



**N° d'ordre : 38 / 2017**

## THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences et Techniques de Fès

En vue de l'obtention du titre de :

**Docteur de l'Université Sidi Mohamed Ben Abdallah**

**Discipline : Génie Mécanique**

**Spécialité : Mécanique et Energétique**

Par :

**MOHAMED EL HAROUI**

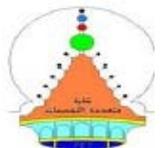
---

# MODELISATION ET ANALYSE DE LA CONVECTION THERMOSOLUTALE DANS UN MILIEU POREUX SATURE DE FLUIDE BINAIRE

---

*Soutenue le 11 / 11 / 2017 devant le jury composé de :*

Pr Mohammed EL HAMMOUMI	PES	USMBA, FST - Fès	Président
Pr Mohamed TOUZANI	PES	UMI, FST - Errachidia	Rapporteur
Pr Ahmed EL BIYAALI	PES	USMBA, FST - Fès	Rapporteur
Pr Mbarek BAKKAS	PH	UMI, ENSAM - Meknès	Rapporteur
Pr Salahddine KAMMOURI ALAMI	PH	USMBA, FP - Taza	Examineur
Pr Mohammed SRITI	PES	USMBA, FP - Taza	Directeur
Pr Driss ACHEMLAL	PESA	UMP, ENSA – El Hoceima	Invité



## *Dédicace*

Ce travail de thèse est spécialement dédié :



- A mon père, **Ahmed** et ma mère, **Fatna**, sans lesquels je n'aurais jamais pu exister,
- A mes sœurs et frères,
- A ma femme, Salwa,
- A ma petite fille, Nirmine,
- A tous mes proches,
- A tous mes ami(e)s,
- A tous ceux qui m'ont aidé et encouragé,
- A tous ceux qui me sont chers.

## *AVANT - Propos*

Le présent travail a été réalisé au Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur (LSI) de la Faculté Polydisciplinaire de Taza sous la direction du Professeur **Mohammed SRITI**.

C'est avec une certaine émotion et beaucoup de sincérité que je voudrais remercier toutes les personnes ayant soutenu et apprécié mon travail.

En premier lieu, j'exprime ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur **M. SRITI**, Professeur à la Faculté Polydisciplinaire de Taza et directeur du Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur, pour m'avoir donné la chance de préparer cette thèse de doctorat et pour m'avoir parfaitement guidé et m'encouragé tout au long de ce travail. Je le remercie très chaleureusement pour sa disponibilité, ses compétences scientifiques et pédagogiques, ses idées originales ainsi que ses qualités humaines.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur **M. EL HAMMOUMI**, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Fès, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury, malgré ses multiples occupations, qu'il veuille trouver ici, l'expression de ma gratitude pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Je remercie sincèrement Messieurs : **M. TOUZANI**, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques d'Errachidia, **A. EL BIYAALI**, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Fès et **M. BAKKAS**, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers de Meknès pour avoir accepté de rapporter cette thèse. Ils m'ont permis de bénéficier de leurs solides compétences scientifiques par l'analyse attentive et constructive qu'ils ont portée à ce travail.

Je suis très reconnaissant à Monsieur **S. K. ALAMI**, Professeur à la Faculté Polydisciplinaire de Taza et je le remercie d'avoir bien voulu accepter d'examiner ce travail, notamment d'un point de vue mathématique et numérique.

Je remercie également Monsieur **D. ACHEMLAL**, Professeur à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'El Hoceima, pour le soutien qu'il m'a apporté tout au long du déroulement de ma thèse et pour avoir accepté d'assister au jury, en tant que membre invité.

Je voudrai aussi témoigner ma reconnaissance à tous les membres du laboratoire des sciences de l'ingénieur, notamment **E. FLILIH** et **M. LAKHCHINE** et je leur souhaite le bon courage pour leurs thèses de doctorat.

Je ne saurais oublier mes amis et collègues du Lycée, en particulier M. ABARBACH, A. ASSAYHI et M. FARHI de leur témoignage avec toute ma reconnaissance et ma sympathie.

Enfin, je remercie tous les membres de ma famille pour ses encouragements et leur compréhension et patience pendant toutes les années de doctorat.

## Résumé

L'intérêt porté à la convection thermosolutale avec l'effet Soret a émergé dans les dernières décennies et ce, à cause de son importance dans de nombreuses applications naturelles et industrielles. L'extraction pétrolière, le moulage des alliages, la croissance cristalline, la pollution des sols et des nappes phréatiques, les opérations de dessalement de l'eau de mer, en sont quelques exemples. Dans l'ensemble des investigations menées dans ce cadre, l'objectif primaire était de comprendre les différents mécanismes résultant des mouvements convectifs engendrés. Dans toutes ces situations, les forces de volume sont responsables de la naissance de ces mouvements convectifs. Notons que ces forces de volume sont soit d'origine thermique, soit d'origine solutale. C'est pour cette raison que l'écoulement ainsi induit prend le nom « thermosolutale ».

Dans cette thèse, la convection thermosolutale naturelle ou mixte dans un milieu poreux saturé de fluide binaire, en présence de l'effet Soret et de la réaction chimique, avec et sans source interne de chaleur, a été étudié de point de vue théorique et numérique. Le domaine d'étude considéré est assimilé à une plaque plane perméable, chauffée et émergée verticalement dans un milieu poreux saturé avec un fluide binaire newtonien. Les écoulements engendrés au sein du système proposé sont régis par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration couplées avec des conditions aux limites s'appuyant sur une température variable le long de la plaque, une concentration constante et une vitesse d'aspiration ou d'injection à travers la plaque. Le problème a été modélisé en adoptant la méthode semi-analytique, connue généralement par la méthode de similarité. Le problème mathématique se ramène à un système d'équations différentielles adimensionnelles non-linéaires, de second ordre, dont la résolution est faite par la méthode de *Runge-Kutta-Fehlberg* d'ordre cinq couplée avec la technique itérative de Tir. Pour la validation du modèle mathématique, nous avons constatés un excellent accord entre les résultats obtenus et ceux déjà publiés pour les différents cas étudiés. Les effets des paramètres de contrôles sur les solutions de similarité sont étudiés et analysés en détail et les résultats obtenus ont permis de mettre en évidence l'influence majeure de l'effet Soret, de l'état thermique de la plaque, de l'aspiration/injection du fluide, ainsi que de la perméabilité du milieu poreux sur la convection thermosolutale.

**Mots clés :** *Convection thermosolutale, Fluide binaire, Milieu poreux saturé, Effet Soret, Réaction chimique, Source de chaleur interne, Aspiration/Injection, Méthode de similarité, Runge-Kutta-Fehlberg.*

## Abstract

The interest in thermosolutal convection with Soret effect has emerged in recent decades, because of its importance in many naturel and industrial applications, such as oil extraction, casting of alloys, crystal growth, soil and groundwater pollution, seawater desalination operations and many others applications. The primary objective in the investigations carried out in this framework, was to understand different mechanisms resulting from the convective movements generated. In all these situations, the volume forces of thermal or solutal origin are the principal cause of these convective movements. This is why the induced flow is called "thermosolutal" or "double diffusive".

In this thesis, the free and mixed thermosolutal convection in a binary fluid saturated porous medium, in the presence of the Soret effect and chemical reaction, with or without an internal heat generation, have been numerically studied. The physical model considered is a vertical permeable flat plate, emerged in the binary fluid saturated porous medium. The plate is subjected to a variable temperature, a constant concentration and a suction/injection velocity.

In the present work, the flows generated within the proposed system, are governed by the conservation equations of mass, momentum, energy and concentration which are nonlinear and strongly coupled. The mathematical model of the problem is reduced into a set of coupled nonlinear ordinary differential equations using similarity method. The resulting equations are solved numerically by a computational code based on the fifth order Runge-Kutta scheme coupled with the shooting technique. The obtained results are graphically displayed for various controlling parameters. A comparison with previously published work is performed and the results were in an excellent agreement.

**Keywords :** *Thermosolutal convection, Binary fluid, Saturated porous medium, Soret effect, Chemical reaction, Internal heat generation, Permeable flat plat, Suction/Injection, Similarity method, Runge-Kutta-Fehlberg.*

# SOMMAIRE

Liste des symboles .....	1
Liste des figures .....	3
Liste des tableaux.....	5
<b>Introduction générale.....</b>	<b>7</b>
<b>CHAPITRE I            Généralités et revue bibliographique</b>	<b>9</b>
<b>I Introduction.....</b>	<b>9</b>
<b>II Notions sur le milieu poreux.....</b>	<b>9</b>
II.1 Définition.....	9
II.2 Paramètres caractérisant le milieu poreux.....	11
II.2.1 Porosité.....	11
II.2.2 Perméabilité.....	13
II.2.3 Tortuosité.....	14
II.2.4 Conductivité thermique équivalente.....	15
II.2.5 Volume élémentaire représentatif.....	15
<b>III Echelles de modélisation en milieux poreux.....</b>	<b>17</b>
III.1 Echelle microscopique .....	17
III.2 Echelle macroscopique.....	17
III.3 Changement d'échelle.....	17
<b>IV Phénomènes des transferts par convection.....</b>	<b>18</b>
IV.1 Transfert de chaleur par convection.....	18

IV.1.1	Convection naturelle .....	18
IV.1.2	Convection forcée.....	18
IV.1.3	Convection mixte.....	19
IV.2	Convection thermosolutale .....	19
<b>V</b>	<b>Effet Soret .....</b>	<b>19</b>
V.1	Intérêt pratique et industriel de l'effet Soret .....	21
V.2	Colonne thermogravitationnelle.....	21
<b>VI</b>	<b>Revue bibliographique.....</b>	<b>22</b>
VI.1	Convection thermosolutale sans effet Soret.....	23
VI.2	Convection thermosolutale avec effet Soret .....	26
<b>VII</b>	<b>Situation du problème.....</b>	<b>29</b>
<b>VIII</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>30</b>
<b>CHAPITRE II</b>	<b>Formulation mathématique</b>	<b>31</b>
<b>I</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>31</b>
<b>II</b>	<b>Problème physique .....</b>	<b>31</b>
II.1	Domaines d'applications .....	31
II.2	Position du problème.....	32
II.3	Hypothèses de travail .....	33
II.4	Approximation de Boussinesq.....	34
<b>III</b>	<b>Equations de conservation en milieu poreux .....</b>	<b>34</b>
III.1	Equation de continuité.....	35
III.2	Equation de conservation de la quantité de mouvement.....	35
III.3	Equation de conservation de l'énergie .....	36

III.4	Equation de Conservation de l'espèce .....	37
<b>IV</b>	<b>Equations régissant le problème physique .....</b>	<b>37</b>
IV.1	Analyse d'échelle de la couche limite .....	38
IV.2	Système d'équations retenu .....	40
<b>V</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>41</b>
<b>CHAPITRE III</b>	<b>Méthode de résolution</b>	<b>43</b>
<b>I</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>43</b>
<b>II</b>	<b>Approche de similarité.....</b>	<b>43</b>
II.1	Méthode de similarité .....	43
II.2	Mise en forme adimensionnelle des équations .....	44
II.3	Nombres adimensionnels.....	46
II.3.1	Nombre de Nusselt local .....	47
II.3.2	Nombre de Sherwood local .....	48
II.3	Coefficient de frottement.....	48
<b>III</b>	<b>Résolution numérique .....</b>	<b>50</b>
III.1	Méthode de Runge-kutta Fehlberg .....	50
III.2	Procédure de résolution numérique.....	52
III.3	Algorithme de résolution.....	52
III.4	Organigramme de calcul .....	53
<b>IV</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>55</b>
<b>CHAPITRE IV</b>	<b>Effets Soret-Dufour en présence de réaction</b>	
	<b>chimique et génération interne de chaleur</b>	<b>56</b>
<b>I</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>56</b>

<b>II</b>	<b>Position du problème .....</b>	<b>57</b>
<b>III</b>	<b>Analyse des résultats .....</b>	<b>59</b>
III.1	Validation.....	61
III.2	Influence des paramètres sur la convection thermosolutale.....	61
III.2.1	Profils dynamique, thermique et massique.....	61
III.2.1.1	Effet de $Le$ .....	61
III.2.1.2	Effet de $N$ .....	63
III.2.1.3	Effet de $f_w$ .....	65
III.2.1.4	Effet de $D_f$ .....	68
III.2.1.5	Effet de $Sr$ .....	70
III.2.1.6	Effet de $\gamma$ .....	71
III.2.1.7	Effet de $\lambda$ .....	72
III.2.2	Taux des transferts thermique et massique .....	74
III.2.2.1	Effets de $f_w$ et $SCI$ .....	74
III.2.2.2	Effets de $Sr$ et $\lambda$ .....	75
III.2.2.3	Effet de $\gamma$ .....	77
<b>IV</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>79</b>

**CHAPITRE V      Convection thermosolutale mixte dans un milieu poreux à perméabilité non uniforme** 81

<b>I</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>81</b>
<b>II</b>	<b>Position du problème .....</b>	<b>81</b>
<b>III</b>	<b>Hypothèses du travail.....</b>	<b>82</b>
<b>IV</b>	<b>Modèle mathématique et analyse de similarité .....</b>	<b>82</b>

IV.1	Nombre de Nusselt et de Sherwood.....	85
IV.2	Technique de résolution numérique.....	85
<b>V</b>	<b>Discussion des résultats numériques.....</b>	<b>86</b>
V.1	Profils de vitesse.....	87
V.1.1	Effet du paramètre $\gamma$ .....	87
V.1.2	Effet du paramètre $p$ .....	88
V.2	Profils de température .....	89
V.2.1	Effet du paramètre $\gamma$ .....	89
V.2.2	Effet du paramètre $p$ .....	91
V.3	Profils de concentration.....	91
V.3.1	Effet du paramètre $\gamma$ .....	91
V.3.2	Effet du paramètre $p$ .....	92
V.4	Taux de transfert de chaleur et de masse.....	93
V.4.1	Effet des paramètres $\gamma$ et $p$ .....	93
V.4.2	Effet des paramètres $f_w$ et $\lambda$ .....	95
V.4.3	Effet des paramètres $\delta$ et $Sr$ .....	96
<b>VI</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>98</b>
	<b>Conclusion générale .....</b>	<b>100</b>
	<b>Références.....</b>	<b>103</b>
	<b>Publications .....</b>	<b>110</b>
	<b>Communications .....</b>	<b>111</b>

## LISTE DES SYMBOLES

---

$A$	Paramètre de température de surface	$Re$	Nombre de Reynolds
$a$	Diffusivité thermique équivalente ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )	$RK_5$	Runge-Kutta d'ordre 5
$B$	Paramètre de la vitesse $V_w$	$SCI$	Source de chaleur interne
$C$	Concentration ( $Kg \cdot m^{-3}$ )	$Sr$	Nombre de Soret
$C_p$	Chaleur spécifique du fluide ( $J \cdot Kg^{-1} \cdot K^{-1}$ )	$Sh_x$	Nombre de Sherwood
$C_w$	Concentration à la plaque ( $Kg \cdot m^{-3}$ )	$T$	Température de fluide ( $K$ )
$C_\infty$	Concentration à l'infini ( $Kg \cdot m^{-3}$ )	$T_w$	Température de la plaque ( $K$ )
$Da$	Nombre de Darcy	$T_\infty$	Température à l'infini ( $K$ )
$D_M$	Coefficient de diffusion massique ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )	$u$	Vitesse axiale ( $m \cdot s^{-1}$ )
$D_T$	Coefficient de thermodiffusion ( $m^2 \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$ )	$v$	Vitesse orthogonale ( $m \cdot s^{-1}$ )
$ER$	Erreur relative	$V_w$	Vitesse d'aspiration/injection ( $m \cdot s^{-1}$ )
$f$	Fonction du courant adimensionnelle	$x$	Axe des abscises ( $m$ )
$f_w$	Paramètre d'aspiration/injection	$y$	Axe des ordonnées ( $m$ )
$g$	Accélération de la gravité ( $m \cdot s^{-2}$ )	$\beta_c$	Coefficient d'expansion massique ( $Kg^{-1} \cdot m^3$ )
$H$	Longueur de la plaque ( $m$ )	$\beta_T$	Coefficient d'expansion thermique ( $K^{-1}$ )
$K$	Perméabilité du milieu poreux ( $m^2$ )	$\gamma$	Paramètre de la réaction chimique
$K_w$	Perméabilité à la plaque ( $m^2$ )	$\varepsilon$	Porosité du milieu poreux
$K_\infty$	Perméabilité à l'infini ( $m^2$ )	$\delta$	Paramètre du terme source de chaleur
$KB$	Méthode de Keller-Box	$\eta$	Variable de similarité
$k_t$	Conductivité thermique ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ )	$\theta$	Température adimensionnelle
$Le$	Nombre de Lewis	$\lambda$	Exposant de la température de surface
$L$	Largeur du domaine d'étude ( $m$ )	$\nu$	Viscosité cinématique ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )

$N$	Rapport des forces de volume	$\mu$	Viscosité dynamique ( $Pa.s$ )
$Nu_x$	Nombre de Nusselt local	$\rho$	Masse volumique du fluide ( $Kg.m^{-3}$ )
$n$	Ordre de la réaction chimique	$\rho_\infty$	Masse volumique de référence ( $Kg.m^{-3}$ )
$Pe_x$	Nombre de Peclet local	$\varphi$	Source de chaleur interne ( $W.m^{-3}$ )
$p$	Paramètre de la perméabilité	$\psi$	Fonction du courant
$q_m$	Densité de flux massique ( $Kg.m^{-2}.s^{-1}$ )	$w$	Condition à la surface
$q_T$	Densité de flux thermique ( $W.m^{-2}$ )	$\infty$	Condition à l'infini
$Ra_x$	Nombre de Rayleigh local	'	Dérivée par rapport à $\eta$

---

## LISTE DES FIGURES

<b>I.1</b>	Représentation d'un milieu poreux.....	10
<b>I.2</b>	Exemples de milieux poreux naturels.....	11
<b>I.3</b>	Détermination de la tortuosité du milieu poreux.....	14
<b>I.4</b>	Volume élémentaire représentatif du milieu poreux.....	16
<b>I.5</b>	Moyennement de la porosité $\varepsilon$ sur le volume élémentaire représentatif.....	17
<b>I.6</b>	Schéma représentatif de l'effet Soret.....	20
<b>I.7</b>	Principe de la colonne thermogravitationnelle.....	22
<b>II.1</b>	Modèle physique et système des coordonnées.....	33
<b>IV.1</b>	Schéma représentatif du modèle physique.....	57
<b>IV.2</b>	Effet de $Le$ sur les profils de la vitesse avec source de chaleur interne.....	60
<b>IV.3</b>	Effet de $Le$ sur les profils de température avec source de chaleur interne.....	61
<b>IV.4</b>	Effet de $Le$ sur les profils de concentration avec source de chaleur interne.....	61
<b>IV.5</b>	Effet de $N$ sur les profils de la vitesse avec source de chaleur interne.....	62
<b>IV.6</b>	Effet de $N$ sur les profils de température avec source de chaleur interne.....	63
<b>IV.7</b>	Effet de $N$ sur les profils de concentration avec source de chaleur interne.....	63
<b>IV.8</b>	Effet de $f_w$ sur les profils de la vitesse avec source de chaleur interne.....	64
<b>IV.9</b>	Effet de $f_w$ sur les profils de température avec source de chaleur interne.....	65
<b>IV.10</b>	Effet de $f_w$ sur les profils de concentration avec source de chaleur interne.....	65
<b>IV.11</b>	Profils thermiques pour différentes valeurs de $f_w$ , sans source de chaleur interne.....	66
<b>IV.12</b>	Profils de concentration pour différentes valeurs de $f_w$ sans source de chaleur interne.....	67
<b>IV.13</b>	Profils de la température pour différentes valeurs de $D_f$ .....	68

<b>IV.14</b>	Profils de la concentration pour différentes valeurs de $D_f$ .....	68
<b>IV.15</b>	Profils de la température pour différentes valeurs de $Sr$ .....	69
<b>IV.16</b>	Profils de la concentration pour différentes valeurs de $Sr$ .....	70
<b>IV.17</b>	Profils de la concentration pour différentes valeurs de $\gamma$ .....	70
<b>IV.18</b>	Profils de la température pour différentes valeurs de $\lambda$ .....	72
<b>IV.19</b>	Profils de la concentration pour différentes valeurs de $\lambda$ .....	72
<b>IV.20</b>	Effet de $f_w$ sur le nombre de Nusselt avec et sans source de chaleur interne .....	73
<b>IV.21</b>	Effet $f_w$ sur le nombre de Sherwood avec et sans source de chaleur interne.....	74
<b>IV.22</b>	Profils du nombre de Nusselt local en fonction de $Sr$ pour différentes valeurs de $\lambda$ .....	75
<b>IV.23</b>	Profils du nombre de Sherwood local en fonction de $Sr$ pour différentes valeurs de $\lambda$ .....	75
<b>IV.24</b>	Profils du nombre de Nusselt local en fonction de $f_w$ pour différentes valeurs de $\lambda$ .....	76
<b>IV.25</b>	Profil du nombre de Nusselt local en fonction de $\gamma$ pour différentes valeurs de $n$ .....	77
<b>IV.26</b>	Profil du nombre de Sherwood local en fonction de $\gamma$ pour différentes valeurs de $n$ .....	77
<b>V.1</b>	Schéma représentatif du modèle physique .....	81
<b>V.2</b>	Profils de la vitesse autour pour $p = 2$ à différentes valeurs du paramètre $\gamma$ .....	87
<b>V.3</b>	Profils de la vitesse autour pour $\gamma = 1$ à différentes valeurs du paramètre $p$ .....	88
<b>V.4</b>	Profils de la température pour $p = 2$ à différentes valeurs du paramètre $\gamma$ .....	89
<b>V.5</b>	Profils de la température pour $\gamma = 1$ à différentes valeurs du paramètre $p$ .....	90
<b>V.6</b>	Profils de la concentration pour $p = 2$ à différentes valeurs du paramètre $\gamma$ .....	91
<b>V.7</b>	Profils de la concentration pour $\gamma = 1$ à différentes valeurs du paramètre $p$ .....	92
<b>V.8</b>	Taux de transfert de chaleur et de masse à la surface en fonction de $\gamma$ pour $\lambda = 1/3$ , $p = 2$ ..	93
<b>V.9</b>	Taux de transfert de chaleur et de masse à la surface en fonction de $p$ pour $\lambda = 1/3$ , $\gamma = 2$ ..	93

<b>V.10</b>	Taux de transfert de chaleur à la surface en fonction du paramètre $f_w$ pour les trois états thermiques à $\gamma = 1$ et $p = 5$ .....	94
<b>V.11</b>	Taux de transfert de masse à la surface en fonction du paramètre $f_w$ pour trois états thermiques à $\gamma = 1$ et $p = 5$ .....	95
<b>V.12</b>	Taux de transfert de chaleur à la surface de la plaque en fonction de $\delta$ pour différentes valeurs de $Sr$ .....	96
<b>V.13</b>	Taux de transfert de masse à la surface de la plaque en fonction de $\delta$ pour différentes valeurs de $Sr$ .....	97

## LISTE DES TABLEAUX

<b>I.1</b>	Porosité de quelques matériaux .....	13
<b>I.2</b>	Perméabilité de quelques matériaux .....	14
<b>III.1</b>	Valeurs des différentes constantes de Runge-Kutta/Fehlberg .....	51
<b>IV.1</b>	Comparaison des gradients thermiques à la surface pour différentes valeurs de $N, D_f$ et $Sr$ à $Le=1, f_w=0, \lambda=0$ et $\gamma=0$ .....	59
<b>IV.2</b>	Comparaison des gradients massiques à la surface pour différentes valeurs de $N, D_f$ et $Sr$ à $Le=1, f_w=0, \lambda=0$ et $\gamma=0$ .....	54
<b>V.1</b>	Valeurs de $-\theta'(0)$ à la surface sans effet Soret pour $\lambda=1/3, f_w \neq 0, \delta=0, \gamma \rightarrow \infty$ et $p=1$ .....	86

# INTRODUCTION GENERALE

Le phénomène de transfert couplé de chaleur et de masse par convection naturelle où mixte dans les milieux poreux, est généralement causé par la présence de gradients de température et de concentration. Ces deux gradients engendrent une distribution non uniforme de la densité du mélange, ce qui provoque un mouvement convectif sous l'effet de la gravité. Dans le cas où les forces de volume sont d'origine thermique, la convection naturelle est dite thermique, elle est thermosolutale si les effets thermiques et solutaux coexistent.

La modélisation de ce mode de convection en milieu fluide ou poreux s'est particulièrement développée ces dernières années, à cause de son intérêt pour la résolution de certains problèmes technologiques importants, et son intervention dans de nombreuses applications potentielles dans divers domaines à savoir : l'extraction de l'énergie géothermique, du pétrole et du gaz à travers le sol, le traitement des déchets nucléaires, la croissance cristalline, le séchage des produits industriels, le transport de polluants dans les sols et les aquifères, le dessalement de l'eau de mer et plusieurs autres applications.

La convection naturelle, résultant de l'application d'un gradient thermique à tout mélange binaire dans le champ de pesanteur, est souvent accompagnée de la diffusion thermique, encore appelé thermodiffusion (ou effet Soret), qui est une découverte relativement récente. Ce phénomène qui se produit aussi bien en phase liquide qu'en phase gazeuse, conduit à l'apparition d'un gradient de concentration à cause du gradient thermique, ce qui se traduit par un flux de matière au sein du mélange.

Dans un milieu poreux, la résolution d'un problème de la convection thermosolutale, nécessite la prédiction de la distribution des champs de température, de concentration et de la vitesse de filtration en fonction des divers paramètres intervenants. Il est également important de prévoir les taux des transferts thermique et massique correspondants.

L'objectif principale du travail de la présente thèse, est la contribution à l'étude de la convection thermosolutale en régime laminaire, se développant autour d'une plaque plane chauffée et insérée verticalement dans un milieu poreux saturé de fluide binaire, considéré newtonien et incompressible, avec et sans présence de l'effet Soret. Pour ce faire, nous avons adopté pour tout le travail, la méthode de similarité pour transformer les équations aux dérivées partielles résultantes, décrivant le problème, en un système d'équations différentielles ordinaires qui sont résolues ensuite numériquement, à l'aide d'un code de

calcul basé la méthode de Runge- Kutta-Fehlberg d'ordre 5, couplée avec une technique de Tir.

La thèse comporte une introduction générale, cinq chapitres et une conclusion générale avec des perspectives pour les futurs travaux.

Dans le premier chapitre, les caractéristiques des milieux poreux y sont définies et une recherche bibliographique détaillée sur la convection thermosolutale en milieux poreux est également effectuée.

Le deuxième chapitre est consacré à la formulation mathématique du problème physique, où les équations générales de conservations en milieu poreux, les hypothèses simplificatrices et l'écriture des équations de conservations locales, adaptées à notre problème physique sont présentées.

La présentation de la méthode de résolution des équations de conservations associées à notre problème physique, ainsi que la description de la procédure de résolution numérique et l'algorithme générale utilisé font l'objet du troisième chapitre.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des effets Soret-Dufour sur la convection thermosolutale induite par une plaque à température variable, émergée dans un milieu poreux saturé de fluide binaire, en présence de la réaction chimique destructive et génération interne de chaleur variant dans l'espace. La validation de notre code de calcul avec les travaux déjà publiés, sur une large gamme de variation des paramètres de contrôles est effectuée.

Dans le dernier chapitre, nous étudions les effets de l'anisotropie du milieu poreux en perméabilité sur la convection thermosolutale mixte le long de la plaque considérée, en faisant intervenir les paramètres de la perméabilité et de la convection mixte. Les différents résultats numériques obtenus sont graphiquement présentés et discutés en détail.

En fin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui récapitule les principaux résultats dégagés de ce travail. Quelques recommandations pour les études futures sont finalement émises.

# CHAPITRE I

---

## Généralités et revue bibliographique

---

### I Introduction

Le phénomène des transferts couplés de chaleur et de masse dans les milieux poreux par la convection thermosolutale, intéresse plusieurs industriels et chercheurs à cause de son intervention dans les différents domaines physiques, technologiques, chimiques et microbiologiques. Parmi les applications potentielles, on peut citer l'extraction de l'énergie géothermique, la croissance cristalline où l'on essaie d'obtenir un monocristal à partir d'un mélange fondu, l'isolation thermique des bâtiments, la dispersion des polluants dans les aquifères et les sols saturés, etc.... Plusieurs travaux sur ce sujet ont été réalisés en utilisant l'expérimentation et la simulation numérique, ainsi que les développements analytiques dans des cas simples.

Dans ce chapitre, en premier lieu, nous avons commencé à rappeler des notions fondamentales portant sur les milieux poreux et leurs grandeurs physiques caractéristiques, ainsi que les phénomènes des transferts de chaleur et de masse par convection. En second lieu, nous proposons une revue bibliographique des travaux antérieurs, portant sur le phénomène de la convection doublement diffusive dans les milieux poreux saturés avec et sans effet Soret.

### II Notions sur le milieu poreux

#### II.1 Définition

Plusieurs matériaux naturels ou artificiels sont poreux. Un matériau poreux est constitué d'une matrice solide qui comporte des pores distribués plus ou moins dans toute la masse de façon désordonnée et non-uniforme. Ces espaces vides, peuvent être interconnectés ou déconnectés. Un fluide peut s'écouler à travers un milieu poreux à condition que la plupart des espaces vides soient interconnectés. Lorsque tous les pores sont remplis par la même phase (liquide ou gazeuse), le milieu poreux est dit saturé par le fluide.

Au voisinage des grains solides, des forces d'attraction moléculaire existent et créent de fines pellicules d'eau autour des grains. Cette eau est appelée eau liée ou adsorbée (Figure I.1). En dehors de ces zones d'attraction, le liquide peut circuler librement. Ainsi, les zones de circulation varient selon la distance entre les grains.

Dans notre étude, nous nous restreindrons aux cas d'une matrice solide non déformable, totalement saturée par une seule phase fluide binaire. De plus, nous adoptons l'hypothèse qu'il n'y a pas d'échange de matière entre la phase fluide et la matrice solide.

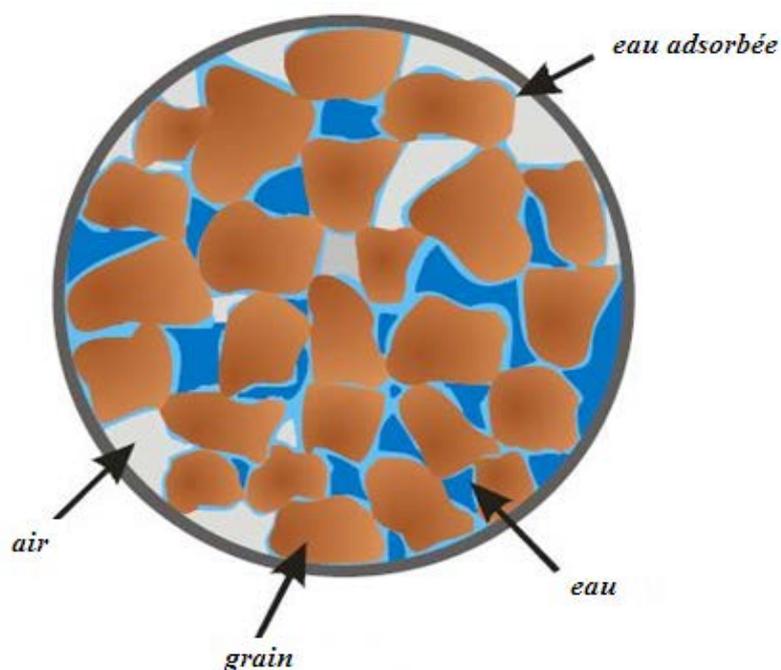


Figure I.1 – Représentation d'un milieu poreux [1]

Il existe de nombreux exemples de milieux poreux dans la nature (Figure I-2) comme le sable (a), les sols (b - pierre), les matériaux de construction (c - chaux), les aliments (d – pain sec), le papier ou le bois (e), les tissus (f - poumon humain).

D'une très grande variété de structure et de nature, les milieux poreux occupent une large place et jouent un rôle important dans de nombreux secteurs industriels et phénomènes naturels. On peut notamment citer, comme exemples typiques : le génie pétrolier, le génie chimique, l'hydrogéologie, la géothermie, le génie civil, la médecine ...etc.

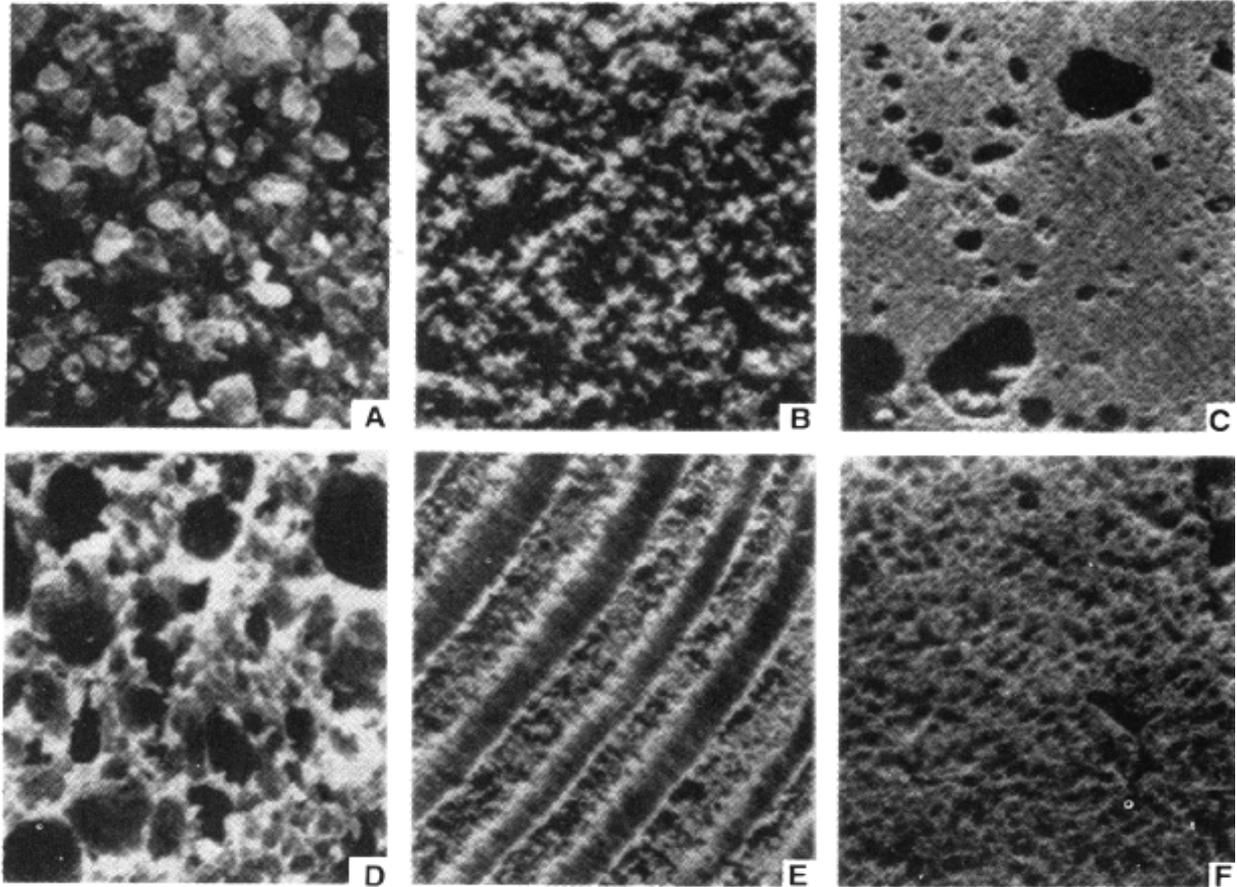


Figure I.2 – Exemples de milieux poreux naturels [2]

Un milieu poreux est caractérisé principalement par deux propriétés macroscopiques liées entre elles qui sont la porosité et la perméabilité. Du fait que la disposition et la taille de ces pores soient irrégulières, la variation des paramètres régissant cet écoulement, sera elle aussi irrégulière. En pratique, ces paramètres sont mesurés à l'échelle macroscopique moyennée. La technique utilisée est la méthode spatiale, définie comme étant une moyenne appropriée sur un volume élémentaire représentatif (*V.E.R.*) suffisamment large.

Dans ce qui suit, nous définissons les différents paramètres qui apparaissent au niveau des différents modèles empiriques de description macroscopique des écoulements en milieu poreux.

## II.2 Paramètres caractérisant le milieu poreux

### II.2.1 Porosité

La plupart des roches et des sols contient un pourcentage de vide qui peut être occupé par de l'eau ou d'autres fluides. C'est ce que nous appelons leur porosité. Cette grandeur est

notée, généralement  $\varepsilon$ , et définie comme étant le rapport du volume occupé par les espaces vides (pores)  $V_p$  au volume total du milieu poreux  $V_T$ .

$$\varepsilon = \frac{V_p}{V_T} \quad (\text{I.1})$$

$\varepsilon$  varie entre 1 (solide plein) et 0 (volume complètement vide). Puisqu'il s'agit d'un rapport de mêmes propriétés, la porosité n'a pas d'unité et elle est souvent exprimée en pourcentage. Un autre paramètre caractérisant la proportion de pores dans un milieu poreux est l'indice de vides  $e$ , qui est défini par le rapport du volume de vides  $V_v$  sur celui des solides  $V_s$

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (\text{I.2})$$

Cette grandeur est plus utilisée en géotechnique, car il permet d'utiliser un volume de référence (celui des solides) qui reste constant, contrairement au volume totale qui peut varier considérablement dans des matériaux compressibles comme les silts et les argiles. La relation entre la porosité et l'indice de vides est exprimée par :

$$\varepsilon = \frac{e}{e+1} \quad (\text{I.3})$$

La porosité est un concept indépendant de la forme et des connexions entre les pores, elle dépend fortement de l'arrangement et de la taille des grains. Des mesures expérimentales réalisées par *Kaviany [3]* résument dans le tableau (I.1) quelques valeurs de la porosité pour différents matériaux.

<b>Matériaux</b>	<b>Porosité</b>
Matériau mousseux	0.98
Fibre de verre	0.88 – 0.93
Fil à tisser	0.68 – 0.76
Grains de silice	0.65
Poudre d'ardoise noire	0.57 – 0.66
Cuir	0.56 – 0.59

Catalyseur	0.45
Granulé de pierres	0.44 – 0.45
Terre	0.43 – 0.54
Sable	0.37 – 0.50
Poudre de silice	0.37 – 0.49
Sphère bien empilée	0.36 – 0.43
Filtre de cigarettes	0.17 – 0.49
Briques	0.12 – 0.34
Poudre de cuivre	0.09 – 0.34
Pierre à chaud, Dolomite	0.04 – 0.10
Houille	0.02 – 0.07

Table I.1 – Porosité de quelques matériaux

### II.2.2 Perméabilité

La perméabilité traduit la facilité avec laquelle le fluide s'écoule dans le milieu poreux sous l'effet d'un gradient de pression. Cette perméabilité notée  $K$ , dépend uniquement de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. Plusieurs modèles empiriques expriment la perméabilité en fonction de la porosité et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore. La relation de *Kozeny-Carmen* [4] donne une estimation de la perméabilité  $K$  pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple comme suit.

$$K = \frac{\varepsilon^3 D^2}{36 C_0 (1 - \varepsilon)^2} \quad (\text{I.4})$$

Où  $C_0$  est un coefficient de forme, compris entre 3.6 et 5 et  $D$  représente une dimension caractéristique des éléments qui constituent la matrice poreuse.

