + 63S^2 + 1052S + 7020 \quad (3.69)$$

Avec ces coefficients on obtient trois équations dépendantes de K_I et K_P . Nous gardons la valeur de K_{P2} , et nous calculons les valeurs de K_{P1}, K_{I1} et K_{I2} qui génèrent les coefficients désiré de polynôme.

$$K_P = \begin{bmatrix} K_{P1} \\ K_{P2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.09 \\ 14.4136 \end{bmatrix} \quad K_I = \begin{bmatrix} K_{I1} \\ K_{I2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -177 \\ 312.3 \end{bmatrix}$$

d) Simulation

Les conditions initiales des états du modèle BG dans la causalité intégrale sont considérées comme nulles. Des essais de simulation ont été mise en oeuvre dans le logiciel 20 – *sim* et les valeurs des paramètres (Ouahi *et al.*, 2010) sont définis dans le tableau 3.5.

Dans cette partie, nous allons considérer que le paramètre de la variance pour le Modèle BGO avoir une variation de -10% en comparaison avec les paramètres du modèle BG. Afin d'évaluer les performances des observateurs, ils seront testés avec un essai représentatif de la dynamique latérale: le franchissement de chicane ISO pour des vitesses de 40 et 90[km/h], réalisé à l'aide du simulateur de véhicule Callas. L'emplacement des couloirs est présenté dans la figure 3.35.

$M_G = 1683$ (Kg)
$I_{zz} = 3015$
$L_f = 1.1824$ (m)
$L_r = 1.5176$ (m)
$D_f = 96000$ (N/rad) pour 2 pneus
$D_r = 69500*2$ (N/rad) pour 2 pneus
$V_G = 40/3.6$ (m/s)
$R_f = \frac{D_f}{V_G} = 8640.0086$
$R_r = \frac{D_r}{V_G} = 12510.0125$

Tableau 3.5 : Les valeurs des paramètres du modèle bicyclette

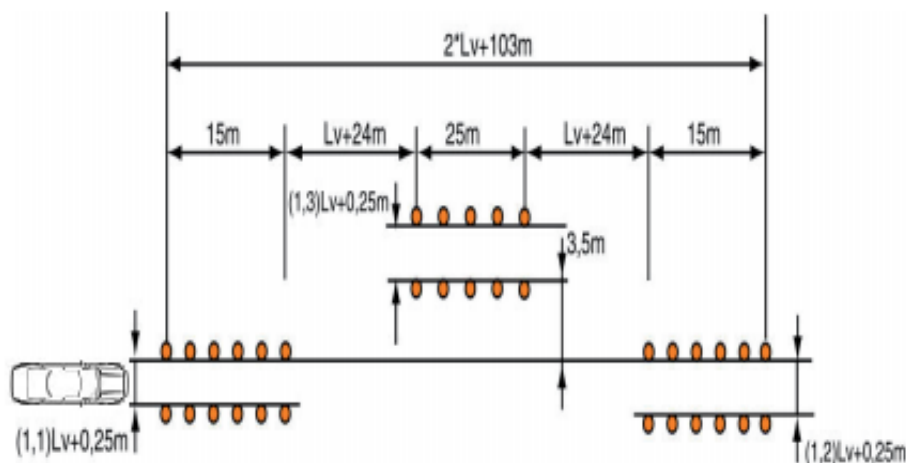
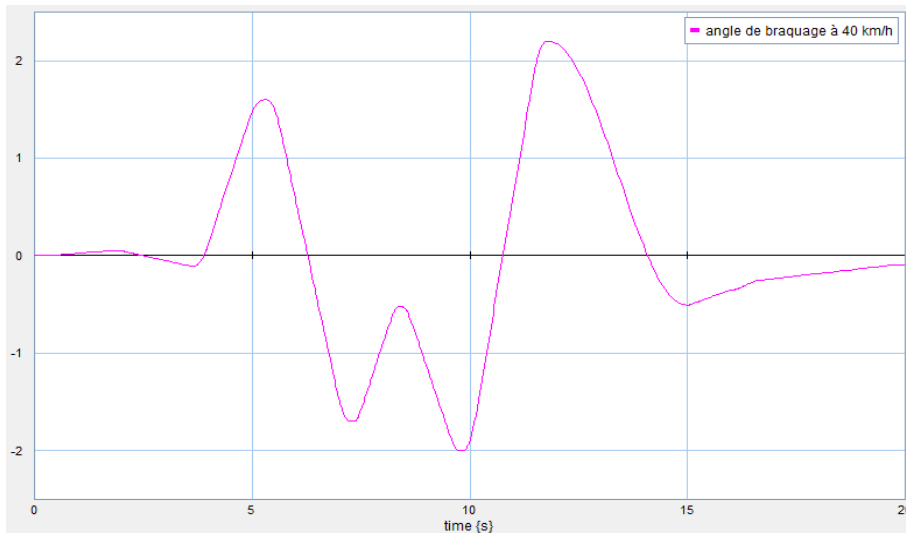


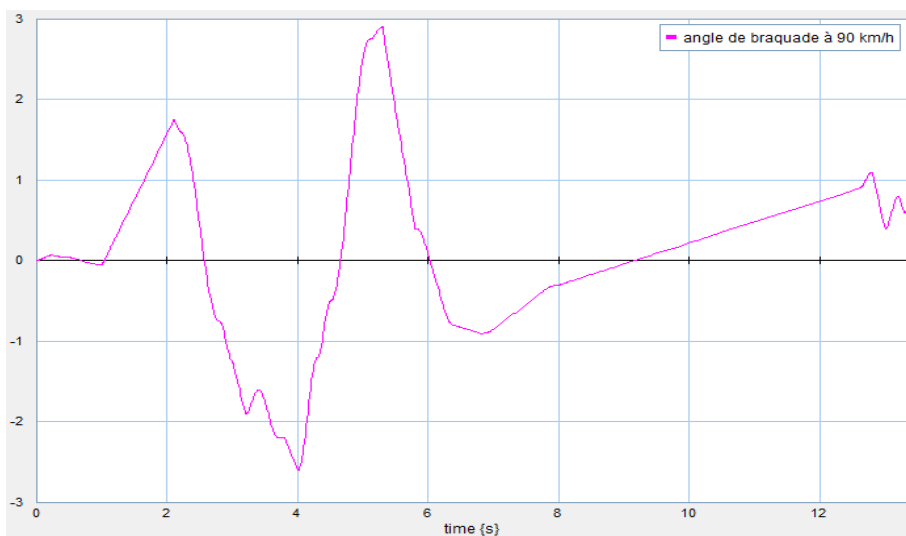
Figure 3.35 : Chicane ISO: positionnement des couloirs

Les erreurs d'estimation convergent vers zéro, comme il est montré sur les figures 3.37 et 3.38. Par conséquent, l'erreur OPI Moins par rapport à OP, il améliore le rendement et l'efficacité de l'observateur PI.

À partir de la mesure de la vitesse de lacet nous avons estimé l'angle de dérive, en outre, nous avons constaté que les résultats de l'observateur PI sont plus faibles que l'observateur P.



(a) à 40 Km/h

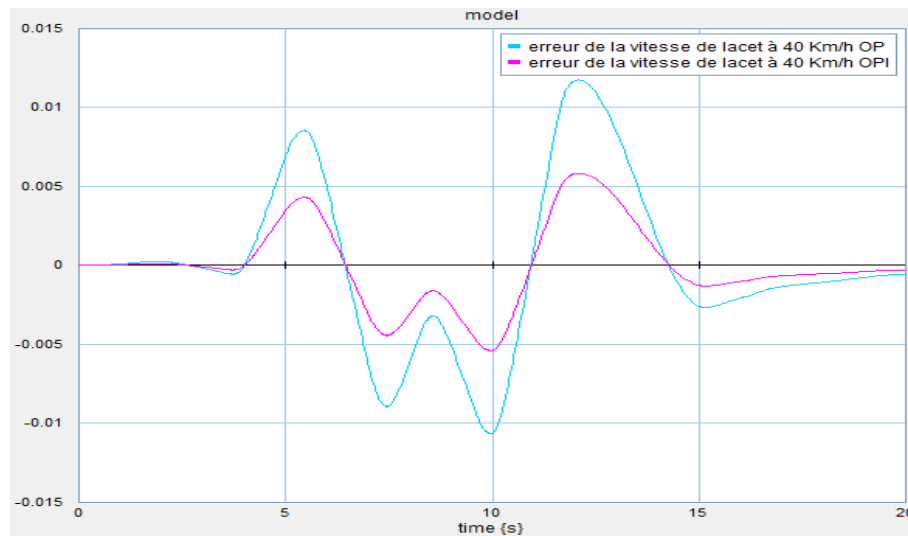


(b) à 90 Km/h

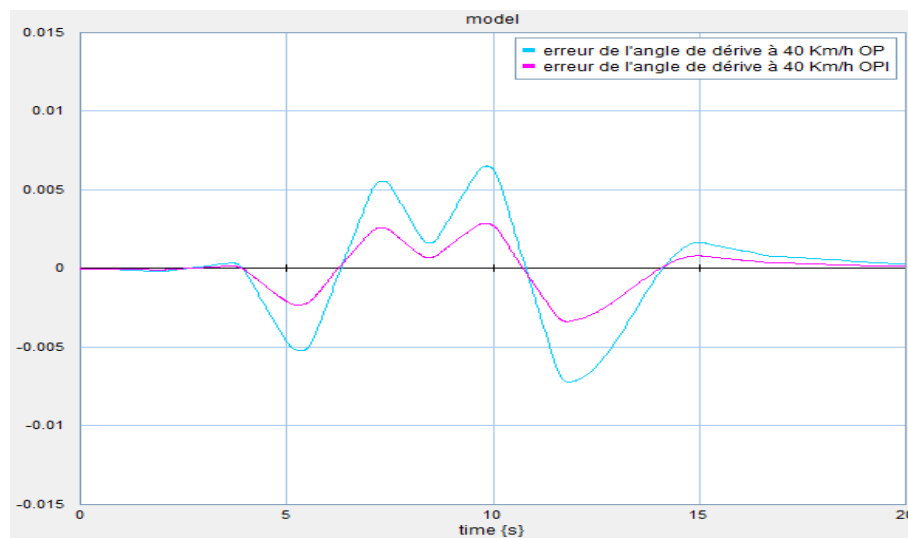
Figure 3.36 : Angle de braquage

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir défini les principaux éléments d'un véhicule et la description de ses mouvements, nous avons présenté et modélisé par l'approche bond graph un système multicorps de la dynamique d'une automobile, les équations fondamentales de la dynamique confirment la modélisation de ce système. Nous avons ensuite synthétisé l'observateur de luenberger par cette approche et nous avons appliqué cette synthèse par un modèle simplifié de la ceinture de sécurité, le résultat de simulation effectuée tend vers zéro, mais l'observateur d'ordre complet (Luenberger ou proportion-



(a) erreur de la vitesse de lacet de OP et OPI

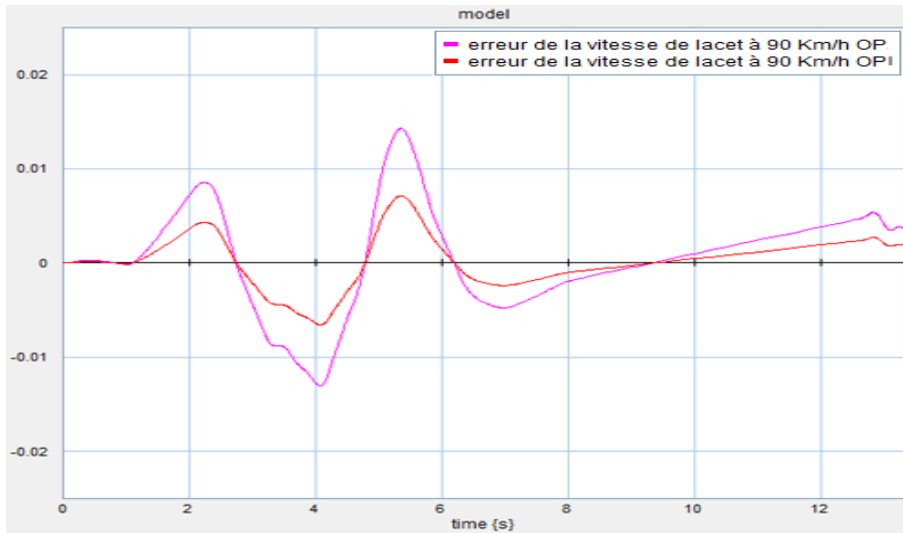


(b) erreur de l'angle de dérive de OP et OPI

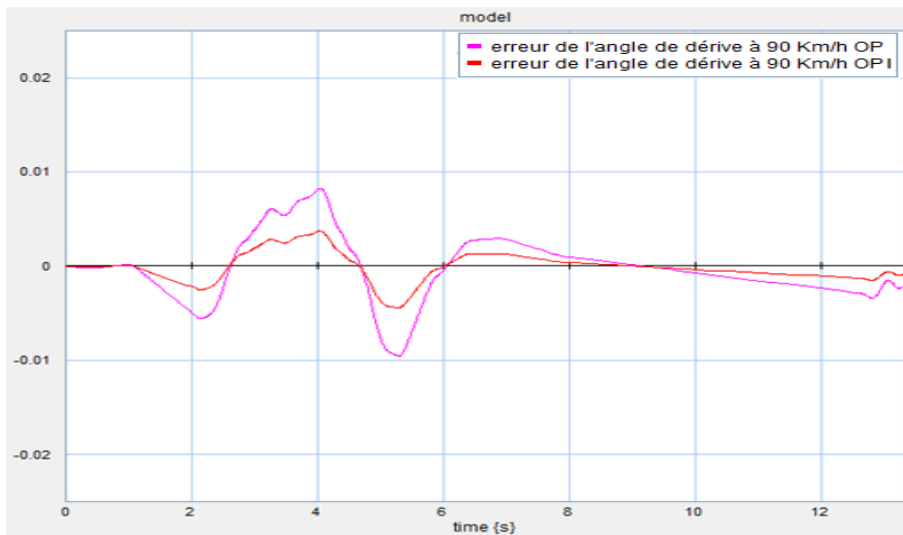
Figure 3.37 : Erreurs de OP et OPI à 40 Km/h

nel) est limité. Enfin, nous avons modélisé un modèle bicyclette par l'approche bond graph et défini aussi la synthèse d'observateur proportionnel intégrale pour assurer la robustesse contre les perturbations, les résultats de simulation sont appliqués par le modèle bicyclette donner les erreurs observateur PI de la vitesse de lacet et de l'angle de dérive plus petits par rapport à l'observateur P.

Dans le chapitre qui suit, nous nous intéresserons à la modélisation par l'approche bond graph des différents systèmes éoliens, à savoir le modèle à une masse avec la génératrice synchrone à aimant permanent et le modèle à deux masses. Le modèle à



(a) erreur de la vitesse de lacet de OP et OPI



(b) erreur de l'angle de dérive de OP et OPI

Figure 3.38 : Erreurs de OP et OPI à 90 Km/h

deux masses non linéaires sera utilisé pour la synthèse de loi de commande.

Chapitre 4

Modélisation des éoliennes par l'approche bond graph et la commande par mode glissant

Dans ce chapitre, nous rappelons particulièrement la commande par mode glissant, après avoir brièvement décrit le mécanisme d'extraction de l'énergie du vent. Ensuite on se consacre deux éoliennes par l'approche bond graph. Les deux modèles seront présentés : le modèle à deux masses et le modèle à une seule masse avec la génératrice synchrone à aimant permanent. Le premier est plus général et peut être appliqué à n'importe quelle éolienne. Alors que le deuxième modèle vient de la simplification de celui à deux masses, il est destiné aux éoliennes de grande taille à axes rigides. Nous élaborons la loi de la commande par mode glissant sur le modèle à deux masses, lorsque le vent est faible, notre objectif dans cette partie est de maximiser l'énergie capturée et en conséquence l'énergie produite par cette éolienne. Les résultats de simulations obtenus montrent l'efficacité de l'approche proposée. La stabilité du système en boucle fermée sera étudiée en utilisant le critère de Lyapunov.