*Ergun* [5], a établi une expression semblable à l'équation de *Kozeny - Carmen* en considérant l'écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible au sein d'une colonne poreuse, constituée de particules sphériques de diamètres moyenne  $D$  et soumise à un gradient de pression.

$$K = \frac{\varepsilon^3 D^2}{150(1-\varepsilon)^2} \quad (\text{I.5})$$

Le tableau (I.2) ci-dessous, présente la perméabilité de quelques matériaux poreux définis par *Nield et Bejan [6]*.

Matériaux	Perméabilité $K$ (en $m^2$ )
Ardoise (en poudre)	$4.9 \cdot 10^{-14} - 1.2 \cdot 10^{-13}$
Brique	$4.8 \cdot 10^{-15} - 2.2 \cdot 10^{-13}$
Béton bitumineux	$1.0 \cdot 10^{-13} - 2.3 \cdot 10^{-11}$
Cuivre (en poudre)	$3.3 \cdot 10^{-10} - 1.5 \cdot 10^{-9}$
Feutre	$8.3 \cdot 10^{-10} - 1.2 \cdot 10^{-9}$
Cuir	$9.5 \cdot 10^{-14} - 1.2 \cdot 10^{-13}$
Calcaire (dolomite)	$2.0 \cdot 10^{-15} - 4.5 \cdot 10^{-14}$
Sable	$2.0 \cdot 10^{-11} - 1.8 \cdot 10^{-10}$
Silice (en poudre)	$1.3 \cdot 10^{-14} - 5.1 \cdot 10^{-14}$
Sol	$2.9 \cdot 10^{-13} - 1.4 \cdot 10^{-11}$

Table I.2 – Perméabilité de quelques matériaux

### II.2.3 Tortuosité

La description de la géométrie des pores fait intervenir la notion de connectivité, correspondant à la complexité d'un chemin continu à travers l'espace des pores. Il faut également tenir compte des bras morts qui sont nombreux dans les milieux moins poreux et fortement hétérogènes (Figure I.3). Pour décrire ces différents aspects, on introduit le paramètre  $\tau$  désignant la tortuosité, que l'on définit par la relation suivante:

$$\tau = \left( \frac{L'}{L} \right)^2 \quad (\text{I.6})$$

Où  $L'$  est la longueur réelle des lignes de courant du fluide traversant un échantillon de longueur  $L$  d'un milieu poreux, modélisé sous la forme d'un réseau de capillaires parallèles ou ondulés. Cette grandeur joue un rôle crucial dans les problèmes de diffusion.

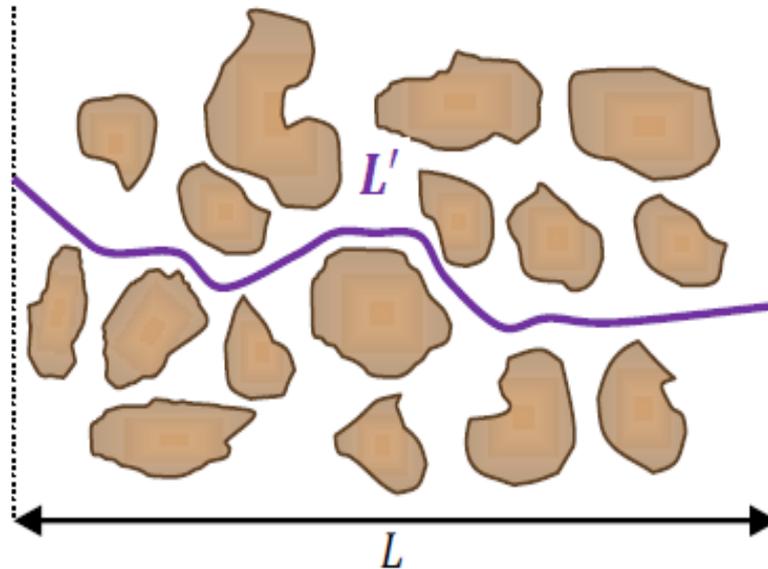


Figure I.3 – Détermination de la tortuosité du milieu poreux

#### II.2.4 Conductivité thermique équivalente

La conductivité thermique équivalente est une fonction complexe des conductivités du solide et du fluide. En général, on ne pourrait pas évaluer la valeur exacte de la conductivité. Le moyen efficace est la mesure expérimentale dans les conditions d'utilisation en régime permanent.

#### II.2.5 Volume élémentaire représentatif

L'étude des écoulements impose la description des phénomènes intervenants dans le milieu poreux saturé. L'échelle des pores, ou échelle microscopique est associée au diamètre moyen des pores  $d$ , à l'intérieur de cette échelle les grandeurs locales peuvent très largement varier. A l'échelle du milieu poreux, ou l'échelle macroscopique, la variation des grandeurs physiques est définie en moyenne, sur un certain volume de milieu poreux, appelé volume élémentaire représentatif et noté  $V.E.R$ . Cette échelle macroscopique est associée à une dimension géométrique  $L$  du milieu. Soit  $\ell$  la dimension caractéristique du  $V.E.R$  (Figure I.5). Cette dimension  $\ell$  doit satisfaire à la double inégalité suivante :

$$d \ll \ell \ll L \quad (I.7)$$

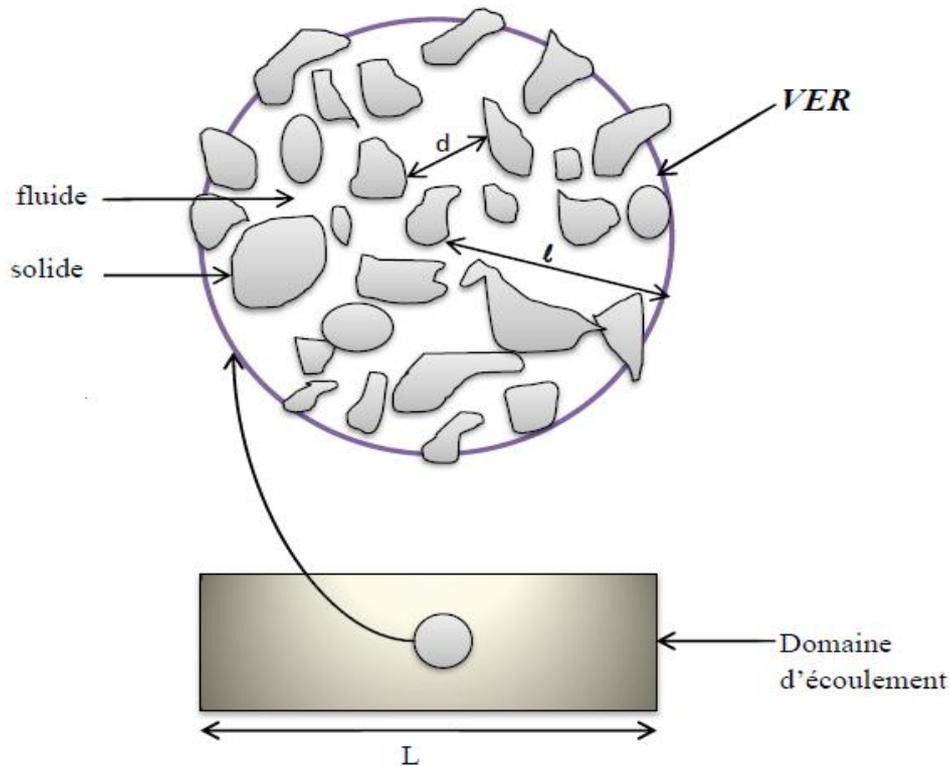


Figure I.4 – Volume élémentaire représentatif du milieu poreux

La taille du *V.E.R* est donc choisie de manière théorique, en fonction de la division du milieu, de telle sorte que :

- Le *V.E.R* soit suffisamment grand pour contenir un grand nombre de pores, de manière à pouvoir y définir une propriété moyenne homogène telle que l'effet de fluctuation d'un interstice à un autre soit négligeable.
- Le *V.E.R* soit suffisamment petit pour que les variations des propriétés d'un domaine au domaine voisin puissent être approchées par des fonctions continues sans introduire d'erreur décelable par les instruments de mesure à l'échelle macroscopique.

Nous supposons par la suite, l'existence du volume élémentaire représentatif pour obtenir les équations à l'échelle macroscopique par prise de moyenne sur le *V.E.R* des équations données à l'échelle microscopique, *Dal Pont* [7].

Les grandeurs physiques caractérisant le milieu poreux sont donc obtenues par prise de moyenne sur le *V.E.R* (Figure I.5).

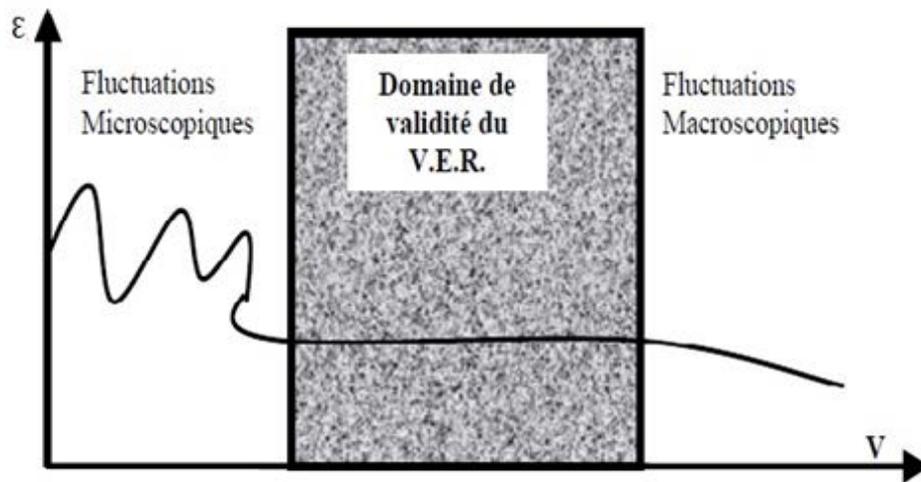


Figure I.5 – Moyennement de la porosité  $\varepsilon$  sur le volume élémentaire représentatif

### III Echelles de modélisation en milieux poreux

En partant de l'échelle du pore à l'échelle macroscopique, ils existent différentes échelles pour observer un milieu poreux.

#### III.1 Echelle microscopique

L'échelle microscopique, ou du pore, est une échelle à l'intérieur de laquelle les grandeurs physiques locales peuvent subir de larges variations. En général, cette échelle est associée au diamètre moyen des pores, soit  $d$ .

#### III.2 Echelle macroscopique

L'échelle macroscopique, ou du milieu poreux, est une échelle caractéristique des variations significatives de ces mêmes grandeurs, définies en moyenne sur le volume élémentaire représentatif (V.E.R). Cette échelle macroscopique est associée à la dimension géométrique du milieu, soit  $L$ .

#### III.3 Changement d'échelle

Les changements d'échelles sont des méthodes mathématiques permettant de simplifier la modélisation et la résolution de problèmes physiques. Dans la littérature se trouvent plusieurs travaux qui font la comparaison entre les méthodes de changement d'échelle existantes [8] et [9]. Dans la plupart des cas, les résultats obtenus lors de l'utilisation d'une méthode ne varient pas beaucoup par rapport aux résultats d'une autre, et donc le choix d'une méthode est souvent gouverné par sa connaissance approfondie.

La méthode de prise de moyenne volumique sur laquelle est fondé notre travail, est une technique mathématique de changement d'échelles largement utilisée dans l'étude des milieux poreux, dont l'objectif est de créer des modèles macroscopiques à partir de problèmes à l'échelle microscopique. Cette technique permet notamment d'obtenir la loi de *Darcy*, valable à l'échelle macroscopique, en moyennant le problème de Navier Stokes décrivant l'écoulement à l'échelle microscopique, elle a été largement utilisée par de nombreux chercheurs dans l'étude des phénomènes des transferts de chaleur et de masse en milieux poreux : *Whitaker [10]*, *Jomaa [11]*, *Quintard et al. [12]*, *Zabaras et Deep [13]* et *Delmi et al. [14]*. Ces auteurs et autres nous rassurent quant à la validité des résultats dans une échelle où la longueur caractéristique du rayon  $\ell$  du V.E.R se trouve entre  $d$  et  $L$ .

## **IV Phénomène de transfert par convection**

### **IV.1 Transfert de chaleur par convection**

La convection est un mode de transfert de chaleur dû à une différence de température qui engendre un déplacement de matière dans un milieu fluide (liquide ou gaz). Dans ce mode de transfert, on distingue trois mécanismes qui sont : la convection naturelle, la convection forcée et la convection mixte.

#### **IV.1.1 Convection naturelle**

Il y a convection naturelle lorsque le mouvement du fluide est provoqué par des gradients de densité dû à la distribution non uniforme de la température. Les zones chaudes de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut suivant un mécanisme similaire à celui de la poussée d'Archimède. Dans les zones où la température est élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant. Le phénomène inverse de courants descendants se produit pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud. Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique, et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur [15].

#### **IV.1.2 Convection forcée**

La convection forcée se distingue de la convection naturelle par le fait que le mouvement du fluide s'effectue grâce à des effets externes (pompe, ventilateur, agitateur, etc...) où l'effet de la poussée d'Archimède est négligeable devant les forces génératrices du mouvement du fluide. En réalité, dans la majorité des applications industrielles, la convection forcée s'accompagne souvent de la convection naturelle.

### IV.1.3 Convection mixte

Il existe, un grand nombre de situations où les mécanismes de la convection naturelle et la convection forcée coexistent dans des ordres plus ou moins comparables, il s'agit donc d'un mécanisme de la convection mixte. Parmi les exemples les plus répandus, nous citons les écoulements dans les canalisations (chauffage central, radiateurs, climatisation), les écoulements atmosphériques, les courants marins, etc.

### IV.2 Convection thermosolutale

Quand les mouvements convectifs sont générés par des gradients de densité induits par l'action simultanée des champs de température et de concentration, on appelle ce type d'écoulement la convection double diffusive ou thermosolutale. Ce phénomène qui peut avoir lieu dans un fluide ou dans un milieu poreux saturé par le fluide intervient dans divers cas réels. Ainsi, par exemple, on peut citer les applications suivantes :

- **Milieux fluides** : la croissance de cristaux destinés à l'industrie des semi-conducteurs, le processus de fusion-solidification des mélanges binaires, le stockage des gaz liquides ou l'oxydation des surfaces métalliques.
- **Milieux poreux** : ce phénomène intervient dans divers problèmes d'ingénierie comme la migration de l'humidité dans les isolants thermiques fibreux, le transport des contaminants dans les sols saturés et les procédés de séchage.

## V Effet Soret

Le comportement des fluides multiconstituants est caractérisé par de nombreux phénomènes n'ayant pas cours dans les fluides purs. En particulier, lorsqu'un mélange de fluide binaire, initialement homogène, est soumis à un gradient de température, il apparaît un gradient de concentration dû au gradient thermique, c'est l'effet Soret, appelé aussi effet Ludwig. Plus généralement, le nom « thermodiffusion » désigne cet effet en milieu gazeux, alors que l'expression « effet Soret » sera plus utilisée dans les liquides. Historiquement, on attribue la découverte de la thermodiffusion à Ludwig qui mentionnait le premier en 1856 [16] avoir observé une différence de concentration dans une solution aqueuse de sulfate de sodium soumise à un gradient thermique. Il faut cependant attendre les travaux de Soret en 1880 [17] et 1881 [18] sur des solutions électrolytiques pour donner une explication approfondie du phénomène, qui porte depuis son nom. Il met en évidence l'existence d'un

gradient de concentration ionique de sens opposé à celui du gradient de température, correspondant à une migration des ions vers les parties froides du récipient (Figure I.6). Notons qu'entre temps, *en 1872*, Dufour a découvert l'effet inverse qui porte son nom, à savoir l'établissement d'un gradient de température comme conséquence d'un gradient de concentration. Cet effet est souvent négligé en dehors des phases gazeuses.

Il s'en suit, entre *1887 et 1892*, une série de travaux de différents géologues qui essaient de prendre en compte la thermodiffusion pure pour expliquer les phénomènes de différenciation magmatiques par l'existence de gradients thermiques au sein des magmas. Cependant, faute de recul par rapport à la découverte du phénomène et de résultats suffisants, ces travaux ont été remis en cause, dès *1893*. Cette controverse a été alimentée par le fait que l'ampleur des variations de composition reste faible, et que le temps requis est très long. Ils n'ont alors pas tenu compte des courants de convection présents dans les magmas, ce qui sera fait beaucoup plus tard. La thermodiffusion est de nouveau étudiée à partir de *1911*, lorsque des prédictions sur des gradients de concentration se produisant dans un mélange de gaz sous l'influence d'un gradient de température, issues de calculs basés sur la théorie cinétique des gaz, ont été retrouvées expérimentalement. Cependant, comme les variations des concentrations étaient encore trop faibles à cause de la dépendance de la masse moléculaire, l'effet Soret, qui aurait pu être utilisé pour une séparation partielle des isotopes, n'a pas pu être développé efficacement.

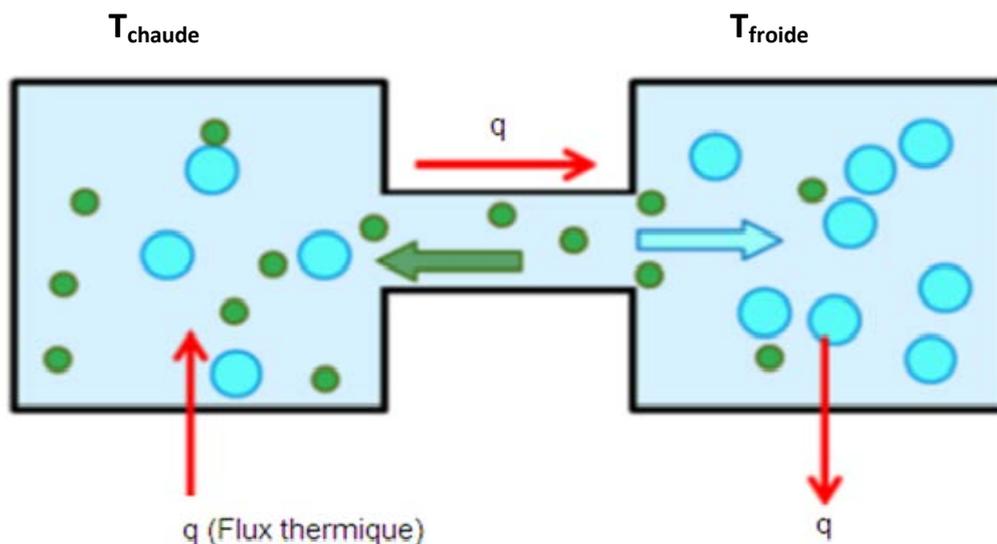


Figure I.6 – Schéma représentatif de l'effet Soret

Dans le cas général, lorsqu'un mélange est soumis à un gradient de température dans le champ de pesanteur, les phénomènes de convection et de thermodiffusion sont présents. Le couplage de ces deux phénomènes est appelé diffusion thermogravitationnelle. Cependant, la diffusion thermogravitationnelle n'a pas eu jusqu'à présent d'applications industrielles très larges en raison essentiellement de son coût énergétique élevé.

### **V.1 Intérêt pratique et industriel de l'effet Soret**

Les écoulements monophasiques et multiconstituants interviennent dans de nombreux secteurs industriels. Les combustibles sont en effet souvent stockés sous forme liquide ou solide pour les moteurs à combustion interne ou pour les moteurs fusées, il est aussi possible de séparer les isotopes d'un même élément. De plus, en couplant la convection naturelle au phénomène de thermodiffusion, il est possible d'accroître notablement le degré de séparation. La maîtrise de la quantification de ces écoulements est très importante pour les métallurgistes lors des traitements thermochimiques des métaux dans les bains salins. Dans un but d'optimisation des coûts de production lors de l'extraction des fluides de gisements par les producteurs pétroliers, il est important de connaître de façon précise la distribution des différentes espèces à l'intérieur d'un gisement. Cette distribution s'est établie pendant de longues périodes de formation du gisement et a été principalement influencé par la gravité ainsi que par la distribution des pressions dans le réservoir. Des moyens importants ont été mis en œuvre afin d'obtenir des modèles thermodynamiques fiables, permettant de restituer de manière correcte la répartition des espèces dans le réservoir. Etant donné qu'il n'est pas possible de négliger l'importante extension d'un gisement, il est très probable que cette répartition soit influencée par la convection naturelle, mais aussi par le gradient géothermique (gradient de température naturelle de la Terre), ce gradient pourrait être la cause de la migration d'espèces par l'effet Soret. Ce dernier consiste en l'établissement d'un gradient de concentration d'un composant chimique par la présence d'un gradient thermique.

### **V.2 Colonne thermogravitationnelle**

Parmi les méthodes qui permettent de mesurer le coefficient de thermodiffusion (Coefficient de Soret), on trouve celle de la colonne thermogravitationnelle qui se compose de deux plaques verticales séparées par un espace étroit sous un gradient thermique horizontale selon *Lorenz et Emery [19]* (Figure.I.7). Le principe consiste à utiliser un gradient thermique pour produire à la fois un flux de masse par thermodiffusion et un flux de convection. À partir

d'un mélange de composition homogène, le couplage des deux mécanismes de transport conduit à une séparation des composants. Dans la plupart des dispositifs expérimentaux, le gradient thermique appliqué est horizontal et le gradient de composition finale est globalement vertical. Le taux de séparation dans ce système correspond à la différence de concentration entre le haut et le bas de la cellule. La colonne thermogravitationnelle a été conçue par *Clusius et Dickel* [20]. La phénoménologie de transport thermogravitationnelle a été exposée par *Furry et al.* [21] et validée ensuite par de nombreuses expériences.

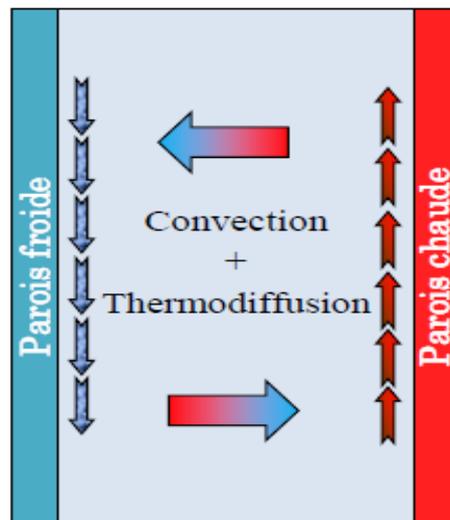


Figure.I.7 – Principe de la colonne thermogravitationnelle

## VI Revue bibliographique

Durant les dernières décennies, le phénomène de la convection naturelle a été largement abordé. Il s'agit d'un mode de transfert de chaleur d'un milieu chaud vers un milieu froid sous l'action d'un mouvement des particules de fluides produite par des effets de Poussée d'Archimède quand on applique un champ de gradient de température. Dans le cas le plus fréquent, les deux paramètres responsables de ces mouvements convectifs sont les gradients thermiques et de concentration. Ils peuvent agir ensemble ou bien en opposition. Ce phénomène cruciale est connu sous le nom de convection thermosolutale ou double diffusion. Le phénomène de la convection peut se produire dans les liquides, tels que les océans, ou dans les milieux poreux, tels que dans les systèmes géothermiques. Rappelons que la porosité est reliée au vide (appelé pores) qui se trouve dans une matrice solide constitué par des grains consolidés. Une synthèse des travaux antérieurs est présentée dans le livre de *Nield et Bejan*

[22] pour les milieux poreux et dans le livre de Brandt et Fernando [23] pour les milieux fluides. Le but de ce paragraphe de ce chapitre est de présenter les travaux de recherche déjà menés sur le phénomène de la convection naturelle thermosolutale dans les milieux poreux avec et en absence de l'effet Soret.

## VI.1 Convection thermosolutale sans effet Soret

La convection thermosolutale (l'existence d'un gradient thermique et solutale) est considérée par les industriels et les scientifiques comme un domaine très important et très vif, à cause de la multitude d'applications telles que les systèmes d'énergie géothermique, l'exploitation des réserves pétrolières, la dynamique du noyau terrestre, la croissance cristalline où l'on essaie d'obtenir un monocristal à partir d'un mélange fondu, siège d'une solidification par ségrégation, la pollution des sols et la géologie. Cela a motivé les chercheurs et industriels à mener des recherches dans ce cadre dont l'objectif principal est de comprendre les différents mécanismes résultants des mouvements convectifs engendrés.

L'intérêt pour la convection thermosolutale dans les milieux poreux a commencé après que *Nield* [24] ait étudié la stabilité de l'écoulement dans une couche poreuse horizontale, chauffée par le bas. En utilisant l'analyse de la stabilité linéaire, il a déterminé les valeurs des nombres de Rayleigh critiques caractérisant la naissance de la convection stationnaire pour différentes conditions aux frontières.

*Trevisan et Bejan* [25] ont utilisé une méthode numérique pour étudier la convection thermosolutale dans une cavité à section carrée remplie d'un milieu poreux et saturée par un fluide binaire, avec des parois verticales maintenues à des températures et à des concentrations constantes et avec des parois horizontales adiabatiques et imperméables. Une analyse d'échelle a été utilisée pour traiter ce problème dans les cas limites des écoulements entraînés par les effets thermiques ou massiques afin de dégager les divers effets qui influencent les résultats globaux de transfert de chaleur et de masse. Ces auteurs ont montré que l'écoulement du fluide était possible au-delà d'un certain nombre de Rayleigh critique quand le nombre de Lewis  $Le \approx 1$ . Cependant, le mouvement du fluide disparaît complètement pour  $Le = 1$  et pour un rapport des forces de poussée d'origine solutale sur les forces de poussée d'origine thermique  $N = -1$ . Les résultats de cette analyse sont en accord avec les résultats des calculs numériques.

Le transfert de chaleur et de masse dans une couche poreuse avec des températures et des concentrations imposées sur les parois horizontales a été étudié analytiquement par *Trevisan*

et *Bejan* [26] pour des nombres de Rayleigh poreux thermiques élevées (50 à 2000) et dans le cas d'un écoulement de Darcy dont les forces de volumes sont essentiellement d'origine thermique. L'analyse des ordres de grandeurs a permis d'établir différentes échelles pour le transfert de masse en fonction du nombre de Lewis.

*Jang et Chang* [27] ont analysé l'instabilité de la convection dans un milieu adjacent à une paroi horizontale chauffée par le bas, et présentent des résultats numériques pour des nombres de Lewis compris entre 1 et 10 et des rapports de forces de volume variant de 0.5 à 4. Les auteurs ont montré que le nombre de Rayleigh poreux thermique critique augmente avec la décroissance du nombre de Lewis qui caractérise le rapport entre la diffusion thermique et massique. *Chen et Chen* [28] ont considéré cette configuration pour étudier la convection double diffusive en utilisant une équation de conservation générale comptant les termes de *Darcy*, *Brinkman* et *Forchheimer*.

Parmi les premières études expérimentalement de la convection double diffusive dans un milieu poreux, on trouve celle réalisée par *Murray et Chen* [29]. Leur dispositif, composé d'une boîte métallique remplie de billes de verre saturées avec de l'eau distillée, était soumis à des flux de masse et de chaleur. Le nombre de Rayleigh thermique obtenu par les expériences concorde avec celui obtenu par la théorie de la stabilité linéaire.

*Rastogi et Poulikakos* [30] ont étudié la convection doublement diffusive sur une surface verticale encastrée dans un milieu poreux saturé par un fluide non newtonien. Les cas où la surface verticale est chauffée et salée selon une distribution de température et de concentration constante ou bien par des flux de chaleur et de masse, ont été considérés. Une analyse d'échelle a permis d'identifier plusieurs régimes d'écoulements liés au rapport des forces de volume et au nombre de Lewis. Une solution numérique a permis de mettre en évidence la dépendance des champs de fonction de courant, de température et de concentration de l'indice de comportement du fluide non newtonien.

Une étude de la convection thermosolutale au sein d'un milieu poreux isotrope obéissant à des flux uniformes de chaleur et de soluté imposés à la paroi inférieure a été réalisée par *Mamou et al.* [31], et *Amahmid et al.* [32]. Une bonne concordance a été trouvée dans cette investigation entre les résultats obtenus analytiquement par *Sen et al.* [33] et numériquement par *Alavyoon* [34]. Les auteurs se sont focalisés particulièrement au cas où les forces de poussée thermiques et solutales s'opposent et sont de même intensité. Le nombre de Rayleigh critique marquant l'amorcement du phénomène de la convection a été calculé analytiquement pour différents nombres de Lewis et Darcy. Ces auteurs ont trouvé que le nombre de Rayleigh

thermique critique augmente lorsque le nombre de Darcy augmente pour un nombre de Lewis égal à 1. Pour des nombres de Rayleigh supérieurs au nombre critique l'augmentation du nombre de Darcy réduit l'intensité de l'écoulement ainsi que le taux de transfert thermique et solutale.

*Younsi et al. [35]* ont analysé la convection double diffusive dans une cavité partiellement poreuse. Les auteurs ont utilisé une seule équation de quantité de mouvement valable dans toute la cavité, ce qui permet d'affranchir du problème des conditions aux limites hydrodynamiques à l'interface milieu poreux/milieu fluide. L'effet des paramètres gouvernant le problème, tels que la perméabilité, l'épaisseur de la couche poreuse et le rapport de poussée a été mis en évidence. Il a été montré, à partir des profils de vitesse et des coefficients de transfert thermique et massique, que pour une couche poreuse de faible perméabilité, quelle que soit son épaisseur induit une chute abrupte des transferts, et l'écoulement est confiné dans la couche fluide. Dans une autre investigation, *Younsi et al. [36]* ont analysé l'influence d'un champ magnétique transversal sur la convection thermosolutale dans une cavité verticale partiellement occupée par une couche poreuse. Les auteurs ont combiné la formulation de *Darcy-Brinkman-Forchheimer* dans le milieu poreux et l'équation de *Navier-Stokes* dans le milieu fluide pour aboutir à une seule équation valable dans toute la cavité. Des simulations numériques ont été effectuées pour une large gamme de paramètres. Le nombre de *Hartman* caractérisant l'intensité du champ magnétique de 0 à 100 et le nombre de Darcy de  $10^{-8}$  à 1. L'un des résultats essentiels auquel les auteurs ont abouti est que le champ magnétique affecte considérablement la structure de l'écoulement ainsi que les transferts de chaleur et de masse.

*Bennacer et al. [37]* ont réalisé une étude numérique et analytique concernant le transfert combiné de chaleur et de masse dans un milieu poreux. Ce milieu est globalement homogène et présente une anisotropie thermique. L'équation qui gouverne l'écoulement est celle de *Darcy-Brinkman*. Le système d'équations couplées est résolu par la méthode classique des volumes finis. Dans le cas d'écoulements d'origine thermique, l'analyse d'échelle est appliquée pour prédire analytiquement l'évolution du transfert de chaleur et de masse en fonction de l'anisotropie thermique. Les simulations numériques sont présentées pour une cavité carrée en faisant varier une large gamme de paramètres. Les résultats numériques ont été analysés en termes de transfert moyen de chaleur et de masse sur les parois verticales de la cavité et ont montré l'existence d'un maximum de transfert de masse, pour un rapport d'anisotropie

critique. Cette situation critique dépend de plusieurs paramètres notamment le nombre de *Lewis* du fluide saturant.

*Bahloul [38]* a étudié analytiquement et numériquement la convection naturelle en couche poreuse rectangulaire. Il a montré que le coefficient de stratification thermique, dépend essentiellement du rapport d'aspect de l'enceinte et qu'il devient presque indépendant du nombre de Rayleigh dans le régime de couche limite. L'étude de stabilité linéaire de l'écoulement parallèle a été utilisée pour déterminer le nombre de Rayleigh critique pour une cavité de grande extension. L'auteur a trouvé que l'écoulement est stable indépendamment du coefficient de stratification.

*N. Retiel et H. Bougurra [39]* ont étudié l'influence du nombre de Rayleigh thermique et du nombre de Lewis sur la structure de l'écoulement et sur la distribution de la température et de concentration du phénomène de convection thermosolutale dans une cavité demi-cylindrique horizontale fermée, chauffée et salée par la paroi horizontale qui coupe le cylindre verticalement en deux. L'investigation est faite pour différents rapports des poussées des forces thermique et solutale  $N$  dans le cas où les forces de poussée s'opposent ( $N < 0$ ) ou s'additionnent ( $N > 0$ ), pour un nombre de Prandtl = 0,7. D'après les résultats trouvés, les auteurs ont remarqué que les profils de température et de concentration varient considérablement en fonction des nombres de Rayleigh thermique et du nombre de Lewis.

Récemment, des études théorique et numérique du phénomène de la convection double diffusive ont été effectuées par *Sammouda [40]*. L'auteur a considéré une cavité cylindrique remplie par un milieu poreux et saturé par un fluide newtonien, les propriétés thermo physiques sont constantes, à l'exception de la densité qui varie linéairement avec la température selon l'approximation de Boussinesq. La paroi latérale de l'enceinte est supposée rigide, imperméable et adiabatique. Les parois horizontales sont maintenues à des températures et concentrations constantes. La porosité du milieu est considérée variable, cette variation est décrite par une loi empirique exponentielle en fonction du rayon de l'enceinte. Les effets des nombres adimensionnels de, *Rayleigh* thermique ( $Ra$ ), *Darcy* ( $Da$ ), *Prandtl* ( $Pr$ ), *Lewis* ( $Le$ ) et du rapport des forces de volume ( $N$ ), sur l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse ont été bien analysés.

## **VI.2 Convection thermosolutale avec effet Soret**

L'effet Soret ne peut pas être négligé dans de nombreux processus physiques. Il est bien connu depuis longtemps que, sans l'effet Soret, la convection est déclenchée lorsque le

nombre de Rayleigh  $Ra$ , basé sur la perméabilité du milieu poreux, est supérieur à la valeur critique  $Ra_c = 4\pi^2$ . Dans un fluide binaire, les gradients thermiques imposés induisent un gradient de concentration dû à l'effet Soret. Ce gradient de concentration modifie le gradient de masse volumique et ensuite les conditions du déclenchement de la convection.

Entre 1887 et 1892, différents travaux en géologie ont pris en compte la thermodiffusion pour expliquer les phénomènes de différenciation magmatique provoqués par les gradients thermiques présents au sein du magma. Les résultats de ces travaux ont ensuite été remis en cause, dès 1893, alors qu'à cette époque le phénomène de diffusion thermogravitationnelle n'était pas encore connu. Ce n'est qu'à partir des années 1911 que les travaux de thermodiffusion ont été repris et un accord a été trouvé entre résultats expérimentaux et résultats basés sur la théorie cinétique des gaz. Les travaux relatifs à la séparation partielle des isotopes ont vu le jour bien plus tard.

*Benano-Melly et al [41]* ont étudié numériquement et expérimentalement le phénomène de thermodiffusion dans un mélange binaire pour le but de mesurer le coefficient de thermodiffusion (coefficient de Soret), la cavité utilisée est une cavité verticale poreuse soumise à un gradient horizontal de température, ils ont étudié en détail l'influence de la convection d'origine thermique sur le transport d'un soluté de faible fraction massique dans l'eau. En outre, ils ont montré que la théorie représente bien le comportement de soluté quand la convection solutale est négligeable. Les résultats obtenus montrent un écart entre les mesures numériques et les mesures expérimentales, ils ont démontré que cet écart revient à la dispersion existante dans le milieu poreux. Ils ont conclu que l'influence de la dispersion sur le transport de soluté par diffusion et thermodiffusion peut-être forte.

L'influence des effets de Dufour et de Soret en convection libre magnétohydrodynamique stable et instable, sur le transfert de chaleur et de masse sur une plaque plane verticale et poreuse incorporée dans un milieu poreux saturé a été étudiée numériquement par *Alam et al. [42]*. Les équations aux dérivées partielles régissant le problème ont été transformées en un système d'équations ordinaires qui est résolu à l'aide de la technique de Tir combinée à la méthode de Runge Kutta. Les résultats ont montré que le champ d'écoulement est sensiblement influencé par les effets de Dufour et de Soret. Dans cette étude, les auteurs ont analysé les caractéristiques de transfert de chaleur et de masse en convection libre au sujet d'une surface verticale incluse dans un milieu poreux saturé, avec une distribution non uniforme de la température de surface, en tenant compte les effets Soret-

Dufour. La mise en évidence des effets de différents paramètres de contrôles comme le rapport de poussée ( $N$ ), le nombre de Lewis ( $Le$ ), de Dufour ( $D_f$ ), de Soret ( $Sr$ ) et l'exposant de la température de surface ( $l$ ), sur les profils de vitesses, de température et de concentration dans la zone de la couche limite a été effectuée.

*Adrian Postelnieu [43]* a étudié numériquement la convection naturelle bidiffusive sur une surface verticale intégrée dans un milieu poreux saturé par un fluide soumis à une réaction chimique, en tenant compte de la diffusion-thermo (effet Dufour) et la thermo-diffusion (effet Soret), les équations gouvernantes sont résolues par une méthode numérique de Keller-box. Les paramètres de problème sont le nombre de Lewis, les coefficients de Dufour et de Soret, le coefficient de séparation et le paramètre de la réaction chimique. L'auteur a présenté, pour différentes valeurs des paramètres du problème, les profils de concentration adimensionnelle dans la zone de la couche limite, ainsi que le nombre local de Nusselt et le nombre local Sherwood sous forme graphique et tabulée, il a bien constaté que l'ordre et le paramètre de la réaction chimique ont eu un rôle crucial dans la solution.

*Alloui et al. [44]*, ont étudié analytiquement et numériquement les effets combinés de Soret et thermosolutale sur la convection naturelle, dans une cavité rectangulaire verticale remplie d'un mélange binaire. Des conditions à la frontière de type Neumann pour la température et le soluté ont été appliquées aux parois verticales de la cavité, tandis que les deux parois horizontales sont supposées imperméables et isolées. En fonction des paramètres fondamentaux du problème, ils trouvent une bonne accorde entre l'étude analytique basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle, et l'étude numérique basée sur la méthode de volume de contrôle.

*Charrier-Mojtabi et al. [45]* ont étudié analytiquement et numériquement la naissance de la convection thermosolutale avec prise en compte de l'effet Soret, dans une couche mince horizontale poreuse remplie d'un mélange binaire et soumise à un flux de chaleur vertical sur ces deux parois horizontales. Les auteurs ont fait une comparaison avec la séparation obtenue dans des colonnes verticales différentiellement chauffées. Les auteurs ont montré que même si la valeur maximale de la séparation est la même pour les deux configurations, l'utilisation de cellules horizontales permet d'obtenir une plus grande quantité de produit séparée. Le maximum de séparation est obtenu en situation horizontale pour une plus grande valeur du nombre de Rayleigh et donc une épaisseur de cellule plus grande.

La convection naturelle dans les milieux poreux anisotropes suscite une attention considérable par ses applications dans certains secteurs industriels et parce qu'elle se

manifeste dans les écoulements souterrains. Une revue complète sur la convection naturelle dans les milieux poreux anisotropes est donnée dans le livre *d'Ingram et Pop [46]*.

Selon *Neale [47]*, l'anisotropie en perméabilité dans les milieux poreux a une plus forte incidence en pratique que celle en diffusivité thermique. Des investigations expérimentales et théoriques ont été menées par *Castinel et Combarous [48]* sur une couche horizontale anisotrope en perméabilité et limitée par des surfaces imperméables et isothermes. Ces auteurs ont trouvé un critère d'apparition de la convection naturelle en utilisant la méthode de stabilité linéaire. Ils ont déterminé le nombre de Rayleigh poreux thermique critique qui dépend des perméabilités horizontale et verticale. Leurs résultats ont été complétés par *Epherre [49]* et *Tyvand [50]* qui ont pris en considération l'anisotropie de la diffusivité thermique et de l'effet de la dispersion dans le cas d'un écoulement uniforme de base. *Kvernold et Tyvand [51]* ont développé une analyse basée sur la méthode de *Galerkin* pour l'étude de la convection supercritique stationnaire d'amplitude finie. Ils ont démontré que pour une couche bidimensionnelle horizontale infinie et anisotrope, le nombre de *Nusselt* et la région de stabilité engendrés par l'écoulement convectif dépendent des rapports d'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique.

## VII Situation du problème

Notre travail de thèse portera sur la modélisation et l'analyse de la convection thermosolutale avec l'effet Soret en milieu poreux saturé de fluide binaire. La configuration géométrique utilisée est une plaque plane poreuse en position verticale, de température variable et de concentration constante, et qui peut être soumise à un flux de fluide latéral (aspiration/injection).

Diverses contributions ont été étudiées à savoir :

- L'approfondissement de l'aspect théorique de l'approche semi-analytique (dite aussi méthode de similarité). L'aspect numérique de cette approche sera amélioré en intégrant la méthode de Range-Kutta-Fehlberg ordre 5 couplée avec une technique de tir, qui aura des conséquences positives sur la précision des résultats attendus.
- L'étude des effets de certains phénomènes (convection naturelle/mixte, aspiration/injection, génération du flux de chaleur interne, répartition de la température sur la plaque, réaction chimique et perméabilité du milieu) et paramètres physiques (Lewis, Nusselt, Sherwood, Rayleigh, Soret, Dufour ...) sur la convection double diffusive sera discutée et analysée.

- La quantification des taux des transferts de chaleur et de masse à la surface de la plaque pour différentes situations physiques.

## **VIII Conclusion**

Dans ce présent chapitre, en premier temps, nous avons rappelé quelques notions fondamentales portant sur les milieux poreux et leurs grandeurs physiques caractéristiques, de plus, la description des phénomènes des transferts par convection et l'effet Soret dans les milieux poreux a été faite. En second temps, nous avons réalisé une étude bibliographique détaillé concernant les travaux antérieurs portant sur la convection thermosolutale dans les milieux poreux saturés avec et sans l'effet Soret et pour différentes configurations géométriques.

Dans le chapitre suivant, nous décrivons le problème physique et présentons ensuite les équations de conservations générales en milieu poreux, ainsi que la formulation mathématique bidimensionnelle adaptée au problème étudié, avec les conditions aux limites appropriées.

# CHAPITRE II

---

## Formulation mathématique

---

### I Introduction

La description de l'écoulement du fluide et le transfert couplé de chaleur et de masse dans une matrice poreuse est généralement délicate, à cause de la complexité géométrique du domaine et la difficulté de bien déterminer les paramètres qui caractérisent le milieu poreux, comme la porosité et la perméabilité. Le modèle de base le plus simple qui permet de décrire le mouvement d'un fluide dans un milieu poreux est celui basé sur la loi de *Darcy* [52]. Cette loi phénoménologique a porté le nom de *Henry Darcy* qui a justifié l'hypothèse proposée par Darcy en 1854. Ce dernier fut le premier à déduire, en se basant sur des expériences faites sur des filtres à eau à Londres, que la chute de pression est proportionnelle à la vitesse de filtration dans la matrice poreuse.

L'application de cette loi reste limitée à des écoulements lents et stationnaires en milieu homogène isotrope (faible nombre de Reynolds). Elle a montré sa défaillance pour les écoulements à grande vitesse. Dans le but d'élargir le domaine de validité de cette loi et d'étendre son champ d'application dans le cas où les effets des contraintes visqueuses et d'inertie interviennent, d'autres formulations et termes significatives ont été introduits par *Brinkman* [53] et *Forchheimer* [54].

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les différentes équations de conservation en milieu poreux. Nous décrivons dans un premier temps notre problème physique, puis nous présentons les équations de continuité, de quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration pour un fluide binaire. Ensuite, nous formulons les équations bidimensionnelles adaptées à notre problème physique avec les conditions aux limites associées.

### II Problème physique

#### II.1 Domaines d'applications

Le phénomène de la convection purement thermique ou thermosolutale dans les milieux poreux a une importance fondamentale, il est fréquemment rencontré dans la nature et dans de

nombreux domaines physiques, technologiques, chimiques et microbiologiques. Parmi les applications potentielles, on peut citer :

- L'extraction de l'énergie géothermique.
- La croissance cristalline où l'on essaie d'obtenir un monocristal à partir d'un mélange fondu.
- L'isolation thermique des bâtiments.
- La dispersion des polluants dans les aquifères et les sols saturés.
- L'enfouissement souterrain des déchets radioactifs.
- La séparation des constituants des mélanges binaires et ternaires.
- Le dessalement de l'eau de mer.
- Les processus de séchage électrochimiques et beaucoup d'autres applications.

Cela a motivé les chercheurs et les industriels ces dernières années, à mener des recherches dans ce cadre dont l'objectif principal est de comprendre les différents mécanismes résultants des mouvements convectifs engendrés. Plusieurs travaux sur ce sujet ont été réalisés en utilisant l'expérimentation et la simulation numérique, ainsi que les développements analytiques dans des cas simples.

## II.2 Position du problème

Il s'agit d'étudier le problème bidimensionnel de la convection thermosolutale dans un milieu poreux homogène saturé de fluide binaire. La configuration de ce problème est présentée dans la Figure III.1. C'est une plaque plane poreuse de hauteur  $H$ , chauffée et placée verticalement dans un milieu poreux saturé de fluide binaire, où la surface de la plaque est maintenue à une température  $T_w$  qui peut être variable selon la formule  $T_w = T_\infty + Ax^\lambda$  et une concentration  $C_w$  constante qui sont supérieures, respectivement, à la température et la concentration de références  $T_\infty$  et  $C_\infty$  considérées loin de la plaque. La vitesse latérale d'aspiration ou d'injection à laquelle peut être soumise la plaque poreuse est de la forme :

$V_w(x) = Bx^{\frac{\lambda-1}{2}}$  où  $B$  est une constante et  $\lambda$  est l'exposant de la température de surface. Les coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  sont mesurées, respectivement, le long de, et perpendiculaire à la plaque.

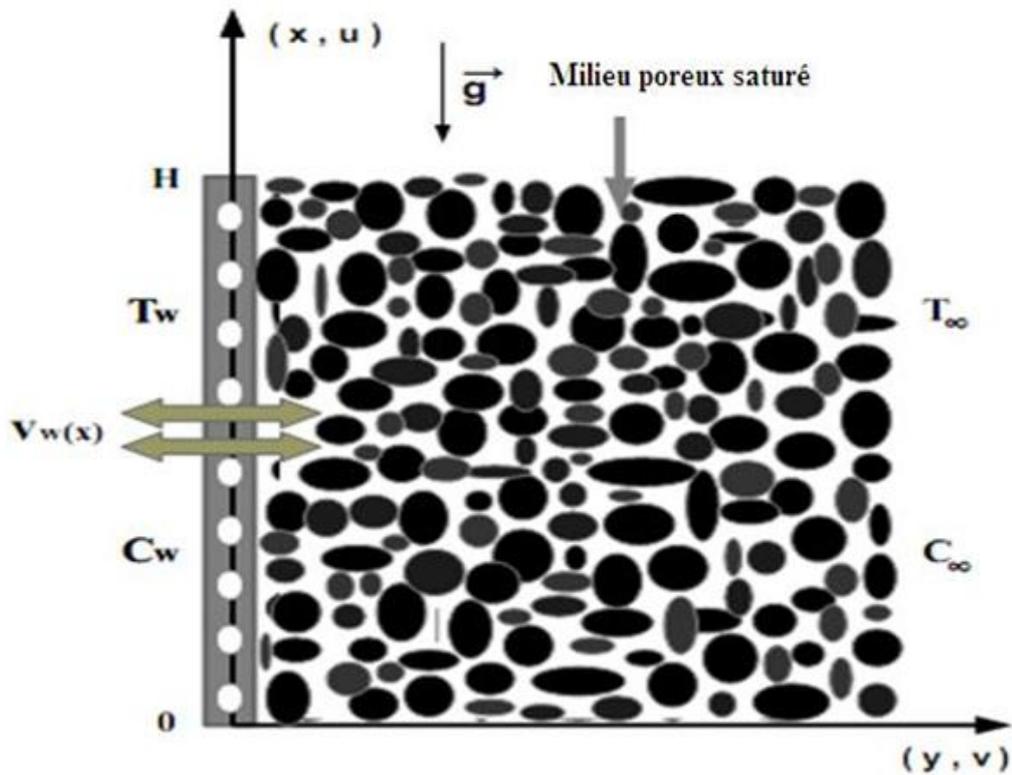


Figure II.1 – Modèle physique et système des coordonnées

### II.3 Hypothèses

Comme dans la majorité des études portant sur la convection en milieux poreux, quelques approximations sont considérées afin d'obtenir une formulation simple du modèle mathématique. Nous nous limitons donc aux hypothèses couramment retenues dans ce type d'études qui sont :

- Le fluide binaire saturant le milieu poreux est supposé newtonien, incompressible et satisfaisant l'hypothèse de Boussinesq, à savoir que les propriétés physiques du fluide ne varient pas avec la température et la concentration, à l'exception de la masse volumique dans les forces de gravitation.
- Le milieu poreux est complètement saturé par le fluide binaire.
- La matrice poreuse est en équilibre thermodynamique local avec le fluide.
- L'ensemble de fluide binaire et la matrice poreuse constituent un milieu continu fictif, isotrope et homogène.
- L'écoulement du fluide au sein du milieu est laminaire et bidimensionnel.
- L'échange de chaleur entre les phases solide et liquide est négligeable.

- Le transfert de chaleur par rayonnement, la dissipation visqueuse et la dispersion thermique sont négligeables.
- L'écoulement du fluide, dans le milieu poreux à faible perméabilité ( $D_a = K/H^2 < 10^{-6}$ ), est supposé stationnaire et à faibles vitesses ( $Re < 1$ ) à savoir qu'on peut négliger les termes d'inertie de *Brinkman* dans l'équation de la quantité de mouvement.
- Dans ce travail, nous restons dans le domaine de validité de la loi de Darcy.

## II.4 Approximation de Boussinesq

L'approximation que nous allons reprendre est attribuée à Boussinesq [55]. Cette approximation suppose que les différentes propriétés thermodynamiques sont constantes et sont évaluées à la température et à la concentration de références. Elle néglige aussi les variations de la masse volumique avec la température et la concentration dans tous les termes des équations de conservations, sauf dans le terme des forces de volume où la masse volumique  $\rho$  varie linéairement avec la température et la concentration, ce qui se traduit par l'égalité suivante :

$$\rho = \rho_\infty (1 - \beta_T (T - T_\infty) - \beta_C (C - C_\infty)) \quad (\text{II.1})$$

Où  $\beta_T = -\frac{1}{\rho_\infty} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_C$  et  $\beta_C = -\frac{1}{\rho_\infty} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_T$  sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et massique du fluide binaire,  $T$  la température et  $C$  la concentration. Pour la plupart des fluides,  $\beta_T$  est positif à la température et la pression ambiantes, à l'exception de l'eau en dessous de  $4^\circ\text{C}$ .  $\beta_C$  peut être positif ou négatif en fonction de la contribution des constituants à la masse volumique du fluide.

## III Equations de conservations

Différentes méthodes de modélisation peuvent être utilisées pour obtenir les équations fondamentales de la mécanique des fluides. La méthode la plus utilisée considère un volume de contrôle élémentaire pour analyser les variations au cours du temps, de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration. Cette méthode qui consiste à faire un bilan des quantités transportées et produites au cours du temps, dans un volume élémentaire de contrôle, a été largement étudiée et peut aisément se retrouver dans des ouvrages de référence, *Platten et Legros* [56] et de *Bird et al.* [57]

En régime laminaire et stationnaire, le mouvement de l'écoulement, le transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux homogène, isotrope et saturé de fluide binaire incompressible sont gouvernés par les équations de conservations (continuité, quantité de mouvement, énergie et concentration). Ces équations sont écrites, respectivement, en forme locale sur un volume élémentaire représentatif du milieu poreux saturé comme suit :

### III.1 Equation de conservation de la masse

Il s'agit d'un principe de la physique, qui traduit la conservation de la masse au cours du temps pour un élément de volume de contrôle, en absence de puits ou de source. Pour un fluide saturant incompressible de vitesse moyenne  $\vec{V}$ , il découle l'équation de continuité où la divergence est nulle, telle que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II.2})$$

Où  $\vec{V}$  est la vitesse moyenne de filtration et  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$  représente l'opérateur différentiel.

### III.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement traduit le principe fondamentale de la dynamique établie par Newton pour un fluide incompressible, en faisant introduire le mouvement, la nature du fluide et les forces qui sont à la cause. Pour un élément de volume de contrôle, l'équation s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\rho}{\varepsilon^2} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}}_A = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \underbrace{\frac{\mu_{eff}}{\varepsilon} \vec{\nabla}^2 \vec{V}}_B - \underbrace{\frac{\mu}{K} \vec{V}}_C - \underbrace{\frac{\rho F}{\sqrt{K}} \|\vec{V}\| \cdot \vec{V}}_D \quad (\text{II.3})$$

Où  $\varepsilon$  est la porosité moyenne du milieu poreux,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $P$  la pression du fluide,  $K$  la perméabilité du milieu poreux,  $\vec{g}$  le vecteur accélération de pesanteur et  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide.

Avec :

**A** : terme convectif qui tient compte des effets inertiels macroscopiques lorsque les vitesses de filtration importantes.

**B** : terme de Brinkman qui modélise les forces visqueuses exercées par le fluide en écoulement sur les particules du milieu poreux. Dans ce terme,  $\mu_{eff}$  représente la viscosité effective du milieu poreux. L'évaluation de cette grandeur, qui dépend de la porosité et de la texture, reste difficile. *Brinkman* a assimilé la viscosité effective du milieu poreux à celle du fluide ( $\mu_{eff} = \mu$ ).

**C** : terme de *Darcy*, résultant des effets de la viscosité du fluide à l'échelle microscopique.

**D** : terme de *Forchheimer* qui tient compte les forces inertielles microscopiques lorsque les vitesses de filtration sont élevées.

Dans ce travail, l'écoulement du fluide se fait dans un milieu poreux à faible perméabilité ( $Da = \frac{K}{H^2} \leq 10^{-6}$ ), est supposé stationnaire et à faibles vitesses de filtration ( $Re < 1$ ) pour cela, on peut négliger les termes d'inerties et de *Brinkman*, par conséquent l'équation de quantité de mouvement se réduit à l'équation de Darcy suivante :

$$\vec{\nabla}P = \rho \vec{g} - \frac{\mu}{K} \vec{V} \quad (\text{II.4})$$

Cette formulation généralisée de la loi de *Darcy*, qui néglige les forces d'inerties et visqueuses, est valable lorsque les conditions de *Kalla* [58], pour la porosité, la perméabilité et le régime d'écoulement moyen en milieu sont satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon < 0.8 \\ Da \leq 10^{-6} \\ Re < 1 \end{array} \right. \quad (\text{II.5})$$

### III.3 Equation de conservation de l'énergie

Le premier principe de la thermodynamique permet d'établir des relations entre les différentes formes d'énergie mises en jeu dans le domaine d'étude considéré. On suppose que l'équilibre thermique local est atteint ( $T_s = T_f = T$ ) où  $T_s$  et  $T_f$  représentent, respectivement, la température de la phase solide et fluide, et en tenant compte de l'hypothèse de l'absence d'échange thermique entre les deux phases et de non existence de source interne de chaleur,

l'équation de l'énergie en milieu poreux s'écrit, pour un élément de volume de contrôle comme suit:

$$\dot{V} \cdot \dot{N} T = a \dot{N}^2 T \quad (\text{II.6})$$

Où  $a = \frac{(k_t)_{eff}}{(rC_p)_f}$  représente la diffusivité thermique avec  $(rC_p)_f$  est la capacité calorifique volumique et  $(k_t)_{eff}$  la conductivité thermique effective, qui dépend de manière complexe des conductivités thermiques de la phase solide  $(k_t)_s$ , de la phase fluide  $(k_t)_f$  et de la texture du milieu poreux. La formule courante de cette dépendance, dans le cas de milieu poreux constitués par des éléments très réguliers tels que des sphères par exemple, est  $(k_t)_{eff} = \epsilon(k_t)_f + (1 - \epsilon)(k_t)_s$ . Généralement, il est indispensable de recourir à la détermination expérimentale pour une évaluation plus précise de  $(k_t)_{eff}$ .

Le modèle (II.6) est le plus utilisé dans la littérature. Il est généralement satisfaisant pour décrire le transfert de chaleur dans d'un milieu poreux lorsque les vitesses de filtration sont faibles. Il est de plus, considéré comme le plus acceptable pour les milieux poreux de faible granulométrie.

### III.4 Equation de Conservation de l'espèce

Considérons  $C$  comme étant la concentration du soluté parfaitement miscible dans le fluide binaire, l'équation de conservation de cette concentration s'écrit:

$$\dot{V} \cdot \dot{N} C = D_M \cdot \dot{N}^2 C + \alpha D_T \cdot \dot{N}^2 T \quad (\text{II.7})$$

Où  $D_M$  est le coefficient de diffusion massique,  $D_T$  le coefficient de thermodiffusion (Effet Soret). Ces deux coefficients peuvent être considérés constants lorsqu'on néglige les phénomènes de dispersion, comme le cas de notre travail.  $\alpha$  est un facteur qui vaut 0 pour la double diffusion ou 1 pour la convection induite par l'effet Soret.

## IV Equations régissant le problème physique

Comme résumé du paragraphe III de ce chapitre, en régime laminaire et stationnaire, les écoulements convectifs thermo-solutaux en milieux poreux saturé de fluide binaire Newtonien et incompressible, en présence de l'effet Soret, sont régis par le système d'équations à dérivées partielles suivant :

$$\begin{aligned}
\vec{N} \cdot \vec{V} &= 0 \\
\vec{N} P &= \rho g - \frac{m}{K} V \\
\vec{V} \cdot \vec{N} T &= a \vec{N}^2 T \\
\vec{V} \cdot \vec{N} C &= D_M \vec{N}^2 C + D_T \vec{N}^2 T
\end{aligned}
\tag{II.8}$$

Par la suite, Ces équations seront modélisées en tenant compte de l'hypothèse de *Boussinesq* dans un domaine d'étude bien déterminé, avec la prise en considération des conditions aux limites appropriées.

#### IV.1 Analyse d'échelle de la couche limite

L'analyse d'échelle est une méthode puissante d'approximation, permettant la simplification des équations contenant plusieurs termes. Le principe est de garder les termes principaux et de négliger les autres termes secondaires. Dans cet objectif, nous utiliserons deux échelles caractéristiques de l'écoulement, qui sont :

$H$  : la longueur de la plaque.

$\delta$  : l'épaisseur de la couche limite.

Nous supposons que la couche limite est très mince :  $\delta \ll H$ .

Considérons l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0
\tag{II.9}$$

Donc, les termes de l'équation de continuité peuvent être estimés comme suit :

$$\frac{U}{H} \approx \frac{V}{\delta}
\tag{II.10}$$

Soit donc :

$$V \approx \frac{U}{H} \delta
\tag{II.11}$$

Or  $\delta \ll H$  ce qui donne  $V \ll U$

La vitesse d'injection du fluide est considérée suffisamment faible, de sorte qu'elle n'influe sur l'écoulement au voisinage de la plaque, par conséquent l'écoulement est presque parallèle à la plaque.

Les gradients de pression dans la couche limite correspondent à des effets hydrostatiques du fluide. En supposant que le gradient de pression à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite est le même, alors :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_{\infty} g \quad (\text{II.12})$$

Où  $\rho_{\infty}$  est la masse volumique à l'extérieur de la couche limite.

La projection suivant la direction  $x$  de l'équation de la quantité de mouvement donne :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g - \frac{\mu}{K} u \quad (\text{II.13})$$

En utilisant l'approximation de *Boussinesq* et l'égalité (II.13), on trouve :

$$u = \frac{Kg}{\nu} (\beta_T (T - T_{\infty}) + \beta_c (C - C_{\infty})) \quad (\text{II.14})$$

Où  $\nu = \frac{\mu}{\rho_{\infty}}$  représente la viscosité cinématique du fluide.

Considérons à présent l'équation de conservation d'énergie, telle que :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.15})$$

Les ordres de grandeur de chaque terme de cette équation sont respectivement :

$$\underbrace{U \frac{T}{H}}_{(1)} ; \underbrace{\frac{U \delta T}{\delta H}}_{(2)} ; \underbrace{a \left( \frac{T}{H^2} \right)}_{(3)} ; \underbrace{a \left( \frac{T}{\delta^2} \right)}_{(4)}$$

Les deux premiers termes sont du même ordre de grandeur ( $U \frac{T}{H}$ ). Le troisième terme est beaucoup plus petit que le quatrième car ( $\delta \ll H$ ). On peut donc négliger le troisième terme devant le quatrième. Il convient donc :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{II.16})$$

Considérons à présent l'équation de conservation de l'espèce, ci- après :

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_M \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + D_T \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.17})$$

La mise en application des grandeurs caractéristiques dans l'équation (II.17), permet de comparer ses termes. Les ordres de grandeur de chacun des termes de cette équation sont respectivement :

$$\underbrace{U \frac{C}{H}}_{(1)} ; \underbrace{\frac{U \delta C}{H \delta}}_{(2)} ; \underbrace{D_M \left( \frac{C}{H^2} \right)}_{(3)} ; \underbrace{D_M \left( \frac{C}{\delta^2} \right)}_{(4)} ; \underbrace{D_T \left( \frac{T}{H^2} \right)}_{(5)} ; \underbrace{D_T \left( \frac{T}{\delta^2} \right)}_{(6)}$$

Les termes (1) et (2) sont du même ordre de grandeur ( $U \frac{C}{H}$ ), et puisque  $\delta \ll H$ , les termes (3) et (5) peuvent être négligés devant les termes (4) et (6).

Ces approximations conduisent à l'équation de suivante :

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_M \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_T \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{II.18})$$

## IV.2 Système d'équations retenu

La prise en compte des hypothèses simplificatrices décrites auparavant et des approximations de la couche limite, les équations qui décrivent, en régime laminaire et stationnaire, la convection double diffusive dans un milieu poreux saturé de fluide binaire newtonien et incompressible, en présence des effets Soret-Dufour, la génération interne de chaleur et la réaction chimique destructive d'ordre  $n$ , s'écrivent dans le système de coordonnées cartésiennes ci-après :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u = \frac{K g}{\nu} (\beta_T (T - T_\infty) + \beta_c (C - C_\infty)) \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\varphi}{\rho C_p} \\ u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_M \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_T \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - R (C - C_\infty)^n \end{array} \right. \quad (\text{II.19})$$

Où  $u$  et  $v$  sont, respectivement, les composantes de la vitesse suivant  $x$  et  $y$ .  $T$  et  $C$  sont la température du fluide et la concentration. Les constantes  $\nu$ ,  $a$ ,  $K$ ,  $g$  et  $\rho$  sont, respectivement, la viscosité cinématique, la diffusivité thermique, la perméabilité du milieu poreux, l'accélération de la pesanteur et la masse volumique du fluide.  $\varphi$  désigne la source interne de chaleur,  $C_p$  est la chaleur spécifique à pression constante.  $T_\infty$  et  $C_\infty$  sont, respectivement, la température et la concentration de référence au loin de la plaque.  $D_1$  représente le coefficient de diffusion thermique qui tient compte de la contribution du gradient massique au flux thermique (Effet Dufour),  $R$  est un coefficient indiquant la présence d'une réaction chimique d'ordre  $n$ .

Ces équations sont couplées avec les conditions aux limites du domaine d'étude suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y = 0 \quad v = V_w(x), \quad T = T_w, \quad C = C_w \\ x \geq 0 \quad y \rightarrow \infty \quad u = 0, \quad T = T_\infty, \quad C = C_\infty \end{array} \right. \quad (\text{II.20})$$

$V_w(x) = Bx^{\frac{\lambda-1}{2}}$  est la vitesse d'aspiration/injection au niveau de la plaque, où  $B$  est un paramètre d'état physique. Pour  $B > 0$ , c'est le cas de l'injection du fluide,  $B < 0$ , correspond au cas de l'aspiration du fluide et  $B = 0$ , correspond à une plaque imperméable.

## V Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les différentes équations de conservations en milieu poreux saturé de fluide binaire, avec la description du problème physique. Par analyse d'échelle de la couche limite, nous avons pu faire une formulation mathématique des

équations en forme bidimensionnelle adaptées à la situation physique, avec les conditions aux limites associées.

Dans le chapitre suivant, nous allons détailler la méthode de résolution ainsi que l'algorithme adopté.

# CHAPITRE III

---

## Méthode de résolution

---

### I Introduction

Les équations aux dérivées partielles, régissant l'écoulement de fluide et le transfert couplé de chaleur et de masse, interviennent dans beaucoup de problèmes physiques de type non linéaire. Les méthodes les plus répondues pour leur résolution dans des cas pratiques sont les méthodes numériques, telles que la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis, la méthode des éléments finis,...etc. Parfois et dans certaines situations simples, les méthodes analytiques ou semi analytique peuvent être utilisées.

Dans ce travail, à cause de la non-linéarité et le couplage des équations (II.19), ainsi que la complexité des phénomènes rencontrés notamment de la couche limite, l'instabilité et la géométrie du milieu poreux, la résolution directe du modèle est très délicate. Pour cela, nous avons choisi la méthode semi analytique dite de similarité qui consiste à transformer le système d'équations aux dérivées partielles, décrivant le problème étudié, en un système d'équations différentielles ordinaires non-linéaires par introduction de variables adimensionnelles. La résolution du modèle adimensionnel ainsi obtenu, est faite à l'aide de la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 couplée avec la technique Tir.

Dans ce chapitre, nous appliquons en premier lieu la méthode de similarité pour transformer les équations mises en jeu, ainsi que les conditions aux limites, en forme adimensionnelle. En second lieu, nous présentons le principe de la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 couplé avec la technique de Tir. Ensuite, nous décrivons la procédure de résolution numérique et l'algorithme utilisé.

### II Approche de similarité

La méthode de similarité, est une méthode de Blasius qui utilise les hypothèses de similitude et de changements de variables pour aboutir à un système différentiel adimensionnel à une seule variable. Elle est valable pour des écoulements plans,

incompressibles en régime laminaire. De plus, cette méthode est plus adaptée au cas des problèmes stationnaires bidimensionnels se développant dans la zone de la couche limite d'une plaque plane

## II.1 Mise en forme adimensionnelle des équations

La convection thermosolutale fait intervenir un certain nombre de paramètres pouvant varier dans des intervalles très larges. L'analyse adimensionnelle fait apparaître des nombres sans dimensions permettant d'une part, de réduire le nombre des paramètres régissant effectivement les phénomènes physiques et d'autre part, d'appliquer la description mathématique d'un problème donné à une large classe de problèmes. Cette opération se fait par le choix de certaines grandeurs caractéristiques de références.

D'après la formulation mathématique développée dans le chapitre II, le système d'équations décrivant la convection naturelle thermosolutale bidimensionnelle dans la couche limite d'une plaque plane, émergée dans un milieu poreux saturé de fluide binaire, newtonien et incompressible, en présence des effets Soret-Dufour, avec génération interne de chaleur et réaction chimique destructive d'ordre  $n$ , s'écrit dans le système de coordonnées cartésiennes ci-dessous:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u = \frac{K g}{\nu} (\beta_T (T - T_\infty) + \beta_c (C - C_\infty)) \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\phi}{\rho C_p} \\ u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_M \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_T \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - R (C - C_\infty)^n \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

Le système d'équations (III.1) est associé aux conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y = 0 \quad v = v_w(x), \quad T = T_w, \quad C = C_w \\ x \geq 0 \quad y \rightarrow \infty \quad u = 0, \quad T = T_\infty, \quad C = C_\infty \end{array} \right. \quad (\text{III.2})$$

$V_w(x) = Bx^{\frac{\lambda-1}{2}}$  représente la vitesse d'aspiration/injection au niveau de la plaque, où  $B$  est une constante.  $B > 0$  correspond au cas de l'injection du fluide,  $B < 0$  correspond au cas de l'aspiration du fluide et  $B = 0$  pour le cas imperméable de la plaque.

Nous introduisons la fonction du courant définie habituellement par :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Et les variables adimensionnelles (III.4), largement rencontrées dans la bibliographie et utilisées par de nombreux chercheurs comme *Postelnicu [59]*, *Al- Arbawy [60]* et *Achemlal [61]*.

$$\begin{cases} \eta = \frac{y}{x} Ra_x^{\frac{1}{2}} & \psi = a Ra_x^{\frac{1}{2}} f(\eta) \\ \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} & Ra_x = \frac{g K \beta_T (T_w - T_\infty) x}{\nu a} \\ \phi = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty} & \varphi = \rho C_p \frac{a (T_w - T_\infty) Ra_x}{x^2} e^{-\eta} \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Où :

$q$  et  $f$  représentent, respectivement, la température et la concentration en forme adimensionnelle,  $h$  est la variable de similarité.

$\varphi = \rho C_p \frac{a (T_w - T_\infty) Ra_x}{x^2} e^{-\eta}$  est le taux de génération de chaleur interne où  $Ra_x$  est le nombre de Rayleigh local.

Ainsi, l'équation de continuité du système (III.1) est automatiquement satisfaite, et les équations de quantité de mouvement, de chaleur et de la concentration se transforment au système d'équations différentielles sous forme adimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} f' - \theta - N\phi = 0 \\ \theta'' + \frac{\lambda+1}{2} f\theta' - \lambda\theta f' + D_f \phi'' + e^{-\eta} = 0 \\ Sr\theta'' + \frac{1}{Le}\phi'' + \frac{\lambda+1}{2} f\phi' - \gamma\phi^n = 0 \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Les conditions aux limites associées à ce système sont:

$$\begin{cases} \eta = 0, \quad f = f_w, \quad \theta = 1, \quad \phi = 1 \\ \eta \rightarrow \infty, \quad f' = 0, \quad \theta = 0, \quad \phi = 0 \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Où

$\gamma = R(C_w - C_\infty)^{n-1} \frac{x^2}{a Ra_x}$ , est le paramètre de la réaction chimique.

$f_w = \frac{-2B}{\lambda+1} \left( \frac{v}{a A.g \beta_T K} \right)^{1/2}$ , est le paramètre d'aspiration/injection du fluide.

## II.2 Nombres adimensionnels

La mise sous forme adimensionnelle des équations de conservations, fait apparaître dans la présente étude, des nombres sans dimensions caractéristiques du problème physique, qui sont:

$S_r = \frac{D_T (T_w - T_\infty)}{a (C_w - C_\infty)}$ , est le nombre de *Sore*, qui modélise la contribution du gradient thermique au flux massique.

$D_f = \frac{D_1 (C_w - C_\infty)}{a (T_w - T_\infty)}$ , est le nombre de *Dufour*, qui modélise la contribution du gradient massique au flux thermique.

$Le = \frac{a}{D_M}$ , le nombre de *Lewis* qui mesure l'importance de la diffusion thermique par rapport à la diffusion massique.

$N = \frac{\beta_c (C_w - C_\infty)}{\beta_T (T_w - T_\infty)}$ , est le rapport des forces de volume, donnant une indication sur l'importance

des forces de volume d'origine solutale comparées à celles d'origine thermique.

## II.2.1 Nombre de Nusselt local

Le flux de chaleur local à la surface de la plaque s'exprime selon la loi de Fourier comme suit :

$$q_T = -k_t \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -k_t A^{\frac{3}{2}} \left( \frac{g K \beta_T}{a \nu} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{(3\lambda-1)}{2}} \theta'(0) \quad (\text{III.7})$$

Où  $k_t$  est la conductivité thermique moyenne du milieu,  $\theta'(0)$  est le gradient de la température à la surface de la plaque. On note ici que le flux de chaleur à la surface devient uniforme pour

$$\lambda = \frac{1}{3}.$$

Le flux de chaleur moyen à travers la plaque de hauteur  $H$ , exprimé par unité de longueur est :

$$\begin{aligned} \bar{q}_T &= \frac{1}{H} \int_0^H q_T(x) dx \\ &= -k_t A^{\frac{3}{2}} \left( \frac{g K \beta_T}{a \nu} \right)^{\frac{1}{2}} H^{\frac{(3\lambda+1)}{2}} \left( \frac{2}{1+3\lambda} \right) \theta'(0) \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Le nombre de Nusselt local est donné par :

$$Nu_x = \frac{h_t x}{k_t} \quad (\text{III.9})$$

Où  $h_t = \frac{q_T}{T_w - T_\infty}$  est le coefficient de transfert thermique.

On utilise l'équation de flux de convection (loi de Newton)

$$q_{conv} = h_t \Delta T \quad (\text{III.10})$$

On remplace (III.1) dans (III.2), on obtient :

$$Nu_x = \frac{q_{conv} x}{h \Delta T} \quad (\text{III.11})$$

Comme le flux de conduction transmis à l'interface de la plaque est égal au flux reçu par le fluide par convection :  $q_{conv} = q_T$ , alors :

$$Nu_x = -\theta'(0) Ra_x^{1/2} \quad (\text{III.12})$$

Le nombre de Nusselt moyen à travers la plaque de hauteur  $H$  peut être exprimé par l'équation:

$$\frac{\overline{Nu}}{Ra_x^{1/2}} = -\frac{2(1+\lambda)^2}{(1+3\lambda)} \theta'(0) \quad (\text{III.13})$$

Où  $Nu$  et  $Ra$  sont basés sur la moyenne de différence de température, tels que:

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{q_T}}{k_f (T_w - T_\infty)}, \quad \overline{Ra} = \frac{g K H \beta_T \overline{(T_w - T_\infty)}}{a \nu}, \quad \overline{(T_w - T_\infty)} = \frac{1}{H} \int_0^H H (T_w - T_\infty) dx \quad (\text{III.14})$$

## II.2.2 Nombre de Sherwood local

Le flux massique local à la surface de la plaque s'écrit :

$$q_m = -D_M \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{III.15})$$

Où  $D_M$  représente le coefficient de diffusion massique. Le nombre de *Sherwood* local est donné par :

$$Sh_x = \frac{h_m x}{D_m} = -\frac{x}{(C_w - C_\infty)} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{III.16})$$

Avec  $h_m = \frac{q_m}{C_w - C_\infty}$  est le coefficient de transfert de masse.

Après calcul, en aboutit à l'expression suivante :

$$Sh_x = -\phi'(0) Ra_x^{1/2} \quad (\text{III.17})$$

Notons que les deux nombres adimensionnels de *Nusselt*  $Nu_x$  et de *Sherwood*  $Sh_x$  caractérisent, respectivement, le taux de transfert thermique et le taux de transfert massique à la surface de la plaque.

## II.3 Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement local est défini par:

$$Cf_x = \frac{t_w}{\frac{1}{2} r u_{\infty}^2} \quad (\text{III.18})$$

Où  $t_w$  est la contrainte pariétale à la surface de la plaque donnée par l'équation

$$t_w = m \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (\text{III.19})$$

Soit donc :

$$Cf_x = \frac{m}{\frac{1}{2} r u_{\infty}^2} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (\text{III.20})$$

On remplace par la fonction du courant, on aura :

$$Cf_x = \frac{m}{\frac{1}{2} r u_{\infty}^2} \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \quad (\text{III.21})$$

Finalement  $Cf_x$  peut être exprimé par :

$$Cf_x = \frac{2 Ra_x^{3/2}}{Pr \cdot Re_x^2} f''(0) \quad (\text{III.22})$$

Où  $Pr = \frac{n}{a} = \frac{m}{ar}$  est le nombre de Prandtl et  $Re_x = \frac{u_{\infty} x}{\nu} = \frac{u_{\infty} r x}{m}$  est le nombre de Reynolds local.

La contrainte pariétale moyenne qui s'exerce sur la plaque de longueur  $H$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{t}_w &= \frac{1}{H} \int_0^H t_w dx \\ &= \frac{2am}{H^2 (3l + 1)} Ra^{3/2} f''(0) \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Alors :

$$\begin{aligned} \bar{Cf} &= \frac{\bar{t}_w}{\frac{1}{2} r u_{\infty}^2} \\ &= \frac{4 Ra^{3/2}}{(3l + 1) Pr Re^2} f''(0) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

### III Résolution numérique

Le système d'équations différentielles adimensionnelles (III.5) assorti des conditions aux limites (III.6) est non-linéaire. Cependant, il est difficile de le résoudre analytiquement. Pour cela, nous avons procédé à une résolution numérique en utilisant la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 couplée avec la technique de Tir qui est plus adaptée aux problèmes à valeurs limites, lorsque les valeurs initiales nécessaires au démarrage du calcul ne sont pas toutes connues. Cette situation est bien rencontrée dans la présente étude.

#### III.1 Méthode de Runge-Kutta-Fehlberg

La Méthode de Runge-Kutta-Fehlberg, est une méthode couramment utilisée pour la résolution d'équations différentielles ordinaires. Elle a été élaborée en 1901 par les mathématiciens *Carl Runge*, *Martin Wilhelm Kutta* et *Erwin Fehlberg*. Cette méthode, à pas unique, repose sur le principe de l'itération, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation plus précise. Elle présente l'avantage d'être simple à programmer et d'être assez stable pour les fonctions courantes de la physique.

Sur le plan de l'analyse numérique, la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg a surtout l'immense avantage de ne pas nécessiter autre chose que la connaissance des valeurs initiales pour le démarrage du calcul. Son inconvénient est qu'elle est assez consommatrice en temps de calcul. On peut donc l'utiliser lorsque le temps de calcul n'est pas trop grand.

Pour résoudre le système d'équations différentielles rencontrées dans cette étude, nous avons choisi la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5, grâce à ses avantages cités précédemment et sa précision par rapport aux méthodes de Runge-Kutta d'ordres inférieurs.

Le principe général de cette méthode est le suivant :

Nous voulons approximer la solution au 1<sup>er</sup> ordre du problème à valeur initiale (PVI) suivant :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Supposons que nous avons approximativement la valeur de  $y_n$  au nœud  $x_n$  et nous cherchons à rapprocher  $y_{n+1}$  au nœud  $x_{n+1}$ .