4.1 Commande par modes glissants

L'utilisation de la commande non linéaire poursuit sa croissance phénoménale ces dernières années, En faveur de l'augmentation de nombreuses procédés industriels, En plus la plupart des systèmes industriels sont des systèmes non linéaires.

Parmi les lois de commande utilisées on trouve la commande robuste par modes glissants, cette dernière est mis en oeuvre en particulier aux systèmes non linéaires (Slotine, 1984), (Sira-Ramirez, 1988), (Utkin, 1992). Cette approche de commande a

été largement utilisée pour commander une catégorie étendue de systèmes non linéaires (Slotine, 1984), (Perruquetti et Barbot, 2002), (Boumhidi, 2005).

L'essentiel de la commande par mode glissant d'un système est suit au voisinage de la surface de glissement. Il existe deux avantages principales de cette commande, le premier c'est le comportement dynamique du système au voisinage de la surface de glissement, On dit que le système est en régime glissant. le deuxième, son comportement est non seulement robuste, mais également insensible aux incertitudes dont la commande a été ajustée. Néanmoins, si le régime glissant est mis en place, la discontinuité de la commande engendre des oscillations de fréquence élevée, cette phénomène s'appelle la réticence (chattering). C'est un grand défaut de commande par mode glissant, car elle génère un bruit sur des systèmes mécaniques. Parmi les solutions possible à ce phénomène, on cite la fonction de saturation ou la tangente (Slotine et Li, 1991). Il existe d'autres méthodes pour réduire ce phénomène et qui se basent sur la théorie des modes glissants d'ordre supérieur (Emelyanove *et al.*, 1993), (Levant, 1993), (Utkin et Lee, 2006).

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un système éolien ayant un comportement non linéaire, mono-entrée mono-sortie, cette classe de système peut être décrite sous forme canonique par l'équation dynamique suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = f(x, t) + bu(x, t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

ou équivalent :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(x, t) + bu(x, t) \\ y = x \end{cases} \quad (4.2)$$

Où

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T \in \mathfrak{R}^n$ représente le vecteur d'état mesurable du système, $u(x, t) \in \mathfrak{R}$ et $y(t) \in \mathfrak{R}$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système.

$f(x, t)$ et b sont deux fonctions nominales à valeurs dans \mathfrak{R} , tels que le comportement dynamique du système et la constante sont connus (le gain de la commande). Avec $b \neq 0$.

L'objectif dans ce chapitre est d'assurer la stabilité et de poursuivre la trajectoire de référence via le mode glissant, la conception de la commande par mode glissant revient essentiellement à déterminer trois étapes essentiels:

- Le choix de la surface de glissement.
- L'établissement des conditions d'existence.
- La synthèse de la loi de commande.

4.1.1 Le choix de la surface de glissement

Le principe majeur de la commande est d'assurer la poursuite de la trajectoire d'un signal de référence $y_r(t)$ par la sortie $y(t)$ du système 4.1, donc l'erreur $e = y(t) - y_r(t)$ tend vers 0. La synthèse de la surface de glissement est établie à partir de l'erreur de poursuite et du degré du système relatif. Ce degré n présente le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie $y(t)$ par rapport au temps pour faire apparaître l'entrée de façon formelle (Isidori, 1995), (Mahmoudi *et al.*, 1999). On trouve dans la littérature, la variable de glissement est souvent choisie sous la forme linéaire suivante:

$$\sigma(x, t) = e^{(n-1)} + c_{n-1}e^{(n-2)} + \dots + c_2\dot{e} + c_1e \quad (4.3)$$

où les coefficients c_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$, sont choisis d'une manière que le polynôme $e^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i-1)}$ soit un polynôme d'Hurwitz. autrement dit, toutes les racines du polynôme caractéristique associé sont à partie réelle négative (le système réduit soit stable). Lorsque la variable de glissement $\sigma(x, t)$ converge vers zéro, l'erreur de poursuite e converge asymptotiquement vers zéro, avec une dynamique imposée par le choix des c_i .

4.1.2 L'établissement des conditions d'existence

Le but de loi de commande par modes glissants est d'obliger les trajectoires d'état du système à atteindre et de rester sur la surface de glissement, malgré la présence d'incertitudes sur le système. autrement dit, que la loi de commande doit rendre la surface de glissement localement attractive (disons converge au voisinage de la surface de glissement). de même, la loi de commande doit être calculée en vérifiant une condition qui assure la stabilité de $\sigma(x, t) = 0$. Cette condition s'appelle condition d'attractivité. L'une des méthodes les plus utilisées pour tester la stabilité de la commande par modes glissants est le critère de Lyapunov. On suppose que l'état d'équilibre soit zéro, et $V(x)$ la fonction de Lyapunov, sa dérivée temporelle est $\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt}$. Le signe de $\dot{V}(x)$ donne une indication sur la stabilité du système. Si $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ et $\dot{V}(x) < 0$, le système est asymptotiquement stable.

Pour calculer la condition d'existence des modes glissants, on fait appel aux fonctions

de Lyapunov quadratiques de type:

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (4.4)$$

Cette fonction donnée par 4.4 est définie évidemment positive. Une condition nécessaire et suffisante pour que la variable de glissement $\sigma(x, t)$ tende vers 0 est que \dot{V} soit définie négative (Utkin, 1992):

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma\dot{\sigma} < 0 \quad (4.5)$$

L'inégalité 4.5 est appelée condition d'attractivité. Cette condition garantit seulement la convergence asymptotique vers la surface de glissement. Pour assurer une convergence de $\sigma(x, t)$ vers 0 en temps fini, on peut utiliser généralement la condition d'attractivité non-linéaire dite condition de η -attractivité (Slotine et Sastry, 1983):

$$\sigma\dot{\sigma} < -\eta|\sigma|, \quad \eta > 0 \quad (4.6)$$

Où η est une constante strictement positive.

4.1.3 Synthèse de la loi de commande

Dès que la surface de glissement est définie, l'étape suivante consiste à établir une loi de commande pour stabiliser le système 4.1 à zéro en temps fini. La commande par modes glissants d'ordre 1 se compose de deux termes: L'un dit commande équivalente et permet le glissement de l'état sur la surface de glissement. L'autre terme dit de robustesse permet de forcer l'état à rester sur cette surface.

$$u = u_{eq} + u_s \quad (4.7)$$

où

- u_{eq} est la commande équivalente permet le glissement au long de la surface $\sigma(x, t) = 0$.
- u_s représente la commande discontinue assurant la convergence sur le système vers la surface de glissement.

En absence des incertitudes et des perturbations du système 4.1. La partie u_{eq} est équivalent à un mouvement de glissement idéal. Physiquement, elle peut être comme une valeur moyenne de la commande réelle. Elle est obtenue grâce aux conditions d'invariance de la surface de glissement (Utkin, 1992):

$$\dot{\sigma} = \sigma = 0 \quad (4.8)$$

Afin de satisfaire la condition 4.6, ce terme est donné par l'équation suivante,

$$u_s = -k_d \text{sign}(\sigma) \quad (4.9)$$

avec K_d est une constante positive qui représente le gain de la commande, choisi suffisamment grand de manière à rejeter les perturbations et les incertitudes du système.

4.1.4 Phénomène de réticence

Le phénomène de réticence (chattering) est le principal inconvénient de la commande par modes glissants d'ordre 1. Ce phénomène est discontinu pour la commande autour de la surface de glissement, qui comporte des variations brusques et rapides du signal de commande. Ce qui peut exciter les hautes fréquences du système et même conduire à l'endommager.

Pour réduire ce phénomène, Plusieurs techniques ont été proposées dans la littérature (Slotine et Sastry, 1983), (Slotine, 1984). Parmi ces techniques les plus utilisées on cite la couche limite qui a été proposée par (Slotine, 1984), (Slotine et Li, 1991), elle consiste à effectuer une approximation continue des discontinuités dans la loi de commande au voisinage de la surface de glissement. Cette technique permet de remplacer la fonction *sign* discontinue dans la loi de commande par une fonction plus lisse à l'intérieure de la couche limite de $\sigma(x, t) = 0$. Parmi les fonctions utilisées on cite: la fonction saturation, la fonction tangente...

4.2 Modélisation aérodynamique et mécanique de l'éolienne

4.2.1 Présentation des différents types d'éoliennes

L'éolienne est une machine qui transforme l'énergie cinétique du vent en énergie mécanique. Dans la réalité, l'énergie cinétique du vent est captée par les pales de la turbine avant le transformer en énergie mécanique, celle-ci est transformée en énergie électrique par un générateur de type asynchrone ou synchrone. En vue de conception, les éoliennes peuvent être groupées en deux catégories ça dépend de l'orientation de leur axe de rotation par rapport à la direction du vent (vertical ou horizontal). En général, on trouve deux grandes familles de turbines éoliennes:

- Les éoliennes à axe vertical.
- Les éoliennes à axe horizontal.

4.2.1.1 Turbines éoliennes à axe vertical (VAWT)

Les éoliennes à axe vertical ont été les premiers systèmes développés pour produire l'électricité. Leur avantage est de trouver les organes de commande et le générateur au niveau du sol, ce qui permet de faciliter le dépannage en cas de dysfonctionnement. malheureusement ces types d'éoliennes sont actuellement négligées a cause de leurs faibles vitesses, des turbulences qui affectent le capteur d'énergie qui se situe au près du sol, et de la surface importante qu'elles occupent au sol particulièrement les éoliennes de

grande puissance.

Il existe essentiellement trois technologies VAWT qui sont le rotor de Savonius, le rotor de Darrieus classique et Darrieus en forme de H (Hau, 2006), (Gergaud, 2002), aujourd'hui elles sont moins utilisées à cause de leurs petites performances par rapport à axe horizontal. Elles fonctionnent sur le même principe avec une direction perpendiculaire du vent à l'axe de rotation.

4.2.1.2 Turbines éoliennes à axe horizontal (HAWT)

Aujourd'hui, les éoliennes à axe horizontal sont beaucoup plus utilisées. Ce type contient généralement entre deux et plusieurs pales fixes, ou orientables pour contrôler la vitesse de rotation (Ackermann et Söder, 2000). Le rotor tripale est plus utilisé, car il constitue un ajustement entre le coefficient de puissance, le coût et la vitesse de rotation d'éolien (Vries, 1983). Par conséquent, toutes les turbines éoliennes installées ou à installer prochainement sont de type tripale. Puisqu'ils sont plus stables car la charge aérodynamique est relativement identique et elles présentent le coefficient de puissance le plus haut pour le moment. Les pales peuvent atteindre des longueurs de $63m$ pour des éoliennes de plusieurs MW .

La turbine à axe horizontal reste face au vent. Elle est fixée au sommet d'une tour, ce qui lui permet de capter une quantité plus grandes d'énergie éolienne suivant leur orientation en fonction du vent, les turbines éoliennes à axe horizontal sont appelées en " aval " ou " en amont ". La figure 4.1 présente les deux types.

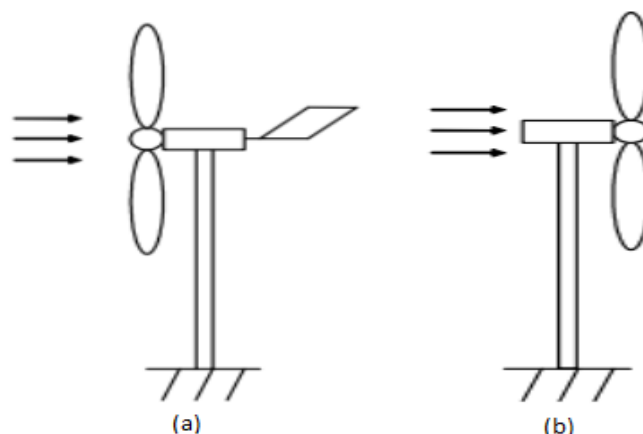


Figure 4.1 : Turbines éoliennes HAWT: (a) en amont, (b) en aval

4.2.2 Principe de conversion de l'énergie cinétique du vent

Le choix du site éolienne géographiquement est essentiel dans un projet de production d'énergie. Les caractéristiques du vent précisent la quantité de l'énergie qui pourra être extraite par éolien. Pour connaître les propriétés du site, Les mesures de la vitesse du vent et sa direction sur une grande période du temps sont nécessaires.

Les éoliennes ne fonctionnent que lorsque le vent souffle. Elles permettent de transformer l'énergie cinétique du vent en énergie mécanique sur un arbre de transmission, puis en énergie électrique à travers un aérogénérateur.

4.2.2.1 Puissance aérodynamique

La puissance du vent ou la puissance d'éolienne traverse une surface, est définie comme suit (Saget, 1998):

$$P_\nu = \frac{1}{2} \rho S \nu^3 \quad (4.10)$$

Où:

- ρ est la densité de l'air ("égale 22.1 kg/m^3 à la pression atmosphérique 15°C).
- S est la surface circulaire balayée par la turbine, le rayon R du cercle est déterminé par la longueur de la pale ($S = \pi R^2$).
- ν est la vitesse du vent.

La puissance aérodynamique P_a extraite par le rotor de la turbine (Annexe B), est généralement exprimée en utilisant le coefficient de puissance C_p donnée par (Johnson, 2001):

$$P_a = \frac{1}{2} \rho C_p(\lambda, \beta) \nu^3 \quad (4.11)$$

Le coefficient de puissance aérodynamique C_p est sans dimension. Il exprime la capacité de la turbine à extraire du vent. Ce paramètre de l'éolienne (Saget, 1998), (Patel, 1999) est une fonction non linéaire dépend de l'angle de calage β et de la vitesse spécifique λ . Il est indiqué comme le rapport entre la vitesse tangentielle du bout de la pale et la vitesse du vent (figure 4.2):

$$\lambda = \frac{\omega_r R}{\nu} \quad (4.12)$$

Où ω_r est la vitesse de rotation du rotor de la turbine.

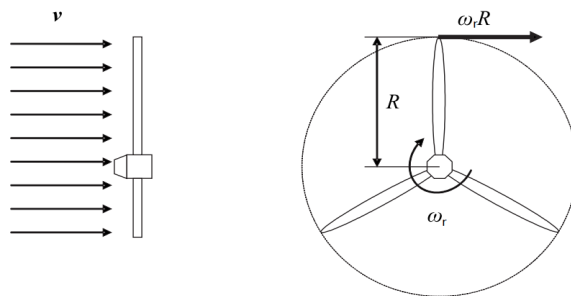


Figure 4.2 : Vitesse spécifique du rotor

4.2.2.2 Coefficient de puissance aérodynamique

Le coefficient de puissance $C_p(\lambda, \beta)$ est individuel à chaque éolienne, qu'il dépend du nombre de pales de rotor et de leurs formes géométriques (longueur, profil des sections) (Camblong, 2004).

Il est impossible d'extraire toute l'énergie disponible du vent qui arrive sur l'éolienne. Cela signifie que la puissance maximale récupérée par l'éolienne ne pourra jamais atteindre une valeur plus de 59% de la puissance disponible du vent (Louze, 2010). Cette valeur supérieure théoriquement du coefficient de puissance $C_{p,max}$ est donnée par la loi de Betz (Fox *et al.*, 2003):

$$C_{p,max} = \frac{16}{27} \simeq 0.5926 \quad (4.13)$$

Pour un angle de calage β donné, l'expression théorique généralement utilisée du coefficient de puissance est une régression polynomiale (Poitiers, 2003):

$$C_p(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \quad (4.14)$$

Ce coefficient avoir aussi une forme sinusoïdale (Aimani, 2004). le coefficient de puissance $C_p(\lambda, \beta)$ de l'éolienne que nous avons considéré dans ce chapitre est donné par (Heier, 1998):

$$C_p(\lambda, \beta) = c_1 \left(\frac{c_2}{\lambda_i} - c_3 \beta - c_4 \right) \exp\left(\frac{-c_5}{\lambda_i}\right) + c_6 \lambda \quad (4.15)$$

avec

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda + 0.08\beta} - \frac{0.035}{\beta^3 + 1}$$

$c_1 = 0.5176$, $c_2 = 116$, $c_3 = 0.4$, $c_4 = 5$, $c_5 = 21$ and $c_6 = 0.0068$

La figure 4.3 représente la variation de ce coefficient en fonction de la vitesse spécifique λ , pour plusieurs valeurs de β .