Le schéma de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 ci-après permet de faire cette approximation.

$$x_n = x_0 + nh \quad x_{n+1} = x_0 + (n+1)h$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + a_2 h, y_n + b_{21}k_1)$$

·  
·  
·  
·  
·

$$k_6 = hf(x_n + a_6 h, y_n + b_{61}k_1 + \dots + b_{65}k_5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \overset{\circ}{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^n c_i k_i + O(h^6)$$

Les valeurs particulières des différentes constantes que nous privilégions sont celles trouvées par *Runge-Kutta-Fehlberg* et regroupées dans le tableau suivant:

<b>i =</b>	<b>a<sub>i</sub></b>	<b>b<sub>ij</sub></b>					<b>c<sub>i</sub></b>
<b>1</b>							16/135
<b>2</b>	1/4	1/4					0
<b>3</b>	3/8	3/32	9/32				6656/12825
<b>4</b>	12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197			28561/56430
<b>5</b>	1	439/216	-8	3680/513	-845/4104		-9/50
<b>6</b>	1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40	22/55
<b>j =</b>		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	

Table III.1 – Valeurs des constantes de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5

### III.2 Procédure de résolution numérique

Le système d'équations différentielles de deuxième ordre (III.5) est non-linéaire. Cependant, il est encore difficile de le résoudre analytiquement. Pour cela on cherche à le réécrire comme un système d'équations différentielles de premier ordre en adoptant les transformations suivantes :

$$g_1 = f \quad , \quad g_2 = \theta \quad , \quad g_3 = \theta' \quad , \quad g_4 = \phi \quad , \quad g_5 = \phi' \quad , \quad g_6 = \phi'' \quad (III.26)$$

Donc le système d'équation différentielle (III.5) devient équivalent au système d'équations différentielles de premier ordre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1' = g_2 + N g_4 \\ g_2' = g_3 \\ g_3' = -\frac{(\lambda+1)}{2} \cdot g_1 g_3 + \lambda g_1' g_2 - D_f g_6 - e^{-\eta} \\ g_4' = g_5 \\ g_5' = g_6 = \frac{Le}{(Le.Sr.D_f - 1)} \cdot \left( \frac{(\lambda+1)}{2} g_1 (g_5 - Sr g_3) + \lambda Sr g_2 (g_2 + N g_4) - \gamma g_4^n \right) \end{array} \right. \quad (III.27)$$

Couplé avec les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = 0 \quad , \quad g_1 = f_w \quad , \quad g_2 = 1 \quad , \quad g_4 = 1 \\ \eta = \infty \quad , \quad g_2 = 0 \quad , \quad g_4 = 0 \end{array} \right. \quad (III.28)$$

### III.3 Algorithme de résolution

Le système d'équations différentielles (III.27) couplées avec les conditions aux limites (III.28) a été résolu numériquement en utilisant la méthode de *Runge-Kutta-Fehlberg* d'ordre 5 en association avec la technique itérative de Tir avec  $\eta_{max}=15$  et un pas de  $\Delta\eta=10^{-4}$ . Puisque nous disposons des conditions initiales sur les fonctions  $g_2$  et  $g_4$ , il serait naturel de chercher les conditions initiales sur les fonctions  $g_3$  et  $g_5$  ( $g_3(0) = \alpha$ ,  $g_5(0) = \beta$ ) de telle

sorte que  $g_2(\infty) = 0$  et  $g_4(\infty) = 0$ . Le choix de  $\eta_{\max}$  a assuré que toutes les solutions numériques tendent correctement vers les valeurs asymptotiques en dehors des couches limites.

L'algorithme pratique adopté à la résolution du système (III.27) précédent, assorti des conditions aux limites (III.28) est le suivant :

- Etape initiale : prendre les valeurs  $\alpha_0$  ,  $\alpha_1$  ,  $\beta_0$  et  $\beta_1$  arbitrairement dans  $\mathfrak{R}$
- Etape k : supposons  $\alpha_{k-1}$  ,  $\alpha_k$  ,  $\beta_{k-1}$  et  $\beta_k$  connues.
- Calcul de  $g_2(\eta_{\max})_{(f_w,1,1,\alpha_{k-1})}$  ,  $g_2(\eta_{\max})_{(f_w,1,1,\alpha_k)}$  ,  $g_4(\eta_{\max})_{(f_w,1,1,\beta_{k-1})}$  et de  $g_4(\eta_{\max})_{(f_w,1,1,\beta_k)}$  en utilisant le schéma d'intégration de Runge-Kutta-Fehlberg.
- Calcul de  $\alpha_{k+1}$  ,  $\beta_{k+1}$  :

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \cdot g_2(\eta_{\max})_{(f_w,1,1,\alpha_k)}}{g_2(\eta_{\max})_{(f_w,1,1,\alpha_k)} - g_2(\eta_{\max})_{(f_w,1,1,\alpha_{k-1})}}$$

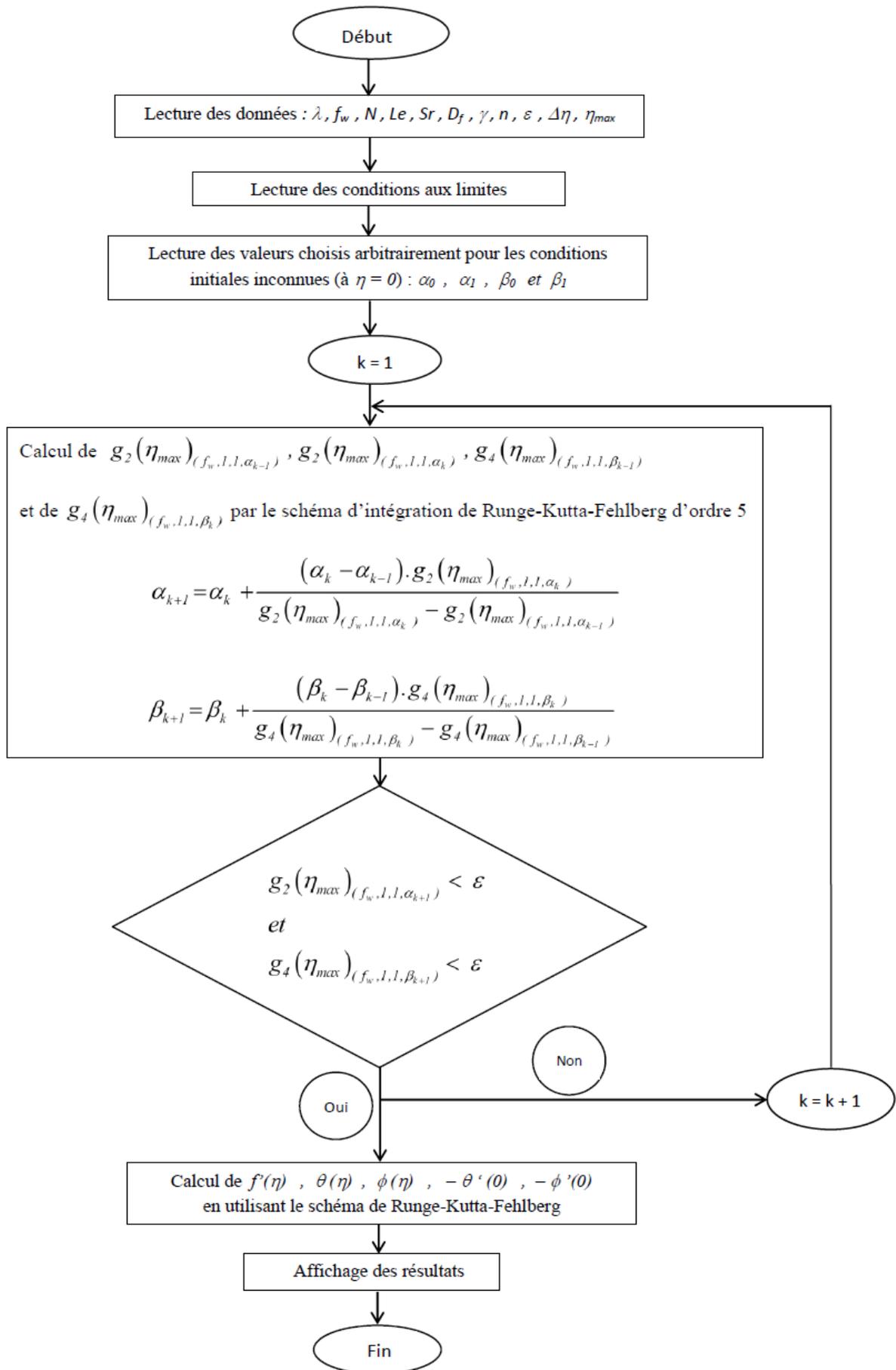
$$\beta_{k+1} = \beta_k + \frac{(\beta_k - \beta_{k-1}) \cdot g_4(\eta_{\max})_{(f_w,1,1,\beta_k)}}{g_4(\eta_{\max})_{(f_w,1,1,\beta_k)} - g_4(\eta_{\max})_{(f_w,1,1,\beta_{k-1})}}$$

- Répéter le processus jusqu'à ce que la condition suivante soit satisfaite :

$$g_2(\eta_{\max})_{(f_w,1,1,\alpha_{k+1})} = 0 \quad \text{et} \quad g_4(\eta_{\max})_{(f_w,1,1,\beta_{k+1})} = 0$$

### III.4 Organigramme

L'organigramme de l'algorithme de la méthode de résolution de Range-Kutta- Fehlberg est présenté comme suit :



## IV Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation de la méthode de résolution des équations de conservation associées au problème physique. Dans un premier temps, nous avons décrit la méthode de similarité permettant de transformer les équations régissant le problème physique, couplées avec les conditions aux limites, aux équations en formes adimensionnelles. En second lieu, nous avons fait une description du principe de la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 couplée avec la technique de Tir. Ensuite, nous avons détaillé la procédure de résolution numérique et l'algorithme utilisé.

Dans le prochain chapitre, nous étudions les effets Soret-Dufour sur la convection thermosolutale induite par une plaque à température variable, émergée dans un milieu poreux saturé de fluide binaire, en présence de la réaction chimique destructive et de la génération interne de chaleur.

# CHAPITRE IV

---

## Effets Soret-Dufour en présence de réaction chimique et génération interne de chaleur

---

### I Introduction

Le phénomène de la convection à double diffusion dans les milieux poreux a de nombreuses applications, parmi lesquelles se trouvent la migration de l'humidité dans l'isolation fibreuse, le transport des contaminants dans les sols saturés, le stockage souterrain des déchets nucléaires et les processus de séchage électrochimiques [62]. La diversité des applications a aussi suscité un intérêt fondamental et industriel. Si on considère la géothermie ou encore les gisements d'hydrocarbures, le domaine relève des milieux poreux, c'est pourquoi beaucoup d'études ont été effectuées en considérant un milieu poreux saturé par un fluide.

Dans certaines applications de milieux poreux, telles que celles qui impliquent l'élimination de la chaleur à partir des débris de combustible nucléaire, le stockage souterrain de déchets radioactifs et les réactions chimiques exothermiques, l'influence de la génération de chaleur est importante. La simulation de telles situations nécessite l'addition d'un terme de source de chaleur dans l'équation d'énergie. Dans la plupart des cas, ce terme est supposé constant ou dépendant de la température.

Un tel phénomène, qui a connu un grand intérêt théorique et pratique par les chercheurs et les industriels, pourrait être influencé par de nombreux effets comme l'effet Soret, qui conduit à l'apparition dans le mélange binaire, sous l'effet d'un gradient de température, d'un flux de matière tendant à provoquer la séparation des constituants. Il trouve son origine dans un terme de second ordre des équations d'*Onsager* de la thermodynamique hors équilibre, et peut affecter fortement la convection thermosolutale dans les milieux poreux. Plusieurs études ont permis de mettre en évidence le rôle crucial de l'effet Soret dans le déplacement des fluides et le mouvement de gaz dans les réservoirs géologiques [63], [64].

En 1872, *Dufour* avait découvert la naissance d'un effet inverse à celui de Soret à savoir l'apparition d'un gradient de température induit par un gradient de concentration.

Généralement, cet effet a été négligé dans les solutions et n'est, souvent, pris en considération que dans les mélanges gazeux.

Dans certaines situations pratiques, notamment en génie pétrolier et les procédés de séparation en industries chimiques, la convection thermosolutale peut être accompagnée de la naissance d'une réaction chimique, qui peut avoir un effet déterminant sur la distribution de la concentration dans le mélange. Il a été trouvé que la réaction chimique est d'une ampleur considérable de telle sorte que son influence ne peut pas être ignorée. Cependant, la prise en compte simultanément des effets Soret-Dufour et la réaction chimique, n'a pas été étudiée à notre connaissance.

Après avoir fait la formulation mathématique du problème physique avec les conditions aux limites associées, et décrire la procédure de résolution numérique utilisée dans la présente étude, nous proposons de modéliser dans ce chapitre, les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle dans un milieu poreux saturé. Nous étudions, précisément, les effets Soret-Dufour sur la convection thermosolutale induite par une plaque à température variable, émergée dans un milieu poreux saturé de fluide binaire en tenant compte de l'existence d'une réaction chimique destructive d'ordre  $n$  et génération interne de chaleur.

## II Position du problème

Il s'agit donc d'étudier simultanément les effets Soret-Dufour et la réaction chimique sur la convection thermosolutale bidimensionnelle, dans un milieu poreux homogène saturé de fluide binaire, newtonien et incompressible, en présence d'une source de chaleur interne (*SCI*). Le modèle physique de ce problème est présenté dans la Figure IV.1. C'est une plaque plane poreuse de hauteur  $H$ , chauffée et placée verticalement dans le milieu. La surface de la plaque est maintenue à une concentration  $C_w$  constante et une température variable  $T_w = T_\infty + Ax^2$ , et peut être aussi soumise à une vitesse latérale d'aspiration ou d'injection de la forme :  $V_w(x) = Bx^{\frac{\lambda-1}{2}}$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes, et  $x$  la coordonnée verticale le long de la plaque. Les coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  sont mesurées, respectivement, le long de, et perpendiculaire à la plaque.

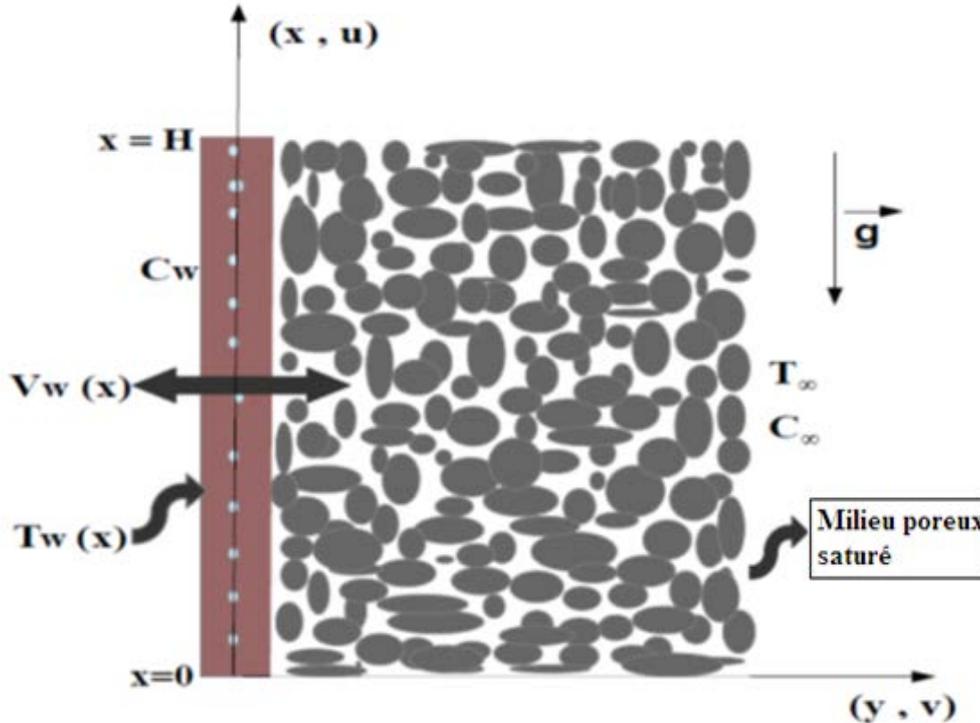


Figure IV.1 – Schéma représentatif du modèle physique

La formulation mathématique, les conditions aux limites, la méthode de résolution, ainsi que la procédure de résolution numérique ont été largement détaillées dans les chapitres précédents.

Comme l'on a décrit dans le chapitre III, le système d'équations différentielles non-linéaires (III.27) couplé avec les conditions aux limites (III.28), a été résolu numériquement, en utilisant le schéma d'intégration de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 associée avec la méthode itérative de Tir. Les solutions de similarité sont obtenues pour des valeurs distinctes de l'exposant de température  $\lambda$  et pour une large gamme de variation des nombres adimensionnels et paramètres contrôlant la convection double diffusive dans la couche limite de la plaque à savoir : Le nombre de Lewis ( $Le$ ), le rapport des forces de volume ( $N$ ) le nombre de Soret ( $Sr$ ), le nombre de Dufour ( $Df$ ), le paramètre de la réaction chimique ( $\gamma$ ), le terme source de chaleur interne ( $SCI$ ) et le paramètre d'aspiration/injection ( $f_w$ ). Nous notons ici que l'aspiration du fluide au niveau de la plaque correspond à  $f_w > 0$ , l'injection de fluide correspond à  $f_w < 0$  et  $f_w = 0$  pour une plaque imperméable. Le sens du transfert thermique est déterminé par le signe du gradient de température à la plaque  $\theta'(0)$ , de sorte que si  $\theta'(0) > 0$  le transfert thermique se fait du milieu poreux vers la plaque et il se fait dans le

sens contraire lorsque  $\theta'(0) < 0$ . La situation où  $\theta'(0) = 0$ , indique que la surface de la plaque devient adiabatique ou autrement dit, elle ne participe pas aux échanges thermiques. De la même manière, le signe du gradient de concentration détermine le sens du transfert massique tels que  $\phi'(0) < 0$  indique que le transfert de masse se fait de la plaque vers le milieu poreux,  $\phi'(0) > 0$  pour un transfert massique qui se fait dans le sens inverse, c'est-à-dire du milieu poreux vers la plaque et lorsque  $\phi'(0) = 0$ , la surface de la plaque ne permet pas les échanges massiques. Uniquement trois états thermiques de la plaque ont été considérés :  $\lambda = 0$  correspond à une plaque isotherme,  $\lambda = \frac{1}{3}$  correspond à un flux thermique uniforme à la surface et  $\lambda = 1$  indique que la température de la surface varie linéairement en fonction de la coordonnée verticale  $x$ .

### III Analyse des résultats

#### III.1 Validation

Dans le but de vérifier la précision du code de calcul, développé dans le cadre de la présente thèse, des comparaisons de nos résultats avec ceux de *Postelnicu [65]*, dans le cas d'une plaque isotherme et imperméable, en absence de la réaction chimique ( $f_w = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\gamma = 0$ ), ont été faites en termes des gradients de température et de concentration à la surface de la plaque, pour différentes valeurs des nombres adimensionnels  $N$ ,  $Sr$  et  $D_f$  où le nombre de *Lewis* est fixé à  $Le = 1$ . Les deux tableaux IV.2 et IV.3, montrent un très bon accord entre nos résultats et ceux de l'auteur, avec des erreurs relatives ne dépassant pas 0.34 %. Par conséquent, nous déduisons que la méthode de résolution numérique (*RK5*) sur laquelle est basé le travail est assez précise.

$-\theta'(0) = Nu_x \cdot Ra_x^{-1/2}$					
$N$	$D_f$	$Sr$	Postelnicu A. [65]	Résultats	$RE$ (%)
1	0.05	1.2	0.67678	0.67675	0.004
1	0.075	0.8	0.65108	0.65108	0.0
1	0.073	1.6	0.69686	0.69683	0.004
1	0.6	0.1	0.42002	0.42023	0.005
0.2	0.15	0.4	0.46331	0.46347	0.034
0.5	0.075	0.8	0.55508	0.55511	0.005
0.8	0.03	2	0.67028	0.67027	0.0015

**Tableau IV.1** – Comparaison des gradients thermiques à la surface pour différentes valeurs de  $N, D_f$  et  $Sr$  à  $Le = 1, f_w = 0, \lambda = 0$  et  $\gamma = 0$

$-\phi'(0) = Sh_x \cdot Ra_x^{-1/2}$					
$N$	$D_f$	$Sr$	A. Postelnicu [65]	Résultats	$ER$ (%)
1	0.05	1.2	0.18354	0.18362	0.043
1	0.075	0.8	0.34150	0.34153	0.0087
1	0.073	1.6	0.02339	0.02347	0.34
1	0.6	0.1	0.63313	0.63308	0.0079
0.2	0.15	0.4	0.38100	0.3813	0.078
0.5	0.075	0.8	0.28764	0.2878	0.055
0.8	0.03	2	-0.13736	-0.13731	0.036

**Table IV.2** – Comparaison des gradients massiques à la surface pour différentes valeurs de  $N, D_f$  et  $Sr$  à  $Le = 1, f_w = 0, \lambda = 0$  et  $\gamma = 0$

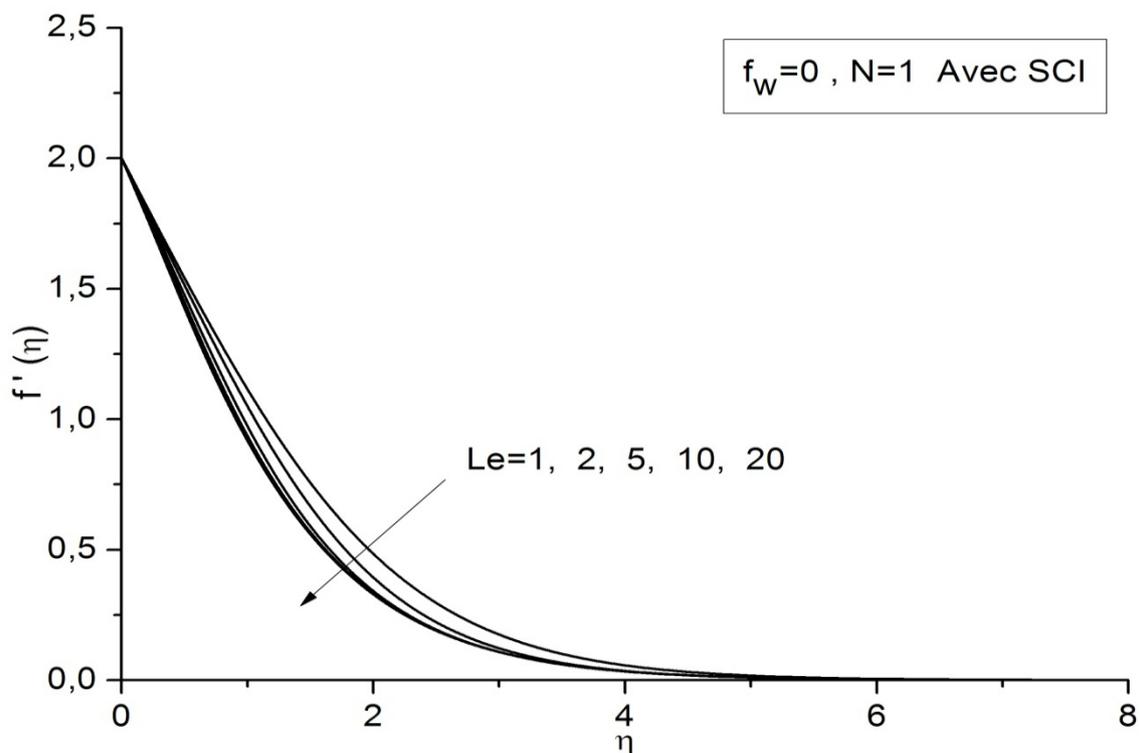
## III.2 Influence des paramètres sur la convection thermosolutale

### III.2.1 Profils dynamique, thermique et massique

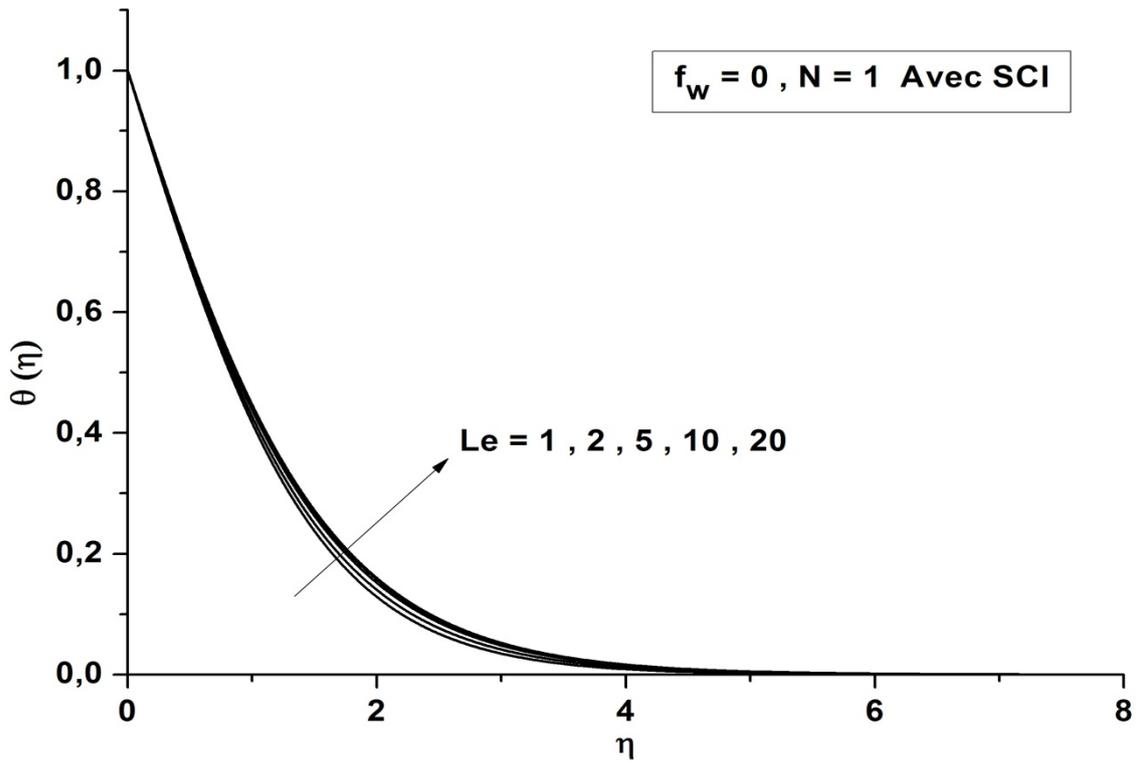
#### III.2.1.1 Effet de $Le$

Dans la zone de la couche limite d'une plaque isotherme et imperméable, insérée dans un milieu poreux saturé, en présence d'une source de chaleur interne (SCI), et pour un rapport des forces de volume égale à l'unité ( $N=1$ ), on présente l'effet du nombre de Lewis sur les profils de la vitesse adimensionnelle dans la figure IV.2, sur les profils de la température adimensionnelle dans la figure IV.3 et sur les profils de concentration adimensionnelle dans la figure IV.4.

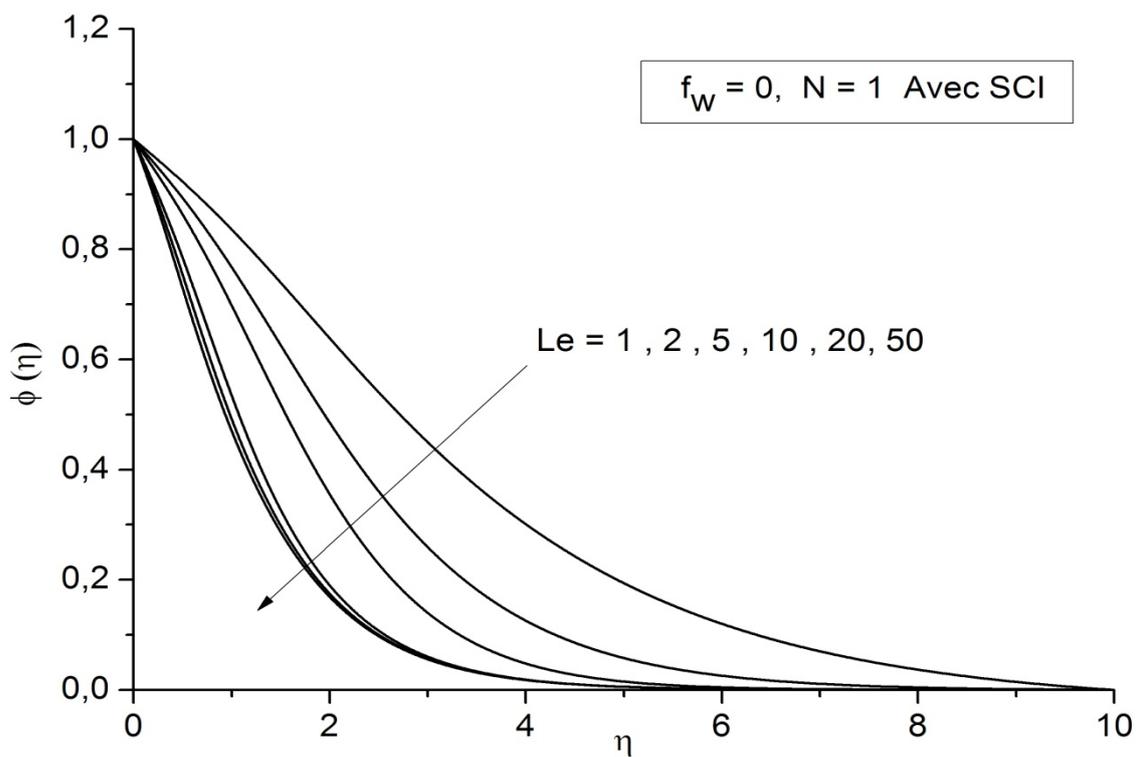
Nous remarquons d'une part, qu'en fonction de l'augmentation de  $Le$ , il y'a une légère réduction de la couche limite dynamique, qui se stabilise pour les grandes valeurs de ce nombre, où la diffusion massique l'emporte sur la diffusion thermique, d'autre part on observe que, pratiquement, la variation du nombre de Lewis n'a pas d'effet remarquable sur le transfert de chaleur par convection naturelle, mais son augmentation conduit à la réduction considérable de la couche limite de concentration, qui se stabilise lorsque les nombre de Lewis devient important. On peut donc dire que les faibles valeurs du nombre de Lewis favorisent le transfert massique par convection naturelle dans la zone de la couche limite.



**Figure IV.2** – Effet du nombre de Lewis sur les profils de la vitesse pour  $f_w = 0$  et  $N = 1$  avec source de chaleur interne



**Figure IV.3** – Effet du nombre de Lewis sur les profils de température pour  $f_w = 0$  et  $N = 1$  avec source de chaleur interne.

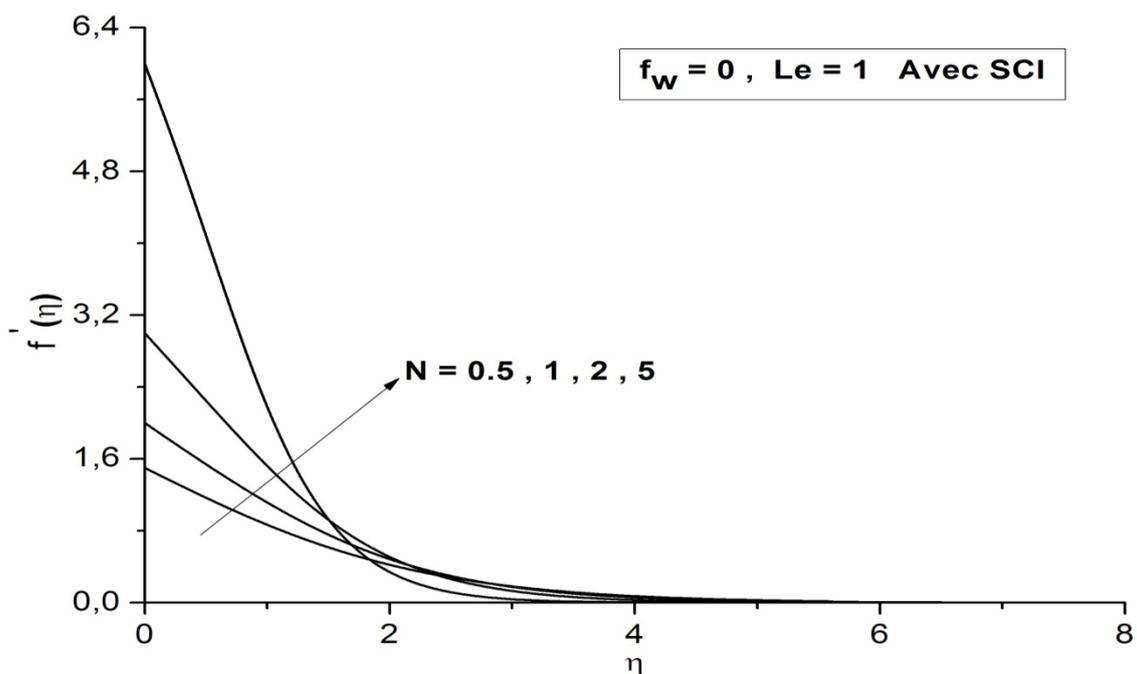


**Figure IV.4** – Effet du nombre de Lewis sur les profils de concentration pour  $f_w = 0$  et  $N = 1$  avec source de chaleur interne.

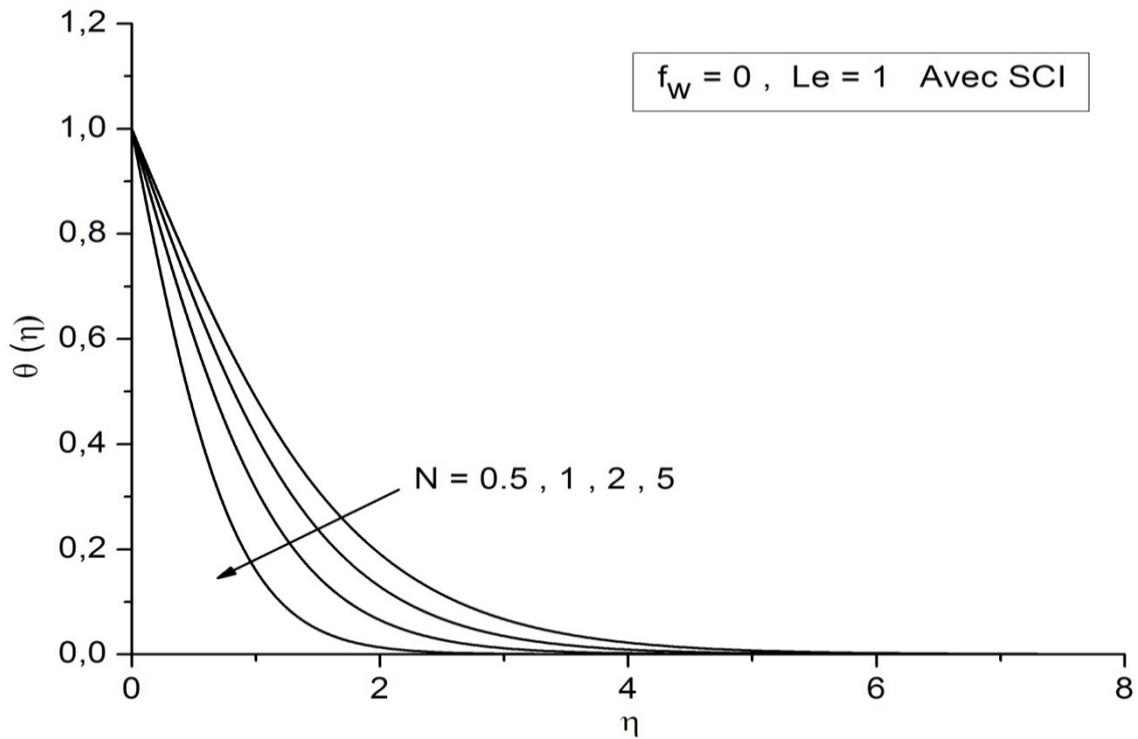
### III.2.1.2 Effet de $N$

Dans la zone de la couche limite d'une plaque isotherme et imperméable, insérée dans un milieu poreux saturé, en présence d'une source de chaleur interne ( $SCI$ ) et pour un nombre de Lewis égale à l'unité ( $Le=1$ ), on présente l'effet du rapport des forces de volume ( $N$ ), sur les profils de la vitesse adimensionnelle dans la figure IV.5, sur les profils de la température adimensionnelle dans la figure IV.6 et sur les profils de la concentration adimensionnelle dans la figure IV.7.

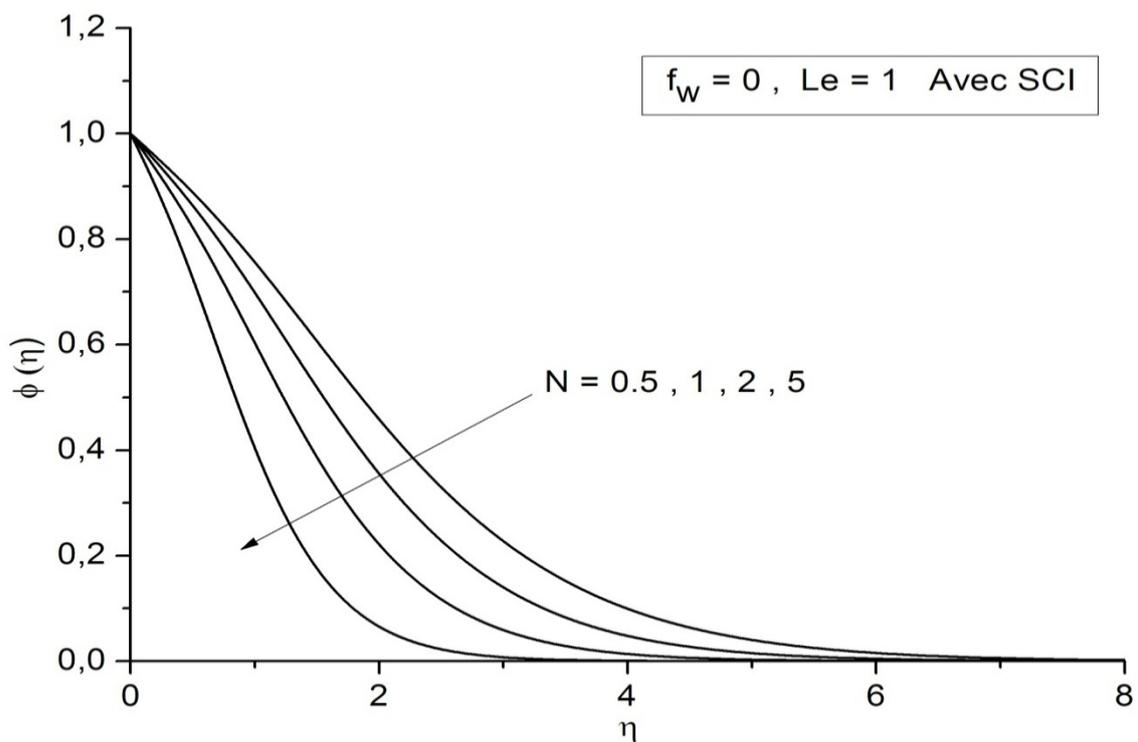
A partir de la figure IV.5, on peut dire que la vitesse d'écoulement est importante dans la surface de la plaque, notamment pour les valeurs élevées du nombre  $N$ . Physiquement, ceci implique que les forces de volume solutales favorisent plus l'écoulement tout près de la surface, comparativement à celles d'origine thermique. Contrairement à l'effet de  $Le$ , le paramètre de rapport des forces de volume a une influence déterminante sur les profils thermiques comme le montre la figure IV.6, de sorte que lorsque les forces de volume d'origine solutale sont dominantes, la couche limite thermique se réduit considérablement, conduisant ainsi à un refroidissement rapide près de la surface. Ce résultat se concorde bien avec celui traduisant l'effet de  $N$  sur la vitesse adimensionnelle (Figure IV.5). De la figure IV.7, nous constatons que l'influence du paramètre  $N$  sur les profils de concentration est similaire à son effet sur les profils de température, puisqu'il y'a une réduction remarquable de la couche limite de concentration, lorsque les forces de volume solutales sont importantes par rapport à celles d'origine thermique.



**Figure IV.5** – Effet du rapport des forces de volume sur les profils de la vitesse pour  $f_w = 0$  et  $Le = 1$  avec source de chaleur interne.



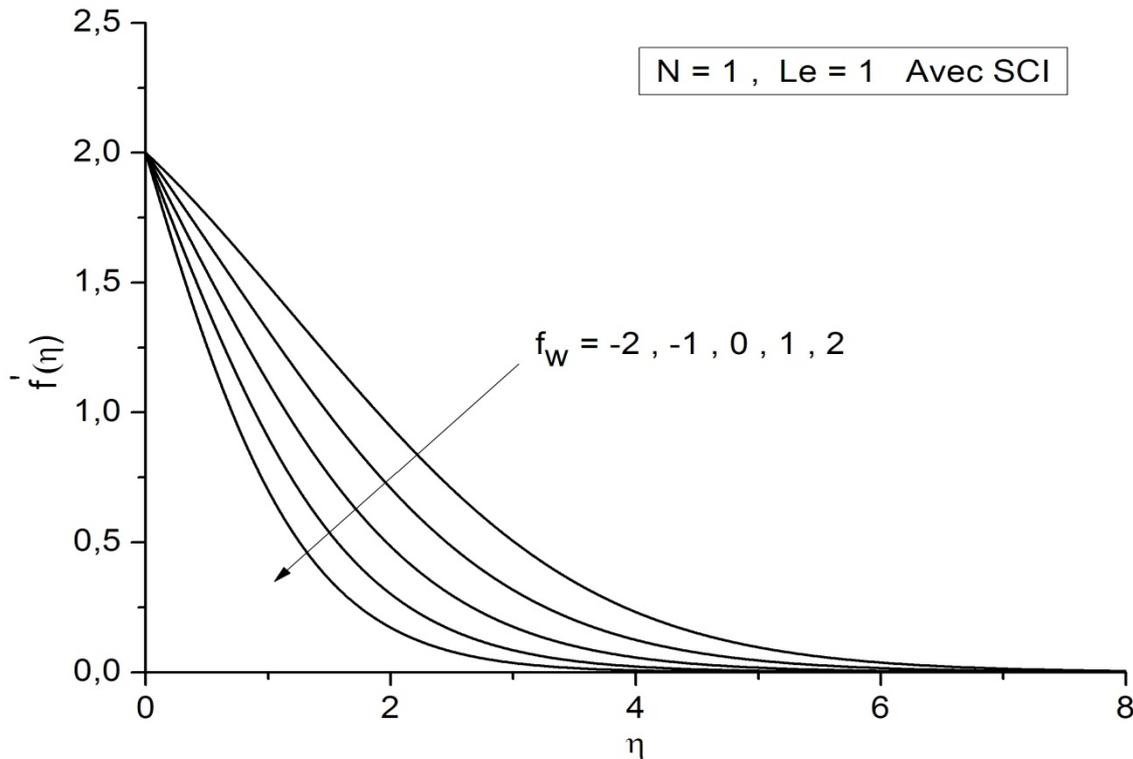
**Figure IV.6** – Effet du rapport des forces de volume sur les profils de température pour  $f_w = 0$  et  $Le = 1$  avec source de chaleur interne.



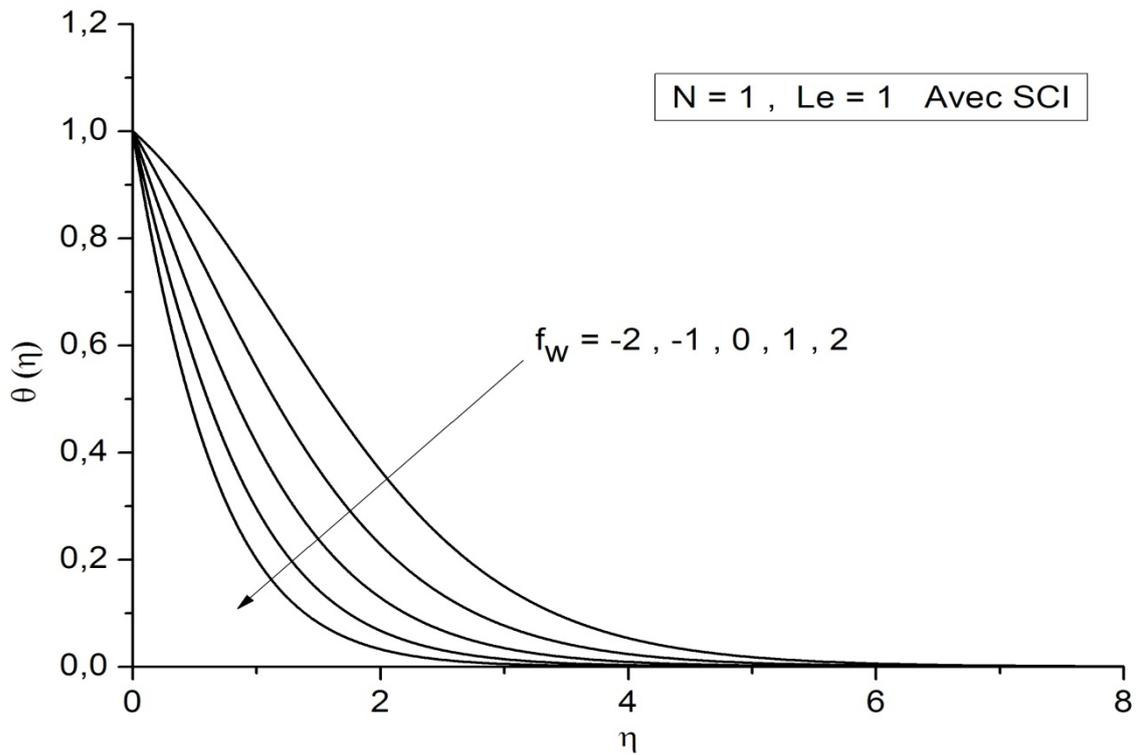
**Figure IV.7** – Effet du rapport des forces de volume sur les profils de concentration pour  $f_w = 0$  et  $Le = 1$  avec source de chaleur interne.

### III.2.1.3 Effet de $f_w$

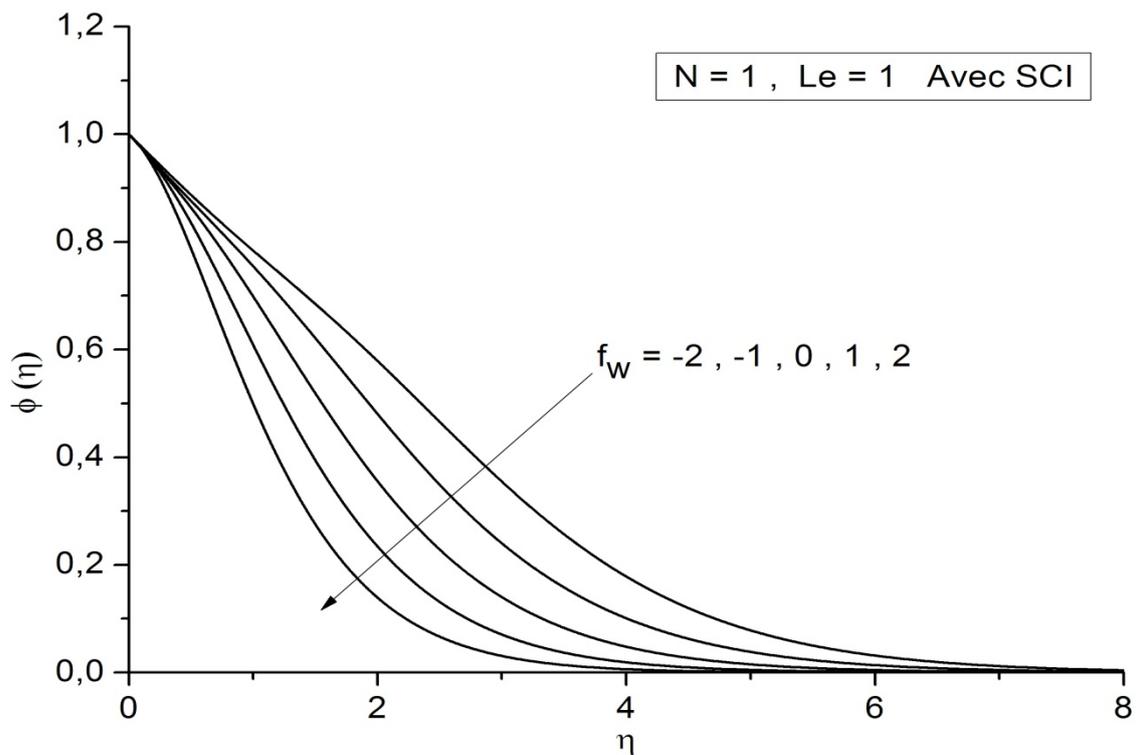
Pour une plaque isotherme et perméable, émergée dans un milieu poreux saturé de fluide binaire, en présence d'une source de chaleur interne (SCI) et pour des nombres de Lewis et de rapport de poussée fixés à l'unité ( $Le=1$  et  $N=1$ ), où les effets Soret et Dufour sont négligés, les figures IV.8, IV.9 et IV.10 projettent l'évolution, respectivement, des profils de la vitesse, de la température et de la concentration adimensionnelles, en fonction du paramètre d'aspiration/injection ( $f_w$ ). Il est bien remarquable à partir de la figure IV.8 que l'aspiration du fluide conduit à la réduction de la couche limite dynamique, tandis que l'injection du fluide permet de l'élargir. Autrement dit, la vitesse d'écoulement augmente avec l'injection du fluide au niveau de la surface et diminue avec son aspiration, ce résultat est en accord avec celui qu'on peut tirer de la figure IV.9, qui montre que l'aspiration du fluide à la surface réduit considérablement la zone de la couche limite thermique, et par conséquent conduit au refroidissement près de la plaque, contrairement à l'effet de l'injection du fluide. Ce qui conduit évidemment à un faible transfert de masse par convection près de la plaque avec de l'aspiration en comparaison avec le cas de l'injection.



**Figure IV.8** – Effet de l'aspiration /injection sur les profils de vitesse pour  $N=1$  et  $Le=1$  avec source de chaleur interne.



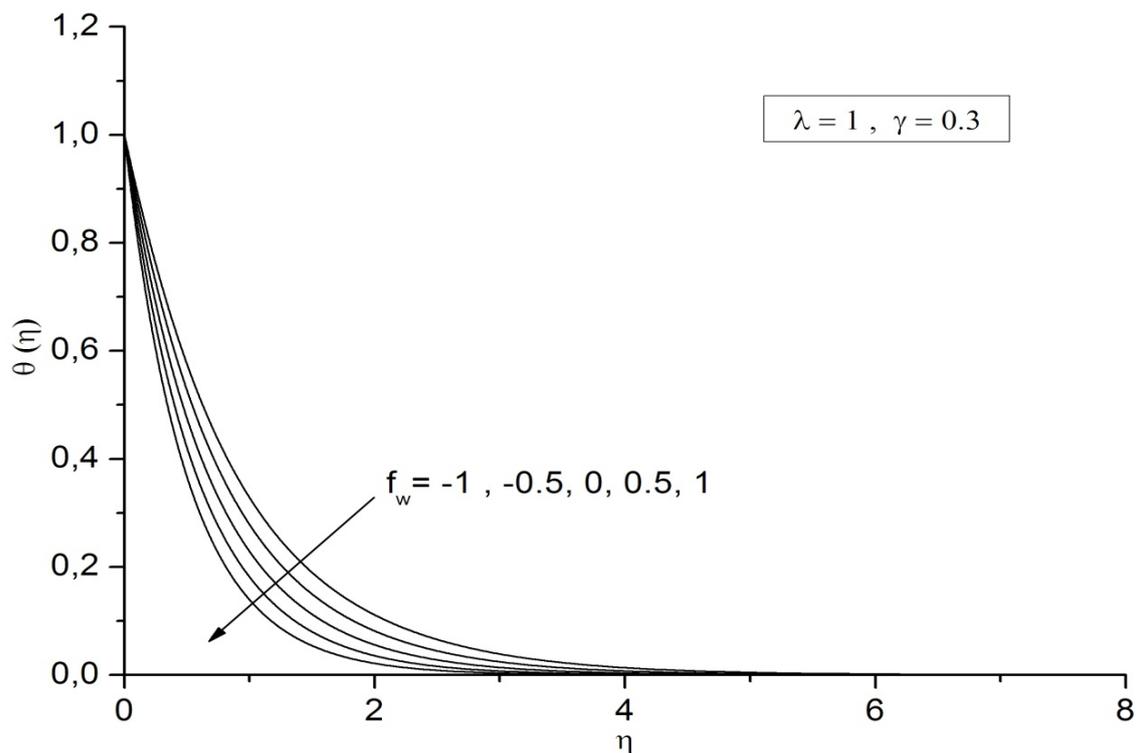
**Figure IV.9** – Effet de l’aspiration /injection sur les profils de température pour  $N=1$  et  $Le=1$  avec source de chaleur interne.



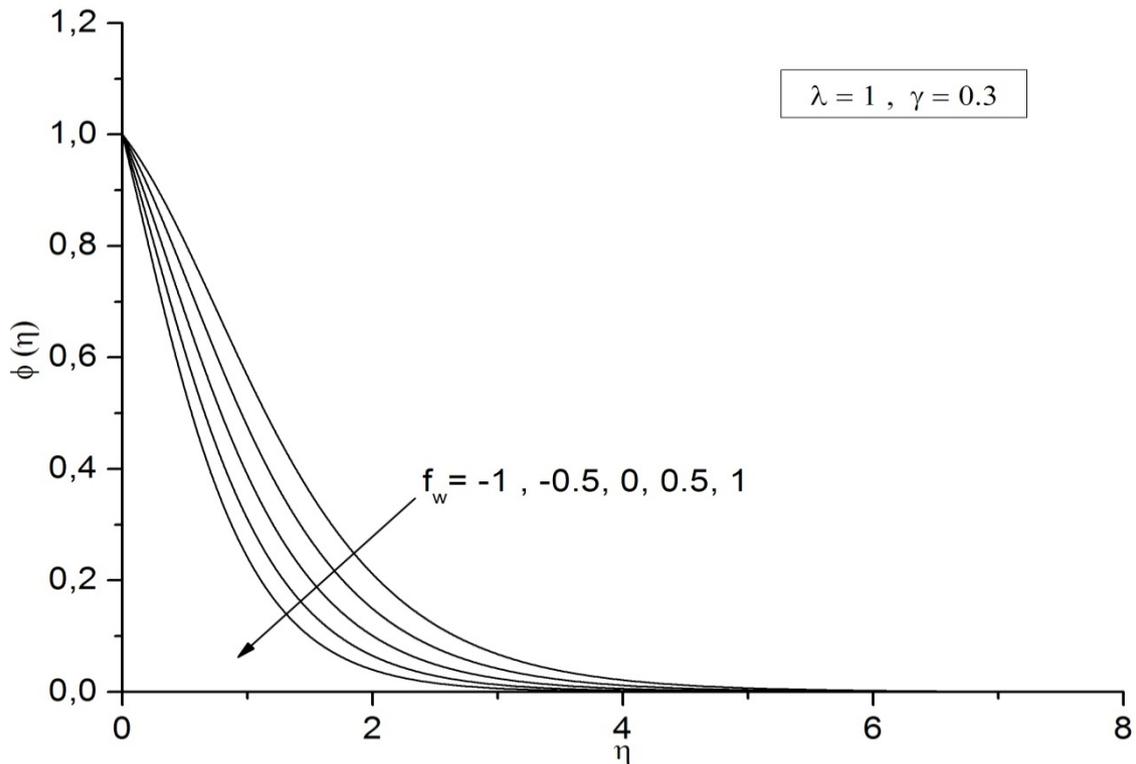
**Figure IV.10** – Effet de l’aspiration /injection sur les profils de concentration pour  $N=1$  et  $Le=1$  avec source de chaleur interne.

Les figures IV.11 et IV.12 présentent, pour  $Le=1$ ,  $N=1$ ,  $Sr=0.5$ ,  $D_f = 0.1$  et  $\gamma = 0.3$ , l'effet de  $f_w$  sur les profils thermiques et massiques, respectivement, en présence de la réaction chimique de premier ordre ( $n=1$ ), avec une distribution linéaire de la température de surface. Ici, les épaisseurs des couches limites thermique et de concentration se réduisent avec l'aspiration de fluide et s'élargissent avec son injection. En outre, les transferts de chaleur et de masse à la surface de la plaque sont toujours dirigés de la plaque vers le milieu poreux.

Cette évolution des profils thermiques et massiques en fonction de l'aspiration et de l'injection se concorde bien avec l'influence du paramètre  $f_w$  sur les profils dynamiques, puisque la décroissance de la vitesse d'écoulement en fonction de l'aspiration conduit naturellement à la réduction des transferts de chaleur et de masse tout près de la plaque, contrairement à l'influence de l'injection. De plus les effets Soret-Dufour sur les profils sont bien remarquables si on fait la comparaison avec le résultat des figures (IV.9) et (IV. 10) dans lesquels ces deux effets ont été ignorés. En outre, nous remarquons que pour toutes les valeurs du paramètre  $f_w$ , le sens de transferts de chaleur et de masse est toujours dirigé de la plaque (plus chaude) vers le milieu poreux (mon chaud).



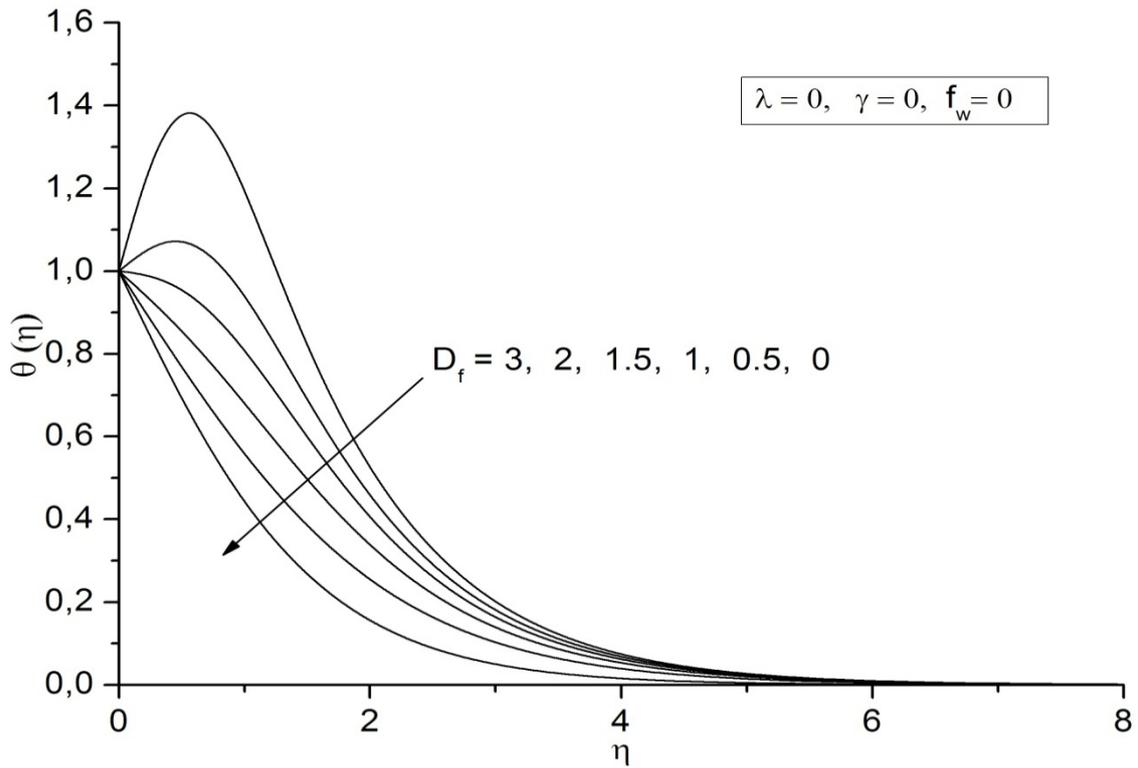
**Figure IV.11** – Profils thermiques pour différentes valeurs de  $f_w$  à  $Le = 1$ ,  $N = 1$  et  $(Sr, D_f) = (0.5, 0.1)$ .



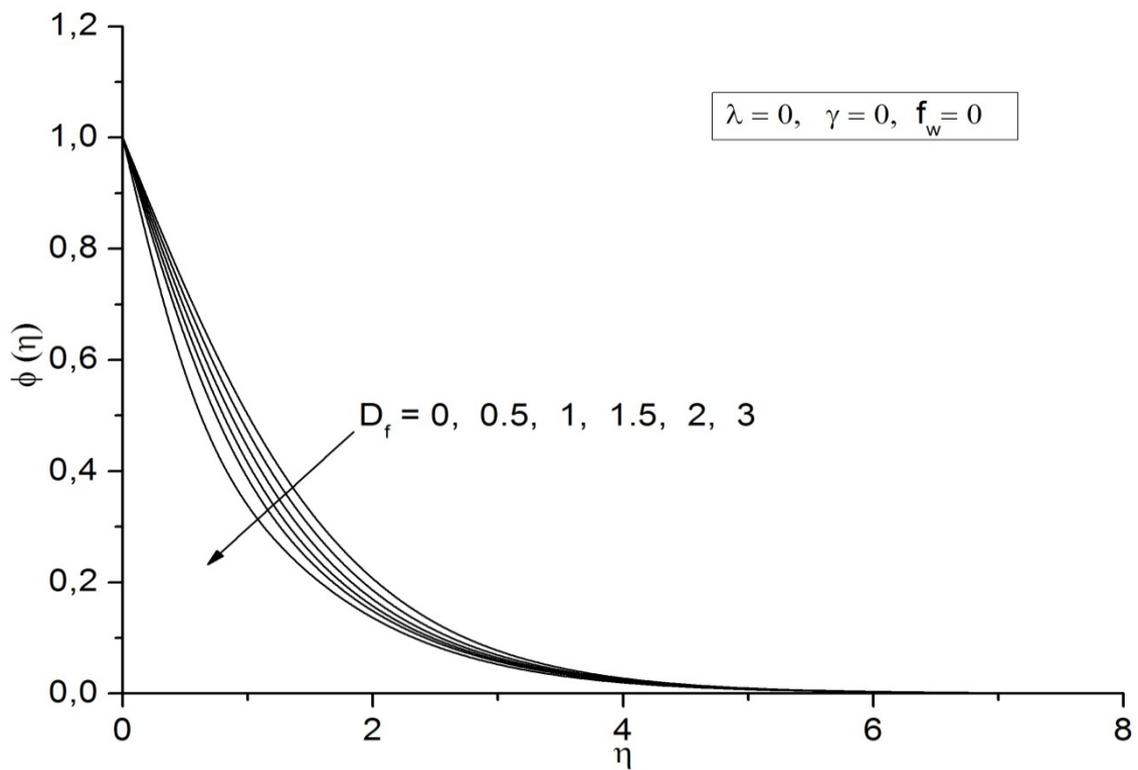
**Figure IV.12** – Profils de concentration pour différentes valeurs de  $f_w$  à  $Le=1$ ,  $N=1$  et  $(Sr, D_f) = (0.5, 0.1)$ .

#### III.2.1.4 Effet de $D_f$

L'effet du nombre de Dufour  $D_f$  sur les profils de température et de concentration dans la zone de la couche limite d'une plaque imperméable et isotherme, en l'absence de la réaction chimique, à  $Le=1$ ,  $N=1$  et  $Sr=0.8$ , est présenté, respectivement, sur les figures IV.13 et IV.14. De la figure IV.13, on constate d'une part, que les profils de température s'amplifient près de la plaque en atteignant des valeurs maximales quand  $D_f$  devient important. Ces valeurs maximales de la température diminuent rapidement lorsque le nombre de *Dufour* décroît. D'autre part, on remarque un élargissement de l'épaisseur de la couche limite thermique avec l'augmentation de  $D_f$ . De la figure IV.14, on constate que les grandes valeurs de  $D_f$  (où le transfert de chaleur par diffusion l'emporte sur le transfert par convection) réduisent l'épaisseur de la couche limite de concentration. En outre, il est bien remarquable que le gradient de concentration à la plaque est toujours négatif pour toutes les valeurs sélectionnées de  $D_f$ . Physiquement, cela signifie que le transfert de masse est dirigé du milieu poreux à la plaque.



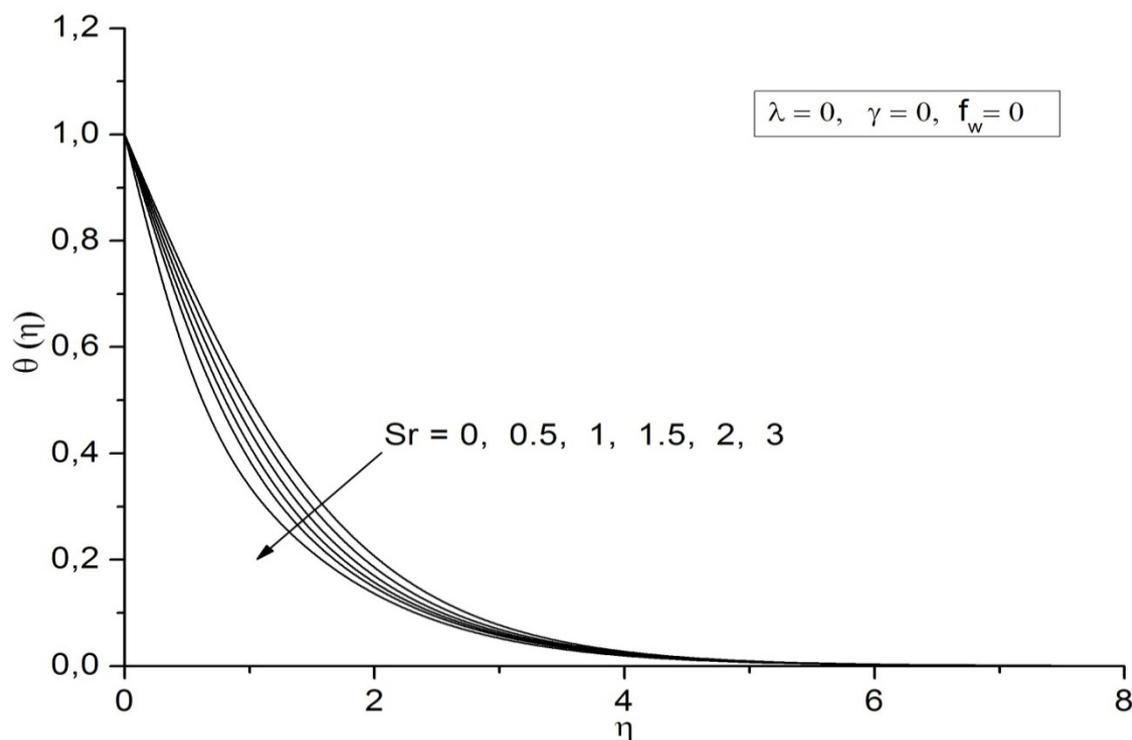
**Figure IV.13** – Profils de la température pour différentes valeurs de  $D_f$  à  $Le=1, N=1$  et  $Sr=0.8$ .



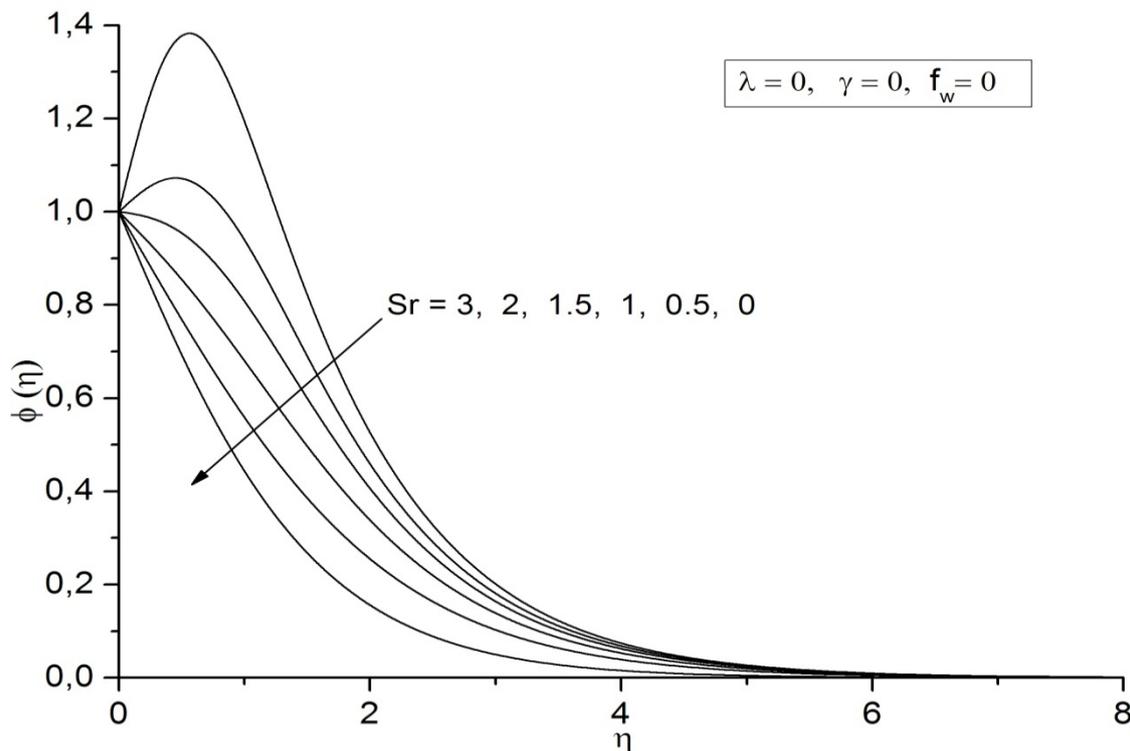
**Figure IV.14** – Profils de la concentration pour différentes valeurs de  $D_f$  à  $Le=1, N=1$  et  $Sr=0.8$ .

### III.2.1.5 Effet de $Sr$

L'effet du nombre de Soret  $Sr$  sur les profils de température et de concentration, dans la zone de la couche limite d'une plaque imperméable et isotherme, en absence de la réaction chimique, à  $Le=1$ ,  $N=1$  et  $D_f=0.2$ , est présenté sur les figures IV.15 et IV.16, respectivement. De la figure IV.15, il est bien remarquable que les profils de température décroissent légèrement près de la plaque avec l'augmentation des valeurs de  $Sr$ . Autrement dit, la thermodiffusion contribue à un faible refroidissement du mélange tout près de la plaque. Nous observons ici que le gradient thermique à la surface est négatif, ce qui provoque un transfert de chaleur qui est toujours dirigé de la plaque vers le milieu poreux. On constate à partir de la figure IV.16, que les profils de concentration s'amplifient et atteignent des valeurs maximales lorsqu'il l'effet Soret devient important. Dans ce cas, le gradient massique à la plaque est positif, et par conséquent, le transfert de masse est dirigé dans le sens opposé (du milieu poreux vers la plaque). Ceci peut être expliqué par la forte concentration au voisinage de la plaque, à cause notamment du flux massique induit par le gradient de température. Nous notons également une réduction de l'épaisseur de la couche limite de concentration pour les petites valeurs de  $Sr$ .



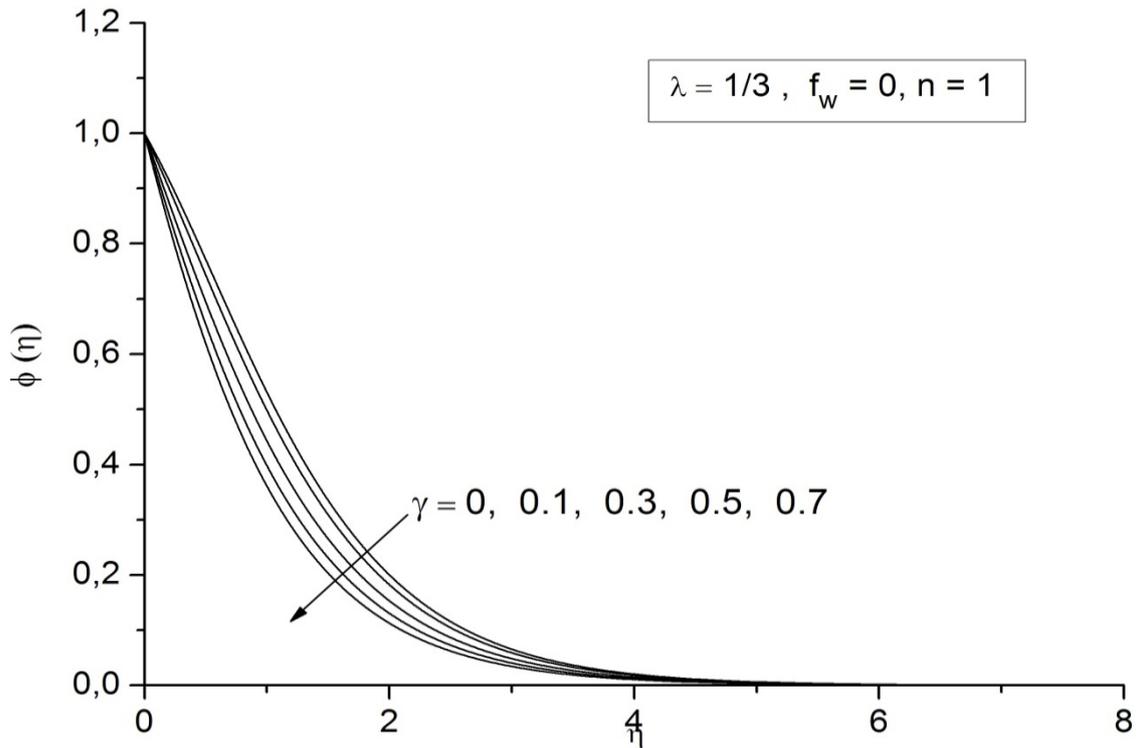
**Figure IV.15** – Profils de température pour différentes valeurs de  $Sr$  à  $Le = 1$ ,  $N = 1$  et  $D_f = 0.2$ .



**Figure IV.16** – Profils de la concentration pour différentes valeurs de  $Sr$  à  $Le = 1$ ,  $N = 1$  et  $D_f = 0.2$ .

### III.2.1.6 Effet de $\gamma$

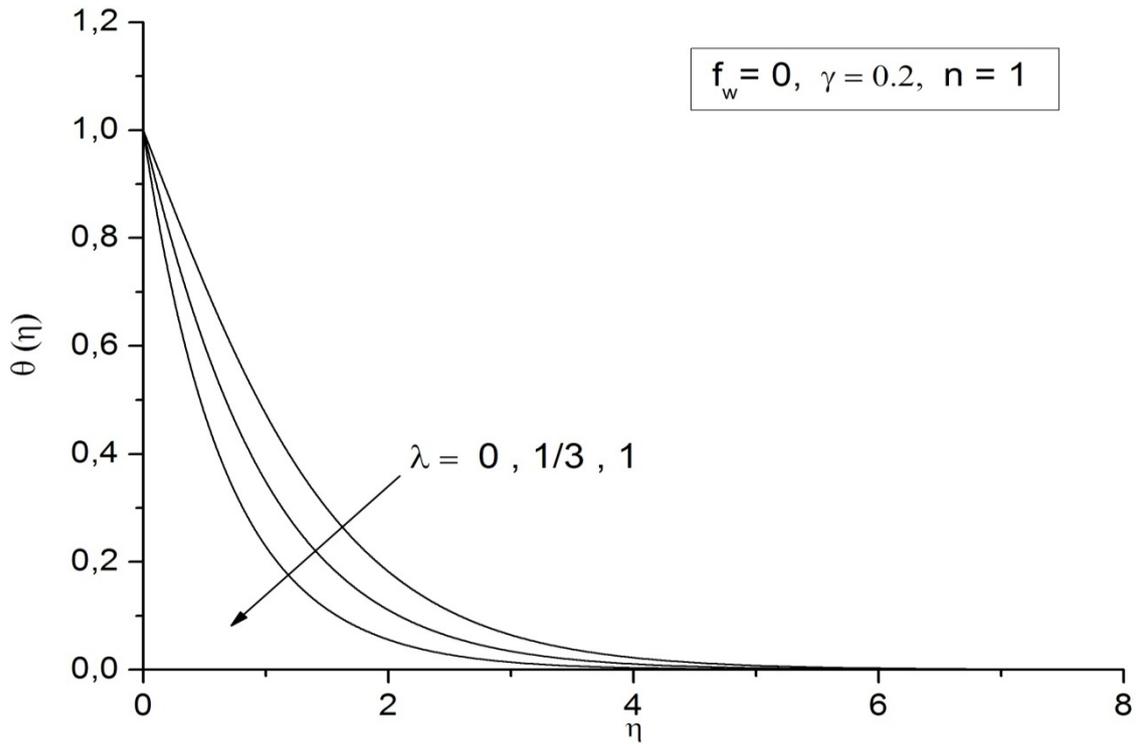
L'influence de la réaction chimique destructive de premier ordre ( $n=1$ ), sur les profils de la concentration, pour une plaque imperméable et soumise à un flux de chaleur uniforme à sa surface ( $\lambda=1/3$ ), est illustrée dans la figure IV.17 pour  $Le=1$ ,  $N=1$ ,  $Sr=0.5$  et  $D_f = 0.1$ . A partir de cette figure, nous observons que lorsque le paramètre de la réaction chimique ( $\gamma$ ) augmente, les profils de concentration décroissent. En conséquence, la réaction chimique destructive conduit à la réduction de l'épaisseur de la couche limite de concentration. Cette évolution des profils de concentration en fonction de la réaction chimique, est justifiée par la perte de soluté dans le mélange binaire par le processus de la réaction chimique. De plus, le gradient massique à la plaque est toujours négatif, ce qui indique que le sens du transfert massique est toujours dirigé de la plaque (à forte concentration) vers le milieu poreux (à faible concentration), et ceci pour toutes les valeurs sélectionnées du paramètre  $\gamma$ . On peut donc conclure que la valeur de 0.5 affectée au nombre Soret  $Sr$ , n'a pas contribué efficacement à l'amplification de la concentration près de la surface.