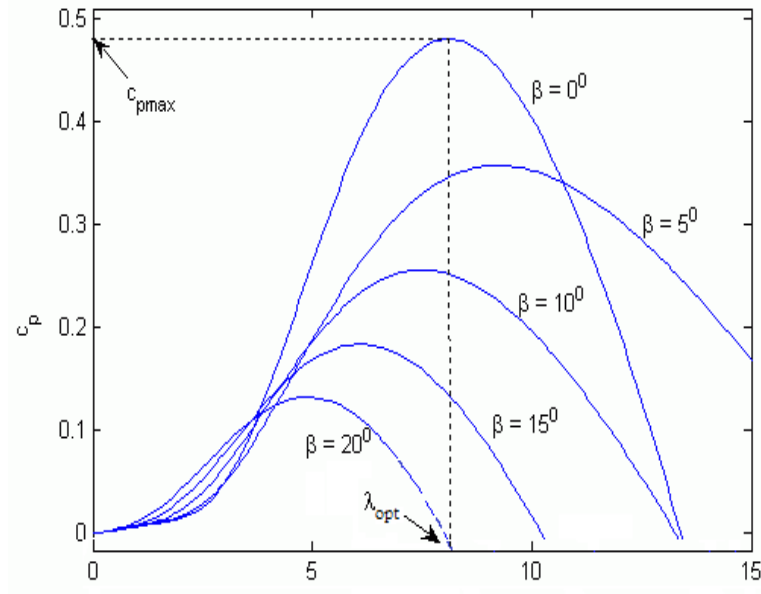


Figure 4.3 : Coefficient de puissance en fonction de λ et β

4.2.2.3 Couple aérodynamique

L'énergie cinétique du vent absorbée par l'éolienne (aéroturbine) se transforme en énergie mécanique qui se traduit par un couple moteur T_a pour tourner le rotor à une vitesse ω_r , on peut écrire:

$$P_a = T_a \omega_r \quad (4.16)$$

L'expression du couple aérodynamique est comme suit:

$$T_a = \frac{1}{2} \rho \pi R^3 C_q(\lambda, \beta) \nu^2 \quad (4.17)$$

tel que, $C_q(\lambda, \beta) = C_p(\lambda, \beta) / \lambda$ est le coefficient du couple aérodynamique. Comme le coefficient de puissance C_p dépend de la vitesse du vent ν , de la vitesse de rotation de la turbine ω_r et de l'angle de calage β .

Les courbes du coefficient de puissance et du coefficient du couple aérodynamique de l'éolienne considérée sont données en Annexe B.

4.3 Modèle bond graph de l'éolienne à une masse

4.3.1 Descriptif du modèle à une masse

Le modèle d'éolienne à une masse est assigné pour les éoliennes de grande taille, il vient de la simplification du modèle à deux masses. On peut réduire le modèle à deux masses en modèle à une masse composé d'une seule inertie et d'un seul coefficient de

frottement, sous les hypothèses suivantes (Cardenas-Dobson, 1996), (Ekelund, 1997), (Boukhezzar, 2006):

- Les arbres de transmission sont parfaitement rigides et liés par un multiplicateur idéal.
- L'inertie de la génératrice J_g peut être négligée devant l'inertie de la turbine J_r ou ramenée du côté de l'arbre lent.

Pour la plupart des modèles à une masse, l'inertie de la turbine est ramenée sur l'arbre lent, (Cardenas-Dobson, 1996), (Vihriälä, 2002), (Ekelund, 1997), (Rodriguez-Vida et Puiggoli, 2004), ce modèle est illustré dans la figure 4.4.

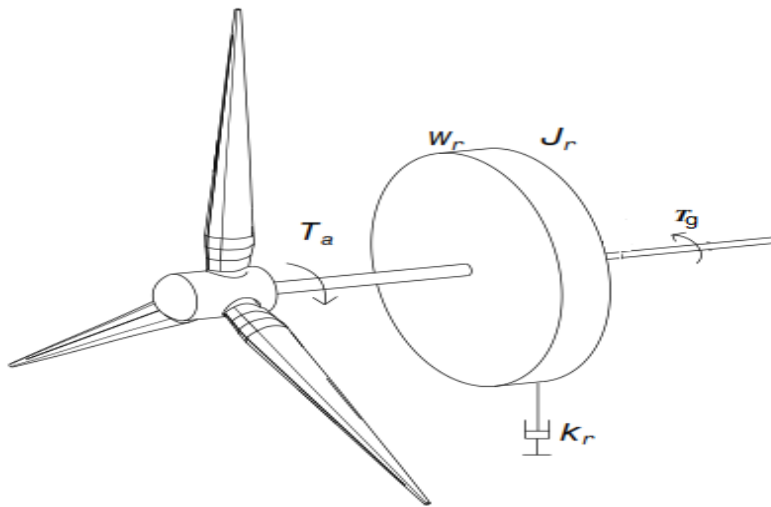


Figure 4.4 : Modèle de l'éolienne à une masse

Tel que:

J_r : inertie de la turbine ramenée sur l'arbre lent, $kg.m^2$

K_r : coefficient de frottements de la turbine sur l'arbre lent, $Nm/rad/s$

T_g : couple de la génératrice ramené sur l'arbre lent, Nm

4.3.2 Modèle bond graph de l'éolienne à une masse avec la génératrice synchrone à aimant permanent dans le repère (a,b,c)

D'une manière assez intuitive, nous proposons une modélisation bond graph du système mécanique de la figure 4.4 avec générateur synchrone à aimant permanent dans le repère (a,b,c), comme illustré sur la figure 4.5.

Le modèle Bond Graph se compose de cinq jonctions 1. La première jonction 1 connectée à l'inertie de la turbine ramenée sur l'arbre lent décrit la vitesse de rotation

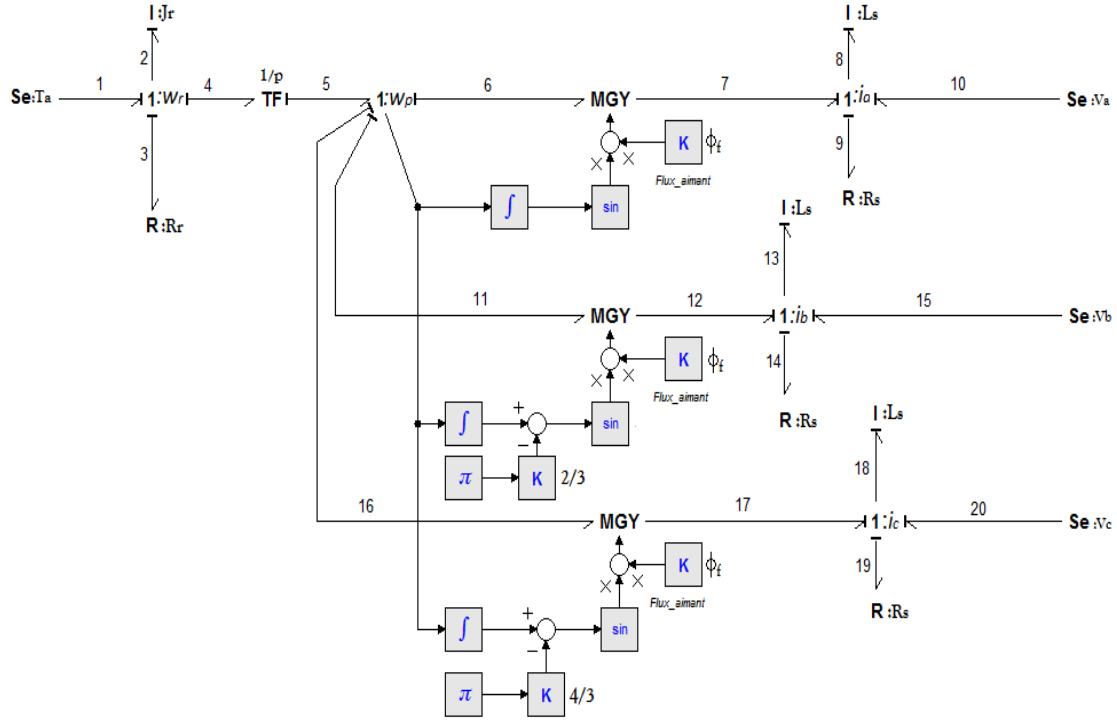


Figure 4.5 : Modèle bond graph de l'éolienne à une masse avec GSAP dans le repère (abc)

du rotor. La deuxième jonction 1 est la vitesse de rotation multiplié par le nombre de paire de pôles, $\omega_p = P\omega_r$. Les trois jonctions 1 représentent respectivement les courants d'enroulements suivants les axes a , b et c . et les trois gyrateurs sont les flux des aimants permanents.

Le nombre d'équations d'état est égal au nombre d'éléments dynamiques dans le système. Nous avons quatre éléments I , qui donnent le nombre total de quatre équations d'état, on se basant sur le tableau 4.1. Avec x le vecteur d'état, tel que $x = [\omega_r, i_a, i_b, i_c]^T$. Donc la représentation d'état du système s'écrit sous la forme 4.18:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{i}_a \\ \dot{i}_b \\ \dot{i}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-R_r}{J_r} & \frac{-\phi_f}{PJ_r} \sin \theta & \frac{-\phi_f}{PJ_r} \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{-\phi_f}{PJ_r} \sin(\theta - \frac{2\pi}{4}) \\ 0 & \frac{-R_s}{L_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-R_s}{L_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-R_s}{L_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_r \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{J_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{L_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{L_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{L_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_f L_c \sin \theta \\ \phi_f L_c \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \phi_f L_c \sin(\theta - \frac{2\pi}{4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_p \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Jonction 1: ω_r	$\begin{cases} e1 = e2 + e3 + e4 \\ f1 = f2 = f3 = f4 = \omega_r \end{cases}$
Jonction 1: i_a	$\begin{cases} e7 = e8 + e9 - e10 \\ f7 = f8 = f9 = f10 = i_a \end{cases}$
Jonction 1: i_b	$\begin{cases} e12 = e13 + e14 - e15 \\ f12 = f13 = f14 = f15 = i_b \end{cases}$
Jonction 1: i_c	$\begin{cases} e17 = e18 + e19 - e20 \\ f17 = f18 = f19 = f20 = i_c \end{cases}$
Gyrateur modulé: r_a	$\begin{cases} e6 = \phi_f \sin \theta f7 \\ e7 = \phi_f \sin \theta f6 \end{cases}$
Gyrateur modulé: r_b	$\begin{cases} e11 = \phi_f \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) f12 \\ e12 = \phi_f \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) f11 \end{cases}$
Gyrateur modulé: r_c	$\begin{cases} e16 = \phi_f \sin(\theta - \frac{2\pi}{4}) f17 \\ e17 = \phi_f \sin(\theta - \frac{2\pi}{4}) f16 \end{cases}$
élément I1 : J_r	$\begin{cases} \dot{p}_2 = e2 \\ f2 = \frac{1}{J_r} p_2 = \omega_r \end{cases}$
élément I2 : L_c	$\begin{cases} \dot{p}_8 = e8 \\ f8 = \frac{1}{L_c} p_8 = i_a \end{cases}$
élément I3 : L_c	$\begin{cases} \dot{p}_{13} = e13 \\ f13 = \frac{1}{L_c} p_{13} = i_b \end{cases}$
élément I4 : L_c	$\begin{cases} \dot{p}_{18} = e18 \\ f18 = \frac{1}{L_c} p_{18} = i_c \end{cases}$

Tableau 4.1 : Équations des jonctions, des éléments et des gyrateurs

Tel que

- L_s : Résistance équivalente d'enroulements statoriques.

- ϕ_f : Flux de l'aimant permanent.

- L_s : l'inductance des phases statoriques.

- $L_c = (L_s - M)$: l'inductance cyclique.

Nous avons remarqué que la modélisation du système 4.18 est assez difficile. Pour résoudre ce problème, nous utiliserons la transformation de Park pour présenter la modélisation par l'approche bond graph de ce système dans le repère de Park.

4.3.3 Modèle bond graph de l'éolienne à une masse avec la génératrice synchrone à aimant permanent dans le repère (d,q)

Cette théorie est basée sur la transformation de Park et elle permet d'obtenir un système équivalent formé de deux enroulements orthogonaux qui sont situés dans le même plan que les enroulements a , b et c . Avec cette transformation, nous pouvons passer d'une représentation dans le repère triphasé (a,b,c) à une représentation dans le repère cartésien (d,q) . Son modèle bond graph est illustré sur la figure 4.6.

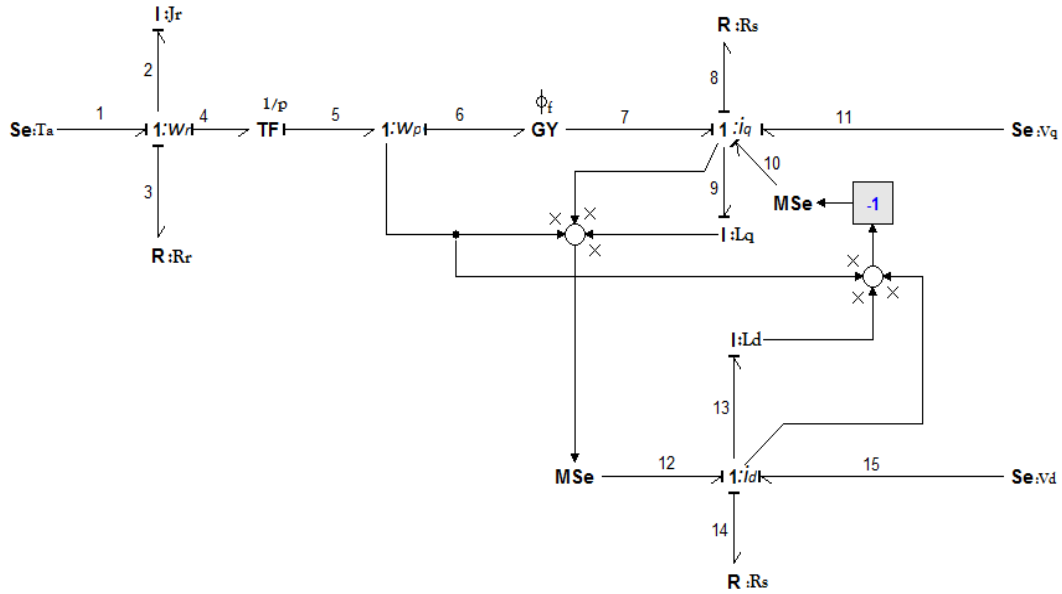


Figure 4.6 : Modèle bond graph de l'éolienne à une masse avec GSAP dans le repère de Park (d,q)

Le modèle bond graph se compose de quatre jonctions 1. La première jonction 1 connecté à l'inertie de la turbine ramenée sur l'arbre lent décrit la vitesse de rotation du rotor. La deuxième jonction 1 est la vitesse de rotation multiplié par le nombre de paire de pôles, $\omega_p = P\omega_r$. Les deux autres jonctions 1 représentent respectivement les courants d'enroulements suivants les axes d et q . et le gyrateur qui représente les flux de l'aimant permanent.

Le nombre d'équations d'état est égal au nombre d'éléments dynamiques dans ce système. Nous avons trois éléments dynamiques I , qui donnent le nombre total de trois équations d'état, on se basant sur le tableau 4.2. Avec x le vecteur d'état, tel que $x = [\omega_r, i_d, i_q]^T$. Donc la représentation d'état du système s'écrit sous la forme 4.19:

Jonction 1: ω_r	$\begin{cases} e1 = e2 + e3 + e4 \\ f1 = f2 = f3 = f4 = \omega_r \end{cases}$
Jonction 1: ω_p	$\begin{cases} e5 = e6 \\ f5 = f6 = \omega_p \end{cases}$
Jonction 1: i_q	$\begin{cases} e7 = e8 + e9 - e10 - e11 \\ f7 = f8 = f9 = f10 = i_q \end{cases}$
Jonction 1: i_d	$\begin{cases} e12 = e13 + e14 - e15 \\ f12 = f13 = f14 = f15 = i_d \end{cases}$
Transformateur : $1/p$	$\begin{cases} e4 = 1/pe5 \\ f4 = 1/pf5 \end{cases}$
Gyrateur: r_b	$\begin{cases} e6 = \phi_f f7 \\ e7 = \phi_f f6 \end{cases}$
élément $I1$: L_q	$\begin{cases} \dot{p}_9 = e9 \\ f9 = \frac{1}{L_c} p_9 = i_q \end{cases}$
élément $I2$: L_d	$\begin{cases} \dot{p}_{13} = e13 \\ f13 = \frac{1}{L_c} p_{13} = i_d \end{cases}$

Tableau 4.2 : Équations des jonctions, des éléments et de gyrateur

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-R_r}{J_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-R_s}{L_d} & \frac{-\omega_p L_q}{L_d} \\ 0 & \frac{-\omega_p L_d}{L_q} & \frac{-R_s}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_r \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ V_d \\ V_q \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{-1}{P J_r} \\ 0 \\ \frac{-\phi_f}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Tel que

- L_d : inductance équivalente d'induit sur l'axe d .
- L_q : inductance équivalente d'induit sur l'axe q .
- P : nombre de paires de pôles, tel que $\omega_p = p \cdot \omega_r$.

4.4 Modèle bond graph de l'éolienne à deux masses

4.4.1 Descriptif du modèle à deux masses

Le système d'éolien est destiné à transformer la vitesse de rotation lente du côté du rotor en une vitesse de rotation rapide du côté générateur. Le modèle à deux

masses d'éolienne est très utilisé dans la littérature (Bongers, 1994),(Novak *et al.*, 1994),(Serensen *et al.*, 2001),(Boukhezzar, 2006), il est basé sur une méthode mathématique de modélisation. Le schéma du modèle à deux masses est illustré dans la figure 4.7.

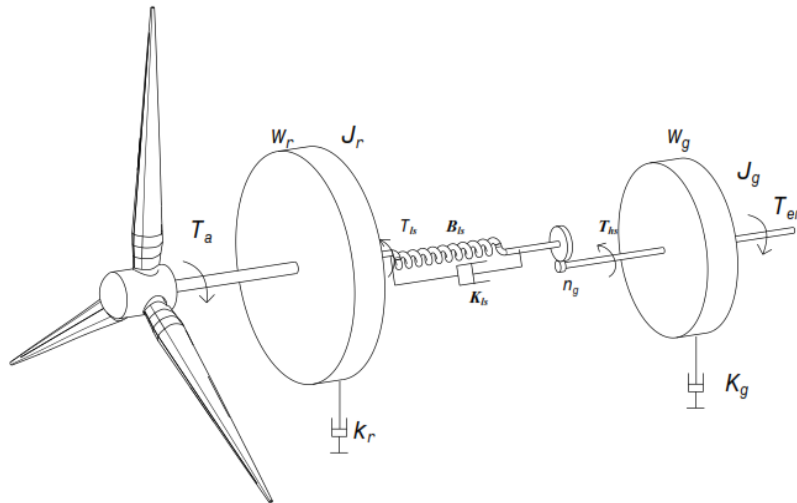


Figure 4.7 : Modèle de l'éolienne à deux masses

J_r	inertie de masse du côté du rotor [$Kg.m^2$]
J_g	inertie de masse du côté de la génératrice [$Kg.m^2$]
K_{ls}	coefficient de frottements sur l'arbre lent [$Nm/rad/s$]
K_r	coefficient de frottements externes du rotor [$Nm/rad/s$]
K_g	coefficient de frottements externes de la génératrice [$Nm/rad/s$]
B_{ls}	coefficient de torsion sur l'arbre lent [Nm/rad]
T_{ls}	couple de l'arbre lent [Nm]
T_{hs}	couple de l'arbre rapide [Nm]
T_{em}	couple électromagnétique de la génératrice [Nm]
ω_t	vitesse du rotor [rad/s]
ω_{ls}	vitesse de l'arbre lent [rad/s]
ω_g	vitesse de la génératrice [rad/s]
n_g	rapport de transmission du multiplicateur

Tableau 4.3 : Liste des symboles

Les hypothèses relatives à ce modèle sont:

- Tous les modes flexibles sont localisés dans l'élément flexible de l'arbre lent.
- L'arbre rapide est infiniment rigide.
- Les modes flexibles des pâles sont supposés suffisamment élevés pour être négligés.

Les inerties du multiplicateur et de l'arbre lent sont intégrées à celle du rotor. L'ensemble est représenté par J_r .

4.4.2 Modèle bond graph de l'éolienne à deux masses

D'une manière assez intuitive, nous pouvons traduire le système mécanique de la figure 4.7 en une représentation graphique bond graph, comme le montre la Figure 4.8.

Le modèle de bond graph se compose de trois jonctions 1 et une jonction 0. La première jonction 1 connectée à l'inertie du rotor décrit la vitesse de rotation du rotor. Comme il existe entre la dynamique de l'inertie du rotor et l'inertie du générateur, ils ne possèdent pas la même vitesse. Ceci est la raison de la jonction 0, nous savons que le couple transmis est le même (pas de perte incluse dans l'éolienne). La deuxième jonction 1 relie l'élément résistif et la torsion sur l'arbre lent indique la différence de vitesse de rotation entre les deux inerties. Cette liaison indique également l'élément résistif et la torsion sur l'arbre lent ou la conformité ont la même vitesse de rotation (flux), mais différent couple (effort). La dernière jonction 1 est reliée à l'inertie du générateur, décrit la vitesse de rotation du générateur.

Le nombre d'équations d'état est égale au nombre d'éléments dynamiques dans le système. Nous avons deux éléments I et un éléments C , qui donnent le nombre total de trois équations d'état avec x le vecteur d'état, tel que $x = [p_2, p_{10}, q_6]^T$. Donc le système s'écrit sous la forme 4.20:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{J_r} \\ \dot{p}_{J_g} \\ \dot{q}_{B_{ls}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_r + K_{ls}}{J_r} & \frac{K_{ls}}{n_g J_g} & -\frac{1}{B_{ls}} \\ \frac{K_{ls}}{n_g J_r} & -\frac{K_g}{J_g} - \frac{K_{ls}}{n_g^2 J_g} & \frac{1}{n_g B_{ls}} \\ \frac{1}{J_r} & -\frac{1}{n_g J_g} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{J_r} \\ p_{J_g} \\ q_{B_{ls}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ T_{em} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Où, notre travail sera basé sur les variables dynamiques ω_r, ω_g et T_{ls} . nous obtenons une analyse adaptée à notre approche et nous faisons quelques changements sur les variables utilisées sur les équations jonction 0, 1, transformateur et éléments dynamiques (tableau 4.4). Après le calcul nous obtenons la représentation d'état 4.21.

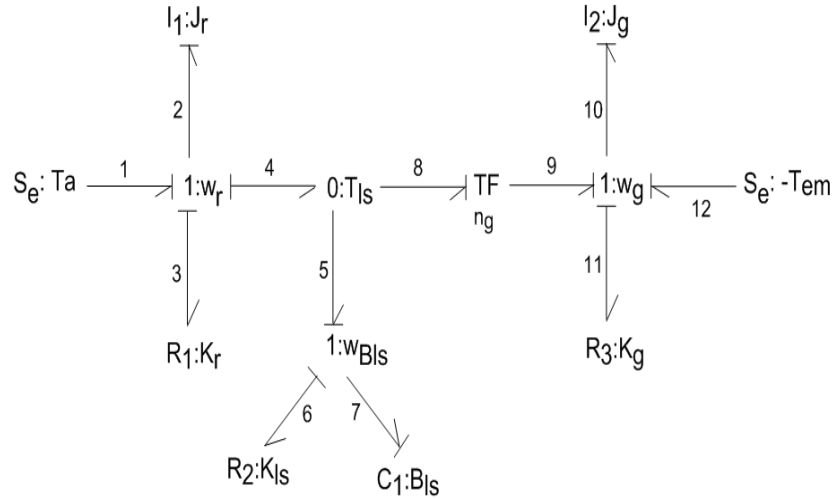


Figure 4.8 : Modèle Bond Graph de l'éolienne à deux masses

Jonction 1: ω_r	$\begin{cases} e1 = e2 + e3 + e4 \\ f1 = f2 = f3 = f4 = \omega_r \end{cases}$
Jonction 1: ω_{BlS}	$\begin{cases} e5 = e6 + e7 \\ f5 = f6 = f7 = \omega_{BlS} \end{cases}$
Jonction 1: ω_g	$\begin{cases} e9 + e12 = e10 + e11 \\ f9 = f10 = f11 = f12 = \omega_g \end{cases}$
Jonction 0: T_{ls}	$\begin{cases} e4 = e8 = e5 = T_{ls} \\ f4 = f8 + f8 \end{cases}$
Transformateur: n_g	$\begin{cases} e9 = \frac{1}{n_g} e8 \\ f8 = \frac{1}{n_g} f9 \end{cases}$
élément I1 : J_r	$\begin{cases} \dot{p}_2 = e2 \\ f2 = \frac{1}{J_r} p_2 = \omega_r \end{cases}$
élément I2 : J_g	$\begin{cases} \dot{p}_{10} = e10 \\ f10 = \frac{1}{J_g} p_{10} = \omega_g \end{cases}$
élément C1 : B_{ls}	$\begin{cases} \dot{q}_6 = f6 \\ e6 = B_{ls} q_6 \end{cases}$

Tableau 4.4 : Équations des jonctions, des éléments et de transformateur

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_g \\ \dot{T}_{ls} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-K_r}{J_r} & 0 & \frac{-1}{J_r} \\ 0 & \frac{-K_g}{J_g} & \frac{1}{n_g J_g} \\ B_{ls} - \frac{K_r K_{ls}}{J_r} & \frac{K_r K_{ls}}{n_g J_g} - \frac{B_{ls}}{n_g} & \frac{-K_{ls}}{J_r} - \frac{K_{ls}}{n_g^2 J_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_g \\ T_{ls} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{J_r} \\ 0 \\ \frac{K_{ls}}{J_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_r} \\ \frac{K_{ls}}{n_g J_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{em} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

4.5 Objectifs de commande d'un système éolienne

Le domaine de fonctionnement d'une éolienne qui permet de fournir l'énergie électrique, on connaît 4 zones pour extraire la puissance d'éolienne. La figure 4.9 présente la puissance éolienne en fonction de la vitesse du vent. Dans la zone I, l'éolienne est arrêtée car le vent n'est pas suffisamment fort pour que la production d'énergie soit rentable.

Dans la zone II (le vent faible), l'éolienne fonctionne en charge partielle, ce qui donne un fonctionnement au dessous de la puissance nominale. L'objectif principal de la commande dans cette zone est de maximiser la capture de l'énergie du vent. Le couple de la génératrice dans ce cas-là est utilisé pour faire varier la vitesse du rotor. Le but est que le coefficient de puissance soit toujours optimal. La zone III (le vent fort) correspond au fonctionnement à pleine charge, autrement dit La puissance disponible devient trop importante. Il faut régulariser la puissance pour ne pas détruire le système. Dans la zone IV, dès que le vent atteint sa valeur maximale (le vent $>25m/s$) l'éolienne est arrêtée par le système de commande en raisons de sécurité.

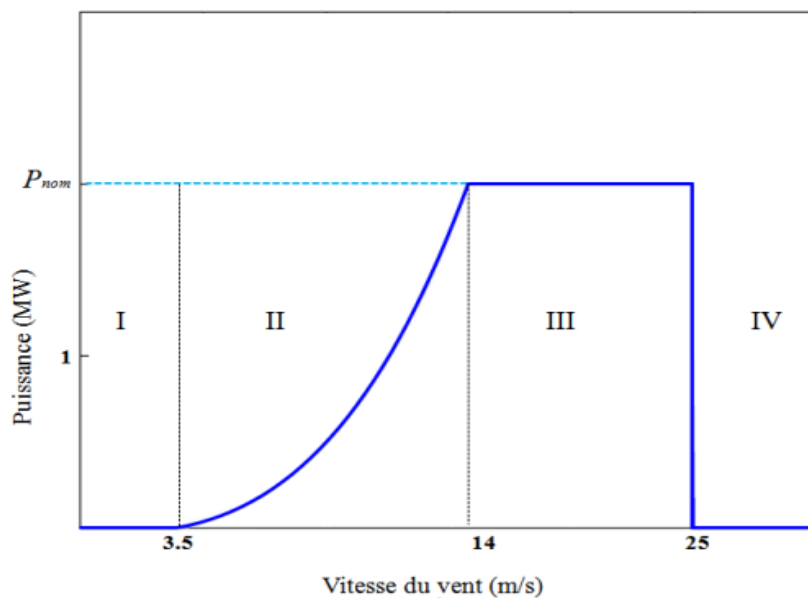


Figure 4.9 : Courbe de la puissance éolienne en fonction de la vitesse du vent

Plusieurs travaux de la commande des systèmes éoliens recommande fonctionnement dans la zone II (Poitiers, 2003), (Boukhezzer, 2006), (Beltran, 2010). L'importance de la commande dans cette zone est de maximiser l'énergie capturée du vent et de minimiser les efforts supportés par le l'éolienne. Le rotor fournit une puissance maximale

aérodynamique à la vitesse spécifique λ_{opt} :

$$\lambda_{opt} = R \frac{\omega_{r_{opt}}}{\nu(t)} \quad (4.22)$$

Tel que,

R: Rayon du rotor [m].

$\nu(t)$: Vitesse du vent [m/s].

ω_{opt} : vitesse angulaire optimale du rotor [rad/s].

λ_{opt} : vitesse spécifique optimale.

Par conséquent, le coefficient de puissance $C_p(\lambda, \beta)$ est une fonction non linéaire de la vitesse spécifique λ et de l'angle de calage β . Cette fonction contient un point maximum unique donné par 4.23 (Stol, 2004):

$$C_p(\lambda_{opt}, \beta_{opt}) = C_{p_{opt}} \quad (4.23)$$

Tel que,

β_{opt} : Angle de calage optimal [rad].

$C_{p_{opt}}$: Coefficient de puissance optimal.

Le but est la production d'énergie optimale, sachant que la vitesse du vent est une entrée non commandable. Pour optimiser l'énergie obtenue, nous devons maintenir l'efficacité maximale du rotor pendant le fonctionnement. Dans ce cas-là, nous fixons β à β_{opt} et $\omega_{r_{opt}}$ devrait changer en fonction des variations de la production de puissance du vent. Ensuite, nous recherchons à trouver une loi de contrôle T_{em} Pour optimiser l'extraction de puissance en ajustant la vitesse de rotation du rotor, tel que ω_r suit $\omega_{r_{opt}}$ et la puissance aérodynamique reste à sa valeur optimale.

$$\omega_{r_{opt}} = \frac{\nu(t) \cdot \lambda_{opt}}{R} = y_r \quad (4.24)$$

4.6 Synthèse de la loi de commande

Nous arrivons à déduire le premier terme de l'équation d'état 4.21 qui est modélisé par la méthodologie bond graph. Le modèle dynamique de ce système éolien peut être réécrit dans l'espace d'état de la façon suivante:

$$\begin{cases} y_r = x_1 = \omega_r \\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\omega}_r \\ \ddot{\omega}_r = \dot{x}_2 = f(x, t) - bu(x, t) \end{cases} \quad (4.25)$$

Tels que $\omega_r \in R$ et $T_{em} \in R$, avec $b = \frac{-1}{J_r} \cdot \frac{K_{ls}}{n_g J_g}$ est une constante connue. Et $f(x, t)$ est la fonction du système non linéaire représentant le comportement dynamique du système qui est donné par:

$$f(x, t) = \left[\frac{-K_r}{J_r} - \left(\frac{K_{ls}}{n_g^2 J_g} + \frac{K_{ls}}{J_r} \right) \right] x_2 - \left[\frac{1}{J_r} (B_{ls} - \frac{K_r K_{ls}}{J_r}) + \frac{K_r}{J_r} \left(\frac{K_{ls}}{n_g^2 J_g} + \frac{K_{ls}}{J_r} \right) \right] x_1 - \frac{1}{J_r n_g} \left(\frac{K_g K_{ls}}{J_g} - B_{ls} \right) w_g + \left[\frac{1}{J_r} \left(\frac{K_{ls}}{n_g^2 J_g} + \frac{K_{ls}}{J_r} \right) - \frac{1}{J_r} \frac{K_{ls}}{J_r} \right] T_a + \frac{1}{J_r} \dot{T}_a \quad (4.26)$$

4.6.1 Problématique

4.6.2 Commande par modes glissants

La commande par mode glissant est une approche de contrôle robuste et importante, elle est considérée comme l'un des plus performances du système qui incluent l'insensibilité aux variations de paramètres, et le rejet de perturbation. Nous suggérons la surface de glissement en 4.27. L'objectif est d'améliorer la robustesse du système en boucle fermée, tandis que la stabilité est garantie via la fonction de Lyapunov:

$$\sigma(x, t) = \dot{e}(x, t) + k e(x, t) \quad (4.27)$$

Où e et \dot{e} sont les erreurs de poursuite:

$$e = x_1 - x_{1_d} = \omega_r - \omega_{r_{opt}}, \quad \dot{e} = x_2 - x_{2_d} \quad \text{et} \quad k \in R_+$$

La dérivée par rapport au temps de la surface de glissement proposée 4.27 s'écrit:

$$\dot{\sigma}(x, t) = \ddot{e}(x, t) + k \dot{e}(x, t) \quad (4.28)$$

En utilisant (4.28), Pour satisfaire la condition d'existance (4.29), Nous proposons le théorème suivant:

$$\dot{\sigma} = \sigma \dot{\sigma} < 0 \quad (4.29)$$

L'inégalité de l'équation (4.29) est appelée condition d'attractivité. Cette condition n'assure que la convergence asymptotiquement vers la surface de glissement. Pour garantir la convergence de $\sigma(s, t)$ à 0 en temps fini, nous utilisons la condition d'attractivité non linéaire appelée η -attractive (Slotine et Sastry, 1983):

$$\sigma \dot{\sigma} < -\eta |\sigma| \quad (4.30)$$

Où η est une constante strictement positive.