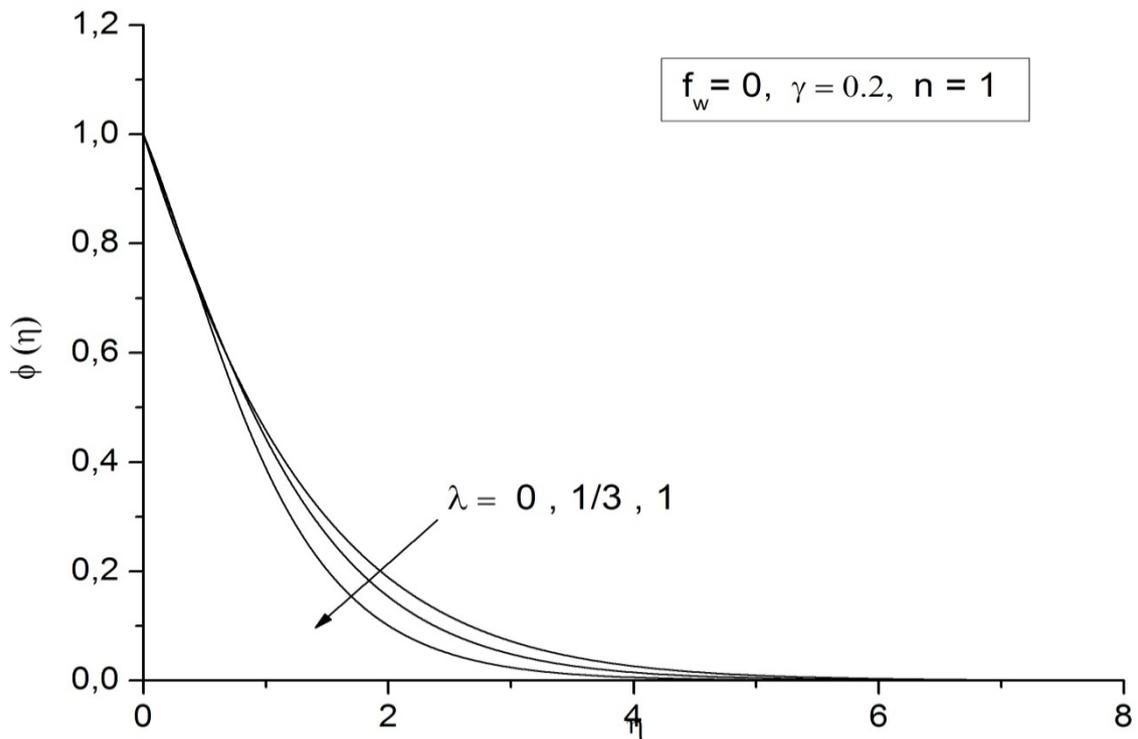
**Figure IV.17** – Profils de la concentration pour différentes valeurs de  $\gamma$  à  $Le = 1$ ,  $N = 1$ ,  $Sr = 0.5$  et  $D_f = 0.1$ .

### III.2.1.7 Effet de $\lambda$

L'effet de l'exposant de température  $\lambda$ , sur les profils de température et de concentration pour une plaque imperméable, en présence de la réaction chimique de premier ordre est représenté, respectivement, dans les figures IV.18 et IV.19 pour  $Le=1$ ,  $N=1$ ,  $Sr=0.5$ ,  $D_f = 0.1$  et  $\gamma = 0.2$ . Ces deux figures montrent d'une part, que pour les trois états thermiques de la plaque, nous avons des gradients thermiques et massiques qui sont négatifs, indiquant que les transferts de chaleur et de masse sont toujours dirigés dans le sens direct (de la plaque vers le milieu poreux). D'autre part, l'augmentation de l'exposant de la température  $\lambda$ , permet de réduire considérablement l'épaisseur de la couche limite thermique (figure IV.18). En outre, nous constatons que tout près de la plaque, le champ de concentration n'est pas influencé par l'état thermique de la plaque, mais en s'éloignant de la surface, les profils de concentration se réduisent, lorsqu'on passe de l'état thermique correspondant à une plaque isotherme à l'état thermique d'une plaque soumise à une distribution linéaire de la température de surface.



**Figure IV.18** – Profils de la température pour différentes valeurs de  $\lambda$  à  $Le = 1, N = 1$  et  $(Sr, D_f) = (0.5, 0.1)$ .



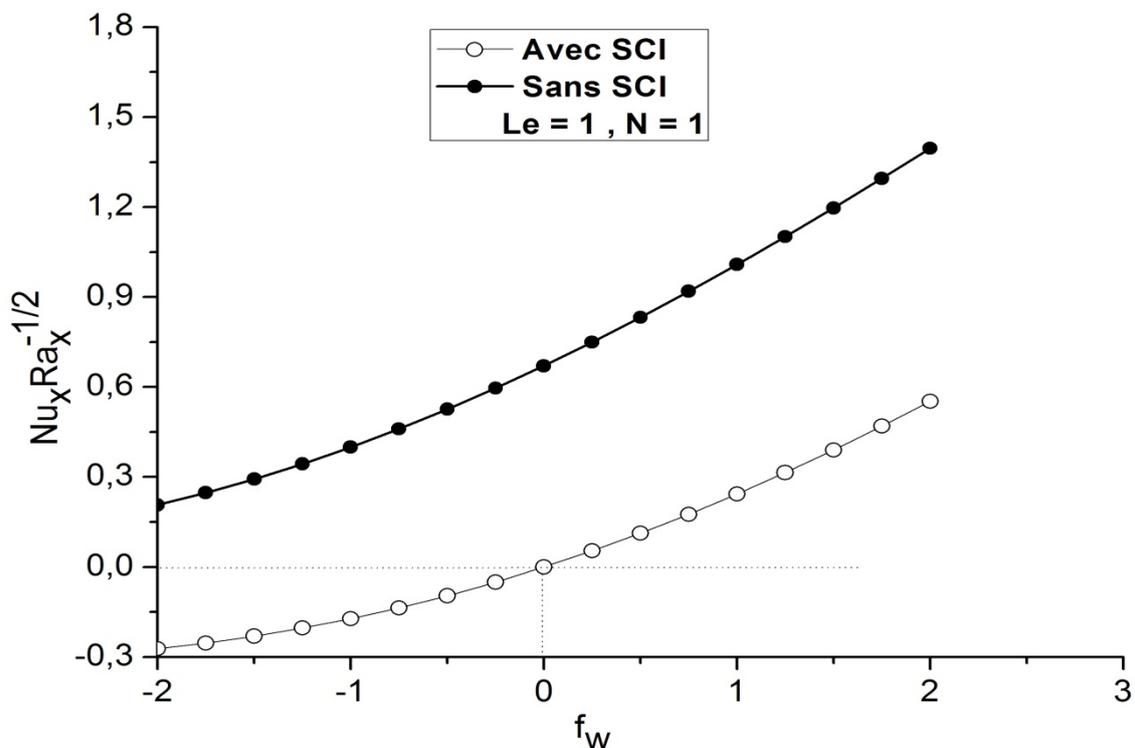
**Figure IV.19** – Profils de la concentration pour différentes valeurs de  $\lambda$  à  $Le = 1, N = 1$  et  $(Sr, D_f) = (0.5, 0.1)$ .

## III.2.2 Taux des transferts thermique et massique

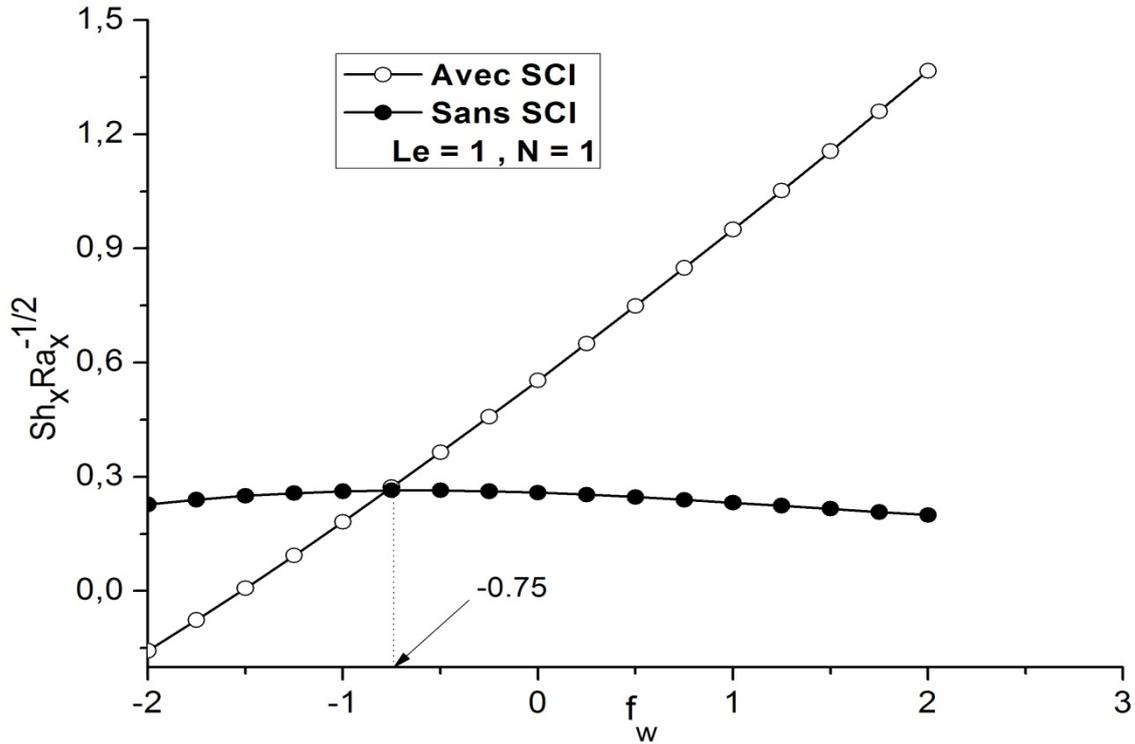
### III.2.2.1 Effets de $f_w$ et $SCI$

Les figures IV.20 et IV.21, montrent les effets d'aspiration/injection ( $f_w$ ) et de la source de chaleur interne ( $SCI$ ), sur le taux de transfert thermique (nombre de Nusselt local) et sur le taux de transfert massique (nombre de Sherwood local), respectivement, au niveau d'une plaque isotherme et perméable, émergée dans un milieu, pour  $Le = 1$  et  $N = 1$  et sans les effets Soret-Dufour. On constate de la figure IV.20, d'une part, que l'aspiration du fluide permet de favoriser le taux de transfert thermique au niveau de la surface, contrairement à l'injection qui le défavorise. D'autre part, ce taux de transfert thermique par convection naturelle est important en absence de la source de chaleur qu'avec son présence. Ceci est justifié par le fait que la présence d'une source de chaleur dans le mélange permet d'amplifier la température en tout point, conduisant à la diminution du gradient thermique à la surface de la plaque.

La figure IV.21, montre qu'avec la présence de la source de chaleur interne, nous avons une augmentation du taux de transfert de masse avec l'aspiration du fluide et sa diminution avec l'injection. En absence de la source de chaleur, nous remarquons bien que le taux de transfert massique est pratiquement constant quand on passe de l'injection à l'aspiration.



**Figure IV. 20** – Effet de l'aspiration /injection sur le nombre de Nusselt pour  $N = 1$  et  $Le = 1$  avec et sans source de chaleur interne.

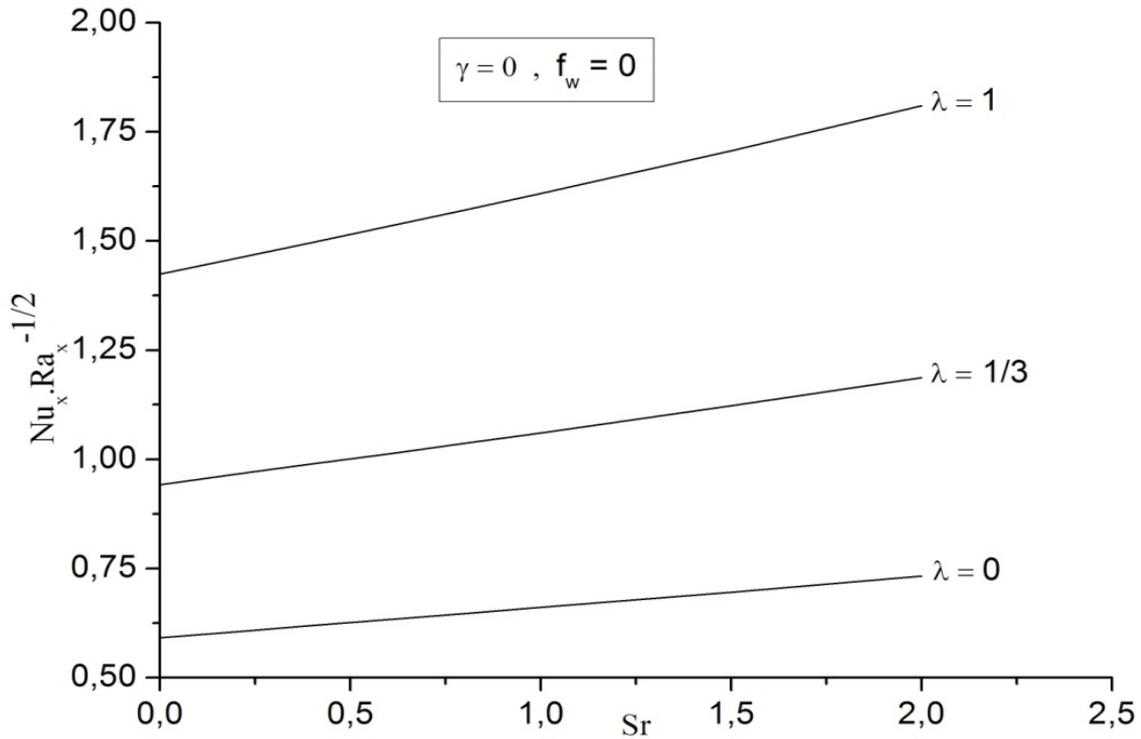


**Figure IV. 21** – Effet de l’aspiration /injection sur le nombre de Sherwood pour  $N = 1$  et  $Le = 1$  avec et sans source de chaleur interne.

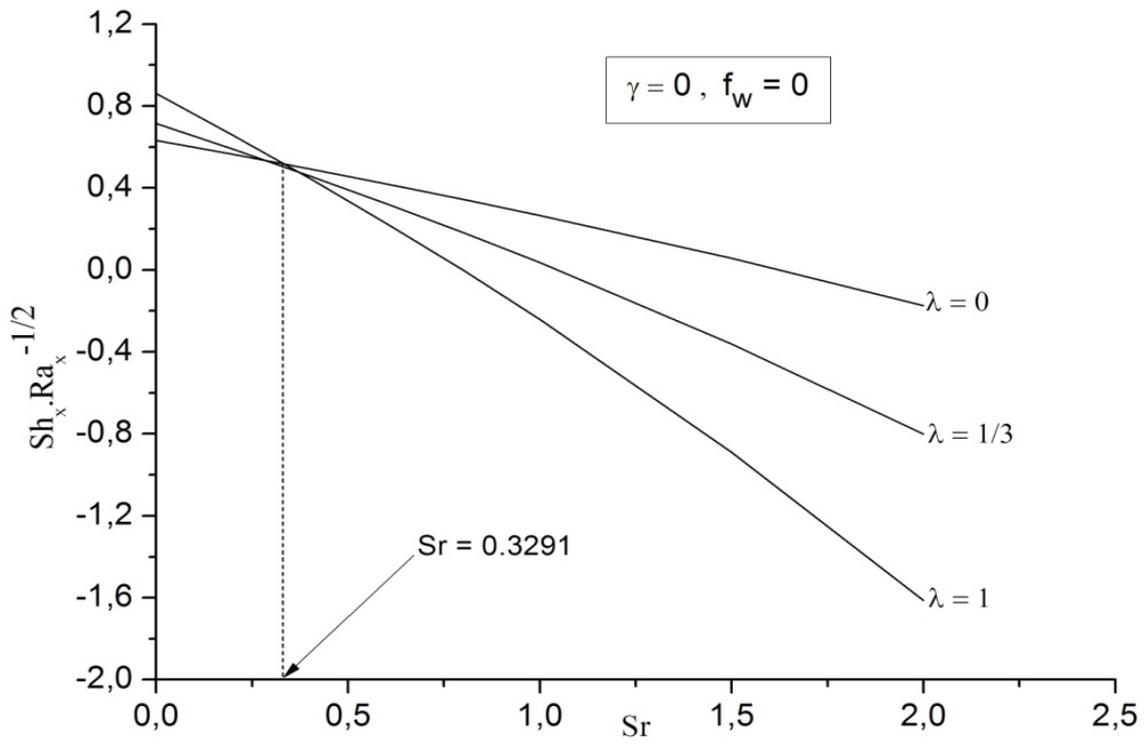
### III.2.2.2 Effets de $Sr$ et $\lambda$

Les figures IV.22 et IV.23, représentent, respectivement, pour trois valeurs de l’exposant de la température  $\lambda$  à  $Le=1$ ,  $N=1$  et  $D_f=0.1$ , l’évolution du taux de transfert de chaleur (nombre de Nusselt local) et du taux de transfert masse (nombre de Sherwood local) à la plaque, en fonction du nombre de *Soret*. La figure IV.22, montre d’une part, que le taux de transfert de chaleur au niveau de la plaque, augmente linéairement avec l’augmentation du nombre  $Sr$  à partir de sa valeur minimale à  $Sr = 0$  (absence de la thermodiffusion). D’autre part, ce taux de transfert de chaleur s’amplifie avec l’augmentation de l’exposant de température  $\lambda$ .

De la figure IV.23, nous concluons que pour les trois états thermiques de la plaque, en augmentant le nombre de Soret  $Sr$ , le taux de transfert de masse décroît à partir de sa valeur maximale à  $Sr = 0$ . En outre, nous distinguons deux zones: *zone 1* ( $Sr < 0.3291$ ) et *zone 2* ( $Sr > 0.3291$ ). Lorsque  $\lambda$  augmente, le taux de transfert de masse augmente dans la zone 1 et diminue dans la zone 2, et le cas où  $Sr \approx 0.3291$  correspond à un taux de transfert massique qui ne dépend pas de l’état thermique de la plaque.

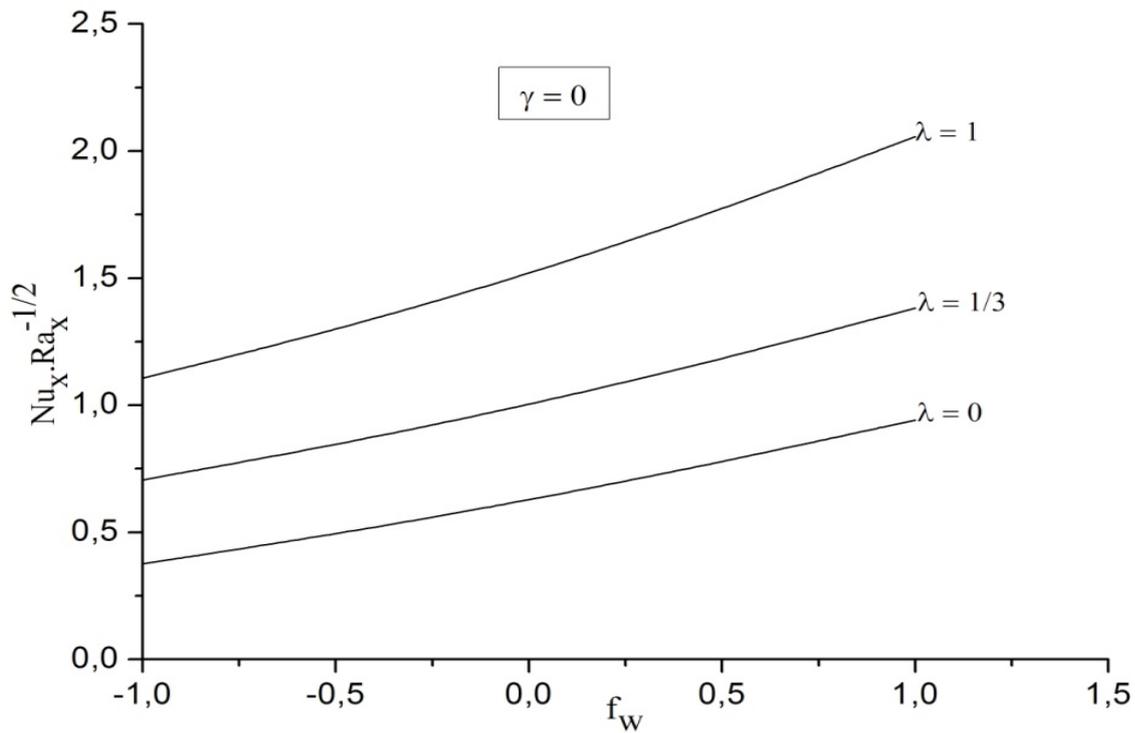


**Figure IV.22** – Profils du nombre de Nusselt local en fonction de  $Sr$  pour différentes valeur de  $\lambda$  à  $Le = 1, N = 1$  et  $D_f = 0.1$ .



**Figure IV.23** – Profils du nombre de Sherwood local en fonction de  $Sr$  pour différentes valeurs de  $\lambda$  à  $Le = 1, N = 1$  et  $D_f = 0.1$ .

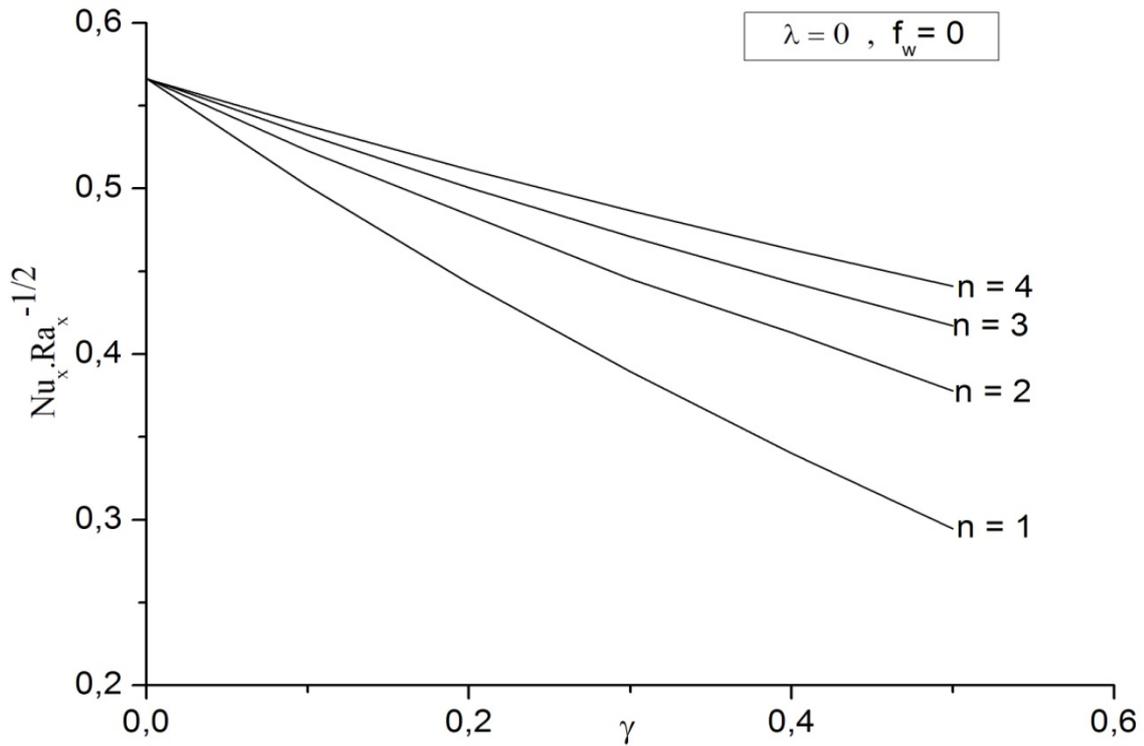
La figure IV.24, illustre, en l'absence de la réaction chimique, l'effet du paramètre d'aspiration ou d'injection ( $f_w$ ), sur le taux de transfert de chaleur à la plaque pour trois états thermiques à  $Le = 1$ ,  $N = 1$ ,  $Sr = 0.5$  et  $D_f = 0.1$ . Il ressort de cette figure que le taux de transfert de chaleur à la surface augmente avec l'aspiration de fluide et diminue avec l'injection, de plus l'élévation de l'exposant de la température permet d'amplifier le taux de transfert de chaleur.



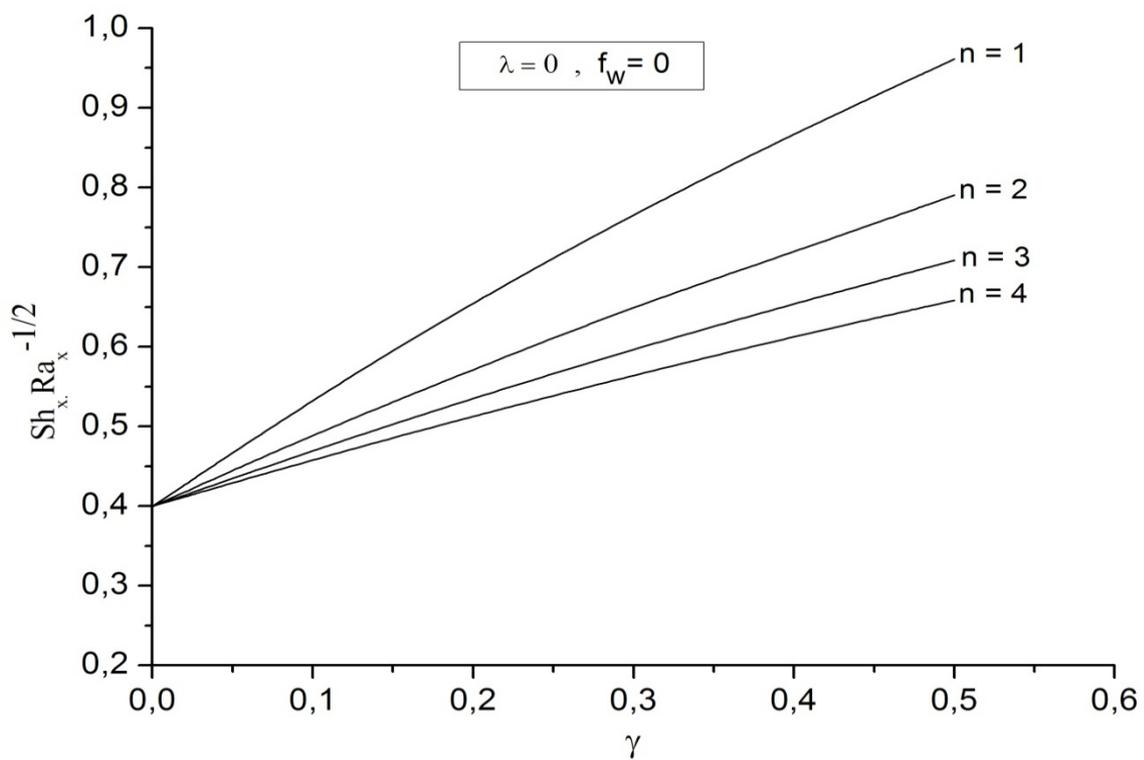
**Figure IV.24** – Profils du nombre de Nusselt local en fonction de  $f_w$  pour différentes valeurs de  $\lambda$  à  $Le = 1$ ,  $N = 1$  et  $(Sr, D_f) = (0.5, 0.1)$ .

### III.2.2.3 Effet de $\gamma$

Les figures IV.25 et IV.26 montrent, pour des valeurs distinctes de l'ordre de la réaction chimique ( $n$ ), l'effet de la réaction chimique sur le taux de transfert de chaleur et sur le taux de transfert de masse, respectivement, pour une plaque imperméable et isotherme lorsque  $Le = 1$ ,  $N = 1$ ,  $Sr = 0.8$  et  $D_f = 0.2$ . A partir de la figure IV.25, on constate que pour toutes les valeurs sélectionnées de  $n$ , en augmentant le paramètre  $\gamma$ , le taux de transfert de chaleur à la surface de la plaque diminue linéairement de sa valeur maximale à  $\gamma = 0$ . De la figure IV.26, on observe que le taux de transfert de masse à la surface augmente de sa valeur minimale à  $\gamma = 0$ . En outre, l'augmentation de la réaction chimique favorise le taux de transfert de chaleur à la surface et permet de diminuer le taux du transfert massique.



**Figure IV.25** – Profils du nombre de Nusselt local en fonction de  $\gamma$  pour différentes valeurs de  $n$  à  $Le=1, N=1, (Sr, D_f)=(0.8, 0.2)$ .



**Figure IV.26** – Profils du nombre de Sherwood local en fonction de  $\gamma$  pour différentes valeurs de  $n$ , à  $Le=1, N=1$  et  $(Sr, D_f)=(0.8, 0.2)$ .

## IV Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé, en présence d'une source de chaleur interne, les effets Soret-Dufour et de la réaction chimique, sur la convection naturelle thermosolutale, induite par une plaque à température variable, émergée verticalement dans un milieu poreux saturé de fluide binaire. Les équations aux dérivées partielles résultantes, décrivant le problème, sont transformées en équations différentielles ordinaires en adoptant la méthode de similarité. Les équations adimensionnelles ainsi obtenues sont ensuite résolues numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5, couplée avec la technique itérative de Tir. Plusieurs solutions de similarité ont été obtenues pour déterminer la distribution des champs thermique et de concentration autour de la plaque, ainsi que l'évolution des taux des transferts de chaleur et de masse à sa surface, pour les différents paramètres physiques contrôlant le phénomène. La comparaison des résultats obtenus avec ceux des travaux déjà publiés a été effectuée et les résultats ont été jugés en très bon accord. Les résultats de cette étude nous ont amené aux principales conclusions suivantes :

- La variation du nombre de *Lewis* n'a pas d'effet remarquable sur le transfert de chaleur par convection naturelle et les faibles valeurs de ce nombre permettent d'élargir la couche limite dynamique et favorisent le transfert massique par convection naturelle dans la zone de la couche limite de concentration.
- La dominance des forces de volume d'origine solutale favorise l'écoulement et réduit considérablement les champs thermiques et de concentration près de la surface, comparativement à celles d'origine thermique.
- L'aspiration du fluide conduit à la réduction des couches limites dynamique, thermique et de concentration et permet d'augmenter le taux de transfert thermique au niveau de la surface, contrairement à l'effet de l'injection.
- Il y'a un élargissement de l'épaisseur de la couche limite thermique et réduction de l'épaisseur la couche limite de concentration avec l'augmentation du nombre de *Dufour*  $D_f$ .
- Les profils de la température décroissent légèrement près de la plaque avec l'augmentation du nombre de Soret, tandis que les profils de la concentration s'amplifient.
- Les profils de la concentration se réduisent avec l'augmentation du paramètre de la réaction chimique  $\gamma$ .

- L'augmentation de l'exposant de la température  $\lambda$  réduit considérablement l'épaisseur de la couche limite thermique alors que le champ de concentration n'est pas trop influencé par l'état thermique de la plaque.
- Il y'a une valeur critique du nombre de Soret ( $Sr_c \approx 0.3291$ ) qui correspond à un taux de transfert massique qui ne dépend pas de l'état thermique de la plaque.
- Le taux de transfert de chaleur à la surface de la plaque diminue linéairement lorsqu'on augmente le paramètre de la réaction chimique, tandis que le taux de transfert de masse s'accroît.
- Quand le nombre de Soret augmente, le taux de transfert de chaleur à la surface augmente linéairement, alors que le taux de transfert de masse diminue.
- Le taux de transfert de chaleur à la surface est important en absence de la source de chaleur qu'avec son présence.

# CHAPITRE V

---

## Convection thermosolutale mixte à perméabilité variable

---

### I Introduction

Comme il a été mentionné précédemment, un milieu poreux se caractérise principalement par deux grandeurs physiques macroscopiques qui sont la porosité et la perméabilité. La majorité des études portant sur la convection doublement diffusive, considèrent la perméabilité du milieu poreux en tant que constante, mais dans certaines applications industrielles, tels que les réacteurs catalytiques à lit fixe, les échangeurs de chaleur à lit garni et le séchage, la perméabilité est maximale à la paroi et minimale loin de celle-ci. Des mesures de porosité faites par *Schwartz et Smith* [66], *Tierney et al.* [67] et *Benenati et Brosilow* [68] montrent que la porosité elle aussi n'est pas constante, mais varie de la paroi vers l'intérieur impliquant une variation de la perméabilité.

Dans ce chapitre, on va modéliser les effets de la variation de la perméabilité du milieu poreux, sur la convection thermosolutale mixte au voisinage d'une plaque verticale maintenue à une température non-uniforme, en présence d'une source interne de chaleur qui varie linéairement en fonction de la température.

### II Position du problème

Nous étudions numériquement, les effets de la perméabilité du milieu et de génération interne de chaleur dépendant de la température sur la convection mixte doublement diffusive le long d'une plaque chauffée et intégrée verticalement dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire newtonien. Comme l'on a mentionné dans le quatrième chapitre, la température de la surface  $T_w$  est supposée variable selon la relation :  $T_w = T_\infty + Ax^\lambda$  et supérieure à la température ambiante  $T_\infty$ . La plaque poreuse est soumise à une aspiration ou injection latérale du fluide de vitesse  $V_w(x)$ . Le modèle physique de notre problème est illustré par le schéma représentatif de la figure V.1.

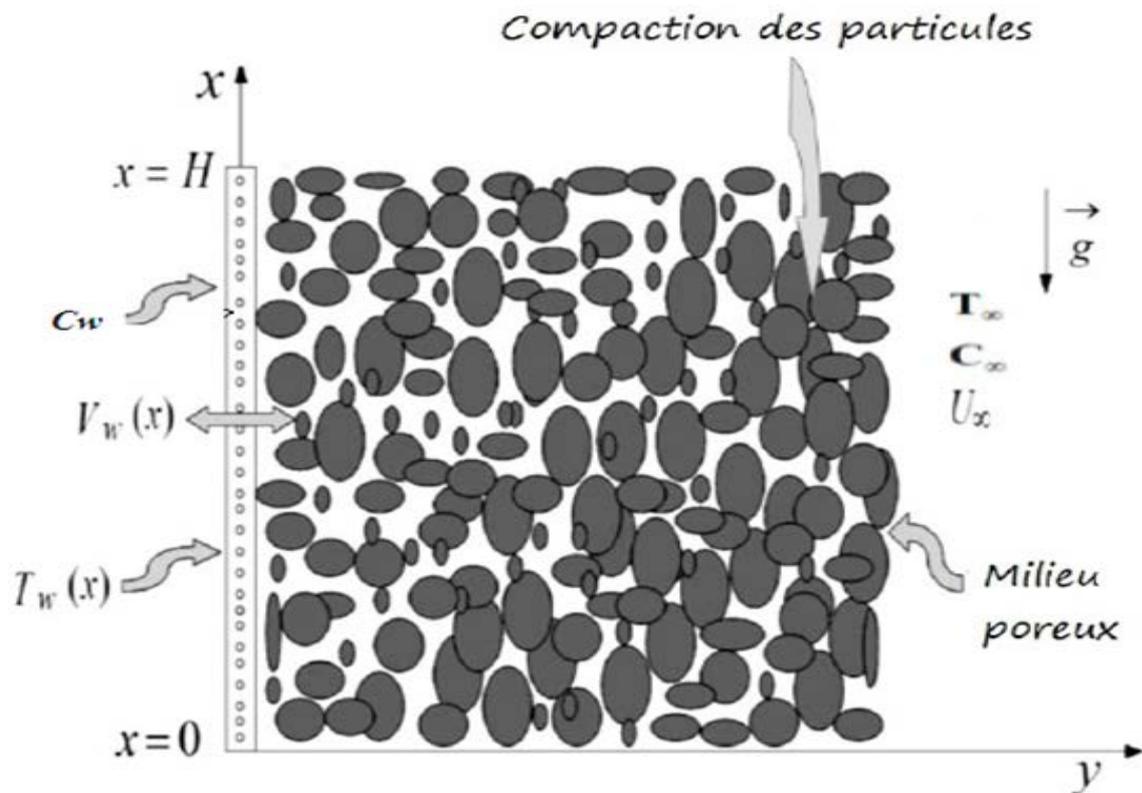


Figure V.1 – Schéma représentatif du modèle physique.

### III Hypothèses

Dans ce chapitre, on considère la majorité des hypothèses simplificatrices citées précédemment, couplés avec l'hypothèse complémentaire ci-après :

- La perméabilité du milieu poreux varie de la surface vers le milieu selon le modèle de Ress et Pop [69] suivant :

$$K(y) = K_{\infty} + (K_w - K_{\infty}) e^{-\frac{y}{L}} \quad (V.1)$$

Avec  $K_w$  représente la perméabilité à la surface,  $K_{\infty}$  est la perméabilité loin de la plaque et  $L$  est une constante.

### IV Modèle mathématique et analyse de similarité

Nous rappelons ici que nous travaillons dans le cas des milieux poreux à faibles vitesses de filtrations (nombre de Reynolds est inférieur à 1) et de faibles valeurs de perméabilité du milieu (pratiquement de l'ordre de  $10^{-8}$ ). Pour ces raisons, nous pouvons négliger le terme

d'inertie et le terme visqueux macroscopique dans l'équation de quantité du mouvement. Par conséquent, les équations de Navier Stokes stationnaires se réduisent à l'équation de Darcy (II.4) après des approximations justifiées.

En tenant compte les hypothèses simplificatrices précédemment mentionnées et de l'approximation de Boussinesq, le modèle mathématique décrivant la convection thermosolutale bidimensionnelle dans un milieu poreux à perméabilité variable, en présence de l'effet Soret et génération interne de chaleur dépendant de la température, s'écrit sous la forme la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u = \frac{K(y)g}{\nu} (\beta_T (T - T_\infty) + \beta_c (C - C_\infty)) \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q}{\rho C_p} (T - T_\infty) \\ u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_M \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_T \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (V.2)$$

Ce modèle est couplé avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, y = 0: v = V_w(x), T = T_w(x), C = C_w \\ x \geq 0, y \rightarrow \infty: u = u_\infty, T = T_\infty, C = C_\infty \end{array} \right. \quad (V.3)$$

Selon *Ress et Pop [69]*, la perméabilité,  $K(y)$  du milieu poreux peut varier selon l'équation :

$$K(y) = K_\infty + (K_w - K_\infty) e^{-\frac{y}{L}} \quad (V.4)$$

Où  $K_w$  est la perméabilité à la surface,  $K_\infty$  est la perméabilité du milieu ambiant et  $L$  est une constante.

En introduisant les variables adimensionnelles (III.4) dans le système (V.2) et en suivant les mêmes démarches mathématiques, décrites dans le chapitre III, nous aboutissons au système d'équations adimensionnelles suivant :

$$\begin{cases} f' - \gamma - (1 + (p-1)e^{-\eta})(\theta + N\phi) = 0 \\ \theta'' + \frac{\lambda+1}{2} f\theta' - (\lambda f' + \delta)\theta = 0 \\ Sr\theta'' + \frac{1}{Le}\phi'' + \frac{\lambda+1}{2} f\phi' = 0 \end{cases} \quad (V.5)$$

Ce modèle adimensionnel est en couplage avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \eta = 0, \quad f = f_w, \quad f' = \gamma + p(\theta + N\phi), \quad \theta = 1, \quad \phi = 1 \\ \eta \rightarrow \infty, \quad f' = 0, \quad \theta = 0, \quad \phi = 0 \end{cases} \quad (V.6)$$

Avec :

$$K(\eta) = K_\infty (1 - (p-1)e^{-\eta}) \quad \text{pour } L = x.Ra_x^{-\frac{1}{2}} \quad (V.7)$$

Où

$K(\eta)$  représente la perméabilité adimensionnelle,  $p = \frac{K_w}{K_\infty}$  est le paramètre adimensionnel de

la perméabilité avec  $p = 1$  correspond à une perméabilité uniforme et  $p > 1$  correspond au cas d'une perméabilité non-uniforme.

$f_w = -2B \left( \frac{\nu}{a g \beta_T K (T_w - T_\infty)} \right)^{1/2}$  est le paramètre d'aspiration/injection à la surface de la

plaque,  $\gamma = \frac{Ra_x}{Pe_x}$  représente le paramètre adimensionnel de la convection mixte où

$Pe_x = \frac{u_\infty x}{a}$  est le nombre de Peclet local et  $Ra_x = \frac{g \beta_T K_\infty (T_w - T_\infty) x}{\nu a}$  le nombre de Rayleigh

local,  $\delta = \frac{Q}{\rho C_p a Ra_x} \frac{x^2}{a Ra_x}$  représente le paramètre du source de chaleur interne et

$u_\infty = \frac{g \beta_T K_\infty (T_w - T_\infty)}{\nu}$  est une vitesse d'écoulement au loin de la surface.