Théorème. Pour le système non-linéaire(4.25), si nous choisissons la loi de contrôle suivante:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_s \quad (4.31)$$

Où:

$$u_0(x, t) = \frac{1}{b}[-f(x, t) + \ddot{x}_{2_d} - k\dot{e}] \quad (4.32)$$

La loi de commande discontinue assurant la convergence du système vers la surface de glissement donnée par l'équation (4.33) est appelée la commande robuste:

$$u_s = -k_d \cdot \text{sign}(\sigma) \quad (4.33)$$

Avec k_d est une constante toujours positive qui représente le gain de la commande, choisi assez grand pour rejeter les perturbations et les incertitudes du système.

Sachant que:

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma > 0 \\ 0 & \text{si } \sigma = 0 \\ -1 & \text{si } \sigma < 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

sign est une fonction discontinue de la loi de commande qui permet d'assurer la convergence en temps fini, ainsi que la robustesse en présence des perturbation externes. Néanmoins, la présence de la fonction **sign** produit le phénomène de réticence. Donc pour résoudre ce problème de réticence, nous utilisons la fonction **sat** selon l'équation suivante:

$$\text{sat}(\sigma) = \begin{cases} \frac{|\sigma|}{\tau} & \text{si } \left| \frac{\sigma}{\tau} \right| \leq 1 \\ \text{sign}(\sigma) & \text{si } \left| \frac{\sigma}{\tau} \right| > 1 \end{cases} \quad (4.35)$$

Alors, le système est stable.

Preuve 1. Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante:

$$v(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (4.36)$$

par conséquent:

$$\dot{v} = \sigma \dot{\sigma} \quad (4.37)$$

$$= \sigma[\ddot{e}(x, t) + k\dot{e}(x, t)] \quad (4.38)$$

En remplaçant $\ddot{e}(x, t)$ par $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_{2_d}$ nous trouvons l'équation suivante:

$$\dot{v} = \sigma[\ddot{x}_2 - \ddot{x}_{2_d} + k\dot{e}(x, t)] \quad (4.39)$$

$$= \sigma[f(x, t) + bu(x, t) - \ddot{x}_{2_d} + k\dot{e}(x, t)] \quad (4.40)$$

En remplaçant (4.32) et (4.33) dans (4.39), on trouve l'équation suivante

$$\dot{v} = \sigma[f(x, t) + b[\frac{1}{b}(-f(x, t) + \ddot{x}_{2d} - k\dot{e}(x, t)) + u_s] - \ddot{x}_{2d} + k\dot{e}(x, t)] \quad (4.41)$$

$$= \sigma[b.u_s] \quad (4.42)$$

pour $\tau > 0$, si $|\sigma| \geq \tau$, $sat(\sigma) = sign(\sigma) = \frac{|\sigma|}{\sigma}$ ensuite:

$$\dot{v} = -b.k_d \cdot |\sigma| \quad (4.43)$$

Ainsi:

$$\dot{v} \leq 0 \quad (4.44)$$

Cependant, dans un petit τ au voisinage de l'origine (couche limite) $sat(\sigma) = \frac{\sigma}{\tau}$ est continue, les trajectoires du système restent à l'intérieur de couche limite autour de la surface de glissement $\sigma = 0$.

4.7 Résultats de simulation

Les paramètres de l'éolienne à deux masses (Mérida *et al.*, 2014) sont:

$R = 21.65$ m, $\rho = 1.29$ kg/m, $J_r = 3.25 \times 10$ kg.m, $n_g = 43.156$ $J_g = 34.4$ kg m_2 , $K_{ls} = 9500$ N.m/rad/s, $C_{p_{opt}} = 0.4291$, $\lambda_{opt} = 8.5$, $B_{ls} = 2.691 \times 10$ N.m/rad, $K_g = 0.2$ N.m/rad/s, $K_r = 27.36$ N.m/rad/s.

Pour faire une comparaison entre les stratégies de contrôle proposées, différentes simulations sont envisagées pour le modèle à deux masses d'éolienne avec des vitesses de vent différentes ($4m/s$, $7m/s$ et $13m/s$) sur la figure 4.10 afin de mettre en évidence les performances de contrôle, et nous nous intéressons au contrôle dans la zone II (Poitiers, 2003), (Boukhezzar, 2006), (Beltran, 2010). Dans cette étude, nous avons représenté l'évolution de la vitesse du vent d'une façon déterministe, sous la forme de la sommation de plusieurs harmoniques (Mirecki *et al.*, 2007), (Tran, 2010), (Hong *et al.*, 2014):

Avec un profil du vent rapide et variable:

$$\nu(t) = 7 + 2.0 \sin(0.1047t) + 2 \sin(0.2665t) + \sin(1.2930t) + 2.0 \sin(3.6645t) \quad (4.45)$$

La figure 4.11 montre que la sortie du système suit parfaitement le trajectoire de référence, où ω_r l'état de sortie converge rapidement à sa référence $\omega_{r_{opt}}$ pour chaque

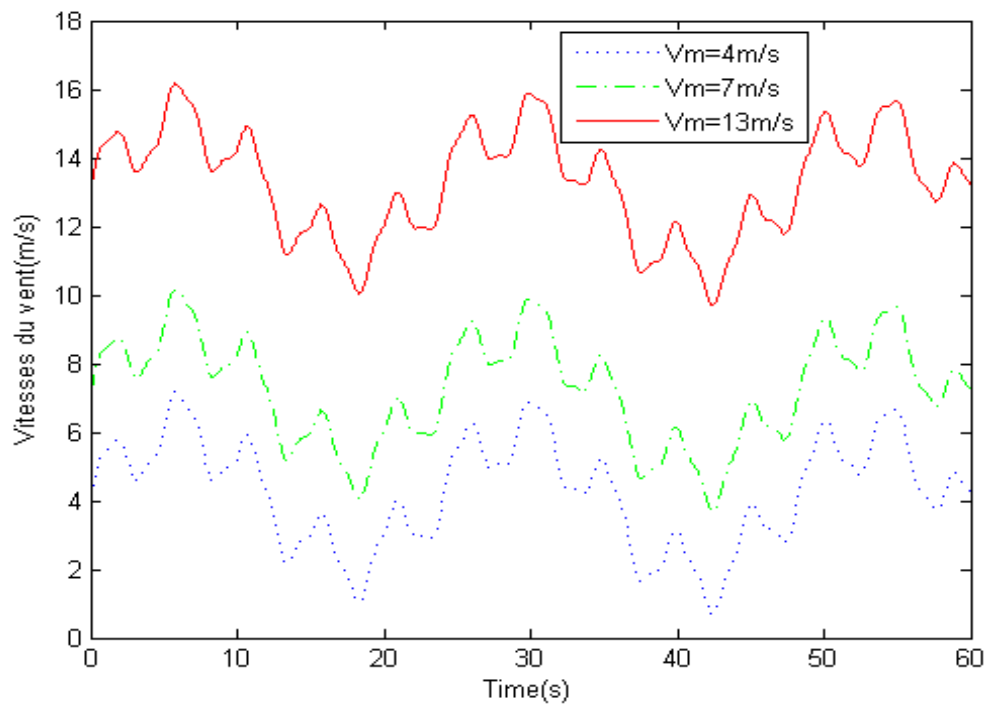


Figure 4.10 : Vitesses du vent

cas de la vitesse du vent donné par la figure 4.10. Ceci est dû à la performance de la structure du contrôle sélectionné, La combinaison entre la méthodologie bond graph pour déterminer l'équation d'état afin de déduire le modèle non linéaire $\tilde{\omega}_r$ et la commande par mode glissant sont conçues pour obtenir une erreur très faible.

La figure 4.12 présente le couple électromagnétique du générateur. Dans la figure 4.13, nous essayons de mettre en évidence l'avantage de l'approche en mode glissant en présentant les réponses de temps d'erreur de la vitesse de rotor de sortie et optimal. L'erreur converge vers zéro.

La figure 4.14 montre la surface de glissement utilisée, on constate que les surfaces de glissement des trois vitesses de vent convergent respectivement et rapidement vers zéro, en plus le temps de réponse relativement court.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux approches, la première est la modélisation de deux éoliennes par l'approche bond graph et nous sommes intéressés au modèle à

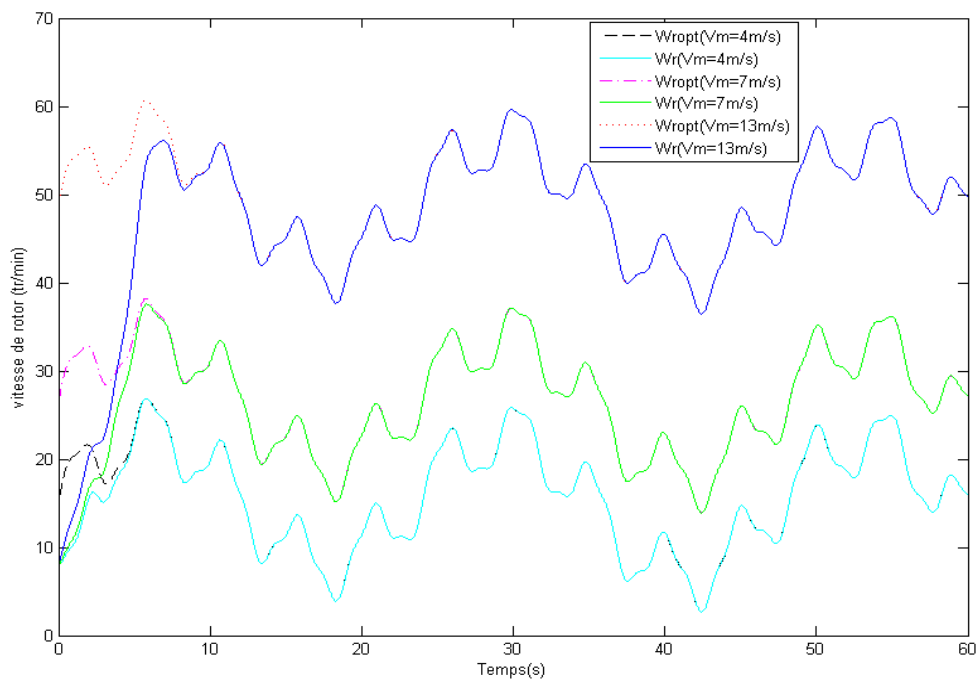


Figure 4.11 : Réponses de la sortie et vitesse optimale du rotor

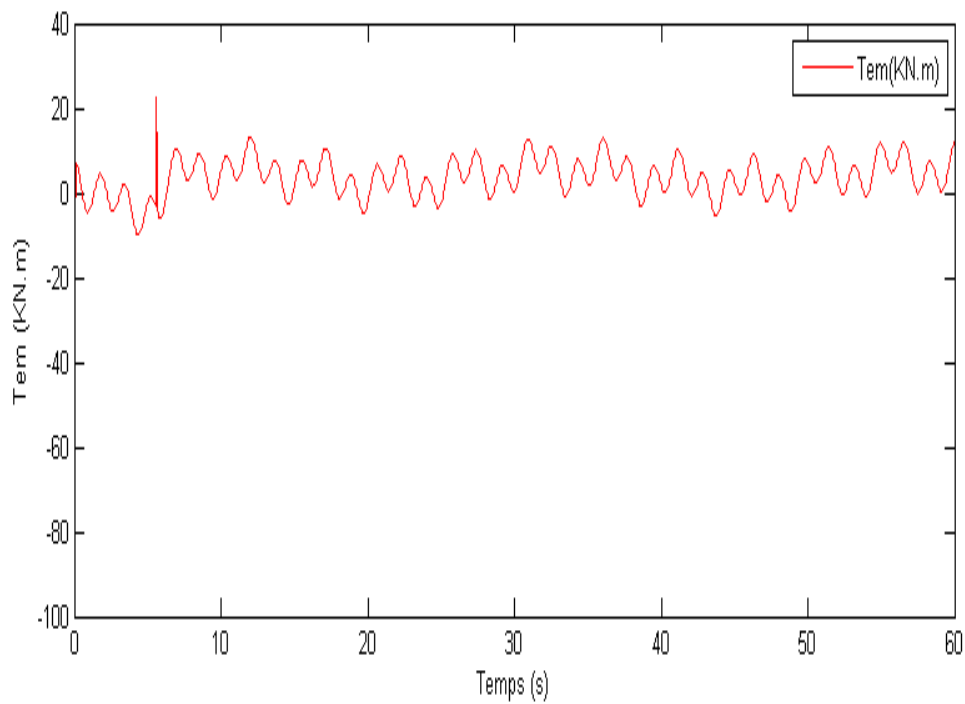


Figure 4.12 : Couple électromagnétique du générateur (T_{em})

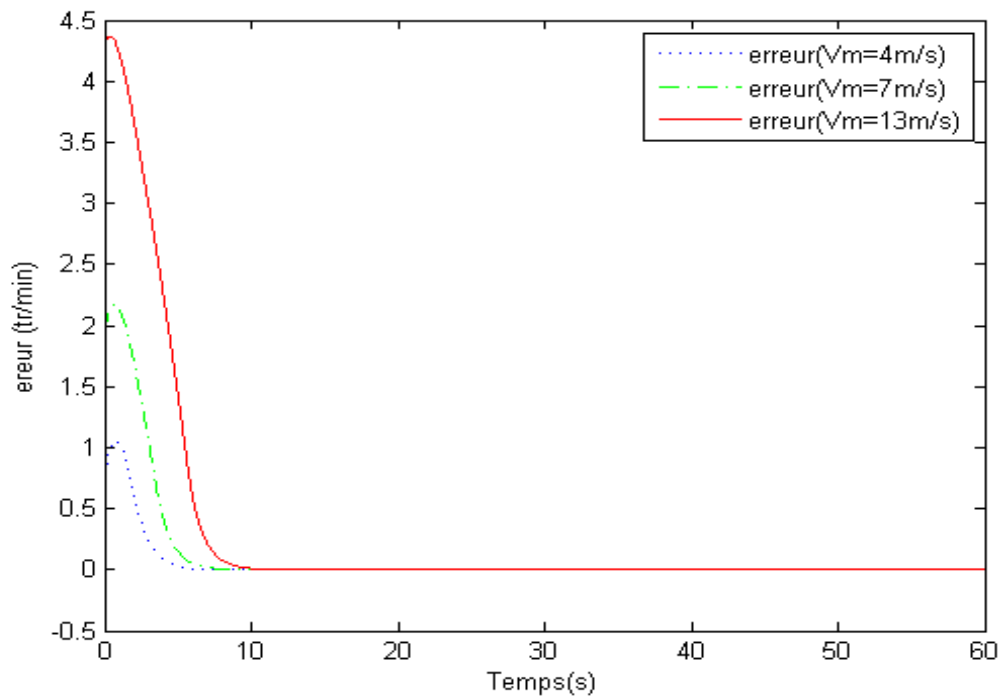


Figure 4.13 : Erreur de la commande

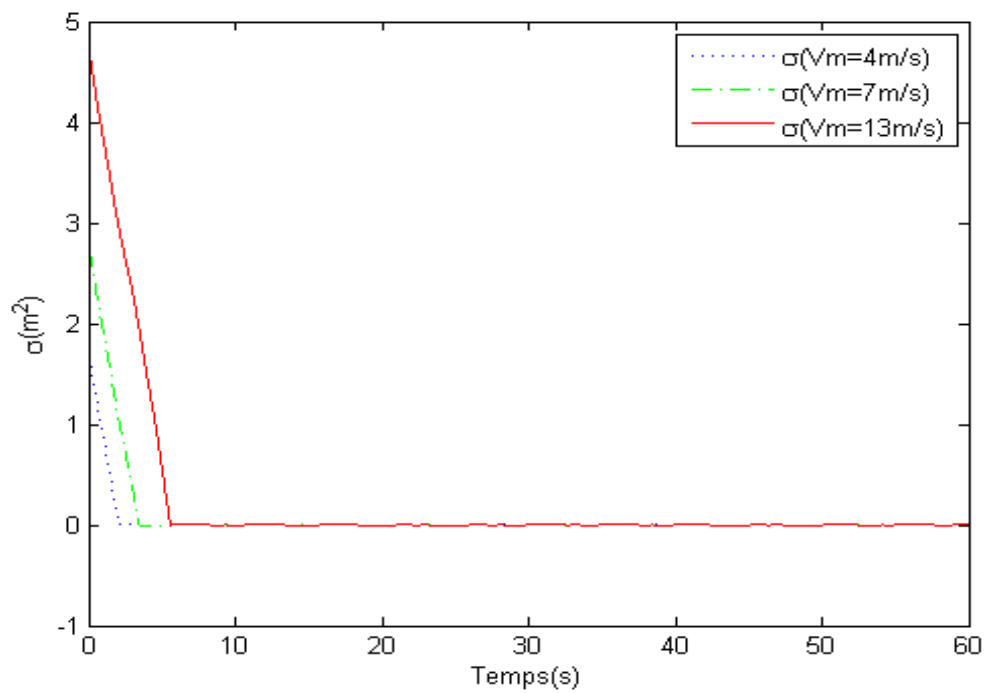


Figure 4.14 : Surface de glissement

deux masses puisqu'il est très utilisé dans la littérature et peut être appliqué à n'importe quelle éolienne, après nous avons déduit le modèle non linéaire ω_r dans l'espace d'état. la deuxième est d'apporter la loi de commande robuste afin d'atteindre l'objectif principal de la commande dans la zone de fonctionnement II, c'est-à-dire l'optimisation de l'extraction de l'énergie éolienne. Nous avons utilisé la technique de mode glissant pour assurer une bonne robustesse. Ensuite, La stabilité de notre commande en boucle fermée est démontrée théoriquement via le critère de Lyapunov. Les résultats obtenus montrent les bonnes performances en stabilité et en poursuite des deux approches proposées, malgré la présence des incertitudes au niveau de la commande.

Conclusion générale et Perspectives

Le travail effectué dans cette thèse a comme objectifs les techniques d'analyse des systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps, modélisés par approche bond graph. Comme, il se consacre à l'étude des applications réelles basées sur cette approche à savoir le "bond graph".

Nos contributions concernent l'étude des propriétés structurelles des systèmes LTV tels que la commandabilité, l'observabilité. Ainsi, nous avons mis en évidence la modélisation de différents modèles tels que la dynamique d'un véhicule complet, la ceinture de sécurité, la bicyclette et les éoliennes. En outre la construction des observateurs des systèmes linéaires et la commande par mode glissant ont été appliquées dans ces modèles. Nous proposons les résumés des différentes contributions sur ce travail.

Dans le premier chapitre, nous avons d'abord présenté les définitions nécessaires pour analyser un modèle bond graph, les propriétés structurelles graphiques d'un système sont détaillées. Ensuite la représentation d'état algébrique des systèmes linéaires à paramètres invariants et variants dans le temps a été présenté. De même, nous avons souligné un certain nombre de résultats de la théorie anneaux bond graphs non commutatifs. Le deuxième chapitre est le point de départ de nos travaux, ainsi nous avons apporté une contribution sous forme d'une méthode de calcul des éléments des matrices de commandabilité et d'observabilité en se basant sur le gain et la longueur d'un chemin causal dans un modèle bond graph. les matrices de commandabilité et d'observabilité nous ont permis de donner les matrices de changement de base pour la transformation de la matrice d'état à la forme canonique. Cette forme est très utile pour la synthèse de commande des systèmes multivariables, tel que le placement de pôles, découplage, zéros invariants, stabilité, rejet de perturbation...etc. Cette approche est très importante par rapport aux autres approches (temporelle, symbolique) car on peut calculer n'importe quel vecteur de la matrice de commandabilité et d'observabilité sans calculer les autres. Le troisième chapitre englobe la modélisation par l'approche bond graph d'un système multicorps de la dynamique d'une automobile et les équations fondamentales

de la dynamique confirmant la modélisation de ce système. Nous avons aussi présenté un algorithme pour la construction du bond graph d'observateur (BGO) à partir du modèle bond graph et pour calculer son gain en utilisant des manipulations causales sur le modèle bond graph de l'observateur, en considérant les propriétés structurelles associées au modèle (observabilité structurelle). Par ailleurs, l'observateur de Luenberger a besoin d'une connaissance précise des paramètres du système pour garantir une bonne estimation. L'existence d'incertitudes paramétriques ou la présence du bruit de mesure peuvent rendre l'observateur inutilisable. Pour obtenir un observateur plus robuste au bruit de mesure et aux incertitudes paramétriques, nous avons ajouté l'action intégrale. Cependant, comme pour l'observateur de Luenberger, la présence du terme proportionnel ne permet pas d'atténuer la présence du bruit de mesure. Les résultats de simulation obtenus pour le modèle bicyclette montre que l'observateur proportionnel intégral qui génère des erreurs de la vitesse de lacet et l'angle de dérive qui est plus petits par rapport à celui de l'observateur proportionnel (observateur de Luenberger). Le dernier chapitre déploie la modélisation de deux éoliennes par approche bond graph, après la déduction du modèle non linéaire ω_r dans l'espace d'état du modèle à deux masses comme il est très utilisé dans la littérature. Nous avons aussi appliqué la loi de commande adaptative et robuste pour atteindre l'objectif principal de cette commande dans la zone de fonctionnement II (c'est-à-dire l'optimisation de l'extraction de l'énergie éolienne dans cette zone). nous avons utilisé l'approche de mode glissant pour assurer une bonne robustesse, la stabilité de notre commande en boucle fermée est démontrée théoriquement via le critère de Lyapunov. Les résultats obtenus montrent les bonnes performances en stabilité et en poursuite de l'approche proposée, malgré la présence d'incertitudes.

Perspectives

A l'issue de ce travail, plusieurs perspectives restent à résoudre:

- aborder le problème de la dualité pour les systèmes linéaires à temps variants d'une façon générale entre la contrôlabilité et l'observabilité par l'approche bond graph.

- La construction d'observateurs bond graphs automatiquement en utilisant le logiciel 20-sim. La création d'une fonction pour la synthèse d'observateurs linéaires à partir des modèles bond graphs. Objectif de cette fonction est obtenu directement le modèle bond graph des observateurs et leurs valeurs des gains.

- La construction d'observateurs bond graph pour les systèmes non linéaires, à titre

d'exemple l'observateur PI à grand gain.

- La simulation d'observateurs à entrées inconnues par logiciel 20-sim.

- la conception de la loi commande par logiciel 20-sim.

Bibliographie

- Achir, A. (2005). Contribution à l'étude de la propriété de platitude sur des modèles bond graph non linéaires. *Thèse de doctorat, ÉCOLE CENTRALE DE LILLE*.
- Achir, A., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (2004). Ring bond graphs over non commutative rings: application to variational bond graphs. *International Mediterranean Modeling Multiconference, I3M-IMAACA, Genoa, Italy* **2**, 93–99.
- Achir, A., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (2005). An algebraic approach to nonlinear bond graph models. *Submitted to 44th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) and European Control Conference (ECC) Seville, Spain*.
- Achir, A., S. Junco, A. Donaire et C. Sueur (2005b). Plantud diferencial y control del motor de inducción por retroalimentación dinámica sobre modelos bond graph.. *XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, Río Cuarto-Argentina*.
- Ackermann, T. et L. Söder (2000). Wind energy technology and current status: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* **4**(4), 315–374.
- Agarwal, S., L. Chalal, G. Dauphin-Tanguy et X. Guillaud (2012). Bond graph model of wind turbine blade. *IFAC Proceedings* **45**(6), 409–414.
- Aimani, S. Al (2004). Modélisation de différentes technologies d'éoliennes intégrées dans un réseau de moyenne tension. *Thèse de doctorat, École Centrale de Lille*.
- Andaloussi, C., Z. Chalh et C. Sueur (2006). Infinite zero of linear time varying bond-graph models: graphical rules. *2006 IEEE CCA, 2006 IEEE CACSD and 2006 IEEE ISIC, technische universität münchen, Munich, Germany*.
- Athans, M. (1986). A tutorial on the lqg/ltr method. *Proceeding. American Control Conference* pp. 1289–1296.

- Baffet, G. (2007). Développement et validation expérimentale d'observateurs des forces du contact pneumatique/chaussée d'une automobile. *doctorat de l'université de technologie de compiègne, Université de Technologie de Compiègne.*
- Baffet, G., A. Charara et D. Lechner (2009). Estimation of vehicle side slip, tire force and wheel cornering stiffness. *Control Engineering Practice* **17**(1), 1255–1264.
- Bakka, T. et R.H. Karimi (2013). Bond graph modeling and simulation of wind turbine systems. *Journal of Mechanical Science and Technology* **27**(6), 1843–1852.
- Beale, S. et B. Shafai (1989). Robust control system design with a proportional integral observer. *International Journal of Control* **50**(1), 97–111.
- Beltran, B. (2010). Contribution à la commande robuste des éoliennes à base de génératrices asynchrones double alimentation : Du mode glissant classique au mode glissant d'ordre supérieur. *Thèse de doctorat, Université de Bretagne occidentale, France.*
- Birkett, S.H. et P.H. Roe (1989). The mathematical foundations of bond graphs - ii. duality. *Journal of Franklin Institute* **326**(5), 691–708.
- Bongers, M.P. (1994). Modeling and identification of flexible wind turbines and a factorizational approach to robust control. phd thesis. *Delft University of Technology.*
- Borne, P., G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis (1992). *Modélisation et Identification des processus*. Vol. 1.
- Borutzky, W. (2016). Bond graph for modelling, control and fault diagnosis of engineering. *Springer, London, England.*
- Boukhezzar, B. (2006). sur les stratégies de commande pour l'optimisation et la régulation de puissance des éoliennes à vitesse variable. thèse de doctorat.
- Boumhidi, J. (2005). Commande robuste par modes glissants de premier ordre et d'ordre supérieur : Application aux systèmes robotisés. *Thèse de doctorat national en automatique, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah.*
- Breedveld, P. (1984). Essential gyrators and equivalence rules for 3-port junction. *Journal of The Franklin Institute* **318**(2), 77–89.
- Breedveld, P.C., R.C. Rosenberg et T. Zhou (1991). Bibliography of bond-graph theory and application. *Journal of the Franklin Institute* **328**(5/6), 1067–1109.
- Brossard, J.P. (2006). dynamique du véhicule, modélisation des systèmes complexes.

- Camblong, H. (2004). Minimisation de l'impact des perturbations d'origine éolienne dans la production d'électricité par des aérogénérateurs à vitesse variable. *Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (ENSAM) Bordeaux.*
- Cardenas-Dobson, R. (1996). Control of wind turbine using a switched reluctance generator. *PhD thesis, University of Nottingham.*
- Chalh, Z. (2008). Approche algébrique et graphique pour l'analyse des modèles bond graph. *Thèse, Ecole Centrale de Lille.*
- Chalh, Z., A. Frih, M. Mrabti et M. Alfidi (2015). Bond graph methodology for controllability of LTV systems. *International Journal of Modelling, Identification and Control* **24**(3), 257–265.
- Chalh, Z., C. Andaloussi et C. Sueur (2006). Controllability and ring bond-graph. *ICC Glasgow, Scotland, 31août-1 sep 2006.*
- Chen, W.K. (1976). *Applied Graph Theory*. Amsterdam: North Holland.
- Dauphin-Tanguy, G. (2000). *Les Bond Graphs*. Hermes Science, Paris.
- Deutsch, C. (1970). Dynamique des véhicules routiers: données de bases.. *Organisme National de Sécurité routière.*
- Doyle, J.C. et G. Stein (1981). Multivariable feedback desing: concepts for a classical/modern sythesis. *IEEE Transactions Automatic Control* **26**(1), 4–16.
- Ekelund, T. (1997). Modeling and linear quadratic optimal control of wind turbines. *PHD thesis, Chlmers University of Technology, Sweden.*
- Emelyanove, S.V., S.V. Korovin et A. Levant (1993). Higher order sliding modes in control system. *Diferential Equations* **29**(11), 1627–1647.
- Fokam, G. T (2014). Commande et planification de trajectoires pour la navigation de véhicules autonomes. *Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.*
- Fox, R.W., A.T. Mcdonald et P.J. Pritchard (2003). Introduction to fluid mechanics. *Wiley, 6th edition.*
- Frih, A., Z. Chalh et M. Mrabti (2017). Controllability and observability of ltv systems -bond graph approach. *Asian-European Journal of Mathematics* **11**(1), 1850038–1–1850038–10.

- Frih, A., Z. Chalh et M. Mrabti (2018). Wind turbine: Bond graph modelling and sliding mode control. *Mechatronic Systems and Control (formerly Control and Intelligent Systems)* **46**(1), 8–14.
- Frih, A., Z. Chalh, M. Mrabti et M. Alfidi (2015a). Graphical approach for the analysis of *LTV* systems. *6th Conference on Computational Engineering in Systems Applications, CESA 2015 Proceedings*.
- Frih, A., Z. Chalh, M. Mrabti et M. Ouahi (2016). Seat belt design by graphic approach. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology* **92**(2), 208–214.
- Frih, A., Z. Chalh, M. Mrabti, M. Ouahi et M. Alfidi (2015b). La conception d'observateur d'un système mécanique dans le domaine d'automobile par l'approche graphique. *Xth International Conference on Integrated Design and Production, CPI 2015, December 2-4, 2015, Tangier - Morocco*.
- Gergaud, O. (2002). Modélisation énergétique et optimisation économique d'un système de production éolien et photovoltaïque couplé au réseau et associé à un accumulateur. *thèse de doctorat de l'école normale supérieure de CACHAN*.
- Granda, J. (2003c). "class notes: Computer modeling and design of dynamic systems".. *Department of Mechanical Engineering, California State University, Sacramento, USA*.
- Hadji, N. et A. Rahmani (2010). Observer for an omnidirectional mobile robot. *ICBGM*.
- Hau, E. (2006). Wind turbines: Fundamentals, technologies, application, economics. *Springer, Germany*.
- Heier, S. (1998). Grid integration of wind energy conversion systems. *John Wiley and Sons Ltd*.
- Hong, C-M., F-S. Cheng et C-H. Chen (2014). Optimal control for variable-speed wind generation systems using general regression neural network. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems* **60**, 14–23.
- Ilchmann, A. (1985). Time-varying linear systems and invariants of system equivalence. *Int. J. Control* **42**(4), 759–790.
- Isidori, A. (1995). Nonlinear control systems. *Springer-Verlag, London*.
- Jaballah, B. (2011). Observateurs robustes pour le diagnostic et la dynamique des véhicules. *Doctoral dissertation, Université Paul Cézanne-Aix-Marseille III*.