#### IV.1 Nombre de Nusselt et de Sherwood

Comme l'on a détaillé précédemment dans le chapitre III, les nombres de Nusselt local et de Sherwood local caractérisant, respectivement, le taux de transfert de chaleur et le taux de transfert de masse à la surface de la plaque, sont donnés par les expressions suivantes :

$$Nu_x = \frac{x}{(T_w - T_\infty)} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\theta'(0) Ra_x^{1/2} \quad (V.8)$$

$$Sh_x = -\frac{x}{(C_w - C_\infty)} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} = -\phi'(0) Ra_x^{\frac{1}{2}} \quad (V.9)$$

#### IV.2 Technique de résolution numérique

Le système d'équations différentielle d'ordre 2 (V.5) est non-linéaire, sa résolution analytique est encore difficile, pour cela on cherche à la réduire en un système d'équations différentielles ordinaires de premier ordre en adoptant les fonctions suivantes :

$$g_1 = f \quad , \quad g_2 = \theta \quad , \quad g_3 = \theta' \quad , \quad g_4 = \phi \quad , \quad g_5 = \phi' \quad , \quad g_6 = \phi'' \quad (V.10)$$

Donc, le système (V.5) couplé avec les conditions aux limites (V.6) devient équivalent au système d'équations différentielles de premier ordre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} g'_1 = \gamma + (1 + (p-1)e^{-\eta})(\theta + N\phi) \\ g'_2 = g_3 \\ g'_3 = -\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)g_1g_3 + (\lambda g'_1 + \delta)g_2 \\ g'_4 = g_5 \\ g'_5 = g_6 = -Le \left( Sr g'_3 + \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)g_1g_5 \right) \\ \eta = 0 \quad , \quad g_1 = f_w \quad , \quad g'_1 = \gamma + p(g_2 + N g_4) \quad , \quad g_2 = 1 \quad , \quad g_4 = 1 \\ \eta = \infty \quad , \quad g'_1 = \gamma \quad , \quad g_2 = 0 \quad , \quad g_4 = 0 \end{array} \right. \quad (V.11)$$

Le système d'équations différentielles de premier ordre (V.11) ainsi obtenu, est résolu numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 en combinaison avec la technique de Tir, selon l'algorithme général de résolution précédemment décrit à la fin du chapitre III. Puisque nous disposons des conditions initiales sur les fonctions  $g_2$  et  $g_4$ , il serait naturel de chercher les conditions initiales sur les fonctions  $g_3$  et  $g_5$  à  $\eta = 0$  de telle sorte que  $g_2(\infty) = 0$  et  $g_4(\infty) = 0$ .

Pour chaque valeur de l'exposant  $\lambda$ , les valeurs de  $g_3(0)$  et  $g_5(0)$  sont estimées et les équations différentielles du système (V.11) sont intégrées jusqu'à les conditions sur l'état d'équilibre soient satisfaites ( $g_2(\infty) = 0$  et  $g_4(\infty) = 0$ ). Dans le cas où les conditions de l'équilibre sur les fonctions  $g_2$  et  $g_4$  ne sont pas satisfaites, alors la procédure numérique utilise les corrections des deux valeurs estimées pour  $g_3(0)$  et  $g_5(0)$ . Ce processus se répète de manière itérative jusqu'à les conditions à l'infini soient bien vérifiées ( $g_2(\infty) = 0$  et  $g_4(\infty) = 0$ ). Pour tous les états thermiques de la plaque, le pas de la discrétisation choisi est  $\Delta\eta = 10^{-4}$  et a été jugé suffisant pour donner des résultats qui convergent vers la solution à l'état d'équilibre, avec une erreur de l'ordre de  $10^{-6}$  et une distance adimensionnelle de la plaque égale à  $\eta_{max} = 15$ .

## V Analyse des résultats numériques

Dans cette section, nous présentons les résultats des solutions numériques du problème de la convection thermosolutale mixte autour d'une plaque chauffée et insérée verticalement dans un milieu poreux à perméabilité variable près de la plaque et saturé par un fluide binaire, considéré newtonien et incompressible, en présence de l'effet Soret, génération interne de chaleur dépendant de la température et une vitesse d'aspiration ou d'injection du fluide à la surface.

Cependant, seulement les solutions physiques pour l'état thermique de la plaque ont été considérés à savoir :  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1/3$  et  $\lambda = 1$  correspondant, respectivement, à une plaque isotherme, un flux de chaleur uniforme à la surface et une distribution linéaire de la température de surface. Les solutions ont été trouvées pour différentes valeurs du paramètre de la perméabilité ( $p$ ), de la source interne de chaleur ( $\delta$ ) et d'aspiration/injection ( $f_w$ ) qui correspond à l'injection du fluide si  $f_w < 0$ , à l'aspiration du fluide si  $f_w > 0$  et une plaque imperméable lorsque  $f_w = 0$ .

On note également ici que l'importance du régime du transfert par convection naturelle par rapport au régime du transfert par convection forcée se caractérise par le paramètre de la convection mixte  $\gamma$  tel que :  $\gamma < 1$  correspond au régime de la convection forcée,  $\gamma = 1$  correspond au régime de la convection mixte et  $\gamma > 1$  pour le régime de la convection naturelle pure.

Pour la validation du code de calcul développé dans le cadre de la présente thèse, nous présentons dans le tableau V.1, une comparaison de nos résultats avec ceux de *Postelnicu et al. [70]* et *Cortell [71]* en terme du gradient thermique à la surface ( $-\theta'(0)$ ), pour différentes valeurs du paramètre d'aspiration/injection  $f_w$ , dans le cas où la plaque est exposée à un flux de chaleur uniforme ( $\lambda = 1/3$ ). On remarque clairement que toutes les erreurs relatives de nos résultats par rapport aux résultats des auteurs sont très faibles ( $ER_{max} = 0.80\%$ ). Ceci confirme d'avantage la précision de la méthode de résolution numérique utilisée dans ce travail.

$-\theta'(0) = Nu_x \cdot Ra_x^{-1/2}$						
$\lambda$	$f_w$	Présente étude	Postelnicu [70]	Cortell [71]	ER/[70]	ER/[71]
1/3	-1	-0.0663	-0.0662	-0.066178	0.15%	0.17%
	-0.6	-0.00944	-0.0094	-0.009357	0.35%	0.80%
	0.6	0.2877	0.2869	0.286887	0.035%	0.028%
	1	0.4288	0.4289	0.428891	0.023%	0.0022%

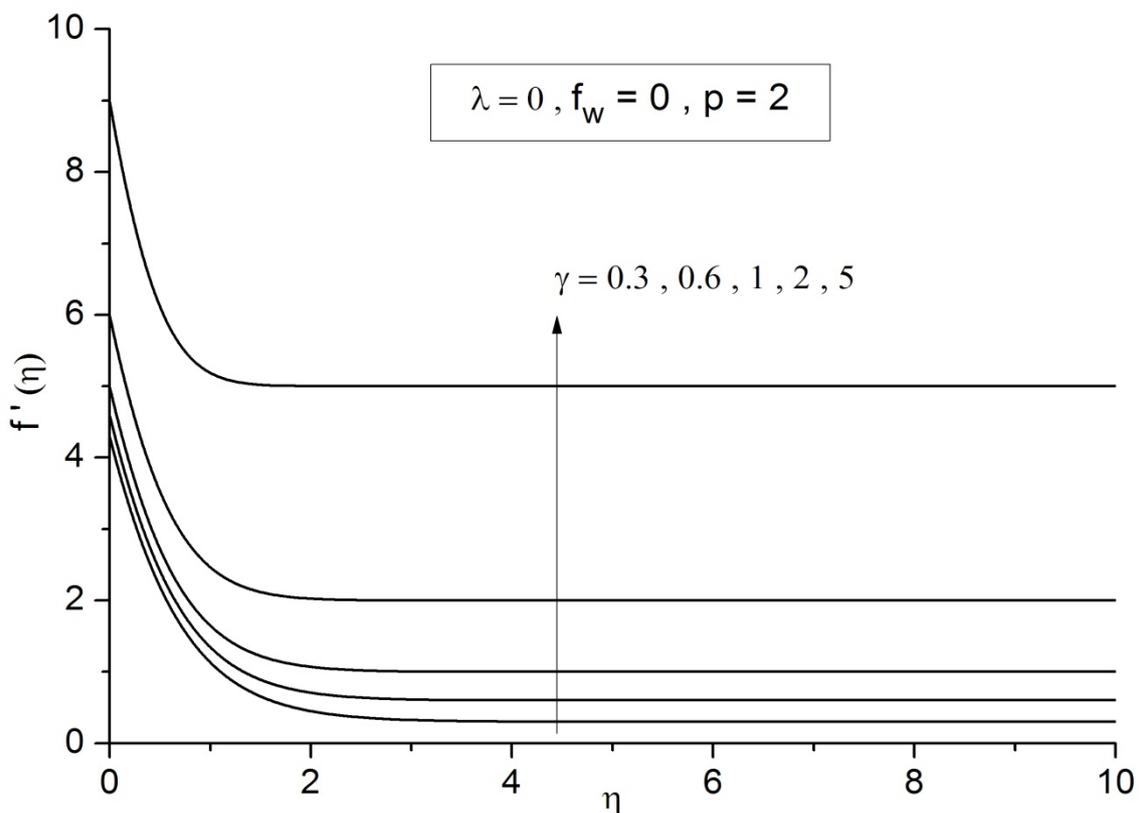
**Tableau V.1** – Valeurs de  $-\theta'(0)$  à la surface sans effet Soret pour  $\lambda=1/3$ ,  $f_w \neq 0$ ,  $\delta=0$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$  et  $p=1$ .

## V.1 Profils de vitesse

### V.1.1 Effet du paramètre $\gamma$

La figure V.2 présente les profils de la vitesse adimensionnelle dans la zone de la couche limite dynamique d'une plaque isotherme et imperméable pour  $p = 2$  et différentes valeurs du paramètre ( $\gamma$ ) contrôlant le régime de transfert par convection. Il est bien

remarquable ici, que les profils dynamiques s'amplifient dans la zone de la couche limite en passant du régime de la convection forcée au régime de la convection naturelle. Ceci montre que la convection naturelle favorise l'écoulement près de la plaque, en comparaison avec la convection forcée qui le défavorise. Cette évolution de la vitesse peut être justifiée d'une part, par la dominance des forces de gravité comparé avec celles d'inerties dans le cas d'un régime de convection naturelle et d'autre part, par l'influence de la perméabilité élevée près de la plaque qui favorise d'avantage l'écoulement dans la zone de la couche limite dynamique. Nous notons aussi qu'on s'éloignant de la plaque, la vitesse tend vers une valeur qui reste constante, égale à sa valeur de l'état d'équilibre ( $f' = \gamma$ ).



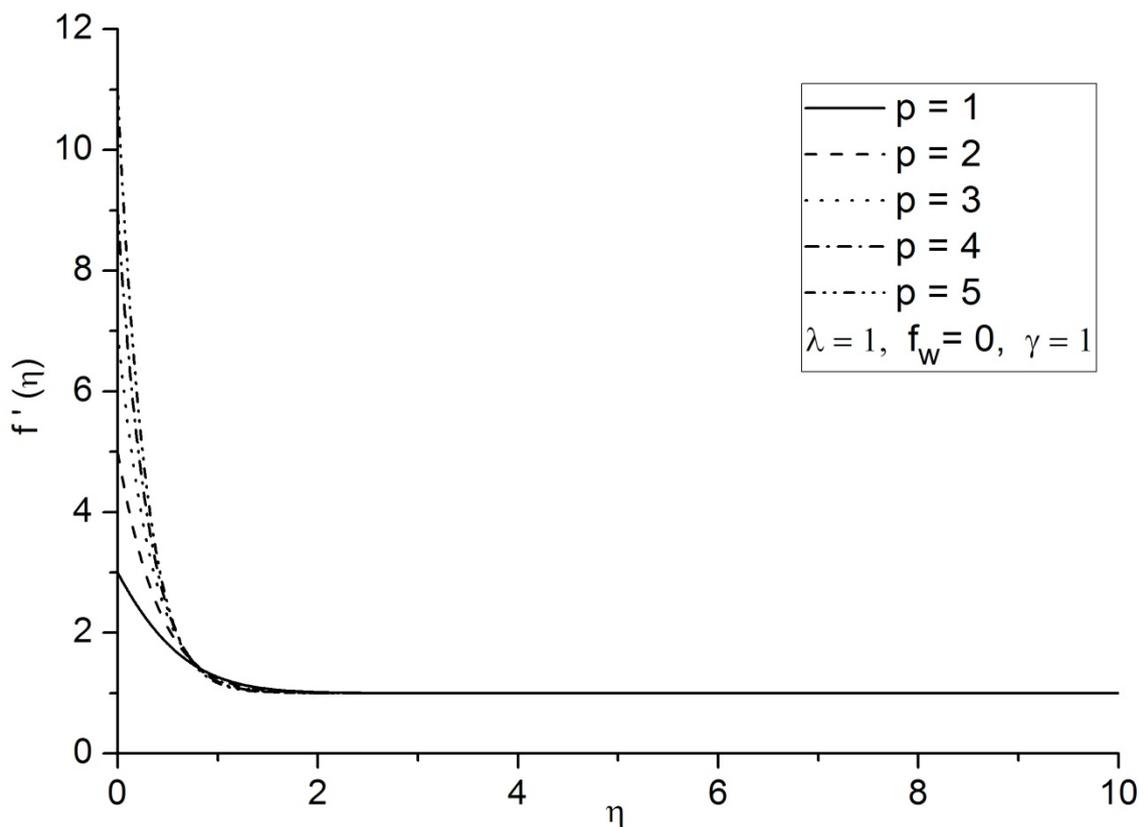
**Figure V.2** – Profils de la vitesse autour d'une plaque imperméable pour  $p = 2$  à différentes valeurs du paramètre  $\gamma$ .

### V.1.2 Effet du paramètre $p$

Le graphe V.3 montre pour  $\gamma = 1$ , l'effet du paramètre de la perméabilité  $p$  du milieu poreux près de la plaque sur la distribution de la vitesse d'écoulement adimensionnelle dans la zone de la couche limite dynamique d'une plaque imperméable, soumise à une distribution linéaire de la température à sa surface ( $\lambda = 1$ ). Ici, on voit clairement que la vitesse

d'écoulement est importante à proximité de la surface lorsque le milieu poreux est plus perméable ( $K_w > K_\infty$ ) en comparaison avec le cas d'un milieu poreux à perméabilité uniforme ( $K_w = K_\infty$ ). En dehors de la couche limite, la perméabilité est uniforme et par conséquent l'écoulement n'est plus sensible à la variation du paramètre  $p$ . On conclut donc que la perméabilité élevée dans la zone de la couche limite dynamique contribue à la favorisation de l'écoulement comparativement au cas de faible perméabilité.

Un autre point remarquable que nous pouvons tirer de cette figure, c'est que pour toutes les valeurs sélectionnées du paramètre de la perméabilité, la vitesse d'écoulement ne s'annule pas en dehors de la zone de la couche limite, mais tous les profils tendent vers un état d'équilibre caractérisée par une vitesse qui est contrôlée par la condition au loin de la plaque ( $f'(\infty) = \gamma$ ).



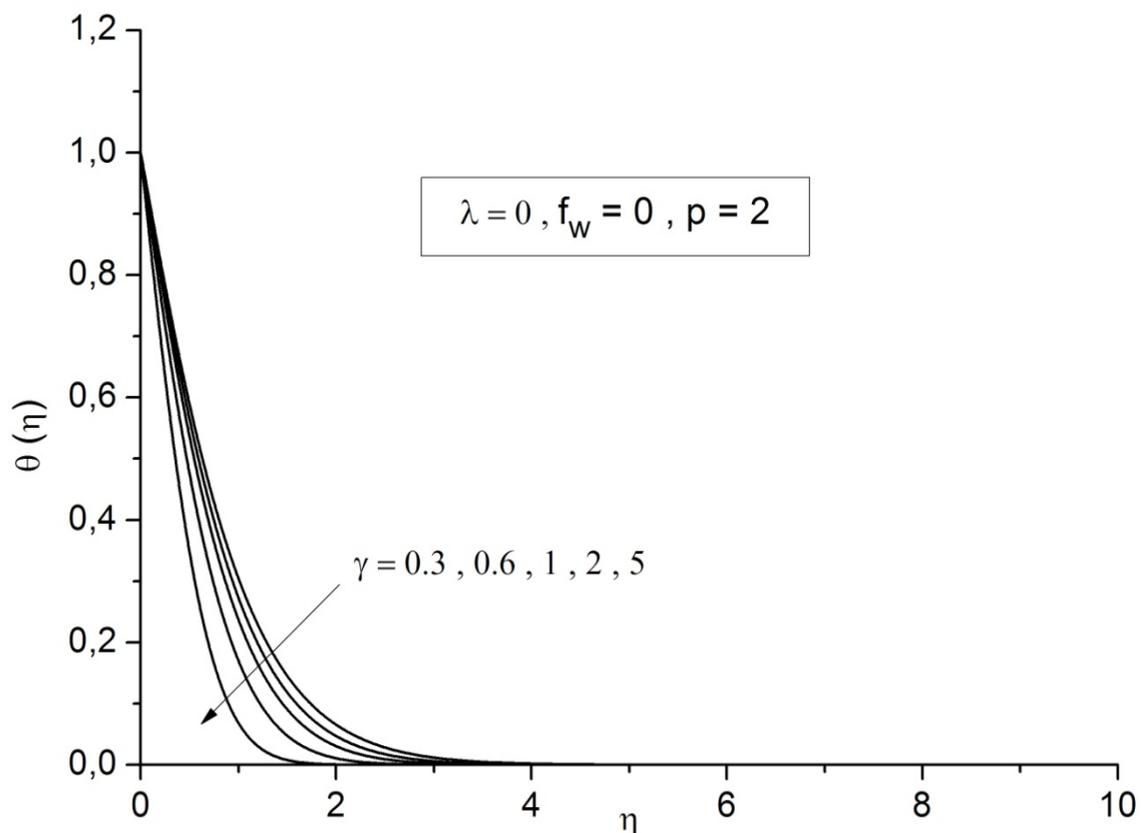
**Figure V.3** – Profils de la vitesse autour d'une plaque imperméable pour  $\gamma = 1$  à différentes valeurs du paramètre  $p$

## V.2 Profils de température

### V.2.1 Effet du paramètre $\gamma$

La figure V.4, présente les profils de la température adimensionnelle dans la zone de la couche limite thermique d'une plaque isotherme et imperméable pour  $p = 2$  et différentes valeurs du paramètre de la convection mixte ( $\gamma$ ). Il est bien remarquable ici, que les profils thermiques s'amplifient d'avantage pour le régime de la convection forcée dominant ( $\gamma < 1$ ) et se réduisent pour le cas où la convection naturelle qui est important ( $\gamma > 1$ ). Ceci est tout à fait logique du fait que l'augmentation des forces de flottabilité pour la convection naturelle ( $\gamma > 1$ ) engendre des vitesses d'écoulement importantes, ce qui conduit au refroidissement rapide observé dans la zone de la couche limite, et par conséquent, implique une réduction dans l'épaisseur de la couche limite thermique.

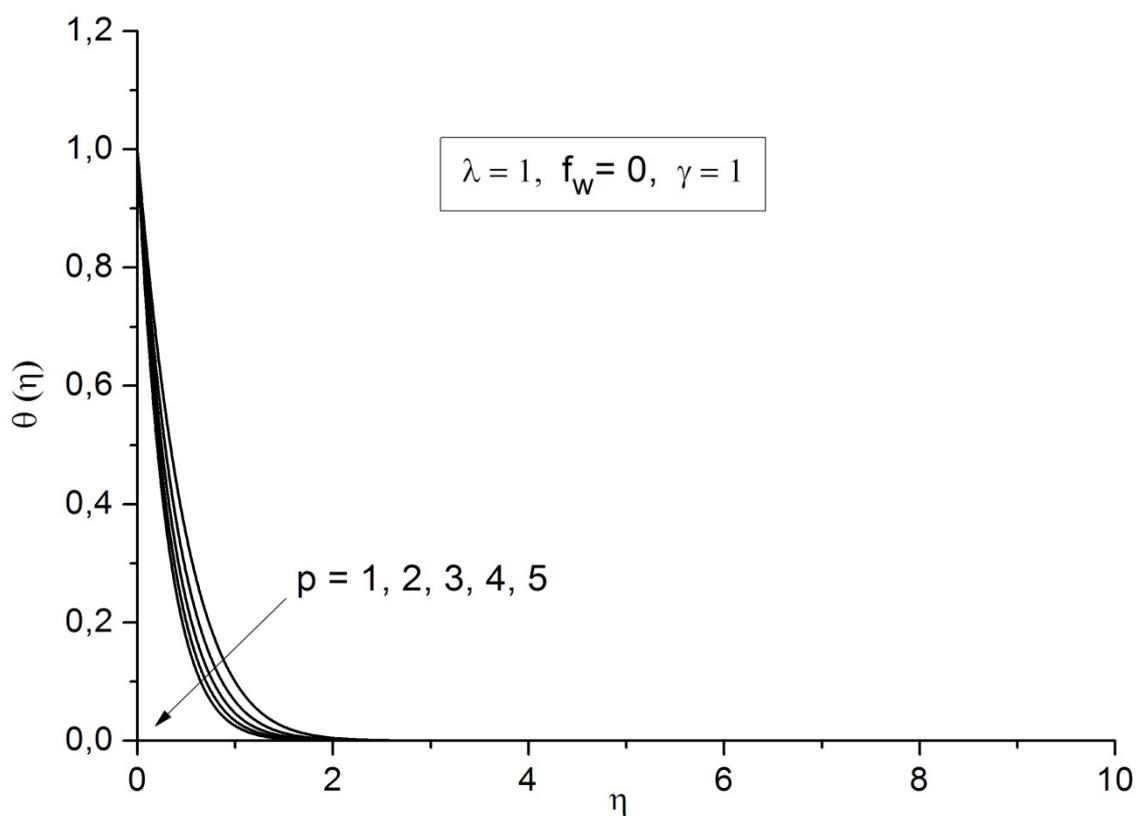
On peut conclure également, que la dominance du régime de la convection forcée permet de favoriser le transfert thermique dans la zone de la couche limite, et par conséquent d'élargir l'épaisseur de la couche limite thermique, contrairement à l'effet de la convection naturelle qui conduit à l'évacuation de la chaleur, et par conséquent conduit à la réduction de cette couche limite.



**Figure V.4** – Profils de la température autour d'une plaque imperméable pour  $p = 2$  à différentes valeurs du paramètre  $\gamma$ .

### V.2.2 Effet du paramètre $p$

L'effet du paramètre de perméabilité  $p$  pour  $\gamma = 1$  sur les profils thermiques adimensionnels, dans la zone de la couche limite d'une plaque imperméable soumise à une distribution linéaire de la température de surface ( $\lambda = 1$ ), est présenté dans la figure V.5. Il est clairement remarquable que l'augmentation de la perméabilité du milieu poreux près de la surface permet de réduire les profils thermiques et par conséquent, conduit à la réduction de l'épaisseur de la couche limite thermique. Autrement dit, la forte perméabilité du milieu poreux permet l'évacuation de la chaleur près de la plaque.



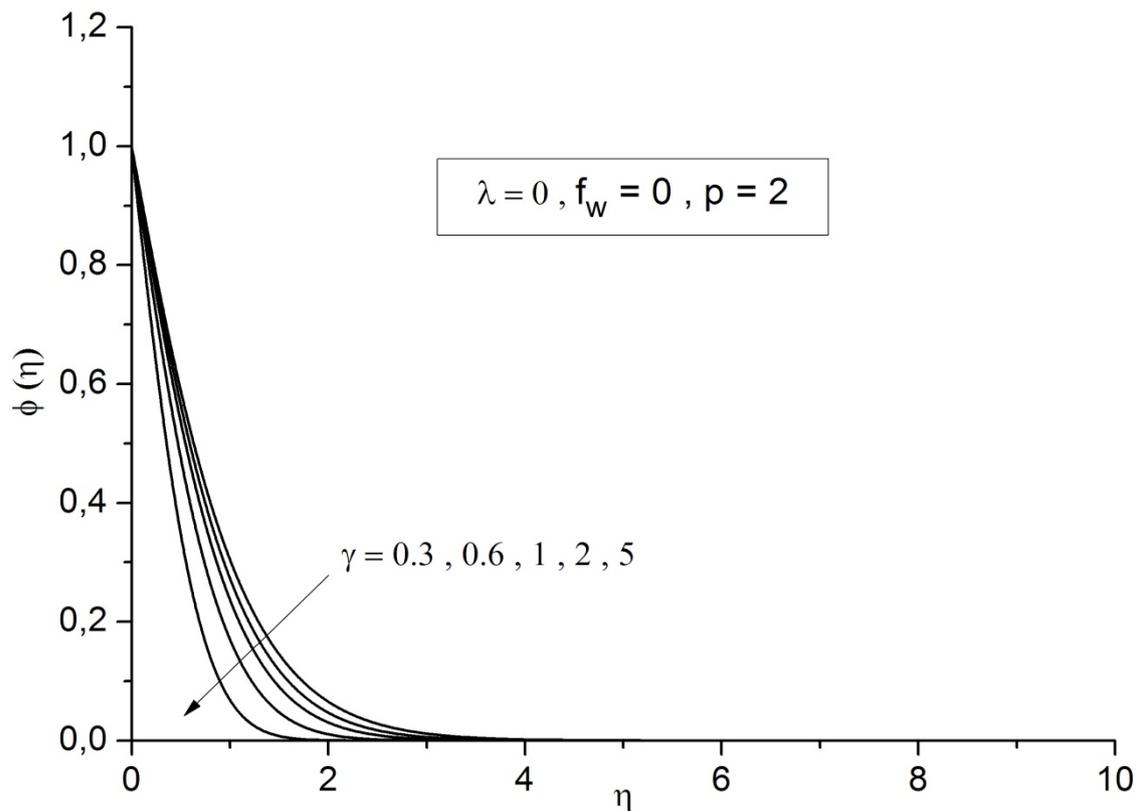
**Figure V.5** – Profils de la température autour d'une plaque imperméable pour  $\gamma = 1$  à différentes valeurs du paramètre  $p$

### V.3 Profils de concentration

#### V.3.1 Effet du paramètre $\gamma$

La figure V.6, présente les profils de la concentration adimensionnelle, dans la zone de la couche limite d'une plaque isotherme et imperméable pour  $p = 2$  et différents valeurs du paramètre  $\gamma$ . Il est bien notable ici que les profils de concentration s'amplifient pour le cas de la convection forcée ( $\gamma < 1$ ) et se réduisent pour le cas de la convection naturelle ( $\gamma > 1$ ). Ceci

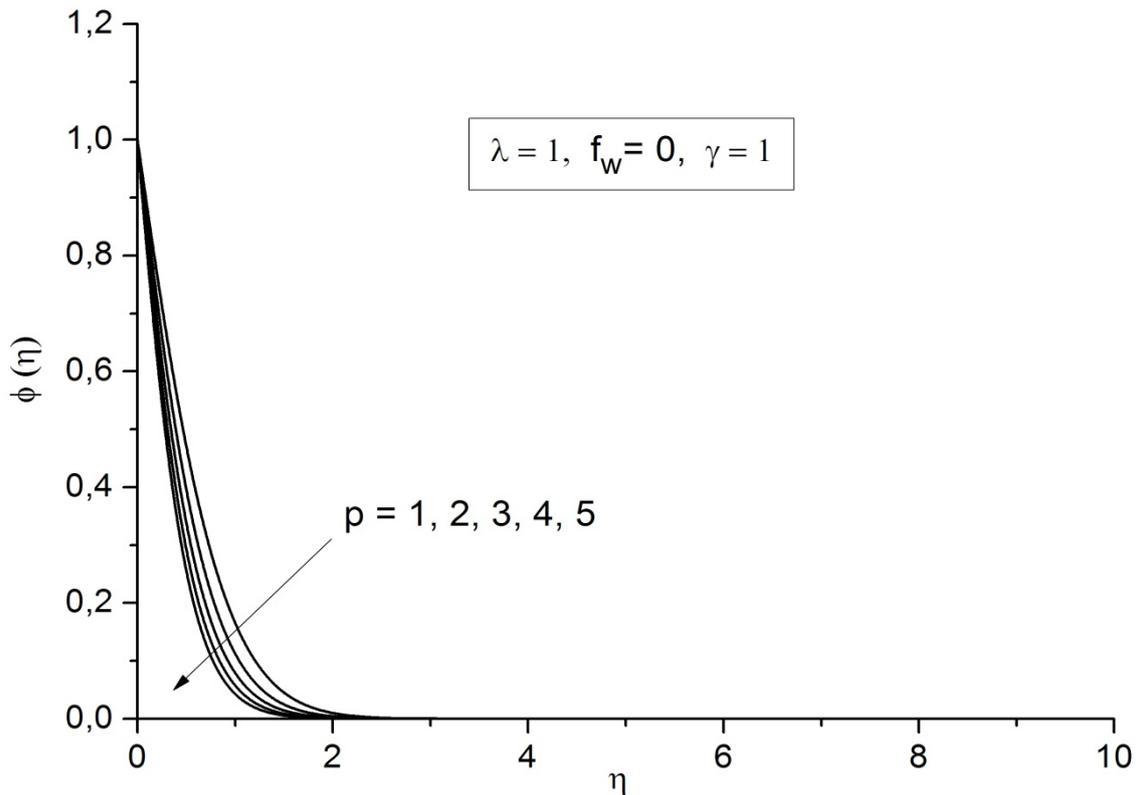
est tout à fait logique du fait que l'augmentation des forces de flottabilité ( $\gamma > 1$ ) engendre des vitesses d'écoulement importantes, ce qui conduit à un transfert rapide de la masse du soluté près de la plaque. Ceci implique une réduction dans l'épaisseur de la couche limite de concentration. On peut conclure également que le régime de la convection forcée permet de favoriser le transfert massique dans le milieu et par conséquent, d'élargir l'épaisseur de la couche limite de concentration, contrairement à l'effet de la convection naturelle qui réduit cette épaisseur de la couche limite.



**Figure V.6** – Profils de la concentration autour d'une plaque imperméable pour  $p = 2$  à différentes valeurs du paramètre  $\gamma$ .

### V.3.2 Effet du paramètre $p$

L'effet du paramètre de perméabilité  $p$ , pour  $\gamma = 1$  sur les profils de concentration adimensionnels dans la zone de la couche limite d'une plaque imperméable pour  $\lambda = 1$  est présenté dans la figure V.7. Il est clairement remarquable que l'augmentation de la perméabilité du milieu poreux près de la surface permet de réduire l'épaisseur de la couche limite de concentration.

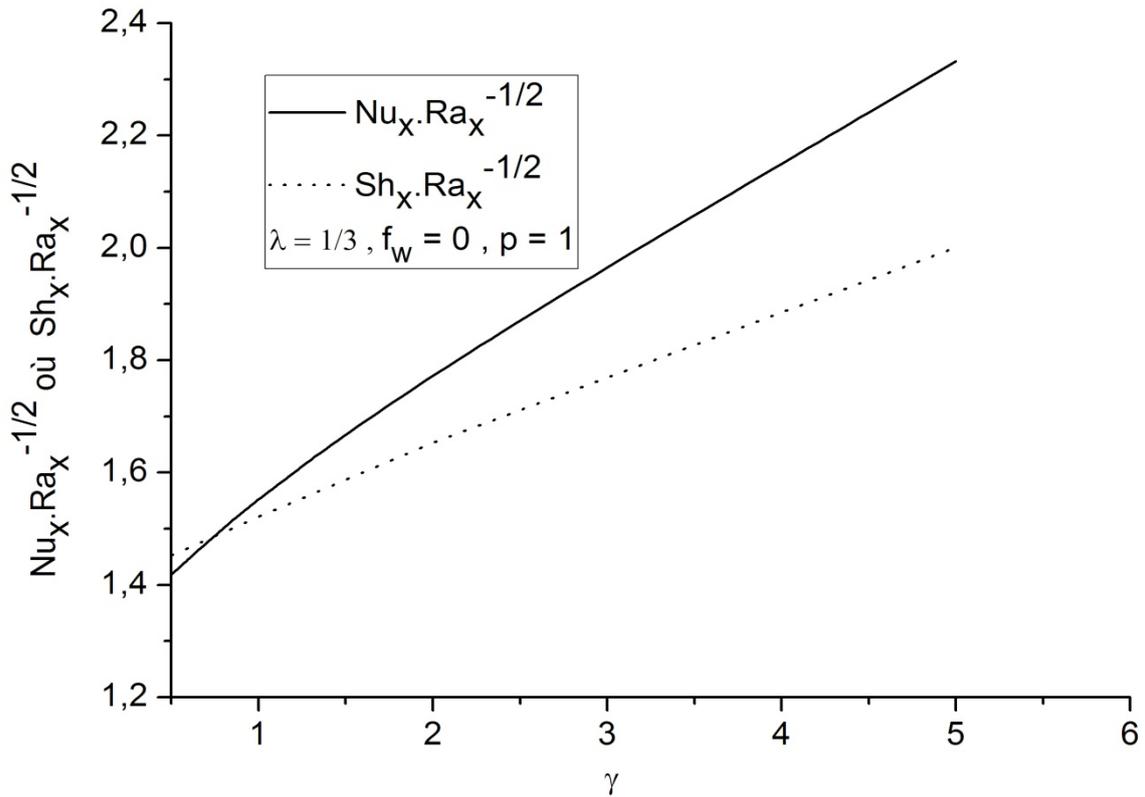


**Figure V.7** – Profils de la concentration autour d’une plaque imperméable pour  $\gamma = 1$  à différentes valeurs du paramètre  $p$

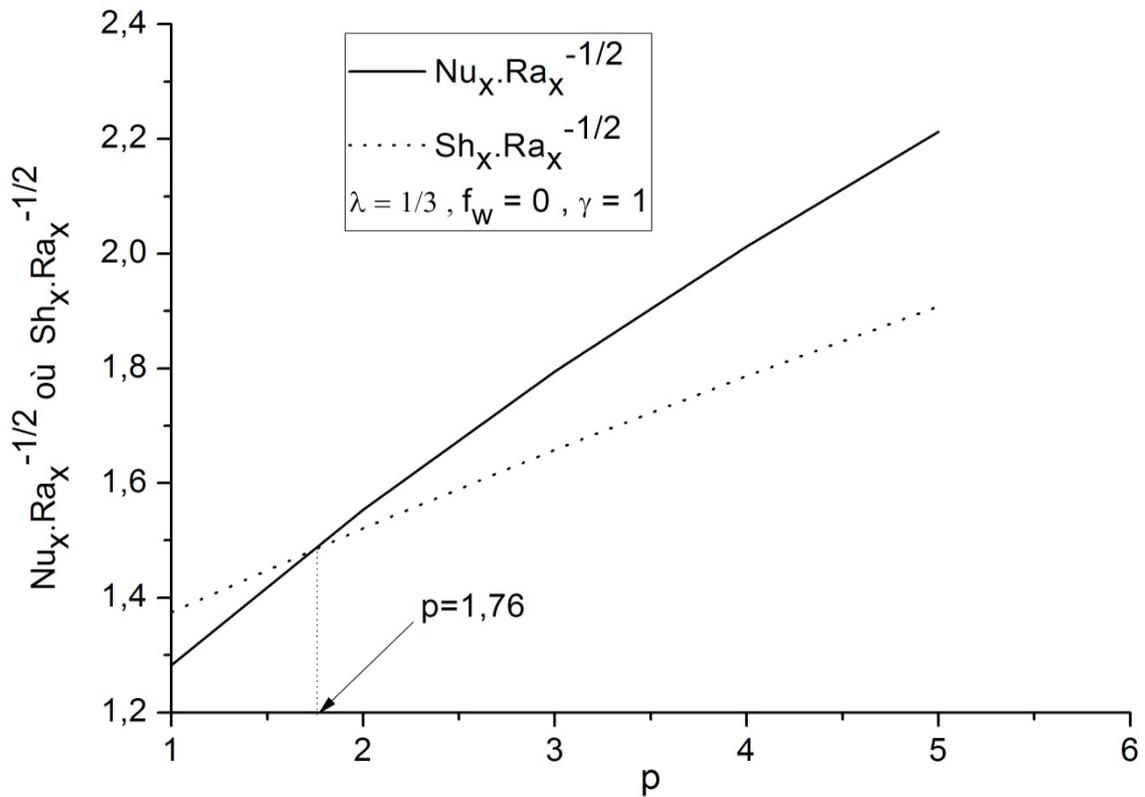
## V.4 Taux des transferts de chaleur et de masse

### V.4.1 Effet des paramètres $\gamma$ et $p$

L’évolution des taux des transferts de chaleur et de masse à la surface d’une plaque imperméable soumise à un flux de chaleur uniforme à sa surface ( $\lambda = 1/3$ ), sans génération de chaleur interne, est présentée sur la figure V.8, pour  $p = 2$  et différentes valeurs de  $\gamma$ , et sur la figure V.9 pour  $\gamma = 1$  et différentes valeurs du paramètre  $p$ . On remarque de la figure V.8, d’une part, que les taux des transferts de chaleur et de masse augmentent presque linéairement en passant de la convection forcée à la convection naturelle et d’autre part, le taux de transfert de chaleur est, généralement, plus important que celui de la masse. De plus, ces taux des transferts à la surface sont toujours positifs, ce qui explique que les transferts par convection se font de la plaque vers le milieu poreux. De la figure V.9, on observe d’un côté, une augmentation des taux des transferts de chaleur et de masse en fonction de l’élévation du paramètre de la perméabilité ( $p$ ) et d’autre côté, lorsque le paramètre  $p$  est inférieur à une valeur critique de 1.76, le taux de transfert de masse est prédominant. Au-delà de cette valeur, c’est le taux de transfert de chaleur devient important.