- Johnson, G.L. (2001). Wind energy systems. manhattan. *KS, Electronic edition, December*.
- Jourieh, M. (2007). développement d'un modèle représentatif d'une éolienne afin d'étudier l'implantation de plusieurs machines sur un parc éolien. *Thèse de Doctorat Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers*.
- Kalman, R. E. (1969). Advanced theory of linear systems. *Topics in Mathematical System Theory, edited by R. E. Kalman, P. L. Falb and M. A. Arbib (New York: McGraw-Hill)* pp. 245–339.
- Kalman, R.E. et R.S. Bucy (1961). New result in linear filtering and prediction theory. *Trans. ASME* **83**(1), 95–108.
- Karnopp, D. (1979). Bond graphs in control: Physical state variables and observers. *Journal of The Franklin Institute* **308**(3), 221–234.
- Karnopp, D.C. et R.C. Rosenberg (1975). *System Dynamics: A Unified Approach*. John Wiley, New York, USA.
- Katayama, H. et A. Ichikawa (1992). Pole assignement by state transition graph. *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(8), 1196–1201.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control* **58**(6), 1247–1263.
- Lewis, F.L. et V.L. Syrmos (1995). Optimal control. *Wiley: New York*.
- Lichiardopol, S. (2007). Etude de la dualité des modèles bond graphs. application à la commande. *Thèse, Ecole Centrale de Lille*.
- Lin, C.T. (1974). Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control* **19**, 201–208.
- Louze, L. (2010). Production décentralisée de l'énergie électrique : Modélisation et contrôle d'une génératrice asynchrone auto excitée. *Université Mentouri-Constantine*.
- Luenberger, D. (1964). Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics* **8**(2), 74–80.
- Luenberger, D. (1966). Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **11**(2), 190–197.
- Luenberger, D. (1967). Canonical forms for linear multivariable systems. *IEEE Transactions Automatic Control* **12**(3), 290–293.

- Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions Automatic Control* **16**(6), 596–602.
- Mahmoudi, O., N. Madani, M. Benkhoris et F. Boudjema (1999). Cascade sliding mode control of a field oriented induction machine drive. *The European Physical journal*.
- Marino, R. et S. Scalzi (2010). asymptotic sideslip angle and yaw rate decoupling control in four-wheel steering vehicles. *Vehicle system dynamics* **48**(9), 999–1019.
- Martin, R., L. Valavani et M. Athans (1986). Multivariable control of a submersible using the lqg/ltr design methodology. *Proceeding. American Control Conference* pp. 1313–1324.
- Mason, S.J. (1956). Feedback theory-further properties of signal flow graphs. *Proc. IRE* **44**(7), 920–926.
- Mérida, J., J.T. Aguilar et J. Dávila (2014). Analysis and synthesis of sliding mode control for large scale variable speed wind turbine for power optimization. *Renewable Energy* **71**(11), 715–728.
- Mirecki, A., X. Roboam et F. Richardeau (2007). Architecture complexity and energy efficiency of small wind turbines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **54**(1), 660–670.
- Multon, B., O. Gergaud, H. Ben ahmed, X. Roboam, S. Astier, B. Dakyo et C. Nichita (2002). état de l’art dans les aérogénérateurs électriques. *paru mai*.
- Nouh, A. (2008). Contribution au développement d’un simulateur pour les véhicules électriques routiers. *Thèse de doctorat. Besançon*.
- Novak, P., I. Jovik et B. Schmidtbauer (1994). Modeling and identification of drive-system dynamics in a variable-speed wind turbine. *In Proceedings of the Third IEEE Conference on Control Applications* **1**, 233–238.
- Ouahi, M., J. Stéphant et D. Meizel (2013). Simultaneous observation of the wheels’ torques and the vehicle dynamic state. *Vehicle System Dynamics* **51**(5), 737–766.
- Ouahi, M., J. Stéphant et D. Meizel (2010). Redefining automotive supervision using new sensor technology. *international Symposium on Advanced Vehicle Control*.
- Oudghiri, M. (2008). Commande multi modèles tolérante aux défauts :application au controle de la dynamique d’un véhicule automobile. *doctorat de université de picardie jules verne, Université de picardie jules verne*.

- Patel, R.M. (1999). Wind and solar power systems. *CRC Press*.
- Patiño, C., R. Tapia, A. Medina et C. Fuerte (ROPEC 2014). Wind turbine inverse control: A bond graph approach. *IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing*.
- Paynter, M. (1961). *Analysis and Design of Engineering Systems*. MIT Press, Cambridge, MA, U.K.
- Perruquetti, W. et J.P. Barbot (2002). Sliding mode control in engineering. *Marcel Dekker*.
- Pichardo-Almarza, C., A. Rahmani, G. Dauphin-Tanguy et M. Delgado (2003). Bond graph approach to build reduced order observers in linear time invariant systems. *Proceedings of 4th MATHMOD, Fourth International Symposium on Mathematical Modeling*.
- Pichardo-Almarza, C., A. Rahmani, G. Dauphin-Tanguy et M. Delgado (2003c). Using the bicausality concept to build reduced order observers in linear time invariant systems modelled by bond graphs. *Proceedings of European Control Conference, ECC'03* pp. 457–462.
- Pliam, J.O. (1989). Ring graphs and gain formulas, an algebraic approach to topology. *IEEE International Symposium on. IEEE* pp. 327–330.
- Poitiers, F. (2003). Etude et commande de génératrices asynchrones pour l'utilisation de l'énergie éolienne. *thèse de doctorat de l'université de Nantes*.
- Rahmani, A. (1993). Etude structurelle des systèmes linéaires par l'approch bond graph, thèse. *Université des Sciences et Technologies de Lille, Lille, France*.
- Rahmani, A., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (1994). Pole assignment for systems modelled by bond graph. *Journal of The Franklin Institute* **321**(3), 229–314.
- Rahmani, A., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (1996). On the infinite structure of systems modelled by bond graph: Feedback decoupling. *Systems, Man, and Cybernetics, IEEE International Conference on* **3**, 1617–1622.
- Reinschke, K.J. (1984). Graph-theoretic characterization of fixed model in centralised and decentralized control. *International Journal of Control* **39**(4), 715–729.
- Reinschke, K.J. (1988). Multivariable control: a graph-theoretic approach. *Lecture. Notes in cont & inf. Sciences, Spriger-Verlag*.

- Riegle, D.E. et P.M. Lin (1972). Matrix signal flow graphs and optimum topological method for evaluating their gains. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **19**(5), 427–437.
- Rizzo, A. (2012). L'approche crone dans le domaine des architectures complexes des suspensions de véhicules automobiles : la suspension crone hydractive. *Thèse de doctorat, Université de Boudeaux 1*.
- Rodriguez-Vida, H.C. et J.R. Puiggoli (2004). Principles of a simulation model for a variable- speed pitch-regulated wind turbine. *Wind Engineering* **28**(2), 157–175.
- Rotella, F., et P. Borne (1995). *Théorie et pratique du calcul matriciel*. Vol. 6. Editions technip.
- Rudolph, J. (1996). Duality in time-varying linear systems: A module theoretic approach. *Linear Algebra and its Applications* **245**, 83–106.
- Sabra, H. (2015). Contribution à l'analyse de sensibilité des systèmes complexes : application à la dynamique du véhicule. *Thèse de doctorat, Université de Haute-Alsace*.
- Saget, C. (1998). La variation électronique de vitesse au service de la production d'énergie électrique par éolienne. *REE* **7**, 42–48.
- Sanchez, R. et A. Medina (2014). Wind turbine model simulation: A bond graph approach. *Simulation Modelling Practice and Theory* **41**, 28–45.
- Sefik, A. et M.E. Sezer (1991). Pole assignement problem: a structural investigation. *International Journal of Control* **54**(4), 973–998.
- Segel, L.M. (1956). Theoretical prediction and experimental substantiation of the response of the automobile to steering control. in proc.. *automobile division of the institut of mechanical engineers* **7**(1), 310–330.
- Serensen, P., D.A. Hansen, L. Janosi, J. Bech et B. Bak-Jensen (2001). imulation of interaction between wind farm and power systems. *Riso Report R-1281(EN), Riso National Laboratory, Roskilde, Denmark*.
- Sira-Ramirez, H. (1988). Differential geometric methods in variable structure control. *International Journal of Control* **48**(4), 1359–1390.
- Slotine, J.E. (1984). Sliding controller design for nonlinear systems. *International Journal of Control* **40**(2), 421–434.

- Slotine, J.E. et S.S. Sastry (1983). Tracking control of nonlinear system using sliding surface, with application to robotic manipulators. *International Journal of Control* **38**(2), 465–492.
- Slotine, J.E. et W. Li (1991). *Applied nonlinear control*. Vol. 461.
- Solmaz, S., M. Akar, R. Shorten et J. Kalkkuhl (2008). real-time multiplemodel estimation of center of gravity position in automotive vehicles. *Vehicle system dynamics* **46**(9), 763–788.
- Stol, K.A. (2004). Geometry and structural properties for the controls advanced research turbine (cart) from model tuning. *Subcontractor Report SR-500-32087, National Renewable Energy Laboratory, Golden, CO, September*.
- Stéphane, J. (2004). Contribution à l'étude et à la validation expérimentale d'observateurs appliqués à la dynamique du véhicule. *doctorat de l'université de technologie de compiègne, Université de Technologie de Compiègne*.
- Stéphane, J., A. Charara et D. Meizel (2007). Evaluation of a sliding mode observer for vehicle side slip angle. *Control Engineering Practice* **15**(7), 803–812.
- Sueur, C. (1990). Contribution à la modélisation et à l'analyse des systèmes dynamiques par une approche bond-graph. *Thèse*.
- Sueur, C. et G. Dauphin-Tanguy (1991). Bond-graph approach for structural analysis of mimo linear systems. *Journal of the Franklin Institute* **328**(1), 55–70.
- Sueur, C. et G. Dauphin-Tanguy (1995). Controlability indices for bond graph models. *IFAC Conference, System Structure and Control, Nantes, France* **28**(8), 85–90.
- Toual, B. (2010). Modélisation et commande floue optimisée d'une génératrice à double alimentation, application à un système éolien à vitesse variable. *mémoire de magister Université de Batna*.
- Tran, D-H. (2010). Conception optimale intégrée d'une chaîne éolienne « passive » : Analyse de robustesse, validation expérimentale. *Thèse de doctorat, Université de Toulouse*.
- Utkin, V. (1977). Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control* **22**(4), 212–222.
- Utkin, V. (1992). Sliding modes in control optimization. *Springer Verlag, USA*.

- Utkin, V. et H. Lee (2006). Chattering problem in sliding modes control systems. *VSS'06, Alghero Ital* pp. 346–350.
- Valasek, M. et N. Olga (1995). Pole placement for mimo time-varying non-lexicographic-fixed linear systems. *Proceedings of the 34th Conference on Decision* pp. 4368–4373.
- Van-Der-Schaft, A.J. (1991). Duality for linear systems: External and state space characterization of the adjoint system. *in Analysis of Controlled Dynamical Systems (B. Bonnard, B. Bride, J.P. Gauthier and I. Kupka)*, Birkhäuser, Boston pp. 393–403.
- Vihriälä, H. (2002). Control of variable speed wind turbines. *PhD thesis, Tampere university of technology*.
- Vries, O.D. (1983). On the theory of the horizontal axis wind turbine. *Ann. Rev. Fluid. Mech* **983**(15), 77–96.
- Williams, J. C. (March 1991). Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.* **36**(3), 259–294.

Annexe A

Méthodologie Bond-Graph

L'outil bond-graph (BG) fondé par Paynter, (Paynter, 1961) et formalisé par Karnopp et Rosenberg, (Karnopp et Rosenberg, 1975) et Breedveld, (Breedveld, 1984) est un langage graphique de modélisation de systèmes physiques dynamiques. Le modèle BG peut être considéré comme un modèle intermédiaire entre le système physique et le modèle mathématique qui lui est associé. La méthodologie BG possède deux particularités importantes, la première est son caractère unifié à tous les domaines de la physique et la deuxième est son approche structurée et modulaire de modélisation des systèmes pluridisciplinaires.

La méthodologie BG est basée sur les principes suivants :

- la représentation des transferts énergétiques entre composants ou sous-systèmes à l'aide de liens de puissance portant des variables complémentaires, effort et flux, dont le produit représente la puissance instantanée échangée,
- une organisation en éléments passifs, éléments actifs et éléments de jonction, conservateurs de puissance formant la structure du modèle,
- l'encapsulation dans les composants des lois mathématiques représentatives de leurs comportements internes et externes,
- la visualisation graphique des interactions entre composants à l'aide de traits de causalité.

Pour en savoir plus, nous recommandons aux chers lecteurs les excellents ouvrages de (Dauphin-Tanguy, 2000), (Paynter, 1961) et (Karnopp et Rosenberg, 1975) parmi d'autres.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler un certain nombre de principes et d'outils de base de la méthodologie BG. À commencer par la symbologie graphique représentant

le transfert de puissance entre les différentes parties du système puis la définition des différentes variables de puissance et d'énergie mises en jeu. Ensuite, nous développerons les différents composants ainsi que les procédures de construction de modèles BGs. Enfin, nous présentons les notions de causalité ainsi que la représentation structurale.

A.1 Représentation des transferts de puissance

Dans un système fermé composé de deux sous-systèmes Σ_A et Σ_B par exemple, il y a non seulement conservation d'énergie, mais aussi continuité de puissance. Le flux d'énergie entre les sous-systèmes Σ_A et Σ_B est représenté par un lien (bond) de puissance, une demie flèche comme représenté, figure A.10.

$$\Sigma_A \xrightarrow[e]{e} \Sigma_B$$

Figure A.1 : Représentation BG du transfert de puissance

La puissance instantanée échangée P entre Σ_A et Σ_B se calcule par le produit effort-flux. Le sens de la demie flèche correspond au produit $P > 0$.

A.2 Variables mises en jeu

D'un point de vue global, indépendamment du domaine physique considéré, les variables e et f sont considérées comme étant les variables définissant la puissance, i.e., $P = ef$.

Comme l'énergie est l'intégrale de la puissance par rapport au temps, on distingue alors deux variables d'énergie :

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_0^t e(\tau) d\tau + p(0) \\ q(t) &= \int_0^t f(\tau) d\tau + q(0) \end{aligned} \tag{A.1}$$

$p(t)$ est le moment généralisé et $q(t)$ est le déplacement généralisé.

Le tableau A.2 indique la signification physique et l'unité de ces différentes variables dans certains domaines physiques.

A.3 Éléments BGs

On peut classer les différents éléments BGs en trois catégories distinctes :

- les éléments passifs : R, C et I ;

Domaine physique	Variables de puissance				Variables de d'énergie			
	Effort e	SI	Flux f	SI	Moment $p = \int edt$	SI	Déplacement $q = \int f dt$	SI
Mécanique translation	Force F	N	Vitesse V	$\frac{m}{s}$	Moment p	Ns	Élongation x	m
Mécanique rotation	Couple τ	Nm	Vitesse angulaire ω	$\frac{rad}{s}$	Moment angulaire H	Nms	Angle θ	rad
Électrique	Tension u	V	Courant i	A	Flux magnétique Φ	Wb	Charge q	C
Hydraulique	Pression P	$\frac{N}{m^2}$	Débit volumique Q	$\frac{m^3}{s}$	Impulsion P_p	$\frac{Ns}{m^2}$	Volume V	m^3

Tableau A.1 : Classification des différentes variables BGs

- les éléments actifs : les sources Se et Sf ;
- les éléments de jonction : $0, 1, TF$ et GY .

A.3.1 Les éléments passifs

Élément R

L'élément R est utilisé pour modéliser tout phénomène physique dissipant de l'énergie (amortisseurs, résistances électriques, différents frottements, restrictions hydrauliques, etc.). Sa loi constitutive est une relation algébrique entre les variables effort et flux.

$$\Phi_R(e, f) = 0 \quad (A.2)$$

La représentation par bond-graph de l'élément R est donnée par la figure (A.2).



$$e - Rf = 0$$

Figure A.2 : Représentation de l'élément R

Si sa valeur dépend d'un signal exogène, il devient un R modulé, e.g., servovalve.

Élément C

L'élément de stockage C emmagasine de l'énergie. La variable d'énergie qui lui est associée est notée q , elle résulte généralement des processus d'accumulation (ou d'intégration). L'élément C est utilisé pour modéliser tout phénomène physique

liant l'effort au déplacement, e.g., ressorts, condensateurs, réservoirs de liquide, tout phénomène d'élasticité ou de compressibilité. La loi constitutive de cet élément est :

$$\Phi_C(e, q) = 0 \quad (\text{A.3})$$

La représentation générale d'un élément C est donnée par la figure A.3.

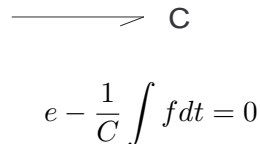


Figure A.3 : Représentation de l'élément C

Élément I

L'élément I est aussi un élément de stockage d'énergie. Il est utilisé pour modéliser tout phénomène physique liant le flux au moment, e.g., les inerties (masses en translation ou en rotation), les inductances électriques, etc. La loi constitutive de cet élément est :

$$\Phi_I(p, f) = 0 \quad (\text{A.4})$$

La représentation générale d'un élément I est donnée par la figure A.3.

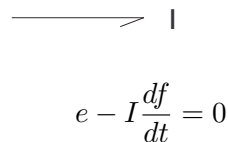


Figure A.4 : Représentation de l'élément I

A.3.2 Les éléments actifs : les sources

Les sources représentent l'interaction du système avec son environnement, (e.g., forces de gravité, vitesses, sources de tension ou de courant, etc.). Ces éléments sont qualifiés d'actifs car ils fournissent de l'énergie au système. Selon le type de variable imposée, on distingue les sources d'effort (Se) ou de flux (Sf).

L'orientation de la demie flèche est fixée et elle est toujours sortante de la source.

Dans chacun des cas, une des variables (effort ou flux) est supposée connue, et indépendante de la variable complémentaire induite qui dépend de la réaction du système.



Figure A.5 : Représentation des éléments sources

Quand une partie du système devrait être excitée, habituellement par un signal connu, on modélise ce phénomène par une source d'effort ou de flux modulée (MSe, MSf).

A.3.3 Les éléments de jonction

Ces éléments, notés $0, 1, TF, GY$ servent à coupler les éléments R, C et I et composent la structure de jonction du modèle correspondant à l'architecture du système étudié. Ils sont conservatifs de puissance.

Jonction 0

La jonction 0 sert à associer les éléments soumis au même effort, e.g., connection parallèle dans un circuit électrique. Les lois qui la caractérisent sont :

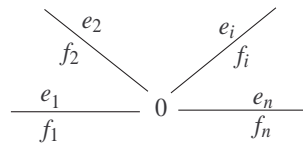


Figure A.6 : Jonction 0

$$\begin{cases} e_1 = e_2 = \dots = e_i = \dots = e_n = e \\ \sum_{j=1}^n \pm f_j = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

i.e., égalité des efforts et somme pondérée des flux nulle. La pondération sur les flux est $+1$ ou -1 selon que la demie flèche est rentrante ou sortante de la jonction.

Jonction 1

La jonction 1 sert à associer les éléments soumis au même flux, e.g., connection série dans un circuit électrique. Elle est caractérisée par les lois :

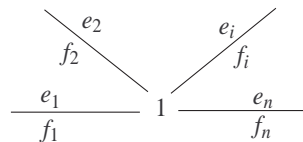


Figure A.7 : Jonction 1

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = \dots = f_i = \dots = f_n = f \\ \sum_{j=1}^n \pm e_j = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

i.e., égalité des flux et somme pondérée des efforts nulle. La pondération sur les efforts est $+1$ ou -1 selon que la demie flèche est rentrante ou sortante de la jonction.

Transformateurs TF

Cet élément passif possède deux ports, figure A.8, où m représente le module du transformateur. Ses lois caractéristiques sont :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_1} \\ \xleftarrow{f_1} \end{array} \xrightarrow{\quad} \overset{\overset{m}{\ddot{TF}}}{\quad} \begin{array}{c} \xrightarrow{e_2} \\ \xleftarrow{f_2} \end{array}$$

Figure A.8 : Transformateur

$$\begin{cases} e_1 = me_2 \\ f_2 = mf_1 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

e.g., transformateurs électriques, bras de levier, systèmes d'engrenages, etc.

Si m n'est pas constant, le transformateur est modulé par un signal, il est noté *MTF*.

Gyrateurs GY

Cet élément passif possède également deux ports, figure A.9, où r représente le module du gyrateur. Ces lois génériques sont :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_1} \\ \xleftarrow{f_1} \end{array} \xrightarrow{\quad} \overset{\overset{r}{\ddot{GY}}}{\quad} \begin{array}{c} \xrightarrow{e_2} \\ \xleftarrow{f_2} \end{array}$$

Figure A.9 : Gyrateur

$$\begin{cases} e_1 = rf_2 \\ e_2 = rf_1 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

On peut rencontrer ce phénomène physique dans les moteurs électriques, les composants électroniques à effet Hall, les pompes hydrauliques et les turbines.

Si r n'est pas constant, le gyrateur est modulé par un signal, il est noté *MGY*.

A.4 Procédure générale de construction de modèles BGs

Le modèle BG est construit sur la base du système physique idéalisé résultant des hypothèses simplifications (phénomènes pris en compte, etc.). Il existe une procédure

systematique de construction d'un modèle BG. Cette procédure consiste essentiellement en la représentation de la structure du modèle (appelé structure de jonction), l'incorporation des composants du système, la représentation du flux de puissance avec des liens "bonds" et probablement des simplifications.

Systèmes mécaniques :

- fixer un axe de référence pour les vitesses,
- associer une jonction 1 pour toute vitesse absolue (masse, inertie) ou relative différente et lui attacher les éléments correspondants,
- exprimer les relations entre vitesses. Placer une jonction 0 par relation entre les jonctions 1 associées aux vitesses intervenant dans la relation,
- relier les jonctions par des liens, en respectant le sens de transfert de puissance,
- supprimer les jonctions 1 associées à une vitesse nulle, ainsi que tous les liens qui y sont attachés et simplifier si c'est possible.

Systèmes électriques :

- fixer un sens de circulation de courant qui sera pris comme sens de transfert de puissance,
- associer une jonction 0 pour chaque noeud de tension différent,
- placer une jonction 1 entre deux jonctions 0 et y attacher les éléments soumis à la différence de potentiel (éléments ayant le même flux),
- relier toutes les jonctions entre elles en respectant le sens du transfert de puissance,
- choisir un noeud de référence et supprimer les jonctions qui y sont associées et les liens qui y sont attachés. Simplifier si c'est possible.

Systèmes hydrauliques :

La procédure est la même que dans le cas électrique, les jonctions 0 sont associées aux noeuds de pressions différentes. Le modèle BG complet est simplifié en choisissant un noeud de pression particulier (correspondant en général à la pression atmosphérique).

A.5 Causalité

Cette notion est très importante, elle permet de définir la structure de calcul avec mise en évidence des relations de cause à effet au sein d'un système, ce qui est un

avantage essentiel du bond graph par rapport aux autres représentations graphiques telles que les digraphes et les graphes de fluence.

Lorsque deux systèmes sous-systèmes Σ_A et Σ_B sont couplés, tel que Σ_A transmet de la puissance à Σ_B , nous avons deux situations possibles :

- Σ_A applique à Σ_B un effort e , qui réagit en renvoyant à Σ_A un flux f ;
- Σ_A envoie à Σ_B un flux f , qui répond par un effort e .

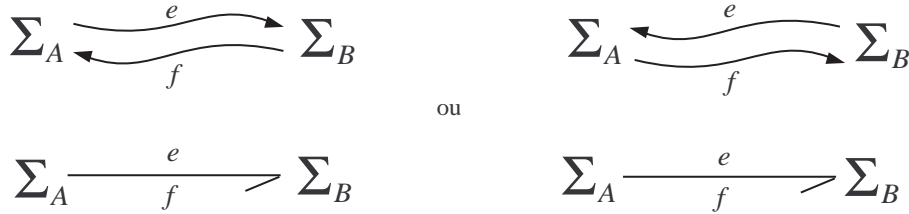


Figure A.10 : Deux situations de causalité

Cette information est codée par un trait causal placé perpendiculairement au lien. Il indique par convention le sens dans lequel l'effort est connu (le flux est alors connu dans le sens opposé). La position de ce trait causal est indépendante du sens de la demie flèche qui représente le sens du transfert de puissance. Les règles de causalité des différents éléments sont résumées dans les tableaux A.2, A.3.

Élément	Causalité	Configuration	Loi caractéristique
Source d'effort	Obligatoire	$Se \xrightarrow[e]{\text{---}} \rceil$	e est imposé par Se
Source de flux	Obligatoire	$Sf \vdash \xrightarrow[e]{\text{---}} \rceil$	f est imposé par Sf
Élément I	Intégrale	$\frac{e(t)}{f(t)} \rceil I: L(t)$	$f_I = \Phi_I(\int e_I dt)$
	Dérivée	$\vdash \frac{e(t)}{f(t)} \rceil I: L(t)$	$e_I = \frac{d}{dt} [\Phi_I^{-1}(f_I)]$
Élément C	Intégrale	$\vdash \frac{e(t)}{f(t)} \rceil C: C(t)$	$e_C = \Phi_C(\int f_C dt)$
	Dérivée	$\frac{e(t)}{f(t)} \rceil C: C(t)$	$f_C = \frac{d}{dt} [\Phi_C^{-1}(e_C)]$

Tableau A.2 : Règles d'affectation de la causalité aux éléments BGs

Élément	Causalité	Configuration	Loi caractéristique
Élément R non linéaire	Conductance	$\frac{e}{f} \rightarrow R$	$f_R = \Phi_R^{-1}(e_R)$
	Résistance	$\leftarrow \frac{e}{f} R$	$e_R = \Phi_R(f_R)$
Jonction 0	Un seul trait près de la jonction 0		$e_1 = e_i, e_2 = e_i, \dots, e_n = e_i$ $f_i = \pm \sum_{j=1}^n \pm f_j, i \neq j$
Jonction 1	Un seul trait loin de la jonction 1		$f_1 = f_i, f_2 = f_i, \dots, f_n = f_i$ $e_i = \pm \sum_{j=1}^n \pm e_j, i \neq j$
Transformateur TF	Flux rentrant		$\begin{cases} e_1 = m e_2 \\ f_2 = m f_1 \end{cases}$
	Effort rentrant		$\begin{cases} e_2 = \frac{1}{m} e_1 \\ f_1 = \frac{1}{m} f_2 \end{cases}$
Gyrateur TG	Flux rentrant		$\begin{cases} e_1 = r f_2 \\ e_2 = r f_1 \end{cases}$
	Effort rentrant		$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{r} e_2 \\ f_2 = \frac{1}{r} e_1 \end{cases}$

Tableau A.3 : Règles d'affectation de la causalité aux éléments BGs - suite

Procédure d'affectation de la causalité

Une fois que le modèle BG complet est obtenu, on peut alors appliquer la procédure suivante connue sous le nom de SCAP (Sequential Causality Assignment Procedure).

1. Affecter une causalité obligatoire aux sources et aux éléments R non linéaires et répercuter sur l'environnement en respectant les restrictions de causalité des jonctions.
2. Affecter une causalité intégrale préférentielle aux éléments I et C et répercuter sur l'environnement en respectant également les restrictions sur les jonctions.
3. Compléter la causalité sur les éléments R linéaires en respectant les restrictions sur les jonctions.
4. En cas de conflit de causalité, rechercher l'élément I ou C en cause et lui affecter

une causalité dérivée puis repartir à l'étape 3.

5. Affecter la causalité au détecteurs, s'il y a lieu.

Annexe B

Aérodynamique de l'éolienne

B.1 Puissance aérodynamique

Soit la masse d'air homogène, dm , de densité ρ , contenue dans cylindre horizontal, dont l'une des sections S est le disque rotorique (surface balayée par le rotor), de longueur dl , incidente sur le rotor à une vitesse v (Figure B.1). L'énergie cinétique

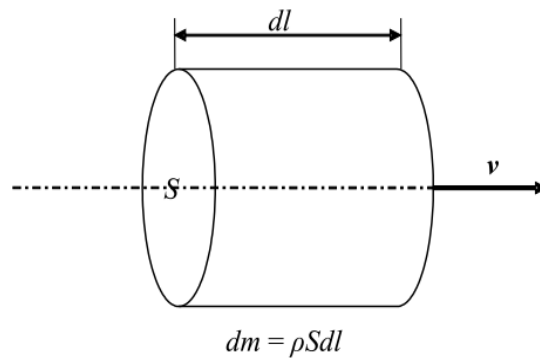


Figure B.1 : Colonne d'air incidente sur le rotor

dE_c de cette colonne s'écrit:

$$dE_c = \frac{1}{2} \rho S dl v^2 \quad (\text{B.1})$$

Soit P_{a0} la puissance transmise par cette masse, en substituant $dl = v dt$ dans (B.1), on a:

$$P_{a0} = \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} \rho S v^3 \quad (\text{B.2})$$

On ne peut extraire toute la puissance contenue dans le vent, seule une partie est transmise au rotor.

On définit alors le coefficient de puissance C_p du rotor, appelé aussi facteur de rendement aérodynamique.

$$C_p = \frac{P_a}{P_{a0}} = \frac{P_a}{\frac{1}{2}\rho S v^3} \quad (\text{B.3})$$

Le rapport (B.3) donne la proportion de l'énergie cinétique du flux d'air qui est transformé en énergie mécanique.

La puissance aérodynamique extraite du rotor est alors donné par:

$$P_a = \frac{1}{2}\rho S v^3 \quad (\text{B.4})$$

B.2 Coefficients de puissance et de couple de l'éolienne

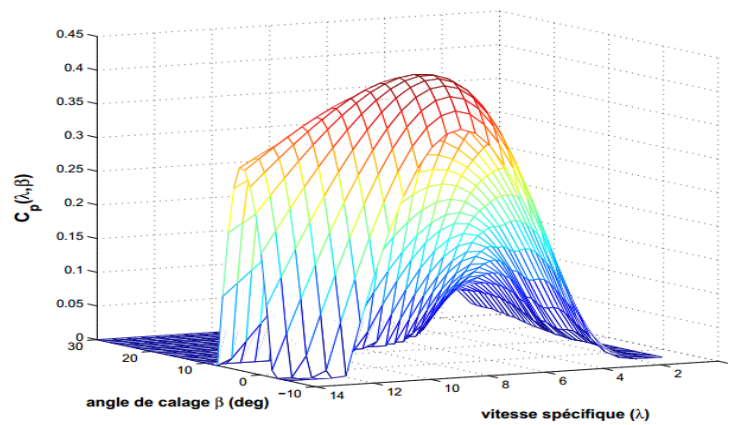


Figure B.2 : Coefficient de puissance $C_p(\lambda, \beta)$

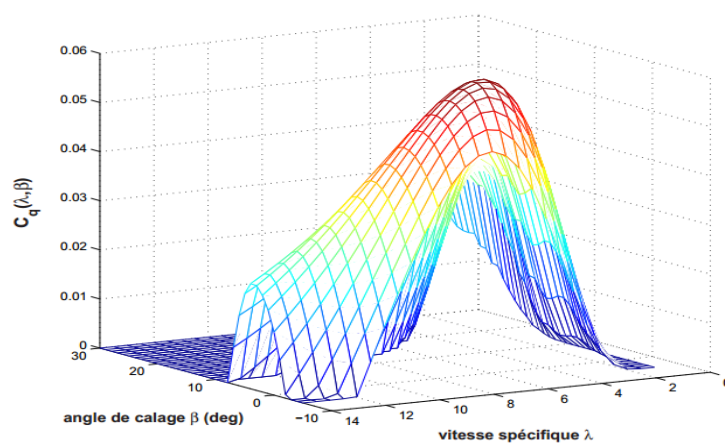


Figure B.3 : Coefficient de couple $C_q(\lambda, \beta)$