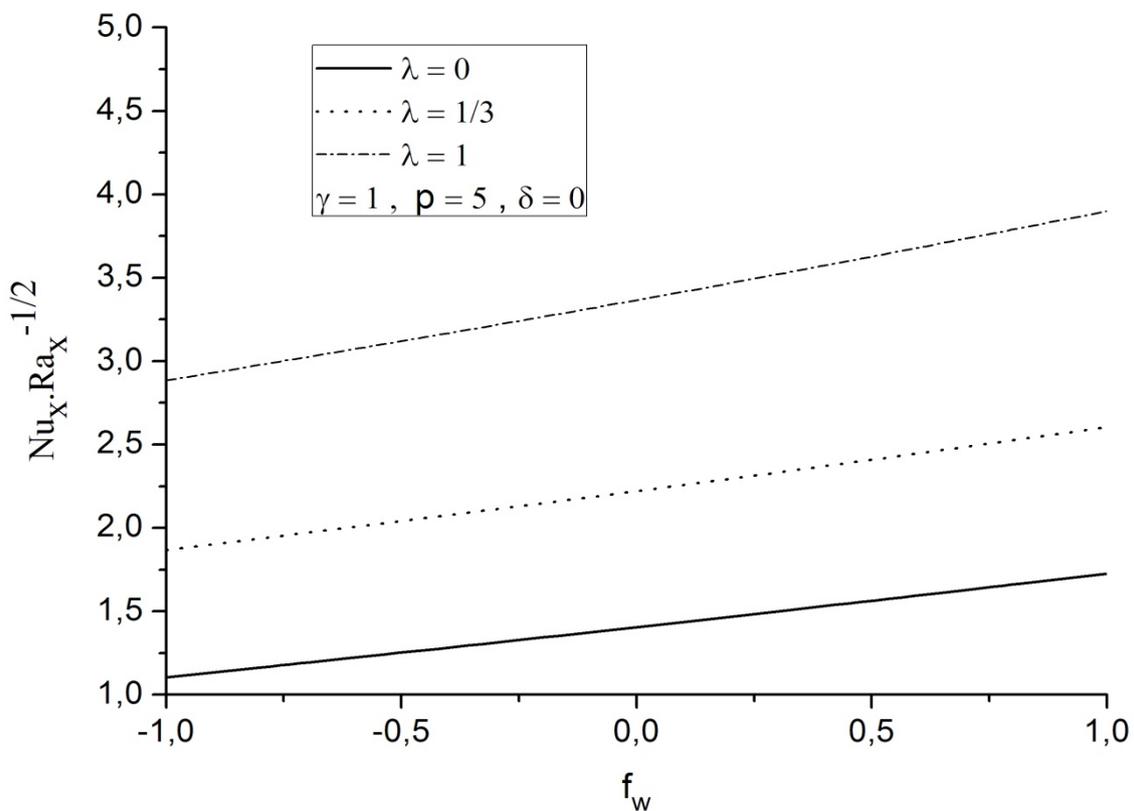
**Figure V.8** – Taux de transfert de chaleur et de masse à la surface de la plaque en fonction du paramètre  $\gamma$  pour  $\lambda = 1/3$  et  $p = 2$ .



**Figure V.9** – Taux de transfert de chaleur et de masse à la surface de la plaque en fonction du paramètre  $p$  pour  $\lambda = 1/3$  et  $\gamma = 1$ .

#### V.4.2 Effet des paramètres $f_w$ et $\lambda$

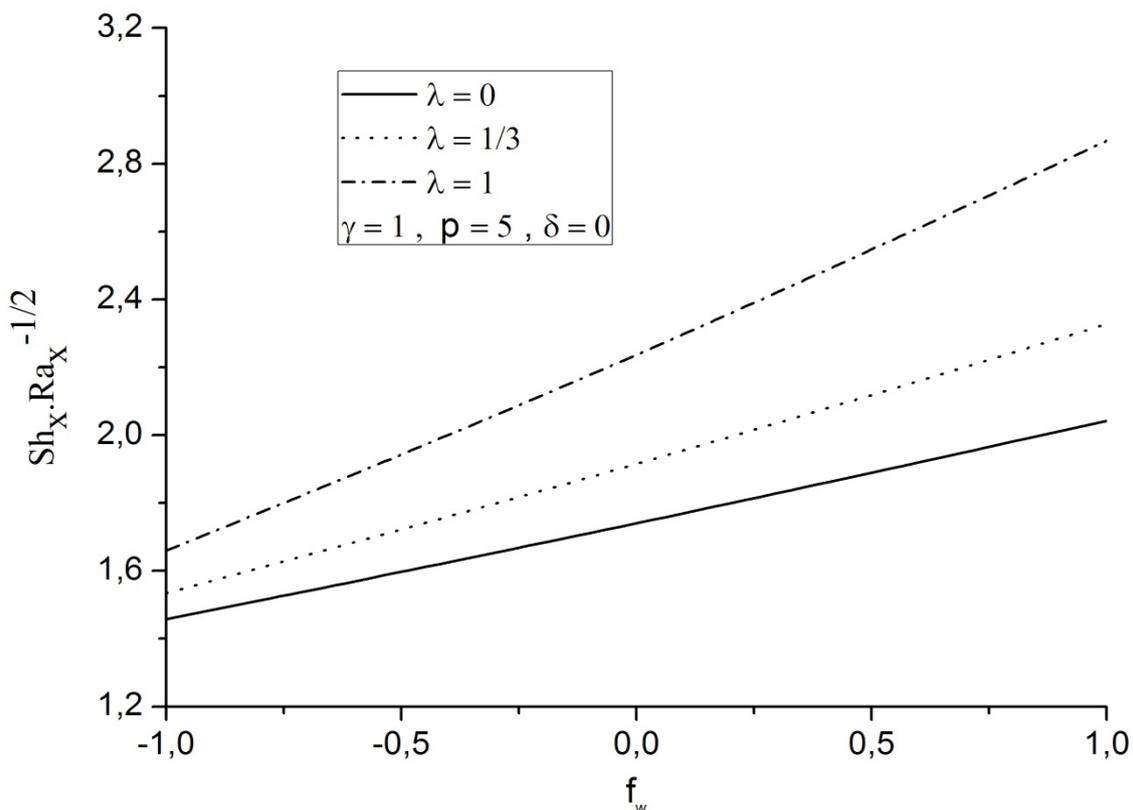
La figure V.10 présente, pour  $\gamma = 1$  et  $p = 5$ , l'évolution du taux de transfert de chaleur à la surface de la plaque en fonction du paramètre d'aspiration/injection pour les trois états thermiques de la plaque, en absence de la source interne de chaleur ( $\delta = 0$ ). Il est bien remarquable que l'injection du fluide permet de diminuer le taux de transfert de chaleur à la surface, tandis que l'aspiration le favorise d'avantage pour les trois états thermiques de la plaque. De plus, ce taux de transfert à la surface augmente en passant du cas d'une plaque isotherme au cas d'une plaque à distribution linéaire de la température de surface.



**Figure V.10** – Taux de transfert de chaleur à la surface en fonction du paramètre  $f_w$  pour trois états thermiques de la plaque à  $\gamma = 1$  et  $p = 5$

La figure V.11 présente pour  $\gamma = 1$  et  $p = 5$ , l'évolution du taux de transfert de masse à la surface de la plaque en fonction du paramètre d'aspiration/d'injection pour les trois états thermiques de la plaque, en absence de la source interne de chaleur ( $\delta = 0$ ). On remarque que l'injection du fluide permet de diminuer le taux de transfert massique à la surface tandis que l'aspiration l'amplifie pour les trois états thermiques de la plaque. De plus, ce taux de transfert

de masse à la surface augmente en passant du cas d'une plaque isotherme au cas d'une plaque à distribution linéaire de la température de surface.



**Figure V.11** – Taux de transfert de masse à la surface en fonction du paramètre  $f_w$  pour trois états thermiques de la plaque à  $\gamma = 1$  et  $p = 5$

#### V.4.3 Effets des paramètres $\delta$ et $Sr$

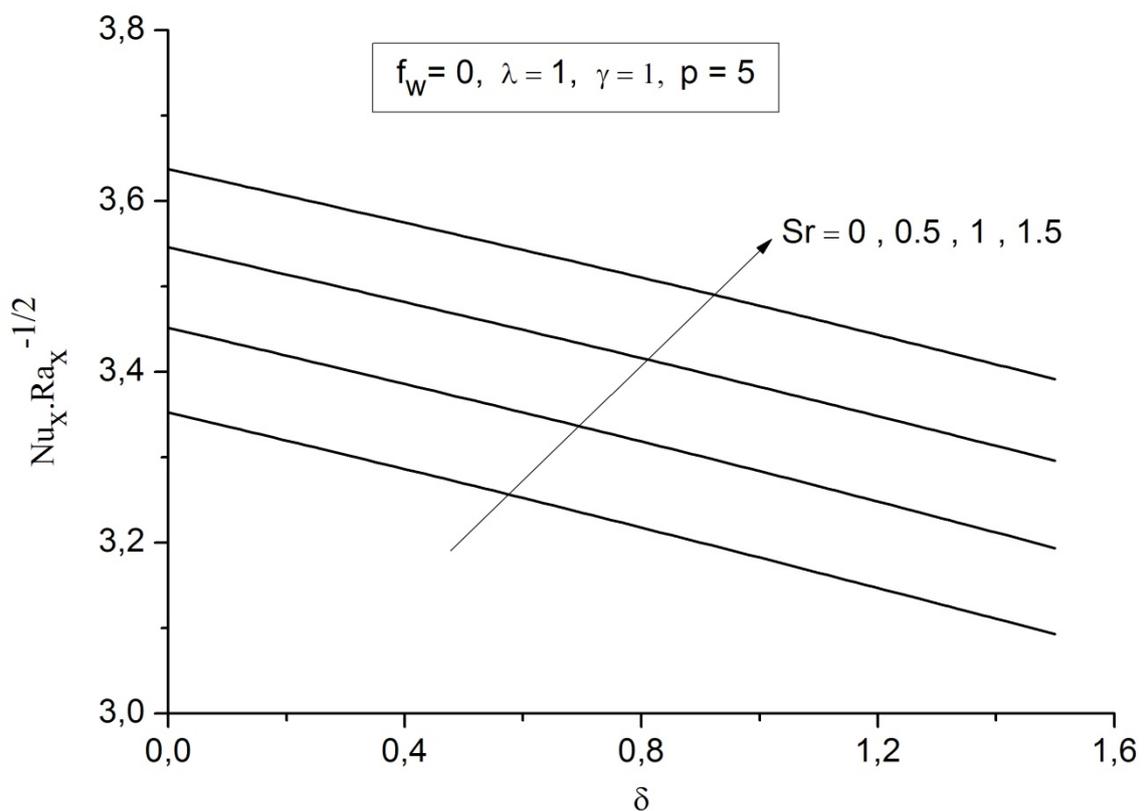
Les figures V.12 et V.13 décrivent pour  $\gamma = 1$  et  $p = 5$ , l'évolution du taux de transfert de chaleur et le taux du transfert de masse, respectivement, en fonction du paramètre de la source interne de chaleur ( $\delta$ ) et pour différentes valeurs du nombre de Soret, au niveau d'une plaque imperméable, soumise à une distribution linéaire de la température de surface ( $\lambda = 1$ ).

On constate à partir de la figure V.12, que le taux du transfert de chaleur décroît d'une façon linéaire en fonction de l'augmentation du paramètre  $\delta$  et s'amplifie en fonction de l'importance de l'effet Soret. D'un point de vue physique, ceci peut être justifié, d'une part, par l'amplification de la température en tout point près de la plaque grâce à la présence d'une source interne de chaleur dans le mélange, ce qui induit, évidemment, une décroissance du gradient thermique à la surface et d'autre part, par la contribution de l'effet Soret à la réduction de la couche limite thermique, conduisant à l'amplification du gradient thermique à la surface. On remarque aussi que le taux de transfert de chaleur est toujours positif, ce qui

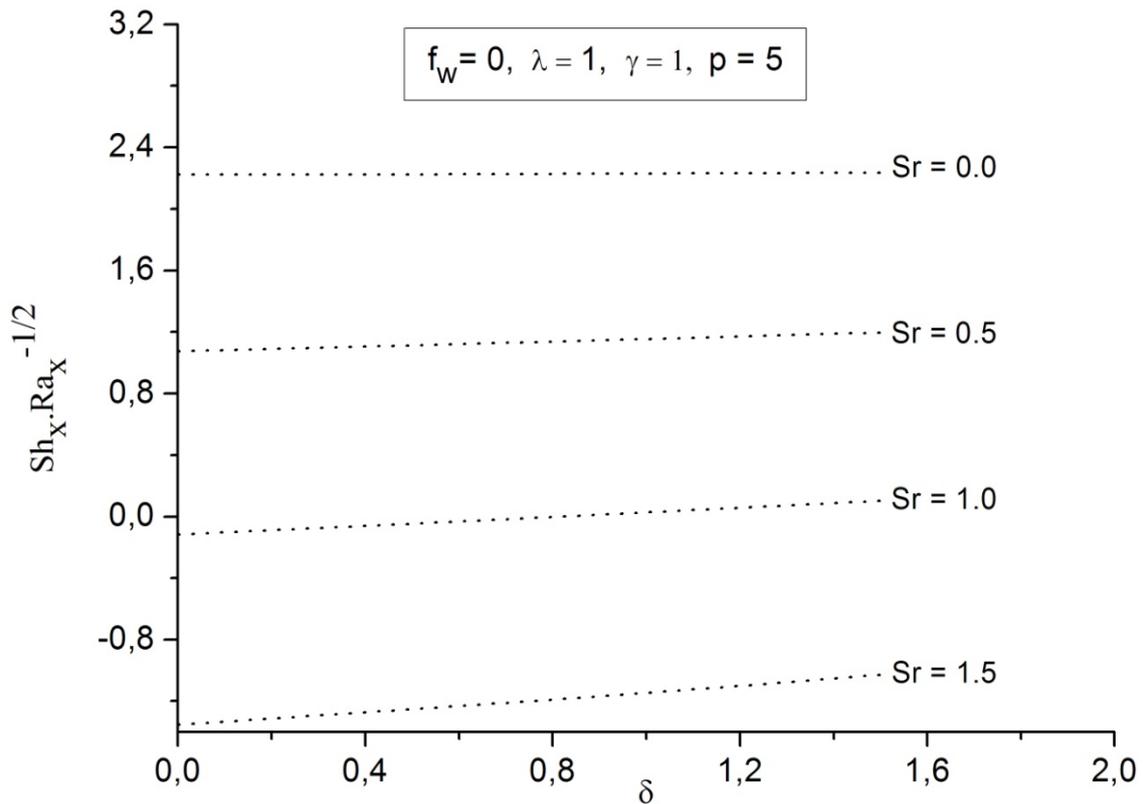
implique un transfert thermique s'effectuant de la plaque vers le milieu poreux pour toutes les valeurs sélectionnées des paramètres ( $\delta$ ) et ( $Sr$ ).

A partir de la figure V.13, on remarque, d'un côté, que le taux de transfert de masse à la surface est, pratiquement, n'est pas influencé par la variation du paramètre de la source interne de chaleur, notamment pour les faibles valeurs du nombre de Soret. D'un autre côté, ce taux de transfert massique décroît en fonction de l'importance de l'effet Soret dans le mélange, de tel sorte qu'il devient négatif quand le nombre de Soret dans le mélange est plus significatif ( $Sr > 1$ ), indiquant un sens de transfert massique qui s'effectue dans le sens opposé (du milieu poreux vers la plaque). Physiquement, cette évolution du taux de transfert massique en fonction de l'effet Soret, est bien justifiée par l'influence du flux massique généré par le gradient thermique permettant d'amplifier la concentration au voisinage de la surface et par conséquent, conduit à la décroissance du gradient massique au niveau de la plaque.

On note également, que le taux du transfert de chaleur est toujours plus important que le taux du transfert de masse.



**Figure V.12** – Taux de transfert de chaleur à la surface de la plaque en fonction de  $\delta$  pour  $\gamma = 1$ ,  $p = 5$ ,  $\lambda = 1$  et différentes valeurs de  $Sr$ .



**Figure V.13** – Taux de transfert de masse à la surface de la plaque en fonction de  $\delta$  pour  $\gamma = 1$ ,  $p = 5$ ,  $\lambda = 1$  à différentes valeurs de  $Sr$ .

## VI Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié numériquement et dans diverses situations, le problème de la convection thermosolutale naturelle et mixte autour d'une plaque à température variable, insérée verticalement dans un milieu poreux saturé, de perméabilité non uniforme, en présence de l'effet Soret et de la génération interne de chaleur. Les équations aux dérivées partielles résultantes, décrivant le problème, sont transformées en équations différentielles ordinaires adimensionnelles en adoptant la méthode de similarité. Ces équations sont ensuite résolues numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 couplée avec la technique de Tir. Des solutions physiques ont été obtenues pour déterminer la structure de l'écoulement et la distribution des champs thermique et de concentration autour de la plaque, ainsi que l'évolution des taux des transferts de chaleur et de masse à sa surface, en fonction de la perméabilité variable et du régime de transfert convectif. La comparaison des résultats obtenus avec ceux des travaux déjà publiés a été effectuée et les

résultats ont été jugés en très bon accord. Les résultats de cette étude nous ont amené aux principales conclusions suivantes :

- La convection naturelle permet de favoriser l'écoulement du fluide tout près de la plaque, contrairement à l'effet de la convection forcée.
- L'augmentation de la perméabilité du milieu poreux près de la surface ( $K_w > K_\infty$ ), permet d'amplifier la vitesse d'écoulement et de réduire les épaisseurs des couches limites thermique et de concentration, en comparaison avec le cas d'un milieu poreux à perméabilité uniforme.
- La non-uniformité de la perméabilité du milieu poreux fait augmenter les taux des transferts de chaleur et de masse à la surface.
- La convection forcée ( $\gamma < 1$ ) amplifie les profils de température et de concentration autour de la plaque et favorise le transfert massique dans le mélange, contrairement à l'effet de la convection naturelle.
- Les taux des transferts de chaleur et de masse augmentent en passant de la convection forcée à la convection naturelle, et le taux de transfert de chaleur à la surface est plus important que le taux de transfert massique.
- Pour les trois états thermiques de la plaque, l'injection du fluide diminue les taux des transferts de chaleur et de masse à la surface, tandis que l'aspiration les favorise.
- En présence de la source de chaleur interne, le taux de transfert thermique décroît linéairement en fonction du paramètre  $\delta$  et s'accroît avec l'augmentation de l'effet Soret.
- La variation du paramètre de la source de chaleur interne n'a pas d'effet remarquable sur le taux de transfert de masse à la surface.

# CONCLUSION GENERALE

Dans cette thèse, nous avons réalisé, en régime laminaire et stationnaire, une étude de la convection thermosolutale avec l'effet Soret dans milieu poreux saturé de fluide binaire, considéré Newtonien et incompressible. La configuration géométrique utilisée est assimilée une plaque plane poreuse en position verticale dans le milieu poreux, de température variable et concentration constante, et soumise à un flux latéral d'aspiration ou d'injection de fluide.

La modélisation mathématique du problème posé est basée sur la mise en œuvre des équations de conservation de la mécanique des fluides (de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie et de concentration) en tenant compte de l'approximation de Boussinesq et de la loi de Darcy. Par ailleurs, nous avons développé un modèle mathématique bidimensionnelle, basé sur une approche semi-analytique dite de similarité. Ce modèle intègre de nombreuses influences comme les effets Soret-Dufour, la source de chaleur interne, l'état thermique de la plaque, la réaction chimique destructive, l'anisotropie du milieu poreux en perméabilité et le régime du transfert convectif. Le modèle obtenu résulte suite à des hypothèses simplificatrices et des transformations mathématiques, aboutissant à un système d'équations différentielles non linéaires et adimensionnelles de deuxième ordre avec des conditions aux limites appropriées. La résolution numérique est basée sur la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 couplée avec la technique itérative de Tir. Uniquement les solutions d'aspect physique ont été considérés pour l'exposant de température de la plaque tel que :  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1/3$  et  $\lambda = 1$  correspondant, respectivement, aux états thermiques : plaque isotherme, flux thermique uniforme à la surface, distribution linéaire de la température de surface. Plusieurs paramètres contrôlant la convection thermosolutale ont été introduits à savoir : le nombre de Soret, le nombre Dufour, le nombre de Lewis, le rapport des forces de volume, l'exposant de la température, le paramètre d'aspiration/injection du fluide, le paramètre de la perméabilité et le paramètre de la convection mixte. Les effets de ces paramètres sur la distribution de la vitesse, de la température et de la concentration dans les couches limites, ainsi que sur l'évolution des taux des transferts de chaleur et de masse à la surface de la plaque ont été graphiquement présentés et discutés dans ce travail. La confrontation de certains résultats avec ceux déjà publiés a été réalisée et une excellente concordance a été remarquée.

Les principaux résultats dégagés de la présente étude peuvent être récapitulés comme suit :

- La variation du nombre de *Lewis* n'a pas d'effet remarquable sur le transfert de chaleur par convection et les faibles valeurs de ce nombre permettent d'élargir la couche limite dynamique et favorisent le transfert massique par convection naturelle dans la zone de la couche limite de concentration.
- La dominance des forces de volume d'origine solutale favorise l'écoulement et réduit considérablement les épaisseurs des couches limites thermique et massique, comparativement à celles d'origine thermique.
- L'aspiration du fluide conduit à la réduction des couches limites dynamique, thermique et solutale et permet d'augmenter le taux de transfert thermique au niveau de la surface, contrairement à l'effet de l'injection.
- En présence de la source interne de chaleur, le transfert massique diminue avec l'injection et croît avec l'aspiration.
- Les profils thermiques se réduisent légèrement près de la plaque en fonction de l'importance de l'effet Soret, tandis que les profils de concentration s'amplifient.
- Quand l'effet Soret devient significatif dans le mélange, le taux de transfert de chaleur à la surface augmente linéairement, alors que le taux de transfert de masse diminue.
- La réaction chimique dans le mélange réduit à la fois les profils de concentration et le taux de transfert de chaleur à la surface, et permet d'amplifier le taux de transfert massique.
- La convection forcée amplifie les profils de température et de concentration autour de la plaque et favorise le transfert massique dans le milieu, contrairement à l'effet de la convection naturelle.
- Les taux des transferts de chaleur et de masse au niveau de la plaque augmentent en passant de la convection forcée à la convection naturelle, et le taux de transfert de chaleur est plus important que celui de transfert massique
- Pour les trois états thermiques de la plaque, l'injection du fluide fait diminuer les taux des transferts de chaleur et de masse à la surface, tandis que l'aspiration les favorise.

- Les taux des transferts de chaleur et de masse à la surface augmentent en fonction de l'augmentation de l'exposant de la température  $\lambda$ .
- Le taux de transfert thermique décroît linéairement en fonction de la source de chaleur interne et s'accroît avec l'importance de l'effet Soret.
- La source de chaleur interne n'a pas d'effet remarquable sur le taux de transfert de masse à la surface, lorsque l'effet Soret est important dans le mélange.

### **Perspectives :**

Dans le présent travail, le modèle mathématique développé est basé sur des hypothèses simplificatrices. Afin de mieux valoriser ce modèle, il serait souhaitable d'effectuer des mesures expérimentales sur des applications pratiques.

L'extension de l'étude à d'autres phénomènes physiques liés à l'instationnarité d'écoulement, la nature du fluide (fluide non newtonien), ainsi que l'intégration des termes d'inertie, de viscosité, d'orientation de la plaque, des perturbations singulières générées au voisinage de la paroi qui se manifestent dans le cas de forte aspiration du fluide, nous semble pourtant avoir un intérêt réel.

En outre, dans des applications réelles, les milieux poreux sont anisotropes et les transferts couplés de chaleur et de masse interagissent. L'étude de l'influence des effets d'anisotropie en conductivité thermique du milieu poreux est hautement recommandée.

## REFERENCES

- [1] A. Al bitar. Modélisation des écoulements en milieu poreux hétérogènes 2D/3D, avec couplages surface/souterrain et densitaires., These de doctorat de l'institut national polytechnique de toulouse 2007.
- [2] H. Korsching and K. Wirtz, Zur trennung von flussigkeisgemischen im clusiuschen trennröhr (tennung der zinkisotope), *Naturwissenschaften*, 35, 20(1939), 367-368.
- [3] M. Kaviany. Principles of heat transfer in porous media, Springer, New York, 1995.
- [4] P. Carman. Fluid flow through a granular bed, *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 15, (1937), 150-167.
- [5] S. Ergun. A. A. Orning, Fluid flow through packed columns, *Chemical Engineering Progress.*, 48, (1952), 89-94.
- [6] D. A. Nield, A. Bejan. Convection in porous media, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [7] D. Pont. Lien entre la perméabilité et l'endommagement dans les bétons à haute température. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris. 2004.
- [8] C. Moyne, S. Didierjean, H. P. A. Souto and O. T. Silveira. Thermal Dispersion in Porous Media, One-Equation Model, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 43, (2000), 3853-3867.
- [9] J. G. Berryman, Comparison of Upscaling Methods in Poroelasticity and Its Generalizations, *J. Eng. Mech.*, 131, 9(2005), 928-936.
- [10] S. Whitaker. Flow in Porous Media III, deformable Media, *Transport in Porous Media*. 1, (1986), 127- 154.
- [11] W. Jomaa. Séchage de matériaux fortement déformables, prise en compte de la vitesse de retrait. Thèse de l'Université de Bordeaux I, France, 1991.
- [12] N. Puirox, M. Prat, M. Quintard, Non-equilibrium Theories for Macroscale Heat Transfer, Ablative Composite Layer Systems, *International Journal of Thermal Sciences*, 43, (2004), 541-554.

- [13] N. Zabararas, D. Samanta. A Stabilized Volume-Averaging Finite Element Method for Flow in Porous Media and Binary Alloy Solidification Processes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60, 5(2004), 1-38.
- [14] M. M. Y. Delmi, A. Ait-Mokhtar and O. Amiri. Modeling the Coupled Evolution of Hydration and Porosity of Cement-Based Materials, *Construction and Building Materials*, 20, (2006), 504-514.
- [15] C. Body. *Les échangeurs de chaleur par convection (1ère partie)*, Ed. Bordas/Mouton, Paris, 1968.
- [16] C. Ludwig. Diffusion zwischen ungleich erwarmten Orten gleich zusammengesetzter, 20, (1856), pp 539.
- [17] C. Soret. Influence de la température sur la distribution des sels dans leurs solutions. *Compte-Rendu de l'Académie des Sciences Paris*. 91, (1880), 303-384.
- [18] C.Soret. Sur l'état d'équilibre que prend, au point de vue de sa concentration, une dissolution saline primitivement homogène, dont deux parties sont portées à des températures différentes. *Arch. Sci. Phys. Nat.*, 2, 1881.
- [19] Lorenz, M., et A. H. JR. Emery. The packed thermal diffusion. *Column Chemical Engineering Science*, 11, (1959), 16-23.
- [20] K. Clusius et G. Dickel, *Neues Verfahren zur Gasentmischung und Isopentrennung*, *Naturwiss.*, 26, (1938), pp 546.
- [21] W. H. Fury, R. C. Jones et L. Onsager. "On the Theory of Isotope Separation by Thermal Diffusion", *Phys. Rev.* 55, (1939), p. 1083-1095.
- [22] D. A. Nield, A. Bejan. *Convection in porous media*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [23] A. Brandt, H. Fernando. *Double Diffusive Convection*, Amer Geophysical Union. 1995.
- [24] D. A. Nield. Onset of thermohaline convection in porous medium. *Water Resources Research*, 4, (1968), 553 – 560.

- [25] O.V. Trevisan, A. Bejan. Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in a porous medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 28, (1985), 8.
- [26] O. V. Trevisan et A. Bejan. Mass and heat transfer by high Rayleigh number convection in a porous medium heated from below. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30, (1987), 2341-2356.
- [27] J. Y. Jang et W. J. Chang. The flow and the vortex instability of horizontal natural convection in porous medium resulting from combined heat and mass buoyancy effects. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 31, (1988), 769-777.
- [28] F. Chen et C. F. Chen, Double – diffusive fingering convection in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 36, (1993), 793-807.
- [29] B. T. Murray, C. F. Chen. Double diffusive convection in a porous medium. *Journal of Fluid Mechanics*, 201, (1989), 147 – 166.
- [30] S. K Rastogi, D. Poulikakos. Double Diffusion from a Vertical Surface in a Porous Region saturated with a non Newtonian fluid, *Inter. Jour. Heat and Mass Transfer*. 38, N°5, (1995), 935-946.
- [31] M. Mamou. Double Diffusive Convection in an Inclined Slot Filled with Porous Media *Eur. J. Mech. B, Fluids*,14, (1995), 629-652.
- [32] A. Amahmid, M. Hasnaoui et P.Vasseur. Etude Analytique et Numérique de la Convection Naturelle dans une Couche Poreuse de Brinkman Doublement Diffusive. *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 42, (1999), 2991-3005.
- [33] M. Sen, P. Vasseur, et L. Robillard. Multiple Steady States for Unicellular Natural Convection in an inclined porous layer. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 30, (1987), 2097-2113.
- [34] F. Alavyoon. On natural Convection in Vertical Porous Enclosures due to prescribed fluxes of heat and mass at the vertical boundaries. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 36, (1993), 2479–2498.

- [35] R. Younsi, A. Harkati and D. Kalache. Heat and mass transfer in composite fluid-porous layer: Effect of permeability. *Arabian J. for Sc. and Eng.* 27(2c), (2001), 145-155.
- [36] R. Younsi, A. Harkati et D. Kalache, Numerical simulation of heat and mass transfer in composite fluid-porous layer with transverse magnetic field. *Comp. Ass. Mech. And Eng. Sc. J.* 10, 1, 2003.
- [37] R. Bennacer, A. Tobbal et H. Beji, Convection naturelle Thermosolutale dans une Cavité Poreuse Anisotrope: Formulation de Darcy-Brinkman. *Rev. Energ. Ren.* 5, (2002), 1-21.
- [38] A. Bahloul. Boundary layer and stability analysis of natural convection in a porous cavity. *International Journal of Thermal Sciences.* 45, 7(2006), 635 – 642.
- [39] N. Retielet, El-Hadi Bouguerra. Effet du Nombre de Rayleigh Thermique et du Nombre de Lewis sur la Convection dans une Demi Cylindrique Horizontale. 13èmes Journées Internationales de Thermique, JITH, Albi, France. 2007.
- [40] M.Sammouda Modélisation Théorique et Numérique du Phénomène de la Convection Naturelle et Thermosolutale dans les Milieux poreux à Porosité Variable. Thèse de doctorat, Université Mohammed V-Agdal, Faculté des sciences Rabat, 2012.
- [41] L.B. Benano Melly, J.P. Caltagirone, B. Faissat, F.Montel, Modeling Soret Coefficient Measurement Experiments in Porous Media Considering Thermal and Solutale Convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 44, (2001), 1285-1297.
- [42] S. Alam, M. M. Rahman, M.A. Samad. Dufour and Soret Effects on Unsteady MHD Free Convection and Mass Transfer Flow Past a Vertical Porous Plate in a Porous Medium. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control.* 11, No 3, (2006), 217–226.
- [43] Adrian Postelnieu, Influence of Chemical Reaction on Heat and Mass Transfer by Natural Convection From Vertical Surfaces in Porous Media Considering Soret and Dufour Effects, *Heat Mass Transfer.* 43, (2007), 595- 602.
- [44] Z. Alloui, A. Merabtine and P. Vasseur. Soret and thermosolutal effects on natural convection in a vertical cavity filled with a binary mixture. *The Canadian Journal of Chemical Engineering.* 88, (2010), 718-727.

- [45] M.C. Charrier-Mojtabi, B. Elhajjar, B. Ouattara, A. Mojtabi and P. Costeseque. Soret-driven convection and separation of binary mixtures in a porous horizontal slot submitted to a heat flux. *Comptes Rendus Mécanique*. 339, (2011), 303-309.
- [46] Ingham D. B., Pop I., *Transport Phenomena in Porous Media*. Pergamon, Elsevier, 1998.
- [47] Neal G. Degree of Anisotropy for Fluid Flow and Diffusion (Electrical Conduction) Through Anisotropic Porous media. *AIChE J.*, 23, (1977), 56-62.
- [48] Castinel G., Combarous M., Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série B*, 278, (1974), 701-704.
- [49] Epherre J. F., Critère d'application de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope. *Rev. Gén. Thermique*, 168, (1975), 949-950.
- [50] Tyvand P. A., Heat Dispersion Effet on Thermal Convection in Anisotropic Porous Media., *J. Hydrol.*, 34, (1977), 335-342.
- [51] Kvernold O., Tyvand P. A., Nonlinear thermal convection in anisotropic porous media., *J. Fluid Mech.*, 90, (1979), 609-624.
- [52] H. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon.*, Paris, Victor Dalmont, 1856.
- [53] H.C Brinkman. A calculation of viscous force exerted by a flowing fluid on dense swarm of particules. , *Applied Sciences Research*. A1, (1947), 27-34.
- [54] M. Marcoux, Contribution à l'étude de la diffusion thermo gravitationnelle en milieu poreux, Thèse de Doctorat, Toulouse, France, 1998.
- [55] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur*, Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- [56] J. K. Platten, J. C. Legros. *Convection in liquids*. Springer, Berlin - New York, 1984.
- [57] R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*. JohnWiley & Sons, USA, 2006.
- [58] L. Kalla. Convection naturelle au sein d'une couche horizontale poreuse soumis à des flux de chaleur uniforme, Thèse de Maîtrise Es sciences Appliquées, Canada, 1999.

- [59] A. Postelnicu. Influence of a magnetic field on heat and mass transfer by natural convection from vertical surfaces in porous media considering Soret and Dufour effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47, (2004), 1467–1472.
- [60] A. M. Hassan El-Arbawy. Soret and Duffour effects on Natural Convection Flow past a vertical Surface in a Porous Medium with Variable Surface Temperature. *Journal of mathematics and statics*. 5, 3(2009), 190-198.
- [61] D. Achemlal. Modélisation et analyse de la convection thermique dans un milieu poreux saturé de fluide newtonien et non-newtonien. Thèse de doctorat, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Faculté des Sciences et Technique, FES, 2014.
- [62] D.A. Nield, A. Bejan, *Convection in Porous Media*, 3rd Edition, 2006.
- [63] J. K. Platten and J. C. Legros, *Convection in liquids*, Springer. 1984.
- [64] M. Lücke, W. Barten, P. Büchel, C. Fütterer, and C. ung, Pattern Formation in Binary Fluid Convection and in Systems with Through flow, in *Evolution of Spontaneous Structures in Dissipative Continuous Systems*, Springer Berlin Heidelberg, (1998), 127–196.
- [65] Postelnicu A. Influence of a magnetic field on heat and mass transfer by natural convection from vertical surfaces in porous media considering Soret and Dufour effects, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol 47, (2004), pp. 1467–1472.
- [66] C. E. Schwartz, J. M. Smith, Flow distribution in packed beds, *Indust Engng Chem*. 45, (1953), 1209-1218.
- [67] J. W. Tierney, L. H. S. Roblee, R. M. Barid, Radial porosity variation in packed beds, *A.I.Ch.E Journal*. 4, (1958), 460-464.
- [68] R. F. Benenati, C. B. Brosilow, Void fraction distribution in beds of spheres, *A.I.Ch.E Journal*. 8, (1962), 359-361.
- [69] D. Ress, I. Pop, Vertical free convection in a porous medium with variable permeability effects. *Int J Heat Mass Transfer*, 43, (2000), 2565-2571.

- [70] A. Postelnicu, T. Grosan and I. Pop, Free convection boundary layer over a vertical permeable flat plate in a porous medium with internal heat generation, *Int. comm. Heat Mass Transfer*. 27, 5(2000), 729-738.
- [71] R. Cortell, Internal heat generation and radiation effects on a certain free convection flow, *Int. Journal of Nonlinear Science*, 9, 4(2010), 468-469.

## PUBLICATIONS

- [1] **M. El Haroui, M. Sriti, D. Achemlal and E. Flihi.** *Prediction of Thermosolutal Convection in a Porous Medium with Soret-Dufour and Chemical Reaction Effects.* *Computational Thermal Sciences* 9(5): pp. 383–393, 2017
- [2] **M. El Haroui, M.Sriti and D.Achemlal.** *Double diffusive free convection over a heated vertical plate in a saturated porous medium with Soret effect and variable heat source.* *AMSE JOURNALS MODELLING B*, Vol. 84, N° 1, pp. 23-37, 2015.
- [3] **D. Achemlal, M. Sriti and M. El Haroui.** *Numerical Computation of Mixed Convection Past a Heated Vertical Plate within a Saturated Porous Medium with Variable Permeability.* *AMSE JOURNALS –2014-Series: MODELLING B*, Vol. 83, N° 1, pp 50-66, 2014.
- [4] **D. Achemlal, M. Sriti and M. El Haroui.** *Numerical Simulation of Free Convection Flow in a Saturated Porous Medium with Finite Differences Method.* *International Review of Mechanical Engineering (I.RE.M.E)*, Vol. 8, N. 4, PP. 680-689, 2014.
- [5] **D. Achemlal, M. Sriti and M. El Haroui.** *Viscosity and Fluid Suction/Injection Effects on Free Convection Flow From a Vertical Plate in a Porous Medium Saturated with a Pseudoplastic Fluid.* *Computational Thermal Sciences*, 6 (3): 273–283, 2014.
- [6] **D. Achemlal, M. Sriti and M. El Haroui.** *Free convection modeling over a vertical flat plate embedded in saturated porous medium with a variable heat source and radiation flux.* *World Journal of Modelling and Simulation*. Vol. 9, No. 3, pp. 163-172, 2013.

## COMMUNICATIONS

[1] **M. El Haroui, M.Sriti and D. Achemlal.** *Modélisation numérique de la convection naturelle induite par une double diffusion dans un milieu poreux saturé autour d'une plaque verticale chauffée. Journée sur la modélisation et Analyse en mécanique et Energétique (Jmame'2012). FP de Taza (Mai 2012).*

[2] **M. El Haroui, M.Sriti and D. Achemlal.** *Modélisation de la convection naturelle bidiffusive autour d'une plaque verticale chauffée et immergée dans un milieu poreux saturé avec prise en compte de l'effet Soret. 1<sup>er</sup> Workshop en Imagerie, Systèmes et Application (Woisa'2013). FP de Taza (Mai 2013).*

[3] **M. El Haroui, M.Sriti and D.Achemlal.** *Modélisation de la convection naturelle double diffusible dans un milieu poreux saturé en présence de l'effet Soret et d'une source de chaleur interne. Journée sur la modélisation et Analyse en mécanique et Energétique (Jmame'2014). FST de Tanger, Avril 2014.*

[4] **D. Achemlal, M.Sriti and M. El Haroui.** *Viscosity and Fluid Suction/Injection Effects on Free Convection Flow From a Vertical Plate in a Porous Medium Saturated with a Pseudoplastic Fluid. Journée sur la modélisation et Analyse en mécanique et Energétique (Jmame'2014). FST de Tanger, Avril 2014.*

[5] **M. El Haroui, M.Sriti and D.Achemlal.** *Modélisation numérique de la convection naturelle induite par une double diffusion dans un milieu poreux saturé autour d'une plaque verticale chauffée. Journée des doctorants du laboratoire d'informatique, Mathématique et Optoélectronique, Février 2014.*

[6] **M. El Haroui, M.Sriti, D.Achemlal and E. Flilih.** *Double diffusive free convection from a vertical plate in a porous medium with Soret-Dufour, chemical reaction and variable heat source effects. 2<sup>ème</sup> siminaire en Sciences et Techniques de l'Ingénieur (SSTI). FP de Taza, Mai 2015.*

[7] **M. El Haroui, M.Sriti and D.Achemlal.** *Thermosolutal Convection From Vertical plate in Saturated Porous Medium with Variable Wall Temperature, Chemical Reaction and Soret-Dufour Effects. 2<sup>ème</sup> Workshop en Imagerie, Systèmes et Application (Woisa'2015). FP de Taza, Mai 2013.*

[8] **M. El Haroui, M.Sriti and D.Achemlal.** *Thermosolutal Convection in Porous Medium over a Vertical Plate with Variable Wall Temperature, Chemical Reaction and Soret-Dufour Effects. Première Edition du Forum Des Doctorants du pôle de recherche : Energie et Développement durable, PRE2D. EST de Fes, Décembre 2015.*

[9] **M. El Haroui, M.Sriti and D.Achemlal.** *Thermosolutal Convection and Chemical Reaction in Porous Medium From a Vertical Plate with Variable Temperature. 3<sup>ème</sup> colloque international sur la modélisation et analyse en mécanique énergétique (CIMAME'16). FP de Taza, Avril 2016.*

